UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

PRECIFICAÇÃO E HEDGE DE DERIVATIVOS EM MERCADO INCOMPLETO EM TEMPO DISCRETO

Danilo Lopomo Beteto

Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira
Área: Métodos Quantitativos e Informática

São Paulo
2005

DANILO LOPOMO BETETO

PRECIFICAÇÃO E HEDGE DE DERIVATIVOS EM MERCADO INCOMPLETO EM TEMPO DISCRETO

Dissertação apresentada ao Departamento de Administração da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Administração.

Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira
Área: Métodos Quantitativos e Informática

São Paulo

2005

Dissertação defendida e aprovada, em 09.12.2005, no Programa de Pós-Graduação em Administração, pela seguinte comissão julgadora:

Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

Prof. Dr. Christian Johannes Zimmer

FICHA CATALOGRÁFICA

Ao meu avô.

Agradeço a todos aqueles que estiverem comigo durante minha caminhada:

- Aos meus pais, Miriam e Danilo, às minhas irmãs, Daniela e Alinne, e minha avó, Francisca, pelo carinho, afeição e suporte que sempre me deram;
- À minha namorada, Carol, pela compreensão, companheirismo e amor durante todo este tempo;
- Ao Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira, por me instigar na busca do conhecimento e pela orientação e apoio durante o mestrado;
- Ao colega Daniel Reed Bergmann, companheiro de café e de discussões sobre o abismo matemático;
- Ao colega Henrique Castro por abrir as portas do mundo TeX;
- Ao colega Carlos Bueno Raymundo, por me incentivar a seguir carreira acadêmica;
- Ao Prof. Dr. Luciano Barbanti, cuja pessoa admiro bastante;
- Ao Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente, o qual me faz sentir honrado pela orientação recebida na graduação e por ter me inspirado a buscar sempre o melhor;
- Ao pessoal da biblioteca da FEA e do IME e ao CCE-USP pelos programas disponibilizados;
- À USP e a FEA em particular, por me acolher e propocionar as condições necessárias para o estudo e o bom viver;
- À Deus, por ter me dado saúde e condições de chegar até aqui. Muito Obrigado.

"*Temos que levar as coisas de modo mais divertido do que merecem; ainda mais porque durante muito tempo as levamos mais a sério do que merecem.*" Friedrich Nietzche (1844-1900)

RESUMO

A dissertação aborda o problema de precificação e hedge de derivativos do tipo europeu em mercados incompletos em tempo discreto. Em um mercado completo, todos os derivativos são atingíveis, i.e., existe uma estratégia de negociação auto-financiável capaz de replicar o valor do título em um instante terminal em qualquer estado da natureza. Por argumentos de hedge e arbitragem, o valor do derivativo é o valor desta estratégia, denominada estratégia replicante. Ainda, o preço do derivativo é racional, i.e., único e livre de arbitragem.

Em um mercado incompleto, existem derivativos que não são atingíveis, o que faz com que não possa ser utilizado o mesmo argumento de precificação e hedge dos mercados completos. Conforme caracterizado pela literatura, em um mercado incompleto livre de arbitragem existem infinitas medidas martingales equivalentes, o que faz com que a precificação de derivativos não seja racional, no sentido de não haver mais a unicidade de preço.

Em um período de tempo discreto, expõem-se algumas abordagens encontradas na literatura que visam estabelecer critérios que façam com que a precificação e hedge de derivativos em mercados incompletos seja racional. São abordados os métodos de minimização do erro de hedge pela medida de variância ótima e pela medida de mínima entropia relativa. São efetuadas algumas simulações a partir de um problema proposto e mostra-se que as estratégias de hedge pelos modelos adotadas não diferem substancialmente daquela sugerida pelo delta do modelo Black-Scholes-Merton, um indicação de quão robusto pode ser este último. Ainda, os erros de hedge a partir da execução em tempo discreto de uma estratégia formulada para o tempo contínuo podem ser substanciais.

Palavras-chave: mercado incompleto, precificação, hedge, tempo discreto, derivativo, opção européia.

ABSTRACT

The present dissertation approachs the problem of pricing and hedging of european type derivative securities in an incomplete market in a discrete time framework. In a complete market, all the claims are attainable, so one can compute a self-financing trading strategy in order to replicate the value of the claim in a terminal date and in all states of the world. By arbitrage and hedging reasonings, the price of the derivative is just the value of this replicating strategy. Besides, the price of a claim in a complete market is called rational, wich means that it's unique and arbitrage-free.

In an incomplete market, there are derivative securities that are not attainable, making the same arguments used by the pricing and hedging in complete markets useless. As pointed out by the classic literature, in an arbitrage-free incomplete market there are an infinite number of equivalent martingale measures, so the pricing and hedging of derivatives are no more rational, in the sense that now there's not a unique price for the claims.

In a discrete time framework, some of the approachs sugested by the literature to deal with the problem are presented. One of these approachs tries to minimize the hedging error by the variance optimal measure and the other by the minimal entropy measure. Based in a proposed problem, some simulations are runned and the results suggest the robusteness of the Black-Scholes-Merton model: there are no major differences between hedging strategies proposed and the Black-Scholes-Merton delta. Besides, the hedging errors generated by strategies developed to be adopted in a continuous time are non-trivial when executed in a discrete time framework.

Key-words: incomplete market, pricing, hedging, discrete time, derivative securitie, european option.

Sumário

Lista de Notações

A_i	i-ésimo átomo da partição
$\bar{A}$	Conjunto complementar de A
$\mathbb{A}$	Ortante não-negativo de $\mathbb{R}^K$
$\mathcal{A}$	Sistema de subconjuntos de Ω que constitui uma álgebra
B	Processo conta bancária, também interpretado como um ativo de renda fixa; definido em diversas partes do texto como o numerário
$\mathbb{B}(e_i, p)$	Conjunto orçamento com base no vetor de dotações e_i e no vetor de preços p
c	Alocação de consumo
C_i	Conjunto de planos de consumo do i-ésimo agente da economia
C^{BS}	Preço da opção de compra pelo modelo Black-Scholes-Merton
$\mathscr{C}(\cdot)$	Função de resultado de uma opção de compra na data de vencimento
d	Fator de descida
$d_n(\omega_k)$	Resultado do n-ésimo ativo da economia caso o k-ésimo estado da natureza ocorra
$\mathbb{D}$	Matriz de resultados dos ativos da economia
$D(Q \parallel P)$	Entropia relativa da medida Q em relação á medida P
$\Delta\cdot$	Operador diferença
e_i	Vetor de dotações do i-ésimo agente da economia
$\mathscr{E}$	Representativo de uma economia
$\mathbb{E}$	Operador esperança na medida natural
$\mathbb{E}.$	Operador esperança na medida referente ao índice.
$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$	Derivada da função f em relação à x
$\mathbb{F}$	Estrutura de informação; filtração
$\mathscr{F}$	σ-álgebra
$\Phi(x)$	Função acumulada de probabilidade de uma variável aleatória x com distribuição normal com esperança nula e desvio-padrão unitário
G	Processo de ganho

G^*	Processo de ganho expresso na unidade do numerário
H_{t+1}	Retorno em excesso
$\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$	Conjunto de índices dos I agentes individuais da economia
J_t	Função de valor no instante t no contexto de programação dinâmica
$\mathcal{J} = \{1, \ldots, J\}$	Conjunto de índices das J firmas da economia
$\mathscr{K}$	Preço de exercício de uma opção
λ	Multiplicador de Lagrange
$m_{t+1\|t}$	Mudança de medida
$M(p)$	Conjunto de planos de consumo comercializados dado um sistema de preços p
$\mathfrak{M}(\omega_k)$	Valor da carteira de mercado caso o estado da natureza seja ω_k
$\mathbb{M}$	Conjunto das medidas neutralizadoras do risco
$N(\Xi)$	Número máximo de vértices sucessores considerando a estrutura de informação Ξ
ω_k	k-ésimo elemento do espaço amostral
Ω	Espaço amostral
p	Vetor de preços de uma economia
P	Medida de probabilidade; distribuição de probabilidade observada
$\mathscr{P}$	Partição do espaço amostral
P^+	Conjunto de vetores pertencentes à $\mathbb{R}^K$ cujas coordenadas sejam positivas e somem 1
π	Medida de precificação
$\pi_{\inf}(X)$	Limite inferior do conjunto $\Pi(X)$
$\pi_{\sup}(X)$	Limite superior do conjunto $\Pi(X)$
$\pi^*(X)$	Preço superior de hedge contra X
$\pi_*(X)$	preço inferior de hedge contra X
$\Pi(X)$	Conjunto de preços livres de arbitragem de um derivativo com função de resultado X
q.c.	Quase certamente
Ξ	Conjunto dos vértices de uma estrutura de informação do tipo árvore
ξ	i-ésimo vértice de uma estrutura de informação do tipo árvore
r	Taxa de juros livre de risco
R	Processo de retorno
R^*	Processo de retorno considerando-se o preço dos ativos expressos na unidade do numerário
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

S	Processo de preço dos ativos com risco
S^*	Processo de preço expresso na unidade do numerário
σ	Volatilidade do ativo subjacente
θ	Referente à estratégia de negociação, quantidade de ativos com risco na carteira do investidor
θ_{ij}	Parcela da produção da j-ésima firma a ser consumida pelo i-ésimo agente da economia
θ_t^D	Estratégia ótima de hedgde dinâmico
θ_t^L	Estratégia de hedge localmente ótima
θ_t^{BS}	Delta do modelo Black-Scholes-Merton
τ	Tempo para o vencimento da opção
u	Fator de subida
$U(\cdot)$	Função de utilidade
V	Processo de valor
V^*	Processo de valor expresso na unidade do numerário
X	Representativo da função de resultado no instante terminal de um derivativo do tipo europeu
$X^*(x, X)$	Classe dos hedges superiores contra o derivativo X, i.e., estratégias de negociação que iniciam com capital x e terminal com a carteira valendo $V_T \geq X$
$X_*(x, X)$	Classe dos hedges inferiores contra o derivativo X, i.e., estratégias de negociação que iniciam com capital x e terminal com a carteira valendo $V_T \leq X$
W_0	Riqueza inicial
$\mathbb{W}$	Conjunto da variáveis aleatórias representativas do processo de ganho obtido a partir de um investimento inicial nulo
y	Alocação de produção
Y_j	Conjunto de planos de produção da j-ésima firma da economia
Z	Vetor de preços iniciais dos ativos da economia
$\mathbb{Z}$	Vetor de preços finais dos ativos da economia de acordo com os possíveis estados da natureza
ζ	Matriz de resultados dos ativos Arrow-Debreu
$\succeq_i$	Relação de preferência do i-ésimo agente da economia
$\oplus$	Soma direta
$\aleph(\cdot)$	Operador posto de uma matriz
$\|\Omega\|$	Cardinalidade do espaço amostral

$\#\xi$	Número de vértices sucessores a um determinados vértice, i.e., o número de ramos que parte de um determinado vértice de uma estrutura de informação do tipo árvore
$\emptyset$	Conjunto vazio

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

1.1 Descrição do Problema

O tema a que se refere a presente dissertação é finanças quantitativas. O assunto específico da dissertação é *precificação racional de instrumentos derivados em mercado incompleto em tempo discreto.*

Pela definição de DOWNES; GOODMAN (1993), um *instrumento derivado*[1] é um instrumento financeiro cujo valor se baseia em outro título. Uma opção é um derivativo visto que seu valor deriva de um outro ativo qualquer, e.g. um valor mobiliário.

Uma das questões que se coloca é: qual é o preço *racional*[2] de um derivativo, i.e., o preço único e livre de arbitragem? Esta questão foi respondida por BLACK; SCHOLES (1973) e MERTON (1973) no caso do derivativo ser uma *opção de compra européia simples ordinária*[3][4], cujas fórmulas de precificação são largamente utilizadas ainda hoje. Tão importante quanto as fórmulas é o raciocínio utilizado para derivá-las[5].

Um dos raciocínios utilizados na precificação de derivativos envolve o *princípio de hedge*. Basicamente, este princípio estabelece que, se é possível constituir dinamicamente uma carteira de investimento, sem que o investidor tenha que sacar ou aportar recursos nos intervalos intermediários em que é possível alterar a composição da carteira, na qual o resultado (lucro ou perda) a ser auferido em uma determinada data futura é exatamente o

[1]Daqui em diante será utilizado apenas o termo derivativo.

[2]Vide MERTON (1973).

[3]Vide SIQUEIRA (1999).

[4]Daqui em diante denominada apenas opção de compra européia.

[5]ANDREASEN; JENSEN; POULSEN (1996) apresentam oito maneiras distintas de se obter as fórmulas do modelo de Black-Scholes-Merton.

mesmo proporcionado pelo derivativo, então o *único* valor *economicamente razoável* deste na data atual deve ser o valor inicial da carteira composta. Diz-se então que este derivativo é *atingível*, *hedgeável*, e a carteira constituída é chamada de *estratégia de negociação replicante dinâmica auto-financiável*[6]. Diz-se ainda que esta estratégia de negociação replicante *gera* o derivativo.

Segundo AVELLANEDA (1999, p. 190), um *mercado dinamicamente completo* é aquele no qual todos os derivativos são atingíveis através de uma estratégia de negociação replicante. Desta forma, sabe-se como precificá-los racionalmente.

Pelas definições de FRITTELLI (2000a), se um mercado não é completo, então ele é um *mercado totalmente incompleto* ou apenas um *mercado incompleto*. Em um mercado totalmente incompleto os ativos disponíveis para negociação não permitem o hedge nem mesmo parcial do risco do investidor; já em um mercado incompleto, os ativos permitem o hedge parcial do risco.

Por estas definições, torna-se claro que tanto nos mercados totalmente incompletos como nos mercados incompletos existem derivativos aos quais não é possível determinar um preço racional. São necessárias outras abordagens. Esta é a pergunta-problema da presente dissertação.

Problema 1 *Como precificar racionalmente e fazer o hedge de derivativos em mercados incompletos em tempo discreto?*

A resposta para esta pergunta não vem por si só. Antes dela, é necessário que seja feita uma discussão do problema no contexto econômico para então caracterizar-se de modo detalhado os mercados completos e incompletos, a fim de que sejam salientadas as propriedades de ambos de modo rigoroso. Com isso, pode-se então expôr algumas abordagens encontradas na literatura que visam lidar com o problema.

[6]Daqui em diante denominada apenas estratégia de negociação replicante.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Na década de 70, BLACK; SCHOLES (1973) e MERTON (1973) solucionam o problema de precificação de opções de compra européias, os primeiros utilizando-se do *princípio de hedge* e o segundo do *princípio de não-arbitragem.*

COX; ROSS (1976) propõem uma nova técnica de precificação de opções, baseada no argumento de que se os investidores são *neutros* em relação ao risco, então a taxa de remuneração exigida por eles é a taxa de juros livre de risco. A isso dá se o nome de *princípio de avalição neutralizadora risco.*

Por definição, em um *mercado completo* todos os derivativos são atingíveis, o que significa que a todos eles está associada uma estratégia de negociação replicante a partir da qual é possível precificá-los. Em um *mercado incompleto*, existe ao menos um derivativo que não é atingível, i.e., não existe uma estratégia de negociação replicante que possa gerá-lo.

Surge então a questão da determinação da completude ou não de um mercado. Visto que o número de derivativos existentes em um mercado pode ser demasiado grande, torna-se impraticável a verificação um a um da existência das estratégias de negociação replicantes correspondentes.

A partir dos trabalhos de HARRISON; KREPS (1979) e HARRISON; PLISKA (1981), passa-se a trabalhar com os conceitos de *martingales* e *integrais estocásticas.* Desenvolve-se então o modelo de precificação racional pela *medida martingale equivalente.* Na medida martingale equivalente, a esperança condicionada da taxa de retorno de um ativo qualquer, a qual é positiva caso esteja sendo considerado um ativo com risco, passa a ser nula, i.e., com ela é possível tratar um ativo que exija um prêmio por risco como se o mesmo fosse um ativo livre de risco, conforme NEFTCI (2000, cap. 14). Isto é o mesmo que ocorreria caso os investidores fossem neutros em relação ao risco, havendo então uma equivalência com o princípio de avaliação neutra em relação ao risco. Em razão disto a medida martingale equivalente é também chamada de *medida de probabilidade neutralizadora do preço do risco econômico*[1].

Com o conceito de medida martingale, a verificação da completude de um mercado reduz-se a verificação da existência de uma única medida martingale equivalente, conforme HARRISON; PLISKA (1981). Em um mercado incompleto, entretanto, existe uma quantidade infinita não-enumerável de medidas martingales equivalentes e, conseqüentemente, um derivativo pode assumir mais de um preço livre de arbitragem, sem que se saiba qual deles é o melhor economicamente.

A idéia então passa a ser a de estabelecer algum critério por meio do qual escolher uma das possíveis medidas martingales, de tal forma que ela seja ótima sob algum critério. Com esse fim, FÖLLMER; SCHWEIZER (1991) desenvolvem o conceito de *medida martingale mínima*, sendo aquela na qual a estratégia de negociação adotada (não-auto-financiável) minimiza a esperança da diferença quadrática entre o valor do derivativo no instante terminal e o valor da carteira no instante atual acrescido dos ganhos com a estratégia de negociação até o vencimento. O critério da perda quadrática também é utilizado em DUFFIE; RICHARDSON (1991), no qual são estabelecidas *estratégias de negocição de variância mínima*. Também pelo critério de variância, SCHWEIZER (1995) determina a *medida martingale variância-ótima*, na qual é minimizada a variância do *erro de hedge* no instante terminal, i.e., a diferença entre o valor do derivativo e o da carteira corresponde à estratégia de negociação adotada.

BERTSIMAS; KOGAN; LO (1999), supondo um processo markoviano de preços e uma opção de compra européia (com uma função de *payoff* arbitrária), denotam a fonte de incompletude do mercado por uma variável aleatória que não seja perfeitamente correlacionada com o ativo subjacente do derivativo. Derivam então, na forma recursiva, através de programação dinâmica estocástica, a estratégia ótima de negociação que minimiza o erro de hedge na data terminal.

Também através de programação dinâmica estocástica, ČERNÝ (2003) soluciona o problema de hedge pelo critério média-variância em um modelo em tempo discreto. O autor demonstra como a medida martingale variância-ótima surge no problema de *pro-*

[1] Daqui em diante denominada simplesmente medida neutralizadora do risco.

gramação dinâmica estocástica e como pode-se calcular a esperança condicionada do valor do derivativo sob esta nova medida.

Dentre várias referências, KARATZAS et al. (1991) e SCHIED; WU (2005) utilizam-se da teoria da *dualidade*, abordando o problema de precificação e hedge em mercados incompletos através da solução do problema de maximização da utilidade esperada da riqueza do investidor na data terminal (de vencimento) do derivativo. Pela abordagem dos primeiros, partindo de um mercado incompleto é possível torná-lo completo através da introdução de ativos 'fictícios' e impondo-se restrições em relação a eles na solução do problema, de tal modo que a estratégia de negociação replicante obtida para este mercado completo coincida com a estratégia de negociação ótima a ser adotada no mercado incompleto.

Ainda se valendo da técnica de programação dinâmica estocástica, EL KAROUI; QUENEZ (1995) mostram que, a despeito de não haver um preço único a ser determinado para um derivativo em um mercado incompleto, existe uma faixa de valores dentro da qual o preço real do mesmo deve estar. Estudam então o preço máximo e o preço mínimo através de métodos de *controle estocástico*.

FRITTELLI (2000b) indica as condições suficientes para a existência de uma medida martingale equivalente única que minimiza a *entropia relativa* em relação à medida de probabilidade natural considerada, denominada *medida martingale de entropia relativa mínima*. Ao caracterizar a densidade desta medida, o autor demonstra a equivalência entre a maximização da esperança de uma função de utilidade exponencial e a minimização da entropia relativa.

Em tempo discreto, SCHULMERICH; TRAUTMANN (2001) propõem uma estratégia de negociação auto-financiável que minimiza o erro esperado de hedge (também denominado *expected shortfall*) apenas localmente, i.e., para o próximo intervalo de tempo. NAKANO (2003) segue a mesma abordagem considerando restrições adicionais ao problema. GAMBA; PELLIZZARI (2002) introduzem o 'preço de reserva' na abordagem da maximização da utilidade esperada na data terminal, sendo este o preço mínimo que torna atrativo ao investidor lançar um derivativo. STETTNER (2000) faz uma análise de uma série de modelos, todos em tempo discreto considerando mercados incompletos.

Ainda em tempo discreto, CARR; GEMAN; MADAN (2001) reformulam o conceito de oportunidade de arbitragem para *oportunidade aceitável*, na qual o resultado esperado desta em todas as medidas de probabilidade de um determinado conjunto é superior a um determinado piso correspondente a cada uma das probabilidades em questão. Então, derivam uma contraparte do primeiro e do segundo teoremas fundamentais de precificação de ativos[2], possibilitando a obtenção de um preço racional para um derivativo mesmo em um mercado incompleto.

[2]O primeiro teorema indica que um mercado é livre de arbitragem se e somente o conjunto de medidas martingales não é vazio. O segundo indica que um mercado é completo se e somente se existe apenas uma medida martingale equivalente. Vide HARRISON; KREPS (1979).

Capítulo 3

Considerações Econômicas

A teoria de equilíbrio geral, conforme frisado por PINDYCK; RUBINFELD (1999, p. 628), determina os preços e as quantidades dos ativos em uma economia, em todos os mercados simultaneamente, para que se atinja um equilíbrio (a ser definido adiante), de tal forma que não haja incentivos para que *agentes individuais* e *firmas* tomem decisões de consumo, investimento e produção diferentes daquelas determinadas em equilíbrio.

Conforme DUFFIE (1988, p. 39), uma *economia* é uma coleção de *primitivas*, sendo estas, basicamente, os perfis de *consumo*, *preferência*, *dotações*[1] e *investimentos* dos *agentes individuais* e de *produção* das *firmas*, para todos os agentes individuais e todas as firmas existentes. Formalmente, uma economia é denotada por:

$$\mathscr{E} = ((C_i, \succeq_i, e_i)\,;(Y_j)\,;(\theta_{ij}))\,, \qquad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}. \tag{3.1}$$

sendo $\mathcal{J} = \{1, \ldots, J\}$ o conjunto dos índices das firmas associadas individualmente a um conjunto de planos de produção Y_j, $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$ o conjunto dos índices dos agentes individuais associados a um conjunto de planos de consumo C_i, à uma *relação de preferência*[2] $\succeq_i$ sobre C_i (uma função de utilidade, por exemplo), um vetor de dotações e_i (aquilo que assume-se que o consumidor possua para consumo e investimento) e uma parcela (quantia) $\theta_{ij} \in [0, 1]$ do vetor de produção $y_j \in Y_j$ escolhido pela firma j. Assumindo que toda escolha de produção das firmas seja repartida entre os agentes individuais, tem-se que $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1$ para todo $j \in \mathcal{J}$.

Seguindo DUFFIE (1988, p. 39-40), denota-se por $c = (c_1, \ldots, c_I)$ a *alocação de consumo* e por $y = (y_1, \ldots, y_J)$ a *alocação de produção*, sendo $c_i \in C_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$

[1] Em inglês, *endowments*.

[2] Este tópico será tratado de uma maneira mais formal na próxima seção.

e $y_j \in Y_j$ para todo $j \in \mathcal{J}$ em uma economia $\mathscr{E}$. Uma *alocação* é uma $(I+J)$-upla denotada por (c, y). Uma alocação é *praticável*[3] se

$$\sum_{i=1}^{I}(c_i - e_i) = \sum_{j=1}^{J} y_j. \tag{3.2}$$

i.e., se o *consumo líquido* (o plano de consumo menos as dotações) de todos os agentes individuais corresponder ao que for produzido pelas firmas. Uma alocação (c, y) é *estritamente suportada* por um *vetor de preços* p se $p \neq \mathbf{0}$ e

$$z \succ_i c_i \Rightarrow p \cdot z, \quad \forall z \in C_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{3.3}$$

e

$$p \cdot y_j \geq p \cdot z, \quad \forall z \in Y_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}. \tag{3.4}$$

Finalmente, diz-se que uma alocação (c, y) é *restrita por orçamento*[4] pelo vetor de preços p se, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$p \cdot c_i \leq p \cdot \left[e_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} y_j \right]. \tag{3.5}$$

A partir destes conceitos pode-se então definir o que se considera por equilíbrio.

Definição 2 *(Equilíbrio Arrow-Debreu, Equilíbrio Competitivo, Equilíbrio Walrasiano, DUFFIE (1988, p. 40)) Uma tripla (c, y, p) é um equilíbrio para $\mathscr{E}$ se (c, y) for uma alocação praticável que é restrita por orçamento e estritamente suportada por p.*

Uma economia de *troca pura* é aquela na qual não existem firmas. Formalmente, ela é expressa através de um número menor de primitivas, sendo denotada por

$$\mathscr{E} = (C_i, \succeq_i, e_i), \qquad i \in \mathcal{I}. \tag{3.6}$$

Conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 45), uma decisão de investimento consiste em formar um portfólio que "transfira" a riqueza do investidor de um período para outro. Esta transferência de riqueza considera o plano de consumo do investidor, baseado nos possíveis fatos que venham a ocorrer no futuro. Estes fatos passíveis de ocorrerem são denominados *estados da natureza* e, no presente contexto, estão relacionados com as possíveis trajetórias de preços dos ativos da economia.

---

[3]Em inglês, *feasible*.

[4]Em inglês, *budget-constrained*.

A partir dos trabalhos seminais de DEBREU (1959, cap. 7) e ARROW (1964), houve grande impulso para o estudo da tomada de decisão dos agentes individuais e das firmas em uma economia em condições de incerteza, i.e., em que não se sabe previamente o estado da natureza prevalecente. Basicamente, os referidos autores provaram que por meio da introdução de um mercado de valores mobiliários, negociando-se o que hoje denomina-se *ativos Arrow-Debreu*, que pagam uma unidade caso um determinado estado da natureza ocorra e zero caso contrário, é possível a obtenção de um equilíbrio[5].

Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 51), se é possível construir um portfólio que apresente um resultado positivo em um único estado da natureza e zero nos demais, então diz-se que o mesmo é *segurável*[6], i.e., é possível firmar um contrato de seguro contra a ocorrência do mesmo. Em outras palavras, se é possível constituir um ativo Arrow-Debreu para um determinado estado da natureza, então o mesmo é segurável. Um resultado importante, cuja prova pode ser encontrada em INGERSOLL JR. (1987, p. 51), é que um estado da natureza é segurável se e somente se os retornos dos ativos neste estado forem linearmente independentes do retorno dos ativos nos outros estados.

A possibilidade de se firmar um contrato de seguro contra qualquer estado da natureza é que permeia a definição de mercados *completos* e *incompletos*. Se qualquer estado da natureza é segurável, então o mercado é completo, caso contrário, incompleto. Segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 119), a preferência dos agentes individuais de uma economia está baseada no plano de consumo feito por cada um deles para cada um dos possíveis estados da natureza. Se este plano de consumo puder ser garantido através de uma carteira de investimento, então diz-se que este plano de consumo é *atingível*[7]. Então, pela definição de DOTHAN (1990, p. 20), um mercado é completo se e somente se todo plano de consumo for atingível, caso contrário, incompleto.

Segundo MAGILL; QUINZII (1996, p. 4), o método de análise de um modelo de equilíbrio desenvolvido na teoria de Arrow-Debreu foca em três questões: *existência*, *unicidade* e *otimalidade*[8] do equilíbrio. Conforme será mostrado adiante, estas questões apresentam diferenças quando são comparados mercados completos e incompletos, sendo as consequências observadas principalmente no processo de determinação dos preços dos

[5]Este é o resultado do teorema 2 em ARROW (1964).
[6]Em inglês, *insurable*.
[7]Em inglês, *attainable*.
[8]Em inglês, *optimality*.

ativos da economia.

Em trabalho seminal, RADNER (1972) demonstra que, a partir de um mercado originalmente incompleto, a introdução de uma sequência de mercados para bens de consumo e valores mobiliários que possam ser negociados em qualquer data[9] dentro do período de análise, sendo estes mercados introduzidos também incompletos em cada uma das datas, é possível obter um *equilíbrio de planos de consumo, preços e expectativas de preços*, hoje denominado *equilíbrio de Radner*. A idéia fundamental neste artigo é a de que a possibilidade de um agente efetuar uma sequência de transações permite ao mesmo lidar com a incerteza de modo que se alcance um equilíbrio de Arrow-Debreu, ao menos em uma economia de troca pura.

É neste sentido que MAGILL; QUINZII (1996, p. 1) argumentam que quandos os agentes da economia possuem conhecimento e habilidade apenas limitados para lidar com as incertezas inerentes ao futuro eles realizam transações sequencialmente as quais envolvem um comprometimento apenas limitado em relação aos possíveis estados da natureza. Segundo os mesmos autores, pode-se afirmar então que o efeito mais perverso originado pela *racionalidade limitada* dos agentes de uma economia não é que as expectativas dos mesmos se mostrem erradas no futuro mas sim que os mesmos restrinjam suas transações a um conjuntos de contratos em relação aos quais possuam uma chance menor de errar, impedindo que existam ativos Arrow-Debreu para todos os possíveis estados da natureza.

3.1 Modelo Multiperiódico para Análise de Equilíbrio Geral

Descreve-se aqui um modelo multiperiódico em tempo discreto a fim de que alguns resultados referentes a mercado completos e incompletos na análise de equilíbrio geral sejam expostos. Basicamente, confome será notado, trata-se de uma economia de troca pura. As especificações do modelo são as mesmas de DOTHAN (1990, p. 48). Considera-se então:

- Uma data inicial $t = 0$ e uma data final $t = T$, sendo possível a ocorrência de transações com os ativos da economia e consumo nas data de $t = 0$ até $t = T - 1$;

[9] Em inglês, *long-lived securities*.

- Um espaço amostral finito, denotado por Ω, constituído por $K < \infty$ elementos, i.e.:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$$

- Uma medida de probabilidade P em Ω, tal que $P(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$;

- Um único bem de consumo perecível;

- N valores mobiliários, todos eles *endógenos*, i.e., criados pelos próprios agentes individuais da economia, pois assume-se que não existam entidades como firmas e governo. Os valores mobiliários são infinitamente divisíveis e o mercado de negociação é *perfeito*, não existindo taxas nem outros custos associados com as transações efetuadas, podendo as última serem efetuadas na quantias desejadas. A eles está associada uma *matriz de resultados*[10] de ordem $(N \times K)$, denotada por $\mathbb{D}$, sendo que o elemento correspondente a n-ésima linha e a k-ésima coluna representa o resultado nos instante $t = T$ do valor mobiliário n caso o estado da natureza prevalecente seja k, denotado por $d_n(\omega_k)$, sendo $n = 1, \ldots, N$ e $k = 1, \ldots, K$. Os valores mobiliários são considerados *ex-dividendos*, i.e., não-efetuam pagamentos intermediários;

- Um conjunto finito de agentes individuais, representados pelo conjunto $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$. No instante $t = 0$ estes agentes conhecem apenas o conjunto de todos os possíveis estados da natureza e somente no instante $t = T$ tomam conhecimento do estado prevalecente. A *resolução da incerteza* no tempo ocorre da mesma maneira para todos os agentes, i.e., a *estrutura de informação*[11] é a mesma para todos os agentes;

- Cada agente individual é dotado de uma quantia do bem de consumo nos instantes $t = 0$ até $t = T$. O processo estocástico de dotação do i-ésimo agente é denotado por $e_i = (e_i(0), e_i(1), \ldots, e_i(T))$ sendo $e_i(0)$ um valor determinístico e $e_i(t)$, $t > 0$, uma variável aleatória;

- Cada agente individual da economia consome o bem de consumo nos instantes de $t = 0$ à $t = T$. O processo estocástico de consumo do i-ésimo agente é denotado por $c_i = (c_i(0), c_i(1), \ldots, c_i(T))$, sendo $c_i(0)$ um valor determinístico e $c_i(t)$, $t > 0$, uma variável aleatória;

[10] Em inglês, *payoffs*.

[11] Este tópico será abordado na próxima subseção.

- Seja C o conjunto de planos de consumo. Assume-se que os elementos deste conjunto permitam o estabelecimento de uma relação de preferência[12].

Nota 3 *Conforme frisado por DUFFIE (1988, p. 35), grande parte da teoria econômica está baseada na premissa de que, dadas duas alternativas, um agente poderá e irá, se lhe for permitido, escolher aquela que lhe é preferível. Segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 4), uma relação binária $\succeq$ em C (o conjunto de planos de consumo) é uma coleção de pares de planos de consumo (x, y), $x, y \in C$. Se (x, y) faz parte da relação $\succeq$, então escreve-se $x \succeq y$ e diz-se que "x é preferível à y"; caso contrário, escreve-se $x \not\succeq y$ e diz-se que "x não é preferível à y". Uma relação binária é transitiva se $x \succeq y$ e $y \succeq z$ implicam $x \succeq z$, i.e., se x é preferível à y e y é preferível à z, então x é preferível à z. Uma relação binária é completa se para quaisquer dois planos de consumo $x, y \in C$, tem-se que ou $x \succeq y$ ou $y \succeq x$, i.e., dois planos de consumo podem ser sempre comparados e ordenados.*

Ainda segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 4), para que uma relação binária seja uma relação de preferência é necessário que ela seja tanto transitiva como completa. Define-se então relações de preferência estrita e indiferente. Uma relação de preferência estrita é denotada pelo símbolo $\succ$ e diz-se que "um plano de consumo x é estritamente preferível a um plano de consumo y", denotando-se por $x \succ y$, se $x \succeq y$ e $y \not\succeq x$. Uma relação de preferência indiferente é denotada pelo símbolo $\sim$ e diz-se que "dois planos de consumo $x, y \in C$ são indiferentes um em relação ao outro", denotando-se por $x \sim y$, se $x \succeq y$ e $y \succeq x$.

Seguindo DUFFIE (1988, p. 35), seja então $\succeq$ uma relação de preferência, G_c o conjunto de escolhas $x \in C$ "no mínimo tão boas quanto c", denotado por $G_c = \{x \in C : x \succeq c\}$, e B_c o conjunto de escolhas $x \in C$ "no máximo tão boas quanto c", denotado por $B_c = \{x \in C : c \succeq x\}$. Se C é um subconjunto de um espaço topológico e G_c e B_c são conjuntos fechados para todo $c \in C$, então a relação de preferência $\succeq$ é contínua. Se C é um subconjunto de um espaço vetorial e G_c for um conjunto convexo para todo $c \in C$, então a relação de preferência $\succeq$ é convexa.

Uma função $U : C \to \mathbb{R}$ é uma função de utilidade representanto a relação de preferência $\succeq$ sobre C desde que satisfaça

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y). \tag{3.7}$$

[12] Vide Nota 3.

segundo DUFFIE (1988, p. 35). Um resultado importante, expresso e demonstrado em HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 5) e DUFFIE (1988, p. 36), é que se C possui um número finito de elementos, então a relação de preferência efetivamente pode sempre ser representada por uma função de utilidade.

Seguindo BINGHAM; KIESEL (2004, p. 290), na ocorrência de uma função de utilidade durante o texto refere-se à seguinte definição:

Definição 4 *Uma função contínua $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente crescente, estritamente côncava e continuamente diferenciável com $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty$ é denominada uma função de utilidade.*

Então, pelas características do modelo multiperiódico descrito, o último item no mesmo assegura que é possível representar as preferências dos agentes da economia descrita por meio de funções de utilidade.

Nota 5 *Nota-se que não foi especificado a priori no modelo considerado nenhum conjunto com o preço inicial dos valores mobiliários da economia. Em uma análise de equilíbrio geral, os preços dos ativos são derivados a partir de princípios microeconômicos, segundo os quais os perfis de demandas dos agentes são determinados de acordo com suas relações de preferência e restrições orçamentárias. Os preços de equilíbrio a serem determinados têm então o papel de fazer com que a demanda agregada seja igual a oferta agregada satisfazendo-se as restrições orçamentárias dos agentes da economia, conforme frisado por FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 137). Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 199), quando a dinâmica do preço dos ativos ou a distribuição de probabilidade dos mesmos é determinada de uma maneira exógena ao modelo, assim como as avaliações dos agentes em relação à probabilidade de ocorrência dos estados da natureza, então tem-se uma análise parcial de equilíbrio.*

3.1.1 Estrutura de Informação e Consistência Informacional

Do modo como foi descrito o modelo, pode-se representá-lo através de uma *estrutura de árvore.* Seguindo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 180), o que está sendo assumido pelo modelo descrito é que o estado da natureza prevalecente na economia está sendo revelado aos agentes de forma parcial, a medida que o tempo passa, sendo que no instante $t = T$ o estado da natureza é completamente revelado. É a este modo de resolução

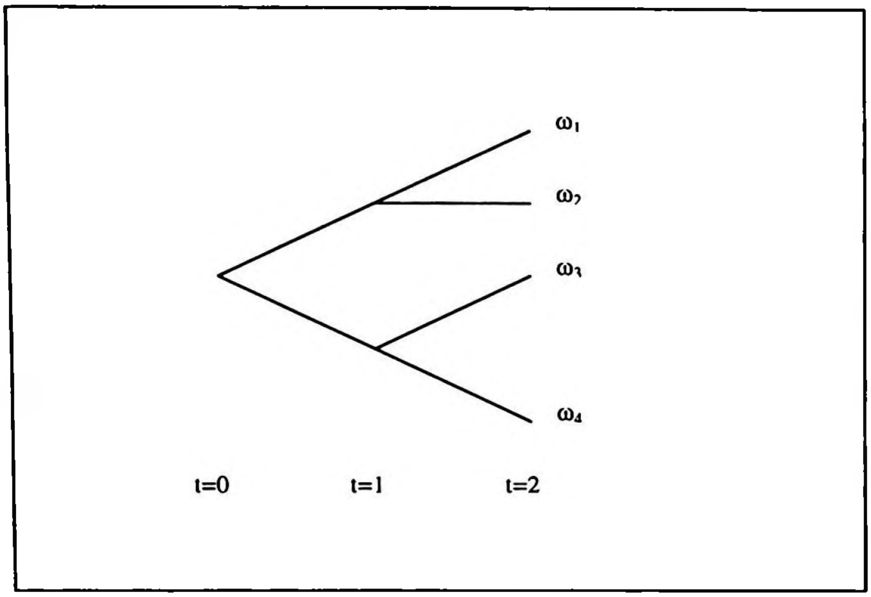

Figura 3.1: Exemplo de Representação da Estrutura de Informação.

da incerteza que está sendo designado o termo estrutura de informação. Uma estrutura de árvore de uma economia de três períodos e com 4 estados da natureza possíveis é representada pela figura 3.1.

É necessário que o comportamento dos agentes da economia (o plano de consumo e a estratégia de negociação dos valores mobiliários) e as demais variáveis (como os preços e as dotações dos agentes) sejam consistentes com a estrutura de informação apresentada. Para isso são necessários alguns conceitos relacionados aos processos estocásticos.

Seguindo SHIRYAEV (1995, p. 10), *eventos* são todos os subconjuntos $A \subset \Omega$ tais que, sob as condições de um experimento, seja possível afirmar que "o resultado obtido $\omega \in A$" ou "o resultado obtido $\omega \notin A$". Uma coleção $\mathscr{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ é denominada uma *partição* ou *decomposição* de Ω composta por *átomos* A_i se os A_i forem conjuntos disjuntos par a par, não vazios, de tal modo que $\Omega = A_1 + \ldots + A_n$. Ainda, pode-se dizer, conforme LIMA (2001, p. 78), que Ω é *soma direta* dos átomos da partição, i.e., $\Omega = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$. Uma partição é mais *fina* em relação à uma outra qualquer se qualquer evento da última for representado por uma união de eventos da primeira. Deste modo, o processo de resolução da incerteza, ou o modo como a informação é revelada, pode ser descrito por uma sequência de partições de Ω indexadas no tempo que vão se tornando mais finas à medida que o tempo passa. Formalmente, seguindo DOTHAN (1990, p. 53), define-se estrutura de informação:

Definição 6 *Uma estrutura de informação* $\mathbb{F} = \{\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_T\}$ *é uma sequência de* *partições* $\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_T$ *tal que:*

1. $\mathscr{P}_0 = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_K\}\}$;

2. $\mathscr{P}_T = \{\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_K\}\}$; *e*

3. *Para cada* $0 \leq T \leq T-1$ *a partição* $\mathscr{P}_{t+1}$ *é mais fina do que a partição* $\mathscr{P}_t$.

Conforme frisado por DOTHAN (1990, p. 53), a sequência de partições se tornar cada vez mais fina representa o fato de que o conhecimento dos agentes da economia não diminui à medida que o tempo passa, visto que os conjuntos das partições anteriores podem ser obtidos através de combinações dos conjuntos das partições posteriores. Para que fique mais claro o que foi exposto até aqui, tem-se o seguinte exemplo:

Exemplo 7 *Na figura 3.1, as partições de* Ω *para cada período de tempo são dadas por:*

$$\mathscr{P}_0 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\} \tag{3.8}$$

$$\mathscr{P}_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\} \tag{3.9}$$

$$\mathscr{P}_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}\} \tag{3.10}$$

Ainda segundo DOTHAN (1990, p. 53), para que haja consistência informacional entre a estrutura de informação dada e o processo de consumo ou de dotação requer-se que nenhum destes processos represente mais informação do aquela cohecida pelos agentes através da estrutura de informação. O objetivo é fazer com que a realização das variáveis aleatórias do modelo não permita aos agentes da economia antecipar o futuro. O estado da natureza prevalecente só deve ser conhecido pelo agente no período de tempo final do modelo. Em outras palavras, em relação às partições para cada período de tempo, o agente deve saber em qual dos conjuntos de cada uma delas está o estado da natureza prevalecente, mas sem que seja possível distingui-lo dos demais pertencentes ao conjunto identificado em cada uma das partições. Em termos informais, este é o conceito de *mensurabilidade de uma variável aleatória em relação a uma partição.*

Segundo SHIRYAEV (1995, p. 80), uma variável aleatória é dita $\mathscr{P}$*-mensurável* se e somente se ela assume valores constantes nos átomos da partição $\mathscr{P}$. Ainda conforme SHIRYAEV (1995, p. 474), uma variável aleatória X_t é uma *sequência estocástica*[13] se

[13] É comum encontrar o termo *adaptada* em substituição à estocástica em definições similares a esta. Aqui, a preferência será dada ao primeiro termo.

para cada $t \geq 0$ a variável X_t é $\mathscr{P}_t$-mensurável, escrevendo-se $X = (X_t, \mathscr{P}_t)_{t\geq 0}$[14]; caso para cada $t \geq 1$ a variável X_t seja $\mathscr{P}_{t-1}$-mensurável, então diz-se que $X = (X_t, \mathscr{P}_{t-1})_{t\geq 1}$ é uma *sequência previsível.*

Dadas as definições acima, a exigência de consistência informacional, segundo DOTHAN (1990, p. 53), é satisfeita considerando-se:

- Todos os agentes da economia possuem a mesma informação, representada pela estrututura de informação $\mathbb{F}$;

- Para $0 \leq t \leq T$, as sequências c_i e e_i são adaptadas em relação à $\mathbb{F}$.

3.1.2 Restrições ao Processo de Consumo

Em cada período de tempo, os agentes da economia só poderão consumir aquilo que esteja "dentro do orçamento". Basicamente, o consumo de um agente i no instante de tempo t é limitado pela dotação $e_i\,(t)$ e pelo valor acumulado referente a carteira de investimento do agente. Seguindo DOTHAN (1990, p. 55), a consideração deste fato é feita introduzindo-se o conceito de *conjuntos orçamento*[15].

Definição 8 *Dado um processo de dotação e_i e preços dos valores mobiliários $p = \{p_n\,(t)\}$, o conjunto orçamento $\mathbb{B}\,(e_i, p)$ é o subconjunto do conjunto de planos de consumo C tal que $c_i \in \mathbb{B}\,(e_i, p)$ se e somente se existe uma sequência previsível de variáveis aleatórias $\theta = \{\theta_n^i\,(t)\}$, interpretadas como a quantia do valor mobiliário n possuída pelo agente i do instante $t-1$ até o instante t, para cada $1 \leq t \leq T$, de tal forma que:*

$$c_i\,(t) = e_i\,(t) + \sum_{n=1}^{N} \left[\theta_n^i\,(t) - \theta_n^i\,(t-1)\right] p_n\,(t) \tag{3.11}$$

sendo $\theta_n^i\,(0) = \theta_n^i\,(T+1) \equiv 0$ e $p_n\,(T) \equiv d_n\,(\omega_k)$. Diz-se ainda que o processo de consumo determinado pela expressão (3.11) é gerado pelo processo de dotação e_i e pela estratégia de negociação θ[16].

[14]Seguindo SHIRYAEV (1999, p. 95), sequências estocásticas são escritas deste modo para enfatizar a propriedade de mensurabilidade de X_t em relação à partição $\mathscr{P}_t$ (ou em relação à σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ conforme será discutido no próximo capítulo).

[15]Em inglês, *budget sets.*

[16]Vide Nota 10.

Nota 9 *Nota-se claramente a similaridade entre as expressões (3.11) e (3.5). Inicialmente, como estamos considerando uma economia de troca pura, uma alocação praticável, de acordo com a expressão (3.2), é aquela que satisfaz* $\sum_{i=1}^{I} c_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$*. Assim, o consumo dos agentes deve equivaler à quantia de bens de consumo com os quais os mesmos são dotados, em todos os períodos de tempo. Além disso, isto está de acordo com a hipótese considerada no modelo que o bem de consumo é perecível, i.e., não faz sentido estocá-lo. Então, pelo lema apresentado em DUFFIE (1988, p. 40), a expressão (3.5) é satisfeita com o sinal de igualdade, sendo então equivalente à expressão (3.11).*

Nota 10 *A sequência* $\theta = \{\theta_n^i(t)\}$*, para todo* $1 \leq n \leq N$ *e* $0 \leq t \leq T$*, define as estratégias de negociação do i-ésimo agente da economia e, satisfazendo a expressão (3.11), são denominadas estratégias de negociação adminssíveis, segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 225). Conforme salientado por FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 224), a previsibilidade de* $\theta_n^i(t)$ *expressa o fato de que os investimentos dos agentes da economia devem ser feitos no início de cada período de negociação, sem que as variações dos preços dos ativos possam ser antecipadas.*

3.1.3 Equilíbrio

Basicamente, a questão do equilíbrio em uma economia de troca pura, conforme o modelo exposto, está relacionada com a determinação dos preços dos valores mobiliários da economia e com as quantias transacionadas pelos agentes de tal modo que a quantidade demandada seja igual a ofertada, em todos os períodos de tempo. Seguindo DOTHAN (1990, p. 55), o equilíbrio no contexto do presente modelo é definido por:

Definição 11 *Dado um processo de dotação* e_i*, um equilíbrio multiperiódico consiste em uma sequência adaptada de preços* $p = \{p_n(t)\}$ *para todo* $1 \leq n \leq N$ *e* $0 \leq t \leq T$ *e de estratégias de negociação* $\theta = \{\theta_n^i(t)\}$*, para todo* $1 \leq i \leq I$*,* $1 \leq n \leq N$ *e* $1 \leq t \leq T$ *tal que o processo de consumo gerado por* e_i *e* θ *otimiza a relação de preferência do agente* i *no conjunto orçamento* $\mathbb{B}(e_i, p)$ *e de tal modo que as quantidades agregadas transacionadas de valores mobiliários, i.e., as quantias ofertadas e demandadas calculadas considerando-se todos os agentes da economia, sejam iguais. Formalmente, esta última condição é expressa por:*

$$\sum_{i=1}^{I} \theta_n^i(t, \omega) = 0 \tag{3.12}$$

para todo $\omega \in \Omega$, $1 \leq n \leq N$ *e* $1 \leq t \leq T$.

Nota 12 *Seguindo DUFFIE (1988, p. 107), e economia considerada no modelo aqui tratado é uma economia de troca dinâmica, visto que os agentes da economia podem efetuar transações com os valores mobiliários em mais de um período. Caso contrário, a economia de troca considerada seria estática. Assim, o equilíbrio acima definido é um equilíbrio dinâmico. Caso contrário, tem-se um equilíbrio estático. Adiante serão abordadas questões relacionando o equilíbrio estático e o equilíbrio dinâmico em economias de troca pura.*

3.1.4 Eficiência de Pareto

O conceito de *eficiência de Pareto* refere-se à questão de ser ótimo ou não, no sentido a ser definido a seguir, o equilíbrio alcançado em uma economia. Segundo DUFFIE (1988, p. 42), em muitas circunstâncias o termo "Pareto-ótimo" substitui o termo eficiente. Seguindo DOTHAN (1990, p. 56), tem-se o seguinte conceito de eficiência de Pareto.

Definição 13 *Uma alocação de consumo* $c = \{c_i\}$ *possui eficiência de Pareto, também denominada Pareto-eficiente, se e somente se não existe outra alocação praticável*[17] $b = \{b_i\}$ *tal que para cada agente* i, $b_i \succ c_i$.

3.2 Mercados Completos e Incompletos

Em termos gerais, conforme frisado anteriormente, os mercados completos oferecem condições para que qualquer agente de uma economia estabeleça um contrato que seja função da ocorrência de qualquer estado da natureza, visto que o mesmo pode constituir uma carteira de investimentos cujo valor replique o do contrato estabelecido, sob qualquer hipótese, de forma a se resguardar contra oscilações de preços. Em outras palavras, em mercados completos todos os estados da natureza são seguráveis. A seguir, considera-se inicialmente uma economia estática, i.e., na qual os agentes realizam transações com os valores mobiliários uma única vez, considerando-se após isso uma economia dinâmica, adequada ao presente contexto em que está sendo apresentado um modelo multiperiódico. A questão do equilíbrio e da eficiência de Pareto serão abordados nestes dois modelos de economia no caso de mercados completos e incompletos.

[17] Vide Nota 9.

3.2.1 Economia Estática

O modelo análogo à uma economia estática é o modelo uniperiódico, ou aquele na qual não existem decisões de consumo e investimento entre as datas inicial e final da economia. HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 124) definem mercado completo da seguinte forma:

Definição 14 *Um mercado é completo quando existe um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu, i.e., um título contingente para cada estado da natureza, o qual paga uma unidade monetária na ocorrência de um determinado estado da natureza e zero, caso contrário.*

Conforme frisado por HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 124), nos mercados de valores mobiliários reais o que se observa são *valores mobiliários complexos*, ou *ativos complexos*, tais como ações ordinárias, ao invés de *títulos contingentes elementares* como os ativos do tipo Arrow-Debreu. Entretanto, se o número de ativos complexos *linearmente independentes* for igual ao número de estados da natureza, demonstra-se que existe um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu que podem ser constituídos através da criação de carteiras que sejam compostas pelos ativos complexos existentes na economia. Seguindo ČERNÝ (2004, p. 17), considere a matriz de resultados transposta $\underset{(K\times N)}{\mathbb{D}^T}$ dos ativos complexos da economia:

$$\mathbb{D}^T = \begin{pmatrix} d_1(\omega_1) & d_2(\omega_1) & \cdots & d_N(\omega_1) \\ d_1(\omega_2) & d_2(\omega_2) & \cdots & d_N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1(\omega_K) & d_2(\omega_K) & \cdots & d_N(\omega_K) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

e a matriz de resultados dos ativos Arrow-Debreu, denotada por $\underset{(K\times N)}{\zeta}$, na qual cada linha representa o resultado do ativo Arrow-Debreu de cada coluna:

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Para que um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu seja obtido através dos ativos complexos da economia, é necessário que exista uma matriz $\underset{(N\times N)}{x}$, cada linha representando o número de ativos complexos necessários para que seja obtido o ativo Arrow-Debreu correspondente à coluna considerada, tal que:

$$\mathbb{D}^T x = \zeta. \tag{3.15}$$

Nota-se então que a matriz x deve ser a matriz inversa de $\mathbb{D}^T$ e, para que esta matriz exista, é necessário que $\mathbb{D}^T$ seja uma matriz quadrada de posto completo, também chamada de regular, não-singular, inversível. Seja $\aleph\left(\mathbb{D}^T\right)$ o posto da matriz $\mathbb{D}^T$. Sabe-se, segundo LIMA (2001, p. 95), que para toda matriz $\underset{(K\times N)}{\mathbb{D}^T}$, o posto segundo linhas e o posto segundo colunas são iguais, i.e., $\aleph\left(\mathbb{D}^T\right) = \aleph\left(\mathbb{D}\right)$. Como as K linhas da matriz $\mathbb{D}^T$ são linearmente independentes, visto que representam os estados da natureza, a mesma só será quadrada se houver K colunas linearmente independentes, ou seja, se o número de ativos complexos linearmente independentes da economia for igual ao número de estados da natureza. Satisfazendo-se esta condição, pode-se então obter a matriz x fazendo-se:

$$x = \left(\mathbb{D}^T\right)^{-1}\zeta \tag{3.16}$$

demonstrando-se que se o número de ativos complexos da economia for igual ao número de estados da natureza, é possível criar um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu.

Nota 15 *Uma observação interessante, conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 187), é que uma carteira contendo um ativo Arrow-Debreu para cada estado da natureza é um ativo livre de risco, visto que pagará uma unidade monetária qualquer que seja o estado da natureza que ocorra. Assim, em um mercado completo sempre existirá um ativo livre de risco.*

Na discussão precedente, foi visto que se o número de ativos complexos linearmente independentes for igual ao número de estados da natureza, então o mercado é completo. Em uma economia, o número de ativos complexos pode ser maior, igual ou menor do que o número de estados da natureza, sendo o número de ativos complexos linearmente independentes necessariamente menor ou igual do que o número de estados da natureza. Seguindo ČERNÝ (2004, p. 27), temos então as seguintes situações:

1. Caso o número de ativos complexos seja maior do que o número de estados da natureza, i.e., $N > K$:

    - Se $\aleph\left(\mathbb{D}^T\right) = K$, então trata-se de um mercado completo com *ativos redundantes*, i.e., existem ativos que podem ser constituídos através de combinações lineares dos demais, sendo estes últimos denominados *ativos-base* da economia;

- Se $\aleph(\mathbb{D}^T) < K$, então o mercado é incompleto e existem ativos redundantes.

2. Caso o número de ativos complexos seja igual ao número de estados da natureza, i.e., $N = K$:

    - Se $\aleph(\mathbb{D}^T) = K$, então trata-se de um mercado completo sem *ativos redundantes*;
    - Se $\aleph(\mathbb{D}^T) < K$, então o mercado é incompleto e existem ativos redundantes.

3. Caso o número de ativos complexos seja menor do que o número de estados da natureza, i.e., $N < K$:

    - Se $\aleph(\mathbb{D}^T) = N$, então o mercado é incompleto e não existem ativos redundantes;
    - Se $\aleph(\mathbb{D}^T) < N$, então o mercado é incompleto e existem ativos redundantes.

Conforme HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 124), nos mercados de valores mobiliários reais o número de ativos complexos é menor do que o número de estados da natureza, impossibilitando a formação de um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu, i.e., os mercados reais são incompletos. Entretanto, através de um mercado de valores mobiliários *financeiros* é possível "criar"(sintetizar) ativos que *completem o mercado*. Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 196), os ativos necessários para completar o mercado são *opções de compra* sobre a *carteira de mercado*, sendo esta última a carteira composta por todos os ativos da economia[18], também denominada de *carteira de índices de estado*[19]. Seguindo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 129), tem-se:

Definição 16 *Uma opção de compra européia lançada sobre uma ação ordinária é um valor mobiliário financeiro que dá ao seu detentor, também denominado titular, o direito de comprar o ativo subjacente por um preço e em uma data pré-especificados. Da mesma forma, uma opção de venda européia dá ao seu titular o direito de vender o ativo subjacente por um preço e em uma data pré-especificados. Os preços pré-especificados são denominados preços de exercício; as datas pré-especificadas são denominadas datas de vencimento da opção.*

[18] Vide Nota 17.

[19] Em inglês, *state index portfolio*.

Nota 17 *Assume-se a existência de uma carteira de mercado, i.e., uma carteira que represente o valor de todos os ativos da economia. Seguindo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 129), assume-se que o valor desta carteira no período* T*, denotado por* $\mathfrak{M}(\omega_k)$*,* $k = 1, \ldots, K$*, seja estritamente positivo e que separe os estados, i.e.,* $\mathfrak{M}(\omega_i) \neq \mathfrak{M}(\omega_j)$ *para* $i \neq j$.

Considere então que não seja possível, a partir dos ativos complexos da economia, criar um ativo Arrow-Debreu para um determinado estado da natureza. Seguindo INGERSOLL JR. (1987, p. 196), inicialmente enumera-se os estados da natureza em ordem crescente de $\mathfrak{M}(\omega_i)$, assegurando-se que $\mathfrak{M}(\omega_{i+1}) > \mathfrak{M}(\omega_i) + 1$ e $\mathfrak{M}(\omega_1) > 1$. Seja s o estado da natureza que se quer segurar. Considere uma opção de compra sobre a carteira de mercado, com data de vencimento T e preço de exercício $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_s)$. O valor desta opção na data de vencimento, na ocorrência do estado da natureza i, denotado por $\mathscr{C}_s(\omega_i)$, é dado por:

$$\mathscr{C}_s(\omega_i) = \begin{cases} 0, & i \leq s, \\ \mathfrak{M}(\omega_i) - \mathfrak{M}(\omega_s), & i > s. \end{cases} \tag{3.17}$$

Considera-se agora uma segunda opção de compra sobra a carteira de mercado sendo $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_s) + 1$. Denotando o valor desta nova opção no instante terminal por $\hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i)$, tem-se:

$$\hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i) = \begin{cases} 0, & i \leq s, \\ \mathfrak{M}(\omega_i) - \mathfrak{M}(\omega_s) - 1, & i > s. \end{cases} \tag{3.18}$$

observando-se que $\mathfrak{M}(\omega_i) - \mathfrak{M}(\omega_s) - 1 > 0$ por construção.

Considere então a composição de uma carteira com uma quantidade comprada da opção $\mathscr{C}_s(\omega_i)$ e uma quantidade vendida da opção $\hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i)$. Na data de vencimento, esta carteira valerá:

$$\mathscr{C}_s(\omega_i) - \hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i) = \begin{cases} 0, & i \leq s, \\ 1, & i > s. \end{cases} \tag{3.19}$$

Verifica-se então que uma carteira com uma quantidade comprada das opções $\mathscr{C}_{s-1}(\omega_i)$ e $\hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i)$ com preços de exercício $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_{s-1})$ e $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_s) + 1$, respectivamente, e com uma quantidade vendida das opções $\mathscr{C}_s(\omega_i)$ e $\hat{\mathscr{C}}_{s-1}(\omega_i)$ com preços de exercício $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_s)$ e $\mathscr{K} = \mathfrak{M}(\omega_{s-1}) + 1$, respectivamente, valerá na data de vencimento:

$$-\mathscr{C}_s(\omega_i) + \hat{\mathscr{C}}_s(\omega_i) - \hat{\mathscr{C}}_{s-1}(\omega_i) + \mathscr{C}_{s-1}(\omega_i) = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s. \end{cases} \tag{3.20}$$

A carteira descrita pela expressão (3.20), segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 137), é o que se denomina *spread borboleta*[20] com opções de compra. Tal estratégia é usualmente adotada no mercado financeiro quando o investidor não acredita que o preço do ativo subjacente irá apresentar variações de preço muito altas, conforme HULL (1999, p. 190).

Nota 18 *Segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 130), assumir a existência de uma carteira de mercado sobre a qual possa ser lançada uma opção equivale a dizer que através do valor desta mesma carteira no período T é possível saber o resultado nesta mesma data de qualquer ativo complexo, como se qualquer ativo complexo da economia fosse função apenas dela. Isto ocorre em função das hipóteses satisfeitas pela carteira de mercado*[21]*, em especial à de que a mesma separa os estados. Conforme frisam os referidos autores, a hipótese da existência de uma carteira de mercado é muito forte, não sendo satisfeita nos mercados de valores mobiliários reais.*

Considerações sobre Equilíbrio e Eficiência de Pareto em uma Economia Estática

Em uma economia estática, as considerações referentes à definição de equilíbrio e eficiência de Pareto mantém-se, considerando-se que as únicas datas de transação correspondem ao período inicial e final da economia.

Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 190), um resultado já estabelecido na literatura econômico-financeira é que o equilíbrio competitivo em um mercado completo é Pareto-eficiente. Daqui em diante busca-se comprovar este resultado.

Conforme frisado anteriormente, se o número de ativos complexos linearmente independentes for igual ao número de estados da natureza, então o mercado é completo. Segundo DOTHAN (1990, p. 12), se este fato se verifica, então todo processo de consumo é atingível, i.e., existe uma estratégia de negociação θ que gera o plano de consumo desejado pelo agente individual da economia. Assim, em um mercado completo todo plano de consumo é atingível. Ainda segundo DOTHAN (1990, p. 11), se todo plano de consumo é atingível, então a alocação de consumo em um estado de equilíbrio em uma economia é Pareto-eficiente, enunciando-se o seguinte teorema, extraído de DOTHAN (1990, p. 12):

[20] Em inglês, *spread butterfly*.

[21] Vide Nota 17.

Teorema 19 *Se* $\aleph(\mathbb{D}) = K$, *então todo processo de consumo é atingível e consequentemente toda alocação de consumo em um estado de equilíbrio é Pareto-eficiente.*

Demonstração. Um processo de consumo $c = \{c(0), c(T)\}$ é atingível se e somente se o sistema de equações lineares dado por

$$\underset{(K\times N)(N\times 1)}{\mathbb{D}^T \theta} = \underset{(K\times 1)}{c(T)} \tag{3.21}$$

tem solução dada pelo vetor θ ou, equivalentemente, se e somente se o vetor $c(T)$ for combinação linear das colunas de $\mathbb{D}^T$. Mas como $\mathbb{D}^T$ possui K colunas linearmente independentes (visto que, por hipótese $\aleph(\mathbb{D}) = K$) e $c(T)$ é um vetor de dimensão K, então $c(T)$ é combinação linear das colunas de $\mathbb{D}^T$. ∎

Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 191), o resultado obtido acima, i.e., em um mercado completo o equilíbrio alcançado é Pareto-eficiente, em geral não é obtido em um mercado incompleto. É verdade que um mercado competitivo incompleto irá alcançar uma alocação dos valores mobiliários que seja Pareto-eficiente com restrições; entretanto, em geral ainda haverá uma *melhora de Pareto*[22] se novos valores mobiliários financeiros forem introduzidos para completar o mercado, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 191).

Apesar disso, INGERSOLL JR. (1987, p. 192) também afirma que um mercado incompleto não é necessariamente Pareto-ineficiente. Antes de demonstrar este resultado, cabe a seguinte nota.

Nota 20 *Conforme a Nota 3, uma relação de preferência pode sempre ser expressa por uma função de utilidade quando* $|\Omega| < \infty$, *i.e., quando o número de estados da natureza possíveis for finito. Ainda, HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 8) demonstram condições para que uma relação binária seja representada em termos de utilidade esperada. Neste caso, seguindo INGERSOLL JR. (1987, p.189), a decisão de investimento de um agente da economia em um mercado completo pode ser expressa através do seguinte problema:*

$$\underset{\nu_k}{\textit{Maximizar:}} \quad \sum_{k=1}^{K} \pi_k U(\nu_k, \omega_k) \tag{3.22}$$

$$\textit{Sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^{K} \nu_k p_k = W_0. \tag{3.23}$$

sendo π_k *a probabilidade subjetiva de ocorrência do estado k,* $U(\cdot,\cdot)$ *uma função de utilidade,* ν_k *a quantidade do ativo Arrow-Debreu referente ao estado k com preço* p_k *e* W_0

[22] Em inglês, *Pareto improvement*.

a riqueza inicial do indivíduo[23]*. A fim de solucionar este problema de maximização com restrições de igualdade, forma-se inicialmente o lagrangiano:*

$$L = \sum_{k=1}^{K} \pi_k U(\nu_k, \omega_k) + \lambda \left[W_0 - \sum_{k=1}^{K} \nu_k p_k \right]. \tag{3.24}$$

Então,

$$0 = \tfrac{\partial L}{\partial \lambda} = W_0 - \textstyle\sum_{k=1}^{K} \nu_k^* p_k, \tag{3.25}$$

$$0 = \tfrac{\partial L}{\nu_k} = \pi_k U_1(\nu_k^*, \omega_k) - \lambda^* p_k \tag{3.26}$$

é uma condição necessária e suficiente para que se resolva o problema de maximização[24]*, sendo $U_1(\cdot,\cdot)$ a derivada da função de utilidade em relação ao primeiro argumento.*

Isolando o multiplicador de Lagrange na expressão (3.26) chega-se a:

$$\pi_k \frac{U_1(\nu_k^*, \omega_k)}{p_k} = \lambda^* > 0 \quad \textit{para todo} \quad k. \tag{3.27}$$

Assim, conforme indica INGERSOLL JR. (1987, p.189), ao escolher uma carteira um agente iguala a utilidade marginal de uma unidade monetária gasta para cada estado da natureza. Outra observação de extrema importância feita por INGERSOLL JR. (1987, p.189) refere-se à necessidade das probabilidades π_k serem estritamente positivas, para $k = 1, \ldots, K$. Segundo o referido autor, a menos que $\pi_k > 0$ um agente da economia irá assumir uma posição vendida em um ativo Arrow-Debreu para o estado k por qualquer preço que lhe seja oferecido (visto que o agente acredita que a probabilidade de ocorrência do estado k é nula), de tal maneira que não se consiga atingir o equilíbrio.

Conforme já frisado anteriormente, em um mercado completo é possível criar ativos Arrow-Debreu para cada estado da natureza a partir dos ativos complexos da economia e, dessa forma, precificá-los. Em um mercado incompleto, a despeito de não ser possível

[23]A formulação do problema em termos dos ativos Arrow-Debreu e não dos ativos complexos é feita em função dos primeiros poderem sempre ser expressos como combinações dos últimos em um mercado completo, do modo como foi visto anteriormente. Assim, conforme INGERSOLL JR. (1987, p.187), um agente será indiferente entre escolher carteiras que possam ser constituídas apenas dos K ativos Arrow-Debreu e aquelas com liberdade total de escolha entre estes últimos mais os N ativos complexos da economia.

[24]Conforme HILLIER; LIEBERMAN (1995, p.582), quando uma função f multivariada é côncava, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, é uma condição necessária e suficiente para que seja solucionado um problema de otimização.

obter um conjunto de ativos Arrow-Debreu completo, é possível calcular quais seriam os preços destes ativos que seriam válidos em um mercado completo. Seguindo o exemplo de INGERSOLL JR. (1987, p. 191), considere uma economia com dois estados da natureza igualmente possíveis, i.e., $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$, existindo apenas um ativo complexo, i.e., $N = 1$, sendo que o vetor de resultados deste ativo no período final desta economia estática é dado por $\mathbb{D} = (1, a)^T$, sendo $a > 0$ e $v = 1$ o preço no instante inical de uma unidade do ativo complexo. Nota-se que a economia assim considerada representa um mercado incompleto, haja vista que o número de ativos complexos é menor do que o número de estados da natureza. Entretanto, o problema de investimento de um agente desta economia pode ser formulado como um problema de maximização da utilidade esperada em um *mercado completo com restrições.* Para isso, observa-se que, se o mercado ora apresentado fosse completo, existiriam quantidades ν_1 e ν_2 de ativos Arrow-Debreu para os estados ω_1 e ω_2 tais que fossem solução para o sistema de equações lineares dado em forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} (v) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Assim, para que este sistema de equações seja solucionado deve-se satisfazer $\nu_2 = a\nu_1$ e $\nu_1 v = 1$. Portanto, o problema de investimento[25] do agente no mercado incompleto assume a seguinte expressão em um mercado completo fictício:

$$\underset{\nu_k}{\text{Maximizar:}} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{2} 0.5U(\nu_k) \tag{3.29}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \nu_2 = a\nu_1, \quad v\nu_1 = 1. \tag{3.30}$$

Como $v = 1$, então $\nu_1 = 1$ e $\nu_2 = a$. Seguindo INGERSOLL JR. (1987, p. 191), é possível então calcular quais seriam os preços dos ativos Arrow-Debreu, também denominados *preços de estado*, neste mercado completo fictício. Pela expressão (3.26) estes preços, denotados por $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, são dados por:

$$\hat{p}_1 = \frac{0.5U'(1)}{\lambda}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{0.5U'(a)}{\lambda} \tag{3.31}$$

de tal modo que

$$\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} = \frac{U'(1)}{U'(a)}. \tag{3.32}$$

Ainda, como em um mercado completo um agente deve ser indiferente entre duas carteiras que resultem nos mesmos valores em todos os estados, sendo a primeira constituída de

[25] Vide Nota 20.

ativos complexos e a segunda de ativos Arrow-Debreu[26], tem-se que

$$1 = v = \hat{p}_1 + a\hat{p}_2. \tag{3.33}$$

Assim, a partir das expressões (3.32) e (3.33) chega-se a:

$$\hat{p}_1 = \frac{U'(1)}{U'(1) + aU'(a)}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{U'(a)}{U'(1) + aU'(a)}. \tag{3.34}$$

Assim, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 191), estivesse um agente em um mercado completo frente aos preços dos dois ativos Arrow-Debreu dados pela expressão (3.34), o mesmo não se importaria caso fosse obrigado a possuir apenas o ativo complexo com preço v ao invés dos ativos Arrow-Debreu. É em razão disso que os preços dados pela expressão (3.34) são denominados *preços de estado subjetivos em mercados completos*, ou simplesmente *preços subjetivos*, percebidos por um agente, conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 191).

Em geral, dois agentes diferentes[27] irão perceber preços subjetivos diferentes, conforme indica INGERSOLL JR. (1987, p. 192), de tal forma que ambos visualizem uma oportunidade de lucro com a criação de valores mobiliários financeiros do tipo Arrow-Debreu para completar o mercado. Entretanto, em situações em que mesmo sendo diferentes os agentes percebem os mesmos preços subjetivos[28], não havendo incentivos para se completar o mercado, então atinge-se um equilíbrio Pareto-eficiente mesmo sendo o mercado incompleto, denominando-se este último de *mercado efetivamente completo*, conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 192).

Em resultado similar a este último, HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 131) demonstram que uma alocação Pareto-eficiente pode ser alcançada sem que um mercado seja completo e mesmo com a ausência de uma carteira de mercado[29] em relação à qual possam ser lançadas opções para completar o mercado, conforme demonstrado anteriormente. Para isso, é necessário que os agentes da economia possam ser representados

---

[26]Vide nota de rodapé 23. Ainda, pode-se afirmar que esta consideração esta relacionada com a *lei do preço único* e questões de *arbitragem*, ambos os tópicos tratados adiante.

[27]No sentido de possuírem funções de utilidade diferentes.

[28]Para demonstrar que isto é possível, INGERSOLL JR. (1987, p. 192), a partir do mercado incompleto utilizado como exemplo, considera dois investidores, um com função de utilidade $U(W) = -\exp(-\delta W)$, sendo $\delta = (a-1)^{-1} \ln a$, e outro com função de utilidade logarítmica, demonstrando então que ambos percebem os mesmos preços subjetivos.

[29]Vide Nota 18.

por um único, denominado *agente representativo*, fato também apontado por INGERSOLL JR. (1987, p. 192), segundo o qual sempre que todos os agentes da economia possuírem os mesmos gostos, dotações e crenças o resultado será um mercado efetivamente completo visto que não haverá como serem percebidos diferentes preços subjetivos para os estados da natureza. Assim, impede-se que sejam visualizadas oportunidades de lucro e desestimula-se o lançamento de valores mobiliários financeiros que completem o mercado, havendo então um estado de equilíbrio.

Nota 21 *Seguindo INGERSOLL JR. (1987, p. 126), carteiras eficientes são aquelas para as quais não existem outras com retorno esperado igual ou superior e risco*[30] *menor. Sob a hipótese da existência de um agente representativo em um mercado perfeito, INGERSOLL JR. (1987, p. 195) demonstra que o conjunto de carteiras eficientes*[31] *é convexo e em particular a carteira de mercado é eficiente em um mercado completo, o que não é necessariamente satisfeito quando o mercado é incompleto. Conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 217), um mercado completo ou efetivamente completo garante a existência de um agente representativo e, assim, afirma-se que um agente representativo é aquele para o qual a carteira de mercado é a carteira ótima a se possuir.*

Nota 22 *Seguindo INGERSOLL JR. (1987, p. 199), a criação de valores mobiliários financeiros não altera o equilíbrio alcançado em um mercado incompleto visto que estes "novos" ativos já podiam ser obtidos a partir dos ativos complexos comercializados; similarmente, o equilíbrio a partir de um agente representativo também não é afetado.*

Em relação ao CAPM, por se tratar de um modelo de precificação de ativos por argumentos de equilíbrio, convém tratar brevemente das consequências da introdução de valores mobiliários financeiros a fim de completar um mercado. Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 205), em mercados incompletos a precificação de ativos via CAPM torna-se inválida, sendo o modelo incorreto tanto para os ativos originais da economia como para os que foram introduzidos. Este fato não ocorre caso o mercado original, i.e., o mercado anterior à inserção dos novos valores mobiliários financeiros, for efetivamente completo, haja vista que não haverá incentivo por parte de nenhum dos agentes para que sejam transacionados os novos ativos criados.

---

[30]Deixa-se vago este termo, considerando-o apenas como uma medida de dispersão dos possíveis resultados.

[31]Em inglês, *efficient set*.

Entretanto, conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 205), a não-validez do CAPM pode ser evitada até mesmo em mercados que não sejam efetivamente completos. Caso os ativos complexos existentes na economia representem investimentos irreversíveis e previamente fixados ou que sejam investimentos discricionários com retornos estocásticos constantes à escala e, além disso, os retornos dos ativos complexos desconsiderando-se os valores mobiliários financeiros possuam distribuição normal multivariada, INGERSOLL JR. (1987, p. 206) demonstra que a precificação por equilíbrio via CAPM é válida tanto no mercado original como no mercado efetivamente completo pela introdução de novos valores mobiliários financeiros, com a ressalva de que a carteira de mercado pode ser diferente antes e após o mercado se tornar efetivamente completo, assim como a estrutura de covariância entre os ativos.

Nota 23 *INGERSOLL JR. (1987, p. 192) argumenta que em economias sem atritos frequentemente estudadas, será sempre interesse dos agentes criar novos valores mobiliários até que os mercados se tornem efetivamente completos, visto que em geral os preços subjetivos percebidos pelos agentes é diferente, fazendo com que os mesmos visualizem oportunidades de lucro e consequentemente de aumento da utilidade esperada. Feito isso, obtém-se então todas as propriedades inerentes aos mercados completos. Segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 192), esta é a justificativa geral para a análise das propriedades econômicas de mercados completos mesmo que os mercados reais estejam longe de sê-lo.*

3.2.2 Economia Dinâmica

Ao contrário do que ocorre em uma economia estática, é permitido aos agentes de uma economia dinâmica o consumo e a realização de transações entre os períodos inicial e final. Segundo DOTHAN (1990, p. 48), existem dois motivos para permitir oportunidades intermediárias de transação em um modelo de mercado financeiro: a primeira razão é a necessidade de consumo intermediário dos agentes, a qual pode ser satisfeita mesmo sem a possibilidade de transações intermediárias (simplesmente através da inserção de bens de consumo não-perecíveis e/ou de valores mobiliários que proporcionem dividendos intermediários); a segunda razão, a mais plausível, é a ocorrência de novas informações.

Um mercado completo garante a existência de uma estratégia de negociação θ tal que se possa assegurar o plano de consumo c_i para todo agente i considerado na economia, sem que haja dependência do processo de dotação e_i, a partir de um conjunto p de preços dos valores mobiliários. Esta é basicamente a definição apresentada em DOTHAN (1990, p. 56) de um plano de consumo *atingível*.

Definição 24 *Um processo de consumo adaptado* $c = \{c(0), \ldots, c(T)\}$ *é atingível à preços* p *se e somente se existe um processo de dotação* $e = \{e(0), \ldots, e(T)\}$ *tal que* $e(1) = e(2) = \ldots = e(T) = 0$ *e* $c \in \mathbb{B}(e, p)$*, sendo denominado plano de consumo comercializado*[32]*. O conjunto de planos de consumo comercializados é denotado por* $M(p)$*.*

Segundo DUFFIE (1988, p. 67), em um mercado completo qualquer plano de consumo $c \in C$ está disponível por um preço. Portanto, sob este prisma, em um mercado completo existe um conjunto de preços p, também denominado *sistema de preços*, pelos quais o conjunto de planos de consumo comercializados corresponde ao conjunto de planos de consumo possíveis de serem escolhidos ou, em outras palavras, ao conjunto de escolha C. É este conjunto de preços p que permite que todos os possíveis planos de consumo sejam atingíveis. É por este motivo que DOTHAN (1990, p. 57) discute a questão de mercados completos em termos do sistema de preços p.

Definição 25 *Um sistema de preços* p *é completo se e somente se, a estes preços, todo processo de consumo adaptado é atingível, i.e.,* $C = M(p)$*.*

Em uma economia dinâmica como a do modelo descrito anteriormente, o número de possíveis estados da natureza cresce geometricamente com o número de períodos considerados para análise. Por exemplo, assumindo que a cada período o número de possíveis estados seja 2, então para o modelo estático, i.e., $t = 0, 1$, $|\Omega| = 2^1 = 2$; para $t = 0, 1, 2$, $|\Omega| = 2^2 = 4$, para $t = 0, 1, 2, 3$, $|\Omega| = 2^3 = 8$, e assim por diante. Assim, para o modelo multiperiódico considerado, $|\Omega| = 2^T$.

Pelos argumentos anteriores, seria então natural considerar um mercado completo no modelo multiperiódico presente caso houvesse no instante inicial $|\Omega| = 2^T$ valores mobiliários linearmente independentes na economia. Caso este fosse o caso, dir-se-ia então que a economia tratada possui um *mercado completo estaticamente*, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 225).

Um resultado interessante, conforme demonstra INGERSOLL JR. (1987, p. 210), é que se um mercado completo estaticamente, no qual os agentes possuam crenças homogêneas, atinge um equilíbrio Pareto-eficiente na primeira rodada de negociações, i.e., no

[32] Em inglês, *marketed consumption plan*.

primeiro período da economia, então os agentes não irão transacionar nos demais períodos de tal forma que os mercados podem permanecer fechados e não mais abrir. A razão para isso é que a divisão do risco e a diversificação foram obtidos no primeiro período, fazendo que todos os agentes reconheçam eventuais tentativas de negociação nos demais instantes como puramente especulativas, baseadas em informação privilegiada. Assim, em um mercado completo estaticamente, não há negociações após o período inicial, fazendo com que uma economia dinâmica seja equivalente à uma economia estática, obtendo-se então os resultados vistos anteriormente.

Em um mercado incompleto, o resultado acima não é necessariamente obtido, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 213). Entretanto, conforme indica HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 197), a oportunidade de transacionar após o período inicial da economia pode fazer com que os agentes da mesma alcancem uma alocação Pareto-eficiente sem que inicialmente exista um conjunto completo de ativos Arrow-Debreu. Assim, um outro modo de completar o mercado é através de negociações intermediárias e caso esta seja a situação diz-se então que o mercado é *dinamicamente completo*, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 226).

DOTHAN (1990, p. 49) afirma que as transações intermediárias em uma economia multiperiódica podem tornar atingíveis todos os processos de consumo consistentes com a maneira pela qual novas informações chegam ao mercado com um número menor de ativos complexos linearmente independentes que seriam necessários em uma economia estática.

Conforme aponta HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 200), a possibilidade de um mercado ser completo dinamicamente depende do processo de preço dos ativos complexos considerados. Para ilustrar isso, os referidos autores consideram um exemplo no qual as variações possíveis de preços dos ativos sejam proporcionais. Assim, os preços dos ativos complexos em cada vértice da árvores serão linearmente dependentes e a possibilidade de transações intermediárias na economia leva aos mesmos resultados que seriam obtidos caso fossem permitidas negociações apenas no período inicial.

Relembrando o modelo de estrutura de informação representado pela figura 3.1, seja $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ o conjunto de vértices da árvore, sendo $\#\xi$ o número de vértices sucessores à um determinado vértice e $N(\Xi) = \max\{\#\xi : \xi \in \Xi\}$ o número máximo de vértices sucessores à um determinado vértice considerando-se todos os vértices. Então, conforme indica DUFFIE (1988, p. 111), $N(\Xi)$ é o número necessário e suficiente de ativos complexos linearmente independentes para que o mercado seja dinamicamente completo e livre de arbitragem[33].

Então, conforme bem aponta HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 203), o número mínimo de ativos complexos linearmente independentes para que um mercado seja completo dinamicamente é completamente determinado pelo modo como se dá a resolução da incerteza ao longo do tempo: se a incerteza é resolvida gradualmente, i.e., se a *quantia de informação* a ser revelada no próximo período é pequena, então também é pequeno o número necessário de ativos complexos linearmente independentes; caso contrário, este número será alto.

A partir das considerações acima, nota-se que, considerando o modelo multiperíódico como uma sequência de modelos uniperíodicos, um mercado é dinamicamente completo somente no caso das economias uniperiódicas serem completas, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 229).

3.3 Arbitragem

Basicamente, *arbitragem* é uma situação na qual um agente da economia possui uma possibilidade de lucro e nenhuma possibilidade de perda a partir de um determinada estratégia de investimento. Conforme HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 226), como os agentes em uma economia preferem mais à menos, segue que uma condição necessária para que um sistema de preços seja um *sistema de preços de equilíbio* é que o mesmo não admita a possibilidade de *algo ser criado do nada* ou, em outras palavras, uma *oportunidade de arbitragem*. Seguindo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 226), define-se:

Definição 26 *Uma oportunidade de arbitragem é um plano de consumo o qual é sempre não-negativo e estritamente positivo em ao menos um dos estados da natureza, cujo custo inicial é não-positivo.*

Conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 54), sempre que uma oportunidade de arbitragem existir não haverá equilíbrio, haja vista que os agentes demandarão quantidades infinitas das carteiras representativas da possibilidade de aproveitar-se das oportunidades de arbitragem, sendo estas carteiras denominadas *estratégias de arbitragem*, segundo

[33] Considerações sobre arbitragem serão feitas adiante.

DOTHAN (1990, p. 17). Seguindo DOTHAN (1990, p. 18), enuncia-se o seguinte teorema:

Teorema 27 *Não existem estratégias de arbitragem no estado de equilíbrio.*

Demonstração. Para cada i, seja $\theta_1^i, \ldots, \theta_N^i$ a estratégia de negociação que gera o plano de consumo do agente i no estado de equilíbrio. Caso exista uma estratégia de arbitragem $\theta_1, \ldots, \theta_N$ aos preços de equilíbrio, então a estratégia $\theta_1^i + \theta_1, \ldots, \theta_N^i + \theta_N$ gera um plano de consumo que nunca é inferior ao plano de consumo original no estado de equilíbrio e supera este último em ao menos um estado da natureza. Como não requer investimento inicial, este novo plano de consumo pertence ao conjunto orçamento e como os agentes preferem mais à menos, o agente i prefere este novo plano de consumo ao plano de consumo original. Mas isto contradiz o fato de que a preços de equilíbrio não existe um plano de consumo que seja estritamente preferível ao plano de consumo no estado de equilíbrio. ■

Capítulo 4

Modelo de Precificação de Derivativos Simples Ordinários do Tipo Europeu em Tempo Discreto Uniperiódico

No presente trabalho, o objetivo da construção de um modelo tem sempre em vista a precificação racional de derivativos, de modo que o mesmo satisfaça critérios de cunho econômico, sendo que o principal destes critérios é a condição de não-arbitragem, conforme visto no final do capítulo anterior.

Conforme será visto adiante e frisado por SHIRYAEV (1999, p. 35), a condição de não-arbitragem significa que existe a chamada *medida de probabilidade martingale (risco neutra)*, em relação à qual os preços descontados são *martingales*, o que possibilita então a utilização do cálculo estocástico para o estudo da evolução dos preços e outros cálculos.

A despeito de não serem fiéis à realidade, os modelos uniperódicos permitem a exposição de conceitos de um modo mais claro, facilitando posteriormente o entendimento dos modelos multiperiódicos em tempo discreto. O objetivo do presente capítulo é expor os principais conceitos encontrados na literatura de finanças matemáticas em modelos de tempo discreto uniperiódicos, de modo que posteriormente possam ser caracterizados os mercados completos e incompletos, culminando com o problema de precificação racional de derivativos neste último.

4.1 Definições e Especificações do Modelo

Seguindo PLISKA (1997, p. 1), o modelo uniperiódico aqui tratado obedece as seguintes convenções[1]:

- Uma data inicial $t = 0$ e uma data final $t = 1$, as únicas nas quais é possível realizar um *investimento*[2] em um mercado *perfeito*[3];

- Um espaço amostral finito, denotado por Ω e composto por $K < \infty$ elementos, i.e., $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$, sendo ω_i, $i = 1, \ldots, K$, os possíveis estados da natureza. Assume-se que o investidor só possa conhecer o estado da natureza prevalecente no instante $t = 1$;

- Uma medida de probabilidade $P(\Omega)$, sendo $P(\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$;

- Um *processo conta bancária* $B = \{B_t : t = 0, 1\}$, sendo $B_0 = 1$ e B_1 uma variável aleatória, com a restrição de $B_1(\omega) \geq B_0 = 1$ para qualquer $\omega \in \Omega$. B_1 pode ser visto como o valor no instante $t = 1$ de uma unidade monetária \$1 depositada em um banco no instante $t = 0$, sendo que este banco remunera o capital inicial nele aplicado à taxa de juros livre de risco r, $r \equiv B_1 - 1 \geq 0$. Em geral será assumido, a menos que se diga o contràrio, que B_1 e r são valores constantes;

- Um *processo de preço* $S = \{S_t : t = 0, 1\}$ sendo $S_t = (S_1(t), \ldots, S_N(t))$, $N < \infty$, um vetor de preços de N ativos no instante t. Em geral sera assumido que esses N ativos são valores mobiliários. Os preços destes ativos são escalares não-negativos conhecidos pelo investidor nos instantes $t = 0$ e $t = 1$. Para $N = 1$, o preço do ativo no instante t será denotado por S_t.

Segue agora uma lista de definições que serão importantes futuramente.

---

[1]Sempre que for utilizado o operador esperança ou variância sem referência à medida utilizada, assume-se que esteja em uso a medida natural da variável ou processo estocástico. Quando estes operadores vierem acompanhados de um índice, então a medida em questão é a que este índice denota. Isto vale para este e para os demais capítulos.

[2]Aqui um investimento é tratado como a compra ou a venda de um determinado ativo.

[3]Um mercado perfeito é aquele no qual não existem *atritos* que impeçam o investimento tais como divisibilidade finita da quantia negociada, taxas, custos de transação etc., conforme SHARPE; ALEXANDER; BAILEY (1999, p. 228).

Definição 28 *(Estratégia de Negociação, PLISKA (1997, p. 2)): Uma estratégia de negociação θ é uma $(N+1)$-upla, i.e., $\theta = (\theta_0, \ldots, \theta_N)$, cujas coordenadas θ_n, $n = 0, \ldots, N$, denotam a quantidade (positiva ou negativa) do ativo n mantida na carteira do investidor entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$.*

Nota 29 *Na formulação presente, θ_0 irá sempre denotar a quantia monetária referente ao processo conta bancária, sendo que um valor positivo denota uma aplicação e um valor negativo um resgate (ou empréstimo, dependendo da quantia previamente existente na conta do banco). Para os N ativos restantes, um valor positivo representa compra e um valor negativo representa venda (ou venda à descoberto, caso o investidor não possua o ativo).*

Definição 30 *(Processo de Valor, PLISKA (1997, p. 2)): O processo de valor $V = \{V_t : t = 0, 1\}$ é o processo que descreve o valor da carteira do investidor no instante t, sendo denotado por:*

$$V_t \equiv \theta_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n(t), \qquad t = 0, 1. \tag{4.1}$$

Definição 31 *(Processo de Ganho, PLISKA (1997, p. 2)): O processo de ganho G é uma variável aleatória que descreve o lucro ou a perda auferida pelo investidor entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$, dado por:*

$$G \equiv \theta_0 r + \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n \tag{4.2}$$

sendo $\Delta S_n \equiv S_n(1) - S_n(0)$.

Escolhendo-se o processo conta bancária como *numerário*, temos as seguintes definições:

Definição 32 *(Processo de Preço Descontado, PLISKA (1997, p. 2)): O processo de preço descontado $S^* \equiv \{S_t^* : t = 0, 1\}$ corresponde ao processo de preços dos ativos em termos do numerário, i.e.:*

$$S_t^* = (S_1^*(t), \ldots, S_N^*(t)) \tag{4.3}$$

sendo $S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t$, $n = 1, \ldots, N$, $t = 0, 1$.

Definição 33 *(Processo de Valor Descontado, PLISKA (1997, p. 3)): O processo de valor descontado $V^* \equiv \{V_t^* : t = 0, 1\}$ corresponde ao processo de valor em termos do numerário, i.e.:*

$$V_t^* \equiv \theta_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(t), \qquad t = 0, 1. \tag{4.4}$$

Definição 34 *(Processo de Ganho Descontado, PLISKA (1997, p. 3)): O processo de ganho descontado G^* corresponde ao resultado oriundo dos ativos S_n, $n = 1, \ldots, N$, em termos do numerário. Isso equivale a:*

$$G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n^* \tag{4.5}$$

sendo $\Delta S_n^* \equiv S_n^*(1) - S_n^*(0)$.

Considerando as especificações do modelo e as definições acima, pode-se demonstrar que o valor da carteira no instante $t = 1$ deve ser resultado apenas do valor inicialmente investido, V_0, acrescido do resultado oriundo da oscilação de preço dos ativos da carteira, i.e., do processo de ganho G. Para que este fato possa ser visualizado, pela definição de V_t temos:

$$V_1 = \theta_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n(1). \tag{4.6}$$

Subtraindo V_0 de ambos os lados aplicando e por sua definição no lado direito da equação chegamos a:

$$V_1 - V_0 = \theta_0 B_1 - \theta_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n(1) - \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n(0) \tag{4.7}$$

$$V_1 - V_0 = \theta_0 (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n. \tag{4.8}$$

Como $B_0 = 1$ e $B_1 - 1 = r$ temos:

$$V_1 = V_0 + \theta_0 r + \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n. \tag{4.9}$$

Pela definição de G, finalmente chegamos a:

$$V_1 = V_0 + G. \tag{4.10}$$

Reiterando, o modelo construído até aqui indica que a mudança no valor da carteira do investidor deve ser fruto apenas do processo de ganho dos ativos, e não de aportes ou saques de dinheiro, conforme frisa PLISKA (1997, p. 2). Tal idéia será importante futuramente quando for definido o conceito de estratégias de negociação *auto-financiáveis*. O resultado da equação (4.10) pode facilmente ser demonstrado para o processo de valor descontado, de forma a obter-se:

$$V_1^* = V_0^* + G^*. \tag{4.11}$$

4.2 A Condição de Não-Arbitragem Para a Consistência Econômica do Modelo

Conforme visto no capítulo anterior, uma condição elementar para que um modelo de precificação de ativos seja razoável sob o ponto de vista econômico é a condição de *não-arbitragem*. Por isso entende-se a impossibilidade de auferir lucro, sem correr riscos, a partir de um investimento inicial nulo ou negativo. Basicamente, a presente seção trata das condições para que o modelo uniperiódico não permita a ocorrência de *oportunidades de arbitragem*, conceito a ser formalizado futuramente. Inicia-se com a seguinte definição:

Definição 35 *(Estratégia de Negociação Dominante, PLISKA (1997, p. 4)): Uma estratégia de negociação $\hat{\theta}$ é dita dominante se existe uma outra estratégia $\tilde{\theta}$ tal que $\widehat{V}_0 = \widetilde{V}_0$ e $\widehat{V}_1(\omega) > \widetilde{V}_1(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, sendo $\widehat{V}_t$ e $\widetilde{V}_t$ os processos de valor gerados a partir das estratégias de negociação $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$, respectivamente.*

Assim, uma estratégia é dita dominante se ao ser comparada com uma segunda requer um investimento inicial igual e gera um valor final estritamente superior. Seguindo PLISKA (1997, p. 5) tem-se a seguinte proposição:

Proposição 36 *As duas condições seguintes são equivalentes:*

(a) *Existe uma estratégia de negociação dominante se e somente se existe uma estratégia de negociação que satisfaça $V_0 = 0$ e $V_1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$,*

(b) *Existe uma estratégia de negociação dominante se e somente se existe uma estratégia de negociação que satisfaça $V_0 < 0$ e $V_1(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Demonstração. Item a). *Ida:* considere uma estratégia dominante $\hat{\theta}$ em relação à uma estratégia dominada $\tilde{\theta}$, sendo $\widehat{V}_0 = \widetilde{V}_0 = 0$. Considere então uma terceira estratégia θ, $\theta \equiv \hat{\theta} - \tilde{\theta}$. Temos que $V_0 = \widehat{V}_0 - \widetilde{V}_0 = 0$ e $V_1 = \widehat{V}_1 - \widetilde{V}_1 > 0$, o que mostra que a existência de uma estratégia de negociação dominante implica a existência de uma estratégia de negociação em que $V_0 = 0$ e $V_1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. *Volta:* seja θ uma estratégia de negociação que satisfaça $V_0 = 0$ e $V_1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Logo θ é uma estratégia dominante pois domina a estratégia que começa com investimento nulo e termina com valor final 0 (uma estratégia de não-investimento). **Item b):** *Ida:* suponha que θ seja uma estratégia de negociação que satisfaça $V_0 = 0$ e $V_1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, logo θ é uma estratégia de negociação dominante. Sabemos que $V_t^* = V_t/B_t$ e como $B_t > 0$ temos $V_0^* = 0$ e $V_1^* > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Então, pela equação (4.11), devemos ter $G^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Defina uma nova estratégia $\tilde{\theta}$, sendo $\tilde{\theta}_n = \theta_n$ para $n = 1, \ldots, N$, e $\tilde{\theta}_0 = -\sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(0) - \delta$, sendo $\delta \equiv \min_{\omega} \widetilde{G}^*(\omega) > 0$. Como $\widetilde{V}_0^* = \tilde{\theta}_0 + \sum_{n=1}^{N} \tilde{\theta}_n S_n^*(0)$, temos então que $\widetilde{V}_0^* = -\sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(0) - \delta + \sum_{n=1}^{N} \tilde{\theta}_n S_n^*(t) = -\delta$, pois $\tilde{\theta}_n = \theta_n$, e como $-\delta < 0$, temos que $\widetilde{V}_0^* < 0$. Ainda, temos que $\widetilde{V}_1^*(\omega) = \widetilde{V}_0^* + \widetilde{G}^*(\omega) = -\delta + \widetilde{G}^*(\omega)$, logo $\widetilde{V}_1^*(\omega) \geq 0$ (pela definição de δ), para todo $\omega \in \Omega$. Sabemos que $\widetilde{V}_0 = \widetilde{V}_0^* B_0 < 0$ e $\widetilde{V}_1(\omega) = \widetilde{V}_1^*(\omega) B_1 \geq 0$. Logo, a partir de uma estratégia de negociação dominante θ construímos uma segunda estratégia de negociação $\tilde{\theta}$ com investimento inicial negativo e valor final maior ou igual a zero, para todo $\omega \in \Omega$. *Volta:* suponha agora que exista uma estratégia de negociação $\tilde{\theta}$ conforme definida no passo acima. Assim, pelo argumento anterior, temos que $\left(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_N\right)$ são os elementos de uma estratégia de negociação tal que $\widetilde{G}^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Fazendo $\theta_n = \tilde{\theta}_n$ para $n = 1, \ldots, N$ e $\theta_0 = -\sum_{n=1}^{N} \tilde{\theta}_n S_n^*(0)$ segue que θ satisfaz $V_0 = 0$ e $V_1(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, logo θ é uma estratégia de negociação dominante. ∎

Pela proposição 36, a possibilidade da formação de uma estratégia de negociação dominante torna insatisfatório um modelo em função de permitir que seja possível obter lucro com investimento nulo e até mesmo negativo. Conforme demonstra INGERSOLL JR. (1987, p. 52), a mera existência de uma estratégia de negociação dominante implica que em uma economia na qual os agentes preferem mais riqueza à menos não existe uma carteira de investimento com posições limitadas que satisfaça os desejos dos agentes.

Ainda, considerando V_0 o valor de um derivativo no instante $t = 0$ e $V_1(\omega)$ o resultado deste no instante $t = 1$ caso o estado da natureza ω ocorra, a proposição acima implica que dois derivativos possuem o mesmo valor no instante $t = 0$ a despeito de um deles (o que for gerado pela estratégia dominante) apresentar um resultado estritamente superior em relação ao outro no instante $t = 1$, fato economicamente implausível.

Nota 37 *Pela lei do preço único, segundo INGERSOLL JR. (1987, p. 59), dois investimentos que resultem nos mesmos resultados em todos os estados da natureza devem possuir o mesmo valor. Pela definição de estratégia dominante, dois investimentos possuem o mesmo valor a despeito de um deles, o dominante, apresentar um resultado estritamente melhor em pelo menos um dos estados da natureza, sem que em nenhum dos demais seja* *pior, do que o outro (o dominado). Conforme demonstra PLISKA (1997, p. 8), se não existem estratégias de negociação dominantes, então se assegura a lei do preço único; entretanto, a lei do preço único não assegura a inexistência de estratégias dominantes.*

Segundo PLISKA (1997, p. 5), para que esta inconsistência não ocorra, pode-se estabelecer uma *medida de precificação linear*, de tal modo que o valor atual do objeto a ser precificado seja uma função linear do resultado a ser obtido de acordo com o estado da natureza ω realizado. Assim, o valor de um ativo A será maior do que o valor de um ativo B se e somente o resultado oriundo do ativo A for estritamente maior do que o resultado oriundo do ativo B para qualquer $\omega \in \Omega$. Denota-se uma medida de precificação linear π por um vetor de coordenadas não-negativas, i.e., $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_K))$, tal que para toda estratégia de negociação θ tenhamos:

$$V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega) = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1(\omega) / B_1(\omega). \tag{4.12}$$

Deste modo, impede-se que a ativos que possuam valores distintos para todos os estados da natureza em $t = 1$ seja atribuído o mesmo valor em $t = 0$. A partir da fórmula (4.12) pode-se enunciar a seguinte proposição, conforme PLISKA (1997, p. 6):

Proposição 38 *O vetor π é uma medida de precificação linear se e somente se é uma medida de probabilidade em Ω satisfazendo a seguinte condição:*

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega), \qquad n = 1, \ldots, N \tag{4.13}$$

sendo que $S_n^*(t)(\omega)$, $t = 0, 1$, denota o preço do n-ésimo ativo no instante t caso o estado da natureza seja ω.

Demonstração. *Ida:* se π é uma medida de precificação linear então, pela equação (4.12), temos $V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega)$. Pela definição de V_t^* esta última expressão é escrita como:

$$\theta_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \left[\theta_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(1)(\omega) \right]. \tag{4.14}$$

Como a relação (4.14) deve valer para qualquer valor de θ_n, também deve ser satisfeita considerando-se $\theta_n = 0$ para $n = 1, \ldots, N$. Substituindo estes valores na expressão (4.14) obtemos:

$$H_0 = \sum_{\omega} \pi(\omega) H_0 \therefore \sum_{\omega} \pi(\omega) = 1. \tag{4.15}$$

Portanto, π pode ser interpretado como uma medida de probabilidade. Considere agora a estratégia de negociação θ_n na qual $\theta_n = 0$ para $i \neq n$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Assim, pela equação (4.14) e pela formulação de θ_n chegamos a:

$$\begin{aligned} \theta_n S_n^*(0) &= \pi(\omega_1)\,\theta_n S_n^*(1)(\omega_1) + \ldots + \pi(\omega_K)\,\theta_n S_n^*(1)(\omega_K) && (4.16) \\ S_n^*(0) &= \sum_{\omega} \pi(\omega)\, S_n^*(1)(\omega), \qquad n = 1, \ldots, N. && (4.17) \end{aligned}$$

Volta: inversamente, suponha que π seja uma medida de probabilidade que satisfaça a expressão (4.13). Então, a expressão (4.14) também é satisfeita, o que implica ter-se uma medida de precificação linear. ■

Nota 39 *Conforme INGERSOLL JR. (1987, p. 57), a linearidade da medida de precificação garante que um pagamento de duas unidades monetárias em qualquer estado da natureza vale tanto quanto o dobro do pagamento de uma unidade monetária, i.e., não há efeitos de escala. Ainda segundo o referido autor, o valor incremental de uma unidade monetária em um estado ω qualquer não depende do resultado nos outros estados da natureza, não havendo efeitos de escopo. Se a relação de precificação não fosse linear, então combinar ativos em determinados "pacotes" poderia ocasionar que a soma das partes valesse mais que o todo ou o inverso.*

Assim, a proposição 38 indica que sob a medida de precificação linear o valor no instante $t = 0$ do ativo a ser precificado é dado pela esperança do valor descontado do mesmo no instante $t = 1$. Cabe agora determinar as condições para que a medida de precificação linear exista.

Proposição 40 *(PLISKA (1997, p. 6)) A medida de precificação linear existe se e somente se não existem estratégias de negociação dominantes.*

Demonstração. *Ida:* sejam π, Z e $\mathbb{Z}$ dados por:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(\omega_1) \\ \pi(\omega_2) \\ \vdots \\ \pi(\omega_K) \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} S_1^*(0) \\ \vdots \\ S_N^*(0) \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbb{Z} = \begin{pmatrix} S_1^*(1)(\omega_1) & \cdots & S_1^*(1)(\omega_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_N^*(1)(\omega_1) & \cdots & S_N^*(1)(\omega_K) \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.18)$$

Pela proposição 38, a existência de uma medida de precificação linear implica a existência de uma solução para o seguinte problema de programação linear (*primal*):

$$\text{Maximizar} \quad : \quad \underset{(1\times K)}{(0,\ldots,0)} \underset{(K\times 1)}{\pi}, \tag{4.19}$$

$$\text{Sujeito a} \quad : \quad \underset{((N+1)\times K)}{\mathbb{Z}} \underset{(K\times 1)}{\pi} = \underset{((N+1)\times 1)}{Z}, \pi \geq 0. \tag{4.20}$$

Pela teoria da *dualidade*[4], resolver o problema acima implica resolver o problema dual, i.e., encontrar o vetor de variáveis duais $h = (h_1, \ldots, h_{N+1})$ que resolva o seguinte problema:

$$\text{Minimizar} \quad : \quad \underset{(1\times(N+1))}{h} \underset{((N+1)\times 1)}{Z}, \tag{4.21}$$

$$\text{Sujeito a} \quad : \quad \underset{(1\times(N+1))}{h} \underset{((N+1)\times K)}{\mathbb{Z}} \geq 0, \tag{4.22}$$

de tal modo que os valores das funções-objetivo (4.19) e (4.21) sejam iguais (e no presente caso, como é fácil notar, iguais a zero). A solução h da expressão (4.21) pode ser vista como uma estratégia de negociação, sendo a última coordenada deste vetor o valor de θ_0. A função-objetivo (4.21) equivale à condição de $V_0^* = 0$, enquanto a restrição requer $V_1^* \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Como a função-objetivo é nula, não é possível obter estratégias tais que $V_0 < 0$ e $V_1(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Logo, pela proposição 36, a existência de uma medida de precificação linear implica a não existência de estratégias de negociação dominantes. *Volta:* caso não haja uma estratégia de negociação dominante, então a função-objetivo (4.21) possui a solução $h = 0$. Então, o dual do dual (i.e., o primal) possui uma solução π a qual, conforme explicado anteriormente, pode ser designada como uma medida de precificação linear. ■

Assim, a existência de uma medida de precificação linear elimina a existência de estratégias de negociação dominantes o que torna, pela proposição 36, inviável a ocorrência de estratégias de negociação que sejam iniciadas com capital nulo no instante $t = 0$ e que resultem em lucro certo no instante $t = 1$, i.e., para todo $\omega \in \Omega$. Entretanto, não diz nada a respeito de estratégias de negociação que satisfaçam $V_0 = 0$ e $V_1 > 0$ se não para todo $\omega \in \Omega$ mas para pelo menos um dos estados da natureza. Com isso quer-se dizer que ainda pode existir uma possibilidade de *arbitragem*, conceito que cabe agora ser formalizado.

Definição 41 *(Oportunidade de Arbitragem, PLISKA (1997, p. 8)): Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia de negociação θ tal que, sob ela:*

[4]Vide HILLIER; LIEBERMAN (1995, cap. 6).

(a) $V_0 = 0$,

(b) $V_1 \geq 0$, *e*

(c) $\mathbb{E}[V_1] > 0$.

Pela definição 41 tem-se as seguintes proposições:

Proposição 42 *(Oportunidade de Arbitragem Versão 1, PLISKA (1997, p. 9)): Uma estratégia de negociação θ é uma oportunidade de arbitragem se e somente:*

(a) $V_0^* = 0$,

(b) $V_1^* \geq 0$, *e*

(c) $\mathbb{E}[V_1^*] > 0$.

Demonstração. Segue do fato que $V_t^* = V_t/B_t$ e $B_t > 0$, $t = 0, 1$. ■

Proposição 43 *(Oportunidade de Arbitragem Versão 2, PLISKA (1997, p. 9)): Uma estratégia de negociação θ é uma oportunidade de arbitragem se e somente se:*

(a) $G^* \geq 0$,

(b) $\mathbb{E}[G^*] > 0$.

Demonstração. *Ida:* se θ é uma oportunidade de arbitragem então ela satisfaz as condições da proposição 42. Sabe-se, pela equação (4.11), que $V_1^* = V_0^* + G^*$ e como $V_1^* \geq 0$ e $V_0^* = 0$ deve-se ter $G^* \geq 0$. Escrevendo-se G^* como $G^* = V_1^* - V_0^* = V_1^*$ e aplicando-se o operador esperança em ambos os lados temos $\mathbb{E}[G^*] = \mathbb{E}[V_1^*]$. Como $\mathbb{E}[V_1^*] > 0$, temos então que $\mathbb{E}[G^*] > 0$. *Volta*: suponha agora uma estratégia de negociação $\hat{\theta}$ que satisfaça $\widehat{G}^* \geq 0$ e $\mathbb{E}\left[\widehat{G}^*\right] > 0$. Considere então a seguinte estratégia de negociação θ, em função dos elementos da estratégia de negociação $\hat{\theta}$, $\theta = \left(\theta_0, \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_N\right)$, sendo θ_0 dado por:

$$\theta_0 = -\sum_{n=1}^{N} \hat{\theta}_n S_n^*(0). \tag{4.23}$$

Sob θ, tem-se que $V_0^* = \theta_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(0) = -\sum_{n=1}^{N} \hat{\theta}_n S_n^*(0) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n S_n^*(0) = 0$ pois $\theta_n = \hat{\theta}_n$, $n = 1, \ldots, N$. Ainda, $V_1^* = V_0^* + G^* = \widehat{G}^* \geq 0$ (por construção das estratégias de negociação θ e $\hat{\theta}$). Portanto, como θ é uma estratégia de negociação que satisfaz $V_0^* = 0$ e $V_1^* \geq 0$ então, pela proposição 42, θ é uma oportunidade de arbitragem. ■

Basicamente, uma oportunidade de arbitragem é um modo de "fazer" dinheiro, visto que permite a chance de se transformar uma quantia monetária nula em um valor positivo, sem que se corra o risco de ficar endividado. A conexão entre estratégias dominantes e oportunidades de arbitragem ocorre a partir da seguinte proposição:

Proposição 44 *(PLISKA (1997, p. 9)) A existência de uma oportunidade de arbitragem é uma condição necessária mas não suficiente para que exista uma estratégia de negociação dominante, i.e., podemos apenas afirmar que:*

$$\textit{Estratégias Dominantes} \Rightarrow \textit{Oportunidades de Arbitragem.} \tag{4.24}$$

Demonstração. Pela proposição 36, claramente uma estratégia de negociação dominante é uma oportunidade de arbitragem. Para mostrar que uma oportunidade de arbitragem não é necessariamente uma estratégia dominante, considere o seguinte exemplo, conforme exposto em PLISKA (1997, p. 9). Seja $K = 2$, $N = 1$, $r = 0$, $S_0 = 10$, $S_1(\omega_1) = 12$ e $S_1(\omega_2) = 10$. Portanto, há um único ativo, com preço inicial 10, sendo possíveis dois estados da natureza, sendo que no primeiro o ativo passa a valer 12 e no segundo passa a valer 10, sendo a taxa de juros nula. A estratégia de negociação $\theta = (-10, 1)$, i.e., a obtenção de um empréstimo de \$10 para a compra de 1 ativo, é uma oportunidade de arbitragem pois $V_0 = -10 + 1.10 = 0$ e $V_1 = (2, 0)$, i.e., caso ocorra o estado da natureza ω_1 o lucro do investidor será $V_1 = -10 + 12 = 2$, sendo $V_1 = -10 + 10 = 0$ caso ocorra o estado ω_2, logo $\mathbb{E}[V_1] > 0$. Vê-se também que $\pi = (0, 1)$ é uma medida de precificação linear, pois $\sum_\omega \pi(\omega) S_1(\omega) = 0.(12) + 1.(10) = 10 = S_0$. Portanto, pela proposição 40, não existem estratégias de negociação dominantes, ao passo que existe uma oportunidade de arbitragem. ■

Nota 45 *Alguns autores definem oportunidades de arbitragem em termo de estratégias dominantes. Uma oportunidade de arbitragem do tipo I e do tipo II são estratégias dominantes conforme descritas pelos itens a) e b) da proposição 36, respectivamente, segundo ČERNÝ (2004, p. 38). Conforme demonstra INGERSOLL JR. (1987, p. 53), deve-se garantir a inexistência de oportunidades de arbitragem do tipo II o que então garante a inexistência de oportunidades de arbitragem do tipo I.*

A proposição 44 mostra que a inexistência de estratégias de negociação dominantes não garante a ausência de oportunidades de arbitragem, o que inviabilizaria o modelo desenvolvido. Portanto, torna-se necessária uma condição mais forte para que o modelo desenvolvido seja razoável sob o ponto de vista econômico. Esta condição será dada na próxima subseção, culminando no primeiro teorema fundamental de precificação de ativos.

4.3 O Primeiro Teorema Fundamental de Precificação de Ativos

Conforme visto na subseção anterior, a consistência econômica de um modelo de precificação de ativos deve excluir a possibilidade de ocorrência de oportunidades de arbitragem. Infelizmente, viu-se que a inexistência de estratégias de negociação dominantes não impede que isso ocorra, pois ainda pode haver um estado da natureza para o qual seja possível obter lucro a partir de um investimento inicial nulo, uma *oportunidade de arbitragem fraca* na terminologia de ROSS (2003, p. 93). A presente subseção trata do resultado fundamental que garante a inexistência de oportunidades de arbitragem em um modelo de precificação de ativos. Para isso, inicia-se com a seguinte definição:

Definição 46 *(Medida Neutralizadora do Risco, PLISKA (1997, p. 11)): Uma medida de probabilidade $Q(\Omega)$ é uma medida de probabilidade neutralizadora do risco se:*

(a) $Q(\omega) > 0$, $\forall\ \omega \in \Omega$, *com* $Q(\Omega) = 1$,

(b) $\mathbb{E}_Q[\Delta S_n^*] = 0$, $n = 1, \ldots, N$,

sendo $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ *o operador esperança na medida* Q.

A fim de que se torne mais claro o que implica a condição (b) da definição acima, nota-se que, pela definição de ΔS_n^* temos:

$$\mathbb{E}_Q[\Delta S_n^*] = \mathbb{E}_Q[S_n^*(1) - S_n^*(0)] \tag{4.25}$$

$$= \mathbb{E}_Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0) \tag{4.26}$$

visto que o valor do ativo é conhecido no instante inicial. Logo, a definição de medida neutralizadora do risco implica:

$$\mathbb{E}_Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0) = 0 \tag{4.27}$$

$$\mathbb{E}_Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0), \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{4.28}$$

Logo, sob a medida Q, o valor inicial do ativo é igual ao valor esperado do preço descontado do mesmo no instante $t = 1$, exatamente como na proposição 38. Assim, uma medida de probabilidade neutralizadora do risco pode ser interpretada como uma medida de precificação linear estritamente positiva para todo $\omega \in \Omega$.

Nota 47 *Conforme demonstra ČERNÝ (2004, p. 42), os preços de estado (preço dos ativos Arrow-Debreu) podem ser utilizados como indicadores de oportunidades de arbitragem. Seja* $\underset{(K\times 1)}{p}$ *o vetor representativo dos preços dos* K *estados da natureza, i.e.:*

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Então, considerando $\mathbb{D}^T \in \mathbb{R}^{K \times N+1}$ *a matriz de resultados dos* $N+1$ *ativos do modelo (1 ativo sem risco e* N *ativos com risco) com vetor de preços representado por* $S \in \mathbb{R}^{N+1}$*, não existem oportunidades de arbitragem se e somente se existe um vetor* $p \in \mathbb{R}^K$ *estritamente positivo de preços de estado tal que:*

$$S = \mathbb{D}p, \tag{4.30}$$

conforme demonstra o referido autor.

Enuncia-se agora o principal resultado desta subseção, a condição necessária para que não ocorram oportunidades de arbitragem, garantindo a consistência econômica do modelo.

Teorema 48 *(Primeiro Teorema Fundamental de Precificação de Ativos: Existência, PLISKA (1997, p. 11)) Não existem oportunidades de arbitragem se e somente se existe uma medida neutralizadora do risco.*

Demonstração. A prova do teorema será dividida em duas partes, para 1 ativo, $N = 1$, e para dois ou mais ativos, $N \geq 2$, para os quais se utiliza um argumento de cunho geométrico. **Para N=1:** *Ida:* para 1 ativo, lembrando a definição 34, tem-se que $G^* = \theta_1 \Delta S_1^*$. Como θ_1 pode ser positivo ou negativo, pela proposição 43 a inexistência de arbitragem implica a impossibilidade de ter-se $\Delta S_1^* \geq 0$ com $\Delta S^*(\omega) > 0$ para pelo menos um $\omega \in \Omega$ e $\Delta S_1^* \leq 0$ com $\Delta S^*(\omega) < 0$ para pelo menos um $\omega \in \Omega$, respectivamente. Logo, deve-se ter $\Delta S^*(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$, o que permite a possibilidade de estabelecer-se uma medida de probabilidade estritamente positiva satisfazendo a expressão (4.28), i.e., uma medida neutralizadora do risco. *Volta:* seja Q uma medida neutralizadora do risco. Neste caso, tem-se que $\mathbb{E}_Q[\Delta S_1^*] = 0$, fato este que já invalida a ocorrência de uma oportunidade de arbitragem. **Para N≥2:** Inicia-se com uma visão geométrica do problema para que depois se faça a ida e a volta. Considera-se o seguinte conjunto:

$$\mathbb{W} \equiv \left\{X \in \mathbb{R}^K : X = G^* \text{ para alguma estratégia de negociação } \theta\right\}. \tag{4.31}$$

Logo, $\mathbb{W}$ é o conjunto de variáveis aleatórias, para os K estados da natureza, representativas do processo de ganho. Ainda, pela equação (4.11), vê-se que o conjunto $\mathbb{W}$ pode ser entendido também como o conjunto de variáveis aleatórias representativas do valor descontado da riqueza[5] do investidor no instante $t = 1$ quando o investimento inicial for nulo, i.e., $V_0^* = 0$. Tem-se que $\mathbb{W}$ é um sub-espaço linear de $\mathbb{R}^K$, de tal modo que para quaisquer $X, \widehat{X} \in \mathbb{W}$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se $aX + b\widehat{X} \in \mathbb{W}$, i.e., $\mathbb{W}$ é um conjunto convexo. Considera-se agora o seguinte conjunto:

$$\mathbb{A} \equiv \left\{X \in \mathbb{R}^K : X \geq 0,\ X \neq 0\right\}, \tag{4.32}$$

o qual é o ortante não-negativo de $\mathbb{R}^K$. Em vista da proposição 43, só é possível haver oportunidades de arbitragem caso $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} \neq \emptyset$, i.e., se e somente se o subespaço linear $\mathbb{W}$ intercepta o ortante não-negativo de $\mathbb{R}^K$. Correspondendo ao sub-espaço linear $\mathbb{W}$ existe o sub-espaço ortogonal de $\mathbb{W}$, denotado por $\mathbb{W}^\perp$ e definido por:

$$\mathbb{W}^\perp \equiv \left\{Y \in \mathbb{R}^K : X \cdot Y = 0 \text{ para todo } X \in \mathbb{W}\right\}, \tag{4.33}$$

sendo que $X \cdot Y = X(\omega_1)Y(\omega_1) + \ldots + X(\omega_K)Y(\omega_K)$ denota o produto interno de X e Y. A seguinte figura (extraída de PLISKA (1997, p. 14), para $K = 2$, descreve geometricamente o que foi considerado até aqui.

Através da figura (4.1), torna-se claro que $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ implica a existência de um raio em $\mathbb{W}^\perp$ ao longo do qual as coordenadas de todos os pontos fora da origem são estritamente positivas. Em particular, ao longo deste raio existe um ponto M em que a soma das coordenadas é exatamente 1, de tal modo que este ponto pode ser visto como

[5] Entendida como o valor da carteira do investidor.

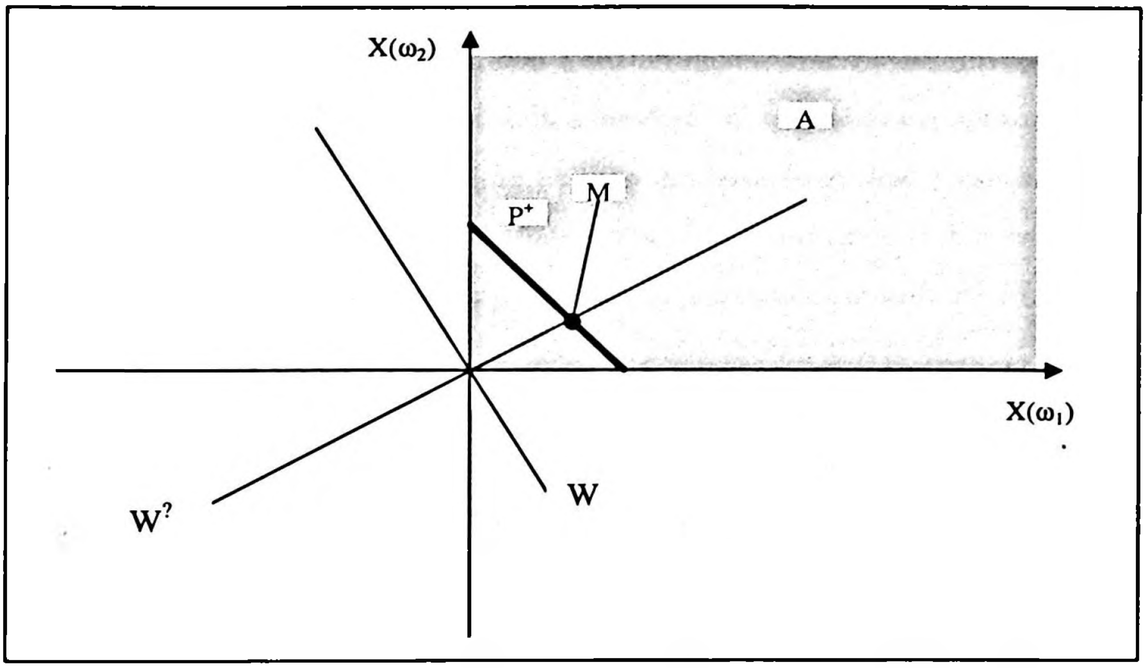

Figura 4.1: Interpretação Geométrica da Condição de Não-Arbitragem

uma medida de probabilidade. Considera-se agora o seguinte conjunto:

$$P^+ \equiv \{X \in \mathbb{R}^K : X_1 + \ldots + X_K = 1,\ X_1 > 0, \ldots, X_K > 0\}. \tag{4.34}$$

O que está sendo afirmado é que $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ se e somente se $\mathbb{W}^\perp \cap P^+ \neq \emptyset$. Visto que $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$ para todo $n = 1, \ldots, N$, segue que qualquer elemento Y do conjunto $\mathbb{W}^\perp \cap P^+$ (i.e., todo elemento Y que satisfaça $Y \cdot \Delta S_n^* = 0$ e $Y_1 + \ldots + Y_K = 1$, $Y_i > 0$ para $i = 1, \ldots, K$) é uma medida neutralizadora do risco, visto que satisfaz a definição 46. Inversamente, se Q é uma medida neutralizadora do risco arbitrária, para qualquer estratégia de negociação θ com $G^* \in \mathbb{W}$ tem-se que:

$$\mathbb{E}_Q[G^*] = \mathbb{E}_Q\left[\sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n^*\right] = \sum_{n=1}^{N} \theta_n \mathbb{E}_Q[\Delta S_n^*] = 0. \tag{4.35}$$

Logo Q pertence ao conjunto $\mathbb{W}^\perp \cap P^+ \neq \emptyset$, portanto não existem oportunidades de abitragem. Seja $\mathbb{M}$ o conjunto de todas as medidas neutralizadoras do risco, i.e.:

$$\mathbb{M} = \mathbb{W}^\perp \cap P^+. \tag{4.36}$$

O que foi afirmado até aqui sobre o primeiro teorema fundamental de precificação de ativos equivale a dizer que não existem oportunidades de arbitragem, i.e., $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$, se e somente se $\mathbb{W}^\perp \cap P^+ \neq \emptyset$, logo $\mathbb{M} \neq \emptyset$. A partir daqui é feita a demonstração propriamente dita do teorema. *Ida:* para a demonstração de que a não existência de oportunidades de arbitragem implica a existência de uma medida neutralizadora do risco será utilizado o *teorema da separação por hiperplano*[6]. Em linhas gerais, este teorema diz que se dois conjuntos convexos não possuem pontos em comum, então existe um hiperplano que separa estes dois conjuntos. Seja $\mathbb{A}^+$ o conjunto definido por:

$$\mathbb{A}^+ \equiv \{X \in A : \mathbb{E}[X] \geq 1\} \tag{4.37}$$

o qual é convexo, visto que qualquer combinação linear de dois elementos de $\mathbb{A}^+$ pertence à $\mathbb{A}^+$. Pela hipótese de não-arbitragem, deve-se ter $\mathbb{W} \cap \mathbb{A} = \emptyset$ e como A^+ é um subconjunto de $\mathbb{W}$ isto implica também ter-se $\mathbb{W} \cap \mathbb{A}^+ = \emptyset$. Pelo teorema da separação por hiperplano, existe um $Y \in \mathbb{W}^\perp$ tal que $X \cdot Y > 0$ para todo $X \in \mathbb{A}^+$. Para cada $k = 1, \ldots, K$ pode-se encontrar um vetor $X \in \mathbb{A}^+$ cuja k-ésima coordenada seja positiva enquanto as demais sejam zero, o que implica que Y deve ser um vetor de coordenadas estritamente positivas a fim de que se tenha sempre $X \cdot Y > 0$. Fazendo $Q(\omega_k) = Y(\omega_k) / [Y(\omega_1) + \ldots + Y(\omega_k)]$ é fácil notar que Q é uma medida de probabilidade (pois $\sum_\omega Q(\omega) = 1$) e $Q \in \mathbb{W}^\perp$ (pois $Q \cdot X = 0$ para todo $X \in \mathbb{W}$) e que todas as coordenadas de Q são estritamente positivas (visto que são funções de Y e $Y > 0$). Como $\Delta S_n^* \in \mathbb{W}$ para todo $n = 1, \ldots, N$, conclui-se então que Q é uma medida neutralizadora do risco. *Volta:* deve-se mostrar agora que a existência de uma medida neutralizadora do risco implica a inexistência de oportunidades de arbitragem. Se Q é uma medida neutralizadora do risco, então a expressão (4.35) está satisfeita o que, por sua vez, invalida as condições da proposição 43, o que implica não haver oportunidades de arbitragem no modelo. ■

Nota 49 *Da forma como foi definida, a medida neutralizadora do risco é também denominada uma medida de preço de equilíbrio*[7]*, conforme DOTHAN (1990, p. 24). Então, da mesma forma como no teorema acima, DOTHAN (1990, p. 24) demonstra que uma medida de preço de equilíbrio existe se e somente se o sistema de preços vigente não permite a criação de estratégias de arbitragem. Segundo HUANG; LITZENBERGER (1988, p. 226), uma condição necessária para que um sistema de preços seja um sistema de preços de equilíbrio é que o mesmo não permita oportunidades de arbiragem. Portanto, a existência de uma medida de preço de equilíbrio e de um sistema de preços de equilíbrio implicam um ao outro.*

---

[6]Vide OSTASZEWSKI (1990, p. 126)

[7]Em inglês, *equilibrium price measure.*

Nota 50 *Seguindo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 12), na extensão do teorema acima considerando-se um número infinito de ativos, a existência de uma medida neutralizadora do risco é uma condição suficiente mas não mais necessária para que não existam oportunidades de arbitragem. A fim de demonstrar que em um modelo com um número infinito de ativos é possível que não exista uma medida neutralizadora do risco mesmo na ausência de oportunidades de arbitragem, considera-se o seguinte exemplo, extraído de FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 13) e devido à SCHACHERMAYER (1992). Seja* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *e escolha qualquer medida de probabilidade* P *tal que a* $P(\omega) > 0$ *para qualquer* $\omega \in \Omega$*. Seja* $r = 0$ *e defina um sistema de preços* $\pi_i = 1$ *para* $i = 0, 1, \ldots$*. Os preços no instante* $t = 1$ *são dados por* $S_0 \equiv 1$ *e para* $i = 1, 2\ldots$ *por:*

$$S_i(\omega) = \begin{cases} 0 & se \ \ \omega = \omega_i, \\ 2 & se \ \ \omega = \omega_{i+1}, \\ 1 & caso\ contrário. \end{cases} \tag{4.38}$$

Suponha que $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta)$ *seja uma carteira de investimentos com* $\theta \in \ell^1$*, i.e.,* $\sum_{i=1}^{\infty} |\theta_i| < \infty$*, satisfazendo* $\bar{\theta} \cdot \bar{S}(\omega) \geq 0$ *para cada* $\omega \in \Omega$ *mas tal que* $\bar{\pi} \cdot \bar{\theta} \leq 0$*, sendo* θ_0 *e* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ *as quantias referentes ao numerário e aos demais ativos, respectivamente,* $\bar{S}(\omega) = (S_0(\omega), S_1(\omega), \ldots)$ *e* $\bar{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$*. Considerando* $\omega = \omega_1$ *tem-se que:*

$$0 \leq \bar{\theta} \cdot \bar{S}(\omega_1) = \theta_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \theta_k = \bar{\pi} \cdot \bar{\theta} - \theta_1 \leq -\theta_1. \tag{4.39}$$

Similarmente, para $\omega = \omega_i$*,* $i > 1$*,*

$$0 \leq \bar{\theta} \cdot \bar{S}(\omega) = \theta_0 + 2\theta_{i-1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, i-1}}^{\infty} \theta_k = \bar{\pi} \cdot \bar{\theta} + \theta_{i-1} - \theta_i \leq \theta_{i-1} - \theta_i. \tag{4.40}$$

Segue que $0 \geq \theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots$*. Mas isto somente pode ser verdade se* $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$*, haja visto que assumiu-se que* $\theta \in \ell^1$*. Portanto, não existem oportunidades de arbitragem.*

A prova de que não existe uma medida neutralizadora do risco é feita por contradição. Assume-se então que existe uma medida neutraliadora do risco Q *equivalente à* P *tal que* $\mathbb{E}_Q[S_i] = \pi_i$ *para todo* i*. Tal medida* Q *deve satisfazer:*

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}_Q[S_i] = 2Q(\omega_{i+1}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, i-1}}^{\infty} Q(\omega_k) && (4.41) \\ &= 1 + Q(\omega_{i+1}) - Q(\omega_i) && (4.42) \end{aligned}$$

para $i > 1$*. Esta relação implica que* $Q(\omega_i) = Q(\omega_{i+1})$ *para todo* $i > 1$*, contradizendo a hipótese de que* Q *é uma medida neutralizadora do risco e equivalente à* P*.*

Um mercado que não permita oportunidades de arbitragem é chamado de *mercado livre de arbitragem*, conforme SHIRYAEV (1999, p. 411).

4.4 Precificação de Derivativos em um Mercado Livre de Arbitragem

Pela definição de DOWNES; GOODMAN (1993, p. 125), um *instrumento derivativo* é um instrumento financeiro cujo valor se baseia em outro título. A atenção no presente texto será dada aos derivativos do tipo *europeu*, i.e., cujos *direitos* podem ser *exercidos* apenas na data final ou de *vencimento* do contrato, conforme SHIRYAEV (1999, p. 27). Restringindo o universo de títulos ao mercado de valores mobiliários, o interesse presente é a precificação de derivativos cujo valor seja função de um valor mobiliário *subjacente n*. A função de resultado de um derivativo X *simples* do tipo europeu pode ser escrita como:

$$X \equiv X\left(S_n\left(T\right)\left(\omega\right)\right), \quad \omega \in \Omega. \tag{4.43}$$

sendo $S_n\left(T\right)\left(\omega\right)$ o preço do valor mobiliário n no instante[8] T caso o estado da natureza seja ω, conforme frisado anteriormente[9].

O derivativo a ser tratado, dentro da classe dos derivativos do tipo europeu, será uma *opção de compra européia simples ordinária*, a qual será referenciada simplesmente por opção de compra européia, cuja definição está a seguir:

Definição 51 *(Opção de Compra Européia Simples Ordinária): Uma opção de compra européia simples ordinária é um derivativo que dá ao seu comprador (titular) o direito de comprar um determinado ativo (ativo-subjacente, ativo objeto) por um preço* $\mathscr{K}$ *(preço de exercício, strike) em uma determinada data futura (data de vencimento), sendo que ao vendedor (lançador) deste título contingente cabe arcar com as obrigações oriundas do contrato. O valor da opção de compra européia sobre um ativo de índice n na data de vencimento, denotado por* $\mathscr{C}_n\left(1\right)$*, é:*

$$\mathscr{C}_n\left(1\right) \equiv \max\left(S_n\left(1\right) - \mathscr{K}, 0\right), \tag{4.44}$$

sendo $S_n\left(1\right)$ *o preço do ativo-subjacente n no instante* $t = 1$.

[8]No contexto do modelo uniperiódico, $T = 1$.

[9]As funções de resultado dos derivativos aqui tratados consideram o preço do ativo subjacente apenas na data de vencimento do derivativo, i.e., não dependem da *trajetória do preço*.

A pergunta natural que se busca responder é:

Problema 52 *Qual é o preço racional, i.e., o preço único e livre de arbitragem, conforme MERTON (1973), deste direito no instante atual,* $\mathscr{C}_n(0)$*, i.e., qual deve ser o preço da opção de compra européia em* $t = 0$ *para que haja um investidor disposto a vendê-la e outro que queira comprá-la?*

Felizmente (ou infelizmente) este problema já está resolvido, desde os artigos de BLACK; SCHOLES (1973) e MERTON (1973). Poderia se imaginar que a resposta deste problema dependeria de funções de utilidade e as preferências por risco delas derivadas. Entretanto, os autores acima citados mostraram que isto não ocorre, sendo as fórmulas de precificação independentes das características dos agentes tomadores de decisão.

Os argumentos utilizados na derivação da fórmula de Black-Scholes-Merton provêm da *teoria de precificação por arbitragem* e, em geral, determinam um preço único e livre de arbitragem para o ativo que está sendo precificado. Antes de tratar-se dos argumentos de precificação por arbitragem são necessárias as seguintes definições:

Definição 53 *(Derivativo Atingível, Estratégia Replicante, PLISKA (1997, p. 11)): Um derivativo* X *é dito atingível caso exista uma estratégia de negociação* θ*, denominada estratégia replicante, tal que* $V_1(\omega) = X$ *para todo* $\omega \in \Omega$*. Neste caso, diz-se que* θ *gera* X.

Segue agora o argumento de precificação por arbitragem. Assume-se que a lei do preço único seja válida[10], o que é verdadeiro em um mercado livre de arbitragem, conforme demonstra FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 10).

Seguindo PLISKA (1997, p. 17), seja X um derivativo atingível gerado pela estratégia replicante θ. Suponha então que o preço deste título seja $p > V_0$ no instante $t = 0$, lembrando que V_0 é o custo inicial da estratégia replicante. Um investidor que venda o derivativo por p e adote a estratégia de negociação θ irá lucrar $p - V_0$, sendo este lucro certo, pois no instante $t = 1$ a estratégia replicante θ irá proporcionar uma carteira cujo valor equivale ao do derivativo, para todo $\omega \in \Omega$. Considere agora que o preço do derivativo seja $p < V_0$. Deste modo, um investidor pode simplesmente seguir a estratégia de negociação $-\theta$, recebendo V_0 e comprando o derivativo por p. Assim, este investidor

[10] Vide Nota 37.

aufere um lucro certo de $V_0 - p$ pois para todo $\omega \in \Omega$ no instante $t = 1$ o valor do derivativo será igual ao da estratégia de negociação $-\theta$.

Portanto, o único preço livre de arbitragem para o derivativo é $p = V_0$ e, neste caso, dizemos que V_0 é o preço racional de X determinado pela teoria de precificação por arbitragem. Sempre que se utiliza deste argumento para a precificação de ativos diz-se que está sendo utilizado o *princípio de não-arbitragem*. Convém enunciar a seguinte proposição, a qual por si só já possui importância e que será utilizada futuramente na determinação da fórmula de precificação de derivativos.

Proposição 54 *(PLISKA (1997, p. 18)) Se Q é uma medida neutralizadora do risco, então para toda estratégia de negociação θ temos:*

$$V_0 = \mathbb{E}_Q\left[V_1/B_1\right]. \tag{4.45}$$

Demonstração. Por definição, $V_0^* = V_0/B_0$. Como $B_0 = 1$ temos $V_0^* = V_0$ e como V_0 é um valor conhecido podemos escrever:

$$V_0 = V_0^* = \mathbb{E}_Q\left[V_0^*\right]. \tag{4.46}$$

Sabendo que $V_1^* = V_0^* + G^*$ e $G^* = \sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n^*$ temos:

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}_Q\left[V_1^* - G^*\right] && (4.47)\\ &= \mathbb{E}_Q\left[V_1^*\right] - \mathbb{E}_Q\left[\sum_{n=1}^{N} \theta_n \Delta S_n^*\right] && (4.48)\\ &= \mathbb{E}_Q\left[V_1^*\right] - \sum_{n=1}^{N} \theta_n \mathbb{E}_Q\left[\Delta S_n^*\right]. && (4.49) \end{aligned}$$

Como Q é uma medida neutralizadora do risco, a segunda parcela da última equação é nula, de forma que chega-se a:

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}_Q\left[V_1^*\right] && (4.50)\\ &\therefore\ V_0 = \mathbb{E}_Q\left[V_1/B_1\right]. && (4.51) \end{aligned}$$

■

Assim, a proposição 54 indica que sob a medida neutralizadora do risco o valor atual de uma carteira é simplesmente a esperança na medida Q do valor descontado da carteira no instante terminal. Como a medida Q não foi especificada, nota-se que $\mathbb{E}_Q\left[V_1^*\right]$ deve ser o mesmo qualquer que seja a medida neutralizadora do risco escolhida. Conforme demonstram FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 21), em um mercado livre de arbitragem isto ocorre se e somente se o derivativo for atingível, obtendo-se então um preço único e livre de arbitragem.

Sempre que utilizada uma medida neutralizadora do risco para precificação diz-se que está sendo observado o *princípio de avaliação neutra em relação ao risco.* Enuncia-se agora o resultado que permite precificar derivativos seguindo este princípio, seguindo PLISKA (1997, p. 18).

Teorema 55 *(do Princípio de Avaliação Neutra em Relação ao Risco): Se o modelo uniperiódico não permite oportunidades de arbitragem, então o valor no instante $t = 0$ de um derivativo atingível X é dado por $\mathbb{E}_Q[X/B_1]$, sendo Q qualquer medida neutralizadora do risco.*

Demonstração. Pela proposição 54, sabe-se que $V_0 = \mathbb{E}_Q[V_1/B_1]$, para qualquer estratégia de negociação θ. Como θ é uma estratégia de negociação replicante, tem-se então que $V_1 = X$, logo $V_0 = \mathbb{E}_Q[X/B_1]$. ■

Nota 56 *Segundo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 18), sempre é possível encontrar um preço livre de arbitragem para um derivativo X se o modelo não permite oportunidades de arbitragem, i.e., se o preços dos ativos subjacentes dos derivativos não permitirem estratégias de arbitragem. Seja $\Pi(X)$ o conjunto de preços livres de arbitragem de um derivativo X. Então, conforme demonstra FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 18), este conjunto é não vazio e dado por:*

$$\Pi(X) = \{\mathbb{E}_Q[X/B_1] | \, Q \in \mathbb{M}, \mathbb{E}_Q[X] < \infty\}, \tag{4.52}$$

lembrando que $\mathbb{M}$ é o conjunto de todas as medidas neutralizadoras do risco. Seguindo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 19), é possível caracterizar as bandas de arbitragem do conjunto $\Pi(X)$, sendo

$$\pi_{\inf}(X) \equiv \inf \Pi(X) \quad e \quad \pi_{\sup}(X) \equiv \sup \Pi(X) \tag{4.53}$$

as bandas inferior e superior, respectivamente, para que o preço do derivativo X não ofereça oportunidades de arbitragem. Em um mercado livre de arbitragem, i.e., satisfazendo

$$\mathbb{E}_Q[X/B_1] \in [\pi_{\inf}(X), \pi_{\sup}(X)], \tag{4.54}$$

as bandas de arbitragem são caracterizadas, segundo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 19), por:

$$\pi_{\inf}(X) = \inf_{Q \in \mathbb{M}} \mathbb{E}_Q [X/B_1] \tag{4.55}$$

$$= \max\left\{ m \in [0,\infty) \,\middle|\, \exists\, \theta \in \mathbb{R}^N \quad com \quad m + \theta \cdot \mathcal{G} \leq \frac{X}{B_1} \quad P\text{-}q.c. \right\} \tag{4.56}$$

e

$$\pi_{\sup}(X) = \sup_{Q \in \mathbb{M}} \mathbb{E}_Q [X/B_1] \tag{4.57}$$

$$= \min\left\{ m \in [0,\infty) \,\middle|\, \exists\, \theta \in \mathbb{R}^N \quad com \quad m + \theta \cdot \mathcal{G} \geq \frac{X}{B_1} \quad P\text{-}q.c. \right\}, \tag{4.58}$$

sendo $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$ *a estratégia de negociação referente aos ativos com risco e* $\mathcal{G}$ *o vetor de ganhos líquidos descontados dado por* $\mathcal{G} = \{S_i^*(1) - \pi_i\}$, *com* $\pi_i = \mathbb{E}_Q[S_i(1)/B_1]$, *para* $i = 1, \ldots, N$ *e com P-q.c. indicando que a desigualdade é quase certa, i.e., a probabilidade de que ocorra, calculada na medida* P, *é* 1.

Ainda segundo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 20), $\pi_{\sup}(X)$ *é o menor valor de uma carteira* θ *tal que o valor produzido pela mesma no instante terminal,* V_1, *satisfaça*

$$V_1 \geq X \quad P\text{-}q.c.. \tag{4.59}$$

Tal carteira é denominada estratégia de superhedge ou estratégia super-replicante.

Capítulo 5

Modelo de Precificação de Derivativos Simples Ordinários do Tipo Europeu em Tempo Discreto Multiperiódico

Da mesma forma como feito no modelo de tempo discreto uniperiódico, o presente capítulo inicia-se com as especificações do modelo e algumas definições relacionadas a processos estocásticos. Da mesma forma como no capítulo anterior, segue-se o modelo exposto em PLISKA (1997, p. 72).

5.1 Especificações do Modelo

Um modelo de tempo discreto multiperiódico é definido por:

- $T + 1$ datas de negociação, $t = 0, \ldots, T$;
- Um espaço amostral finito, denotado por Ω, constituído por $K < \infty$ elementos, i.e.:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} \tag{5.1}$$

- Uma medida de probabilidade P em Ω, tal que $P(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$;
- Uma *filtração* $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t : t = 0, \ldots, T\}$, a qual constitui um submodelo que descreve como a informação sobre os ativos é revelada aos investidores;

- Um processo *conta bancária* $B = \{B_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$, sendo B um processo estocástico com $B_0 = 1$ e $B_t(\omega) > 0$ para todo t e ω. Da mesma forma como no capítulo 4, B_t pode ser interpretado como o valor no instante t de uma conta de "poupança" quando \$1 é depositado no instante $t = 0$. Usualmente B é um processo não-decrescente e a quantia $r_t \equiv (B_t - B_{t-1}) / B_{t-1} \geq 0$, $t = 1, \ldots, T$, pode ser vista como a *taxa de juros livre de risco* válida intervalo $(t-1, t)$;

- N processos de *ativos com risco*[1] $S_n = \{S_n(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$, sendo S_n um processo estocástico não-negativo para $n = 1, 2, \ldots, N$. A variável aleatória $S_n(t)$ pode ser interpretada como o valor no instante t do ativo com risco n.

Assume-se ainda que o mercado seja perfeito. Em relação ao modelo uniperiódico, existem duas diferenças principais: o submodelo de informação e o submodelo referente ao processo estocástico dos preços. A nota a seguir trata de considerações referentes a estes dois tópicos.

Nota 57 *Em relação ao submodelo de estrutura de informação, às considerações são análogas àquelas feitas na seção 3.1.1, adicionando-se novos conceitos a partir dos que já foram expostos anteriormente.*

Seguindo SHIRYAEV (1995, p. 133), um sistema $\mathcal{A}$ de subconjuntos $\omega \in \Omega$ é denominado uma álgebra se

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B \in \mathcal{A}$,

(c) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$,

sendo $\bar{A}$ o conjunto complementar de A.

Ainda segundo SHIRYAEV (1995, p. 133), um sistema $\mathscr{F}$ de subconjuntos $\omega \in \Omega$ é uma σ-álgebra se for uma álgebra e satisfazer a condição:

(b*) *se* $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, *então*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}. \tag{5.2}$$

[1] Os ativos com risco aqui considerados são valores mobiliários.

Assumindo que exista um fluxo de σ-álgebras tal que

$$\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}, \tag{5.3}$$

então a sequência $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}\}$ é denominada uma filtração, com a seguinte interpretação, conforme SHIRYAEV (1999, p. 82):

$$\mathscr{F}_n \text{ é o conjunto de eventos observáveis no instante } n$$

ou, em outras palavras, $\mathscr{F}_n$ é a "informação" sobre a situação do mercado até e inclusive o instante n.

Assim, com a terminologia introduzida e seguindo o que foi dito na seção 3.1.1, para que o modelo apresente consistência informacional é necessário que:

(a) *o processo estocástico referente ao preço $S_n(t)$ do ativo n no instante t deve ser mensurável em relação à σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ para $t = 1, \ldots, T$ e $n = 1, \ldots, N$, i.e., $S_n = (S_n(t), \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ deve ser uma sequência estocástica (adaptada), refletindo o fato de que os preços são formados a partir das mudanças observadas no mercado até e inclusive o instante t, conforme SHIRYAEV (1999, p. 82);*

(b) *o processo estocástico referente à estratégia de negociação $\theta_n(t)$ do ativo n no instante t deve ser mensurável em relação à σ-álgebra $\mathscr{F}_{t-1}$ para $t = 1, \ldots, T$ e $n = 1, \ldots, N$, i.e., $\theta = (\theta_n(t), \mathscr{F}_{t-1})_{t\geq 1}$ deve ser uma sequência previsível, refletindo o fato de que a posição de "amanhã" é completamente definida pela situação de "hoje", conforme SHIRYAEV (1999, p. 385),*

(c) *o processo estocástico conta bancária B_t no instante t deve ser mensurável em relação à σ-álgebra $\mathscr{F}_{t-1}$ para $t = 1, \ldots, T$, i.e., $B = (B_t(t), \mathscr{F}_{t-1})_{t\geq 1}$ deve ser uma sequência previsível, refletindo o fato de que o investidor deve saber a priori qual é a taxa de juros que deverá pagar ou receber do banco caso tenha obtido um empréstimo ou feito uma aplicação, respectivamente.*

5.1.1 Estratégias de Negociação, Processo de Valor e Processo de Ganho

As definições de estratégia de negociação, processo de valor e processo de ganho são similares às do modelo de tempo discreto uniperiódico.

Definição 58 *(Estratégia de Negociação, PLISKA (1997, p. 80)) Uma estratégia de negociação é um vetor* $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ *de processos estocásticos previsíveis em relação à filtração* $\mathbb{F}$ *dados por* $\theta_n = \{\theta_n(t) : t = 1, 2, \ldots, T\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, *sendo que* $\theta_n(t)$ *representa a quantia do ativo* n *mantida em carteira do período* $t-1$ *até o período* t.

Definição 59 *(Processo de Valor, PLISKA (1997, p. 81)): O processo de valor* $V = \{V_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ *é um processo estocástico adaptado em relação à filtração* $\mathbb{F}$ *definido por:*

$$V_t = \begin{cases} \theta_0(1) B_0 + \sum_{n=1}^{N} \theta_n(1) S_n(0), & t = 0, \\ \theta_0(t) B_t + \sum_{n=1}^{N} \theta_n(t) S_n(t), & t \geq 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Assim, V_0 é o valor inicial da carteira do investidor e, para $t \geq 1$, V_t é o valor da carteira em t antes que qualquer transação seja efetuada neste instante.

Seja $\Delta S_n(t) \equiv S_n(t) - S_n(t-1)$ a mudança no valor do processo estocástico S_n entre os instantes $t-1$ e t. Então $\theta_n(t)\Delta S_n(t)$ representa o ganho ou perda decorrente da manutenção de $\theta_n(t)$ unidades do ativo n entre os instantes $t-1$ e t.

Similarmente, $\sum_{u=1}^{t} \theta_n(u) \Delta S_n(u)$ representa o ganho ou perda acumulado até o instante t decorrente do investimento no ativo n. Esta soma é análoga, em tempo discreto, a uma *integral estocástica*. Define-se agora o processo de ganho da carteira do investidor.

Definição 60 *(Processo de Ganho, PLISKA (1997, p. 81)): O processo de ganho* $G = \{G_t : t = 1, 2, \ldots, T\}$ *é um processo estocástico adaptado em relação à filtração* $\mathbb{F}$ *definido por:*

$$G_t \equiv \sum_{u=1}^{t} \theta_0(u) \Delta B_u + \sum_{n=1}^{N} \sum_{u=1}^{t} \theta_n(u) \Delta S_n(u), \qquad t \geq 1. \tag{5.5}$$

5.1.2 Estratégias de Negociação Auto-Financiáveis

Conforme mencionado anteriormente, para $t \geq 1$ a quantia V_t representa o valor no instante t antes que ocorra qualquer transação envolvendo os ativos da carteira, i.e., antes que o investidor faça um rebalanceamento da mesma. Da mesma forma, o valor da carteira do investidor logo após o mesmo ter efetuado mudanças em sua composição é dado por:

$$\theta_0(t+1) B_t + \sum_{n=1}^{N} \theta_n(t+1) S_n(t), \qquad t \geq 1. \tag{5.6}$$

Assim, a mudança no valor de uma carteira é, em geral, decorrente de mudanças nos preços dos ativos e / ou das quantidades dos mesmos na carteira. Seguindo SHIRYAEV

(1999, p. 386), se a mudança da quantia investida no ativo conta bancária for devida somente às mudanças nas quantidades dos ativos com risco, então a estratégia de negociação é *auto-financiável*, conforme a seguinte definição:

Definição 61 *(Estratégia de Negociação Auto-Financiável, PLISKA (1997, p. 81)): Uma estratégia de negociação θ é dita auto-financiável se:*

$$V_t = \theta_0 (t+1) B_t + \sum_{n=1}^{N} \theta_n (t+1) S_n (t), \qquad t = 1, \ldots, T-1. \tag{5.7}$$

Pela definição acima, é possível estabelecer a seguinte proposição, conforme demonstra FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 226):

Proposição 62 *Para uma estratégia de negociação θ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(b) *θ é auto-financiável;*

(a) $V_t = V_0 + G_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T.$

5.1.3 Preços Descontados

Diversos são os ativos que podem ser escolhidos como o numerário, i.e., a unidade pela qual os preços são cotados. Escolhendo-se o processo conta bancária como numerário, torna-se possível comparar os preços de ativos cotados em diferentes instantes do tempo. Seguindo PLISKA (1997, p. 83), têm-se então as seguintes definições:

Definição 63 *(Processo de Preço Descontado): O processo de preço descontado $S_n^* = \{S_n^* (t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$ é definido por:*

$$S_n^* (t) \equiv S_n (t) / B_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T; \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.8}$$

Definição 64 *(Processo de Valor Descontado): O processo de valor descontado $V^* = \{V_t^* : t = 0, 1, \ldots, T\}$ é definido por:*

$$V_t^* \equiv \begin{cases} \theta_0 (1) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n (1) S_n^* (0), & t = 0 \\ \theta_0 (t) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n (t) S_n^* (t), & t = 1, \ldots, T. \end{cases} \tag{5.9}$$

Definição 65 *(Processo de Ganho Descontado): O processo de ganho descontado* $G^* = \{G_t^* : t = 1, 2, \ldots, T\}$ *é definido por:*

$$G_t^* \equiv \sum_{n=1}^{N} \sum_{u=1}^{t} \theta_n(u) \, \Delta S_n^*(u), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{5.10}$$

sendo que $\Delta S_n^*(u) = S_n^*(u) - S_n^*(u-1)$.

Verifica-se que todos os processos definidos acima são adaptados e, ainda:

$$V_t^* = V_t / B_t \qquad t = 0, 1, \ldots, T \tag{5.11}$$

de forma a obter-se a seguinte proposição:

Proposição 66 *(PLISKA (1997, p. 84)) Uma estratégia de negociação é auto-financiável se e somente se*

$$V_t^* = V_0^* + G_t^*, \qquad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{5.12}$$

5.2 Cálculo do Retorno no Modelo Multiperiódico

Esta subseção trata do modo como é calculado o retorno referente aos processos de preço, processo de preço descontado, processo de valor e processo de ganho. Inicia-se com a definição do processo de retorno do preço do ativo.

Definição 67 *(Processo de Retorno Correspondente ao Processo de Preço, PLISKA (1997, p. 84)): Dado um processo de preço* S_n*,* $n = 1, \ldots, N$*, o processo de retorno* $R_n = \{\Delta R_n(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$*, sendo* $\Delta R_n(0) = 0$*, é dado por:*

$$\Delta R_n(t) \equiv \begin{cases} \Delta S_n(t) / S_n(t-1), & S_n(t-1) > 0, \\ 0, & S_n(t-1) = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

O processo de retorno R_0 referente ao processo conta bancária B é dado por $\Delta R_0(t) = r_t$. Observa-se que $\Delta R_n(t) \geq -1$, visto que os preços dos ativos não podem assumir valores negativos. Ainda, o processo de retorno R_n pode ser definido equivalentemente por:

$$\Delta S_n(t) = S_n(t-1) \, \Delta R_n(t), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{5.14}$$

$$S_n(t) = S_n(0) + \sum_{u=1}^{t} S_n(u-1) \, \Delta R_n(u), \qquad t = 1, \ldots, T, \tag{5.15}$$

$$S_n(t) = S_n(0) \prod_{u=1}^{t} (1 + \Delta R_n(u)), \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{5.16}$$

Define-se o processo de retorno do processo de preço descontado, do processo de valor, do processo de ganho e os demais analogamente à definição acima. A fim de caracterizar-se o processo de retorno em relação ao preço descontado, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta S_n^*(t) &= S_n^*(t) - S_n^*(t-1) && (5.17)\\
&= S_n(t)/B_t - S_n^*(t-1) && (5.18)\\
&= \frac{S_n(t-1)\left[1+\Delta R_n(t)\right]}{B_{t-1}\left[1+\Delta R_0(t)\right]} - S_n^*(t-1) && (5.19)\\
&= S_n^*(t-1)\left[\frac{\Delta R_n(t) - \Delta R_0(t)}{1+\Delta R_0(t)}\right]. && (5.20)
\end{aligned}$$

Visto que $\Delta S_n^*(t) = S_n^*(t-1)\,\Delta R_n^*(t)$, chega-se a:

$$\Delta R_n^*(t) = \frac{\Delta R_n(t) - \Delta R_0(t)}{1+\Delta R_0(t)}. \tag{5.21}$$

Esta última expressão será importante na próxima subseção.

5.3 Martingales e a Condição de Não-Arbitragem no Modelo Multiperiódico

A presente seção trata da condição de não-arbitragem em um modelo de precificação de derivativos em tempo discreto multiperiódico. Da mesma forma como no modelo em tempo discreto uniperiódico, não ocorrerão oportunidades de arbitragem se e somente se existir uma medida neutralizadora do risco. Para isso, será necessário o conceito de *martingale* e outros relacionados.

Definição 68 *(SHIRYAEV (1995, p. 95)): Uma sequência estocástica* $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ *é*

um P-martingale,

um P-supermartingale,

um P-submartingale

se $\mathbb{E}_P[|X_t|] < \infty$ *e se*

$$\mathbb{E}_P\left[X_t \mid \mathscr{F}_{t-1}\right] = X_{t-1}, \tag{5.22}$$

$$\mathbb{E}_P\left[X_t \mid \mathscr{F}_{t-1}\right] \leq X_{t-1}, \tag{5.23}$$

$$\mathbb{E}_P\left[X_t \mid \mathscr{F}_{t-1}\right] \geq X_{t-1}, \tag{5.24}$$

respectivamente, para todo $t \geq 1$.

Conforme frisado por FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 228), um martingale representa a formalização matemática de um "jogo justo": para cada instante s e um horizonte $t > s$, interpretando X como a fortuna de um apostador, se este processo for um martingale então a esperança condicionada do ganho futuro $X_t - X_s$ é zero, dadas as informações disponíveis até o instante s. Com isso, de antemão considera-se que nem o apostador nem a banca tem maior chance de auferirem lucro.

Pelas definições acima nota-se que X é um submartingale se e somente se $-X$ é um supermartingale, sendo X um martingale se e somente se for tanto um submartingale como um supermartingale. Os processo supermartingales e submartingales são ditos *semi-martingales*.

Trata-se agora da condição de não-arbitragem no modelo multiperiódico. Similarmente ao modelo uniperiódico, a condição essencial para que não haja oportunidades de arbitragem é a existência de uma medida neutralizadora do risco. Em relação ao que foi considerado no modelo uniperiódico, só mudam pequenos detalhes.

No modelo multiperiódico, considera-se a seguinte definição de oportunidade de arbitragem:

Definição 69 *(Oportunidade de Arbitragem, SHIRYAEV (1999, p. 411)): Uma oportunidade de arbitragem no modelo multiperiódico é uma estratégia de negociação θ auto-financiável tal que:*

(a) $V_0 = 0$,

(b) $V_T \geq 0$ *(P-q.c.),*

(c) $\mathbb{E}[V_T] > 0$.

Conforme demonstra PLISKA (1997, p. 92), em vista da expressão (5.11) segue que:

Proposição 70 *Uma estratégia de negociação auto-financiável θ é uma oportunidade de arbitragem se e somente se:*

(a) $V_0^* = 0$,

(b) $V_T^* \geq 0$,

(c) $\mathbb{E}[V_T^*] > 0$.

Ainda, devido a expressão (5.12) tem-se:

Proposição 71 *Uma estratégia de negociação auto-financiável θ é uma oportunidade de arbitragem se e somente se:*

(a) $G_T^* \geq 0$,

(b) $\mathbb{E}\left[G_T^*\right] > 0$.

Antes de ser estabelecido o principal resultado desta seção, tem-se a seguinte definição:

Definição 72 *(Medida Neutralizadora do Risco, Medida Martingale, PLISKA (1997, p. 93)): Uma medida neutralizadora do risco, também chamada medida martingale, é uma medida de probabilidade Q tal que:*

(a) $Q(\omega) > 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$,

(b) *O processo de preço descontado* S_n^* *é um* Q*-martingale para* $n = 1, 2, \ldots, N$, *i.e.*

$$\mathbb{E}_Q\left[S_n^*(t+s)\middle|\, \mathscr{F}_t\right] = S_n^*(t), \qquad t, s \geq 0, \tag{5.25}$$

o que equivale a:

$$\mathbb{E}_Q\left[B_t S_n(t+s)/B_{t+s}\middle|\, \mathscr{F}_t\right] = S_n(t), \qquad t, s \geq 0. \tag{5.26}$$

Enuncia-se agora o principal resultado desta seção, uma versão do primeiro teorema fundamental de precificação de ativos em tempo discreto multiperiódico:

Teorema 73 *(Primeiro Teorema Fundamental de Precificação de Ativos, PLISKA (1997, p. 94)): Não existem oportunidades de arbitragem se e somente se existe uma medida martingale Q.*

Demonstração. A demonstração segue o mesmo raciocínio construído no modelo uniperiódico. Faz-se aqui apenas um esboço geral. *Ida*[2]: demonstra-se, inicialmente, que a não-existência

[2] Segundo SHIRYAEV (1999, p. 417), existem diversas provas da necessidade da existência de uma medida martingale para que um mercado seja livre de arbitragem e a generalização deste resultado para o tempo contínuo, sendo que todas elas, de um modo ou de outro, recorrem aos conceitos e resultados de *análise funcional* (o teorema de Hahn-Banach, separação em espaços euclidianos de dimensão finita, espaços de Hilbert etc.).

de oportunidades de arbitragem no modelo multiperiódico implica a não-existência de oportunidades de arbitragens em cada um dos modelos uniperiódicos que o constituem[3]. Pelo teorema fundamental de precificação de ativos exposto no modelo uniperiódico, conclui-se então que a não-existência de oportunidades de arbitragem implica a existência de uma medida martingale Q. *Volta*: demonstra-se, inicialmente, que se X é um martingale e θ é um processo estocástico previsível, então:

$$G_t \equiv \sum_{u=1}^{t} \theta_u \Delta X_u \tag{5.27}$$

é um martingale, também denominado *transformação de martingale*, conforme SHIRYAEV (1999, p. 98). Este resultado é obtido através de cálculos envolvendo propriedades de esperança condicionada. Segue então, utilizando-se as expressões (5.12) e (5.27), que se Q é uma medida martingale e θ é uma estratégia de negociação auto-financiável, então V^*, o processo de valor descontado correspondente a θ, é um Q-martingale. Para mostrar que por este resultado a existência de uma medida martingale Q implica que não podem existir oportunidades de arbitragem, suponha que θ é uma estratégia de negociação auto-financiável arbitrária com $V_T^* \geq 0$ e $\mathbb{E}\left[V_T^*\right] > 0$. Isto implica que $\mathbb{E}_Q\left[V_T^*\right] > 0$. Como pelo resultado anterior V^* é um Q-martingale, segue que $V_0^* = \mathbb{E}_Q\left[V_T^*\right] > 0$ o que, pela proposição 70, invalida a existência de oportunidades de arbitragem. ∎

Nota 74 *Seguindo SHIRYAEV (1999, p. 39), a hipótese de mercado eficiente significa que o mercado responde racionalmente à chegada de novas informações, no sentido que os preços são corrigidos instantaneamente e o mercado está sempre em equilíbrio, não havendo oportunidades de arbitragem.*

Pelo teorema anterior, conforme observam FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 229), a hipótese de que a medida de probabilidade P do espaço onde "vive" o processo de preço dos ativos seja ela própria uma medida martingale equivale a dizer que o mercado é eficiente, de tal modo que as flutuações dos preços sejam vistas como um "jogo justo".

Portanto, conforme sumariza SHIRYAEV (1999, p. 42), a eficiência de um mercado é nada mais do que a propriedade martingal dos preços dos ativos como, por exemplo, em um mercado no qual os preços são "passeios aleatórios".

---

[3]Vide Nota 75 adiante.

Nota 75 *FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 228) demonstram que em um modelo multiperiódico só existem oportunidades de arbitragem se e somente não existem oportunidades de arbitragem para cada um dos períodos simples de negociação, i.e., os submodelos uniperiódicos que constituem o modelo multiperiódico.*

Nota 76 *SHIRYAEV (1999, p. 415) discute a validez do primeiro teorema fundamental de precificação de ativos para um modelo com um número infinito de ativos, i.e., $N = \infty$, ou com um número infinito de períodos, i.e., $T = \infty$. No primeiro caso, conforme visto anteriormente*[4]*, viu-se que para que um mercado livre de arbitragem não é necessária a existência de uma medida martingale. No segundo caso, SHIRYAEV (1999, p. 415) demonstra que não é suficiente a existência de uma medida martingale para que o mercado seja livre de arbitragem.*

Até aqui, a medida martingale Q foi caracterizada utilizando-se o processo de preço. Alternativamente, a medida Q também pode ser caracterizada a partir do processo de retorno R_n. Pela definição de medida martingale, tem-se que:

$$\mathbb{E}_Q\left[\Delta S_n^*(t+1)\,|\mathscr{F}_t\right] = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, \ldots, N \quad \text{e} \quad t < T. \tag{5.28}$$

Como $\Delta S_n^*(t+1) = S_n^*(t)\,\Delta R_n^*(t+1)$ e pelo fato de $S_n^*(t) > 0$, deve-se ter então:

$$\mathbb{E}_Q\left[\Delta R_n^*(t+1)\,|\mathscr{F}_t\right] = 0, \quad \text{para todo} \quad n \quad \text{e} \quad t < T, \tag{5.29}$$

i.e., $\Delta R_n^*(t+1)$ é uma *diferença martingale*, conforme SHIRYAEV (1999, p. 96). Com isso, obtém-se a seguinte proposição:

Proposição 77 *(PLISKA (1997, p. 98)) Uma medida de probabilidade estritamente positiva Q é uma medida martingale se e somente se o processo de retorno R_n^* for um Q-martingale para $n = 1, \ldots, N$.*

Demonstração. Segue dos comentários acima. ■

Em termos do processo de retorno não-descontado, R_n, observa-se inicialmente que:

$$\Delta S_n^*(t+1) = S_n^*(t)\left(\frac{\Delta R_n(t+1) - \Delta R_0(t+1)}{1 + \Delta R_0(t+1)}\right) \tag{5.30}$$

em razão da expressão (5.21). Portanto, se Q é uma medida martingale (lembrando que o processo de preço descontado S_n^* é estritamente positivo) deve-se ter:

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{\Delta R_n(t+1) - \Delta R_0(t+1)}{1 + \Delta R_0(t+1)}\right] = 0, \quad \text{para todo} \quad n \quad \text{e} \quad t < T. \tag{5.31}$$

[4] Vide Nota 50.

5.4 Precificação de Derivativos em um Mercado Livre de Arbitragem

A presente seção é análoga à seção 4.4, agora no contexto de um modelo multiperiódico em tempo discreto. Neste contexto, um derivativo simples do tipo europeu com função de resultado $X \equiv X(S_n(T)(\omega))$ é dito *atingível* se e somente se existe uma estratégia de negociação auto-financiável θ tal que sob ela $V_T(\omega) = X$ para todo $\omega \in \Omega$. Diz-se então que a estratégia de negociação θ *replica* ou *gera* X.

Conforme visto no modelo uniperiódico, o valor no instante $t = 0$ de um derivativo atingível é dado pela esperança sob a medida neutralizadora do risco do valor descontado do derivativo no instante terminal. Esta afirmação se extende para o modelo multiperiódico, conforme demonstra PLISKA (1997, p. 113):

Proposição 78 *(Princípio da Avaliação Neutro em Relação ao Risco no Modelo Multiperiódico): O valor no instante t de um derivativo atingível X é igual a V_t, i.e., o valor no instante t da carteira correspondente à estratégia de negociação replicante θ que gera X. Ainda:*

$$V_t^* = V_t/B_t = \mathbb{E}_Q[X/B_T | \mathscr{F}_t], \qquad t = 0, 1, \ldots, T \tag{5.32}$$

para toda medida martingale Q.

Assim, conforme FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 238), o valor inicial do investimento necessário V_0 para a replicação do derivativo atingível X pode ser interpretado como o sendo o seu único preço "justo", sendo que um preço diferente de V_0 introduzirá oportunidades de arbitragem no mercado. Por este motivo este preço é também denominado *preço livre de arbitragem.*

Nota 79 *Analogamente ao que foi feito na Nota 56, discute-se aqui os preços máximos e mínimos de um derivativo X que sejam livres de arbitragem. Seguindo SHIRYAEV (1999, p. 395), uma carteira θ é um hedge (x, X)-superior para um derivativo X se para $V_0 = x$ tem-se que $V_T \geq X$ P-q.c., sendo um hedge (x, X)-inferior para um derivativo X se para $V_0 = x$ tem-se que $V_T \leq X$ P-q.c..*

Conforme SHIRYAEV (1999, p. 395), um instrumento de hedge é um instrumento de proteção que permite ao investidor garantir o nível de capital adequado face às obrigações *oriundas de contratos financeiros que porventura tenham sido celebrados. Um contrato financeiro é dito hedgeável se contra ele existe ou é possível constituir um instrumento de hedge. Assim, um instrumento de hedge equivale à um seguro do investidor para as transações efetudas no mercado de capitais.*

Seja

$$X^{*}(x,X)=\{\theta : V_0 = x,\ V_T \geq X\} \tag{5.33}$$

a classe dos hedges (x,X)-superiores e

$$X_{*}(x,X)=\{\theta : V_0 = x,\ V_T \leq X\} \tag{5.34}$$

a classe dos hedges (x,X)-inferiores. Então, conforme SHIRYAEV (1999, p. 395), o valor

$$\pi^{*}(X) \equiv \inf\{x > 0 : X^{*}(x,X) \neq \emptyset\} \tag{5.35}$$

é o preço superior de hedge contra X e

$$\pi_{*}(X) \equiv \sup\{x > 0 : X_{*}(x,X) \neq \emptyset\} \tag{5.36}$$

é o preço inferior de hedge contra X.

Nota-se a similaridade de $\pi^{*}(X)$ e $\pi_{*}(X)$ com as definições de $\pi_{\sup}(X)$ e $\pi_{\inf}(X)$, respectivamente, feitas na Nota 56. Dessa forma, conforme lá estabelecido, pode ser afirmado que o intervalo $[\pi_{*}(X), \pi^{*}(X)]$ é aquele no qual os preços transacionados não permitem oportunidades de arbitragem.

Seguindo FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 20), a carteira θ referente à $\pi^{*}(X)$ permite ao vendedor do derivativo X proteger-se contra qualquer obrigação futura decorrente do contrato celebrado com o comprador de X. Assim, o objetivo natural do vendedor do derivativo X é negociá-lo por um preço de venda que lhe permita constituir uma carteira de hedge superior; por outro lado, o objetivo natural do comprador do derivativo X é negociá-lo por um preço de compra que seja financiado por uma carteira de hedge inferior, haja visto que as obrigações oriundas desta carteira jamais serão superiores ao resultado do derivativo X.

Então, pode ser afirmado que $\pi^{*}(X)$ é o menor preço pelo qual um investidor aceite vender e $\pi_{*}(X)$ é o maior preço pelo qual outro aceite comprar o derivativo X de tal forma que ambos satisfaçam seus objetivos. Assim, a menos que $\pi^{*}(X) = \pi_{*}(X)$, caso em que X é um derivativo atingível, conforme FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 242) demonstram, isto não será possível e os preços livres de arbitragem pertencentes ao intervalo

$[\pi_*(X), \pi^*(X)]$ *envolverão um trade-off entre os objetivos do vendedor e os objetivos do comprador.*

Resumindo, conforme bem frisado por SHIRYAEV (1999, p. 398), uma transação efetuada por um preço pertencente ao intervalo $[\pi_*(X), \pi^*(X)]$ *não oferece à nenhuma das partes envolvidas oportunidades de arbitragem. Ambas podem ter lucro ou prejuízo em função do comportamento aleatório dos preços, de tal forma que um ganho, ou um grande ganho, deva ser visto como uma compensação pelo risco.*

Capítulo 6

Caracterização de Mercado Completo e Incompleto

Segundo SHIRYAEV (1999, p. 396), a questão de se e quando um mercado é completo é de interesse maior no campo de finanças matemáticas, sendo difícil obter-se uma resposta satisfatória para esta pergunta no caso geral, sem que sejam feitas hipóteses acerca da estrutura do mercado no qual os ativos são negociados. Entretanto, no caso de um mercado livre de arbitragem, a questão da *completude*[1] do mercado possui uma solução exaustiva em termos da unicidade da medida neutralizadora do risco (medida martingale), conforme estabelece o *segundo teorema fundamental de precificação de ativos*, a ser tratado adiante.

6.1 O Segundo Teorema Fundamental de Precificação de Ativos

Pelos capítulos anteriores, na ausência de oportunidades de arbitragem, um derivativo atingível θ deve valer no instante $t = 0$ justamente o valor inicial V_0 da estratégia de negociação replicante θ que gera X. Nada foi dito, entretanto, acerca da precificação de derivativos que não sejam atingíveis. Basicamente, um mercado é completo se e somente se todo derivativo for atingível através de uma estratégia de negociação auto-financiável, conforme as seguintes definições.

Definição 80 *(Mercado Completo, AVELLANEDA (1999, p. 190)): Um mercado di-*

[1]Em inglês, *completeness*.

namicamente completo[2] *é aquele no qual todos os derivativos são atingíveis através de uma estratégia de negociação replicante, sabendo-se como precificá-los racionalmente.*

Definição 81 *(Mercado Incompleto, FRITTELLI (2000a)): Se um mercado não é completo então ele é um mercado totalmente incompleto ou apenas um mercado incompleto. Em um mercado totalmente incompleto os ativos disponíveis para negociação não permitem um hedge nem mesmo parcial do risco do investidor; já em um mercado incompleto, os ativos permitem o hedge parcial do risco*[3]*, não sabendo-se como precificá-los racionalmente.*

A caracterização da completude de um mercado livre de arbitragem segue a mesma estrutura daquela apresentada na seção 3.2. Em um modelo uniperíodico, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 82 *(PLISKA (1997, p. 21)) Considere um mercado sem oportunidades de arbitragem. Assim, o mesmo é completo se e somente se o número de possíveis estados da natureza $\omega \in \Omega$ é igual ao número de vetores independentes em $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_N(1)\}$.*

Demonstração. *Ida*: um mercado completo exige a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \theta_0 B_1(\omega_1) + \theta_1 S_1(1)(\omega_1) + \ldots + \theta_N S_N(1)(\omega_1) &= X_1, \\ \theta_0 B_1(\omega_2) + \theta_1 S_1(1)(\omega_2) + \ldots + \theta_N S_N(1)(\omega_2) &= X_2, \\ &\vdots \\ \theta_0 B_1(\omega_K) + \theta_1 S_1(1)(\omega_K) + \ldots + \theta_N S_N(1)(\omega_K) &= X_K, \end{aligned} \tag{6.1}$$

pois deve existir $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ tal que θ gere $X = (X_1, \ldots, X_K)$ para todo $\omega \in \Omega$, sendo $S_n(1)(\omega_k)$ o preço do ativo n no instante $t = 1$ caso o estado da natureza seja ω_k, $n = 1, \ldots, N$ e $k = 1, \ldots, K$ e X_k o valor da função de resultado do derivativo na data de vencimento do mesmo casa ocorra o estado ω_k. Em forma matricial, o sistema acima

[2]Conforme já frisado anteriormente subentende-se que um mercado é completo se e somente se ele é dinamicamente completo.

[3]O presente trabalho é restrito à consideração de mercados incompletos.

pode ser escrito como $\underset{(K\times(N+1))}{\mathbb{D}^T}\underset{((N+1)\times 1)}{\theta} = \underset{(K\times 1)}{X}$, sendo:

$$\underset{(K\times(N+1))}{\mathbb{D}^T} = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \cdots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & \cdots & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \cdots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

$$\underset{((N+1)\times 1)}{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N), \underset{(K\times 1)}{X} = (X_1, \ldots, X_K). \tag{6.3}$$

Da álgebra linear, sabemos que este sistema possui solução dada pelo vetor θ se e somente se o posto da matriz $\mathbb{D}^T$ for igual a K, i.e., se esta matriz possuir K linhas linearmente independentes. Como o posto segundo linhas é igual ao posto segundo colunas , então o número de vetores independentes em $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_N(1)\}$ deve ser igual a K. *Volta*: inversamente, se o número de possíveis estados da natureza $\omega \in \Omega$ é igual ao número de vetores independentes em $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_N(1)\}$, então o sistema de equações acima possui solução. Logo, todo derivativo X é atingível e, dessa forma, o mercado é completo. ■

O problema central na análise de precificação de derivativos em mercados incompletos é que estes não são atingíveis por meio de uma estratégia de negocição replicante. Considerando-se ainda o modelo uniperiódico, a seguinte proposição indica que se um derivativo não é atingível então o valor do mesmo calculado sob a medida neutralizadora do risco não é constante para cada medida Q escolhida dentre o conjunto constituído por todas as medidas neutralizadoras do risco existentes. Logo, se o valor não é constante não se sabe qual a medida correta a ser utilizada na precificação do derivativo, o que impede que seja determinado seu preço racional.

Proposição 83 *(PLISKA (1997, p. 23)) Um derivativo é atingível se e somente se* $\mathbb{E}_Q[X/B_1]$ *assume o mesmo valor para toda medida* $Q \in \mathbb{M}$ *(lembrando que* $\mathbb{M}$ *é o conjunto de todas as medidas neutralizadoras do risco).*

Demonstração. *Ida*: pela proposição 54 e pelo princípio de avaliação neutra em relação ao risco. *Volta*: basta mostrar que um derivativo não-atingível assume valores distintos em função da medida neutralizadora do risco escolhida. Considere a matriz $\mathbb{D}^T$ e os vetores coluna θ e X conforme expostos na demonstração da proposição 82, sendo $N+1 < K$, i.e., o mercado é incompleto. Seja $\pi^T = (\pi_1, \ldots, \pi_K)$ um vetor coluna arbitrário. Uma pequena alteração no lema de Farkas[4] indica que o problema:

$$\underset{(K\times(N+1))((N+1)\times 1)}{\mathbb{D}^T \quad \theta} = \underset{(K\times 1)}{X}, \ X \geq 0, \ X \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tem solução } \theta \tag{6.4}$$

ou

$$\underset{(1\times K)(K\times(N+1))}{\pi \quad \mathbb{D}^T} = 0, \ \underset{(1\times K)(K\times 1)}{\pi \quad X} > 0, \ \pi \in \mathbb{R}^K \text{ tem solução } \pi, \tag{6.5}$$

mas não ambos. Como o mercado é incompleto, tem-se que $AH = X$ não possui solução, logo deve-se ter $\pi\mathbb{D}^T = 0$, $\pi X > 0$. Considere uma medida de probabilidade $\widehat{Q}$, sendo $\widehat{Q} \in \mathbb{M}$, e um escalar $\lambda > 0$ tão pequeno quanto se queira. Defina então a seguinte variável Q:

$$Q(\omega_k) \equiv \widehat{Q}(\omega_k) + \lambda\pi_k B_1(\omega_k) > 0, \qquad k = 1, \ldots, K. \tag{6.6}$$

Tem-se que:

$$Q(\omega_1) + \ldots + Q(\omega_K) = \widehat{Q}(\omega_1) + \lambda\pi_1 B_1(\omega_1) + \ldots + \widehat{Q}(\omega_K) + \lambda\pi_K B_1(\omega_K) \tag{6.7}$$

$$= \widehat{Q}(\omega_1) + \ldots + \widehat{Q}(\omega_K) + \lambda[\pi_1 B_1(\omega_1) + \ldots + \pi_K B_1(\omega_K)] \tag{6.8}$$

Como $\widehat{Q} \in \mathbb{M}$ e $\pi_1 B_1(\omega_1) + \ldots + \pi_K B_1(\omega_K) = 0$ (em vista de $\pi A = 0$) chega-se em:

$$Q(\omega_1) + \ldots + Q(\omega_K) = 1, \tag{6.9}$$

logo Q é uma medida de probabilidade atribuindo probabilidade positiva para todo $\omega \in \Omega$. Na medida Q, a esperança de $S_n^*(1)$ é dada por:

$$\mathbb{E}_Q[S_n^*(1)] = \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) S_n(1)(\omega_k) / B_1(\omega_k) \tag{6.10}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \widehat{Q}(\omega_k) S_n(1)(\omega_k) / B_1(\omega_k) + \lambda \sum_{k=1}^{K} \pi_k S_n(1)(\omega_k) \tag{6.11}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \widehat{Q}(\omega_k) S_n^*(1)(\omega_k) \tag{6.12}$$

sendo a última igualdade decorrente de $\pi\mathbb{D}^T = 0$. Como $\widehat{Q} \in \mathbb{M}$, i.e., $\widehat{Q}$ é uma medida neutralizadora do risco, tem-se que $\sum_{k=1}^{K} \widehat{Q}(\omega_k) S_n^*(1)(\omega_k) = S_n^*(0)$, logo:

$$\mathbb{E}_Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0). \tag{6.13}$$

Portanto, Q também é uma medida neutralizadora do risco, i.e., $Q \in \mathbb{M}$. Demonstra-se agora que os preços do derivativo calculado sob essas duas medidas neutralizadoras do

[4] Vide DUFFIE (1988, p. 71).

risco, $\widehat{Q}$ e Q, são diferentes, i.e., $\mathbb{E}_{\widehat{Q}}[X/B_1] \neq \mathbb{E}_Q[X/B_1]$. Para isso, defina $\delta \equiv \pi X$ e visto que $\pi X > 0$, tem-se $\delta > 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[X/B_1] &= \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) X(\omega_k) / B_1(\omega_k) && (6.14) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \widehat{Q}(\omega_k) X(\omega_k) / B_1(\omega_k) + \lambda \sum_{k=1}^{K} \pi_k X(\omega_k) && (6.15) \\ &= \mathbb{E}_{\widehat{Q}}[X/B_1] + \lambda\delta && (6.16) \end{aligned}$$

Portanto, como $\lambda\delta > 0$, temos que $\mathbb{E}_{\widehat{Q}}[X/B_1] \neq \mathbb{E}_Q[X/B_1]$. Assim, acabou-se de demonstrar que um derivativo que não seja atingível apresenta valores distintos para diferentes medidas $Q \in \mathbb{M}$. Logo, se $\mathbb{E}_Q[X/B_1]$ assume um valor constante para qualquer $Q \in \mathbb{M}$, então o derivativo deve ser atingível. ∎

Seguindo PLISKA (1997, p. 24), enuncia-se então o segundo teorema fundamental de precificação de ativos.

Teorema 84 *(Segundo Teorema Fundamental de Precificação de Ativos: Unicidade): Um mercado é completo se e somente se o conjunto de medidas neutralizadoras do risco,* $\mathbb{M}$, *contiver um único elemento.*

Demonstração. *Ida*: seja o mercado completo. Considere que o conjunto $\mathbb{M}$ possua 2 elementos distintos, Q e $\widehat{Q}$, e que X seja um derivativo atingível arbitrário, o que implica que $\mathbb{E}_Q[X/B_1] = \mathbb{E}_{\hat{Q}}[X/B_1]$. Como $Q \neq \hat{Q}$, deve existir um estado da natureza ω_k tal que $Q(\omega_k) \neq \hat{Q}(\omega_k)$. Defina o derivativo X por:

$$X(\omega) = \begin{cases} B_1(\omega_k), & \text{para } \omega = \omega_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \qquad (6.17)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[X/B_1] &= \sum_{k=1}^{K} X(\omega_k) Q(\omega_k) / B_1(\omega_k) && (6.18) \\ &= B_1(\omega_k) Q(\omega_k) / B_1(\omega_k) && (6.19) \\ &= Q(\omega_k) && (6.20) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\hat{Q}}[X/B_1] &= \sum_{k=1}^{K} X(\omega_k) \hat{Q}(\omega_k) / B_1(\omega_k) && (6.21) \\ &= B_1(\omega_k) \hat{Q}(\omega_k) / B_1(\omega_k) && (6.22) \\ &= \hat{Q}(\omega_k). && (6.23) \end{aligned}$$

Como o derivativo é atingível, i.e., $\mathbb{E}_Q[X/B_1] = \mathbb{E}_{\hat{Q}}[X/B_1]$, deve-se ter $Q(\omega_k) = \hat{Q}(\omega_k)$, o que é um absurdo pois contraria a hipótese assumida. Logo, o conjunto $\mathbb{M}$ não pode conter mais de um elemento. *Volta*: com base na proposição 83, se o conjunto $\mathbb{M}$ contiver um único elemento, i.e., se houver apenas uma medida neutralizadora do risco, então, logicamente, só haverá um único modo de precificar todos os derivativos, fazendo com que $\mathbb{E}_Q[X/B_1]$ seja um valor constante, o que implica que todos os derivativos são atingíveis, sendo esta exatamente a definição de um mercado completo. ■

Nota 85 *O enunciado do segundo teorema fundamental de precificação de ativos foi feito considerando-se o modelo uniperiódico. A extensão do mesmo para o modelo multiperiódico é válida, conforme demonstram FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 245) e, neste caso, o número de átomos na σ-álgebra* $\mathscr{F}_T$ *não deve ser superior à* $(N+1)^T$*. Em outras palavras, em uma estrutura de informação do tipo árvore*[5]*, o que é o caso do modelo multiperiódico em tempo discreto, para que o mercado seja completo é necessário que o número de ramos partindo de cada vértice da árvore não seja superior à* $N+1$*. Para que, além de necessária, esta condição seja suficiente, os* $N+1$ *ativos devem também possuir retornos linearmente independentes, conforme frisado anteriormente na questão da completude do mercado em economias dinâmicas.*

6.2 Um Exemplo de Mercado Completo: O Modelo de Árvore Binária

Como modelo de precificação de derivativos em tempo discreto multiperiódico, o modelo de árvore binária, formalmente estabelecido em COX; ROSS; RUBINSTEIN (1979), é largamente utilizado, tanto em pesquisa como na prática. Será feita nesta seção uma descrição do mesmo, determinando-se o modo de cálculo da medida martingale.

No modelo de árvore binária de precificação de ativos, considera-se um único ativo com risco e o ativo conta bancária, pelo qual é possível aplicar recursos ou tomar emprestado à taxa de juros r. Em cada instante de tempo, existem duas possibilidades: o preço do ativo com risco sobe ou desce. A fim de simplificar a notação, S_t representa o preço do ativo com risco no instante t, para todo $t = 0, 1, \ldots, T$. A subida é dada por um fator u e

[5] Vide seção 3.1.1.

a descida por um fator d, sendo que $u > 1$ e $0 < d < 1$. Considera-se que a probabilidade que o preço do ativo suba é dada por p e a de que ele desça por $q = 1 - p$.

Seguindo SHIRYAEV (1995, p. 17), considere T lançamentos de uma moeda, sendo a sequência dos resultados obtidos dada por $(a_1, \ldots, a_T)$, com $a_i = 1$ caso o resultado do i-ésimo lançamento seja cara ("sucesso") e $a_i = 0$ caso seja coroa ("fracasso"). Assim, o espaço amostral é dado por:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_T), a_i = 0, 1\}. \tag{6.24}$$

Para cada ponto (evento) $\omega = (a_1, \ldots, a_T)$ do espaço amostral atribui-se a probabilidade

$$p(\omega) = p^{\sum a_i} q^{T - \sum a_i} \tag{6.25}$$

sendo p e q dois números não negativos satisfazendo $p + q = 1$. Para verificar que $p(w)$ é realmente uma medida de probabilidade, considere agora todos os eventos $\omega = (a_1, \ldots, a_T)$ para os quais $\sum_{i=1}^{T} a_i = k$, sendo $k = 0, 1, \ldots, T$. Então, o número destes eventos é dado por $\binom{T}{k}$ e, portanto,

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} p^k q^{T-k} = (p+q)^T = 1. \tag{6.26}$$

Assim, $p(\omega)$ é consistente com a definição de uma medida de probabilidade. Considere agora os eventos

$$A_k = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_T), a_1 + \ldots + a_T = k\}, \; k = 0, 1, \ldots, T, \tag{6.27}$$

consistindo em exatamente k sucessos. Segue então do que foi dito que

$$P(A_k) = \binom{T}{k} p^k q^{T-k}, \tag{6.28}$$

e $\sum_{k=0}^{T} P(A_k) = 1$. O conjunto de probabilidades $\{P(A_0), \ldots, P(A_T)\}$ é chamado de *distribuição binomial.*

Pode-se então construir o modelo binomial do processo de preço dos ativos da seguinte forma. Sejam p, $q = 1 - p$, d, u e S_0 os parâmetros, com $0 < p < 1$, $0 < d < 1 < u$ e $S_0 > 0$. O preço do ativo com risco no instante t, após a ocorrência de k subidas e $t - k$ descidas é dado por:

$$S_t = S_0 u^k d^{t-k}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{6.29}$$

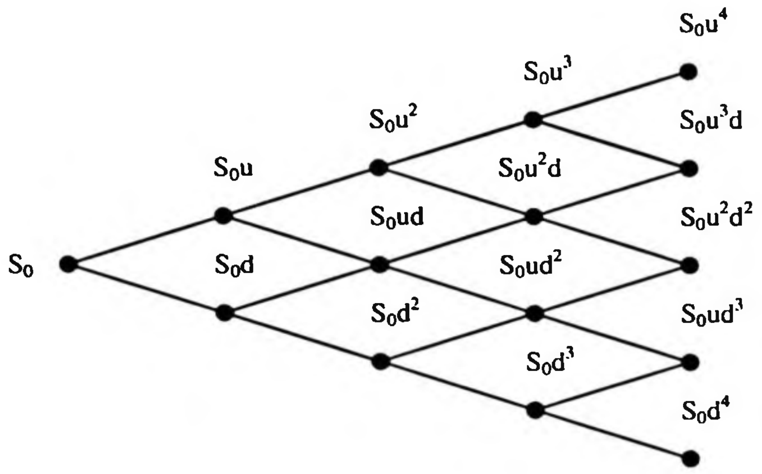

Figura 6.1: Exemplo de uma Possível Árvore Representativa do Processo de Preço no Modelo de Árvore Binária.

A Figura 6.1 ilustra o processo de preço do ativo com risco em um modelo de árvore binária. Em vista da expressão 6.28, tem-se então que a distribuição de probabilidade de S_t é dada por:

$$P\left(S_t = S_0 u^n d^{t-n}\right) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, t. \tag{6.30}$$

No modelo de árvore binária, a taxa de retorno do ativo com risco é dada por:

$$\Delta R_t = u^{a_t} d^{1-a_t} - 1, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{6.31}$$

Assim, $\Delta R_t = u - 1$ com probabilidade p ou $\Delta R_t = d - 1$ com probabilidade $1 - p$.

O raciocínio desenvolvido a partir daqui é válido para a determinação da medida martingale no modelo de árvore binária. Pela expressão (5.31), se Q é uma medida martingale tem-se que:

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{\Delta R_t - r}{1 + r}\right] = 0. \tag{6.32}$$

Substituindo ΔR_t pela expressão (6.31) chega-se a:

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{u^{a_t} d^{1-a_t} - 1 - r}{1 + r}\right] = 0, \; t = 1, \ldots, T. \tag{6.33}$$

Seja $(Q(a_t = 1) = q, Q(a_t = 0) = 1 - q)$ a distribuição de probabilidade da medida martingale Q. Então a expressão (6.33) pode ser escrita como:

$$q\left[\frac{u-1-r}{1+r}\right] + (1-q)\left[\frac{d-1-r}{1+r}\right] = 0 \tag{6.34}$$

Isolando q chega-se a:

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}. \tag{6.35}$$

Como deve-se ter $0 < q < 1$, então existirá uma medida martingale se e somente se $d < 1 + r < u$. Neste caso, a medida martingale Q é dada por:

$$Q(\omega) = q^n (1-q)^{T-n}, \tag{6.36}$$

sendo $\omega \in \Omega$ qualquer estado da natureza correspondendo a n subidas e $T - n$ descidas. Segue que a distribuição de probabilidade de S_t sob a medida neutralizadora do risco é dada, para todo t, por:

$$Q\left(S_t = S_0 u^n d^{t-n}\right) = \binom{t}{n} q^n (1-q)^{t-n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, t. \tag{6.37}$$

Seguindo PLISKA (1997, p. 101), seja a função de resultado de um derivativo arbitrário da forma:

$$X \equiv g(S_T), \tag{6.38}$$

para uma função qualquer g a valores reais. Então, pelo princípio da avaliação neutra em relação ao risco, o valor do derivativo X no instante $t = 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} V_0 &= (1+r)^{-T} \mathbb{E}_Q [g(S_T)] && (6.39) \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} g\left(S_0 u^n d^{T-n}\right). && (6.40) \end{aligned}$$

Para uma opção de compra européia com preço de exercício $\mathscr{K}$, a função g que define o derivativo é dada por:

$$g(S_T) = (S_T - \mathscr{K})^+ = \begin{cases} S_T - \mathscr{K}, & S_T \geq \mathscr{K}, \\ 0, & S_T < \mathscr{K}. \end{cases} \tag{6.41}$$

Assim, no instante $t = 0$ o valor de uma opção de compra européia simples ordinária pelo modelo de árvore binária é:

$$V_0 = (1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \left(S_0 u^n d^{T-n} - \mathscr{K}\right)^+ , \tag{6.42}$$

sendo que $(\cdot)^+$ é a função que assume o maior valor entre zero e seu argumento.

Capítulo 7

Abordagens para Hedge e Precificação de Derivativos em Mercado Incompleto

O presente capítulo expõe algumas das abordagens presentes na literatura a respeito do problema de hedge e precificação de derivativos em mercado incompletos. Conforme visto anteriormente, em um mercado incompleto existe ao menos um derivativo que não é atingível, de tal modo que não é possível constituir uma estratégia de negociação replicante que tenha um valor terminal igual ao deste título. Assim, ao se negociar um derivativo com estas características o investidor fica sujeito a algum tipo de risco econômico, e as abordagens de precificação e hedge de derivativos em mercados incompletos se distinguem basicamente pelo critério de risco adotado.

7.1 O Método de hedge Pelo Critério do Erro Quadrático Médio

Conforme SHIRYAEV (1999, p. 396), quando não é possível replicar a função de resultado X de um derivativo do tipo europeu arbitrário, um critério razoável para comparar a qualidade de diferentes carteiras é o *desvio quadrático médio*, dado por[1]

$$\mathbb{E}_0^P\left[(V_T - X)^2\right], \tag{7.1}$$

[1] A fim de simplificar a notação, o operador esperança condicionada até o instante t (inclusive) na medida P é denotado por $\mathbb{E}_t^P[\cdot]$.

também denominado *erro de replicação quadrático esperado*, segundo ČERNÝ (2004, p. 270).

Seguindo ČERNÝ (2004, p. 270), a minimização do desvio quadrático médio pode ser feita através da escolha de uma estratégia de negociação auto-financiável $\theta = \{\theta_0, \ldots, \theta_T\}$ que solucione:

$$\min_{\theta} \mathbb{E}_0^P \left[(V_T - X)^2 \right] \tag{7.2}$$

$$\text{Sujeito a: } V_T = B_T V_0 + \sum_{t=0}^{T-1} B_{T-t} \theta_t S_t \left(R_{t+1} - B_t \right), \tag{7.3}$$

sendo X a função de resultado do derivativo na data de vencimento, V_T o valor terminal da carteira gerado pelo investimento em θ_t unidades do ativo com risco com preço S_t no instante t e em $B_t \equiv (1+r)^t$ unidades monetárias depositadas (ou tomadas por empréstimo) à uma taxa de juros livre de risco r. O retorno do ativo com risco é dado por $R = \{R_1, \ldots, R_T\}$, considerando-se que os mesmos são independentes e identicamente distribuídos com função de massa de probabilidade dada por P.

A estratégia ótima de negociação que soluciona a expressão (7.2) é denominada *hedge de variância ótima*, sendo denotada por $\theta^D = \{\theta_0^D, \ldots, \theta_T^D\}$. Ao derivá-la, ČERNÝ (2004, p. 301) demonstra que a solução equivale a uma mudança da medida P para uma Q que convencionou-se denominar *medida de variância ótima*. Esta mudança de medida é dada por[2]:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP} &= m_{1|0} m_{2|1} \ldots m_{T|T-1}, & (7.4) \\ m_{t+1|t} &\equiv \frac{q_{t+1|t}}{p_{t+1|t}} = \frac{1 - a H_{t+1}}{b}, & (7.5) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} H_{t+1} &\equiv R_{t+1} - B_1 = R_{t+1} - (1+r), & (7.6) \\ a &= \frac{\mathbb{E}_t^P [H_{t+1}]}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2 \right]}, & (7.7) \\ b &= 1 - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P [H_{t+1}] \right)^2}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2 \right]}. & (7.8) \end{aligned}$$

Então, o preço do derivativo pode ser calculado como o valor presente esperado sob a medida Q da função de resultado X do derivativo.

[2] Vide a derivação deste resultado no apêndice A.

7.2 O Método de hedge pela Medida de Mínima Entropia

Segundo FRITTELLI (2000b), o método de precificação de derivativos em mercados incompletos pela medida de mínima entropia relativa tenta conciliar duas abordagens: a baseada na determinação de critérios que permitam selecionar apenas um elemento do conjunto de infinitas medidas martingales equivalentes e a que busca maximizar a utilidade esperada da riqueza terminal do investidor sob o argumento de que em um mercado incompleto a precificação não é mais *livre das preferências*[3] dos agentes da economia. FRITTELLI (2000b) demonstra que a escolha da medida de mínima entropia pode ser tanto boa como uma medida de precificação propriamente dita como legítima sob o ponto de vista econômico.

Em um espaço amostral com um número finito de elementos, a *entropia relativa* $D\,(Q \parallel P)$ da medida Q em relação à medida P é definida por:

$$D\,(Q \parallel P) \equiv \mathbb{E}_P \left[\frac{dQ}{dP} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]. \tag{7.9}$$

Seja $n \geq 2$ a cardinalidade de Ω, $\mathbf{1}= (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e considere $t = 0, 1$, i.e., um modelo uniperiódico. Ainda, seja $B = 1 + r$ e $S = \{S_0, S_1\}$ o processo de preço do ativo com risco. Assuma que $S_0 = 1$ e que a variável aleatória S_1 possa assumir n valores diferentes positivos do conjunto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ com probabilidade $P\,(S_1 = a_i) = p_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, com $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Então, a medida de mínima entropia relativa, denominada simplesmente de medida de mínima entropia, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, é a solução do seguinte problema:

$$\min_{Q \in \mathbb{R}^n, Q \geq 0} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i \ln \left(\frac{q_i}{p_i} \right), \tag{7.10}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad q \cdot \mathbf{1} = 1, \tag{7.11}$$

$$q \cdot a = B. \tag{7.12}$$

Verifica-se então que a solução deste problema é dada por:

$$q_i = \frac{p_i \exp\left(\gamma\, a_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} p_j \exp\left(\gamma\, a_j\right)} = \frac{p_i \exp\left(\gamma\, a_i\right)}{\mathbb{E}_P \left[\exp\left(\gamma\, a\right)\right]}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.13}$$

[3] Em inglês, *preference-free*.

sendo $\gamma \in \mathbb{R}$ a única solução (a qual sempre existe em um mercado livre de arbitragens) da seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(a_i - B\right) \exp\left(\gamma\, a_i\right) = 0. \tag{7.14}$$

Então, o *preço entrópico* $\pi(X)$ de um derivativo X é dado por:

$$\pi(X) = \mathbb{E}_Q\left[\frac{X}{B}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{B} \frac{p_i x_i \exp\left(\gamma\, a_i\right)}{\mathbb{E}_P\left[\exp\left(\gamma\, a\right)\right]}. \tag{7.15}$$

7.3 Ilustração dos Métodos de Precificação em Mercados Incompletos

A presente seção busca ilustrar a precificação de uma opção de compra européia simples ordinária pela medida de variância ótima e pela medida de mínima entropia. Tem-se a seguinte descrição do problema.

Problema 86 *Seja uma opção de compra européia simples ordinária com vencimento em $T = 6$ semanas. O preço de exercício é $\mathscr{K} = \$100$, a taxa de juros livre de risco (para aplicação e captação) é $r = 4\%$ a.a. e o preço inicial do ativo subjacente é $S_0 = \$100$. O numerário é o processo conta bancária, denotado por $B_t = (1+r)^t$. A função de resultado da opção é dada por:*

$$X = \begin{cases} S_T - \mathscr{K} & se \;\; S_T > \mathscr{K}, \\ 0 & se \;\; S_T \leq \mathscr{K}. \end{cases} \tag{7.16}$$

Assume-se que as possíveis taxas de retornos logarítmicas do ativo com risco sejam pertencentes ao conjunto $(-0.06, -0.04, -0.02, 0.00, 0.02, 0.04, 0.06)$. Assim, a árvore de preços resultantes é dada pela figura 7.1. Ainda, as probabilidades de cada um dos retornos R_{t+1} na medida observada são dadas por $P = (0.014, 0.050, 0.199, 0.384, 0.273, 0.067, 0.013)$, i.e., $P(R_{t+1} = \exp(-0.06)) = 0.014$, $P(R_{t+1} = \exp(-0.04)) = 0.050$ e assim por diante. Como para cada vértice da árvore existem 7 ramos e somente dois ativos (o ativo com risco e a aplicação à taxa de juros r), o mercado é claramente incompleto. Pede-se então calcular o preço da opção pela medida de variância ótima e pela medida de mínima entropia.

						143.33
						140.49
						137.71
					134.99	134.99
					132.31	132.31
					129.69	129.69
				127.12	127.12	127.12
				124.61	124.61	124.61
				122.14	122.14	122.14
			119.72	119.72	119.72	119.72
			117.35	117.35	117.35	117.35
			115.03	115.03	115.03	115.03
		112.75	112.75	112.75	112.75	112.75
		110.52	110.52	110.52	110.52	110.52
		108.33	108.33	108.33	108.33	108.33
	106.18	106.18	106.18	106.18	106.18	106.18
	104.08	104.08	104.08	104.08	104.08	104.08
	102.02	102.02	102.02	102.02	102.02	102.02
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
	98.020	98.020	98.020	98.020	98.020	98.020
	96.079	96.079	96.079	96.079	96.079	96.079
	94.176	94.176	94.176	94.176	94.176	94.176
		92.312	92.312	92.312	92.312	92.312
		90.484	90.484	90.484	90.484	90.484
		88.692	88.692	88.692	88.692	88.692
			86.936	86.936	86.936	86.936
			85.214	85.214	85.214	85.214
			83.527	83.527	83.527	83.527
				81.873	81.873	81.873
				80.252	80.252	80.252
				78.663	78.663	78.663
					77.105	77.105
					75.578	75.578
					74.082	74.082
						72.615
						71.177
						69.768

Figura 7.1: Árvore de Preços do Ativo com Risco.

7.3.1 Resolução pela Medida de Variância Ótima

Numericamente, os retornos possíveis do ativo com risco podem ser dispostos no seguinte vetor:

$$R_{t+1} = [\exp(0.06)\ \exp(0.04)\ \exp(0.02)\ \exp(0.00)\ \exp(-0.02)\ \exp(-0.04)\ \exp(-0.06)\ ] \tag{7.17}$$

o fator de juros semanal é dado por $B_1 = 1.04^{1/52} = 1.00075$. Assim, o vetor de ganho em excesso, H_{t+1}, conforme a expressão (7.6), é dado por:

$$H_{t+1} = [6.108\ 4.006\ 1.945\ -0.075\ -2.056\ -3.997\ -5.899] \times 10^{-2}. \tag{7.18}$$

Dessa forma, $\mathbb{E}_t^P[H_{t+1}] = 1.58 \times 10^{-3}$ e $\mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right] = 4.72 \times 10^{-4}$. Portanto, as expressões (7.7) e (7.8) resultam respectivamente em

$$a = \frac{\mathbb{E}_t^P[H_{t+1}]}{\mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right]} = \frac{1.58 \times 10^{-3}}{4.72 \times 10^{-4}} = 3.35, \tag{7.19}$$

$$b = 1 - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P[H_{t+1}]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right]} = 1 - \frac{1.58^2 \times 10^{-6}}{4.72 \times 10^{-4}} = 0.9947. \tag{7.20}$$

A partir destes dois últimos parâmetros, é possível então calcular a fórmula (7.5) de mudança de medida, cujos resultados são expressos no seguinte vetor:

$$m_{t+1|t} = [0.7995\ 0.8704\ 0.9398\ 1.0079\ 1.0746\ 1.1400\ 1.2041] \tag{7.21}$$

O vetor representativo da medida de variância ótima é então dado por:

$$q_{t+1|t} = m_{t+1|t}\, p_{t+1|t} \tag{7.22}$$

$$= [0.010\ 0.058\ 0.257\ 0.387\ 0.214\ 0.057\ 0.017], \tag{7.23}$$

i.e., $q_{t+1|t}(R_{t+1} = \exp(0.06)) = 0.010$, $q_{t+1|t}(R_{t+1} = \exp(0.04)) = 0.058$ e assim por diante. A partir da medida de probabilidade de variância ótima, calcula-se então o valor da opção em cada instante t e para cada vértice da árvore através da fórmula:

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q\left[\frac{X}{B_{T-t}}\right]. \tag{7.24}$$

A figura 7.2 representa a àrvore de preços da opção para cada instante e para cada vértice calculadas pela medida de variância ótima.

						43.33
						40.49
						37.71
					35.06	34.99
					32.39	32.31
					29.77	29.69
				27.26	27.20	27.12
				24.74	24.68	24.61
				22.27	22.22	22.14
			19.90	19.86	19.80	19.72
			17.54	17.49	17.43	17.35
			15.22	15.17	15.10	15.03
		13.00	12.95	12.89	12.83	12.75
		10.79	10.72	10.66	10.59	10.52
		8.643	8.558	8.478	8.404	8.329
	6.732	6.604	6.478	6.359	6.259	6.184
	4.910	4.731	4.545	4.357	4.190	4.081
	3.335	3.113	2.866	2.588	2.274	2.020
2.293	2.077	1.838	1.566	1.244	0.8199	0
	1.167	0.9521	0.7159	0.4523	0.1601	0
	0.5832	0.4245	0.2665	0.1205	0.02098	0
	0.2560	0.1603	0.07902	0.02321	0	0
		0.04993	0.01764	0	0	0
		0.01187	0	0	0	0
		0	0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
					0	0
					0	0
					0	0
						0
						0
						0

Figura 7.2: Preços da Opção pela Medida de Variância Ótima.

7.3.2 Resolução pela Medida de Mínima Entropia

Para a determinação da medida de mínima entropia, inicialmente é necessário solucionar a expressão (7.14):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(a_i - B_1\right) \exp\left(\gamma\, a_i\right) = 0, \tag{7.25}$$

sendo p_i as probabilidades observadas associadas aos possíveis log-retornos, conforme dadas no enunciado do problema. Verifica-se que a solução é dada por $\gamma = -3.3595$. Assim, a partir da expressão (7.13), o vetor representativo da medida de mínima entropia é dado por:

$$Q = \left[0.0106,\ 0.0587,\ 0.256,\ 0.386,\ 0.214,\ 0.0573,\ 0.0171\right]. \tag{7.26}$$

Assim, a partir da fórmula

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q \left[\frac{X}{B_{T-t}}\right] \tag{7.27}$$

calcula-se os preços entrópicos em cada instante do tempo e para cada vértice da árvore, dados pela figura 7.3.

7.3.3 Preços Pelo Modelo Black-Scholes

A despeito da situação do problema em questão ilustrar um mercado incompleto, seria natural questionar quais são os preços determinados pelo modelo Black-Scholes-Merton, o qual é utilizado sob a premissa de mercados completos. A fórmula do preço C^{BS} de uma opção de compra européia simples ordinária pelo modelo Black-Scholes-Merton é dada por:

$$\begin{aligned} C^{BS}\left(S_t, \mathscr{K}, r, \sigma, \tau\right) &= S_t \Phi\left(\frac{\ln\left(S_t/\mathscr{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ &\quad - \exp\left(-r\tau\right) \mathscr{K} \Phi\left(\frac{\ln\left(S_t/\mathscr{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{7.28}$$

sendo $\Phi(x)$ a *função acumulada de probabilidade* de uma variável aleatória x com distribuição normal com esperança nula e desvio-padrão unitário, $\tau = T - t$ o tempo para o vencimento da opção e σ a *volatilidade* da taxa de retorno do ativo subjacente, dada por $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right] - \left(\mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}\right]\right)^2} = 2.16 \times 10^{-24}$. Ainda, é necessário expressar a taxa de juros r no modo contínuo, fazendo $r = \ln\left(1.04^{1/52}\right)$. Com base nestes valores e nos

[4]Vide Nota 88.

						43.33
						40.49
						37.71
					35.06	34.99
					32.39	32.31
					29.77	29.69
				27.26	27.20	27.12
				24.74	24.68	24.61
				22.27	22.22	22.14
			19.90	19.86	19.80	19.72
			17.54	17.49	17.43	17.35
			15.22	15.17	15.10	15.03
		13.00	12.95	12.89	12.83	12.75
		10.79	10.72	10.66	10.59	10.52
		8.644	8.559	8.478	8.404	8.329
	6.735	6.606	6.479	6.360	6.259	6.184
	4.913	4.734	4.547	4.358	4.190	4.081
	3.341	3.117	2.870	2.591	2.276	2.020
2.299	2.083	1.843	1.571	1.248	0.8227	0
	1.173	0.9570	0.7200	0.4554	0.1618	0
	0.5876	0.4281	0.2691	0.1221	0.02143	0
	0.2588	0.1623	0.08025	0.02370	0	0
		0.05083	0.01804	0	0	0
		0.01216	0	0	0	0
		0	0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
					0	0
					0	0
					0	0
						0
						0
						0

Figura 7.3: Árvore de Preços Entrópicos da Opção.

						43.33
						40.49
						37.71
					35.06	34.99
					32.39	32.31
					29.77	29.69
				27.28	27.20	27.12
				24.76	24.68	24.61
				22.29	22.22	22.14
			19.95	19.87	19.80	19.72
			17.58	17.50	17.43	17.35
			15.25	15.18	15.10	15.03
		13.05	12.98	12.90	12.83	12.75
		10.83	10.75	10.67	10.59	10.52
		8.678	8.574	8.483	8.404	8.329
	6.779	6.630	6.488	6.361	6.261	6.184
	4.950	4.755	4.556	4.358	4.182	4.081
	3.377	3.145	2.892	2.611	2.293	2.020
2.346	2.123	1.881	1.611	1.299	0.9024	0
	1.214	0.9993	0.7661	0.5086	0.2201	0
	0.6243	0.4637	0.3030	0.1500	0.02948	0
	0.2854	0.1853	0.09767	0.03213	0	0
		0.06300	0.02523	0	0	0
		0.01806	0	0	0	0
		0	0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
			0	0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
				0	0	0
					0	0
					0	0
					0	0
						0
						0
						0

Figura 7.4: Preços da Opção Pelo Modelo Black-Scholes-Merton.

demais parâmetros já dados anteriormente, a árvore de preços da opção calculada pelo modelo Black-Scholes-Merton é dada pela figura 7.4.

Nota 87 *Conforme aponta ČERNÝ (2004, p. 274), o modelo Black-Scholes-Merton requer que a estratégia de negociação seja executada continuamente e que o preço do ativo subjacente possua distribuição lognormal, ao passo que no problema considerado a estratégia de negociação é executada em tempo discreto e a lognormalidade do preço também é questionável. Comparando-se as figuras 7.2 e 7.3 com a figura 7.4, nota-se que os preços da opção calculados sob os diferentes critérios são próximos, um indicador de quão robusto* *é o modelo Black-Scholes-Merton*[5].

Nota 88 *Deve-se ressaltar a passagem anterior na qual a volatilidade do modelo Black-Scholes-Merton foi assumida como sendo o desvio-padrão da taxa de retorno do ativo subjacente. Em outras palavras, assumiu-se que a volatilidade no mundo do risco neutralizado é igual a volatilidade no mundo real, i.e., a volatilidade calculada na medida neutralizadora do risco é igual aquela calculada na medida de probabilidade estimada, observada. Conforme discutido em SIQUEIRA (1999, p. 243), pela abordagem entrópica o desvio-padrão calculado na medida neutralizadora do risco é praticamente igual à volatilidade real do preço do ativo subjacente. Entretanto, conforme observado na prática, a volatilidade do mundo do risco neutralizado, i.e., aquela utilizada no modelo Black-Scholes-Merton para que os preços teóricos sejam iguais aos preços observados, também denominada volatilidade implícita, geralmente difere da observada, i.e., aquela obtida através de uma série histórica de taxas de retorno. Neste caso, há uma indicação de que a taxa de retorno do ativo subjacente não segue uma distribuição normal e seguindo STUTZER (2000) é possível obter a volatilidade do mundo de risco neutralizado da seguinte forma: estima-se de forma não-paramétrica a densidade de probabilidade minimizadora da entropia relativa e utiliza-se o desvio-padrão desta densidade estimada como o parâmetro da volatilidade no mundo do risco neutralizado. Conforme frisam SIQUEIRA; CASTRO JR. (2005), supondo o caso extremo em que a distribuição empírica não-paramétrica é uma normal, a volatilidade do mundo do risco neutralizado e do mundo real serão iguais; caso contrário, a volatilidade do mundo do risco neutralizado será sempre maior do que a estimada a partir dos logretornos do ativo subjacente observados no mundo real.*

7.3.4 O Delta do Modelo Black-Scholes e a Estratégia Ótima de Hedge

No modelo de precificação pela medida de variância ótima, a *estratégia ótima de hedge dinâmico* no instante t, denotada por θ_t^D, i.e., a quantidade de ativos com risco que o investidor deve possuir no instante t, é dada por[6]:

$$\theta_t^D = \frac{\mathbb{E}_t^P\left[\left(X_{t+1} - B_1 V_t^D\right) H_{t+1}\right]}{S_t \mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right]}, \tag{7.29}$$

[5]Para considerações adicionais a este resultado, vide SIQUEIRA (1999).

[6]Vide apêndice A.

conforme a expressão (A.30).

Torna-se claro, então, que a estratégia ótima de hedge depende não só de X_{t+1}, i.e., do valor da opção no instante $t + 1$, mas também do valor no instante t da carteira de hedge constituída, V_t^D. Ao impor-se a condição de auto-financiamento da estratégia, ao chegar no instante t o investidor não pode escolher V_t^D, cujo valor será proveniente das estratégias de negociação passadas e das variações de preço dos ativos. Faz sentido perguntar-se então qual seria o valor ótimo de V_t^D *se* o investidor possuísse a chance de escolhê-lo. Segundo ČERNÝ (2004, p. 276), $V_t^D = X_t$ seria o valor ótimo da carteira e neste caso a estratégia de negociação ótima é dada por:

$$\theta_t = \theta_t^L \equiv \frac{\mathbb{E}_t^P\left[(X_{t+1} - B_1 X_t)\, H_{t+1}\right]}{S_t \mathbb{E}_t^P\left[H_{t+1}^2\right]}, \tag{7.30}$$

sendo θ_t^L denominado *estratégia de hedge localmente ótima.*

Seguindo ČERNÝ (2004, p. 276), a estratégia de hedge localmente ótima assume que o valor da carteira está sempre em seu nível ótimo X_t, o qual seria o valor da opção no instante t, o que efetivamente não ocorre em um mercado incompleto. Para que se obtenha a estrégia ótima de hedge dinâmico a partir da estratégia de hedge localmente ótima é necessário então fazer o seguinte ajuste:

$$\theta_t^D = \theta_t^L + B_1\, a \frac{X_t - V_t^D}{S_t}, \tag{7.31}$$

sendo o parâmtero a calculado a partir da expressão (7.7). Em um *mercado de alta*[7], tem-se $a > 0$ e, neste caso, a estratégia ótima de hedge dinâmico é ajustada para baixo quando o valor da carteira constituída é superior ao da opção e ajustada para cima caso contrário. Em um *mercado de baixa*[8], o raciocínio é análogo.

No modelo Black-Scholes-Merton, a estratégia ótima de hedge dinâmico, ou o *delta* da opção, é dado por:

$$\theta_t^{BS} = \Phi\left(\frac{\ln\left(S_t/\mathscr{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \tag{7.32}$$

conforme HULL (1999, p. 312). As figuras 7.5 e 7.6 ilustram a estratégia de hedge localmente ótima, θ_t^L e o delta do modelo Black-Scholes-Merton, θ_t^{BS}, respectivamente.

Nota-se, portanto, que as estratégias apresentam valores muito próximos. Segundo ČERNÝ (2004, p. 276), o delta do modelo Black-Scholes-Merton é uma aproximação

[7]Em inglês, *bull market.*

[8]Em inglês, *bear market.*

					0.99
					0.99
					0.99
				0.99	0.99
				0.99	0.99
				0.99	0.99
			0.99	0.99	0.99
			0.99	0.99	0.99
			0.99	0.99	0.99
		0.99	0.99	0.99	0.99
		0.98	0.99	0.99	0.99
		0.96	0.98	0.99	0.99
	0.90	0.92	0.94	0.97	0.99
	0.81	0.83	0.86	0.90	0.95
	0.68	0.70	0.72	0.75	0.82
0.53	0.53	0.52	0.52	0.51	0.50
	0.37	0.34	0.31	0.26	0.16
	0.22	0.19	0.15	0.092	0.028
	0.12	0.088	0.055	0.023	0
		0.034	0.016	0	0
		0.010	0	0	0
		0	0	0	0
			0	0	0
			0	0	0
			0	0	0
				0	0
				0	0
				0	0
					0
					0
					0

Figura 7.5: Estratégia de Hedge Localmente Ótima.

					1.0
					1.0
					1.0
				1.	1.0
				1.0	1.0
				1.0	1.0
			1.0	1.0	1.0
			1.0	1.0	1.0
			1.0	1.0	1.0
		1.0	1.0	1.0	1.0
		0.99	1.0	1.0	1.0
		0.97	0.99	1.0	1.0
	0.91	0.93	0.95	0.98	1.0
	0.82	0.84	0.87	0.91	0.97
	0.70	0.71	0.73	0.76	0.83
0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.52
	0.38	0.36	0.32	0.28	0.19
	0.23	0.20	0.16	0.11	0.036
	0.13	0.098	0.064	0.029	0
		0.040	0.020	0	0
		0.013	0	0	0
		0	0	0	0
			0	0	0
			0	0	0
			0	0	0
				0	0
				0	0
				0	0
					0
					0
					0

Figura 7.6: Delta do Modelo Black-Scholes-Merton.

muito boa haja vista que o erro quadrático médio de hedge de ambas as estratégias é virtualmente idêntico.

7.3.5 Simulação de Monte Carlo dos Erros de Hedge

O objetivo da presente seção é comparar o erro de hedge caso fossem seguidas as estratégias ótima de hedge dinâmico e a localmente ótima, θ_t^D e θ_t^L, respectivamente. Lembra-se que em termos reais o investidor estará sujeito sempre à estratégia ótima de hedge dinâmico.

Considere a seguinte sequência aleatória de preços realizada pelo ativo com risco:

$\ln(S_1/S_0)$	$\ln(S_2/S_1)$	$\ln(S_3/S_2)$	$\ln(S_4/S_3)$	$\ln(S_5/S_4)$	$\ln(S_6/S_5)$
−0.06	+0.06	−0.02	−0.06	−0.06	−0.04

(7.33)

Seguindo ČERNÝ (2004, p. 276), pela condição de auto-financiamento das estratégias tem-se que:

$$
\begin{aligned}
V_{t+1}^D &= B_1 V_t^D + \theta_t^D (S_{t+1} - S_t B_1), &(7.34)\\
V_{t+1}^L &= B_1 V_t^L + \theta_t^L (S_{t+1} - S_t B_1) &(7.35)
\end{aligned}
$$

e, pela expressão (7.31),

$$
\theta_t^D = \theta_t^L + B_1 a \frac{X_t - V_t^D}{S_t}. \qquad (7.36)
$$

O valor inicial da carteira de hedge é o mesmo para ambas estratégias, i.e., $V_0^D = V_0^L = X_0$ e, consequentemente, $\theta_0^D = \theta_0^L$. Pelas figuras 7.2 e 7.5 vê-se que estes valores são $V_0^D = V_0^L = 2.2927$ e $\theta_0^D = \theta_0^L = 0.531$. Logo, a expressão (7.35) resulta em:

$$
\begin{aligned}
V_1^L &= B_1 V_0^L + \theta_0^L (S_1 - S_0 B_1) &(7.37)\\
&= 1.00075 \times 2.2927 + 0.531\,(94.1765 - 100 \times 1.00075) &(7.38)\\
&= -0.84. &(7.39)
\end{aligned}
$$

lembrando-se que $B_t = (1+r)^t$, $r = (1+0.04)^{1/52} - 1$. Para se obter V_1^D efetua-se um cálculo idêntico; portanto, para $t = 1$ tem-se $V_1^D = V_1^L = -0.8377$. Assim, ambas as carteiras estão abaixo de seu *target*, i.e., o valor da opção no vértice correspondente à trajetória do preço, o qual é $X_1 = 0.2567$, conforme a figura 7.2.

No instante $t = 1$, a figura 7.5 mostra que a estratégia de hedge localmente ótima é

t	1	2	3	4	5	6	7
S_t	100.0	94.18	100.0	98.02	92.31	86.94	83.53
X_t	2.293	0.2568	1.838	0.7159	0.002883	0	0
θ_t^L	0.531	0.117	0.524	0.309	0.00346	0	0
θ_t^D	0.5308	0.1560	0.5836	0.3725	0.1233	0.1531	0.1808
V_t^L	2.293	-0.8368	-0.1641	-1.241	-3.029	-3.050	-3.052
V_t^D	2.293	-0.8368	0.05991	-1.140	-3.294	-3.968	-4.503

Figura 7.7: Resultados de um Exemplo de Simulação.

$\theta_1^L = 0.117$. Diferentemente, a estratégia ótima de hedge dinâmico é dada por:

$$\theta_t^D = \theta_1^L + B_1\, a \frac{X_1 - V_1^D}{S_1} \tag{7.40}$$

$$= 0.117 + 1.00075 \times 3.35 \times \frac{0.2567 + 0.8377}{94.1765} \tag{7.41}$$

$$= 0.156. \tag{7.42}$$

O valor das duas carteiras de hedge no instante $t = 2$ é obtido novamente pela condição de auto-financiamento. Assim, para a estratégia de hedge localmente ótima

$$V_2^L = B_1 V_1^L + \theta_1^L (S_2 - S_1 B_1) \tag{7.43}$$

$$= 1.00075 \times (-0.8377) + 0.117\,(100 - 94.1765 \times 1.00075) \tag{7.44}$$

$$= -0.1652 \tag{7.45}$$

e para a estratégia ótima de hedge dinâmico

$$V_2^D = B_1 V_1^D + \theta_1^D (S_2 - S_1 B_1) \tag{7.46}$$

$$= 1.00075 \times (-0.8377) + 0.156\,(100 - 94.1765 \times 1.00075) \tag{7.47}$$

$$= 0.0591 \tag{7.48}$$

e, para os demais instantes, os cálculos referentes às estratégias e aos respectivos valores das carteiras seguem os mostrados acima. A figura 7.7 sumariza os resultados obtidos para todos os instantes de tempo.

De acordo com as mesmas observações feitas por ČERNÝ (2004, p. 278), nota-se que ambas as carteiras de hedge apresentam valor final ligeiramente distantes do valor da opção e próximos entre si. Nos instante intermediários, as carteiras de hedge permanecem próximas haja visto que a estratégia de negociação de ambas mantém-se similar,

As conclusões acima referem-se apenas à uma trajetória de preços do ativo com risco. Para que seja determinado o que ocorre em geral, é necessário realizar uma simulação de

	10.000 Simulações	100.000 Simulações
Erro de Hedging: θ_t^D	1.85958	1.86193
Erro de Hedging: θ_t^L	1.85868	1.86141
Erro Quadrático de Hedging: θ_t^D	4.84416	4.88056
Erro Quadrático de Hedging: θ_t^L	4.98759	4.995

Figura 7.8: Resumo dos Resultados de Simulações de Monte Carlo.

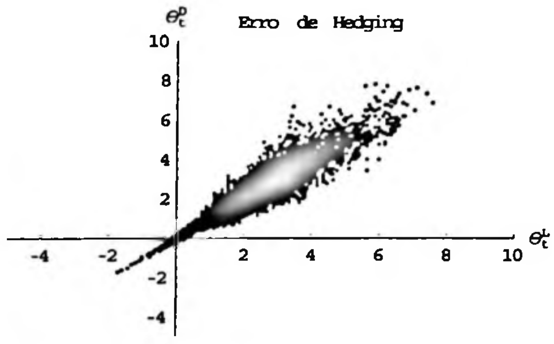

Figura 7.9: Erro de Hedge para 10.000 Simulações.

Monte Carlo. A figura 7.8 sumariza os erros médios de hedge e os erros médios quadráticos de hedge a partir da estratégia ótima de hedge dinâmico, θ_t^D, e da estratégia de hedge localmente ótima, θ_t^L, para 10.000 e 100.000 simulações realizadas.

Conforme visto nas figuras 7.5 e 7.6, não há muita diferença entre a estratégia de hedge localmente ótima e aquela determinada pelo delta do modelo Black-Scholes-Merton, de tal forma que ambas podem ser entendidas como a mesma. Como os valores médios do erro de hedge, tanto o quadrático como o normal, ficaram próximos na simulação efetuada para a estratégia ótima de hedge dinâmico e a estratégia de hedge localmente ótima, pode-se afirmar que não há benefício substancial em seguir outra estratégia que não o delta do modelo Black-Scholes-Merton, mesmo em um mercado incompleto como o do exemplo tratado, tendo-se o cuidado de restringir este resultado para os presentes exemplo e simulação. Ainda, conforme mostra a figura 7.9, vê-se que, além de caminharem juntos, os erros de hedge da estratégia ótima dinâmica e da localmente ótima não são triviais, i.e., uma estratégia de negociação seguindo o delta do modelo Black-Scholes-Merton pode levar à erros substanciais. Na presente simulação, o erro oscila no intervalo entre $[-1.7182, 7.5761]$, o que é substancial considerando-se o valor inicial do derivativo pela medida de variância ótima, $X_0 = 2.2927$.

Capítulo 8

Conclusão

Dois resultados merecem ser destacados e apontados como tema de uma eventual pesquisa futura: a *robustez* do modelo Black-Scholes-Merton e a *não-trivialidade* dos erros de hedge ao se executar em tempo discreto uma estratégia recomendada para o tempo contínuo. Conforme visto, os erros de hedge em um mercado incompleto seguindo a estratégia determinada pelo delta do modelo Black-Scholes-Merton e aquela pela medida de variância ótima são praticamente os mesmos. Com isso, eventualmente seja o caso de se relaxar algumas das hipóteses concebidas na derivação original do modelo em 1973, conforme discutido em SIQUEIRA (1999, p. 254), segundo o qual a derivação entrópica do modelo Black-Scholes-Merton sugere que o mesmo pode ser muito mais geral e robusto do que usualmente se acredita. Em relação à não-trivialidade dos erros, talvez seja o caso de decompor o erro em duas parcelas: aquela devida ao fato de trabalhar-se em tempo discreto e aquela devida à incompletude do mercado. De qualquer forma, ambos os resultados devem ser melhor estudados.

Outro aspecto na precificação de derivativos em mercado incompleto é a determinação do intervalo de possíveis preços livres de arbitragem. Conforme visto, as bandas inferior e superior deste intervalo são determinadas pelas medidas de probabilidade neutralizadoras do risco que minimizam e maximizam, respectivamente, o valor presente esperado da função de resultado do derivativo no instante terminal. Conforme GULKO (1998), a distribuição gama é capaz de descrever a distribuição dos retornos de uma empresa no estágio de maturidade e nome estável da ação em seu ciclo de vida, situação na qual pode-se interpretar ser menos arriscado investir na empresa considerada. Por outro lado, a distribuição exponencial, segundo GULKO (1998), está associada ao comportamento do preço de ações de baixo valor e alta volatilidade, i.e., de maior risco. Com isso, conjectura-se que as distribuições gama e exponencial sejam aquelas com menor e maior fator de desconto e, consequentemente, sejam elas as responsáveis pelo limite de preço superior e inferior, respectivamente, do preço do derivativo em um mercado incompleto.

Conforme destacado no texto, em um mercado incompleto existem estados da natureza contra os quais não é possível fazer seguro. Assim, pode-se entender que investir em um mercado incompleto apresenta um risco sempre superior do que o investimento em um mercado completo. Desta forma, conjectura-se que o preço de um derivativo em um mercado incompleto seja sempre inferior ao preço de um derivativo idêntico em um mercado completo, haja vista a maior magnitude do fator de desconto do primeiro em relação ao segundo. O problema de precificação de uma opção de compra européia simples ordinária no capítulo final corrobora esta conjectura: o preço da opção obtido pelo modelo Black-Scholes-Merton (o qual implicitamente assume que o mercado é completo) é maior do que os obtidos pela medida de variância ótima e de mínima entropia para precificação em mercado incompleto.

Outra questão refere-se ao conceito de mercado incompleto. A consideração de economias estáticas só faz sentido no âmbito teórico e, dessa forma, a discussão do fato de um mercado ser completo refere-se efetivamente à questão da completude dinâmica. Neste sentido, conforme visto no texto, um mercado é dinamicamente completo se e somente se for possível hedgear qualquer derivativo através de transações no tempo envolvendo os ativos existentes na economia, dizendo-se então que os últimos (os ativos da economia) geram os primeiros (os derivativos). Conforme discutido em SIQUEIRA (1999, p. 251), estabelecido do modo como feito acima o conceito de geração é entendido no sentido *algébrico*, e.g. o modelo Black-Scholes-Merton, ao passo que no sentido *informacional* o conceito de geração baseia-se no montante de informação necessária para que se determine o preço do derivativo, de acordo com a abordagem entrópica. Segundo SIQUEIRA (1999, p. 251), pode-se escrever

$$\text{Geração Algébrica} \Rightarrow \text{Geração Informacional},$$

i.e., a geração algébrica é uma condição suficiente, mas não necessária, para que haja geração informacional. Em outras palavras, pode-se dizer que, pela abordagem entrópica, para que um mercado seja completo não é necessário que todos os derivativos sejam atingíveis e aos mesmos esteja associada uma estratégia replicante: basta apenas que o *conjunto informacional* dos investidores contenha informações suficientes para que os mesmos precifiquem o derivativo em questão. No exemplo apresentado em SIQUEIRA (1999, p. 241), a obtenção dos preços de opções em um mercado de eurodólar utilizando a hipótese de *mercado entrópico* não utilizou-se da aplicação de qualquer regra de replicação das opções, i.e., da hipótese de geração algébrica. SIQUEIRA (1999, p. 252) então afirma que a abordagem entrópica é menos restritiva do que a do modelo Black-Scholes-Merton, em particular não se apoiando na condição de mercado completo. Todos os conceitos expostos no presente trabalho, entretanto, foram feitos considerando-se o conceito de geração algébrica, de tal modo que algumas questões poderiam (e deveriam) ser estudadas sob o prisma de geração informacional, especialmente alguns conceitos ressaltados no capítulo sobre considerações econômicas, como o de equilíbrio.

Em relação às abordagens para precificação e hedge de derivativos em mercado incompleto tratadas no último capítulo, não foi discutida a razoabilidade da medida de risco considerada. Por exemplo, a estratégia de hedge pela medida de variância ótima considera como medida de risco o erro quadrático médio. Entretanto, existe um debate na literatura acerca de critérios específicos que uma medida de risco deve satisfazer a fim de que a mesma seja considerada *coerente*, conforme discutido em FÖLLMER; SCHIED (2004, p. 152). Esta análise não foi considerada na presente dissertação e seria natural considerar este aspecto como o próximo passo do presente trabalho.

A discussão acerca de estratégias de negociação em mercado incompleto aqui realizada baseou-se na idéia de replicação de um derivativo. Pode-se dizer que o problema foi tratado como se estivesse sendo considerado sob a ótica de um investidor que necessitasse hedgear uma determinada posição em aberto, oriunda, por exemplo, da venda de um derivativo. Não foi considerado o problema propriamente dito de *otimização de carteira* em um contexto de mercado incompleto. ZIMMER (2005) discute este problema, considerando-o sob o ponto de vista do erro de estimação das variáveis de um determinado modelo assumido como sendo o real assim como o erro de seleção do próprio modelo, propondo novas abordagens de alocação ótima de capital sob estas condições. Um tratamento mais amplo do que o exposto na presente dissertação deve considerar também este tema, haja vista que o problema de hedge não deixa de ser também um problema de otimização de carteira, a partir de uma definição adequada de "distância" entre o valor da carteira de hedge e o da obrigação contra a qual se busca proteção.

Apêndice A

Derivação da Medida de Variância Ótima

Derivam-se aqui as fórmulas referentes à medida de variância ótima, conforme exposto em ČERNÝ (2004, p. 299). Imagina-se uma estrutura de árvore para a solução do problema. Aqui, denota-se por $V_T^{x,\theta}$ o valor da carteira no instante terminal de um investidor com capital inicial x que tenha adotado a estratégia de negociação $\theta = \{\theta_0, \ldots, \theta_T\}$ e X_T a função de resultado do derivativo na data de vencimento. A fim de simplificar a notação, o operador esperança condicionada até t na medida P (i.e., dadas as informações até e inclusive o instante t) é denotado por $\mathbb{E}_t^P[\cdot]$. Pela lei das esperanças iteradas, o problema de minimização do desvio quadrático médio pode ser escrito como:

$$\min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-1}} \mathbb{E}_0^P\left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right] = \min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-1}} \mathbb{E}_0^P\left[\mathbb{E}_{T-1}^P\left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right]\right]. \tag{A.1}$$

Assim, posicionando-se em um vértice arbitrário da estrutura de árvore no instante $T-1$, pode-se extrair do problema geral de minimização do desvio quadrático médio um problema de minimização de um período fazendo:

$$\min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-1}} \mathbb{E}_0^P\left[\mathbb{E}_{T-1}^P\left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right]\right] = \min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-2}} \mathbb{E}_0^P\left[\min_{\theta_{T-1}} \mathbb{E}_{T-1}^P\left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right]\right], \tag{A.2}$$

sendo o próximo passo avaliar

$$J_{T-1} \equiv \min_{\theta_{T-1}} \mathbb{E}_{T-1}^P\left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right], \tag{A.3}$$

com J_{T-1} sendo o menor desvio quadrático médio possível calculado a partir do instante $T-1$. Calcula-se o valor de J_{T-1} e da estratégia hedge de variância ótima correspondentes

θ_{T-1} para cada vértice da árvore no instante $T-1$. O problema então passa a ser:

$$\min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-2}} \mathbb{E}_0^P \left[J_{T-1}\right]. \tag{A.4}$$

Repetindo o procedimento acima, posiciona-se em um vértice arbitrário da árvore no instante $T-2$ e pelo mesmo argumento já utilizado obtém-se

$$\min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-2}} \mathbb{E}_0^P \left[J_{T-1}\right] = \min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-3}} \mathbb{E}_0^P \left[\min_{\theta_{T-2}} \mathbb{E}_{T-2}^P \left[J_{T-1}\right]\right]. \tag{A.5}$$

Fazendo

$$J_{T-2} \equiv \min_{\theta_{T-2}} \mathbb{E}_{T-2}^P \left[J_{T-1}\right] \tag{A.6}$$

nota-se que um padrão geral começa a emergir. Denotando

$$J_T = \left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2 \tag{A.7}$$

cria-se então uma estrutura recursiva de tal modo que a estratégia de hedge de variância ótima é obtida a partir de uma série de problemas de um período,

$$J_t \equiv \min_{\theta_t} \mathbb{E}_t^P \left[J_{t+1}\right] \tag{A.8}$$

e ao mesmo tempo

$$\min_{x,\theta_0,\ldots,\theta_{T-1}} \mathbb{E}_0^P \left[\left(V_T^{x,\theta} - X_T\right)^2\right] = \min_x J_0. \tag{A.9}$$

O procedimento descrito acima descreve o princípio geral por trás da técnica de *programação dinâmica*. Volta-se agora a atenção para o problema de otimização de um período. Para que este problema possa ser resolvido é necessário saber a maneira em que se dá a dependência entre J_{t+1} e θ_t. Suponha que J_{t+1} possa ser escrito como:

$$J_{t+1} = k_{t+1}^D \left(V_{t+1}^D - X_{t+1}\right)^2 + \left(\epsilon_{t+1}^D\right)^2 \tag{A.10}$$

sendo k_{t+1}^D, X_{t+1} e ϵ_{t+1}^D dados exogenamente com $k_T^D = 1$, $\left(\epsilon_T^D\right)^2 = 0$ e X_T a função de resultado do derivativo no instante T. Portanto, para $t+1 = T$ a suposição é válida. Exatamente como J_{t+1} é afetado pela escolha de θ_t é dado pela restrição de auto-financiamento da estratégia,

$$V_{t+1}^D = B_1 V_t^D + \theta_t S_t H_{t+1}, \tag{A.11}$$

lembrando que $B_1 = 1 + r$ e $H_{t+1} = R_{t+1} - B_1$ é o retorno em excesso. Para que se veja a dependência de $\mathbb{E}_t^P \left[J_{t+1}\right]$ em relação à θ_t é necessário substituir a expressão (A.11) em (A.10) e então calcular a esperança. Para que isto seja feito, introduz-se a seguinte notação:

$$\theta = \theta_t S_t. \tag{A.12}$$

$$V = B_1 V_t^D. \tag{A.13}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^P\left[J_{t+1}\right] &= \mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left((V - X_{t+1})^2 + 2\theta\left(V - X_{t+1}\right)H_{t+1} + \theta^2 H_{t+1}^2\right)\right] && \text{(A.14)} \\ &= \mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(V - X_{t+1}\right)^2\right] + 2\theta\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}\left(V - X_{t+1}\right)H_{t+1}\right] + && \text{(A.15)} \\ &\quad +\theta^2\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}H_{t+1}^2\right]. \end{aligned}$$

Agora busca-se determinar o valor de θ que minimize $\mathbb{E}_{t+1}^P\left[J_{t+1}\right]$. Pela condição de primeira ordem, i.e., $\frac{\partial \mathbb{E}_{t+1}^P\left[J_{t+1}\right]}{\partial\theta} = 0$, obtém-se:

$$2\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(V - X_{t+1}\right)H_{t+1}\right] + 2\theta^D\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right] = 0 \tag{A.16}$$

e assim a estratégia de hedge de variância ótima, θ^D, é dada por:

$$\theta^D = \frac{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(X_{t+1} - V\right)H_{t+1}\right]}{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}. \tag{A.17}$$

Portanto, substituindo a expressão (A.17) em (A.15), escreve-se J_t como:

$$J_t = \min_\theta \mathbb{E}_t^P\left[J_{t+1}\right] = \mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(V - X_{t+1}\right)^2\right] - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(X_{t+1} - V\right)H_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}. \tag{A.18}$$

Uma última manipulação algébrica é necessária para que J_t seja expresso na seguinte forma:

$$J_t = k_t^D\left(V_t^D - X_t\right)^2 + \left(\epsilon_t^D\right)^2 \tag{A.19}$$

e isto é obtido fazendo:

$$\begin{aligned} k_t^D &= B_1^2\left(\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\right] - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}\right), && \text{(A.20)} \\ X_t &= \mathbb{E}_t^P\left[\left(k_{t+1}^D - \frac{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}\right]k_{t+1}^D H_{t+1}}{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}\right)\frac{X_{t+1}}{B_1}\right] / \frac{k_t^D}{B_1^2}. && \text{(A.21)} \\ \left(\epsilon_t^D\right)^2 &= \mathbb{E}_t^P\left[\left(\epsilon_{t+1}^D\right)^2\right] + \mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D X_{t+1}^2\right] - k_t^D X_t^2 - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1} X_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}. && \text{(A.22)} \end{aligned}$$

Substituindo θ e V pelas expressões (A.12) e (A.13), respectivamente, a estratégia de hedge de mínima variância é então dada por:

$$\theta_t^D = \frac{\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D\left(X_{t+1} - B_1 V_t^D\right)H_{t+1}\right]}{S_t\mathbb{E}_t^P\left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2\right]}. \tag{A.23}$$

Observando-se a expressão (A.21), nota-se que o termo

$$m_{t+1|t} \equiv \left(k_{t+1}^D - \frac{\mathbb{E}_t^P \left[k_{t+1}^D H_{t+1} \right] k_{t+1}^D H_{t+1}}{\mathbb{E}_t^P \left[k_{t+1}^D H_{t+1}^2 \right]} \right) / \frac{k_t^D}{B_1^2} \tag{A.24}$$

pode ser utilizado como mudança da medida P para Q denominada medida de variância ótima. No caso em que os retornos são IID e a taxa de juros r é determinística, o processo $\{k_t^D\}$ $t = 0, \ldots, T$ se torna determinístico. Para que este fato seja demonstrado, utiliza-se do argumento de indução matemática. Para $T = 1$, $k_T^D = 1$, conforme dito anteriormente e, portanto, não é uma variável aleatória. Suponha agora que k_{t+1}^D também seja uma variável não-aleatória. Como k_{t+1}^D é constante, ele pode sair do operador esperança na expressão (A.20), obtendo-se:

$$k_t^D = B_1^2 k_{t+1}^D \left(1 - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2\right]} \right). \tag{A.25}$$

Para retornos IID, a expressão

$$b \equiv 1 - \frac{\left(\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2\right]} \tag{A.26}$$

é a mesma para todos os vértices da árvore representativa da estrutura de informação; por hipótese, B_1 é não-aleatório e k_{t+1}^D é constante e, dessa forma, k_t^D também é constante em todos os vértices no instante t. Portanto, sabe-se que (i) k_{t+1}^D constante implica k_t^D constante (para todos os vértices no instante t) e (ii) k_T^D. Por indução matemática, combinando (i) e (ii) conclui-se então que k_t^D é constante para todo $t = 0, \ldots, T$.

Assim, em função do processo de k_t^D ser determinístico, as fórmulas dadas pelas expressões (A.21) e (A.22) se reduzem para

$$X_t = \frac{\mathbb{E}_t^P \left[\left(1 - a\, H_{t+1}\right) X_{t+1} / B_1 \right]}{b}, \tag{A.27}$$

$$a \equiv \frac{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}\right]}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2\right]}, \tag{A.28}$$

e

$$\left(\epsilon_t^D\right)^2 = \mathbb{E}_t^P \left[\left(\epsilon_{t+1}^D\right)^2 \right] + k_{t+1}^D \mathbb{E}_t^P \left[X_{t+1}^2\right] - k_t^D X_t^2 - k_{t+1}^D \frac{\left(\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1} X_{t+1}\right]\right)^2}{\mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2\right]}, \tag{A.29}$$

sendo ainda a estratégia de hedge de variância ótima dada por

$$\theta_t^D = \frac{\mathbb{E}_t^P \left[\left(X_{t+1} - B_1 V_t^D\right) H_{t+1} \right]}{S_t \mathbb{E}_t^P \left[H_{t+1}^2\right]}. \tag{A.30}$$

Pela expressão (A.27), nota-se que então que no caso de retorno IID a mudança de medida na expressão (A.24) é agora dada por

$$m_{t+1|t} = \frac{1 - a\, H_{t+1}}{b}. \tag{A.31}$$

Apêndice B

Algoritmo de Precificação e Determinação da Estratégia de Hedge

O presente apêndice fornece o código, de autoria própria, para a geração das árvores referentes ao capítulo sobre abordagens para hedge e precificação de derivativos em mercado incompleto. O *software* utilizado foi o *Mathematica*, versão 5.0. A seguir dispõe-se uma cópia do código e explicações acerca dos comandos.

Inicialmente, são carregados os pacotes necessários.

```
Needs["TimeSeries`TimeSeries`"]
<< Statistics`ContinuousDistributions`
```

Parâmetros para a geração da árvore de preços: p é o número de períodos; branch é o número de ramos partindo de cada vértice da árvore; u é o fator de subida do preço; c é o fator constante; d é o fator de descida do preço; S é o preço inicial do ativo subjacente; K é o preço de exercício; card e n são parâmetros auxiliares.

```
p = 6;
branch = 7;
u = Exp[0.02];
c = 1;
d = u^(-1);
S = 100;
K = 100;
```

```
card = p*(branch - 1) + 1;
n = (card - 1)/2 + 1;
```

Geração da árvore de preços: precos é o vetor auxiliar para a construção do vetor precosfinal, com todos os preços do ativo com risco.

```
precos = {};
Do[AppendTo[precos, If[n - i <= j <= n + i, S u^(Max[j - n, 0])
d^(Max[n - j, 0]),""]], {i, 0, n - 1, (branch - 1)/2}, {j, card, 1, -1}];
Flatten[precos];
precosfinal = Partition[%, card];
TableForm[Transpose[precosfinal]]
```

Funções para o cálculo da mudança da medida estimada para a medida de variância ótima a fim de que o preço da opção seja calculado pelo princípio da avaliação neutra em relação ao risco. Só devem ser inseridos valores no vetor P: cada coordenada deste vetor representa a probabilidade de ocorrência do i-ésimo estado da natureza,considerando-se os estados da naturezas ordenados dos de maior retorno do preço do ativo subjacente para os de menor retorno. Ainda, R é o vetor com as coordenadas correspondendo aos fatores de retorno de subida e descida; r é o fator de taxa de juros livre de risco semanal; H é o vetor de *retornos em excesso*, i.e., os fatores de retorno de subida e descida diminuídos do fator de taxa de juros livre de risco semanal; P é a distribuição de probabilidade na medida observada, conforme destacado anteriormente; EspPH é o vetor com as esperanças na medida P dos retornos em excesso; EspPHD é o vetor de esperanças na medida P do quadrado do retorno em excesso; a, b são os parâmetros para mudança de medida m, conforme as expressões (7.7), (7.8) e (7.5), respectivamente; Q é a distribuição de probabilidade na medida de variância ótima.

```
R = Table[u^(i), {i, (branch - 1)/2, -(branch - 1)/2, -1}];
r = (1.04)^(1/52);
H = Table[R[[i]] - r, {i, 1, Length[R]}];
P = {0.013, 0.067, 0.273, 0.384, 0.199, 0.05, 0.014};
EspPH = Sum[H[[i]]P[[i]], {i, 1, Length[H]}];
EspPHD = Sum[X[[i]]^(2)P[[i]], {i, 1, Length[H]}];
a = EspPH/EspPHD;
```

```
b = 1 - (EspPH)^2/EspPHD;
m = Table[(1 - a H[[i]])/b, {i, 1, Length[H]}];
Q = Table[P[[i]]m[[i]], {i, 1, Length[P]}];
```

A partir daqui dispõe-se as fórmulas para o cálculo da medida de mínima entropia. Saux é um parâmetro auxiliar, que pode ser interpretado como o preço do ativo em relação ao qual serão aplicados os fatores de retorno de subida e descida; gama é o parâmetro dado pela expressão (7.14); QEmin é a distribuição de probabilidade na medida de mínima entropia.

```
Saux = 1;
A = Table[Saux R[[i]], {i, 1, Length[R]}];
gama = x /. FindRoot[Sum[P[[i]] (A[[i]] - r) Exp[x A[[i]]],
{i, 1, Length[P]}] == 0, {x, 0.5}][[1]];
QEmin = Table[SetPrecision[(P[[i]] Exp[gama A[[i]]])/Sum[P[[i]] Exp[gama A[[i]]],
{i, 1, Length[P]}], 3], {i, 1, Length[P]}];
```

Teste do somatório das probabilidades, para checar se o vetor medida de probabilidade observada , medida de variância mínima e medida de mínima entropia estão bem definidos.

```
Sum[P[[i]], {i, 1, Length[P]}]
Sum[Q[[i]], {i, 1, Length[Q]}]
Sum[QEmin[[i]], {i, 1, Length[QEmin]}]
```

(1) Árvore do preço da opção de compra pelo princípio da avaliação neutra em relação ao risco pela medida de variância ótima, i.e., sendo X_T a função de resultado da opção no instante terminal, tem-se para cada vértice da árvore $X_t = \mathbb{E}_t^Q\left[X_T/B_{T-t}\right]$, sendo payoff o vetor representativo da função de resultado calculada em cada preço resultante de todas as possíveis trajetórias e opcao o vetor com todos os preços calculados da opção, em todos os instantes de tempo.

```
payoff = Table[SetPrecision[Max[precosfinal[[Length[precosfinal]]][[i]]
- K, 0], 4], {i, 1, Length[precosfinal[[Length[precosfinal]]]]}];
opcao = {};
AppendTo[opcao, payoff];
```

```
Do[aux = Table[If[precosfinal[[Length[precosfinal] - i]][[j]] == "", "",
Chop[SetPrecision[(1/r^(i)) Sum[opcao[[i]][[j + m - 1 - (branch - 1)/2]]Q[[m]],
{m, 1, Length[Q]}], 4], 10^(-2)]], {j, 1, card}];
AppendTo[opcao, aux], {i, 1, p}];
TableForm[Transpose[Reverse[opcao]]]
```

(2) Árvore do preço da opção de compra pelo princípio da avaliação neutra em relação ao risco pela medida de mínima entropia, i.e., sendo X_T a função de resultado da opção no instante terminal, tem-se para cada vértice da árvore $X_t = \mathbb{E}_t^{QEmin}\left[X_T/B_{T-t}\right]$, sendo payoff o vetor representativo da função de resultado calculada em cada preço resultante de todas as possíveis trajetórias e opcao o vetor com todos os preços calculados da opção, em todos os instantes de tempo.

```
payoff = Table[SetPrecision[Max[precosfinal[[Length[precosfinal]]][[i]]
- K, 0], 4], {i, 1, Length[precosfinal[[Length[precosfinal]]]]}];
opcao = {};
AppendTo[opcao, payoff];
Do[aux = Table[If[precosfinal[[Length[precosfinal] - i]][[j]] == "", "",
Chop[SetPrecision[(1/r^(i)) Sum[opcao[[i]][[j + m - 1 - (branch - 1)/2]]
QEmin[[m]], {m, 1, Length[QEmin]}], 4], 10^(-2)]], {j, 1, card}];
AppendTo[opcao, aux], {i, 1, p}];
TableForm[Transpose[Reverse[opcao]]]
```

Fórmulas de Black-Scholes-Merton para comparação dos valores intermediários da opção: callbs e putbs são as fórmulas para o valor da opção de compra e de venda européias, respectivamente. Os parâmetros S, K, r, v e T representam o preço do ativo com risco, o preço de exercício, a taxa de juros livre de risco, a volatilidade e o tempo para o vencimento da opção, respectivamente.

```
callbs[S_, K_, r_, v_, T_] := S CDF[NormalDistribution[0, 1], du[S, K, r, v, T]]
- K Exp[-r T] CDF[NormalDistribution[0, 1], dd[S, K, r, v, T]];
putbs[S_, K_, r_, v_, T_] := -S CDF[NormalDistribution[0, 1], -du[S, K, r, v, T]]
+ K Exp[-r T] CDF[NormalDistribution[0, 1], -dd[S, K, r, v, T]];
du[S_, K_, r_, v_, T_] := (Log[S/K] + (r + v^(2)/2) T)/(v T^(1/2));
dd[S_, K_, r_, v_, T_] := du[S, K, r, v, T] - v T^(1/2);
```

Observa-se que para cada nó da árvore a volatilidade a ser usada no modelo Black-Scholes-Merton é a mesma, visto que os retornos são IID. Assim, calcula-se de antemão o valor de v.

```
v = Sqrt[EspPHD - (EspPH)^2];
```

Árvore de preços da opção calculados pelo modelo Black-Scholes-Merton: opcaoBS é o vetor de preços da opção em todos os instantes de tempo.

```
opcaoBS = {};
AppendTo[opcaoBS, payoff]; Do[aux = Table[If[precosfinal[[Length[precosfinal]
- i]][[j]] == "", "", Chop[SetPrecision[callbs[precosfinal[[Length[precosfinal]
- i]][[j]], K, Log[r], v, i], 4], 10^(-2)]], {j, 1, card}];
AppendTo[opcaoBS, aux], {i, 1, p}];
TableForm[Transpose[Reverse[opcaoBS]]]
```

Determinação da estratégia de negociação (quantidade de ativos com risco) localmente ótima: deltaL é o vetor com as estratégias de negociação localmente ótima para todos os instantes de tempo, determinadas pela expressão (7.30).

```
deltaL = {};
AppendTo[deltaL, Table[0, {i, 1, card}]]; Do[aux = Table[
If[precosfinal[[Length[precosfinal] - i]][[j]] == "", "",
Chop[SetPrecision[(1/(precosfinal[[Length[precosfinal] -
i]][[j]] EspPHD)) Sum[(opcao[[i]][[j + m - 1 - (branch - 1)/2]] -
r opcao[[i + 1]][[j]]) H[[m]] Q[[m]], {m, 1, Length[Q]}], 3], 10^(-2)]],
{j, 1, card}];
AppendTo[deltaL, aux], {i, 1, p}];
TableForm[Transpose[Reverse[deltaL]]]
```

Delta do modelo Black-Scholes-Merton, de acordo com a expressão (7.32).

```
deltaBS = {};
AppendTo[deltaBS, Table[0, {i, 1, card}]]; Do[aux = Table[
If[precosfinal[[Length[precosfinal] - i]][[j]] == "", "",
Chop[SetPrecision[CDF[NormalDistribution[0, 1],
```

```
du[precosfinal[[Length[precosfinal] - i]][[j]], K, Log[r], v,
i]], 3], 10^(-2)]], {j, 1, card}];
AppendTo[deltaBS, aux], {i, 1, p}];
TableForm[Transpose[Reverse[deltaBS]]]
```

Construção do processo de valor referente à estratégia de hedge localmente ótimo e estratégia ótima de hedge dinâmico. Inicialmente são dados comandos auxiliares para que seja determinada uma trajetória aleatória do preço do ativo com risco: RndR é um vetor de números aleatório e line e seq são comandos auxiliares para que seja determinada uma sequência de preços de acordo com os números "sorteados".

```
RndR = Table[Random[Integer, {1, branch}], {i, 1, p}];
line = (branch - 1)/2 + 1;
seq = Table[-(RndR[[i]] - line), {i, 1, Length[RndR]}];
```

Sequência de preços realizados: precopath é o vetor com os preços realizados.

```
n = (card - 1)/2 + 1;
precopath = {S};
i = 1; While[i <= p, n = n - seq[[i]];
AppendTo[precopath, precosfinal[[i + 1]][[n]]]; i = i + 1];
precopath;
```

Preço da opção pela medida de mínima variância (execução de (1)) ou pela medida de mínima entropia (execução de (2)) para as realizações do retorno do ativo com risco: opcaopath é o vetor representativo da trajetória de preço da opção.

```
n = (card - 1)/2 + 1;
opcaopath = {opcao[[Length[opcao]]][[n]]};
i = 1; While[i <= p, n = n - seq[[i]];
AppendTo[opcaopath, opcao[[p - i + 1]][[n]]]; i = i + 1];
opcaopath;
```

Estratégia de negociação localmente ótima (delta ótimo local de acordo com a realização do preço do ativo): deltaLpath é o vetor representativo da estratégia de negociação localmente ótima de acordo com a trajetória de preço realizada.

```
n = (card - 1)/2 + 1;
deltaLpath = {deltaL[[Length[deltaL]]][[n]]};
i = 1; While[i <= p, n = n - seq[[i]];
AppendTo[deltaLpath, deltaL[[p - i + 1]][[n]]]; i = i + 1];
deltaLpath;
```

Processo de valor gerado pela estratégia localmente ótima: V é o vetor representativo do valor da carteira em cada instante de tempo.

```
n = (card - 1)/2 + 1;
V = {opcao[[Length[opcao]]][[n]]};
Do[v = V[[i]] r + deltaLpath[[i]] (precopath[[i + 1]] - precopath[[i]] r);
AppendTo[V, v], {i, 1, p}]
V
```

Estratégia ótima de hedge dinâmico e processo de valor gerado pela mesma: deltaDpath é o vetor de estratégias ótimas de hedge dinâmico de acordo com a expressão (7.31); VD é o vetor representativo do valor da carteira em cada instante de tempo.

```
deltaDpath = {deltaLpath[[1]]};
VD = {V[[1]]};
Do[AppendTo[VD, r VD[[i]] + deltaDpath[[i]] (precopath[[i + 1]]
- precopath[[i]] r)];
AppendTo[deltaDpath, deltaLpath[[i + 1]] + r a (opcaopath[[i + 1]]
- VD[[i + 1]])/precopath[[i + 1]]], {i, 1, p}]
deltaDpath;
VD
```

Tabela resumo de uma simulação: t é o instante de tempo, S é o preço do ativo com risco, X é o valor da opção, deltaL é a estratégia de hedge localmente ótima, deltaD é a estratégia ótima de hedge dinâmico, VL é o valor da carteira de acordo com a estratégia de hedge localmente ótima e VD é o valor da carteira de acordo com a estratégia ótima de hedge dinâmico.

```
TableForm[Transpose[Table[{i, precopath[[i]], opcaopath[[i]],
deltaLpath[[i]], deltaDpath[[i]], V[[i]], VD[[i]]}, {i, 1, p + 1}]],
TableHeadings -> {{"t", "S", "X", "deltaL", "deltaD", "VL", "VD"}, {}}]
```

Parâmetros para simulação e comparação da estratégia de hedge localmente ótima e a estratégia ótima de hedge dinâmico: Sim é o número de simulações que se deseja efetuar e HedgingError é o vetor no qual é armazenada a diferença entre o valor da opção no instante final e as carteiras ótima de hedge dinâmico e a estratégia de hedge localmente ótima, assim como os erros quadráticos.

```
Sim = 1000;
nsim = 1;
HedgingError = {};
Label[begin];

Do[RndR = Table[Random[Integer, {1, branch}], {i, 1, p}];
seq = Table[-(RndR[[i]] - line), {i, 1, Length[RndR]}];

n = (card - 1)/2 + 1;
precopath = {S}; i = 1;
While[i <= p, n = n - seq[[i]]; AppendTo[precopath,
precosfinal[[i + 1]][[n]]]; i = i + 1];

n = (card - 1)/2 + 1;
opcaopath = {opcao[[Length[opcao]]][[n]]}; i = 1;
While[i <= p, n = n - seq[[i]]; AppendTo[opcaopath,
opcao[[p - i + 1]][[n]]]; i = i + 1];

n = (card - 1)/2 + 1;
deltaLpath = {deltaL[[Length[deltaL]]][[n]]};
i = 1;
While[i <= p, n = n - seq[[i]]; AppendTo[deltaLpath,
deltaL[[p - i + 1]][[n]]]; i = i + 1];

n = (card - 1)/2 + 1;
V = {opcao[[Length[opcao]]][[n]]};
Do[v = V[[i]] r + deltaLpath[[i]] (precopath[[i + 1]]
```

```
- precopath[[i]] r); AppendTo[V, v], {i, 1, p}];

deltaDpath = {deltaLpath[[1]]};
VD = {V[[1]]};
Do[AppendTo[VD, r VD[[i]] + deltaDpath[[i]] (precopath[[i + 1]]
- precopath[[i]] r)];
AppendTo[deltaDpath, deltaLpath[[i + 1]] + r a (opcaopath[[i + 1]]
- VD[[i + 1]])/precopath[[i + 1]]], {i, 1, p}];

AppendTo[HedgingError, {opcaopath[[Length[opcaopath]]] - V[[Length[V]]],
opcaopath[[Length[opcaopath]]] - VD[[Length[VD]]],
(opcaopath[[Length[opcaopath]]] - V[[Length[V]]])^2,
(opcaopath[[Length[opcaopath]]] - VD[[Length[VD]]])^2}], {nsim, 1, Sim}];
```

Gráfico de comparação do erro de hedge da estratégia ótima de hedge dinâmico e da estratégia de hedge localmente ótima.

```
ListPlot[Table[{HedgingError[[i]][[1]], HedgingError[[i]][[2]]}, {i, 1,
Length[HedgingError]}], PlotRange -> {{-5, 10}, {-5, 10}},
AxesLabel -> {"deltaL", "deltaD"},
PlotLabel -> "            Erro de hedge"]
```

Finalmente, os comandos a seguir dispõem o intervalo de valores dos erros de hedge.

```
ErroMin = Min[Table[HedgingError[[i]][[1]], {i, 1, Length[HedgingError]}]];
ErroMax = Max[Table[HedgingError[[i]][[1]], {i, 1, Length[HedgingError]}]];
```

Referências Bibliográficas

ANDREASEN, J.; JENSEN, B.; POULSEN, R. **New Skin for the Old Ceremony**: eight different derivations of the black-scholes formula. Department of Operations Research, Institute of Mathematics, Aarhus University.

ARROW, K. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing. **Review of Economic Studies**, [S.l.], v.31, p.91–96, 1964.

AVELLANEDA, M. **Quantitative Modelling of Derivative Securities from Theory to Practice**. Flórida: Chapman & Hall, 1999.

BERTSIMAS, D.; KOGAN, L.; LO, A. **Hedging Derivatives Securities and Incomplete Markets**: an ϵ-arbitrage approach. Working Paper.

BINGHAM, N.; KIESEL, R. **Risk-Neultral Valuation**: pricing and hedging of financial derivatives. Segunda.ed. New York: Springer-Verlag, 2004.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, [S.l.], v.81, p.637–654, 1973.

CARR, P.; GEMAN, H.; MADAN, D. Pricing and Hedging in Incomplete Markets. **Journal of Financial Economics**, [S.l.], v.62, p.131–167, 2001.

ČERNÝ, A. **Dynamic Programming and Mean-Variance Hedging in Discrete Time**. Working Paper.

ČERNÝ, A. **Mathematical Techniques in Finance**: tools for incomplete markets. New Jersey: Princeton University Press, 2004.

COX, J.; ROSS, S. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. **Journal of Financial Economics**, [S.l.], v.3, p.145–166, 1976.

COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: a simplified approach. **Journal of Financial Economics**, [S.l.], v.7, p.229–263, 1979.

DEBREU, G. **Theory of Value**. New Haven: Yale University Press, 1959.

DOTHAN, M. **Prices in Financial Markets**. New York: Oxford University Press, 1990.

DOWNES, J.; GOODMAN, J. **Dicionário de Termos Financeiros e de Investimento**. São Paulo: Nobel, 1993.

DUFFIE, D. **Security Markets**: stochastic models. Londres: Academic Press, 1988.

DUFFIE, D.; RICHARDSON, H. Mean Variance Hedging in Continuous Time. **The Annals of Applied Probability**, [S.l.], v.1, p.1–15, 1991.

EL KAROUI, N.; QUENEZ, M. Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market. **SIAM Journal of Control and Optimization**, [S.l.], v.33, p.29–66, Janeiro 1995.

FÖLLMER, H.; SCHIED, A. **Stochastic Finance**: an introduction in discrete time. Segunda.ed. Berlin: De Gruyter Studies in Mathematics, 2004.

FÖLLMER, H.; SCHWEIZER, M. Hedging of Contingent Claims Under Incomplete Information. In: DAVIS, M.; ELLIOT, R. (Ed.). **Applied Stochastic Analysis**. Londres: Gordon & Breach, 1991. p.389–414.

FRITTELLI, M. Introduction to a Theory of Value Coherent with the No-Arbitrage Principle. **Finance and Stochastics**, [S.l.], v.4, p.275–297, 2000.

FRITTELLI, M. The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets. **Mathematical Finance**, [S.l.], v.10, p.39–52, Janeiro 2000.

GAMBA, A.; PELLIZZARI, P. Utility Based Pricing of Contingent Claims in Incomplete Markets. **Applied Mathematical Finance**, [S.l.], v.9, p.241–260, 2002.

GULKO, L. **The Entropic Pricing Theory**. 1998. Tese de Doutorado em Administração — Yale School of Management, Yale University, New Haven.

HARRISON, J.; KREPS, D. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. **Journal of Economic Theory**, [S.l.], v.20, p.381–408, 1979.

HARRISON, J.; PLISKA, S. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. **Stochastic Processes and their Applications**, [S.l.], v.11, p.215–260, 1981.

HILLIER, F.; LIEBERMAN, G. **Introduction to Operations Research**. Singapura: McGraw-Hill, 1995.

HUANG, C.; LITZENBERGER, R. **Foundations for Financial Economics**. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

HULL, J. **Options, Futures and Others Derivatives**. Quarta.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

INGERSOLL JR., J. **Theory of Financial Decision Making**. New York: Rowman & Littlefield, 1987.

KARATZAS, I.; LEHOCZKY, J.; SHREVE, S.; XU, G. Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in Incomplete Markets. **SIAM Journal of Control and Optimization**, [S.l.], v.29, p.702–730, Maio 1991.

LIMA, E. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

MAGILL, M.; QUINZII, M. **Theory of Incomplete Markets**. London: MIT Press, 1996. v.1.

MERTON, R. Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, [S.l.], v.4, p.141–183, 1973.

NAKANO, Y. Minimizing Coherent Risk Measures of Shortfall in Discrete Time Models with Cone Constraints. **Applied Mathematical Finance**, [S.l.], v.10, p.163–181, 2003.

NEFTCI, S. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**. Califórnia: Academic Press, 2000.

OSTASZEWSKI, A. **Advanced Mathematical Methods**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. **Microeconomia**. Quarta.ed. São Paulo: Makron Books, 1999.

PLISKA, S. **Introduction to Mathematical Finance**: discrete time models. Massachusetts: BlackWell Publishers, 1997.

RADNER, R. Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets. **Econometrica**, [S.l.], v.40, p.289–303, Março 1972.

ROSS, S. **An Elementary Introduction to Mathematical Finance**. New York: Cambridge University Press, 2003.

SCHACHERMAYER, W. A Hilbert Space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Case. **Insurance: Mathematics & Economics**, [S.l.], v.11, p.249–257, 1992.

SCHIED, A.; WU, C. **Duality Theory for Optimal Investments Under Model Uncertainty**. Working Paper.

SCHULMERICH, M.; TRAUTMANN, S. **Local Expected Shortfall-Hedging. Part I**: the discrete model. Working Paper, Department of Law and Economics, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

SCHWEIZER, M. Variance Optimal Hedging in Discrete Time. **Mathematics of Operations Research**, [S.l.], v.20, p.1–32, 1995.

SHARPE, W.; ALEXANDER, G.; BAILEY, J. **Investments**. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

SHIRYAEV, A. **Probability**. Segunda.ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

SHIRYAEV, A. **Essentials of Stochastic Finance**: facts, models, theory. New Jersey: World Scientific, 1999.

SIQUEIRA, J. **Determinação Entrópica do Preço Racional da Opção Européia Simples Ordinária Sobre Ação e Bond**: uma aplicação da teoria da informação em finanças em condição de incerteza. 1999. Tese de Doutorado em Administração — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo.

SIQUEIRA, J.; CASTRO JR., F. Estimação Entrópica Não-Paramétrica da Volatilidade do Preço de um Valor Mobiliário. In: V ENCONTRO BRASILEIRO DE FINANÇAS,

SÃO PAULO, BRASIL, 18-20 JULHO, 2005. **Anais...** Sociedade Brasileira de Finanças, 2005.

STETTNER, L. Option Pricing in Discrete-Time Incomplete Market Models. **Mathematical Finance**, [S.l.], v.10, p.305–321, Abril 2000.

STUTZER, M. Simple Entropic Derivation of a Generalized Black-Scholes Option Pricing Model. **Entropy**, [S.l.], v.2, p.70–77, 2000.

ZIMMER, C. **Novos Critérios de Precificação em Mercados Incompletos**: consistência, racionalidade e desvio-padrão normalizado por volume. 2005. Tese de Doutorado em Administração — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo.