

# *Aplicações da Expansão de Edgeworth à Precificação de Derivativos Financeiros*

Ruy Gabriel Balieiro Filho - FEA/USP  
e-mail: [ruybalieiro@uol.com.br](mailto:ruybalieiro@uol.com.br)

Rogério Rosenfeld - Instituto de Física Teórica/Unesp  
e-mail: [rosenfel@ift.unesp.br](mailto:rosenfel@ift.unesp.br)

O Objetivo deste trabalho é usar uma ferramenta matemática conhecida como expansão de Edgeworth em conjunto com a moderna teoria de análise de derivativos financeiros que utilizam o método de precificação neutra ao risco. Tal expansão permite obter uma função densidade de probabilidade com assimetria e curtose arbitrárias a partir de uma densidade normal. Desta forma, podemos usar esta nova distribuição como a *state price density* do ativo-objeto procurando corrigir o sorriso da volatilidade através da definição de funções de probabilidade com assimetrias positivas ou negativas e curtose maior de que três. Além disso esperamos também chegar a uma nova maneira de realizar o delta *hedge* de uma carteira de replicação de modo mais eficiente do que a de Black-Scholes.

# ÍNDICE ANALÍTICO

<b>1) INTRODUÇÃO</b>	PG 8
<b>2) A ANÁLISE DE BLACK-SCHOLES</b>	PG 9
2.1 - A PRECIFICAÇÃO NEUTRA AO RISCO	PG 14
2.2 - O VIÉS DO MODELO	PG 16
<b>3) A EXPANSÃO DE EDGEWORTH</b>	PG 21
<b>4) A EXPANSÃO DE EDGEWORTH E A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES</b>	PG 28
4.1 - A EXPANSÃO DE EDGEWORTH E O MODELO DE PRECIFICAÇÃO NEUTRA AO RISCO	PG 28
4.2 - A ÁRVORE BINOMIAL DE EDGEWORTH	PG 34
<b>5) RESULTADOS EMPÍRICOS</b>	PG 36
5.1 – O <i>SMILE</i> DA VOLATILIDADE	PG 38
5.1.1 – <i>SMILE</i> PARA OPÇÕES DE DÓLAR	PG 40
5.1.2 – <i>SMILE</i> PARA OPÇÕES DE S&P	PG 42
5.2 – TESTE DE ERRO DE REBALANCEAMENTO	PG 44
<b>6) CONCLUSÃO</b>	PG 50
<b>7) APÊNDICES</b>	PG 52
<b>8) BIBLIOGRAFIA</b>	PG 54

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Erro de rebalanceamento. <i>Smile</i> obtido em 22-maio	pg 46
Tabela 2 - Erro de rebalanceamento. <i>Smile</i> obtido em 23-maio	pg 47
Tabela 3 - Erro de rebalanceamento. <i>Smile</i> obtido em 31-maio	pg 47
Tabela 4 - Erro de rebalanceamento. <i>Smile</i> obtido em 05-junho	pg 47
Tabela 5 - Erro de rebalanceamento para carteira de opções. <i>Smile</i> obtido em 22-maio	pg 48
Tabela 6 - Erro de rebalanceamento para carteira de opções. <i>Smile</i> obtido em 23-maio	pg 48
Tabela 7 - Erro de rebalanceamento para carteira de opções. <i>Smile</i> obtido em 31-maio	pg 49
Tabela 8 - Erro de rebalanceamento para carteira de opções. <i>Smile</i> obtido em 05-junho	pg 49

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Comparação entre densidades de probabilidade	pg 17
Figura 2 - Comparação de curvas de <i>Smile</i>	pg 19
Figura 3 - Valores de curtose e assimetria no uso de $g(x)$	pg 27

Figura 4 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de dólar com vencimento em 56 dias pg 40

Figura 5 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de dólar com vencimento em 117 dias pg 41

Figura 6 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de dólar com vencimento em 299 dias pg 41

Figura 7 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de índice S&P com vencimento em 42 dias pg 42

Figura 8 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de índice S&P com vencimento em 168 dias pg 43

Figura 9 - Comparação entre *smile* de Edgeworth e Black para opções de índice S&P com vencimento em 259 dias pg 43

Figura 10 - Preço de ajuste do dólar futuro agosto/02 (série histórica). Pg 45

# 1.INTRODUÇÃO

O mercado financeiro global vem passando por um processo de integração nos últimos anos que tem aumentado sua importância nas decisões econômicas tomadas por países e empresas. Dentro deste processo de globalização financeira e juntamente com a maior pressão de alguns países desenvolvidos para que as nações abram suas economias ao comércio exterior, as políticas macroeconômicas tem cada vez mais que levar em conta os fluxos e expectativas deste mercado financeiro global. No âmbito microeconômico, a grande flexibilidade e sofisticada engenharia dos mercados de capitais tem provido instrumentos financeiros de financiamento e de *hedge*<sup>1</sup> que proporcionam uma administração financeira mais eficiente para as firmas.

Neste contexto, o mercado de derivativos financeiros é provavelmente a parte que mais cresceu em termos de sofisticação e negócios realizados deste mercado de capitais global. Apesar de existirem deste a antiguidade<sup>2</sup>, os mercados de futuros e opções sobre ativos financeiros apresentaram um grande crescimento a partir de meados da década de oitenta. Cada vez mais *hedgers*, especuladores e arbitradores usam estes mercados para assumirem posições, diminuir o risco de suas carteiras ou atacar uma política econômica que consideram equivocada. Com este rápido aumento de negócios realizados, aumentou também

---

<sup>1</sup> O termo *hedge* é usado na literatura financeira para designar proteção.

<sup>2</sup> Há indícios de que na China antiga se negociava contratos futuros de arroz.

a demanda por modelos que precificassem<sup>3</sup> corretamente estes derivativos, o que de forma alguma pode ser caracterizado como um processo trivial. O modelo de precificação de opções desenvolvido por F. Black e M. Scholes é o mais difundido e usado pelos agente econômicos, mesmo sabendo que este apresenta algumas deficiências<sup>4</sup>.

Neste contexto, estamos propondo um modelo alternativo para a precificação de opções baseado na expansão de Edgeworth com o principal intuito de corrigir estas deficiências.

## 2. A ANÁLISE DE BLACK-SCHOLES

O modelo desenvolvido por Fischer Black e Myron Scholes no início dos anos 70 representou um grande avanço na moderna teoria de precificação de derivativos financeiros. A sua facilidade de implementação aliada aos poderosos resultados tanto na determinação de preços de opções quanto de seus parâmetros de *hedge*<sup>5</sup>, fizeram do modelo de Black-Scholes um dos mais bem sucedidos da teoria das finanças. Além disso, possibilitou que as instituições financeiras usassem o mercado de opções com muito mais frequência e segurança, o que

---

<sup>3</sup> Dada a falta de um termo mais adequado, usaremos a palavra precificação quando nos referirmos ao cálculo do preço de um ativo ou derivativo qualquer.

<sup>4</sup> Estudos empíricos mostram que o preço de opções previsto no modelo de Black-Scholes é sistematicamente diferente do preço de mercado destas opções, ou seja, o modelo apresenta um viés.

<sup>5</sup> Conhecidos como “gregas”.

acabou sendo determinante no sucesso e crescimento que este mercado experimentou desde então.

Em termos gerais, uma opção pode ser definida como um contrato que garante ao detentor o direito de comprar ou vender determinado ativo financeiro, a um preço  $K^6$  em uma data futura  $T$ , contra o lançador da opção.

No caso de uma opção de compra, temos que seu valor no vencimento é dado pela seguinte expressão:

$C = \text{Max} (S_T - K, 0)$ , onde  $K$  é o preço de exercício e  $S_t$  o valor do ativo-objeto no vencimento da opção ( $t=T$ )<sup>7</sup>.

O ponto de partida do modelo de Black-Scholes é a hipótese de que o ativo financeiro<sup>8</sup> que dá origem ao derivativo segue um processo browniano geométrico, ou seja, a evolução do ativo no tempo obedece a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad \text{onde,} \quad (1)$$

$S$  é o preço da ação;

$\mu dt$  representa a tendência determinística seguida pela ação no tempo<sup>9</sup> e;

$\sigma dz$  representa a parte estocástica do movimento da ação, sendo  $dz$  um processo de Wiener<sup>10</sup>.

---

<sup>6</sup> O preço  $K$  é definido com preço de exercício (*strike price*) da opção.

<sup>7</sup> Quando usarmos o termo *payoff* no decorrer do trabalho estaremos nos referindo a esta expressão.

<sup>8</sup> No trabalho original de Black-Scholes este ativo é uma ação que não paga dividendos.

<sup>9</sup>  $\mu$  seria a taxa de retorno esperada para o ativo  $S$  com relação a uma medida de probabilidade.

<sup>10</sup>  $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ , onde  $\varepsilon$  é a realização de uma variável aleatória que obedece uma distribuição normal com média 0 e variância 1.

Resolvendo a equação (1), temos a fórmula que descreve como o preço da ação (S) se comporta com relação ao tempo:

$$S_t = S_0 \text{Exp} \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma Z_t \right] \text{ onde,}$$

$Z_t$  é a realização de um processo de Wiener.

Esta nova equação impõe que o retorno da ação é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, enquanto que o preço segue uma distribuição log-normal. Como veremos adiante, esta hipótese está associada ao viés que o modelo apresenta quando testado no mercado, uma vez que em geral, ações e outros ativos financeiros não seguem uma distribuição log-normal.

Os autores continuam a análise procurando criar uma carteira de investimento ( $\Pi$ ) que tivesse uma dependência temporal determinística. Para tanto, escolhem uma composta de  $\Delta$  ações compradas e um derivativo  $V(S,t)$  vendido.

$$\pi = V(S,t) - S\Delta \tag{2}$$

A variação desta carteira no tempo é dada pela seguinte equação:

$$d\pi = dV - dS\Delta \quad \text{onde,} \tag{3}$$

$dS$  é dado pela equação (1) e;

$dV$  é dado pela seguinte expansão:



$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (4)$$

Onde  $(dS)^2 = S^2 \sigma^2 dt + (\text{termos de ordem superior em } dt)$

Logo, temos que:

$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt \quad (5)$$

Vale colocarmos duas notas técnicas a respeito da equação (5):

a) A expansão em (5) deve seguir até termos de segunda ordem  $(dS)^2$ , pois sabemos pelo lema de Itô que  $(dz)^2$  é da ordem de  $dt$  e portanto precisa entrar na equação (5).

b) Como estamos tomando  $dt$  como uma variação infinitesimal, podemos excluir todos os termos proporcionais a potências de  $dt$  maiores do que um, por isso substituímos  $(dS)^2 = S^2 \sigma^2 dt$  na equação (5).

Substituindo (5) em (3) e reagrupando termos proporcionais a  $dt$  e  $dS$  temos:

$$d\pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \quad (6)$$

Nesta carteira, o único termo estocástico é  $dS$ , que como vimos é dado pela equação

(1). No entanto, caso escolhamos  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  temos que a variação da carteira no tempo se torna determinística, uma vez que conhecemos todos os outros parâmetros e estes não são aleatórios no tempo.

Neste caso, pela hipótese de estarmos trabalhando em mercados arbitrados, temos que a valorização de  $\Pi$  no tempo deve ser a mesma da taxa de juros livre de risco ( $r$ ), ou seja:

$$\begin{aligned}\pi_t &= \pi_0 \text{Exp}[rt] && \text{e,} \\ d\pi &= r \pi dt\end{aligned}\tag{7}$$

Igualando a equação (6) com (7) e escolhendo  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  temos a equação diferencial de

Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial S} rS - rV = 0\tag{8}$$

Esta equação diferencial deve ser obedecida pelas soluções de precificação de derivativos financeiros. Dadas algumas condições de contorno, a solução desta equação resulta nas fórmulas de precificação de opções europeias amplamente usadas pelo mercado.

## 2.1 A PRECIFICAÇÃO NEUTRA AO RISCO

Um resultado do modelo de Black-Scholes que usaremos neste trabalho diz respeito à teoria de precificação de derivativos que envolve a hipótese de neutralidade ao risco dos agentes.

Na equação diferencial de Black-Scholes (equação 8) aparecem as seguintes variáveis: preço do ativo-objeto, volatilidade do retorno do ativo-objeto, tempo e a taxa de juros livre de risco. Nenhuma destas variáveis é afetada pela preferência a risco dos investidores, ou seja, a equação diferencial é independente de preferências a risco<sup>11</sup>.

Neste caso, podemos assumir a hipótese de que todos os investidores são neutros ao risco o que simplifica consideravelmente qualquer modelo de análise e precificação de derivativos, uma vez que podemos assumir que os ativos se valorizam com a taxa de juros livre de risco e que o valor presente de qualquer fluxo de caixa é o seu valor esperado, nesta medida de probabilidade neutra ao risco, descontado a esta mesma taxa de juros livre de risco.

Nos modelos de opções que estamos trabalhando até agora podemos usar esta nova ferramenta da seguinte forma: assumimos que o valor esperado do ativo-objeto no vencimento da opção é igual a seu valor atual corrigido pela taxa de juros livre de risco; calculamos o *payoff* esperado da opção no vencimento (uma vez que temos o valor esperado do ativo-objeto

---

<sup>11</sup> Caso  $\mu$  entrasse na equação, esta seria afetada pela preferência a risco dos investidores, uma vez que tal variável está relacionada ao retorno esperado do ativo-objeto. Neste caso, quanto mais averso ao risco for o investidor maior o retorno este exigirá para demandar o ativo.

nesta data); descontamos este *payoff* a valor presente usando a taxa livre de risco. Desta maneira temos o preço da opção na data de hoje.

O *payoff* esperado neste mundo neutro ao risco é calculado com relação a uma densidade de probabilidade específica chamada de densidade neutra ao risco ou *state price density*. Esta por sua vez, se aplica tanto ao valor esperado da opção quanto ao valor esperado do ativo-objeto na data de vencimento da opção.

Seguindo esta metodologia, o valor de uma opção (V) e do ativo (S) seria dado pelas seguintes fórmulas:

$$V_0 = \text{Exp}[-r T] E_q[V_T(S_T)]$$

$$E_q[S_T] = \text{Exp}[r T] S_0 \quad \text{onde,}$$

T é a data de vencimento da opção, E[X] é o valor esperado de X e q é a medida de probabilidade a ser usada neste mundo neutro ao risco<sup>12</sup>.

Este é um engenhoso método para obtermos algumas soluções para a equação diferencial de Black-Scholes e será fundamental quando estivermos usando a expansão de Edgeworth para precificar opções. Vale lembrar que as soluções obtidas valem para qualquer preferência a risco e não apenas para o mundo neutro ao risco<sup>13</sup>.

---

<sup>12</sup> Como  $S_t = S_0 \text{Exp} \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma Z_t \right]$  que fazemos é achar  $\mu$  tal que a medida de probabilidade q seja neutra ao risco.

<sup>13</sup> Quando passamos para um mundo averso ao risco, por exemplo, teríamos que alterar duas coisas: o retorno esperado do ativo-objeto e a taxa de desconto para trazer o *payoff* a valor presente. Estas duas mudanças, no entanto, acabam se anulando.

## 2.2 O VIÉS DO MODELO

A análise de Black-Scholes tem por detrás inúmeras hipóteses acerca do funcionamento do mercado. Entre elas estão: inexistência de custos de transação, as operações financeiras podem ser realizadas continuamente no tempo, a taxa de juros livre de risco ( $r$ ) e a volatilidade do ativo-objeto ( $\sigma$ ) são consideradas constantes, não há problemas de liquidez e a distribuição de probabilidade dos retornos do ativo-objeto seria uma distribuição normal. Como dito anteriormente, esta última hipótese está associada ao viés do modelo e a sua correção será o principal objetivo deste trabalho.

O viés pode ser explicado da seguinte forma: vamos supor que a *state price density* do retorno do ativo-objeto é simétrica, mas possui curtose maior do que três<sup>14</sup>. Neste caso, a fórmula de Black-Scholes estaria subestimando a probabilidade de ocorrer observações longe da média (em desvios-padrões) e, conseqüentemente, o preço das opções *in* e *out-of-the-money*. Por outro lado, o modelo sobestimaria o preço das opções *at-the-money*<sup>15</sup>.

---

<sup>14</sup> A distribuição normal é simétrica e seu parâmetro de curtose é igual a três. Segundo estudos empíricos, a distribuição de probabilidade dos retornos de uma ação é assimétrica à direita e possui coeficiente de curtose maior do que três, ou seja, possui caudas mais largas do que a distribuição normal.

<sup>15</sup> Opções *at-the-money* são aquelas em que o *strike price* é o mesmo do preço de mercado do ativo-objeto. Opções *in-the-money* e *out-of-the money* são aquelas em que o *strike price* é maior ou menor que o preço atual do ativo-objeto, dependendo se são opções de compra ou de venda.

Para exemplificar esta situação, comparamos no gráfico abaixo duas funções densidades de probabilidade:  $z(x)$  uma densidade normal padronizada<sup>16</sup> e  $g(x)$  uma densidade padronizada, simétrica, mas com medida de curtose igual a 5,4<sup>17</sup>. Podemos ver claramente as caudas mais largas da função representada por  $g(x)$  em relação a  $z(x)$ <sup>18</sup>.

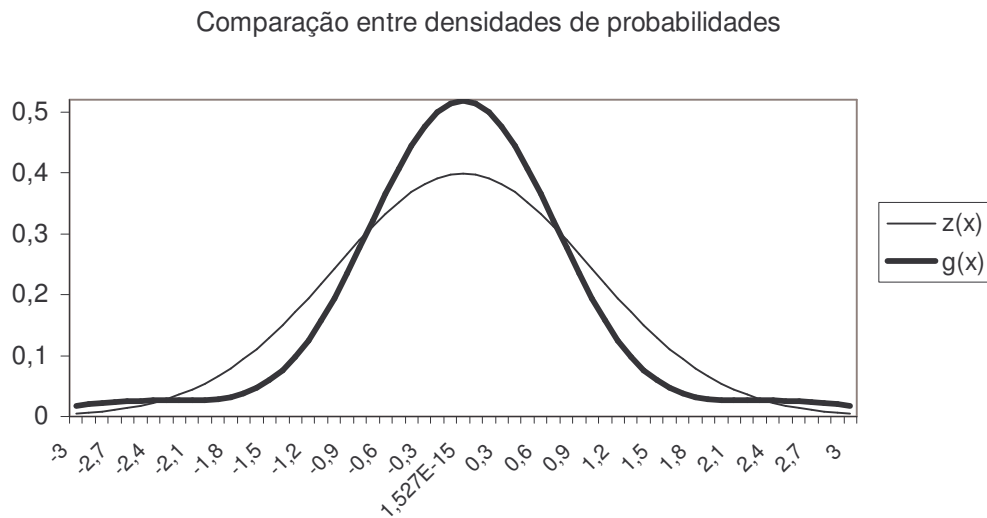


Figura 1 - Comparação entre densidades de probabilidade

<sup>16</sup> Função densidade de probabilidade normal com média 0 e variância 1.

<sup>17</sup> Esta densidade de probabilidade foi obtida a partir da expansão de Edgeworth, que será objeto de estudo dos próximos capítulos.

<sup>18</sup> Ou seja,  $g(x)$  atribui maior probabilidade a eventos extremos do que  $z(x)$ .

Uma forma equivalente de analisarmos o viés do modelo de Black-Scholes está na análise da volatilidade implícita<sup>19</sup> contida no preço das opções observadas no mercado. Caso o retorno do ativo-objeto obedecesse uma distribuição neutra ao risco normal, a volatilidade implícita das opções *out-of-the-money* até as opções *in-the-money* seria constante<sup>20</sup>. No entanto, o que se observa no mercado é que esta curva não é uma reta, mas que varia entre as opções que tem um *strike price* abaixo do preço atual do ativo-objeto e aquelas que possuem *strike price* acima do preço atual. Novamente, a razão para isto é a diferença entre a distribuição de probabilidade assumida pelo modelo e aquela observada de fato no mercado.

Como exemplo, podemos supor que a verdadeira *state price density* do ativo-objeto seja dada por  $g(x)$ . Neste caso, a curva da volatilidade implícita calculada através do modelo de Black-Scholes se aproximaria de uma parábola (por isso o nome de *smile* da volatilidade), sendo que a volatilidade das opções *in-the-money* e *out-of-the-money* seriam maiores e a volatilidade das opções *at-the-money* menor do que aquela volatilidade constante prevista pelo modelo. O gráfico a seguir reproduz esta situação<sup>21</sup> e foi calculado da seguinte forma: supomos  $g(x)$  a distribuição neutra a risco do ativo-objeto, calculamos o valor das opções com diferentes preços de exercício através do modelo de Edgeworth e depois achamos a volatilidade implícita que iguala o valor da opção calculado por Black-Scholes ao valor

---

<sup>19</sup> O cálculo da volatilidade implícita é feito da seguinte forma: observa-se o preço de mercado de determinada opção e coloca-se este preço no modelo de Black-Scholes. Depois, resolvemos o modelo para descobrir qual a volatilidade usada para se chegar neste preço.

<sup>20</sup> Obviamente para opções sobre o mesmo ativo-objeto e com mesma data de vencimento.

<sup>21</sup> Este gráfico de volatilidade implícita foi calculado com os seguintes parâmetros:  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 20\%$  a.a.,  $r = 12\%$  a.a. e  $t = 1$  ano.

calculado por Edgeworth. Repetimos o processo assumindo  $z(x)$  como distribuição neutra a risco do ativo-objeto.

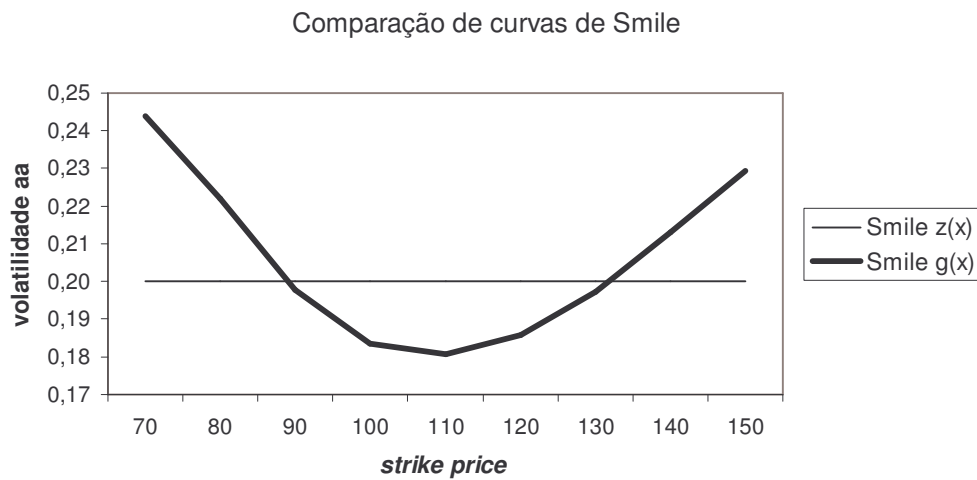


Figura 2 - Comparação de curvas de *Smile*

A intuição deste resultado é que como a probabilidade do ativo-objeto apresentar movimentos extremos é maior do que o modelo prevê, as opções com *strike price* distante do preço atual do ativo-objeto devem ser mais caras (maior volatilidade) do que a calculado pelo modelo.



Na verdade, como muitos autores e estudiosos do assunto já colocaram, a fórmula de Black-Scholes acabou sendo usada pelo mercado como uma forma de transformar preços de opções em volatilidades implícitas e vice-versa, e não como um modelo de precificação de opções propriamente dito.

Apenas como motivação, lembraremos que este trabalho tem dois objetivos básicos: usar a expansão de Edgeworth para obter uma distribuição de probabilidade mais adequada à distribuição do ativo-objeto, corrigindo assim o problema do viés e do *smile* da volatilidade implícita causado pelo modelo de Black-Scholes, além de testar a eficiência deste novo modelo através de uma análise empírica comparativa entre a medida de delta gerada e o delta tradicional de Black-Scholes.

### 3. A EXPANSÃO DE EDGEWORTH

Nesta parte do trabalho tentaremos mostrar com maior detalhes técnicos como é possível chegar à fórmula final da expansão de Edgeworth que usaremos na precificação de opções<sup>22</sup>, ou seja, provaremos que:

$$g(x) = \left(1 + \frac{\xi}{6}(x^3 - 3x) + \frac{k-3}{24}(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{\xi^2}{72}(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15)\right) z(x) \quad (9)$$

Onde:  $z(x)$  - Função densidade de probabilidade normal padronizada;

$g(x)$  - Função densidade de probabilidade com curtose =  $k$  e assimetria =  $\xi$ <sup>23</sup>.

Supondo que  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$  e variância finita  $\sigma^2$  temos que:

$$X = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n X_i$$

é um estimador não viesado de  $\mu$ .

---

<sup>22</sup> Para uma ampla revisão sobre a expansão de Edgeworth ver Hall, P. (1992) "The Bootstrap and Edgeworth Expansions" - Springer-Verlag e Johnson, N. (1994) "Continuous Univariate Distributions" - 2ª ed Wiley & Sons.

Sabemos ainda, usando o Teorema Central do Limite, que:

$$S_n = \frac{\sqrt{n}(X - \mu)}{\sigma} \rightarrow N(0,1) \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

No entanto, estaremos interessados em saber o que acontece com a distribuição de  $S_n$  antes do limite assintótico, ou seja, antes de  $S_n$  se transformar em uma normal.

Faremos esta análise da aproximação de uma normal através da função característica, que é definida por:

$$\chi_n(t) = E[\text{Exp}[itS_n]], \text{ onde } i = \sqrt{-1}$$

Sabemos que quando  $n$  tende a infinito, a função característica da variável  $S_n$  converge para a função característica da distribuição normal:  $\text{Exp}\left[\frac{-t^2}{2}\right]$ .

Um outro resultado intermediário que usaremos é o seguinte:

---

<sup>23</sup> Designaremos  $g(x)$  como distribuição de Edgeworth.

$\chi_n(t) = \{\chi(\frac{t}{\sqrt{n}})\}^n$ <sup>24</sup>, onde  $\chi$  é a função característica da variável aleatória

$$Y = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

Para esta variável aleatória Y com função característica  $\chi$ , temos que o j-ésimo cumulante,  $\kappa_j$ , de Y é definido como o coeficiente de  $\frac{1}{j!}(it)^j$  na expansão em uma série de potências de Log  $\chi(t)$ :

$$\chi(t) = \text{Exp}[\kappa_1 it + \frac{1}{2} \kappa_2 (it)^2 + \dots + \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j + \dots]$$

Como a variável Y é centrada e padronizada, temos que  $E[Y] = \kappa_1 = 0$  e  $\text{Var}[Y] = \kappa_2 = 1$ . Neste caso,

$$\chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \text{Exp}\left[-\frac{1}{2n} t^2 + \frac{1}{n^{1.5}} \frac{\kappa_3}{3!} (it)^3 + \dots + \frac{1}{n^{j/2}} \frac{\kappa_j}{j!} (it)^j + \dots\right]$$

Como  $\chi_n(t) = \{\chi(\frac{t}{\sqrt{n}})\}^n$ , chegamos ao seguinte resultado:

---

<sup>24</sup> Este resultado será provado no apêndice.

$$\chi_n(t) = \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\kappa_3}{3!} (it)^3 + \dots + \frac{1}{n^{\frac{j-1}{2}}} \frac{\kappa_j}{j!} (it)^j + \dots\right]$$

Expandingo esta função em Taylor e fazendo algumas transformações, temos que:

$$\chi_n(t) = \text{Exp}\left[-\frac{t^2}{2}\right] \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} r_1(it) + \frac{1}{n} r_2(it) + \dots + \frac{1}{n^{\frac{j}{2}}} r_j(it) + \dots\right]$$

onde  $r_j$  é um polinômio dependente dos cumulantes. Para  $r_1$  e  $r_2$  temos que:

$$r_1(it) = \frac{1}{6} \kappa_3 (it)^3$$

$$r_2(it) = \frac{1}{24} \kappa_4 (it)^4 + \frac{1}{72} \kappa_3^2 (it)^6$$

Logo,

$$\chi_n(t) = \text{Exp}\left[-\frac{t^2}{2}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{n}} r_1(it) \text{Exp}\left[-\frac{t^2}{2}\right]\right] + \left[\frac{1}{n} r_2(it) \text{Exp}\left[-\frac{t^2}{2}\right]\right] + \dots$$

Usando a transformada de Fourier inversa que nos dá a função densidade de probabilidade a partir da função característica, temos o seguinte resultado:

$$g_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(t) \text{Exp}[-itx] dt, \text{ onde } g(x) \text{ é a densidade de probabilidade.}$$

Resolvendo esta integral desprezando os outros termos chegamos a densidade de probabilidade  $g(x)$  dependente do terceiro e quarto cumulante:

$$g(x) = \left(1 + \frac{\kappa_3}{6}(x^3 - 3x) + \frac{1}{24}\kappa_4(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15)\right) z(x)$$

Mais ainda, sabemos que existe a seguinte relação entre cumulantes e momentos:

$$\kappa_3 = \mu_3 \quad \text{e} \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3(\mu_2)^2, \text{ onde } \mu_r \text{ é o } r\text{-ésimo momento central.}$$

Definimos agora  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  como medidas de assimetria e curtose respectivamente<sup>25</sup>,

onde  $\alpha_r$  é dado por:

$$\alpha_r(x) = \mu_r(\mu_2)^{\frac{-r}{2}}$$

Como  $z(x)$  é uma densidade normal padronizada, sabemos que  $\mu_2 = \sigma^2 = 1$ .

Logo,  $\kappa_3 = \mu_3 = \alpha_3$  e  $\kappa_4 = \mu_4 - 3 = \alpha_4 - 3$ .

Substituindo os cumulantes pelas medidas de assimetria e curtose chegamos a fórmula final igual à equação (9).

Com esta nova fórmula de  $g(x)$  temos uma função densidade de probabilidade que pode ter sua assimetria e curtose calibradas para aproximar a distribuição neutra ao risco do retorno de um ativo financeiro<sup>26</sup>, ou seja, como mostramos anteriormente, podemos aumentar a curtose e modificar a assimetria da distribuição para usá-la na precificação da opção sobre um ativo-objeto qualquer. Caso sejamos bem sucedidos esperamos corrigir o problema do viés e do sorriso da volatilidade implícita observada no mercado.

Na expansão de Edgeworth, no entanto, não podemos usar qualquer valor para os parâmetros de assimetria e curtose. Estudos posteriores mostram que existe um intervalo destes parâmetros para que a expansão produza uma função sempre positiva (necessária para que possa ser caracterizada como uma função densidade de probabilidade) e unimodal.

No gráfico abaixo, reproduzimos o estudo de Barton e Dennis<sup>27</sup> que mostra os valores de assimetria e curtose que podem ser usados na expansão de Edgeworth. Como podemos ver, existe uma área que nos permite uma razoável flexibilidade para ajustar a expansão à distribuição do ativo financeiro.

---

<sup>25</sup>  $\alpha_3 = \xi$  e  $\alpha_4 = \kappa$ .

<sup>26</sup> Vale lembrar que caso a assimetria seja igual a zero e curtose igual a três, a expansão nos dá a função densidade de probabilidade normal.

<sup>27</sup> Barton, D.E. e Dennis, K.E.R. (1952). “The conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal”, *Biometrika*, 39, 425-427.

Valores de que permitem o uso de  $g(x)$  como uma densidade de probabilidade

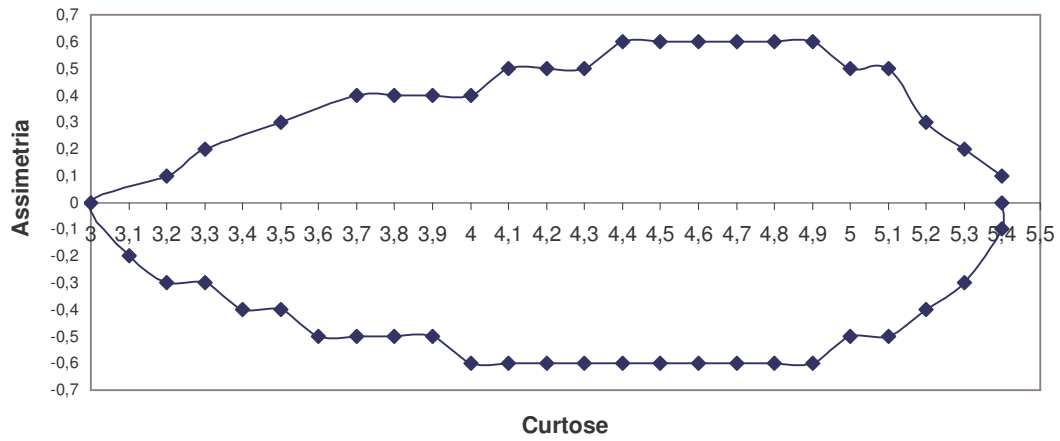


Figura 3 - Valores de curtose e assimetria no uso de  $g(x)$



## **4. A EXPANSÃO DE EDGEWORTH E A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES**

Tendo definido a expansão de Edgeworth, o próximo passo é aliar esta nova ferramenta aos modelos de precificação de opções. Nesta etapa dividiremos o trabalho em dois tópicos: o primeiro descreverá como podemos chegar a uma fórmula fechada para o preço de uma opção de compra europeia sobre uma ação sem dividendos aliando a expansão de Edgeworth com o método de precificação neutra ao risco. No segundo tópico descreveremos uma solução numérica que pode ser usada na precificação de algumas opções exóticas: a árvore binomial de Edgeworth.

### **4.1 A EXPANSÃO DE EDGEWORTH E O MODELO DE PRECIFICAÇÃO NEUTRA AO RISCO**

A primeira mudança a ser feita no modelo proposto por Black-Scholes para que possamos usar a expansão de Edgeworth na precificação de opções europeias e tentar corrigir o problema do viés, diz respeito à distribuição de probabilidade assumida para o ativo na data de vencimento da opção. Como vimos anteriormente, Black-Scholes propuseram uma

distribuição normal. Neste caso, iremos alterar esta hipótese, propondo que o ativo siga uma distribuição de Edgeworth.

O próximo passo é descobrir o valor de  $\mu$  tal que a medida de probabilidade seja neutra ao risco. Desta forma poderemos achar o valor esperado da ação na data de vencimento da opção e depois calcular o valor hoje desta opção descontando a valor presente o seu *payoff*.

Como estamos assumindo um mundo neutro ao risco, sabemos que a ação deve se valorizar no tempo de acordo com a taxa de juros livre de risco. Logo temos:

$$E_q(S_t) = S_0 \text{Exp}[r t] \text{ onde,}$$

$E_q(S_t)$  é o valor esperado do preço da ação no tempo  $t$ <sup>28</sup> na medida neutra ao risco ( $q$ ),  $r$  é a taxa de juros livre de risco e  $S_0$  é o valor da ação hoje.

Como estamos medindo o valor esperado de  $S_t$ , temos que:

$$E_q(S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) S_0 \text{Exp}[\mu t + \sigma \sqrt{t} x] dx = \text{Exp}[r t] S_0$$

onde  $g(x)$  é a distribuição de Edgeworth dada pela equação 9.

Tirando  $S_0 \text{Exp}[\mu t]$  da integral e cancelando  $S_0$  dos dois lados da equação, temos:

---

<sup>28</sup> Assumimos que  $t$  é a data de vencimento da opção.

$$\text{Exp}[\mu t] \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \text{Exp}[\sigma \sqrt{t} x] dx = \text{Exp}[r t]$$

Logo, podemos isolar  $\mu t$  da seguinte forma:

$$\mu t = r t - \ln \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \text{Exp}[\sigma \sqrt{t} x] dx \right]$$

Resolvendo a integral entre colchetes, temos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \text{Exp}[\sigma \sqrt{t} x] dx =$$

$$\text{Exp}\left[t \frac{\sigma^2}{2}\right] \left[ 1 + \frac{1}{24} (k-3) (\sigma \sqrt{t})^4 + \frac{1}{6} \xi (\sigma \sqrt{t})^3 + \frac{1}{72} \xi^2 (\sigma \sqrt{t})^6 \right]$$

Com esta solução, chegamos ao valor final de  $\mu t$ .

$$\mu t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \ln \left[ 1 + \frac{(k-3)}{24} (\sigma \sqrt{t})^4 + \frac{\xi}{6} (\sigma \sqrt{t})^3 + \frac{\xi^2}{72} (\sigma \sqrt{t})^6 \right] \quad (10)$$

Note que, para  $\kappa = 3$  e  $\xi = 0$  recuperamos o resultado usual de Black-Scholes,

$$\mu = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

Desta forma, podemos calcular o valor esperado de  $S$  na data de vencimento da opção<sup>29</sup> e, conseqüentemente, o valor esperado do *payoff* da opção. Descontando este *payoff* a valor presente pela taxa de juros livre de risco, temos o valor da opção na data inicial.

Para esta opção de compra européia que não paga dividendos temos que:

$$C = \text{Exp}[-r t] E_q [\max(S_t - K, 0)], \text{ onde:}$$

$C$  é o valor da opção na data inicial;

$K$  é o *strike* da opção;

$E[\max(S_t - K, 0)]$  é o *payoff* esperado desta opção na data de vencimento.

Usando os resultados até agora:

$$C = \text{Exp}[-r t] \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \max[S_0 \text{Exp}[\mu t + \sigma \sqrt{t} x] - K, 0] dx$$

onde  $g(x)$  é a distribuição de Edgeworth e  $\mu t$  é dado pela equação 10.

O valor mínimo de  $x$  a partir do qual o integrando é não nulo é definido por:

$$S_0 \text{Exp}[\mu t + \sigma \sqrt{t} x_{\min}] = K$$

---

<sup>29</sup> Usando  $g(x)$  como a *state price density*.

Resolvendo a equação anterior, temos que:

$$x_{\min} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}$$

Ou seja, o valor final da opção de compra é dado pela seguinte equação:

$$C = \text{Exp}[-r t] \int_{-X_{\min}}^{\infty} g(x) [S_0 \text{Exp}[\mu t + \sigma \sqrt{t} x] - K] dx$$

Um resultado interessante é que esta equação possui uma solução algébrica fechada, o que nos permite calcular tanto o preço da opção quanto os parâmetros de sensibilidade de uma forma exata<sup>30</sup>. A forma funcional desta equação está no apêndice II.

A esta altura é necessário esclarecermos alguns pontos relativos ao novo modelo proposto. Em primeiro lugar, não sabemos exatamente como é o processo descrito no tempo pelo ativo que nos dá uma distribuição de Edgeworth na data de vencimento da opção. Mais ainda, não sabemos se este processo é realmente uma difusão, ou seja, um processo markoviano definido por caminhos contínuos.

---

<sup>30</sup> Exata no sentido de não ser uma aproximação numérica.

A literatura sobre o assunto é, no mínimo, confusa. Em seu famoso artigo de 1982 no *Journal of Financial Economics*, Jarrow<sup>31</sup> assume, mas não prova, que um ativo que segue uma distribuição de Edgeworth a cada instante do tempo gera um processo difusivo. Em outro artigo mais recente, Ait-Sahalia<sup>32</sup> prova que não há nenhum modelo de difusão para o retorno do ativo-objeto além daquele gerado por uma distribuição Gaussiana, citando inclusive a expansão de Edgeworth e o artigo de Jarrow como improcedentes.

Nos parece correto então assumirmos que o processo gerado por um ativo que segue uma distribuição de Edgeworth a cada instante do tempo não é uma difusão, mas um processo que pode apresentar saltos. Neste caso, o principal problema do modelo diz respeito a não conseguirmos gerar uma carteira livre de risco, ou seja, mesmo assumindo todas as outras hipóteses do modelo de Black-Scholes, a menos da distribuição gaussiana para o ativo, não conseguiríamos replicar perfeitamente o derivativo através de uma combinação do ativo-objeto e de títulos livre de risco.

No entanto, podemos testar este novo modelo para saber se este é mais eficiente do que o de Black-Scholes no *hedge* de opções quando analisado empiricamente. Para tanto, faremos uma análise comparativa entre o erro de rebalanceamento de uma opção usando o delta gerado pelo modelo de Black-Scholes e o delta gerado pelo modelo de Edgeworth.

---

<sup>31</sup> Jarrow, R., Rudd, A. (1982) “Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Process”. *Journal of Financial Economics* nº10, 347-369.

<sup>32</sup> Ait-Sahalia, Y. (2002) “Telling from discrete data whether the underlying continuous-time model is a diffusion”, *Journal of Finance*, vol 57, 2075-2112.

No mundo real sabemos que o delta de uma opção não pode ser rebalanceado continuamente no tempo. Custos de transação e até os horários de funcionamento dos mercados impedem este processo. Neste caso, faz pouca diferença o uso de um processo difusivo na precificação de uma opção, visto que mesmo assim não conseguiríamos replicar o derivativo através de uma carteira composta pelo ativo-objeto e por títulos de renda fixa. O que testaremos então é se neste caso, o delta de Edgeworth é mais eficiente, ou seja, nos dá um erro de rebalanceamento menor do que o delta tradicional de Black-Scholes.

## **4.2 A ÁRVORE BINOMIAL DE EDGEWORTH**

Como colocamos anteriormente, o próximo passo do trabalho é desenvolver uma ferramenta capaz de aliar a expansão de Edgeworth a métodos numéricos para que possamos calcular o preço e os parâmetros de sensibilidade de opções americanas.

O que faremos a seguir é apresentar sucintamente o método desenvolvido por Rubinstein<sup>33</sup> para usar a expansão de Edgeworth na derivação de uma árvore binomial.

---

<sup>33</sup> Rubinstein, M (1998) “Edgeworth Binomial Trees”, Journal of Derivatives, vol 5, n° 3, 20-27.

O primeiro passo consiste em discretizar a equação 9 transformando  $z(x)$  em uma distribuição binomial padronizada<sup>34</sup>. Neste caso,  $g(x)$  será uma distribuição aproximada de Edgeworth que, no entanto, em geral, não soma um.

Para solucionar o problema da aproximação, o autor re-escala as probabilidades  $g(x)$  para que estas somem a um, o que acaba modificando a assimetria e curtose desejada na expansão. No entanto, Rubinstein defende que esta diferença é desprezível, principalmente quando temos  $n$  (número de passos na árvore) grande.

Em seguida, define-se o seguinte processo para o ativo:

$$S_j = S_0 \text{Exp}[\mu t + \sigma x \sqrt{t}] \text{ onde,}$$

$x$  é uma variável aleatória com probabilidade dada pela função discreta  $g(x)$  e os outros termos tem o significado usual.

A partir deste processo define-se  $S_j$  para todos os pontos finais da árvore, construindo-se o restante desta de trás para frente usando o método das árvores implícitas também desenvolvido por Rubinstein.<sup>35</sup> Uma vez concluída, a árvore binomial pode ser usada da maneira usual para precificar tanto opções européias como americanas, juntamente com seus parâmetros de sensibilidade.

---

<sup>34</sup> A fórmula da expansão de Edgeworth apresentada por Rubinstein contém um erro que não afeta numericamente os resultados.

<sup>35</sup> Rubinstein, M (1994) "Implied Binomial Trees" Journal of Finance, vol 49, 771 - 818.



## 5. RESULTADOS EMPÍRICOS

Nesta última etapa procederemos com dois testes distintos para comparar o modelo de precificação de Edgeworth com o modelo de Black<sup>36</sup> para opções sobre futuros<sup>37</sup>: análise do *smile* da volatilidade e comparação de erro de rebalanceamento de carteiras. Para tanto usaremos dados sobre opções de compra de dólar futuro negociadas na BM&F<sup>38</sup> e opções de compra de índice de ações S&P<sup>39</sup> negociadas na CME<sup>40</sup>.

Para explicar como os dados foram obtidos é necessário entender melhor como funciona o mercado de opções de dólar negociados na BM&F. Neste mercado, os *players*<sup>41</sup> negociam através de corretoras de valores opções de compra ou de venda de dólar futuro padronizados da seguinte maneira:

- Cada contrato tem valor de face de USD 50.000,00;
- Os contratos vencem no primeiro dia útil de cada mês e em geral são negociados contratos de até um ano de duração;

---

<sup>36</sup> Black, F. (1976) “The Pricing of Commodity Contracts” *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.

<sup>37</sup> Até então estávamos comparando o modelo de Edgeworth com o modelo tradicional de Black-Scholes, no entanto, como usaremos opções sobre contratos futuros para o teste empírico, o modelo de Black se torna mais apropriado para fazermos a comparação de resultados.

<sup>38</sup> Bolsa de Mercadorias e Futuros.

<sup>39</sup> *Standard and Poors*.

<sup>40</sup> *Chicago Mercantile Exchange*.

<sup>41</sup> Basicamente bancos e fundos de investimento.

- O ativo-objeto é o dólar futuro negociado para o mesmo vencimento do contrato de opção<sup>42</sup>;

- O *strike-price* é medido em reais por mil dólares e a diferença entre os *strikes* são de 50 pontos<sup>43</sup>;

- As opções são liquidadas por diferença financeira, ou seja, no vencimento da opção não existe a troca física entre as duas moedas. O preço de ajuste final é a PTAX 800 divulgada pelo Banco Central no dia útil anterior ao vencimento das opções<sup>44</sup>.

- O prêmio em reais a ser pago por uma opção pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\text{prêmio} = (\text{preço da opção} * \text{quantidade de contratos} * 50.000)/1000$$

No mercado de opções de dólar, as corretoras promovem todas as manhãs um *call* de abertura de mercado com todos os *players*. Neste *call*, os negociadores apregoam preços de compra e de venda para opções com diferentes *strike prices* e diferentes data de vencimento. Desta forma é possível obter preços de opções desde as *in-the-money* até as *out-of-the-money* para diferentes prazos de vencimento<sup>45</sup>.

---

<sup>42</sup> Por exemplo: ao comprar contratos de opção de compra para vencimento em maio de 2003, pode-se negociar o contrato de dólar futuro para vencimento na mesma data como forma de se fazer o delta hedge.

<sup>43</sup> Um strike price de 3000 indica uma taxa de câmbio de R\$3 por dólar. Uma variação de 50 pontos para cima nos dá um strike de 3050 e para baixo de 2950.

<sup>44</sup> O contrato de dólar futuro tem a mesma forma de liquidação das opções.

<sup>45</sup> Também temos o preço do ativo-objeto (dólar futuro de mesma data de vencimento do contrato de opção) e a taxa de juros livre de risco (neste caso o contrato de DI futuro também para a mesma data de vencimento) no momento de negociação da opção. Ambos serão necessários no cálculo da volatilidade implícita a partir do preço da opção que faremos no exercício posterior.

Todos os dados referentes a opções de dólar usados neste trabalho empírico foram obtidos a partir dos preços finais de compra destas opções negociadas no *call* de abertura do mercado.

Com relação as opções sobre o índice futuro S&P, o procedimento é um pouco mais simples: a CME arbitra preços de fechamento para estas opções<sup>46</sup>, a partir da análise de todos os negócios fechados durante o pregão. Estes preços estão disponíveis em agências de notícias e dados financeiros como a Bloomberg e a Reuters<sup>47</sup>.

## 5.1 O *SMILE* DA VOLATILIDADE

Seguindo a lógica do modelo exposto, testaremos se com as novas fórmulas de precificação de opções baseadas na expansão de Edgeworth conseguimos acabar com *smile* da volatilidade, ou pelo menos suavizá-lo, visto que estaremos usando uma distribuição de probabilidade neutra ao risco mais ajustada ao retorno do ativo-objeto.

---

<sup>46</sup> Tendo como base o valor de fechamento do índice futuro.

<sup>47</sup> No caso da taxa de juros livre de risco, usamos a Libor de fechamento para o mesmo prazo de vencimento da opção, que também se encontra disponível nas agências Bloomberg e Reuters.

O exercício será feito da seguinte forma: a partir dos dados obtidos, usaremos a fórmula tradicional de Black<sup>48</sup> para calcular a curva de volatilidade implícita destas opções de diferentes *strike prices*. Posteriormente, repetiremos o cálculo da volatilidade implícita usando a fórmula obtida a partir da expansão de Edgeworth para que possamos comparar as duas curvas do *smile*.

Antes de usarmos o modelo de Edgeworth, no entanto, precisamos determinar o valor dos parâmetros de curtose e assimetria. Estes serão calculados a partir da seguinte calibração do modelo:

$$\text{Mínimo} \quad \Sigma \left( \frac{(P_m - P_e)^2}{P_e} \right), \text{ onde}^{49}: \\ (\sigma, \xi, k)$$

$\sigma, \xi, k$  são os parâmetros de volatilidade implícita, assimetria e curtose;

$P_m$  é o preço da opção observada no mercado e

$P_e$  é o preço da opção calculado com modelo de Edgeworth.

Definiremos também  $P_{BS}$  como o preço da opção calculado com modelo de Black para uso posterior.

Desta forma estaremos determinando assimetria ( $\xi$ ) e curtose ( $k$ ) de maneira que a soma quadrática ponderada do erro entre o preço de mercado e o preço do modelo seja minimizado. Depois, fixaremos estes dois valores e variaremos o parâmetro de volatilidade

---

<sup>48</sup> Para opções sobre contratos futuros.

<sup>49</sup> O algoritmo usado para fazer esta minimização foi o Solver do Excel.

implícita ( $\sigma$ ) para que  $P_m = P_e$ . Estes novos valores de  $\sigma$  nos darão o *smile* da volatilidade do modelo de Edgeworth.

### 5.1.1 *Smile* para as opções de dólar

Os gráficos abaixo comparam as duas curvas de volatilidade implícita, ou seja, a curva de  $\sigma_{BS}$  que faz  $P_m = P_{BS}$  e a curva de  $\sigma_e$  que faz  $P_m = P_e$ .

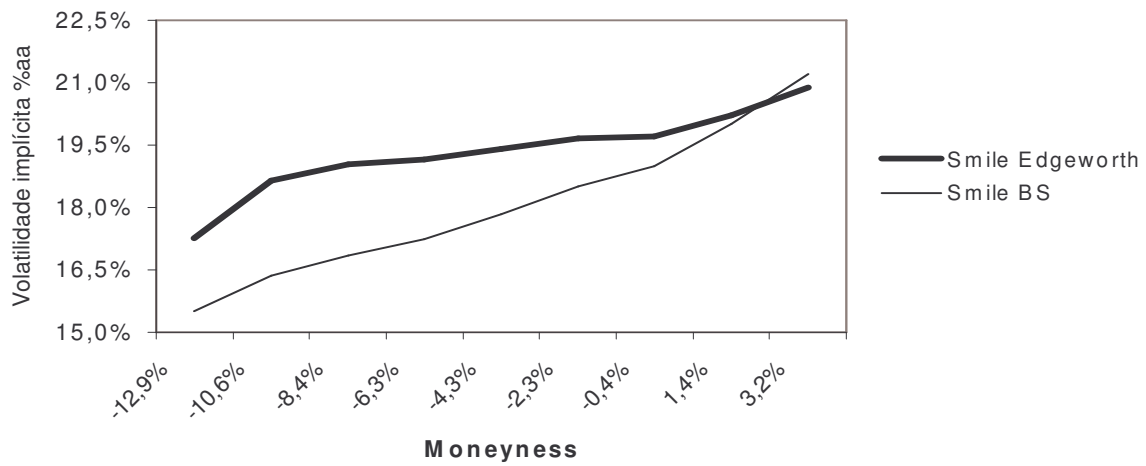


Figura 4 (assimetria = 0.6 curtose = 4.4 , vencimento da opções em 56 dias)

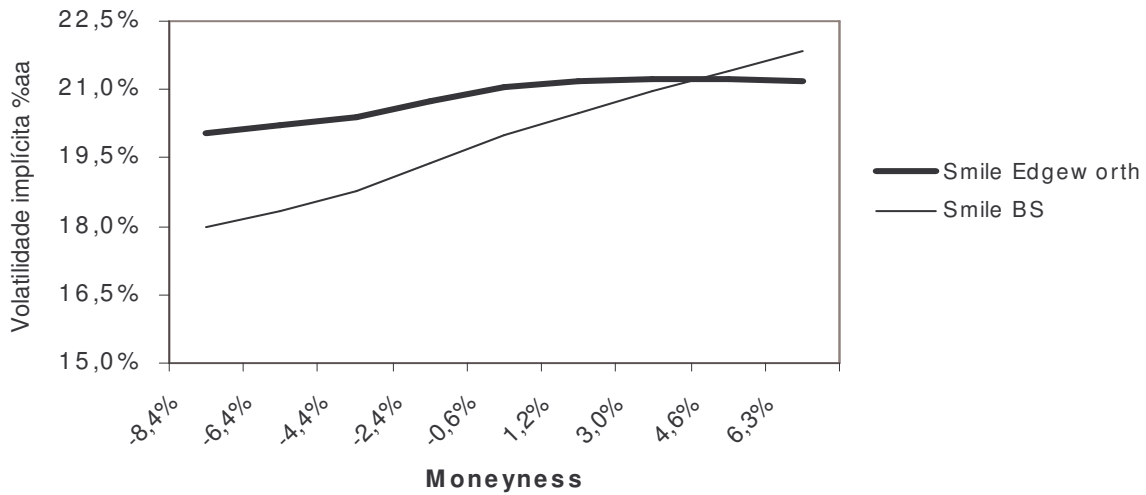


Figura 5 (assimetria = 0.6 curtose = 4.9, vencimento da opções em 117 dias)

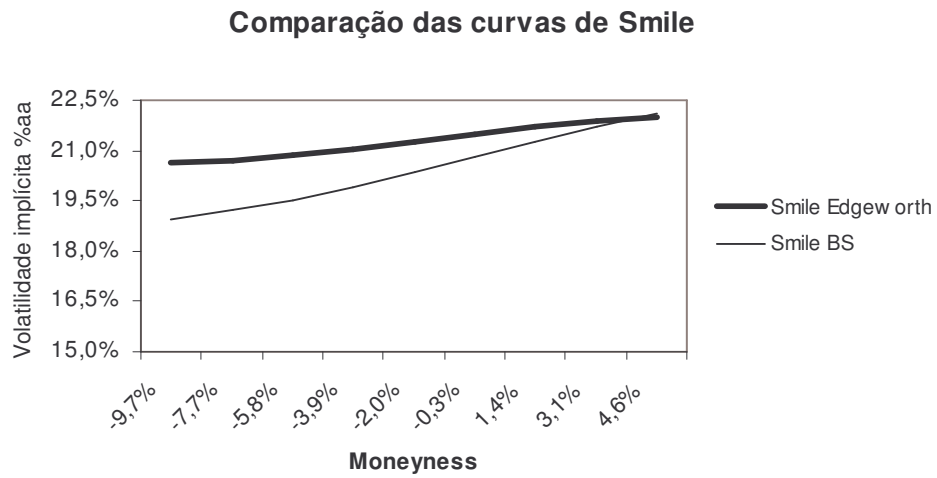


Figura 6 (assimetria = 0.6 curtose = 4.9, vencimento da opções em 299 dias)

Podemos notar que a curva  $\sigma_e$  (*smile* Edgeworth) é mais suave do que a curva de *smile* calculado com o modelo de Black, ou seja, temos um modelo que descreve melhor a distribuição de probabilidade dos movimentos do ativo-objeto.

### 5.1.2 *Smile* para as opções S&P

Os gráficos abaixo resumam o mesmo estudo para as opções de compra baseadas no índice de ações S&P.

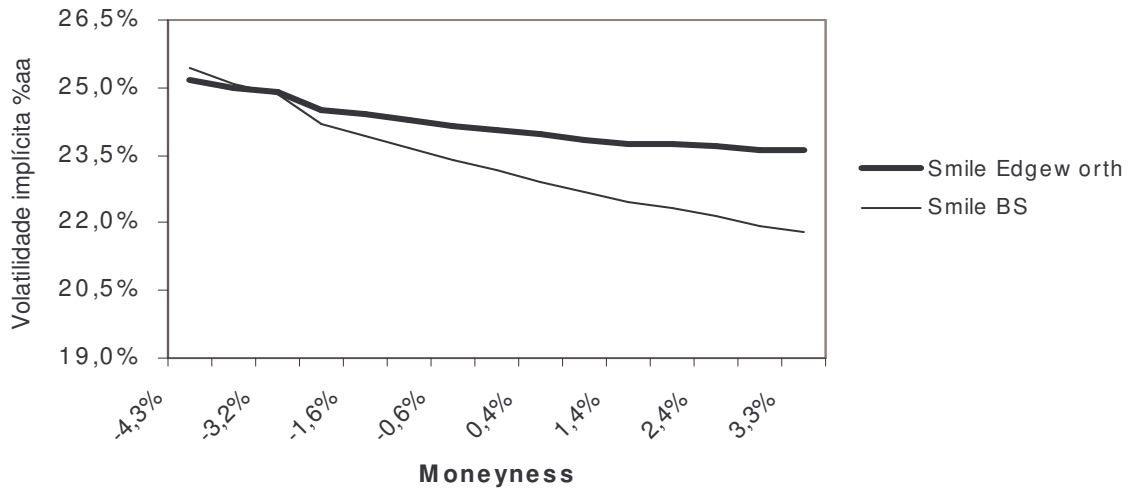


Figura 7 (assimetria = -0.6 curtose = 4, vencimento da opções em 42 dias)



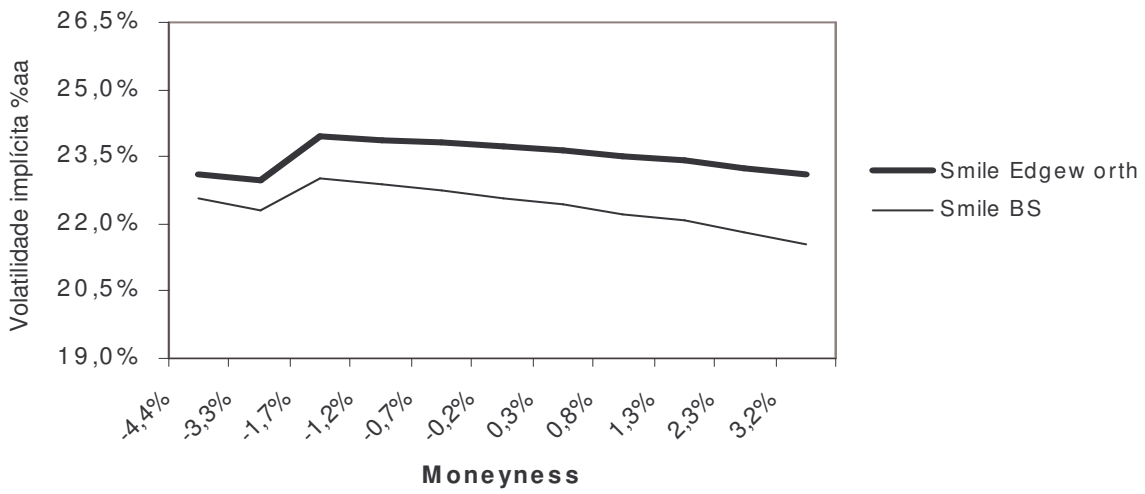


Figura 8 (assimetria = -0.6 curtose = 4, vencimento da opções em 168 dias)

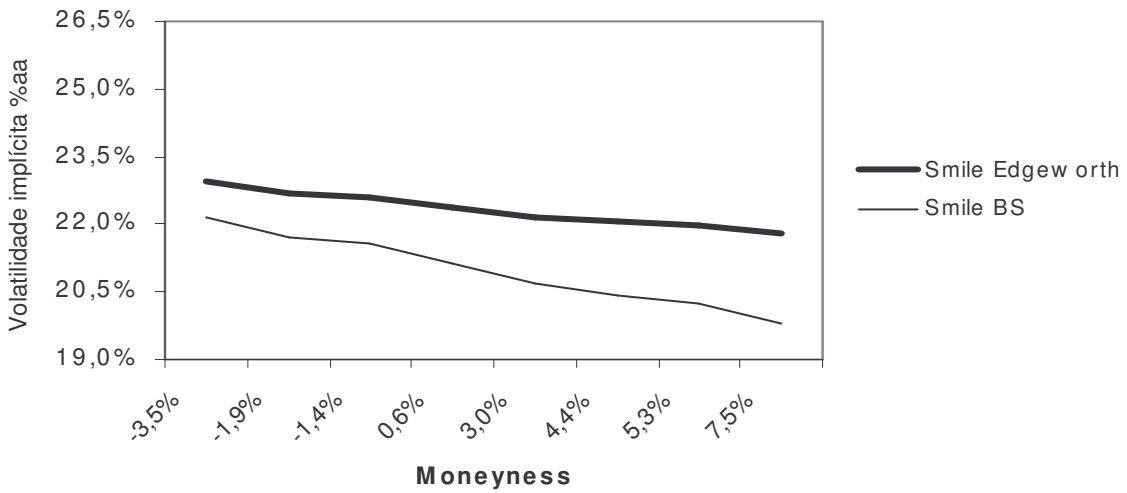


Figura 9 (assimetria = -0.6 curtose = 4, vencimento da opções em 259 dias)

O gráfico do *smile* da volatilidade mostra novamente uma curva menos inclinada quando calculada a partir do modelo de Edgeworth, ou seja, estamos usando uma função densidade de probabilidade para o ativo-objeto mais próxima (em comparação a uma densidade normal) da sua distribuição verdadeira.

## 5.2 TESTE DE ERRO DE REBALANCEAMENTO

O objetivo deste teste é comparar, sob certas condições, a eficiência do *delta-hedging* do modelo de Edgeworth contra o modelo de Black. Este teste será feito da seguinte forma:

- Coletaremos dados sobre os preços das opções de compra de dólar na BM&F da mesma maneira que no estudo anterior<sup>50</sup>;
- Calibraremos os parâmetros a serem usados pelo modelo de Edgeworth e pelo modelo de Black, também como anteriormente;
- Construiremos uma carteira comprada em 100 contratos de opção de compra de dólar (valor de face de USD 5.000.000) e vendida em delta contratos de dólar futuro de mesmo vencimento;

---

<sup>50</sup> Coletamos estes dados no *call* de abertura de mercado dos dias 22, 23 e 31 de maio de 2002 e 5 de junho de 2002 sobre vários *strikes* de opções com vencimento em 2-ago-02.

- Rebalancearemos o delta da carteira uma vez por dia com base no preço de ajuste do ativo-objeto divulgado pela BM&F até a data de vencimento da opção<sup>51</sup>;

- Assumiremos, a partir da calibração dos modelos, que as únicas variáveis que se alteram até o vencimento da opção são: o preço do ativo-objeto e a taxa de juros livre de risco<sup>52</sup>.

O gráfico abaixo mostra a série histórica do dólar futuro (preço de ajuste) com vencimento em 2-agosto de 2002 desde o dia 22 de maio de 2002.

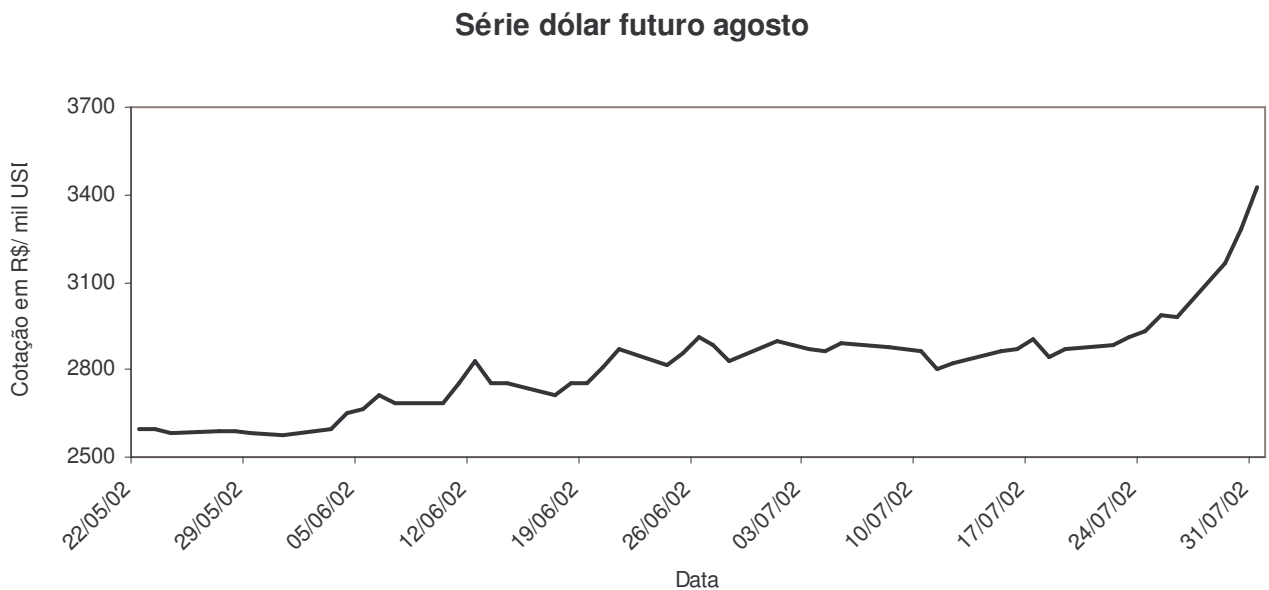


Figura 10 - Preço de ajuste do dólar futuro agosto/02 (série histórica de 22-maio a 31-julho)

<sup>51</sup> Neste caso, pegamos os preços de ajuste do dólar futuro com vencimento em 2-ago-02 desde o dia 22-maio-02.

<sup>52</sup> Usamos o CDI Cetip como taxa de juros livre de risco, ao invés do DI futuro por dois motivos: facilitaria os cálculos e o impacto seria desprezível uma vez que os DI's curtos estavam bem pertos da taxa do CDI.

Desta forma, teremos valores diários mostrando qual o tamanho do erro de rebalanceamento de cada carteira medido em reais, podendo assim comparar o erro gerado pelo modelo de Edgeworth com aquele produzido pelo modelo de Black. Para facilitar o entendimento do exercício o apêndice III contém um exemplo numérico.

A partir destes erros diários, construiremos uma média e desvio-padrão que serão usadas para testar se a média do modelo de Edgeworth é significativamente menor do que a média de Black.

As tabelas abaixo resumizam o resultado:

Tabela 1 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 22-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Strike	Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
2300	1.824,56	2.187,83	1.819,63	2.332,73	0,01	0,50
2500	1.670,40	3.797,33	1.591,93	3.590,72	0,11	0,46
2700	4.236,45	8.788,37	2.835,65	7.285,98	0,87	0,20
2900	4.403,06	13.147,20	4.493,10	15.215,07	-0,03	0,49
3100	6.394,84	41.275,96	8.381,41	44.475,51	-0,23	0,41
3300	8.134,20	51.428,65	7.740,75	46.266,74	0,04	0,48
3500	150,80	797,07	58,36	347,33	0,75	0,23

Tabela 2 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 23-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Strike	Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
2300	1.836,71	2.244,46	1.862,92	2.360,63	-0,05	0,48
2500	1.699,64	3.805,95	1.662,55	3.585,59	0,05	0,48
2700	4.030,47	8.577,89	2.734,90	7.169,15	0,78	0,21
2900	4.134,96	13.747,78	4.331,86	15.729,14	-0,06	0,47
3100	6.017,91	40.875,20	8.472,82	44.512,93	-0,27	0,39
3300	7.999,32	50.925,39	7.823,65	45.952,14	0,02	0,49
3500	179,50	1.014,66	71,05	412,29	0,67	0,25

Tabela 3 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 31-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Strike	Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
2300	1.992,14	2.306,01	2.073,38	2.393,29	-0,16	0,44
2500	2.251,80	3.694,20	2.225,75	3.384,45	0,03	0,49
2700	5.098,00	8.836,64	3.620,68	7.367,05	0,83	0,20
2900	5.087,56	14.087,26	5.229,04	16.233,17	-0,04	0,48
3100	7.212,99	43.732,06	9.587,88	47.363,09	-0,24	0,41
3300	9.204,92	54.475,48	8.824,78	49.195,03	0,03	0,49
3500	192,78	937,99	70,43	388,68	0,77	0,22

Tabela 4 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 5-junho-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Strike	Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
2300	1.910,02	999,01	2.015,41	927,17	-0,48	0,32
2500	2.100,26	2.612,92	2.177,56	2.499,32	-0,13	0,45
2700	4.832,57	8.503,24	3.474,06	7.166,42	0,75	0,22
2900	4.911,53	15.460,96	5.205,83	17.319,77	-0,08	0,47
3100	7.242,12	44.333,40	10.183,66	48.530,55	-0,28	0,39
3300	9.423,51	54.743,11	9.381,34	49.949,25	0,00	0,50
3500	226,47	1.204,52	93,79	489,58	0,63	0,26

Cada tabela mostra para diferentes dias de coleta a média e o desvio-padrão (em reais) do erro de rebalanceamento diário da carteira (cujo valor de face é de USD 5.000.000) para diferentes preços de exercício. Além disso, é mostrado a estatística t e a correspondente significância para um teste unicaudal de diferença entre a média calculada pelo modelo de Edgeworth e aquela do modelo de Black.

As tabelas abaixo mostram o mesmo teste só que agora para uma carteira composta de três opções nos seguintes *strikes*: 2500, 2900 e 3300. A motivação deste novo teste é descobrir se a *moneyness* das opções influenciou de alguma forma no resultado do primeiro teste.

Tabela 5 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 22-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
4.735,89	30.625,52	4.608,59	28.111,11	0,04	0,49

Tabela 6 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 23-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
4.611,31	30.426,16	4.606,02	28.030,97	0,00	0,50

Tabela 7 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 31-maio-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
5.514,76	32.421,41	5.426,52	29.855,24	0,02	0,49

Tabela 8 - Erro de rebalanceamento. *Smile* obtido no dia 5-junho-02 sobre opções com vencimento em 02-ago-02.

Modelo Edgeworth		Modelo Black		Estat t	$\alpha$
Média diária (R\$)	Desvio-Padrão	Média diária (R\$)	Desvio-Padrão		
5.478,43	32.732,76	5.588,25	30.437,07	-0,03	0,49

Vale comentarmos alguns aspectos dos resultados encontrados. Em primeiro lugar, o tamanho da média diária do erro de rebalanceamento encontrado para os dois modelos é bem próxima de zero como seria de se esperar para uma carteira livre de risco<sup>53</sup>.

Em segundo lugar temos uma curiosidade: a média do erro de rebalanceamento foi positiva para todos os *strikes* e períodos, ou seja, a carteira comprada em opções de compra de dólar gerou um resultado positivo. Este resultado pode ser explicado da seguinte maneira: em todos os dias de coleta de dados, a volatilidade implícita no preço das opções girava em torno de 17% a.a. para o período. No entanto, como a taxa de câmbio teve um comportamento

<sup>53</sup> A média diária do erro ficou aproximadamente entre R\$1.000 e R\$10.000 para uma carteira com valor de face de USD 5.000.000, ou seja, se usarmos uma taxa de câmbio de R\$ 3,50 por dólar, o erro percentual diário varia entre 0,0057% e 0,057%.

“explosivo” perto do vencimento do contrato de opções<sup>54</sup>, a sua volatilidade realizada foi bem maior do que a implícita, ficando em torno de 28% a.a. no período. Portanto, o resultado final positivo veio de uma posição comprada em opções que se mostrou lucrativa visto que o preço pago pela volatilidade implícita ficou bem abaixo da volatilidade final realizada pelo ativo-objeto.

Finalmente, vemos que o desvio-padrão da média diária varia bastante entre os diferentes *strikes*. A explicação para este resultado é parecida com a anterior, ou seja, reside no fato da taxa de câmbio ter tido um comportamento muito volátil perto do vencimento do contrato de opções. Como o ativo-objeto<sup>55</sup> teve uma alta de 15% nos últimos quatro dias de negociação, passando de 2983 a 3428.50, as opções com *strike-prices* perto destes valores tiveram um erro de rebalanceamento muito grande, visto que a volatilidade do ativo-objeto estava muito alta e a sensibilidade destas opções a uma variação no preço deste ativo também era alta<sup>56</sup>.

---

<sup>54</sup> Ver figura 10.

<sup>55</sup> Contrato de dólar futuro com vencimento em 2 de agosto de 2002.

<sup>56</sup> Uma opção *at-the-money* e com vencimento curto possui um gamma elevado, ou seja, qualquer variação no preço do ativo-objeto leva a uma grande variação no delta da opção. Tal fato gera um descasamento da carteira livre de risco se este delta não estiver sendo rebalanceado continuamente. No nosso caso, o delta é rebalanceado apenas uma vez ao dia.



## 6. CONCLUSÃO

Infelizmente o que podemos notar é que o modelo de Edgeworth não apresenta ganhos estatisticamente significantes para este teste de eficiência de *hedging*, o que nos levaria a descartar seu uso, visto que o modelo de Black é operacionalmente mais fácil de ser implementado.

Uma das possíveis explicações para este resultado pode estar no fato de não podermos usar quaisquer valores de assimetria e curtose para ajustar o modelo. Na verdade, praticamente todas as calibrações feitas neste trabalho nos deram um resultado de canto, mostrando que se fosse possível teríamos parâmetros de assimetria e/ou curtose maiores do que o permitido pela expansão de Edgeworth. Talvez uma nova função densidade de probabilidade que fosse mais flexível para se ajustar melhor à distribuição verdadeira do ativo-objeto traria ganhos efetivos na precificação e *hedging* de uma carteira de opções.

No entanto, como o modelo de Edgeworth nos permite extrair algumas informações acerca da distribuição de probabilidade esperada para o ativo-objeto em uma data futura, a partir de dados de mercado, poderíamos imaginar a sua utilização na área de *risk-management*, por exemplo. A partir dos parâmetros estimados de curtose e assimetria, poderíamos fazer simulações de Monte-Carlo ou algum ajuste de VaR que levasse em conta esta distribuição não-normal esperada para o ativo-objeto.

Uma outra sugestão para estudos futuros seria a utilização da expansão de Edgeworth para gerar uma função densidade de probabilidade dependente de mais momentos além dos quatro primeiros. Talvez desta forma teríamos ganhos de informação e de eficiência que justificassem o uso do modelo no âmbito das instituições financeiras.

## 7.1 APÊNDICE I

Prova do resultado  $\chi_n(t) = \{\chi(\frac{t}{\sqrt{n}})\}^n$ .

$$\chi_n(t) = E[\text{Exp}[itS_n]], \text{ onde } S_n = \sqrt{n}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \text{ e } X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\chi_n(t) = E\left[\text{Exp}\left[it\sqrt{n}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)\right]\right] = E\left[\text{Exp}\left[it\sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n} \sum X_i - \mu}{\sigma}\right)\right]\right]$$

$$E\left[\text{Exp}\left[\frac{it}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma}\right)\right]\right] = E\left[\text{Exp}\left[\frac{it}{\sqrt{n}}\frac{\sum(X_i - \mu)}{\sigma}\right]\right]$$

$$\left(E\left[\text{Exp}\left[\frac{it}{\sqrt{n}}\frac{X - \mu}{\sigma}\right]\right]\right)^n = \left(\chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

## 7.2 APÊNDICE II

Fórmula fechada para uma opção de compra europeia.

$$\begin{aligned}
 & \text{Exp}(-T r) S \text{Exp}\left(\mu + \frac{\sigma T^2}{2}\right) \Phi[\sigma T - x \min] + \text{Exp}(-T r) K - \Phi[-x \min] + \left(\frac{1}{72\sqrt{2\Pi}}\right. \\
 & \text{Exp}\left(\mu - rT - \frac{x \min^2}{2} + \sigma T x \min\right) S(\sigma T^5 \xi^2 + \sigma T^4 \xi^2 x \min + \sigma T^3 (3(\kappa - 3) \\
 & + \xi^2 (x \min^2 - 1)) + (\sigma T^2 (12\xi + 3(\kappa - 3)x \min + \xi^2 x \min(x \min^2 - 3)) + \sigma T \\
 & (12\xi x \min + 3(\kappa - 3)(x \min^2 - 1) + \xi^2 (x \min^4 - 6x \min^2 + 3)))) + \frac{1}{72\sqrt{2\Pi}} \\
 & \text{Exp}\left(-rT - \frac{x \min^2}{2}\right) (\text{Exp}(\mu + \sigma T x \min) S - K) (3(\kappa - 3)x \min (x \min^2 - 3) + 12\xi \\
 & (x \min^2 - 1) + \xi^2 x \min (x \min^4 - 10x \min^2 + 15)) + \left(\frac{1}{144} \text{Exp}\left(\mu - rT + \frac{\sigma T^2}{2}\right) S \right. \\
 & \left. (3(\kappa - 3)\sigma T^4 + \sigma T^6 \xi^2 + 12\sigma T^3 \xi) (2\Phi[\sigma T - x \min])\right)
 \end{aligned}$$

onde  $\Phi[x]$  representa a função normal acumulada e  $x_{\min} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$ .

## 8. BIBLIOGRAFIA

**Ait-Sahalia, Y.** (2002) *“Telling From Discrete Data Whether The Underlying Continuous-Time Model is a Diffusion”*. Journal of Finance, vol 57, 2075-2112

**Barton, D., Dennis, K.** (1952) *“The conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal”*. Biometrika n° 39, 425-427

**Billingsley, P.** (1995) *“Probability and Measure”*. 3ª ed. Wiley & Sons.

**Black, F.** (1976) *“The Pricing of Commodity Contracts”*. Journal of Financial Economics n° 3, 167-179.

**Hall, P.** (1992) *“The Bootstrap and Edgeworth Expansion”*. Springer-Verlag

**Hull, J.**, (1997) *“Options, Futures and other Derivatives”*. 4ª ed. Prentice-Hall.

**Jarrow, R., Rudd, A.** (1982) *“Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Process”*. Journal of Financial Economics n°10, 347-369

**Johnson, N., Kotz, S., Balakrishann, N.** (1994) *“Continuous Univariate Distributions”*. 2ª ed. Wiley & Sons.

**Johnson, N., Kotz, S., Kemp, A.** (1992) “*Univariate Discrete Distributions*”. 2<sup>a</sup> ed. Wiley & Sons.

**Kendall, M., Stuart, A.** (1963) “*The Advanced Theory of Statistics*”. 2<sup>a</sup> ed. Charles Griffin & Company

**Mittelhammer, R.** (1996) “*Mathematical Statistics for Economics and Business*”. Springer

**Rubinstein, M** (1994) “*Implied Binomial Trees*”. The Journal of Finance n° 3, 771-818.

**Rubinstein, M.** (1998) “*Edgeworth Binomial Trees*”. Journal of Derivatives n° 3, 20-27

**Wilmott, P ,Howison, S., Dewynne,J.** (1995) “*The Mathematics of Financial Derivatives*”. Cambridge University Press

**Wilmott, P.** (1998) “*Derivatives*”. Wiley & Sons.