UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, CONTABILIDADE E ATUÁRIA
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

LEONARDO ALBERTO WINOCUR

# Contribuições ao Modelo de Gordon a partir de Simulações Matemáticas de Alavancagem e Custo de Capital Próprio

São Paulo
2023

Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Júnior
Reitor da Universidade de São Paulo

Profa. Maria Dolores Montoya Diaz
Diretor da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária

Prof. Dr. João Maurício Gama Boaventura
Chefe do Departamento de Administração

Prof. Dr. Felipe Mendes Borini
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

LEONARDO ALBERTO WINOCUR

**Contribuições ao Modelo de Gordon a partir de Simulações Matemáticas de Alavancagem e Custo de Capital Próprio**

**Versão original**

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Jose Roberto Securato

São Paulo

2023

Catalogação na publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária

Catalogação na Publicação (CIP)
Ficha Catalográfica com dados inseridos pelo autor

Winocur, Leonardo Alberto.
Contribuições ao Modelo de Gordon a partir de simulações matemáticas de alavancagem financeira e custo de capital próprio / Leonardo Alberto Winocur. - São Paulo, 2023.
77 p.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, 2023.
Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato.

1. Alavancagem Financeira. 2. Custo de Capital Próprio. 3. Gordon. I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária. II. Título.

Nome: WINOCUR, Leonardo Alberto

Título: Contribuições ao Modelo de Gordon a partir de Simulações Matemáticas de Alavancagem e Custo de Capital Próprio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia do Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária da Universidade de São Paulo, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr.
Instituição:
Julgamento: ______________________

Prof. Dr.
Instituição:
Julgamento: ______________________

Prof. Dr.
Instituição:
Julgamento: ______________________

## RESUMO

A partir de uma revisão bibliográfica sobre custo de capital próprio e alavancagem financeira são questionadas as premissas utilizadas por Modigliani e Miller em uma revisitação do modelo de Gordon de dividendos descontados. Através de formulações algébricas e simulações, concluímos que a proposição de Modigliani-Miller sobre a irrelevância da estrutura de capital para o valor da firma nos leva a resultados que não respeitam a premissa de racionalidade dos investidores. Na terceira parte um novo modelo de precificação da alavancagem financeira é proposto e utilizando formulações algébricas e simulações mostramos que tal modelo é coerente com suas premissas. Na quarta seção, definimos um investidor e uma firma hipotéticos e demonstramos que este novo modelo pode ser extrapolado para um problema de microeconomia, onde existem equilíbrios que podem apontar estruturas ótimas de capital que maximizam o valor da firma e maximizam a utilidade do investidor em um equilíbrio parcial entre esses agentes econômicos.

**Palavras-chave:** Alavancagem Financeira; Custo de Capital Próprio; Gordon; Modigliani-Miller

**Código JEL:** G320

**ABSTRACT**

Based on a literature review on cost of equity capital and financial leverage, the assumptions used by Modigliani and Miller in a revisitation of Gordon's model of discounted dividends are questioned. Through algebraic formulations and simulations, we conclude that the Modigliani-Miller proposition about the irrelevance of the capital structure to the value of the firm leads us to results that do not respect the assumption of rationality of investors. In the third part, a new financial leverage pricing model is proposed and, using algebraic formulations and simulations, we show that this model is consistent with its assumptions. In the fourth section, we define a hypothetical investor and a firm and demonstrate that this new model can be extrapolated to a microeconomics problem, where there are equilibria that can point to optimal capital structures that maximize the firm's value and maximize the investor's utility in a given period.



**Keywords:** Financial Leverage; Cost of Equity; Gordon; Modigliani-Miller

**JEL Code:** G320

**SUMÁRIO**

# 1 REVISÃO BIBIOGRÁFICA SOBRE CUSTO DE CAPITAL PRÓPRIO: O ESTADO DA ARTE

## 1.1 Introdução

Uma das questões fundamentais do estudo de finanças é o risco de um investimento afetar seu retorno esperado. Até a década de 1950 não havia sido estabelecido um modelo que calculasse o custo de capital próprio (*cost of equity*) – o retorno dos investidores – de acordo com o risco de cada investimento. Na era "pré-*Capital Asset Pricing Model*" (CAPM), o que determinava o custo de capital de um projeto ou de uma empresa era uma média ponderada entre o custo do capital próprio e o custo da dívida. Além disso, o custo do capital próprio era simplesmente calculado como a média dos retornos no longo prazo de investimentos similares, sem levar em consideração o risco. (PEROLD, 2004).

É fascinante quão recentes são as teorias que discorrem sobre risco e retorno. Apesar de existirem mercados de ações desde 1602, grande parte dos trabalhos acadêmicos que estudam esse assunto surgiram em torno das décadas de 1950 e 1960. Antes disso, os investidores, durante séculos, confiaram na diversificação intuitiva para gerenciar os riscos.

Foi a partir do artigo "Portfolio Selection", de Harry Markowitz, que se introduziu o conceito de que investidores buscam um balanceamento entre risco e retorno. Esse artigo é considerado o *Big Bang* das finanças modernas e nele, pela primeira vez, se identificou o risco por meio da variância de preços. Apesar de contraintuitivo naquele momento, utilizar a variância como medida de risco possibilitou aplicar a álgebra na derivação dos modelos subsequentes (MILLER, 1999).

## 1.2 *Capital Asset Pricing Model*

Markowitz parte de duas possíveis regras que poderiam ditar a forma como investidores montam seus portfólios de ativos: a) investidores maximizam o retorno esperado; ou b) investidores procuram retornos esperados mais altos e evitam variâncias (risco). Markowitz descarta a primeira opção, com o argumento de que, se investidores buscassem retornos mais altos sem se preocupar com o risco, eles não diversificariam suas carteiras de investimento. Portanto, conclui que os investidores, ao selecionarem seus portfólios de ativos, procuram retorno e evitam riscos (MARKOWITZ, 1952).

Em 1981 Fischer Black escreveu uma carta aberta a Jack Treynor, dizendo que Treynor fora o primeiro acadêmico a desenvolver um modelo de precificação de ativos. French (2003) confirma isso em seu artigo "The Treynor Capital Asset Pricing Model". O artigo a que Black se refere não foi publicado, e é simplesmente um rascunho escrito em 1962 por Treynor (FRENCH, 2003).

A história mais conhecida atribui o desenvolvimento do CAPM a Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), mas Treynor também merece crédito pelo desenvolvimento do CAPM (FRENCH, 2003) .

Treynor desenvolveu um modelo que: a) sob suposições, o comportamento ótimo de balanceamento de portfólio pelo investidor individual leva à Proposição I do famoso artigo de Modigliani-Miller; b) explora a maneira pela qual o risco afeta o valor do investimento; e c) introduz o conceito de "segurabilidade", em que os riscos seguráveis têm um efeito insignificante no custo do capital (TREYNOR, 1962).

O CAPM parte de quatro premissas: 1) todos os investidores são avessos ao risco e escolhem entre carteiras unicamente com base na média dos retornos esperados e na variância; 2) não há impostos ou custos de transação; 3) todos os investidores têm pontos de vista homogêneos quanto aos parâmetros da distribuição probabilística conjunta de todos os retornos de segurança; e 4) todos os investidores têm acesso a crédito com uma determinada taxa de juros livre de risco (BLACK et al., 1972).

Com essas premissas, todos os investidores terão a mesma carteira de ativos arriscados, que terá retorno $E_m$. A única diferença entre os investidores será a proporção de seu patrimônio que eles irão alocar nessa carteira de ativos arriscados e no ativo livre de risco (titulo público que rende a taxa básica da economia). O principal resultado do modelo era:

$$E_s = \beta\left(E_m - r_f\right)$$

Em que:

$E_s$ é o retorno esperado do ativo;

$\beta$ é a sensibilidade do retorno do ativo em relação ao retorno livre de risco;

$E_m$ é o retorno esperado do portfólio de mercado;

$r_f$ é o retorno livre de risco.

Após uma década de discussões acadêmicas, vários autores tentaram refutar a validade do CAPM. Dentre esses autores, Black *et al.* (1972) e Fama e MacBeth (1973) propuseram bons argumentos. Porém, Roll (1977) encerra essa discussão ao demonstrar que o *market portfolio* – portfólio de mercado especificado no modelo – é imensurável, o que impossibilita um teste empírico do CAPM (FRENCH, 2003).

Ao testar a validade do modelo, Jensen, Black e Scholes (1972) descobriram um modelo que se adequava melhor ao que teria sido encontrado nos dados. Além disso, propuseram uma "melhoria" ao modelo, em que a taxa de retorno esperada de um ativo qualquer fosse determinada por:

$$E_s = r_f + \beta(E_m - r_f)$$

Em que:

$E_s$ é o retorno esperado da ação;

$r_f$ é o retorno esperado livre de risco;

$\beta$ é a sensibilidade do retorno do ativo em relação ao retorno livre de risco;

$E_m$ é o retorno esperado do portfólio de mercado.

### 1.3 *The five-factor pricing model*

O CAPM conseguiu, por cerca de trinta anos, passar por intensos testes econométricos. Mas, a partir da década de 1990, o consenso começou a crer que um modelo com um único fator de risco não era suficiente para explicar os retornos esperados em *cross-section.* Outros dois fatores, além do famoso Beta, foram adicionados. Um dos fatores é relativo ao tamanho das firmas, baseando-se na evidência de que o risco de empresas menores é maior. Por sua vez, o outro fator é relativo ao múltiplo de *price-to-book value,* ou preço/valor patrimonial, em português (MILLER, 1999).

O modelo de três fatores foi proposto por Fama e French (1993) e seu principal resultado define o retorno de um ativo arriscado da seguinte forma:

$$E_s = r_f + \beta(E_m - r_f) + b_s(r_s - r_b) + b_v(r_h - r_l)$$

Em que:

$E_s$ é o retorno esperado da ação;

$r_f$ é o retorno esperado livre de risco;

$\beta$ é a sensibilidade do retorno do ativo em relação ao retorno livre de risco;

$E_m$ é o retorno esperado do portfólio de mercado;

$b_s$ é o fator que classifica o tamanho da companhia;

$r_s$ é o retorno esperado de empresas pequenas;

$r_b$ é o retorno esperado de empresas grandes;

$b_v$ é o fator que classifica a empresa com alto ou baixo *price-to-book*;

$r_h$ é o retorno esperado de empresas com alto *price-to-book*;

$r_l$ é o retorno esperado de empresas com baixo *price-to-book*.

Desde os anos 1990, com a introdução de novas técnicas econométricas, acadêmicos começaram a testar novamente se o CAPM funcionava, isto é, se o CAPM era uma forma precisa de estimar o custo de capital próprio. Essa discussão ainda não foi concluída, e os mercados financeiros continuam utilizando o modelo para estimar o custo de capital. Em estudos feitos para o mercado brasileiro, o CAPM se provou ineficiente em estimar o custo de capital (YOSHINO; SANTOS, 2009).

Em 2015, Fama e French, em seu artigo “A Five-Factor Asset Pricing Model”, propuseram dois novos fatores para o modelo CAPM. O artigo se inicia com uma explicação intuitiva para a adição de mais dois fatores ao modelo de três fatores, que, na reformulação, passa a ter cinco fatores de precificação de ativos. A explicação intuitiva começa pelo *dividend discout model*, que, segundo os autores, serve para explicar por que a lucratividade e o nível de investimento estão relacionados ao retorno (FAMA; FRENCH, 2015).

No modelo de desconto de dividendos (*dividend discount model* – DDM) propõe-se que o valor de mercado de uma empresa é o valor presente dos dividendos futuros da empresa:

$$M = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(d_t)}{(1+r)^t}$$

Em que:

$M$ é o Valor de Mercado;

$E(d_t)$ é o valor esperado do dividendo no período t;

$r$ é a taxa de retorno (custo do capital próprio).

Os autores explicam que, se duas empresas têm valores esperados de dividendos iguais e valores de mercado diferentes, a taxa de retorno deve ser diferente. Se os mercados forem eficientes, isso significa que a empresa com valor de mercado menor (taxa de retorno maior) tem risco maior (FAMA; FRENCH, 2015).

Utilizando a definição de Modigliani e Miller (1961), os autores modificaram a fórmula do DDM para captar a necessidade de investimento das empresas.

Assumindo que:

$$Dividendo = Lucro - Investimento$$

E que o investimento pode ser definido como um aumento no patrimônio líquido:

$$M = \sum \frac{E(Y_t - \partial B_t)}{(1+r)^t}$$

Em que:

$M$ é o Valor de Mercado;

$Y_t$ é o lucro no período t;

$\partial B_t = B_t - B_{t-1}$ em que $B_t$ é o patrimônio líquido em t;

$r$ é a taxa de retorno (custo do capital próprio).

Se dividirmos ambos os lados pelo patrimônio líquido (*book value*), podemos identificar algumas relações entre as variáveis (FAMA; FRENCH, 2015):

$$\frac{M}{B_t} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(Y_t - \partial B_t)}{(1+r)^t}}{B_t}$$

Em que:

$M$ é o Valor de Mercado;

$Y_t$ é o lucro no período t;

$\partial B_t = B_t - B_{t-1}$ em que $B_t$ é o patrimônio líquido em t;

$r$ é a taxa de retorno (custo do capital próprio).

Primeiro, mantendo todas as variáveis constantes, exceto o valor de mercado, $M$, e o retorno esperado, $r$, se percebe que um menor valor de $M$, ou equivalentemente um valor *book-*

*to-market* mais alto, $B_t$ / $M$, implica um retorno esperado mais alto (FAMA; FRENCH, 2015).

Segundo, fixando $M$ e as demais variáveis, exceto o lucro esperado, $Y_t$, e o retorno esperado, $r$, a equação, então, mostra que ganhos esperados mais altos implicam maior retorno esperado (FAMA; FRENCH, 2015).

Terceiro, para valores fixos de $B_t$, $M$ e $Y_t$ há maior crescimento no patrimônio líquido, $\partial B_t$, que significa maior investimento, implicando um retorno esperado, $r$, mais baixo (FAMA; FRENCH, 2015).

A proposta do artigo é complementar o modelo de três fatores com duas novas variáveis:

$$ER_i = R_f + \beta_1(ER_m - R_f) + \beta_2 SMB_t + \beta_3\, HML_t + \beta_4 RMW_t + \beta_5 CMA_t$$

Em que:

$ER_i$ é o retorno esperado do investimento;

$R_f$ é a taxa livre de risco;

$\beta_{1,2,3,4,5}$ são os coeficientes;

$ER_m$ é o retorno esperado do mercado;

$SMB_t$ é o prêmio de tamanho;

$HML_t$ é o prêmio de valor;

$RMW_t$ é o prêmio de lucratividade;

$CMA_t$ é o prêmio de investimento.

A primeira nova variável é o prêmio de lucratividade, o RMW, cujo objetivo é medir o impacto que uma lucratividade mais robusta tem sobre retornos. A segunda nova variável é o prêmio de investimento, que visa medir o impacto nos retornos entre empresas com altas e baixas necessidades de investimento.

Na pesquisa, foram realizados testes de sete modelos diferentes: três modelos de três fatores, que combinam $ER_m$ e $SMB_t$ com $HML_t$, $RMW_t$ ou $CMA_t$; três modelos de quatro fatores, que combinam $ER_m$ e $SMB_t$ com duplas de $HML_t$, $RMW_t$ ou $CMA_t$; e um modelo de cinco fatores (FAMA; FRENCH, 2015).

Todos os modelos se provaram descrições incompletas do retorno esperado. Inclusive, entre 42% a 54% do excesso de retorno dos ativos ficaram inexplicados no modelo de cinco fatores. No modelo de três fatores, esse indicador era mais alto, 54% a 68% (FAMA; FRENCH, 2015).

Modelos de precificação de ativos são proposições simplificadas sobre retornos esperados que são rejeitados em testes de potência (FAMA; FRENCH, 2015). O que interessa é identificar o modelo que melhor explica (mesmo que imperfeitamente) a média de retornos sobre carteiras e ativos.

Os resultados do artigo mostraram que a variável de prêmio de valor se torna redundante quando são adicionados os prêmios de lucratividade e investimento. Com os resultados desanimadores, os autores substituem o HML por um HML ortogonal. Com isso, encontram um modelo que explica de 72% a 91% dos retornos (FAMA; FRENCH, 2015).

## 1.4 As proposições de Modigliani-Miller

Além do CAPM, outros pilares das finanças modernas são as proposições de Modigliani-Miller em "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment", publicado em 1958. Nesse artigo, Modigliani e Miller chegaram a duas conclusões, com as seguintes premissas: a) ausência de impostos; b) ausência de custos de transação; c) ausência de custos de falência; d) equivalência em custos de empréstimos para empresas e investidores; e) simetria da informação de mercado, ou seja, empresas e investidores têm as mesmas informações; e f) ausência de efeito de dívida sobre o lucro da empresa antes de juros e impostos (MODIGLIANI; MILLER, 1958).

As duas conclusões foram apelidadas de proposições básicas das finanças pelos autores.

- 1ª proposição: o valor de mercado de qualquer empresa é independente da sua estrutura de capital.
- 2ª proposição: o retorno esperado de uma ação é igual ao retorno de capital da "classe de ativo" somado a um *premium* relacionado ao risco de alavancagem financeira, que é igual à razão dívida-capital social vezes a diferença entre o retorno de capital e a taxa de juros da dívida, da seguinte maneira:

$$E_s = r_k + (r_k - i)\frac{D}{E}$$

Em que:

$E_s$ é o retorno esperado da ação;

$r_k$ é o retorno esperado da classe de ativos da empresa;

$i$ é a taxa de juros sobre a dívida;

$D$ é o montante da dívida;

$E$ é o montante de capital próprio (MODIGLIANI; MILLER, 1958).

## 1.5 *Dividend discount model*

Além do CAPM, do modelo de cinco fatores e das proposições de Modigliani e Miller, é preciso citar Gordon e Shapiro (1956), que definiram o modelo de *valuation* de crescimento apelidado de *Gordon-Shapiro Dividend Growth Model*, partindo do raciocínio de que o valor de uma empresa é o valor presente de seus dividendos futuros:

$$M = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E(d_t)}{(1+r)^t}$$

Em que:

$M$ é o Valor de Mercado;

$E(d_t)$ é o valor esperado do dividendo no período t;

$r$ é a taxa de retorno (custo do capital próprio).

Além disso, assumindo que a empresa é perpétua e que a taxa de crescimento dos dividendos é equivalente a uma taxa constante $g$ e menor que o retorno exigido pelos acionistas, $r$, deriva-se a seguinte formula para o valor da empresa:

$$M_o = \frac{d_1}{r-g}$$

Em que:

$M_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$d$ é o dvidendo que a Empresa pagará em t = 1;

$r$ é o retorno do acionista (custo de capital próprio);

$g$ é a taxa de crescimento dos dividendos da empresa.

## 1.6 *Comparable company analysis*

Um dos problemas que os profissionais encontraram ao utilizar o CAPM foi sua aplicabilidade, que estava restrita a empresas de capital aberto, uma vez que a estimação do Beta tem como base os preços da ação da empresa que está sendo estudada. Como a grande parte das empresas do mundo são de capital fechado, os praticantes de mercado passaram a utilizar uma ferramenta chamada *Comparable Company Analysis* (CCA).

Apesar de ser amplamente utilizada na indústria financeira para precificar transações de empresas de capital fechado e ofertas públicas iniciais, há pouca literatura sobre o método e sua eficácia (BOWMAN; BUSH, 2007).

De acordo com Bowman e Bush (2007), o CCA pode ser dividido em cinco passos:

- **Passo um**: identificar empresas comparáveis. Esse passo consiste em encontrar um grupo de empresas de capital aberto parecidas, ou seja, que estão no mesmo segmento ou setor da economia que a empresa que está sendo avaliada.
- **Passo dois**: obter os Betas das empresas comparáveis identificadas no passo um. Isto é, obter o coeficiente que se usaria para multiplicar o prêmio de risco de cada uma dessas empresas que foram selecionadas no passo um.
- **Passo três**: "desalavancar" os Betas. As empresas comparáveis, apesar de serem semelhantes em risco de negócios à empresa que está sendo avaliada, têm alavancagem financeira diferente. Essa etapa pretende fazer um ajuste, de acordo com a alavancagem financeira de cada empresa, aos Betas encontrados no passo dois. Existem várias maneiras de "desalavancar" os Betas. A forma mais utilizada é a metodologia proposta por Hamada (1972) para calcular o Beta "desalavancado":

$$\beta_U = \frac{\beta_L}{1 + (1 - T)\frac{D}{E}}$$

Em que:

$\beta_L$ é o Beta estimado por meio da regressão linear;

$\beta_U$ é o Beta "desalavancado";

$T$ é a tarifa de imposto sobre o lucro antes de juros e impostos;

$D$ é o valor total da dívida da companhia;

$E$ é o valor de mercado das ações da companhia.

- **Passo quatro**: calcular a média ou mediana dos Betas "desalavancados" das empresas selecionadas.

- **Passo cinco:** calcular o Beta alavancado da companhia que está sendo avaliada, utilizando a média ou mediana obtida no passo quatro na fórmula exposta no passo três.

Como se pode observar, o próprio CAPM e sua extensão, o CCA, tentam, de alguma forma, precificar o risco adicional que o investidor corre ao investir em uma empresa com maiores níveis de alavancagem financeira. Além da fórmula proposta por Hamada (1972), outros modelos surgiram, como as fórmulas de Miles-Ezzell (1980), Harris-Pringle (1985).

### *1.6.1 Formulas para alavancar o Beta*

Uma questão não bem resolvida em finanças é a existência ou não de uma estrutura de capital ótima (MYERS, 1989), na qual o custo de capital é minimizado e o valor da empresa é maximizado mediante mudanças na proporção de dívida na estrutura de capital. O Teorema da Irrelevância de Modigliani-Miller (MODIGLIANI; MILLER, 1958) propõe que o valor da empresa depende apenas dos parâmetros operacionais e, portanto, não pode ser alterado por decisões de financiamento. Porém, esse resultado é considerado por muitos como uma consequência das premissas e suposições de um modelo muito simplificado.

### *1.6.2 A derivação da fórmula de Hamada*

A Equação de Hamada é a fórmula mais utilizada para calcular o Beta alavancado nas implementações do CCA. A derivação da fórmula decorre da combinação do Teorema da Irrelevância de Modigliani-Miller com o CAPM. A equação recebe o nome de Robert Hamada, ex-reitor da Booth School of Business da Universidade de Chicago, que publicou um artigo intitulado “The Effect of the Firm’s Capital Structure on the Systematic Risk of Common Stocks” no *Journal of Finance* em 1972. O artigo de Hamada tenta vincular empiricamente as questões de finanças corporativas com análises de portfólio por meio do efeito da alavancagem de uma empresa sobre o risco sistemático de suas ações ordinárias, que é de onde deriva a fórmula de alavancagem do Beta.

Por-se derivar a equação de Hamada a partir da fórmula estatística do Beta:

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_M)}{var(r_M)} \tag{3}$$

Em que:

$r_i$ é retorno esperado do investidor;

$r_M$ é o retorno esperado da carteira de mercado.

Em seguida, define o retorno esperado do investidor em uma empresa alavancada ($r_{i,L}$) e em uma empresa não alavancada ($r_{i,U}$) da seguinte forma:

$$r_{i,U} = \frac{EBIT(1-t)-\Delta IC}{E_U} \tag{4}$$

$$r_{i,L} = \frac{EBIT(1-t)-\Delta IC+\Delta D-J}{E_L} \tag{5}$$

Em que:

EBIT é lucro antes de juros e impostos;

$t$ é a taxa de imposto;

$\Delta IC$ é a soma de investimentos de capital (Capex) com crescimento do capital de giro deduzido da depreciação;

$\Delta D$ é o montante de dívida emitida subtraído do montante de dívida amortizada no período;

$J$ é valor dos juros pagos no período;

$E_U$ é o valor de mercado das ações da empresa não alavancada;

$E_L$ é o valor de mercado das ações da empresa alavancada.

Se forem substituídas as equações (4) e (5) na (3), e se e somente se supuser que as covariâncias entre o mercado ($r_M$) e os componentes do fluxo de caixa do patrimônio ($\Delta IC$, $\Delta Div$, $J$) são zero (portanto, $cov(r_M, \Delta IC) = cov(r_M, \Delta Div) = cov(r_M, J) = 0$), obter-se-á as fórmulas (6) e (7):

$$\beta_U = \frac{cov\left(\frac{EBIT(1-t)}{E_U}, r_M\right)}{var(r_M)} \tag{6}$$

$$\beta_L = \frac{cov\left(\frac{EBIT(1-t)}{E_L}, r_M\right)}{var(r_M)} \tag{7}$$

Que combinadas, resultam em:

$$\beta_U \times E_U = \beta_L \times E_L \tag{8}$$

$$\beta_L = \beta_U \frac{E_U}{E_L} \tag{9}$$

O Teorema da Irrelevância de Modigliani-Miller é válido se a empresa for totalmente financiada por capital próprio e a alíquota de imposto for zero, então o valor de uma empresa ($V_U$) e o valor do patrimônio líquido ($E_U$) da empresa são iguais (MODIGLIANI; MILLER, 1958). Matematicamente, isso significa o valor de uma empresa não alavancada, quando a alíquota do imposto é zero ($T = 0$): $V_U = V_A = E_U$, onde $V_A$ é o valor do ativo. Se se fixar o valor da empresa não alavancada ($E_U$) e alterar a estrutura de capital para uma dívida maior que zero ($D$ > 0), o valor da empresa ainda será o mesmo. Nessa situação, o valor da empresa alavancada ($V_L$) é (9):

$$V_L = V_U = V_A = E_U = E_{L|T=0} + D \tag{9}$$

Se a alíquota do imposto for maior que zero (T> 0) e houver alavancagem financeira ($D$ > 0), então a empresa alavancada e a não alavancada não são iguais, porque o valor da empresa alavancada é maior, pelo valor presente do benefício fiscal da dívida (TaxShield):

$$\begin{aligned} TaxShield &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_d \times D \times T}{(1+k_d)^i} \\ &= k_d \times D \times T \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k_d)^i} \quad . \\ &= k_d \times D \times T \times \frac{1}{k_d} \end{aligned}$$

$$TaxShield = D \times T \tag{10}$$

E, acrescentando (10) em (9), obtém-se:

$$E_U = E_{L|T>0} + D - D \times T$$

$$E_U = E_{L|T>0} + D(1 - T) \tag{11}$$

Finalmente, substituindo (11) em (8), há:

$$\beta_L = \beta_U \frac{E_L + D(1-T)}{E_L}$$

$$\beta_L = \beta_U \left[1 + \frac{D}{E_L}(1-T)\right] \tag{12}$$

As fórmulas de Hamada são consistentes com a teoria de que:

a) A taxa de desconto usada no cálculo do benefício fiscal é igual ao custo do capital de dívida (ou seja, o benefício fiscal tem o mesmo risco que a dívida);
b) As fórmulas implicam que as deduções fiscais sobre as despesas com juros serão realizadas nos períodos em que os juros são pagos;
c) O valor do benefício fiscal é proporcional ao valor de mercado do capital de dívida (ou seja, valor do benefício fiscal (TaxShield) = DT;
d) O montante do capital de dívida é fixado na data de avaliação e permanece constante.

As fórmulas de Hamada são baseadas na formulação de Modigliani e Miller, o que significa que a premissa de que o custo do empréstimo é o mesmo para investidores e empresas também está embutida na formulação de Hamada. Como se pode observar, na fórmula de Hamada (12), a taxa de juros não aparece, reflexo direto desta premissa. Além disso, a derivação original da fórmula assume que o capital de dívida da empresa em questão está livre de inadimplência (ou seja, tem um beta igual a zero). A fórmula não está correta se a suposição é a de que o capital de dívida permanece em uma porcentagem constante do capital próprio (equivalente ao aumento da dívida em proporção aos aumentos no fluxo de caixa líquido para a empresa em cada período). As fórmulas são equivalentes a assumir uma proporção decrescente do valor da dívida em relação ao patrimônio líquido se os fluxos de caixa da empresa estiverem aumentando (GABROWSKI; PRATT, 2018).

### *1.6.3 A fórmula de Miles-Ezzell*

A fórmula de Miles-Ezzell é uma alternativa para desalavancar e alavancar o Beta, que pressupõem que haja risco na realização oportuna das deduções fiscais para o pagamento de juros sobre o capital da dívida (GABROWSKI; PRATT, 2014).

$$\beta_U = \frac{(E_L \times \beta_L) + \mathrm{D} \times \beta_d\left(1 - \frac{T \times k_{d(pt)}}{1 + k_{d(pt)}}\right)}{E_L + \mathrm{D}\left(1 - \frac{T \times k_{d(pt)}}{1 + k_{d(pt)}}\right)} \tag{13}$$

Em que:

$\beta_U$ é o Beta "desalavancado";

$\beta_L$ é o Beta "alavancado";

$E_L$ é o valor de mercado das ações da companhia;

$D$ é o valor total da dívida da companhia;

$\beta_D$ é o Beta da dívida;

$T$ é a alíquota de imposto;

$k_{d(pt)}$ é o custo da dívida antes do efeito do benefício tributário.

Sua formulação é baseada em quatro premissas principais:

- Os mercados de capitais são perfeitos. Consequentemente, o valor de mercado de qualquer fluxo de caixa alavancado é igual ao valor de mercado do componente do fluxo de caixa não alavancado adicionado ao valor de mercado do benefício tributário sobre o pagamento de juros.
- A taxa de desconto do capital alavancado é fixa.
- A empresa mantém um índice de alavancagem constante. Se, ao final de qualquer período, a relação dívida/valor da firma não for igual ao período anterior, assume-se que a empresa realiza transações financeiras para restaurar a relação preexistente.
- A taxa de desconto usada no cálculo do valor do benefício fiscal é igual ao custo de capital de dívida (ou seja, o benefício fiscal tem o mesmo risco que a dívida) durante o primeiro ano, e a taxa de desconto usada no cálculo do valor do benefício fiscal daí em diante é igual ao custo do capital próprio usando o Beta do ativo da empresa (ou seja, o risco do imposto após o primeiro ano é comparável ao risco dos fluxos de caixa operacionais). Isto é, o risco de realização das deduções fiscais é maior do que o assumido na Fórmula de Hamada.

*1.6.4 A fórmula de Harris-Pringle*

A fórmula de Harris-Pringle é uma forma alternativa de desalavancar e alavancar estimativas de Beta que assumem que o benefício fiscal é ainda mais arriscado, em comparação a Miles-Ezzel e Hamada.

$$\beta_U = \frac{\beta_L + \beta_d \times \frac{W_d}{W_E}}{1 + \frac{W_d}{W_E}} \tag{14}$$

Em que:
$\beta_U$ é o Beta "desalavancado";
$\beta_L$ é o Beta "alavancado";
$\beta_d$ é o Beta da dívida;
$W_d$ é o percentual de dívida na estrutura de capital;
$W_e$ é o percentual de capital próprio na estrutura de capital;
$D$ é o valor total da dívida da companhia.

Sua formulação é baseada em 3 principais premissas:

a) A taxa de desconto usada no cálculo do benefício fiscal é igual ao custo do capital próprio calculado usando o Beta do ativo da empresa (ou seja, o risco do benefício fiscal é comparável ao risco dos fluxos de caixa operacionais). Isto é, o risco de realização das deduções fiscais é maior do que o assumido nas fórmulas de Hamada e Miles-Ezzell.

b) O capital da dívida carrega o risco de variação do fluxo de caixa líquido operacional em que os pagamentos de juros e reembolsos do principal não podem ser feitos quando devidos, o que implica que as deduções fiscais sobre a despesa de juros podem não ser realizadas no período em que os juros são pagos (ou seja, o Beta de dívida pode ser maior que zero).

c) O valor de mercado do capital de dívida permanece em uma porcentagem constante do capital próprio, o que equivale a dizer que a dívida aumenta em proporção ao fluxo de caixa líquido da empresa (fluxo de caixa líquido para capital investido) em cada período.

### *1.6.5 As diferenças entre Hamada, Miles-Ezzel e Harris-Pringle*

A equação de Hamada é frequentemente considerada como válida em geral. No entanto, como se viu, existem várias suposições-chave por trás da equação de Hamada:

1. A fórmula de Hamada é baseada na formulação de Modigliani e Miller sobre os valores de benefícios fiscais para dívidas constantes, ou seja, o valor da dívida em dólares é constante ao longo do tempo. As fórmulas não estão corretas se a empresa segue uma política de alavancagem constante, isto é, a empresa reequilibra sua estrutura de capital para que o capital da dívida permaneça em uma porcentagem constante do capital próprio, o que é uma suposição mais comum e realista do que uma dívida em dólar fixo (BREALEY; MYERS; ALLEN, 2008). Se se assume como premissa que a empresa reequilibra seu índice de endividamento continuamente, a equação de Hamada deve ser substituída pela equação de Harris-Pringle; se a empresa se reequilibra apenas periodicamente, por exemplo uma vez por ano, a equação de Miles-Ezzell é a única a ser usada.

2. O Beta da dívida é igual a zero em Hamada. Esse é o caso se o capital de dívida tiver um risco desprezível de inadimplência. Em Miles-Ezzel e Harris-Pringle é possível assumir Betas para o capital de dívida maiores que zero.

3. Em Hamada, a taxa de desconto usada para calcular o benefício fiscal é considerada igual ao custo do capital de dívida (portanto, o benefício fiscal tem o mesmo risco que a dívida). Isto e a suposição de dívida constante em (1) implicam que o benefício fiscal é proporcional ao valor de mercado da dívida: Benefício Fiscal = $T \times D$. O mesmo não vale para Harris-Pringle e Miles-Ezzel, em que o valor presente do benefício fiscal pode ser diferente, a depender do Beta.

# 2 A IRRACIONALIDADE DAS PROPOSIÇÕES DE MODIGLIANI-MILLER, SOB NOVAS PREMISSAS

Em seu artigo, Modigliani e Miller chegaram em suas proposições com as seguintes premissas: a) ausência de impostos; b) ausência de custos de transação; c) ausência de custos de falência; d) equivalência em custos de empréstimos para empresas e investidores; e) simetria da informação de mercado, ou seja, empresas e investidores têm as mesmas informações; e f) ausência de efeito de dívida sobre o lucro da empresa antes de juros e impostos (MODIGLIANI; MILLER, 1958).

Grande parte das finanças modernas se baseia nessas proposições. Porém, uma das premissas que os autores adotaram nos incomoda muito. A premissa de equivalência no acesso ao crédito entre investidores e empresas. Afinal, essa premissa é muito distante da realidade.

Neste capítulo será feito um exercício em que serão adotadas todas as premissas de Modigliani-Miller, exceto a premissa de que há equivalência em custos de empréstimos para empresas e investidores.

## 2.1 Recompra de ações com alavancagem

Um movimento que tem sido muito discutido na mídia é o fenômeno das recompras de ações financiadas com emissões de dívidas. Um dos artigos que mais gerou impacto em Wall Street foi publicado no *Washington Post* por Steven Pearlstein, articulista que se tornou famoso em 2008 quando antecipou a crise daquele mesmo ano em um artigo pelo qual foi premiado com um prêmio Pulitzer de jornalismo.

Em seu artigo “Beware the ‘Mother of All Credit Bubbles’” (em tradução livre, “Cuidado com a mãe de todas as bolhas de crédito”), Pearlstein aponta que as somente entre as quinhentas maiores empresas dos Estados Unidos o montante de recompras de ações ultrapassa a marca de 800 bilhões de dólares ao ano e que grande parte desse dinheiro está sendo financiado por meio da emissão de dívida.

O que se observa é que, ao anunciar programas de recompra de ações, as empresas têm sofrido com uma alta nos preços de suas ações. Por exemplo, a Apple Inc., em maio de 2018, anunciou um programa de recompra de ações no valor de 100 bilhões de dólares. No dia seguinte, fechou com uma alta de 4,4%, e naquela semana totalizou uma alta de 13% no valor total da companhia (PERLSTEIN, 2018).

Para tornar o conceito de recompra de ações com alavancagem mais claro, será utilizado um exemplo da Empresa A, que está avaliada num mercado de ações hipotético em R$ 10.000,00, com mil ações avaliadas em R$ 10,00 cada uma. Supondo que inicialmente a empresa não tenha nenhuma dívida, ela pode emitir um título de dívida de R$ 1.000,00, por exemplo, e utilizar o dinheiro para recomprar ações no mercado. Se a empresa consegue comprar cem ações no valor médio de R$ 10,00 por cada ação, ela empresa passa a ter novecentas ações em circulação.

Qual deve ser o valor das novecentas ações em circulação que restaram? Segundo a primeira proposição de Modigliani-Miller, o valor de mercado de qualquer empresa é independente de sua estrutura de capital. Isto é, segundo Modigliani-Miller (assumindo um mundo hipotético, sem impostos), o valor das ações deveria continuar o mesmo, ou seja, a empresa continuaria valendo os R$ 10.000,00 iniciais, mas agora R$ 9.000,00 seria o valor das ações e R$ 1.000,00 seria o valor da dívida.

## 2.2 Modificando o modelo de Gordon

Seguindo com o exemplo da Empresa A, suponha-se que essa empresa antes de recomprar as ações com alavancagem tivesse uma expectativa de lucro antes de juros e impostos (Lajir) igual a R$ 1.000,00 para o ano seguinte. Além disso, assuma-se que não existem impostos, da mesma forma com que fizeram Modigliani e Miller. Assim, como a empresa não tem nenhuma dívida, não tem seu resultado onerado por juros, de tal forma que o Lajir é exatamente igual ao lucro líquido. Para exemplificar, assuma-se que a empresa paga 100% dos lucros em dividendos e que a expectativa do mercado é que os lucros cresçam a uma taxa de 2% ao ano. Se a empresa estava avaliada em R$ 10.000,00, pode-se utilizar o modelo de Gordon para calcular qual seria a taxa de retorno esperado dos investidores, que também é a taxa de custo de capital próprio.

Relembrando o modelo de Gordon:

$$P_o = \frac{D_1}{k-g}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$D_1$ é o dvidendo que a Empresa pagará em t = 1;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$g$ é a taxa de crescimento do dividendo da empresa.

Pelo exemplo, define-se que:

$P_o = 10.000$
$D_1 = 1.000$
$g = 2\%$

Portanto:

$$10.000 = \frac{1.000}{k - 0{,}02}$$
$$k = 0{,}12 = 12\%$$

Conclui-se, dessa forma, que o custo de capital próprio dessa empresa hipotética seria de 12%. Ou seja, os investidores que comprassem uma das mil ações por R$ 10,00 teriam uma expectativa de ganhar 12% ao ano sobre seu investimento.

Agora suponha-se que a Empresa A emitiu uma dívida cujo custo anual em juros é de R$ 100,00. Suponha-se também que é uma dívida sem vencimento, em que a Empresa A sempre terá o direito de "rolar", ou seja, refinanciar pagando a mesma taxa de juros. Para calcular o novo valor da empresa, intuitivamente, poder-se-ia substituir o dividendo de R$ 1.000,00 por R$ 900,00 e utilizar o mesmo crescimento e a mesma taxa de retorno. Ao fazer isso, obter-se-ia o seguinte resultado:

$$P_o = \frac{900}{0{,}12 - 0{,}02} = 9.000$$

Apesar de parecer intuitivo, esse resultado está errado. Uma vez que a taxa de crescimento g do modelo de Gordon é a taxa de crescimento dos dividendos da empresa, cometer-se-ia um erro matemático ao assumir que essa taxa se manteve a mesma, uma vez que é a mesma empresa e que sua expectativa de crescimento de lucro antes de juros e impostos não se alterou.

Antes da operação de recompra alavancada, o Lajir e o lucro LÍQUIDO eram idênticos, portanto seu crescimento era idêntico. Após a operação alavancada, devido à conta de juros, o Lajir é maior que o lucro líquido, devido ao pagamento anual de juros, portanto seus crescimentos só poderiam ser iguais se os juros crescessem no mesmo ritmo. Como no exemplo, os juros são uma parcela fixa de R$ 100,00, e a expectativa de crescimento do Lajir não mudou o crescimento do lucro líquido e, por consequência, o crescimento dos dividendos g deve ser diferente de 2% ao ano.

Para corrigir esse erro, será derivado um modelo de Gordon modificado em que será substituído o crescimento dos dividendos **g** pelo crescimento do Lajir **h**.

Como demonstrado em Gordon (1959), a fórmula do modelo foi derivada a partir da premissa de que as empresas têm uma vida perpétua, de tal forma que a formula $P_o = \frac{D_1}{k-g}$ é o resultado da soma de uma progressão geométrica infinita em que o primeiro termo da progressão é o dividendo do ano seguinte e a razão é $\frac{(1+g)}{(1+k)}$, de tal forma que a soma pode ser definida pela seguinte expressão:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \frac{(1+g)^i}{(1+k)^i}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$D_i$ é o dividendo que a Empresa pagará em t = i;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$g$ é a taxa de crescimento do dividendo da empresa.

Se for definido o dividendo como resultado da subtração do Lajir pelos juros (lembrando que, nesse modelo, assumiu-se a ausência de impostos e o pagamento de 100% dos lucros mediante os dividendos), pode-se definir o valor da empresa pela seguinte expressão:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i(1+h)^i - J_i}{(1+k)^i}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$L_i$ é o Lucro antes de Juros que a Empresa terá em t = i;

$J_i$ é o Juros que a Empresa pagará em t = i;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$h$ é a taxa de crescimento do Lucro antes de Juros.

Algebricamente, pode-se dividir o valor da empresa em duas somas:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_1(1+h)^i}{(1+k)^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1}{(1+k)^i}$$

E, como se sabe que a soma de uma progressão geométrica é definida por:

$$S_n = \frac{a_1}{(1-q)}$$

Em que:

$a_1$ é o primeiro termo;

$q$ é a razão.

Tem-se que:

$$P_o = \frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$L_1$ é o Lucro antes de Juros que a Empresa terá em t = 1;

$J_1$ é o Juros que a Empresa pagará em t = 1;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$h$ é a taxa de crescimento do Lucro antes de Juros.

Utilizando o modelo de Gordon modificado, verifica-se que o valor da empresa antes da operação de recompra alavancada é mesmo do modelo de Gordon original:

$$P_o = \frac{1.000}{(0{,}12 - 0{,}02)} - \frac{0}{0{,}12} = 10.000$$

Por sua vez, ao utilizar o modelo de Gordon modificado, verifica-se que o valor da empresa depois da operação de recompra alavancada é diferente do modelo de Gordon original:

$$P_o = \frac{1.000}{(0,12 - 0,02)} - \frac{100}{0,12} = 10.000 - 833,33 = 9166,667$$

Apesar de avançar para encontrar um valor para a empresa A após a operação de recompra alavancada, há um outro problema: assumir que a taxa de retorno $k$ dos investidores se manterá constante é uma premissa que fere a racionalidade do investidor se ele for avesso ao risco. Uma vez que empresas com dívida são mais arriscadas, o investidor deveria demandar um retorno mais elevado de empresas alavancadas. Na próxima seção deste capítulo será demonstrado matematicamente que empresas alavancadas são mais arriscadas.

## 2.3 Alavancagem financeira

Seguindo com o exemplo da Empresa A, antes da operação de recompra alavancada a empresa estava avaliada em R$ 10.000. O que aconteceria com seu valor se a expectativa de crescimento h mudasse repentinamente? Suponha-se que um choque discreto seja anunciado e que a partir de então o mercado está mais pessimista com as perspectivas de crescimento, de tal forma que o crescimento esperado passa a ser de 1% em vez dos 2% iniciais.

O valor da empresa seria:

$$P'_o = \frac{1.000}{(0,12 - 0,01)} - \frac{0}{0,12} = 9.090,90$$

Ao comparar com o valor $P_o$ inicial de R$ 10.000,00, observa-se uma queda de 9,09% do valor da companhia.

O que aconteceria se esse evento ocorresse após a operação de recompra alavancada? Assumindo que a taxa de retorno se mantém a mesma após a operação de recompra alavancada, de quanto seria a queda no valor da empresa para o mesmo evento? O valor inicial seria de R$ 9.166,66 e, após a mudança da expectativa de crescimento:

$$P'_o = \frac{1000}{(0,12 - 0,01)} - \frac{100}{0,12} = 8.257,58$$

Ao comparar com o valor $P_o$ inicial de R$ 9.166,66, observa-se uma queda de 9,92% do valor da companhia. Ou seja, para um mesmo evento, a empresa alavancada teria um impacto maior do que se não estivesse alavancada. Dessa forma, pode-se concluir que a alavancagem aumenta o risco do negócio, isto é, o valor da empresa fica mais volátil para os mesmos efeitos.

Outra forma de abordar esse resultado é afirmando que, devido ao fato de a alavancagem financeira aumentar o risco das empresas, os investidores deveriam exigir um retorno maior de empresas alavancadas. Ou seja, seria um argumento para dizer que, no caso da empresa alavancada, o $k$ deveria ser maior que 12%.

A título de exemplo, note-se o que aconteceria no mesmo evento se em vez de 12% o retorno dos investidores fosse de 12,5% na empresa com alavancagem. Seu valor inicial deixaria de ser R$ 9.166,66 e passaria a ser:

$$P_o = \frac{1000}{(0{,}125 - 0{,}02)} - \frac{100}{0{,}125} = 8.723{,}81$$

E seu valor após o evento seria de:

$$P'_o = \frac{1000}{(0{,}125 - 0{,}01)} - \frac{100}{0{,}125} = 7.895{,}65$$

Ao comparar com o valor $P_o$ inicial de R$ 8.723,81 com o $P'_o$ final de R$ 7.895,65, observa-se uma queda de 9,49% do valor da companhia, que é menor, em módulo, do que a queda observada com $k = 12\%$, que foi de 9,92%. Ou seja, quando o retorno oferecido para os investidores aumenta, o valor da empresa se torna menos volátil para o mesmo evento de risco.

## 2.4 Risco e risco relativo

Como observado na seção anterior, quando se menciona a palavra “risco”, trata-se de variações percentuais do valor da empresa em um dado evento. Para que este modelo hipotético funcione, deve-se definir formalmente o termo risco. Por isso, será extrapolado o exemplo prático utilizado na seção 2.3 para uma formulação matemática.

Na seção anterior concluiu-se que a empresa alavancada era mais arriscada do que a empresa não alavancada, por que para uma mesma mudança de expectativa de crescimento **h** a empresa alavancada teve uma queda percentual de valor mais aguda.

Pode-se definir matematicamente a queda percentual da seguinte forma:

$$\frac{\Delta P_o}{P_o} = \frac{(P'_o - P_o)}{P_o}$$

Como a variação $\Delta P_o$ foi causada por uma mudança em **h**, pode-se substituir $\Delta P_o$ por uma derivada parcial:

$$\frac{\Delta P_o}{P_o} = \frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o}$$

Primeiro é preciso derivar $\frac{\partial P_o}{\partial h}$ :

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = \frac{\partial\left(\frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k}\right)}{\partial h}$$

Diferenciando termo por termo:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{J_1}{k}\right) + L_1 \times \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{(k-h)}\right)$$

A derivada parcial de $\left(-\frac{J_1}{k}\right)$ é igual a zero:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = 0 + L_1 \times \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{(k-h)}\right)$$

Usando a regra da cadeia, $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{(k-h)}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial h}$ , em que $u = k - h$ e $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}$:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = -\frac{\frac{\partial}{\partial h}(k-h)}{(k-h)^2} L_1$$

Diferenciando termo por termo:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = -\frac{L_1}{(k-h)^2} \times \left(\frac{\partial}{\partial h}(k) - \frac{\partial}{\partial h}(h)\right)$$

A derivada de $k$ é zero e a derivada de $h$ é um:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = -\frac{L_1}{(k-h)^2} \times (0-1)$$

Simplificando, chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial P_o}{\partial h} = \frac{L_1}{(k-h)^2}$$

Agora que se obteve a derivada parcial do valor da empresa $P_o$ em relação a uma variação em $h$, basta dividir por $P_o$ para obter o valor objetivo da métrica de risco do modelo:

$$\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{\frac{L_1}{(k-h)^2}}{P_o}$$

Substituindo $P_o$ obtemos:

$$\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{\frac{L_1}{(k-h)^2}}{\frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k}}$$

Colocando cada termo em $\frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k}$ sob o denominador comum $k(k-h)$: $\frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k} = \frac{kL_1}{k(k-h)} - \frac{J_1(k-h)}{k(k-h)}$ tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{L_1}{\left(\frac{kL_1 - J_1(k-h)}{k(k-h)}\right)(k-h)^2}$$

Multiplicando o numerador pelo denominador do denominador, tem-se:

$$\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{L_1 k(k-h)}{\left(kL_1 - J_1(k-h)\right)(k-h)^2}$$

Combinando as potências, obtém-se o resultado:

$$\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{L_1 k}{(k-h)\left(kL_1 - J_1(k-h)\right)}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$L_1$ é o Lucro antes de Juros que a Empresa terá em t = 1;

$J_1$ é o Juros que a Empresa pagará em t = 1;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$h$ é a taxa de crescimento do Lucro antes de Juros.

Encontrou-se, portanto, a fórmula que calcula o risco de uma empresa, fórmula que será utilizada em nosso modelo. Vale lembrar que qualquer número que surja dessa fórmula não serve para uma métrica de risco. Essa equação só serve para comparar o risco de uma empresa com ela mesma em uma situação de alavancagem. Isto é, comparar-se-á $R = \frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o}$ da Empresa A antes da operação de recompra alavancada com $R = \frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o}$ da mesma empresa A após a operação de recompra. Se R da empresa alavancada for maior que R da mesma empresa sem alavancagem, dir-se-á que a empresa alavancada é mais arriscada do que ela mesma sem alavancagem.

## 2.5 A taxa de retorno que iguala o risco

Como se definiu para este modelo que o risco é representado pela função $R = \frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o}$ e derivou-se que $\frac{\left(\frac{\partial P_o}{\partial h}\right)}{P_o} = \frac{L_1 k}{(k-h)\left(kL_1 - J_1(k-h)\right)}$, pode-se realizar um exercício para descobrir qual seria o retorno $k$ que iguala o risco $R$ entre uma empresa não alavancada e ela mesma alavancada. Isto é, se se define o risco da empresa antes da operação de recompra alavancada por $R_a = \frac{\left(\frac{\partial P_a}{\partial h}\right)}{P_a} = \frac{L_1 k_a}{(k_a-h)\left(k_a L_1 - J_a(k_a-h)\right)}$ e o risco da mesma empresa depois da operação de recompra por $R_d = \frac{\left(\frac{\partial P_d}{\partial h}\right)}{P_d} = \frac{L_1 k_d}{(k_d-h)\left(k_d L_1 - J_d(k_d-h)\right)}$ e iguala-se $R_d = R_a$ a fim de encontrar $k_a$ em função de $k_d$ e vice-versa.

Dessa forma, parte-se da seguinte igualdade:

$$\frac{L_1 k_a}{(k_a - h)\left(k_a L_1 - J_a(k_a - h)\right)} = \frac{L_1 k_d}{(k_d - h)\left(k_d L_1 - J_d(k_d - h)\right)}$$

Dividindo por $L_1$ nos dois lados e multiplicando cruzado obtém-se:

$$k_d(k_a - h)\left(k_a L_1 - J_a(k_a - h)\right) = k_a(k_d - h)\left(k_d L_1 - J_d(k_d - h)\right)$$

Distribuindo os termos obtém-se:

$$k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + k_a J_a h - h k_a L_1 + h k_a J_a - h^2 J_a)$$
$$= k_a(k_d^2 L_1 - k_d^2 J_d + k_d J_d h - h k_d L_1 + h k_d J_d - h^2 J_d)$$

Coletando em termos de $k_d$:

$$k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + k_a J_a h - h k_a L_1 + h k_a J_a - h^2 J_a)$$
$$= -k_a h^2 J_d + k_d^2(k_a L_1 - k_a J_d) + k_d(2 k_a J_d h - k_a h L_1)$$

Subtraindo $-k_a h^2 J_d + k_d^2(k_a L_1 - k_a J_d) + k_d(2 k_a J_d h - k_a h L_1)$ nos dois lados:

$$k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + k_a J_a h - h k_a L_1 + h k_a J_a - h^2 J_a) + k_a h^2 J_d - k_d^2(k_a L_1 - k_a J_d) - k_d(2 k_a J_d h - k_a h L_1) = 0$$

Coletando em termos de $k_d$:

$$k_a h^2 J_d + k_d^2(k_a J_d - k_a L_1) + k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h) = 0$$

Dividindo ambos os lados por $(k_a J_d - k_a L_1)$:

$$k_d^2 + \frac{k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{(k_a J_d - k_a L_1)} + \frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)} = 0$$

Subtraindo ambos os lados por $\left(\frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}\right)$:

$$k_d^2 + \frac{k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{(k_a J_d - k_a L_1)} = -\frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}$$

Adicionando ambos os lados em $\left(\frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2}\right)$:

$$k_d^2 + \frac{k_d(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{(k_a J_d - k_a L_1)} + \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2} = -\frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)} + \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2}$$

Isso permite escrever o lado esquerdo da equação como uma soma de termos ao quadrado:

$$\left(k_d + \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{2(k_a J_d - k_a L_1)}\right)^2 = -\frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)} + \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2}$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados obtém-se:

$$k_d + \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{2(k_a J_d - k_a L_1)} = \sqrt{\left(\frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2} - \frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}\right)}$$

Finalmente, isolando $k_d$ obtém-se a seguinte expressão:

$$k_d = \sqrt{\left(\frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2} - \frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}\right)} - \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{2(k_a J_d - k_a L_1)}$$

Ou seja, ao utilizar a fórmula anterior para definir o custo de capital da empresa após a operação de recompra com alavancagem, a variação percentual do valor de ambas empresas será a mesma para mudanças marginais na expectativa de crescimento **h** do lucro antes de juros.

Utilizando essa formula para o exemplo da Empresa A obtém-se:

$$k_d = \sqrt{\left(\frac{(0{,}12^2 \times 1000 - 0{,}12^2 \times 0 + 2 \times 0{,}12 * 0 \times 0{,}02 - 0{,}02^2 \times 0 - 2 \times 0{,}12 \times 100 \times 0{,}02)^2}{4(0{,}12 \times 100 - 0{,}12 \times 1000)^2} - \frac{0{,}12 \times 0{,}02^2 \times 100}{(0{,}12 \times 100 - 0{,}12 \times 1000)}\right)} - \frac{(0{,}12^2 \times 1000 - 0{,}12^2 \times 0 + 2 \times 0{,}12 \times 0 \times 0{,}02 - 0{,}02^2 \times 0 - 2 \times 0{,}12 \times 100 \times 0{,}02)}{2(0{,}12 \times 100 - 0{,}12 \times 1000)}$$

$$k_d \approx 12{,}92\ \%$$

Portanto, ao utilizar 12,92% de desconto para a empresa após a operação de recompra com alavancagem e 12% para a empresa antes da recompra observar-se-á que, para uma mudança marginal na taxa **h** de crescimento do lucro antes de juros, ambas sofrerão uma mudança de valor percentual exatamente igual.

Para ilustrar, pode-se fazer a prova real com o mesmo exemplo. Lembrando que o valor da empresa antes da operação de alavancagem era definido por:

$$P_a = \frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a}$$

Substituindo os valores do exemplo tem-se que:

$$P_a = \frac{1000}{(0{,}12 - 0{,}02)} - \frac{0}{0{,}12} = 10.000$$

Se se fizer uma mudança marginal na taxa **h** de 0,001 ocorre uma mudança de valor para:

$$P'_a = \frac{1000}{(0{,}12 - 0{,}019)} - \frac{0}{0{,}119} = 9.900{,}99$$

Isso significa uma mudança em termos percentuais de 0,99% do valor da empresa.

Por sua vez, o valor da empresa após a recompra da alavancagem seria definido com a nova taxa de retorno da seguinte forma:

$$P_d = \frac{1000}{(0{,}1292 - 0{,}02)} - \frac{100}{0{,}1292} = 8.383{,}51$$

Se se fize uma mudança marginal na taxa **h** de 0,001 ocorre uma mudança de valor para:

$$P'_d = \frac{1000}{(0{,}1292 - 0{,}019)} - \frac{100}{0{,}1292} = 8.300{,}41$$

Isso significa uma mudança em termos percentuais de exatamente 0,99% do valor da empresa.

Portanto, como foi demonstrado matematicamente e testado no exemplo, encontrou-se a taxa de retorno que iguala os riscos entre a empresa antes e depois da alavancagem. Se se refletir sobre esse resultado, assumindo que os mercados são eficientes, a taxa de retorno da empresa alavancada nunca poderia ser igual ou maior que esta.

No exemplo isso fica muito claro. Se os investidores tinham uma taxa de retorno de 12% ao ano na empresa antes da operação de recompra alavancada e passarem a 12,92% de retorno, eles estarão cobrando mais retorno pelo mesmo risco. Se os mercados forem eficientes, os investidores irão perceber que o retorno está mais alto e irão comprar o ativo, levando seu preço a subir e seu retorno a cair até um equilíbrio.

Também se sabe que o retorno de equilíbrio não será igual ou menor que o retorno antes da operação de alavancagem, uma vez que os investidores não estariam dispostos a correr mais risco pelo mesmo retorno. Portanto, pode-se concluir que o retorno dos investidores da empresa após a operação de recompra com alavancagem ficará em um intervalo:

$$k_a < k_d < \sqrt{\left(\frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2} - \frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}\right)} - \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{2(k_a J_d - k_a L_1)}$$

Esse intervalo para o exemplo da Empresa A seria:

$$12\% < k_d < 12{,}92\%$$

## 2.6 A violação da racionalidade de Modigliani-Miller

De acordo com as proposições de Modigliani-Miller, quando não há impostos e mercados de capitais funcionando bem, não faz diferença se a empresa empresta ou se o investidor toma emprestado individualmente. Portanto, o valor de mercado da firma não depende de sua estrutura de capital.

Na notação adotada, o valor da firma seria igual à soma do valor do capital $P_0$ com o valor da dívida $B_0$:

$$F_0 = P_0 + B_0$$

Sendo $B_0$ igual ao juros que será pago todo ano $J_1$ sobre a taxa de juros $i$:

$$F_0 = P_0 + \frac{J_1}{i}$$

Substituindo a função para $P_0$:

$$F_0 = \frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J_1}{k} + \frac{J_1}{i}$$

Pela proposição de Modigliani-Miller, o valor da firma antes de realizar a operação de recompra com alavancagem $F_a$ deve ser igual ao valor da firma depois da operação de recompra com alavancagem $F_d$.

$$F_a = F_d$$

$$\frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a} + \frac{J_a}{i_a} = \frac{L_1}{(k_d - h)} - \frac{J_d}{k_d} + \frac{J_d}{i_d}$$

Usando o denominador comum $(k_d - h)k_d i_d$ do lado direito da equação obtém-se:

$$\frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a} + \frac{J_a}{i_a} = \frac{{k_d}^2 J_d - k_d h J_d + k_d L_1 i_d - k_d J_d i_d + h J_d i_d}{(k_d - h)k_d i_d}$$

Multiplicando ambos os lados por $(k_d - h)k_d i_d$ obtém-se:

$$(k_d - h)k_d i_d \left(\frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a} + \frac{J_a}{i_a}\right) = {k_d}^2 J_d - k_d h J_d + k_d L_1 i_d - k_d J_d i_d + h J_d i_d$$

Usando $k_d$ como denominador comum do lado direito da igualdade:

$$(k_d - h)k_d i_d \left(\frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a} + \frac{J_a}{i_a}\right) = {k_d}^2 J_d + h J_d i_d + k_d(-h J_d + L_1 i_d - J_d i_d)$$

Expandindo o lado esquerdo e usando $k_d$ como denominador comum obtém-se:

$$\begin{aligned} {k_d}^2 \left(\frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} - \frac{J_a i_d}{k_a} + \frac{J_a i_d}{i_a}\right) + k_d \left(-\frac{h L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{h J_a i_d}{k_a} - \frac{h J_a i_d}{i_a}\right) \\ = {k_d}^2 J_d + h J_d i_d + k_d(-h J_d + L_1 i_d - J_d i_d) \end{aligned}$$

Passando tudo para um lado e igualando a zero:

$$k_d{}^2 J_d + hJ_d i_d + k_d(-hJ_d + L_1 i_d - J_d i_d) - k_d{}^2 \left(\frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} - \frac{J_a i_d}{k_a} + \frac{J_a i_d}{i_a}\right) - k_d \left(-\frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{hJ_a i_d}{k_a} - \frac{hJ_a i_d}{i_a}\right) = 0$$

Usando $k_d$ como denominador comum:

$$k_d{}^2 \left(J_d - \frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{J_a i_d}{k_a} - \frac{J_a i_d}{i_a}\right) + k_d \left(+\frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} - \frac{hJ_a i_d}{k_a} + \frac{hJ_a i_d}{i_a} - hJ_d + L_1 i_d - J_d i_d\right) + hJ_d i_d = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara obtém-se o seguinte resultado:

$$k_d = \left( \frac{\left(hJ_d - L_1 i_d - \frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} + J_d i_d + \frac{hJ_a i_d}{k_a} - \frac{hJ_a i_d}{i_a}\right) \pm \sqrt{\left(\left(-hJ_d + L_1 i_d + \frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} - J_d i_d - \frac{hJ_a i_d}{k_a} + \frac{hJ_a i_d}{i_a}\right)^2 - 4hJ_d i_d \left(J_d - \frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{J_a i_d}{k_a} - \frac{J_a i_d}{i_a}\right)\right)}}{2\left(J_d - \frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{J_a i_d}{k_a} - \frac{J_a i_d}{i_a}\right)} \right)$$

No exemplo da empresa A, ainda não foi definida o a taxa de juros da empresa após a operação de alavancagem $i_d$. A título de exemplo, assuma-se $i_d = i_a = 5\%$ . Ou seja, a taxa de juros que a empresa paga sobre sua dívida é de 5% ao ano. Isso implica que o valor total da dívida seja de R$ 2.000, uma vez que o juros anual é de R$ 100,00.

Portanto, se se substitui as premissas levantadas na fórmula:

$$F_a = F_d$$

$$\frac{L_1}{(k_a - h)} - \frac{J_a}{k_a} + \frac{J_a}{i_a} = \frac{L_1}{(k_d - h)} - \frac{J_d}{k_d} + \frac{J_d}{i_d}$$

Tem-se:

$$\frac{1000}{(0{,}12 - 0{,}02)} - \frac{0}{0{,}12} + \frac{0}{0{,}05} = \frac{1000}{(k_d - 0{,}02)} - \frac{100}{k_d} + \frac{100}{0{,}05}$$

$$10.000 = \frac{1000}{(k_d - 0{,}02)} - \frac{100}{k_d} + 2.000$$

$$8.000 \ = \frac{900k_d + 2}{(k_d - 0{,}02)k_d}$$

$$8.000{k_d}^2 - 1060k_d - 2 \ = 0$$

$$k_d = \frac{1060 \pm \sqrt{((1060)^2 - 4 \times 8.000 \times (-2)}}{2 \times 8.000}$$

$$k_d = \frac{1060 \pm \sqrt{1.187.600}}{16.000}$$

$$k_d \approx 13{,}43\%$$

ou

$$k_d \approx -0{,}18\%$$

Esses são exatamente os mesmos valores que se obtém se se substitui todas as premissas na formula para o $k_d$ derivado anteriormente.

O valor de 13,43% encontrado usando a proposição de Modigliani-Miller é maior do que o valor máximo de 12,92% estipulado na seção 2.4.

Se se calcular qual seria o risco da Empresa A após a operação de recompra com um $k_d \approx 13{,}43\%$, verificar-se-ia que é um risco menor do que a mesma Empresa A antes da operação de recompra alavancada com um $k_a = 12\%$.

Isso significa que, de acordo com o modelo proposto, a proposição de Modigliani-Miller viola, às vezes, a racionalidade dos investidores. Uma vez que, no caso da Empresa A, estivessem dispostos a ganhar somente 12% por um determinado risco, eles não teriam preferências monotônicas se estivessem cobrando 13,43% em uma situação em que o risco é menor.

Uma pergunta relevante seria se a proposição de Modigliani-Miller sempre viola a premissa de racionalidade dos investidores. Para provar isso bastaria mostrar matematicamente que:

$$\sqrt{\left(\frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)^2}{4(k_a J_d - k_a L_1)^2} - \frac{k_a h^2 J_d}{(k_a J_d - k_a L_1)}\right)} - \frac{(k_a^2 L_1 - k_a^2 J_a + 2k_a J_a h - h^2 J_a - 2k_a J_d h)}{2(k_a J_d - k_a L_1)} < \left(\frac{\left(hJ_d - L_1 i_d - \frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} + J_d i_d + \frac{hJ_a i_d}{k_a} - \frac{hJ_a i_d}{i_a}\right) \pm \sqrt{\left(\left(-hJ_d + L_1 i_d + \frac{hL_1 i_d}{(k_a - h)} - J_d i_d - \frac{hJ_a i_d}{k_a} + \frac{hJ_a i_d}{i_a}\right)^2 - 4hJ_d i_d \left(J_d - \frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{J_a i_d}{k_a} - \frac{J_a i_d}{i_a}\right)\right)}}{2\left(J_d - \frac{L_1 i_d}{(k_a - h)} + \frac{J_a i_d}{k_a} - \frac{J_a i_d}{i_a}\right)}\right)$$

Não parece humanamente possível provar esse teorema matemático. Outra forma de "provar" que a Proposição de Modigliani-Miller sempre viola a premissa de racionalidade dos investidores seria rodar várias simulações com as variáveis contidas nessas fórmulas, e ver se em alguma delas o $k_d$ da proposição de Modigliani e Miller está contido no intervalo definido na seção 2.4.

Foi realizado neste estudo um total de 50 mil simulações e observou-se que em alguns casos o $k_d$ da proposição de Modigliani e Miller ficava dentro do intervalo de racionalidade, enquanto em outros casos ficava fora. Mais precisamente, em 65% dos casos a proposição de Modigliani-Miller ficava dentro do intervalo e, em 35% dos casos, ficava fora do intervalo. O exemplo da Empresa A utilizado nesta dissetação é um desses 35%. Cada situação depende do valor inicial de suas variáveis que se relacionam de forma complexa dentro das equações, o que torna muito difícil identificar quais as restrições sobre todas as variáveis para que a variável $k_d$ fique dentro do intervalo.

Portanto, apesar de não acontecer sempre, a Proposição de Modigliani Miller viola em alguns casos a premissa de racionalidade dos investidores quando a premissa de que o acesso ao crédito é igual entre empresas e investidores.

No modelo de Modigliani-Miller, o investidor já teria uma dívida que otimiza seu portfólio, e, à medida que a empresa altera sua estrutura de capital, o investidor a altera no sentido contrário para manter o mesmo nível de alavancagem.

# 3 UM NOVO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DA ALAVANCAGEM FINANCEIRA

## 3.1 Um ponto de partida

Uma vez que a primeira proposição de Modigliani-Miller não respeita sempre a racionalidade dos investidores, pode-se colocar em xeque a fórmula de Hamada para alavancagem do Beta, haja vista que a derivação da fórmula parte da proposição de Modigliani-Miller em questão.

Por isso, deve-se começar a estudar a alavancagem financeira do início, a fim de tentar desenvolver um raciocínio novo.

Partamos do modelo de desconto de dividendos de Gordon-Shapiro, para recordar:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \frac{(1+g)^i}{(1+k)^i}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$D_i$ é o dividendo que a Empresa pagará em t = i;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$g$ é a taxa de crescimento do dividendo da empresa.

Se se define o dividendo como resultado da subtração do Lajir pelos juros (neste modelo assume-se a ausência de impostos e o pagamento de 100% dos lucros como dividendos), pode-se definir o valor da empresa pela seguinte expressão:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_i(1+h)^i - J_i}{(1+k)^i}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$L_i$ é o Lucro antes de Juros que a Empresa terá em t = i;

$J_i$ é o Juros que a Empresa pagará em t = i;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$h$ é a taxa de crescimento do Lucro antes de Juros.

Algebricamente, pode-se dividir o valor da empresa em duas somas:

$$P_o = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L_1(1+h)^i}{(1+k)^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1}{(1+k)^i}$$

E, como se sabe que a soma de uma progressão geométrica é definida por:

$$S_n = \frac{a_1}{(1-q)}$$

Em que:

$a_1$ é o primeiro termo;

$q$ é a razão.

Tem-se que:

$$P_o = \frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J}{k}$$

Em que:

$P_o$ é o Valor da Empresa em t = 0;

$L_1$ é o Lucro antes de Juros que a Empresa terá em t = 1;

$J$ é o Juros que a Empresa pagará em todos os períodos;

$k$ é o retorno do acionista anual, isto é, o custo de capital próprio;

$h$ é a taxa de crescimento do Lucro antes de Juros.

Então, onde está o risco nessa equação? $k$ é custo do capital próprio, ou o retorno exigido pelos investidores, portanto é exógeno, e não pode ser o risco. $J_1$ é o juros que a empresa pagará, também exógeno, e, no exemplo, constante. $L_1$ é o lucro antes de juros que a empresa terá, então é uma premissa, e há de fato um risco de o lucro projetado para o ano seguinte não se materializar, portanto o lucro é um bom candidato a participar da função risco neste modelo. $h$ é a taxa de crescimento em longo prazo, também uma premissa e com um perfil de longo prazo, portanto é outro candidato ainda mais forte a participar da função risco.

Para entender melhor a relação entre risco e retorno é preciso, primeiro, isolar a variável $k$.

Partindo de:

$$P_o = \frac{L_1}{(k-h)} - \frac{J}{k}$$

Unamos os termos da equação pelo denominador comum $k(k-h)$:

$$P_o = \frac{hJ - Jk + kL}{k(k-h)}$$

Multiplicando ambos lados por $k(k-h)$:

$$k(k-h)P_o = hJ - Jk + kL$$

Isolando $k$ no lado direito da equação:

$$kP_o(k-h) = hJ + k(L-J)$$

Expandindo em termos de $k$ no lado esquerdo da equação:

$$k^2P_o - hkP_o = hJ + k(L-J)$$

Subtraindo $k^2P_o - hkP_o$ em ambos os lados:

$$hJ\ + k(L-J) + hkP_o - k^2P_o = 0$$

Expandindo e isolando $k$ na equação:

$$hJ\ - k^2P_o + k(L - J + hP_o) = 0$$

Dividindo ambos lados por $-P_o$:

$$k^2 - \frac{hJ}{P_o} - \frac{k(-J + L + hP_o)}{P_o} = 0$$

Adicionando $\frac{hJ}{P_o}$ em ambos lados:

$$k^2 - \frac{k(-J + L + hP_o)}{P_o} = \frac{hJ}{P_o}$$

Adicionando $\frac{(-J+L+hP_o)^2}{4{P_o}^2}$ em ambos lados:

$$k^2 - \frac{k(-J + L + hP_o)}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2} = \frac{hJ}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2}$$

Escrevendo o lado esquerdo como um quadrado:

$$\left(k - \frac{-J + L + hP_o}{2P_o}\right)^2 = \frac{hJ}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2}$$

Tirando a raiz quadrada em ambos os lados:

$$k - \frac{-J + L + hP_o}{2P_o} = \pm\sqrt{\frac{hJ}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2}}$$

Adicionando $\frac{-J+L+hP_o}{2P_o}$ em ambos lados:

$$k = \frac{-J + L + hP_o}{2P_o} \pm \sqrt{\frac{hJ}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2}}$$

Como, no mundo das finanças é muito fora do comum observar os investidores cobrando retornos negativos para investimentos de risco, chega-se à seguinte equação:

$$k = \frac{-J + L + hP_o}{2P_o} + \sqrt{\frac{hJ}{P_o} + \frac{(-J + L + hP_o)^2}{4{P_o}^2}}$$

Agora que se tem a equação isolando k, pode-se retornar à questão do risco. Anteriormente avaliou-se que as variáveis que poderiam ter uma distribuição, ou seja, que poderiam ser a fonte de risco eram $h$ e $L$. Mas $h$ é o crescimento de $L$ em longo prazo. Portanto, se se escreve as demais variáveis em função de $L$, pode-se excluir $L$ da equação e obter uma função que só tem uma variável que é probabilística. Para isso, assuma-se que:

$$J = \theta L$$
$$P_o = \alpha(L - J)$$

Unindo ambas, obtém-se uma versão isolada da segunda:

$$P_o = \alpha(1 - \theta)L$$

Ou seja, $\theta$ é a proporção do lucro antes de juros que está comprometida com o pagamento de juros, e $\alpha$ é um múltiplo de valor da empresa em relação ao lucro líquido.

Substituindo ambas as equações na equação principal obtém-se:

$$k = \frac{-\theta L + L + h\alpha(1 - \theta)L}{2\alpha(1 - \theta)L} + \sqrt{\frac{h\theta L}{\alpha(1 - \theta)L} + \frac{(-\theta L + L + h\alpha(1 - \theta)L)^2}{4(\alpha(1 - \theta)L)^2}}$$

Simplificando:

$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1 - \theta)}{2\alpha(1 - \theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1 - \theta)} + \frac{(-\theta L + L + h\alpha(1 - \theta)L)^2}{4(\alpha(1 - \theta)L)^2}}$$

Isolando o $L$:

$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1 - \theta)}{2\alpha(1 - \theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1 - \theta)} + \frac{(L(-\theta + 1 + h\alpha(1 - \theta)))^2}{4(\alpha(1 - \theta)L)^2}}$$

Distribuindo os expoentes:

$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta)}{2\alpha(1-\theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1-\theta)} + \frac{L^2(-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta))^2}{4\alpha^2(1-\theta)^2 L^2}}$$

Simplificando:

$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta)}{2\alpha(1-\theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1-\theta)} + \frac{(-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta))^2}{4\alpha^2(1-\theta)^2}}$$

Agora suponha-se que existem dois universos paralelos, no primeiro a Empresa A não tem dívida, no segundo a mesma Empresa A tem uma dívida cujos juros comprometem 50% de seu lucro antes de juros com o pagamento de juros. Ou seja, no primeiro cenário, $\theta = 0$ e no segundo, $\theta = 0{,}5$.

Ademais, em ambos os cenários, o mercado precifica a empresa em dez vezes o valor do seu lucro, $\alpha = 10$, e projeta o crescimento em longo prazo em 2% ao ano, $h = 2\%$.

No cenário sem dívida, o retorno k exigido pelos acionistas pode ser calculado da seguinte maneira:

$$k = \frac{-0 + 1 + 0{,}02 \times 10 \times (1-0)}{2 \times 10 \times (1-0)} + \sqrt{\frac{0{,}02 \times 0}{10 \times (1-0)} + \frac{(-0 + 1 + 0{,}02 \times 10 \times (1-0))^2}{4 \times 10^2(1-0)^2}}$$

$$k = \frac{1{,}2}{20} + \sqrt{0 + \frac{(1{,}2)^2}{400}}$$

$$k = 0{,}6 + 0{,}6 = 0{,}12$$

$$k = 12\%$$

Por sua vez, no segundo cenário, com dívida:

$$k = \frac{-0{,}5 + 1 + 0{,}02 \times 10 \times (1 - 0{,}5)}{2 \times 10 \times (1 - 0{,}5)} + \sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}5}{10 \times (1 - 0{,}5)} + \frac{(-0{,}5 + 1 + 0{,}02 \times 10 \times (1 - 0{,}5))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0{,}5)^2}}$$

$$k = \frac{0{,}6}{10} + \sqrt{\frac{0{,}01}{5} + \frac{(0{,}6)^2}{100}}$$

$$k = 0{,}06 + 0{,}07483 = 0{,}1348$$

$$k = 13{,}48\%$$

Conclui-se então que a empresa no cenário em que está alavancada, assumindo que o mercado mantenha a mesma avaliação de múltiplo de lucro de dez vezes, dá um retorno mais alto ao investidor. Mas e o risco? Façamos um exercício. Suponha-se que um investidor comprou ações da Empresa A, as quais ele nunca poderá vender. Ou seja, assuma-se também zero liquidez para ambos os universos e que, depois que ele comprou as ações, surgiu uma notícia que impactou as projeções de crescimento da empresa, fazendo com que, na verdade, em vez de 2% ao ano, as novas projeções sugerem 1% ao ano. O que acontece com o retorno do investidor em cada cenário?

Para o primeiro cenário, sem alavancagem:

$$k = \frac{-0 + 1 + 0{,}01 \times 10 \times (1 - 0)}{2 \times 10 \times (1 - 0)} + \sqrt{\frac{0{,}01 \times 0}{10 \times (1 - 0)} + \frac{(-0 + 1 + 0{,}01 \times 10 \times (1 - 0))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0)^2}}$$

$$k = \frac{1{,}1}{20} + \sqrt{0 + \frac{1{,}1^2}{400}}$$

$$k = 0{,}055 + 0{,}055 = 0{,}11$$

$$k = 11\%$$

Para o segundo cenário, com alavancagem:

$$k = \frac{-0,5 + 1 + 0,01 \times 10 \times (1 - 0,5)}{2 \times 10 \times (1 - 0,5)} + \sqrt{\frac{0,01 \times 0,5}{10 \times (1 - 0,5)} + \frac{(-0,5 + 1 + 0,01 \times 10 \times (1 - 0,5))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0,5)^2}}$$

$$k = \frac{0,55}{10} + \sqrt{\frac{0,005}{5} + \frac{(0,55)^2}{100}}$$

$$k = 0,055 + \sqrt{0,001 + 0,003025}$$

$$k = 0,055 + 0,06344 = 0,1184$$

$$k = 11,84\%$$

Então, após a notícia, o investidor da empresa sem dívida passa a ter um retorno esperado de 11% ao ano e o investidor da empresa alavancada passa a ter um retorno de 11,84%. O investidor do cenário com alavancagem ainda tem um retorno superior, mas a queda que seu retorno sofreu foi proporcionalmente maior. Enquanto o nível de retorno do cenário sem dívida caiu 8,33%, o retorno do cenário com dívida caiu 12,16%.

Agora imagine-se que, no dia seguinte, a empresa divulga uma nova informação, que leva o consenso a projetar 0% ao ano em vez de 1%. O que acontece com o retorno dos investidores nos dois cenários?

Para o primeiro cenário, sem alavancagem:

$$k = \frac{-0 + 1 + 0 \times 10 \times (1 - 0)}{2 \times 10 \times (1 - 0)} + \sqrt{\frac{0 \times 0}{10 \times (1 - 0)} + \frac{(-0 + 1 + 0 \times 10 \times (1 - 0))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0)^2}}$$

$$k = \frac{1}{20} + \sqrt{0 + \frac{1^2}{400}}$$

$$k = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$k = 10\%$$

Para o segundo cenário, com alavancagem:

$$k = \frac{-0,5 + 1 + 0 \times 10 \times (1 - 0,5)}{2 \times 10 \times (1 - 0,5)} + \sqrt{\frac{0 \times 0,5}{10 \times (1 - 0,5)} + \frac{(-0,5 + 1 + 0 \times 10 \times (1 - 0,5))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0,5)^2}}$$

$$k = \frac{0{,}5}{10} + \sqrt{0 + \frac{(0{,}5)^2}{100}}$$

$$k = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}1$$

$$k = 10\%$$

Agora os retornos se igualaram. Mais um passo à frente: imagine-se que mais uma notícia ruim afeta o negócio, e em vez de 0% de crescimento em longo prazo os investidores estão projetando $h = -1\%$. O que acontece com os retornos dos investidores?

Para o primeiro cenário, sem alavancagem:

$$k = \frac{-0 + 1 + (-0{,}01) \times 10 \times (1 - 0)}{2 \times 10 \times (1 - 0)} + \sqrt{\frac{(-0{,}01) \times 0}{10 \times (1 - 0)} + \frac{(-0 + 1 + (-0{,}01) \times 10 \times (1 - 0))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0)^2}}$$

$$k = \frac{0{,}9}{20} + \sqrt{0 + \frac{(0{,}9)^2}{400}}$$

$$k = 0{,}045 + 0{,}045 = 0{,}09$$

$$k = 9\%$$

Para o segundo cenário, com alavancagem:

$$k = \frac{-0{,}5 + 1 + (-0{,}01) \times 10 \times (1 - 0{,}5)}{2 \times 10 \times (1 - 0{,}5)} + \sqrt{\frac{(-0{,}01) \times 0{,}5}{10 \times (1 - 0{,}5)} + \frac{(-0{,}5 + 1 + (-0{,}01) \times 10 \times (1 - 0{,}5))^2}{4 \times 10^2 (1 - 0{,}5)^2}}$$

$$k = \frac{0{,}45}{10} + \sqrt{\frac{-0{,}005}{5} + \frac{(0{,}45)^2}{100}}$$

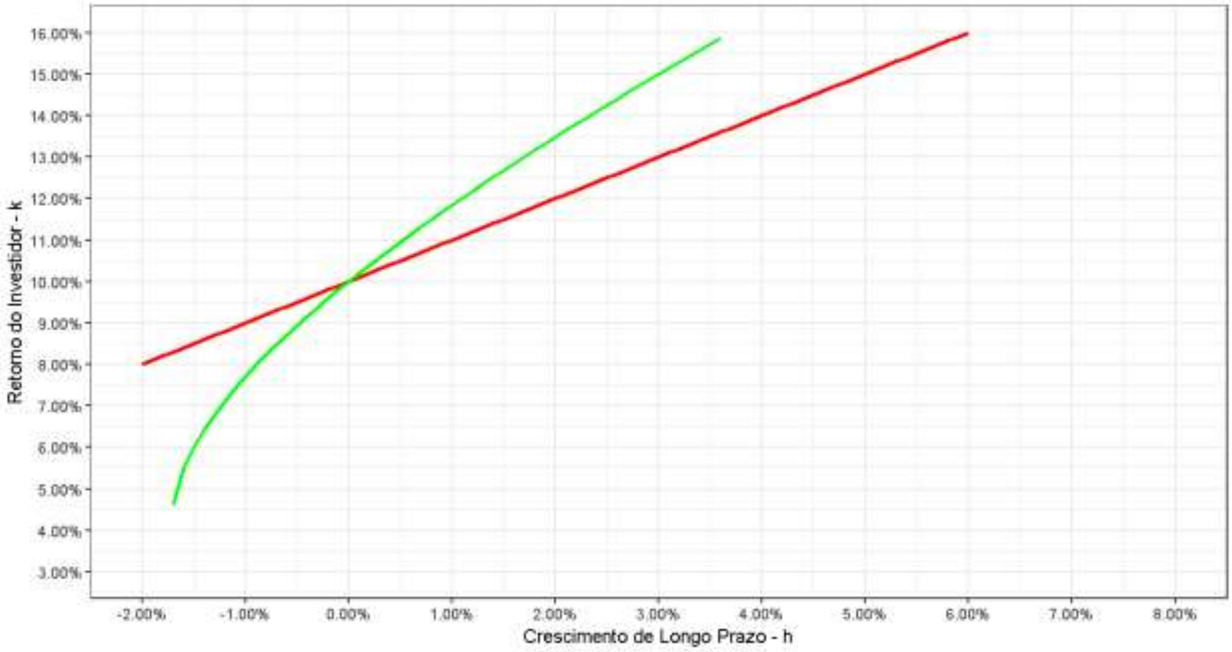
$$k = \frac{0{,}45}{10} + \sqrt{\frac{-0{,}005}{5} + \frac{(0{,}45)^2}{100}}$$

$$k = 0{,}045 + 0{,}03201 = 0{,}07701$$

$$k = 7{,}7\%$$

No cenário em que as projeções indicam que a empresa irá decrescer ao ritmo de 1% ao ano, a empresa com alavancagem teve um retorno menor que a empresa com alavancagem. Isto é, observa-se nesse exemplo que a dívida aumenta o risco do negócio, uma vez que, para o mesmo evento o efeito sobre os retornos dos investidores é maior. Esses resultados sugerem que os dois cenários são curvas conhecidas. Vamos plotar essas curvas e estudar como elas se comportam.

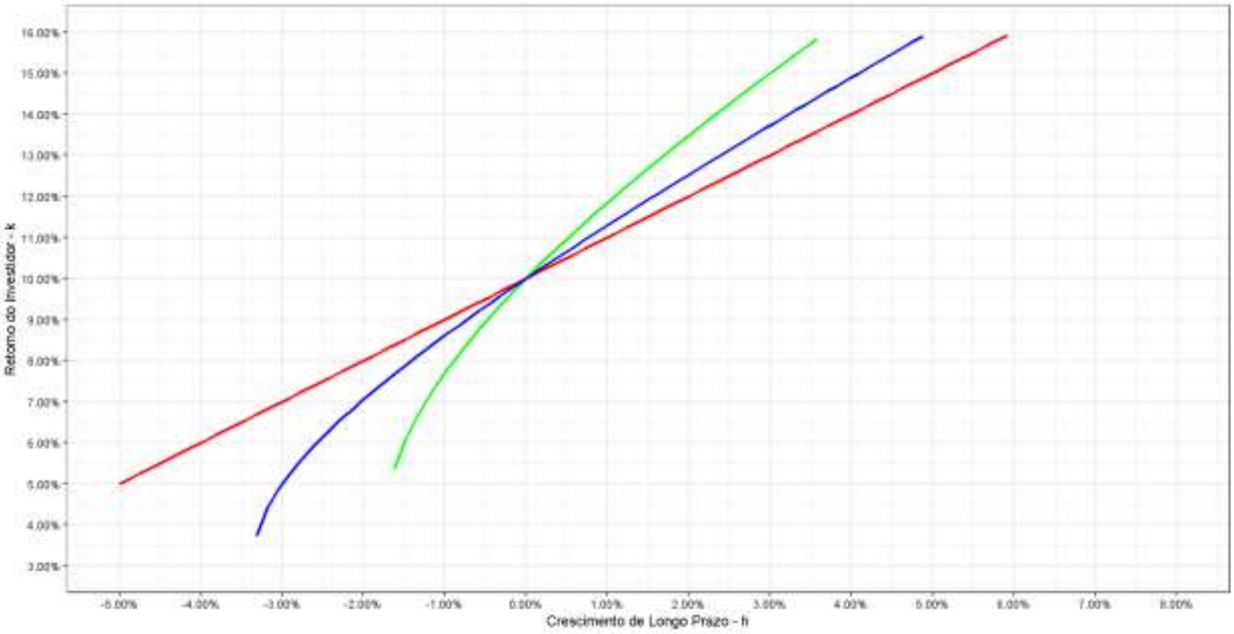
Figura 1 – Retorno do Investidor versus Crescimento do Lajir




Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 1 se pode observar as duas curvas plotadas. A curva verde representa a empresa com alavancagem financeira e, a curva vermelha, sem alavancagem. Como é possível notar, o retorno do investidor fica mais volátil quando há uma parte do lucro antes de juros comprometida com o pagamento de juros. Essa é uma representação do risco adicional que a dívida traz ao fluxo de caixa para os acionistas.

Figura 2 – Retorno do Investidor versus Crescimento do Lajir

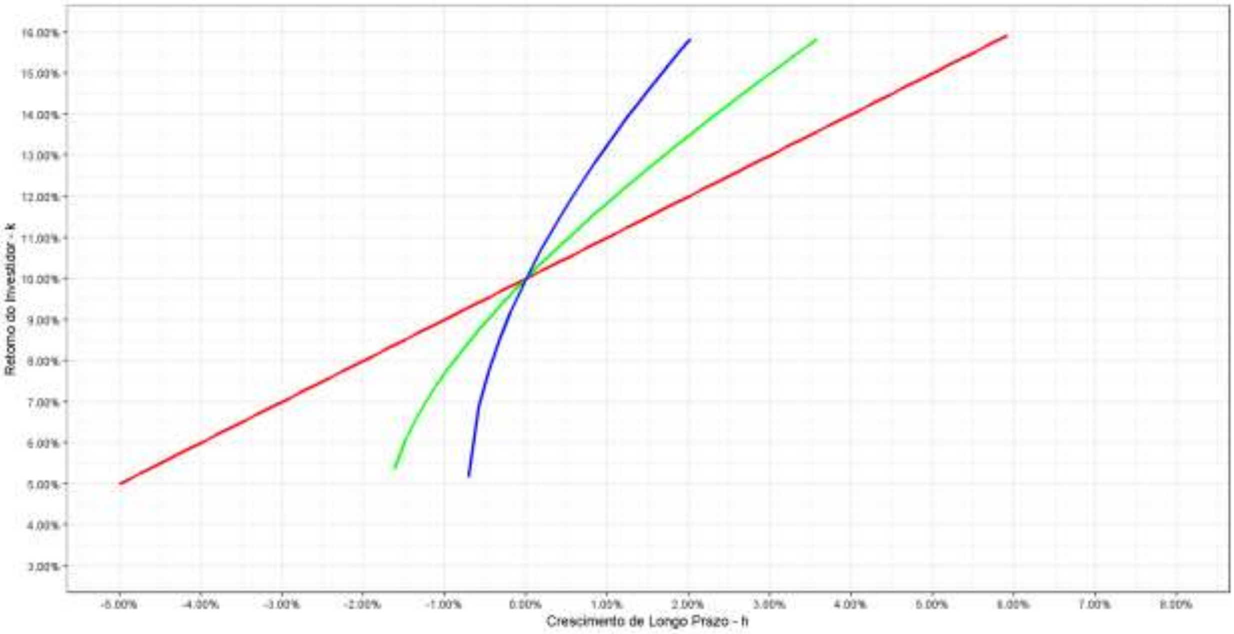



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 2 há uma nova linha, em azul, em que o $\theta = 0{,}25$. Observa-se que a inclinação da curva é proporcional à parcela de lucro antes de juros comprometida com o pagamento de juros.

Para exemplificar, na Figura 3, a linha azul em $\theta = 0{,}75$.

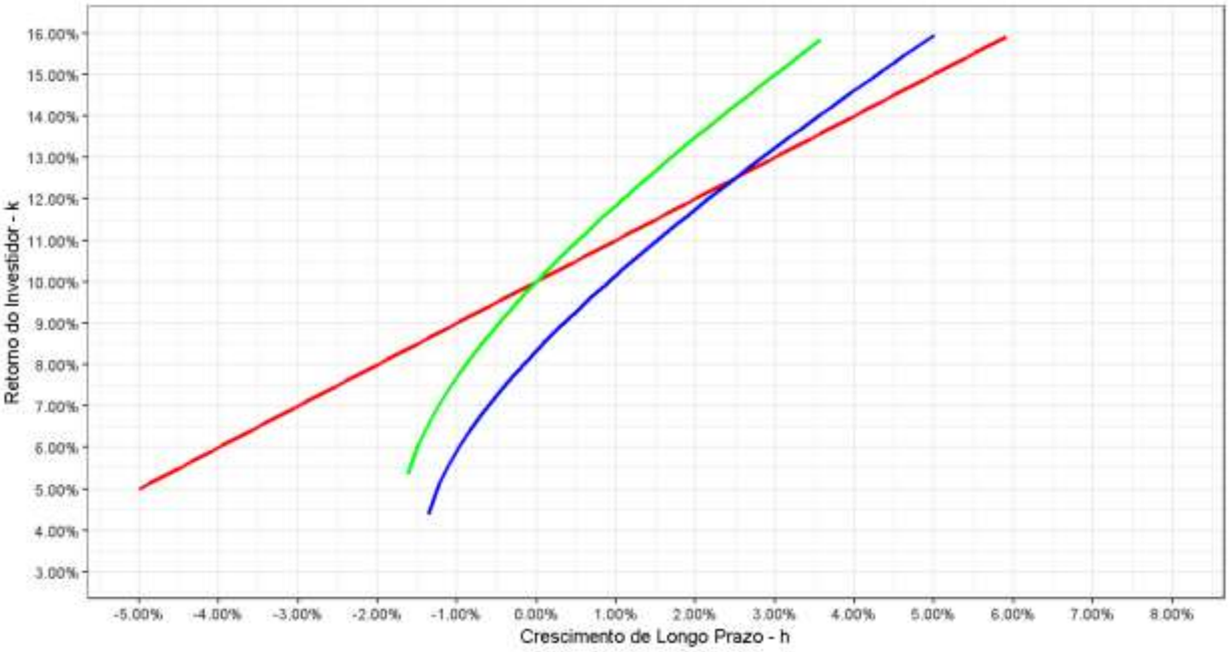
Figura 3 – Retorno do Investidor versus Crescimento do Lajir




Fonte: Elaborada pelo autor.

Para exemplificar, na Figura 4, a linha azul em $\theta = 0{,}5$ .e $\alpha = 12$.

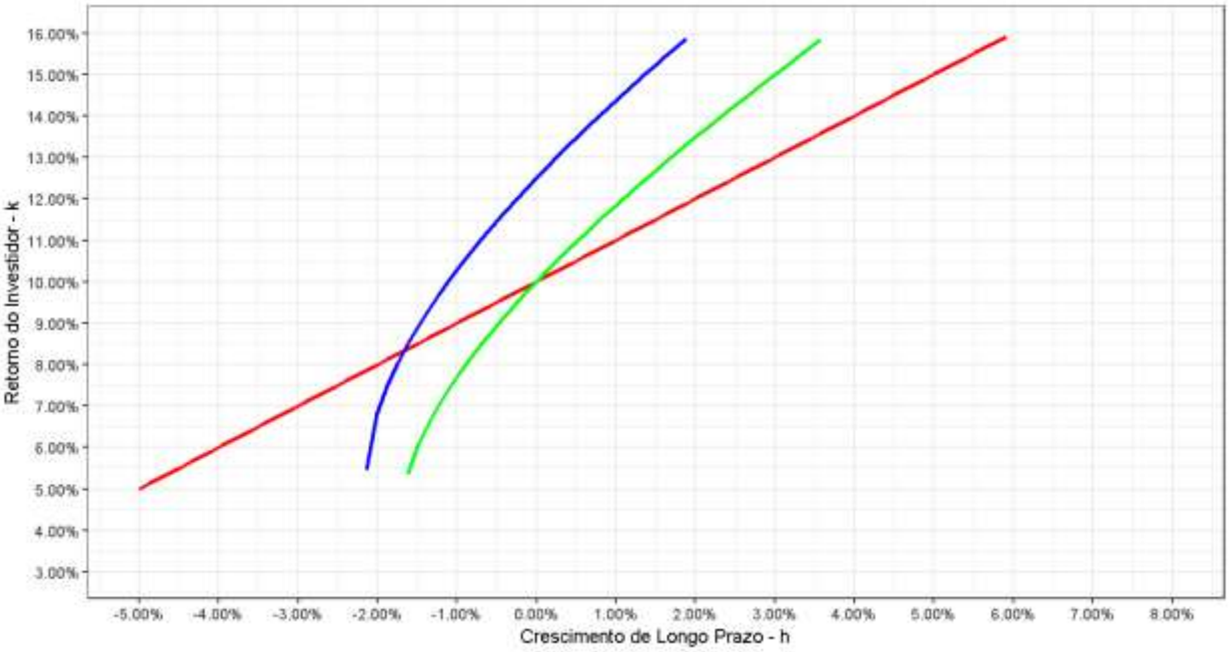
Figura 4 – Retorno do Investidor versus Crescimento do Lajir




Fonte: Elaborada pelo autor.

Para exemplificar, na Figura 5, a linha azul em $\theta = 0{,}5$ .e $\alpha = 8$.

Figura 5 – Retorno do Investidor versus Crescimento do Lajir




Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma característica sobre essas curvas é que elas são limitadas. Uma vez que a equação

$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta)}{2\alpha(1-\theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1-\theta)} + \frac{(-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta))^2}{4\alpha^2(1-\theta)^2}}$$

tem um termo que é uma raiz quadrada, quando, $\frac{h\theta}{\alpha(1-\theta)}$ é negativo e, em módulo, maior que $\frac{(-\theta+1+h\alpha(1-\theta))^2}{4\alpha^2(1-\theta)^2}$, não se obtém nenhum resultado, pois o valor dentro da raiz quadrada é negativo. Isso acontece porque se assume uma perpetuidade com decrescimento, o que é uma impossibilidade. A partir do momento em que a taxa de crescimento do lucro antes de juros, h, for negativa, é necessário assumir que em algum momento a empresa não vai conseguir mais honrar seus compromissos e irá à falência.

Por isso, é preciso construir a segunda parte das curvas de retorno por crescimento, assumindo uma progressão geométrica finita para valores $h < 0$.

Mas, se a progressão será finita, quantos termos haverá em cada caso?

Assuma-se que a empresa existirá e distribuirá dividendos aos acionistas enquanto o lucro antes de juros for maior que o juros. Ou seja, até o momento em que:

$$L_i > J$$

Em que $L_i = L_1(1+h)^i$ e, como definido anteriormente, $J = \theta L_1$:

$$L_1(1+h)^i > \theta L_1$$

Dividindo ambos os lados por $L_1$.

$$(1+h)^i > \theta$$

Assumindo uma igualdade, é possível saber exatamente a quantidade de períodos de fluxo de caixa positivo que restariam à empresa:

$$\log_{(1+h)} \theta = i$$

Agora que se sabe o número de períodos, pode-se calcular a soma da progressão geométrica finita, em que:

$$P_0 = \sum_{i}^{\log_{(1+h)}\theta} \frac{L_i - J}{(1+k)^i}$$

$$P_0 = \sum_{i}^{\log_{(1+h)}\theta} \frac{L_1(1+h)^i - J}{(1+k)^i}$$

$$P_0 = \sum_{i}^{\log_{(1+h)}\theta} \frac{L_1(1+h)^i}{(1+k)^i} + \sum_{i}^{\log_{(1+h)}\theta} \frac{-J}{(1+k)^i}$$

Atribuindo a soma da progressão geométrica finita:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$P_0 = \frac{L_1(1+h)\left(1-\left(\frac{(1+h)}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}\right)}{1-\frac{(1+h)}{(1+k)}} - \frac{J(1-\left(\frac{1}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}}{1-\frac{1}{(1+k)}}$$

Dividindo ambos os lados por $L_1$ :

$$\frac{P_0}{L_1} = \frac{L_1}{L_1}\frac{(1+h)\left(1-\left(\frac{(1+h)}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}\right)}{1-\frac{(1+h)}{(1+k)}} - \frac{J}{L_1}\frac{1-\left(\frac{1}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}}{1-\frac{1}{(1+k)}}$$

Substituindo $J = \theta L_1$ e $P_o = \alpha(1-\theta)L_1$ obtém-se:

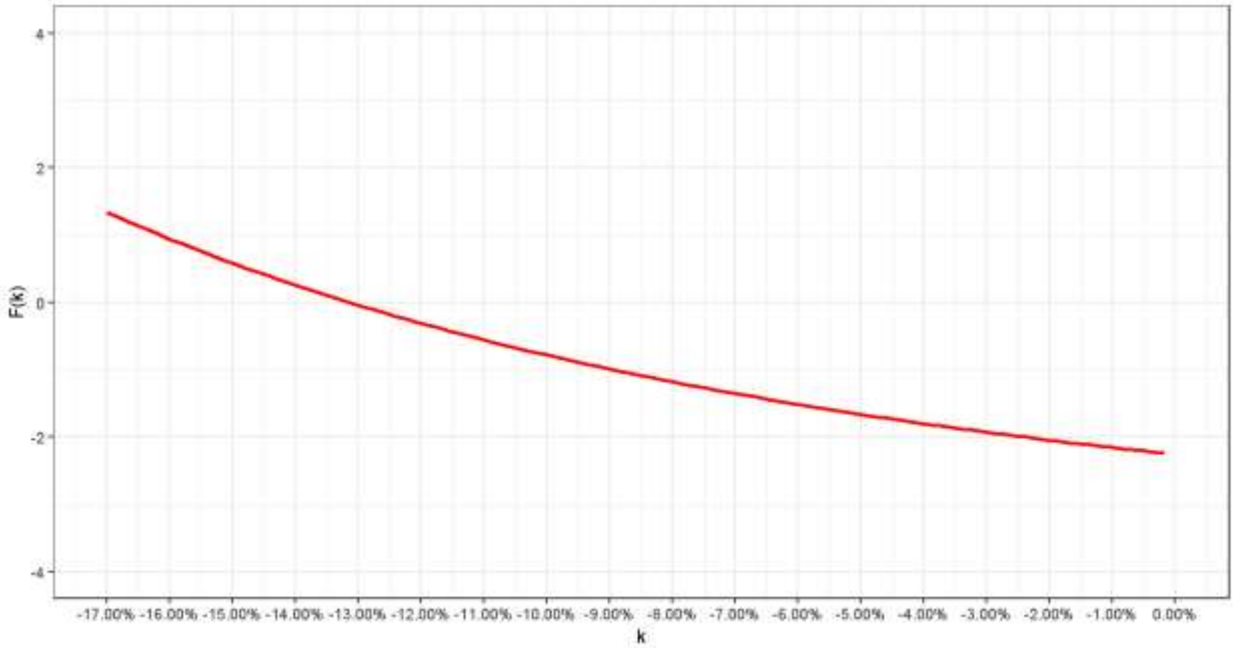
$$\alpha(1-\theta) = \frac{(1+h)\left(1-\left(\frac{(1+h)}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}\right)}{1-\frac{(1+h)}{(1+k)}} - \theta\,\frac{1-\left(\frac{1}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}}{1-\frac{1}{(1+k)}}$$

Provavelmente, não é possível isolar o $k$ dessa equação. Porém, pode-se encontrar a raiz da função,

$$F(k) = -\alpha(1-\theta) + \frac{(1+h)\left(1-\left(\frac{(1+h)}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}\right)}{1-\frac{(1+h)}{(1+k)}} - \theta\frac{1-\left(\frac{1}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}}{1-\frac{1}{(1+k)}}$$

para $\alpha, \theta$ e $h$ conhecidos. Por exemplo, assumindo $\alpha = 10, \theta = 0{,}5\ e\ h = -5\%$, é possível plotar o gráfico:

Figura 6 – Raiz da Função F(k)

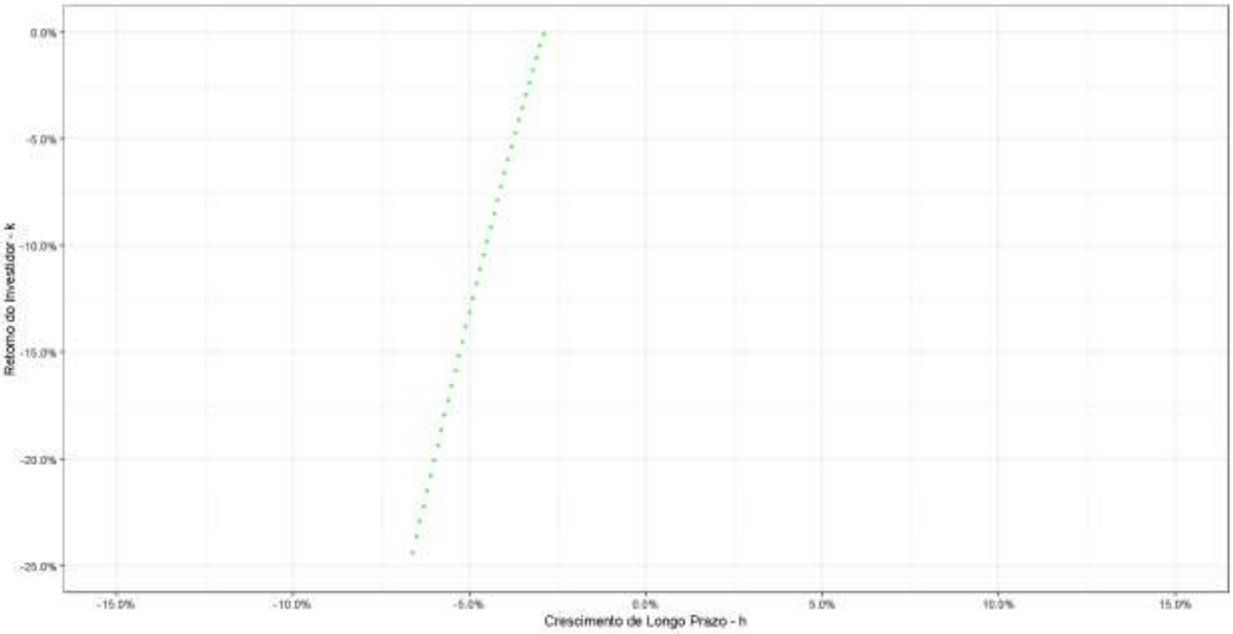



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe-se que a raiz da função é $k = -13{,}14\%$. Isso significa que, para a empresa que tem metade do seu lucro antes de juros comprometido com o pagamento de juros, e cujos investidores pagaram o múltiplo de dez vezes o lucro por ação, no cenário em que o crescimento do lucro antes de juros for – 5% ao ano em longo prazo, seus investidores terão o retorno negativo de 13,14% ao ano.

Agora é possível plotar num gráfico as raízes $k$, para cada $h$, com $\alpha = 10, \theta = 0{,}5$, por exemplo:

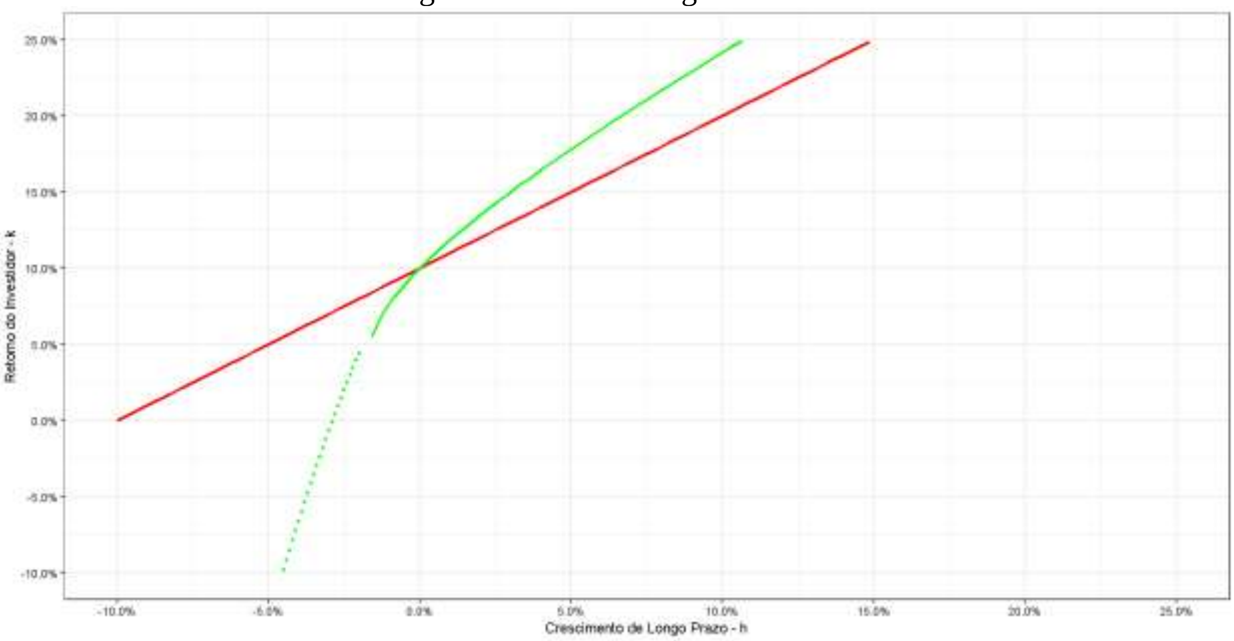
Figura 7 – Retorno do investidor em Crescimentos Negativos




Fonte: Elaborada pelo autor.

E se se une o gráfico da Figura 7 ao gráfico da Figura 1:

Figura 8 – Fusão da Figura 7 e 1

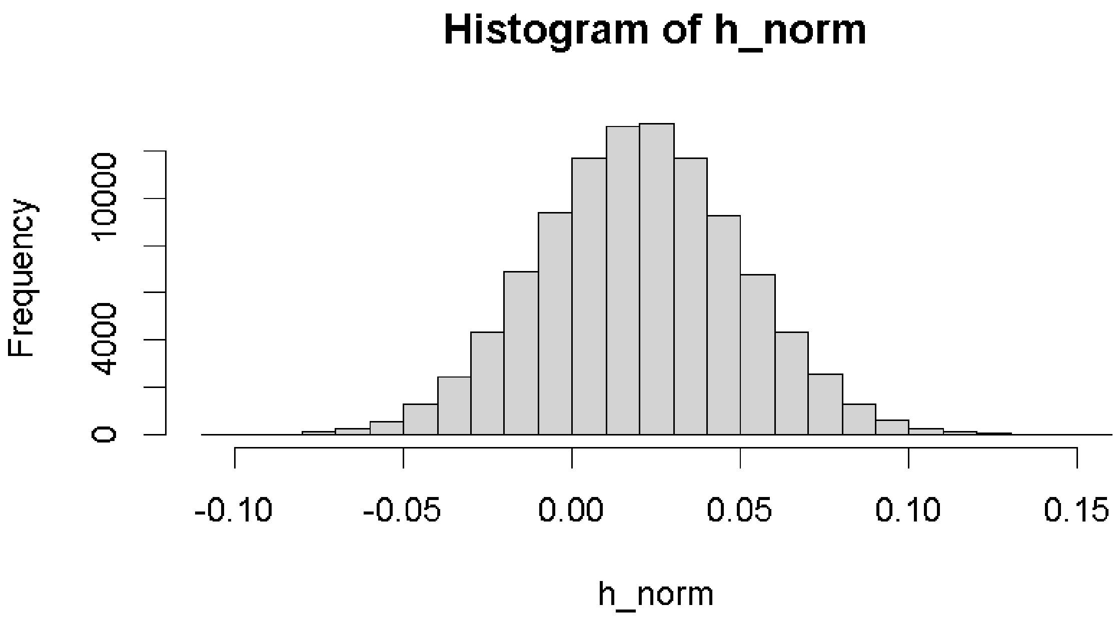



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos, com isso uma função não linear, mas que é bem-comportada. Com isso se sabe qual será o retorno do investidor para cada cenário de h. Assuma-se que h tem uma distribuição normal. Poder-se-ia assumir qualquer distribuição, mas, para avançar, por ora, tome-se uma distribuição normal com valor esperado e desvio padrão conhecidos.

Na Figura 9 é apresentado o histograma de uma simulação com 100 mil pontos para uma distribuição de h com valor esperado de 2% e desvio padrão de 3%.

Figura 9 – Histograma das Distribuições de crescimento




Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, para cada ponto de h dessa simulação é possível encontrar um resultado de k (retorno do investidor). Assumindo que para h>0, k é definido por:

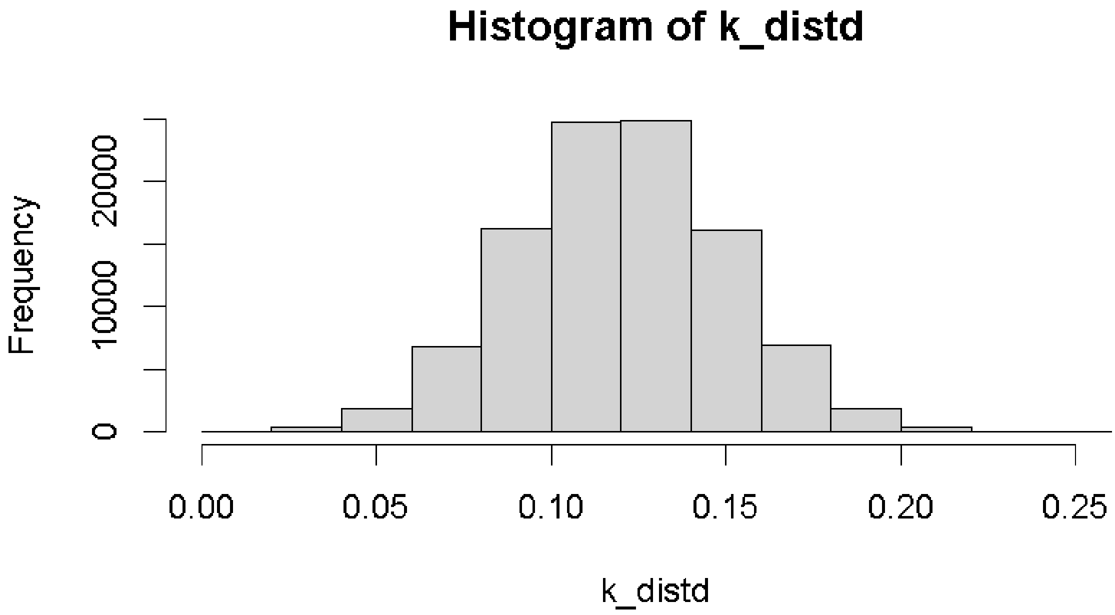
$$k = \frac{-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta)}{2\alpha(1-\theta)} + \sqrt{\frac{h\theta}{\alpha(1-\theta)} + \frac{(-\theta + 1 + h\alpha(1-\theta))^2}{4\alpha^2(1-\theta)^2}}$$

E para h<0, k é definido como a raiz da equação:

$$F(k) = -\alpha(1-\theta) + \frac{(1+h)\left(1 - \left(\frac{(1+h)}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}\right)}{1 - \frac{(1+h)}{(1+k)}} - \theta \frac{1 - \left(\frac{1}{(1+k)}\right)^{\log_{(1+h)}\theta}}{1 - \frac{1}{(1+k)}}$$

Na Figura 10 é apresentado o histograma dos k correspondentes aos h's criados na simulação da Figura 9, para uma empresa sem alavancagem, isto é, com $\theta = 0$ (para o exemplo $\alpha = 10$).

Figura 10 – Histograma dos Retornos

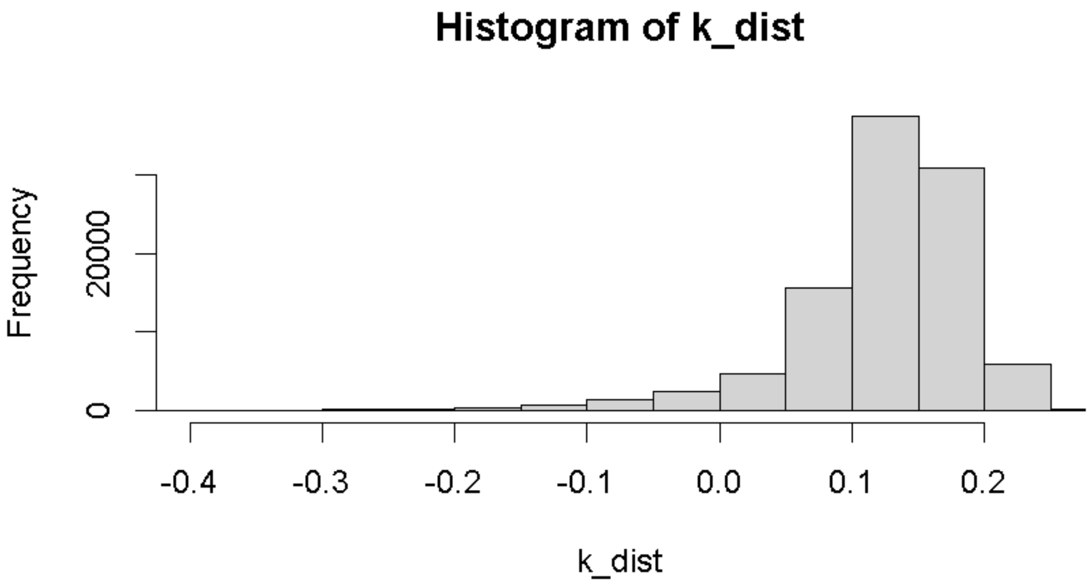



Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor esperado de k fica em 12% e seu desvio padrão em 3%, o mesmo desvio padrão atribuído para a distribuição de h.

Então, para uma empresa com $\theta = 0{,}5$, tem-se o seguinte histograma:

Figura 11 – Histograma de Retornos com Alavancagem

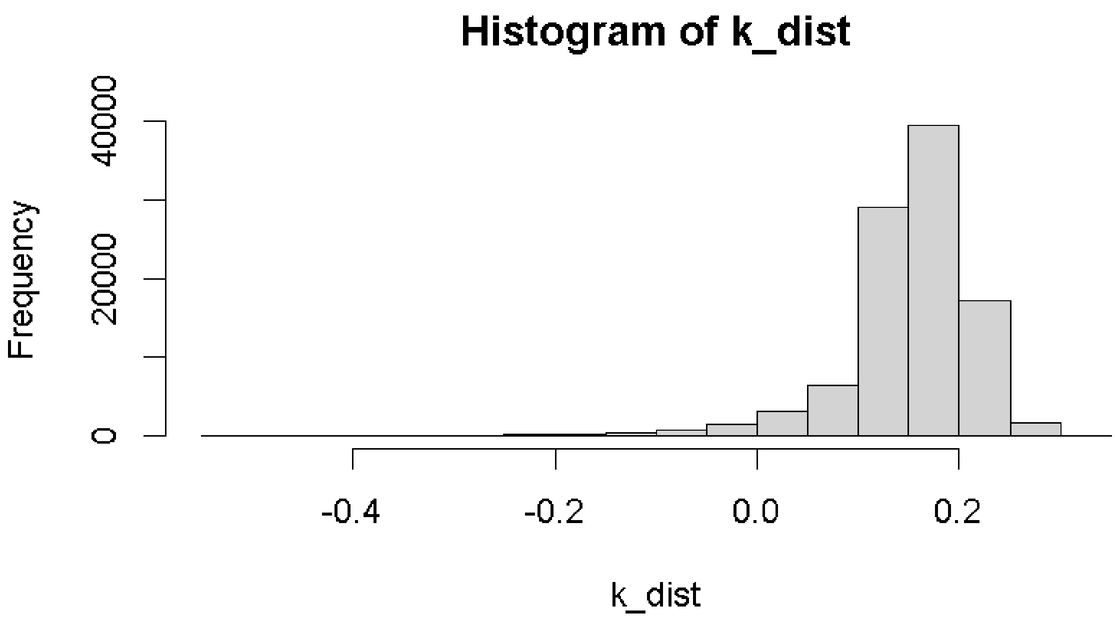



Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor esperado de k fica em 13,47%, e seu desvio padrão em 6,73%, desvio padrão maior, quase o dobro, daquele atribuído à distribuição de h. Ou seja, quando se adiciona a alavancagem financeira, a distribuição dos retornos, para uma mesma distribuição de h, fica mais volátil.

Suponha-se então que os investidores sabem disso, e, com isso em mente, não estariam dispostos a pagar um $\alpha = 10$ em uma empresa cujo $\theta = 0{,}5$. Imagine-se que eles estariam dispostos a pagar $\alpha = 8$. Nesse caso, o que acontece com o histograma e o desvio padrão de k?

Figura 12 – Histograma da Distribuição de Retornos com $\alpha = 8$




Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor esperado de k fica em 16,04 % e seu desvio padrão em 6,45%, desvio padrão menor que o anterior, em que os investidores pagaram $\alpha = 10$ . Ou seja, quando o investidor atribui um desconto devido à alavancagem financeira, além de aumentar o retorno, a distribuição dos retornos, para uma mesma distribuição de h, fica menos volátil.

Até aqui descobriu-se que para cada valor esperado de h e sua distribuição haverá diversos conjuntos de $\theta$ e $\alpha$, que retornarão um novo k esperado e seu desvio padrão.

Portanto, será possível montar uma tabela, de $\theta$ x $\alpha$, que em cada quadrante indica o novo k, que é a mediana de sua distribuição e o respectivo desvio padrão de k.

Tabela 1 – Retorno e Desvio padrão para parâmetros de $\theta$ e $\alpha$

| **$\theta$/ $\alpha$** | **13** | | **12** | | **11** | | **10** | | **9** | | **8** | | **7** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,2** | 10.1% | 3.8% | 10.7% | 3.8% | 11.5% | 3.7% | 12.4% | 3.7% | 13.5% | 3.6% | 14.9% | 3.6% | 16.7% | 3.5% |
| **0,3** | 10.3% | 4.5% | 11.0% | 4.4% | 11.7% | 4.4% | 12.7% | 4.3% | 13.8% | 4.3% | 15.2% | 4.2% | 17.0% | 4.1% |
| **0,4** | 10.6% | 5.5% | 11.3% | 5.4% | 12.1% | 5.3% | 13.0% | 5.3% | 14.1% | 5.2% | 15.6% | 5.1% | 17.4% | 4.9% |
| **0,5** | 11.1% | 6.9% | 11.7% | 6.9% | 12.5% | 6.8% | 13.5% | 6.7% | 14.6% | 6.6% | 16.0% | 6.4% | 17.9% | 6.3% |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 1, nas colunas, constam valores de $\alpha$, e nas linhas valores de $\theta$. Para cada valor de $\alpha$ e $\theta$ a tabela retorna um valor esperado de k e seu desvio padrão. Por exemplo, no primeiro quadrante, tem-se que, para $\theta = 0{,}2$ e $\alpha = 13$, o retorno esperado k é 10,1% ao ano e o desvio padrão desse retorno é 3,8%.

# 4 O PROBLEMA DA FIRMA E O PROBLEMA DO INVESTIDOR

## 4.1 O problema da firma

Quando se tomam decisões de estrutura de capital, os gestores de uma empresa devem buscar maximizar o valor da empresa. Sabe-se que o valor de uma empresa é determinado pela soma do seu capital próprio ao montante de dívida:

$$V = Capital\ Próprio + Dívida$$

Além disso, é notório que o valor do capital próprio é:

$$P_o = \alpha(1-\theta)L$$

E que o valor da dívida em termos do juros é:

$$D_o = \frac{J}{i}$$

Em que $i$ é a taxa de juros cobrada sobre o valor total da dívida. Tem-se, portanto:

$$V = \alpha(1-\theta)L + \frac{J}{i}$$

E assumiu-se anteriormente que $J = \theta L$. Portanto:

$$V = \alpha(1-\theta)L + \frac{\theta L}{i}$$

Se os gestores da empresa estão maximizando o valor da firma, então eles estariam maximizando:

$$\max_{\theta} \alpha(1-\theta)L + \frac{\theta L}{i}$$

Como $L$ é uma constante, então a gestão da firma está se maximizando da seguinte forma:

$$\max_{\theta} \alpha(1-\theta) + \frac{\theta}{i}$$

## 4.2 O problema do investidor

Muito se pode dizer ou pensar sobre como funciona o processo de tomada de decisão de um investidor. O único consenso é que investidores gostam de retornos mais altos e desgostam de risco, que na maior parte dos modelos é mensurado por meio da volatilidade.

O modelo desenvolvido no capítulo anterior tem como resultado, ao determinar $\alpha$ e $\theta$, o retorno esperado e o desvio padrão do retorno esperado, respectivamente uma medida de retorno e uma medida de risco.

Então, basta assumir uma função-utilidade do investidor, da mesma forma que modelos microeconômicos assumem funções-utilidade para o consumidor a partir de uma cesta de bens, e a função utilidade do investidor deve ser resultado do retorno esperado e da volatilidade do retorno esperado, desde que seja diretamente proporcional ao retorno esperado e inversamente proporcional à volatilidade do retorno esperado.

Por exemplo, pode-se definir que a utilidade do investidor seja:

$$U = \frac{(100 \times k)^{0,5}}{(100 \times \sigma)^{0,5}}$$

Multiplicou-se $k$ e $\sigma$ por cem para facilitar a utilização de expoentes. Dessa forma, quanto maior o valor esperado de $k$ e menor o desvio padrão do retorno esperado, $\sigma$, maior será a utilidade do investidor. Poder-se-ia aumentar ou diminuir os expoentes de ambos os lados da fração quando se quisesse simular investidores mais ou menos avessos a riscos. Também se poderia utilizar outros formatos de função-utilidade, desde que mantendo a proporcionalidade direta entre a utilidade e o retorno esperado, e a proporcionalidade inversa entre utilidade e volatilidade. Para concluir o raciocínio, assuma-se essa função como função-utilidade.

Para exemplificar, se o retorno esperado for de 12%, e o desvio padrão de 3%, o investidor terá utilidade de:

$$U_a = \frac{(100 \times 0,12)^{0,5}}{(100 \times 0,03)^{0,5}} = \frac{(12)^{0,5}}{(3)^{0,5}} = 2$$

Se o retorno esperado for de 15%, e o desvio padrão de 3%, o investidor terá utilidade de:

$$U_b = \frac{(100 \times 0{,}15)^{0{,}5}}{(100 \times 0{,}03)^{0{,}5}} = \frac{(15)^{0{,}5}}{(3)^{0{,}5}} = 2{,}23$$

Se o retorno esperado for de 15%, e o desvio padrão de 2%, o investidor terá utilidade de:

$$U_c = \frac{(100 \times 0{,}15)^{0{,}5}}{(100 \times 0{,}02)^{0{,}5}} = \frac{(15)^{0{,}5}}{(2)^{0{,}5}} = 2{,}73$$

Se o retorno esperado for de 15%, e o desvio padrão de 4%, o investidor terá utilidade de:

$$U_d = \frac{(100 \times 0{,}15)^{0{,}5}}{(100 \times 0{,}04)^{0{,}5}} = \frac{(15)^{0{,}5}}{(4)^{0{,}5}} = 1{,}93$$

Dessa forma, pode-se ordenar as preferências do investidor da seguinte forma:

$$U_c > U_b > U_a > U_d$$

Ou seja, de acordo com o modelo de tomada de decisão teórico assumido, o investidor irá preferir esperar receber 12% de retorno ao ano com desvio padrão de 3% do que esperar receber 15% de retorno ao ano com desvio padrão de 4%, o que não seria óbvio sem a função utilidade.

Caso o pesquisador queira observar resultados assumindo um investidor menos avesso a riscos, ele poderia tomar como uma função-utilidade:

$$U = \frac{(100 \times k)^{0{,}6}}{(100 \times \sigma)^{0{,}4}}$$

Com esta função-utilidade:

$$U'_a = \frac{(100 \times 0{,}12)^{0{,}6}}{(100 \times 0{,}03)^{0{,}4}} = \frac{(12)^{0{,}6}}{(3)^{0{,}4}} = 2{,}86$$

$$U'_d = \frac{(100 \times 0{,}15)^{0{,}6}}{(100 \times 0{,}04)^{0{,}4}} = \frac{(15)^{0{,}6}}{(4)^{0{,}4}} = 2{,}91$$

Dessa forma, o investidor menos avesso ao risco preferiria esperar receber 15% de retorno ao ano, com volatilidade de 4%, a esperar receber 12% de retorno ao ano, com volatilidade de 3%.

### 4.3 Demonstração de Existência de Equilíbrio para Futuras Investigações

Se aplicarmos o problema da firma e o problema do investidor desenvolvidos nos capítulos 4.1 e 4.2, respectivamente, à Tabela 1, exposta no capítulo 3.1, que mostra os retornos e desvio-padrão para diferentes parâmetros de $\theta$ e $\alpha$, podemos obter uma matriz de utilidades, da firma e do investidor.

Por exemplo, se observarmos os valores de retorno e desvio padrão da Tabela 1, para valores de $\theta = 0{,}3$ e $\alpha = 10$. Podemos obter a utilidade da firma na seguinte formula, descrita na seção 4.1, assumindo que os juros da dívida, $i = 5\%$:

$$\alpha(1-\theta) + \frac{\theta}{i} = 10(1-0{,}3) + \frac{0{,}3}{0{,}05} = 13$$

Ao mesmo tempo, observando a Tabela 1, vemos que para os parâmetros de $\theta = 0{,}3$ e $\alpha = 10$, obtemos, através das simulações, retorno esperado de 12,7% e desvio padrão de 4,3%. Substituindo esses valores na Utilidade do Investidor, obtemos:

$$U = \frac{(100 \times k)^{0{,}5}}{(100 \times \sigma)^{0{,}5}} = \frac{(100 \times 12{,}7\%)^{0{,}5}}{(100 \times 4{,}3\%)^{0{,}5}} = 1{,}70$$

O mesmo processo pode ser feito em todos os pontos da Tabela 1 para chegar em uma matriz de utilidades da firma e do investidor:

Tabela 2 – Utilidade da Firma e do investidor para parâmetros de $\theta$ e $\alpha$

| **$\theta$/ $\alpha$** | **13** | | **12** | | **11** | | **10** | | **9** | | **8** | | **7** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,2** | 1.62 | 14.40 | 1.68 | 13.60 | 1.74 | 12.80 | 1.82 | 12.00 | 1.90 | 11.20 | 2.00 | 10.40 | 2.13 | 9.60 |
| **0,3** | 1.52 | 15.10 | 1.57 | 14.40 | 1.63 | 13.70 | 1.70 | 13.00 | 1.78 | 12.30 | 1.88 | 11.60 | 2.00 | 10.90 |
| **0,4** | 1.40 | 15.80 | 1.45 | 15.20 | 1.50 | 14.60 | 1.57 | 14.00 | 1.65 | 13.40 | 1.74 | 12.80 | 1.85 | 12.20 |
| **0,5** | 1.26 | 16.50 | 13.1 | 16.00 | 1.36 | 15.50 | 1.42 | 15.00 | 1.49 | 14.50 | 1.57 | 14.00 | 1.68 | 13.50 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 2, acima, observamos as utilidades, tanto para o investidor quanto para a Firma em cada quadrante de $\theta$ e $\alpha$. Observamos o exemplo calculado nesta seção para os parâmetros de $\theta = 0{,}3$ e $\alpha = 10$, em que a utilidade do investidor é 1,70 e para a firma, 13,00.

Por exemplo, se quisermos saber qual é a utilidade do investidor e da firma para parâmetros de $\theta = 0{,}4$ e $\alpha = 9$, basta buscar na tabela, encontraremos, 1,65 de utilidade para o investidor e 13,40 para a firma.

Se observarmos bem a Tabela 2, vamos observar que diferentes conjuntos de parâmetros podem gerar níveis iguais de utilidade para investidores e firmas. Por exemplo, para $\theta = 0{,}4$ e $\alpha = 8$, temos utilidade do investidor 1,74 e utilidade para a firma de 12,80, enquanto que para $\theta = 0{,}2$ e $\alpha = 11$ também temos utilidade do investidor de 1,74 e utilidade para firma de 12,80.

Também podemos observar conjuntos de parâmetros que são superiores para investidores e firmas do que outros conjuntos de parâmetros. Por exemplo, para $\theta = 0{,}5$ e $\alpha = 8$, temos utilidade do investidor 1,57 e utilidade para a firma de 14,40, enquanto que para $\theta = 0{,}2$ e $\alpha = 13$, temos utilidade do investidor 1,62 e utilidade para a firma de 14,40. Quando há resultados que são melhores para ambos podemos encontrar ótimos de pareto também o que indica que existem resultado(s) de equilíbrio.

Estas simulações nos permitem chegar a conclusão de que é possível otimizar a estrutura de capital, quando as restrições de crédito são diferentes entre investidores e firmas.

# 5 CONCLUSÃO

O ponto de partida desta dissertação de mestrado foi uma revisão bibliográfica sobre custo de capital próprio e alavancagem financeira. Na revisão, foram identificadas as origens dos estudos sobre o tema que partem das proposições de Modigliani-Miller, passam pela formulação do CAPM, pelas fórmulas de alavancagem dos betas de Hamada, Milles-Ezzel e Harris-Pringle e culminando na metodologia chamada de CCA – *Comparable Company Analisys.*

Na segunda parte, as premissas utilizadas por Modigliani e Miller são repetidas numa revisitação do modelo de Gordon de dividendos descontados, onde alterações na fórmula foram realizadas para atribuir um crescimento em cima da geração de caixa da empresa ao invés de um simples crescimento dos dividendos. Através de formulações algébricas e simulações, concluímos que a proposição de Modigliani-Miller sobre a irrelevância da estrutura de capital para o valor da firma nos leva a cenários em que os investidores tomam decisões irracionais, apontando inconsistências na formulação da proposição.

Na terceira parte é proposto um novo modelo de precificação da alavancagem financeira, a partir da modificação do modelo de Gordon, utilizando formulações algébricas e simulações o modelo se mostrou coerente com suas premissas.

Com o novo modelo de precificação de alavancagem financeira, na quarta seção, definimos um investidor e uma firma hipotéticos e demonstramos que este novo modelo pode ser extrapolado para um problema de microeconomia, onde existem equilíbrios que podem apontar estruturas ótimas de capital que maximizam o valor da firma e maximizam a utilidade do investidor em um equilíbrio parcial entre esses agentes econômicos.

Para pesquisas futuras, o problema do investidor em especial deveria ser formalizado de forma dinâmica. Isto é, ao invés do investidor tentar maximizar sua utilidade em apenas um período discreto, que o investidor escolhesse um portfólio (ou cesta de ativos com pesos distintos) que maximiza o valor esperado da utilidade ao longo do tempo de sua vida (ou maximizar os fluxos de utilidade ao longo do tempo), por exemplo, descontando por uma taxa de impaciência. Sem assumir nenhum valor específico para os expoentes (elasticidades de substituição), seria possível derivar um resultado geral e abrir a possibilidade de explorar as combinações paramétricas que possibilitam encontrar estruturas ótimas de capital.

**REFERÊNCIAS**

BOWMAN, Robert G.; BUSH, Susan R. Using comparable companies to estimate the betas of private companies. *Journal of Applied Finance*, Forthcoming, 2007.

BLACK, F.; JENSEN, M. C.; SCHOLES, M. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.

BREALEY, Richard A. et al. Brealey, Myers, and Allen on valuation, capital structure, and agency issues. *Journal of Applied Corporate Finance*, v. 20, n. 4, p. 49-57, 2008.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v. 116, n. 1, p. 1-22, 2015.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v. 33., n. 1, p. 3-56, 1993.

FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of Political Economy*, Chicago, v. 81., n. 3, p. 607-636, 1973.

FRENCH, C. W. The Treynor capital asset pricing model. *Journal of Investment Management*, Amsterdam, v. 1, n. 2 , 60-72, 2003.

GORDON, M. J.; SHAPIRO, E. Capital equipment analysis: the required rate of profit. *Management science*, v. 3, n.1, p. 102-110, 1956.

GORDON, M. J. Dividends, earnings, and stock prices. *The Review of Economics and Statistics*, Cambridge, p. 99-105, 1959.

HARRIS, Robert S.; PRINGLE, John J. Risk-adjusted discount rates-extensions from the average-risk case. *Journal of Financial Research*, v. 8, n. 3, p. 237-244, 1985.

HAMADA, Robert S. The effect of the firm's capital structure on the systematic risk of common stocks. The journal of finance, v. 27, n. 2, p. 435-452, 1972.

JENSEN, M. C., BLACK, F.; SCHOLES, M. S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. *Studies in the Theory of Capital Markets*, Westport, 1972.

LINTNER, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *The Journal of Finance*, Hoboken, v. 20, n. 4, p. 587-615, 1965.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Hoboken, v. 7 p. 77-91, 1952.

MILES, James A.; EZZELL, John R. The weighted average cost of capital, perfect capital markets, and project life: a clarification. *Journal of financial and quantitative analysis*, v. 15, n. 3, p. 719-730, 1980.

MILLER, M. H. The history of finance. *Journal of Portfolio Management*, New York, v. 25, p. 95-101, 1999.

MODIGLIANI, F.; MILLER, M. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *The American Economic Review*, Nashville, v. 48, n. 3, p. 261-297, 1958.

MYERS, Stewart C. et al. Still searching for optimal capital structure. *Are the distinctions between debt and equity disappearing*, p. 80-95, 1989.

PERLSTEIN, S. Beware the 'mother of all credit bubbles'. *Washington Post*, Washington, DC, 8 jun. 2018, p. 5.

PEROLD, A. The capital asset pricing model. *Journal of Economic Perspectives*, Nashville, v. 18, n. 3, p. 3-24, 2004.

PRATT, Shannon P.; GRABOWSKI, Roger J. *Cost of capital*. John Wiley & Sons, 2008.

ROLL, R. A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory. *Journal of financial economics*, v. 4, n.2, p. 129-176, 1977.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. The Journal of Finance, Hoboken, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

TREYNOR, J. Toward a theory of market value of risky assets. [S. l.: s. n.], 1962.

YOSHINO, J.; SANTOS, E. B. Is CAPM dead or alive in the Brazilian equity market? Review of Applied Economy, Amsterdam, v. 5, n. 1-2, p. 127, 2009.