"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

UM MODELO PARA O CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE *DEFAULT* EMPREGANDO ÁRVORES BINOMIAIS

Rafael Paschoarelli Veiga

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato

SÃO PAULO
2006

Reitor da Universidade de São Paulo
Profa. Dra. Suely Vilela Sampaio

Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Profa. Dra. Maria Tereza Leme Fleury

Chefe do Departamento de Administração
Prof. Dr. Isak Krugliankas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

UM MODELO PARA O CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE *DEFAULT* EMPREGANDO ÁRVORES BINOMIAIS

Rafael Paschoarelli Veiga

Tese apresentada ao Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Doutor em Administração.

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato

SÃO PAULO
2006

Tese defendida e aprovada, em 08.03.2006, no Programa de Pós-Graduação em Administração. pela seguinte comissão julgadora:
Prof. Dr. José Roberto Securato
Prof. Dr. José Roberto Ferreira Savóia
Prof. Dr. André Luiz Oda
Prof. Dr. Edson Fereira de Oliveira
Prof. Dr. Eduardo Kazuo Kayo

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Veiga, Rafael Paschoarelli
Um modelo para o cálculo da probabilidade de default empregando árvores binomiais / Rafael Paschoarelli Veiga. – São Paulo, 2006.
202 p.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2006
Bibliografia

1. Administração financeira 2. Opções financeiras 3. Crédito 4. Risco I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. II. Título.

CDD – 658.15

A minha esposa Lia e minhas filhas Giulia, Luiza e Fernanda, pelo amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida.

A minha esposa Lia e a minhas filhas que tiveram muita paciência nos inúmeros momentos em que permaneci recluso em meu escritório para tornar este trabalho possível.

A meus pais Eduardo e Deyze pelo amor e valores transmitidos.

Aos meus tios Alvacyr e Apparecida que me acolheram durante o período em que fiz graduação na POLI-USP. Sem eles, nada disso teria sido possível.

Prof. Doutor Rubens Janny Teixeira que me incentivou a trilhar a carreira acadêmica.

Prof. Doutor José Roberto Securato, meu orientador, que é exemplo no que tange à habilidade de transmitir conceitos não triviais de maneira simples e bem humorada.

Eu gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Almir Ferreira de Sousa, Prof. Dr. Rubens Famá, Prof. Dr. José Roberto Savoia, Prof. Dr. Roy Martelanc, Prof. Dr. Carlos Eduardo de Mori Luporini, Prof. Dr. Wadico Bucchi, Prof. Dr. Keyler Carvalho Rocha, Prof. Dr. Edson Ferreira de Oliveira, Profa. Dra. Celma de Oliveira, Prof. Dr. André Luiz Oda, Prof. Dr. Junio Fuentes, Prof. Dr. José Siqueira, Prof. Dr. Cláudio Felisoni de Angelo. Todas estas pessoas atuaram em alguma etapa do meu desenvolvimento acadêmico e graças a elas a defesa do doutorado se tornou possível.

Queria também agradecer aos grandes amigos José Carlos de Souza Filho, Gustavo Cerbasi, José Carlos Luxo e Ricardo Humberto Rocha.

RESUMO

Os modelos de risco de crédito de empresas podem ser subdivididos em estruturais e na forma reduzida.

Os elementos relevantes do risco de crédito nos modelos estruturais incluem a taxa de *default* e a de recuperação, sendo tais grandezas funções das características estruturais da firma, a saber: volatilidade dos ativos (risco do negócio) e alavancagem.

Por outro lado, os modelos na forma reduzida não condicionam o *default* ao valor da firma tampouco necessitam do cálculo de parâmetros relacionado ao o valor da firma. Os modelos na forma reduzida introduzem separadamente premissas explícitas sobre o comportamento da probabilidade de *default* e da taxa de recuperação, sendo que estas variáveis são modeladas independentemente das características estruturais da firma como volatilidade dos ativos e alavancagem.

O presente estudo pretende contribuir com a literatura sobre modelagem do risco de crédito ao desenvolver uma variação do modelo estrutural de Merton (1974), empregando árvores binomiais no lugar do modelo de Black & Scholes para o cálculo da probabilidade de *default*.

O trabalho de Merton (1974) assumia a premissa simplificadora de dívida concentrada em data única. Ao concentrar a dívida em data única e relevar a probabilidade *default* antes do vencimento, Merton (1974) pode empregar como ferramenta a modelagem de Black e Scholes (1973).

Ao contrário de Merton (1974), a metodologia proposta nesta tese permite que o fluxo da dívida seja considerado tal como é, sem necessitar de nenhuma simplificação no valor e nas datas dos diversos compromissos de pagamento da empresa.

Sem a hipótese simplificadora de Merton, não se empregou o modelo de Black e Scholes (1973) para o cálculo da probabilidade de *default*. Utilizou-se das árvores binomiais que, com

adequações, fornecem a probabilidade de *default* para qualquer instante de tempo. Nos estudos de caso realizados, calculou-se a probabilidade de *default* associada a cada data de vencimento de principal obtendo, desta forma, a probabilidade de *default* das empresas consideradas nos anos 1, 2, 3 e assim por diante.

Empregando o modelo proposto nesta tese, também foi calculada a probabilidade de *default* com a hipótese simplificadora de concentrar os fluxos da dívida em data única.

ABSTRACT

Credit risk models are divided in two classes: structural models and reduced form models.

The most important elements pertaining to structural credit models include default rate and recovery rate. These variables depend on structural traits of the firm such as assets volatility and leverage.

This thesis intends to contribute with the credit risk modeling literature by presenting a variation of the classic Merton's (1974) structural model. This variation deploys binomial trees instead of Black & Scholes (1973) closed formula in order to calculate the default probability.

Even though Merton's idea has proved to be one of the most brilliant insights regarding credit risk, his assumptions were unrealistic: to exploit the analogy of corporate equity (and ultimately debt) with options, Merton largely restricted himself to zero-coupon debt. With zero-coupon bonds, the default boundary is zero until the bond matures, and default never occurs prior to the bond's maturity. At maturity, the firm defaults if asset value is less than the bond's principal value.

By deploying binomial trees, the methodology presented in this thesis allows default probability calculation without any simplification or assumption concerning how firm's debt is spread over time.

So, the methodology proposed by us enhances Merton's (1974) capabilities because it's able to assign a default probability to each scheduled payment. In order to accomplish this task, binomial trees are used instead of Black and Scholes (1973).

SUMÀRIO

Capítulo 1: Introdução 11

1.1. Situação Problema 11

1.2. Motivação 14

1.3. Objetivo do Trabalho 17

1.4. Contribuição do Trabalho e Originalidade 17

1.5. Metodologia do Trabalho 18

1.6. Descrição dos Capítulos 19

Capítulo 2: MODELOS DE MENSURAÇÃO DE RISCO DE CRÉDITO CORPORATIVO 21

2.1. Introdução 21

2.2. Risco, Incerteza e outros Aspectos de Caráter Geral 21

2.3. Risco de Crédito 24

2.4. Insolvência e a Legislação Brasileira 25

2.5. A Insolvência 26

2.6. Primeiros Trabalhos sobre Insolvência: Fitzpatrick (1932), Beaver (1966) e Altman (1968) 28

2.7. *Default* e Inadimplência 33

2.8. O Conceito de *Rating* 34

2.9. Taxa de *Default* e Probabilidade de *Default* 37

2.10. *Spread* de *default* e o *Spread* de Crédito 40

2.11. Probabilidade de *default*, *default intensity* e *hazard rate* 42

2.12. A probabilidade de *default* e a perda esperada caso ocorra *default* 43

2.13. Taxa de Recuperação ou *Recovery Rate* e LGD 45

2.14. Probabilidade de *default* assumindo Taxa de Recuperação igual a zero 49

2.15. Probabilidade de *default* assumindo Taxa de Recuperação diferente de zero: Modelo Simplificado 51

2.16. Probabilidade de *Default* assumindo Taxa de Recuperação Diferente de Zero: Modelo com Premissas Mais Realistas 53

2.17. Abordagens Mundo-Real e Risco-Neutra para o Cálculo da Probabilidade de *Default* 61

2.18. Modelos Estruturais e na Forma Reduzida 62

2.19. Modelo na forma reduzida de Nielsen e Ronn (1996) 65

2.20. Modelo estrutural de Madan e Unal (1999) 71

2.21. Modelo na forma reduzida de Skinner e Diaz (2001) 72

Capítulo 3: OS MODELOS DE MERTON (1974) E KMV 77

3.1. As Idéias Centrais do Modelo de Merton (1974) 77

3.2. Visão do Credor 79

3.2.1. Visão do Credor: Primeira Interpretação com Opção Européia de Venda 80

3.2.2. Visão do Credor: Segunda Interpretação com Opção Européia de Compra 82

3.3. Visão do Proprietário 84

3.3.1. Como obter a probabilidade de *default* dispondo de V_t, σ, E_t e σ_E 88

3.3.2. Exemplo de Aplicação do Modelo de Merton (1974) 90

3.3.3. Modelo de Merton (1974) para Estruturas de Capital mais Complexas 92

3.4. O *spread* de Crédito a partir do Modelo de Merton (1974) 93

3.5. Modelo KMV 95

3.5.1. Procedimento para o Cálculo da probabilidade de *default* pelo KMV a partir de z 98

3.5.2. Expected Default Frequency ou EDF 101

3.5.2.1. Por que a distribuição da taxa de default é assimétrica ? Motivo 1 104

3.5.2.2. Por que a distribuição da taxa de default é assimétrica ? Motivo 2 106

3.5.2.3. Quais são as conseqüências da assimetria da distribuição da taxa de default 107

3.5.3. Outras questões envolvendo o *EDF* 108

3.6. Opções Reais 111

3.6.1. Introdução 111

3.6.2. O Conceito de Opções Reais 111

3.6.3. O Cálculo de Opções Reais 113

3.6.4. Como estimar parâmetros ao empregar Opções Reais 116

Capítulo 4: REVISITANDO O MODELO DE MERTON (1974) COM ÁRVORES BINOMIAIS 119

4.1. Motivação para se estudar Árvores Binomiais 119

4.2. Árvores Binomiais e o Apreçamento de Opções 119

4.3. Árvore Binomial 120

4.4. Investigando a evolução do preço de um ativo até o instante t=n 125

4.5. Associando probabilidades a evolução do preço de um ativo até o instante t=n 127

4.6. Cálculo do Preço de uma Call empregando árvore binomial de passo único 130

4.6.1. Introdução 130

4.6.2. Fórmula do Preço de uma *Call* Européia empregando árvore binomial de passo único 131

4.7. Mundo Risco Neutro 134

4.8. Probabilidades Mundo Real e Mundo Risco Neutro 135

4.9. Calibrando *u* e *d* a partir da volatilidade σ 137

4.10. Generalização do Preço de uma Call Européia empregando árvore binomial de n passos 138

4.11. Utilizando Árvores Binomiais para se estimar a probabilidade de *default* de uma empresa 141

4.12. Cálculo da probabilidade de *default* de uma empresa a partir da probabilidade mundo real 144

Capítulo 5: Cálculo da Probabilidade de *Default* Empregando Modelo Binomial para Empresa com Dívida Concentrada em uma Única Parcela. 146

5.1. Perfil da Dívida de uma Empresa 146

5.2. Observações Metodológicas para o Estudo de Caso 147

5.3. Estudo de caso no setor de celulose e papel 150

5.3.1. O setor de celulose e papel 150

5.3.2. Aplicação do Modelo para a Aracruz 152

5.3.2.1. Detalhe do Cálculo da Probabilidade de *Default* 156

5.3.3. Análise Comparativa das Empresas do Setor de Celulose e Papel 157

5.3.4. Impacto ao se Alterar o Número de Nós da Árvore 158

5.3.5. Impacto ao se Alterar a Premissa da Taxa que corrige a Dívida 166

5.3.6. Impacto ao se Alterar a Premissa da Taxa de Juros Livre de Risco 168

Capítulo 6: Cálculo da Probabilidade de Default para empresa com dívida distribuída ao longo do tempo (precisa colocar caixa alta) 170

6.1. O Problema de Concentrar a Dívida em Data Única 170

6.2. Procedimento para o Cálculo da Probabilidade de *Default* para empresa com dívida distribuída ao longo do tempo 172

6.3. Observações Metodológicas 175

6.4. Testes realizados para a Aracruz 177

6.5. Resultado dos Testes para as Demais Empresas 180

6.6. Comparação entre as probabilidades de default assumindo dívida concentrada e distribuída ... 183

6.7. Limitações do Modelo 184

Capítulo 7: Conclusão 185

Lista de Figuras

Figura 1 Insolvência baseada em fluxos ou insolvência técnica 27
Figura 2 Insolvência baseada em saldos 27
Figura 3 Análise de Perfil 30
Figura 4 *Spread* de risco sobre o título do tesouro 37
Figura 5 Default Rate de acordo com rating 40
Figura 6 Spread de Crédito decomposto em spread de default e em outros fatores de risco 41
Figura 7 Srpead de Crédito na visão de Delianedis e Geske 41
Figura 8 Distribuição de freqüências das taxas de recuperação obtidas por Hu e Perraudin (2002) 48
Figura 9 Diagrama de fluxo de caixa de título sujeito a default para 1 período 73
Figura 10 Decomposição da Dívida com Risco num título zero cupom sem risco mais uma posição vendida numa opção de venda. Visão do Credor 82
Figura 11 Decomposição da Dívida com Risco numa posição em que o credor está numa posição comprada num título livre de risco zero cupom com valor de face V_T e (ii) com uma posição vendida numa call com ativo objeto o ativo da empresa e o strike da call sendo dado por D_T. 83
Figura 12 Balanço Patrimonial da Firma nos instante t=0 e t=T 84
Figura 13 A partir da distância até o default z, obtém-se a EDF a partir de banco de dados com informações históricas 99
Figura 14 Resultado com 1.000 empresas, EDF = 0,1% e 10.000 simulações 105
Figura 15 Resultado com 5.000 empresas, EDF = 0,1% e 10.000 simulações 106
Figura 16 Resultado com 1.000 empresas, EDF = 1% e 10.000 simulações 108
Figura 17 Dois possíveis estados de preço no instante t=1. 121
Figura 18 Quatro possíveis estados de preço no instante t=2 122
Figura 19 Três possíveis estados de preço no instante t=2. Árvore Recombinante 123
Figura 20 Quatro possíveis estados de preço no instante t=3. Árvore Recombinante 124
Figura 21 Dois possíveis estados de preço no instante t = 1 em função de u e d. 126
Figura 22 Possíveis estados de preço no instante t=n para uma rede binomial 126
Figura 23 Dois possíveis estados de preço no instante t = 1 em função de u e d com suas respectivas probabilidades 127
Figura 24 Quatro possíveis estados de preço no instante t = 3 em função de u e d com suas respectivas probabilidades 128
Figura 25 Comparação dos preços do ativo objeto e uma opção de compra sobre o ativo 132
Figura 26 Evolução do preço da call 138
Figura 27 Evolução do Preço a mercado dos ativos da empresa 142
Figura 28 Detalhe do último passo da Árvore com 47 passos e 48 possíveis valores da Empresa 156
Figura 29 Detalhe do último passo da Árvore 159
Figura 30 Evolução do Preço da Opção ao se aumentar o número de nós 162
Figura 31 Evolução da Probabilidade de Default da Aracruz ao se aumentar o número de passos 163
Figura 32 Dois Possíveis caminhos que o Valor dos Ativos pode tomar 170
Figura 33 Detalhe da Barreira Única 173

Lista de Quadros

Quadro 1 Principais indicadores financeiros utilizados em análise de solvência 32
Quadro 2 Notas de Crédito 34
Quadro 3 : Estado de preço e sua respectiva probabilidade 129

Lista de Tabelas

Tabela 1 Grandes perdas decorrentes de desastres financeiros 12
Tabela 2 Taxa de Default 38
Tabela 3 Taxa de Default Média Acumulada 39
Tabela 4 Perda esperada pelo Default em Percentual. Rendimentos continuamente capitaliza 44
Tabela 5 Perda esperada pelo Default em Valor utilizando capitalização contínua 44
Tabela 6 Perda esperada no ano pelo Default em percentual 45
Tabela 7 Taxa de Recuperação R como percentual do valor ao Par obtido da Moody's (2000) 47
Tabela 8 Probabilidades de Default Acumulada e Anual Considerando Taxa de Recuperação zero 51
Tabela 9 Características dos títulos emitidos pela corporação 55
Tabela 10 de Caixa de 6 Títulos que pagam cupom semestralmente 56
Tabela 11 $F_j(t)$: Preço a Termo do G_j 57
Tabela 12 *Valor reclamado pelo credor no instante t* 58
Tabela 13 alfa $_{ij}$: Valor Presente de $F_j(t)$ - $R.C_j(t)$ 58
Tabela 14 Probabilidade de Default 59
Tabela 15 $C_j(t)$: Valor reclamado pelo credor no instante t 60
Tabela 16 *alfa $_{ij}$: Valor Presente de $F_j(t)$ - $R.C_j(t)$* 60
Tabela 17 – Probabilidade de Default 60
Tabela 18 Valor Recebido pelo Credor de Acordo com o Cenário 80
Tabela 19 Cenários de P, N e intervalo de confiança considerando distribuição normal 103
Tabela 20 possíveis estados de preço em função de t 122
Tabela 21 Comparação do número de estados de preço 124
Tabela 22 Cronograma de Amortização da Ripasa 149
Tabela 23 Evolução da Produção de Papel no Brasil em Toneladas 151
Tabela 24 Cronograma de Amortizações da Aracruz 153
Tabela 25 Resumo das informações 154
Tabela 26 Resumo das informações obtidas numericamente 155
Tabela 27 Resultado considerando Árvore com 47 Passos e Custo médio da Dívida de 13,75% ao ano 158
Tabela 28 Detalhe do último passo da Árvore com 47 Passos e 48 possíveis valores da Aracruz 160
Tabela 29 Detalhe de alguns nós do último passo de Árvore com 100 Passos 161
Tabela 30 Evolução da Probabilidade de Default da Aracruz ao se aumentar o número de passos de 50 até 125 164
Tabela 31 Teste de Hipótese 165
Tabela 32 Análise de Sensibilidade da Probabilidade de Default alterando Custo Médio da Dívida. Árvore com 47 Passos 166
Tabela 33 Análise de Sensibilidade alterando Custo Médio da Dívida. Árvore com 200 passos 167
Tabela 34 Análise de Sensibilidade alterando Taxa Livre de Risco. Árvore com 47 nós 168
Tabela 35 Análise de Sensibilidade alterando Taxa de Juros Livre de Risco. Árvore com 100 Passos 169
Tabela 36 Cronograma de Amortizações da Aracruz 177
Tabela 37 Resumo das informações obtidas numericamente 179
Tabela 38 Correspondência entre data de pagamento e passo da árvore binomial 179
Tabela 39 Probabilidade de Default da Aracruz em cada vencimento de dívida 180
Tabela 40 Probabilidade de Default da VCP em cada vencimento de dívida 180
Tabela 41 Probabilidade de Default da Ripasa em cada vencimento de dívida 181
Tabela 42 Probabilidade de Default da Suzano em cada vencimento de dívida 182
Tabela 43 Probabilidade de Default da Klabin em cada vencimento de dívida 182
Tabela 44 Probabilidade de Default considerando dívida distrbuída ao longo do tempo e dívida concentrada na data duration. O número de passos empregados foi de 200. 183

Capítulo 1: Introdução

1.1. Situação Problema

O risco é parte inseparável das atividades humanas, sejam elas quais forem. Cabe aos agentes econômicos tomar as medidas necessárias para calculá-lo, gerenciá-lo e, quando possível, mitigá-lo.

As instituições, financeiras ou não, podem vir a pagar um preço muito alto por não terem sistemas de mensuração de risco. Ademais, no âmbito das instituições financeiras, deve-se salientar que os sistemas de mensuração e gerenciamento de risco devem contemplar as mais diversas modalidades de risco: crédito, mercado, operacional e legal.

Um caso emblemático da ausência de controles e mensuração de risco ocorreu em 1995 envolvendo o Barings, um banco inglês com mais de duzentos anos de existência, o qual foi à bancarrota por falta de supervisão nas operações realizadas pela filial em Singapura.

Sain (2001, p. 2) afirma que o Barings faliu devido uma perda de US$ 1,3 bi decorrente de operações com derivativos realizadas por um único operador. Contudo, essa perda não deve ser atribuída exclusivamente à irresponsabilidade deste operador uma vez que o principal problema deste banco, com 233 anos de história, era a falta de controles internos.

Em 1995, a filial do banco japonês Daiwa foi proibida de operar nos Estados Unidos depois que um funcionário da agência de Nova Iorque foi capaz de encobrir perdas superiores a um bilhão de dólares por mais de onze anos. Nesse caso, além do Banco Daiwa ter tido prejuízos que ultrapassaram um bilhão de dólares e ter sido proibido de operar nos Estados Unidos, ele recebeu uma multa de US$ 340 milhões da autoridade reguladora americana.

Em 1999, por conta da abrupta desvalorização cambial, o Banco Marka sofreu vultoso prejuízo em virtude de sua excessiva exposição no mercado de dólar. Em 2004, entre outras razões, o Banco Santos quebrou por conta de sérios problemas de liquidez.

Dowd (1998, p. 16-17), *apud* Sain (2001, p. 2), apresenta a seguinte tabela contendo as maiores quebras por conta de desastres financeiros:

Tabela 1 Grandes perdas decorrentes de desastres financeiros

CASO	ANO	PREJUÍZO (U$)
Metallgesellschaft	1993	1,3 bilhão
Orange County	1994	1,7 bilhão
Barings Bank	1995	1,3 bilhão
Daiwa Bank	1995	1,1 bilhão
Sumitomo Corporation	1996	1,8 bilhão

Fonte: Dowd

As instituições de regulação bancária dos países desenvolvidos, cientes dos riscos assumidos pelas instituições financeiras e da necessidade de estabelecer limites e padrões para operação bancária em gerenciamento de risco, formaram o Comitê da Basiléia.

O Comitê é formado pelos bancos centrais e instituições de supervisão ou regulamentação bancária dos países industrializados. Seus membros se encontram a cada três meses no BIS (*Bank for International Settlements*) de modo a estabelecerem linhas gerais para a política de supervisão bancária. Os princípios fundamentais são transformados em documentos, os quais sugerem medidas que devem ser seguidas pela instituição local de supervisão bancária de cada país membro bem como pelas instituições financeiras que compõem o sistema financeiro de cada país.

Em 15 de julho de 1988, um marco na busca da estabilidade financeira dos países foi alcançado com o Acordo da Basiléia, fruto dos trabalhos do Comitê da Basiléia cujos signatários eram os países que compunham o Grupo dos Dez (G-10).

Nesse evento, por intermédio de seus respectivos Bancos Centrais, Bélgica, Canadá, França, Alemanha, Itália, Japão, Holanda, Suécia, Reino Unido e Estados Unidos anunciaram o acordo que resultaria na convergência internacional das funções de supervisão, regulamentação e adequação dos bancos a certos parâmetros. Por esse acordo, os bancos centrais dos países que compunham o G-10 teriam que aplicar as recomendações contidas no documento por eles assinado até o ano de 1992.

Segundo Jorion (1997, p. 44) e Fabozzi (1997, p. 592), o propósito principal do Acordo da Basiléia era prover padrões mínimos de exigência de capital para os bancos comerciais de modo que eles se resguardassem contra o risco de crédito. Esta iniciativa, por conseguinte, visou estabelecer as bases para um sistema financeiro sólido e confiável. O controle sugerido valia-se da razão de Cooke, a qual cobre exclusivamente o risco de crédito. A razão de Cooke recomenda que o capital seja igual a pelo menos 8% dos ativos do banco, ponderados pelo risco.

O Acordo de 1988 consistia de duas seções principais as quais contemplavam a definição de capital e os pesos atribuídos a riscos incorridos pelos bancos. Adicionalmente, o documento continha quatro anexos.

Posteriormente, o Comitê da Basiléia reconheceu que já existiam em algumas instituições financeiras mecanismos de monitoramento de risco muito mais sofisticados que aqueles recomendados pelo Acordo de 1988. Jorion (1997, p. 50) ressalta que em abril de 1995 os bancos centrais implicitamente reconheciam que os modelos de gerenciamento de risco utilizados por muitos bancos estavam num estágio muito mais avançado que qualquer corpo regulatório poderia propor.

O conjunto de propostas publicado em abril de 1993 pelo Comitê da Basiléia aperfeiçoou o primeiro conjunto de medidas prudenciais que datava de 1988 ao recomendar uma nova ferramenta de gerenciamento do risco chamada de Valor em Risco ou simplesmente VaR, acrônimo para *Value- at-Risk*.

Atualmente, as discussões estão em torno da Basiléia II.

O Novo Acordo da Basiléia, ou Basiléia II, esperado para entrar em fase de implementação no final de 2006, sugere a implantação de três pilares que contribuem para a segurança do sistema financeiro como um todo:

- Pilar 1: Exigências de Capital Mínimo;
- Pilar 2: Processo de Revisão de Supervisão;
- Pilar 3: Disciplina de Mercado.

O Novo Acordo da Basiléia visa detalhar a estrutura de adequação de capital, desenvolvendo métodos padronizados que sejam mais sensíveis aos riscos.

Este novo acordo requererá de bancos internacionalmente ativos o emprego de métodos de avaliação de risco mais sensíveis ao calcular exigência de capital em face do risco de crédito, o qual faz parte do Pilar número 1 do Novo Acordo da Basiléia.

Os quatro componentes essenciais na modelagem proposta pelo novo Acordo da Basiléia são: (i) PD - Probabilidade de *Default*, (ii) EAD - *Exposure At Default*, (iii) LGD – *Loss Given Default* e (iv) M - Maturidade.

Segundo o Novo Acordo, os quatro parâmetros PD, LGD, EAD e M devem ser informados pelos bancos.

A probabilidade de *default* indica a probabilidade da empresa se tornar inadimplente em determinado intervalo de tempo. Entende-se por LGD a perda incorrida pelo credor no caso do tomador entrar em *default*. Um conceito inseparável do LGD é a taxa de recuperação ou *Recovery Rate* (RR) que indica a fração do valor recebido pelo credor no evento de *default*.

O Novo Acordo da Basiléia permite que os bancos calculem a exigência de capital em face do risco de crédito utilizando abordagens que dependem do cálculo da Probabilidade de *Default*, LGD, entre outras variáveis.

Neste contexto, a perda esperada é obtida a partir da seguinte formulação:

Perda esperada = (Exposição ao *Default* vezes Probabilidade de *Default*) vezes (Perda incorrida com *default* em %)

Perda esperada = $(EAD \times PD) \times LGD$

1.2. Motivação

Conforme será visto em capítulos posteriores, os modelos estruturais destinados ao cálculo da probabilidade de *default* adotam uma série de premissas simplificadoras.

O presente trabalho pretende justamente contribuir com um modelo para o cálculo da probabilidade de *default*, desta vez empregando metodologia estrutural que utiliza árvores binomiais ao invés do modelo de Black & Scholes (1973), originalmente proposto por Merton (1974), para o cálculo da probabilidade de *default*.

Logo, o que motiva o autor a pesquisar uma nova metodologia para a determinação da probabilidade de *default* é a necessidade de ampliar o número de alternativas que visem o cálculo da probabilidade da empresa se tornar inadimplente dentro de determinado intervalo de tempo, parâmetro essencial nas modelagens recomendadas pelo Basiléia II.

Deve ser salientado que não se pode imaginar que o cálculo da probabilidade de *default* de uma empresa seja de interesse restrito dos bancos ou de outros emprestadores de recursos, debenturistas, por exemplo, interessados em saber a probabilidade de não receber seu dinheiro de volta.

Os acionistas e outros *stakeholders* têm interesse em saber a probabilidade de *default* das empresas alvo de seus investimentos. Isto significa que pesquisar e divulgar novas metodologias para o cálculo da probabilidade de *default* constitui mais uma ferramenta para melhorar a governança corporativa nos mercados de capitais.

Metodologias para o cálculo da probabilidade de *default* de corporações dizem respeito também à transparência e ao *disclosure*. Os atuais e potenciais acionistas e os analistas de mercado certamente teriam muito interesse em conhecer a probabilidade da empresa em que eles investem ou, ao menos, pretendem investir, tornar-se inadimplente num determinado horizonte de tempo.

Outro aspecto motivador para se estudar o tema em questão é a inegável carência de mecanismos de gestão e mensuração do risco de crédito empresarial propostos por pesquisadores brasileiros, seja sob o ponto de vista de quantidade de modelos, seja pelo ponto de vista de sofisticação.

Corroborando esta argumentação, Perobelli (2004, p. 4) afirma que "(...) pesquisas desenvolvidas ao longo dos últimos anos ainda não atingiram um grau de consistência satisfatório, o que faz com que, ao contrário do que ocorre atualmente com o gerenciamento

dos riscos de mercado em instituições financeiras, ainda não haja consenso sobre o modelo de mensuração integrada dos riscos corporativos".

Perobelli (2004) ainda cita a diminuição da assimetria da informação entre Agente e Principal e a diminuição da assimetria da informação entre empresa e doadores de recursos como fatores que motivam o estudo do risco corporativo.

Nielsen e Ronn (1996, p. 2) citam dois motivos para o estudo do risco corporativo. Primeiro, eles afirmam que há interesse na modelagem de risco de bancarrota de uma corporação, uma vez que o entendimento deste evento permite a modelagem mais precisa das emissões sujeitas a *default*.

Os referidos autores sustentam que a modelagem deste evento permite a construção e avaliação de títulos cujos resultados são determinados pelo evento de *default* (ou de sua ausência), os quais passaram a ser denominados de derivativos de crédito. Um derivativo de crédito tem o objetivo de transferir o risco de crédito de um instrumento financeiro de uma entidade para outra. Segundo a *International Securities and Derivatives Association* ISDA, o total do valor nocional de *swaps* de crédito (*Credit Default Swaps-CDS*) nos últimos seis meses de 2004 foi de US$ 8,42 trilhões de dólares.

Estimativas sobre a probabilidade de uma empresa entrar em *default* ainda são apenas marginalmente divulgadas em comparação com o *rating* de crédito.

Faz-se necessário salientar que *ratings* de crédito de uma emissão ou de uma empresa, apesar de serem informações extremamente úteis, não carregam a mesma informação que uma probabilidade de *default*.

Elton et al. (2002, p. 2) argumentam que uma parte importante da literatura financeira aceita que os *ratings* de crédito são uma métrica capaz de prover informações para a precificação do título corporativo. Contudo, os referidos autores ao estudarem a influência dos *ratings* nos preços dos títulos de dívida empresarial sustentam que muitos outros fatores não captados pelos *rating* de crédito influenciam o preço dos títulos sujeitos a risco de crédito.

1.3. Objetivo do Trabalho

O objetivo geral desta tese é:

- Aprofundar o estudo do risco de inadimplência de empresas que empreguem capital de terceiros.

Os objetivos específicos são:

- Formular metodologia para a determinação da probabilidade de *default* de corporações que possuam capital de terceiros financiando seus ativos.

- O modelo a ser proposto deverá ser capaz de contemplar estruturas de endividamento complexas semelhantes àquelas que o modelo original de Merton (1974) é capaz de resolver.

- O modelo proposto deverá ser capaz de minimizar as simplificações nos fluxos ou datas de pagamento das obrigações da empresa.

- O modelo a ser proposto deverá ser capaz de informar a probabilidade de *default* considerando diferentes horizontes de tempo.

1.4. Contribuição do Trabalho e Originalidade

O presente estudo pretende contribuir com a literatura sobre modelagem do risco de crédito ao desenvolver uma variação do modelo estrutural de Merton (1974) ao empregar árvores binomiais no lugar do modelo de Black e Scholes para o cálculo da probabilidade de *default*.

A empresa KMV, recentemente adquirida pela Moody's, opera comercialmente prestando informações sobre risco de crédito empregando, com algumas alterações, o modelo de Merton (1974).

Ocorre que os modelos de Merton (1974) e KMV possuem simplificações tais como:

- O modelo de Merton (1974) assume que toda a dívida da empresa seja na fórmula de título zero cupom.

- O KMV assume que o valor futuro da dívida é 100% do passivo circulante acrescido de 50% da dívida de longo prazo.

Ao contrário dos trabalhos de Merton (1974) e KMV que assumem premissas simplificadoras ao considerarem dívida concentrada em data única, a metodologia proposta nesta tese procura contribuir com a literatura ao propor um modelo capaz de calcular a probabilidade de *default* em diferentes horizontes de tempo utilizando o fluxo da dívida tal qual ele é, sem necessitar que nenhuma simplificação seja feita nos valores ou datas de pagamento.

Ao se pesquisar trabalhos similares sobre como determinar probabilidade de *default* das empresas, não se encontrou obra que empregasse técnicas de apreçamento de opções exóticas como instrumento para a determinação da probabilidade de *default* da maneira como é feita nesta tese, algo que corresponde a sua originalidade

1.5. Metodologia do Trabalho

Segundo Lakatos e Marconi (1991, p. 68), o ponto de partida para uma pesquisa é um problema.

Seguindo esta linha de raciocínio, o ponto de partida para o presente trabalho é a necessidade de se desenvolver modelos, sem impor premissas poucos realistas, que determinem a probabilidade de *default*, parâmetro largamente empregado nos modelos de mensuração de risco de crédito empresarial.

Ora, a passagem dos velhos problemas para os novos por intermédio de novas suposições e argumentações, tal como sugere Lakatos e Marconi (1991, p. 68), requer que uma metodologia seja adotada de forma que se diferencie a simples intuição da ciência. (Teixeira, 1999, p. 10)

Eco (1977, p. 59), por seu turno, diz que:

... a metodologia, apesar de instrumental, é condição necessária para competência científica. Como pesquisa, a metodologia significa a produção crítica e auto-crítica de caminhos alternativos, bem como a indagação sobre os caminhos vigentes e passados.

Para Pereira (2003), conquanto existam modelos diferentes para os métodos de pesquisa, nenhum sistema de classificação é capaz de definir todas as variações que devem ser consideradas.

Em vista do exposto, a metodologia empregada para resolver o problema proposto na tese é uma variação do arcabouço proposto por Merton (1974) e Cox, Ross e Rubinstein (1979).

Enquanto Merton (1974) empregou a metodologia de Black e Scholes (1973) como ferramenta para o cálculo da probabilidade de *default*, a presente tese emprega o arcabouço teórico desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (1979) para derivar um modelo que seja capaz de fornecer informação sobre o risco de inadimplência de uma empresa assumindo premissas menos restritivas que aquelas impostas por Merton (1974).

Em capítulo posterior haverá o detalhamento da metodologia proposta.

1.6. Descrição dos Capítulos

O capítulo 1 procura contextualizar os temas abordados bem como deixar claro o objetivo do trabalho.

O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica dos temas pertinentes ao presente trabalho, tais como probabilidade de *default*, *ratings* de crédito, taxa de recuperação, perda no caso de *default*, entre outros parâmetros.

O capítulo 3 será reservado para a explanação das metodologias empregada por Merton (1974) e pelo KMV para o cálculo da probabilidade de *default* a partir da modelagem de *Black e Scholes* (1973). Ainda no capítulo 3 são discutidos alguns aspectos relacionados ao cálculo do valor da empresa empregando opções reais. Uma das soluções encontradas para a estimação de parâmetros necessários para o emprego opções reais será utilizada na modelagem proposta no capítulo 6.

O capítulo 4 evidenciará as alterações a serem introduzidas nos modelos de Merton (1974) de modo a se descobrir a probabilidade de *default* a partir de árvores binomiais e não do modelo de apreçamento de opções de Black e Scholes (1973).

O capítulo 5 abrigará a proposição de metodologia para a determinação da probabilidade de *default* empregando árvores binomiais assumindo concentração do pagamento da dívida da empresa em data única.

O capítulo 6 abrigará a proposição de metodologia para a determinação da probabilidade de *default* empregando árvores binomiais sem fazer simplificação no tocante à distribuição do pagamento da dívida da empresa ao longo do tempo. Ainda no capítulo 6 serão discutidas as limitações do presente trabalho.

As considerações finais constarão do capítulo 7. Por intermédio deste capítulo, será possível averiguar que os objetivos traçados no capítulo introdutório foram perseguidos e alcançados e que o problema de pesquisa foi solucionado de maneira satisfatória. Ainda neste capítulo, serão apresentadas as lacunas no conhecimento que ainda podem ser explorados e que sejam afins aos temas envolvidos nesta tese.

Capítulo 2: MODELOS DE MENSURAÇÃO DE RISCO DE CRÉDITO CORPORATIVO

2.1. Introdução

A revisão bibliográfica abordará alguns dos principais modelos e conceitos de mensuração dos riscos de insolvência e inadimplência, sendo dada ênfase a esta última uma vez que esta tese tem como objetivo a modelagem da probabilidade de *default* e não a segregação entre empresas boas ou ruins tal como fazem os modelos que se baseiam em análise discriminante ou equivalente. Deve ser salientado que se considera inadimplência e *default* sinônimos.

Embora não seja o foco do presente estudo, é importante discutir, ainda que brevemente, alguns modelos tradicionais de insolvência. Os primeiros trabalhos que se tem notícia sobre esta temática possuem mais de 50 anos como o de Fitzpatrick (1932). Serão evidenciados também os modelos de Beaver (1966) e Altman (1968). Estes modelos de risco de crédito são baseados em dados contábeis e valores de mercado e empregam quocientes econômico-financeiros para análise da insolvência. Conforme será visto, embora o trabalho de Beaver date de 1966, o modelo de Altman (1968) é aceito como o primeiro a utilizar indicadores econômico-financeiros junto a técnicas estatísticas mais refinadas.

Por outro lado, os trabalhos que realizam a modelagem da probabilidade de *default* são mais recentes, particularmente os modelos estruturais e na forma reduzida os quais assumem que o valor da firma ou do título sigam um processo estocástico que permite a modelagem da probabilidade de inadimplência. A discussão entre as diferenças dos modelos estruturais e na forma reduzida merecerão tópico específico. Também faz parte da revisão bibliográfica o estudo de alguns modelos baseados em prêmios pelo risco de mercado os quais permitem deduzir as probabilidades implícitas de inadimplência a partir da estrutura temporal dos *spreads* de rendimento entre títulos livres de risco e títulos com risco.

2.2. Risco, Incerteza e outros Aspectos de Caráter Geral

Apesar da grande importância dos conceitos de risco e incerteza, considera-se que a incorporação formal destes elementos na teoria econômica tenha ocorrido apenas em 1944

quando John von Neumann e Oskar Morgenstern publicaram o trabalho Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico.

Não obstante, ainda que sejam empregados indiscriminadamente, existem diferenças entre os conceitos de risco e incerteza. Knight (1921) estabeleceu em sua dissertação de mestrado denominada *Risk, Uncertainty and Profit* de 1921 a diferença entre risco e incerteza. Segundo ele, o risco é decorrente dos eventos para os quais se pode atribuir probabilidade de ocorrência enquanto que a incerteza é decorrente dos eventos aos quais não podem ser atribuídas probabilidades.

No mercado financeiro, o risco costuma ser segmentado em quatro grandes grupos: risco de crédito, risco de mercado, risco operacional e risco legal. Os credores estão sujeitos ao risco de crédito na medida em que estão expostos ao risco de não receber o valor combinado na data estipulada pelo contrato. Aliás, o risco de crédito é a mais antiga forma de risco nos mercados financeiros. Os agentes econômicos estão expostos ao risco de mercado na medida em que estão sujeitos a perdas decorrentes das oscilações dos preços de *commodities*, taxas de juros, câmbio e preço das ações. O risco operacional consiste na chance de perda direta ou indireta resultante de inadequações ou falhas de processos internos, pessoas e sistemas ou de eventos externos. O risco legal decorre da possibilidade do agente incorrer em perdas decorrentes de mudanças na legislação.

O objeto de estudo deste trabalho é o risco de crédito decorrente do endividamento das empresas. Sendo assim, é importante conhecer a estrutura da dívida da corporação e seus fatores de risco.

Em geral, a estrutura da dívida de uma companhia é composta por títulos de renda fixa. Segundo Fabozzi (2000, p. 7-11), os riscos envolvidos ao se negociar títulos de renda fixa são:

- risco de taxa de juros;
- risco de reinvestimento;
- risco de resgate antecipado;

- risco de inadimplência;
- risco de inflação;
- risco cambial;
- risco de liquidez;
- risco de volatilidade.

Segundo Damodaran (1997, p. 25), as questões de como o risco é medido, como é recompensado e quanto risco assumir são fundamentais em cada decisão de investimento, desde a alocação de ativos até a avaliação. Ademais, esta área de conhecimento das finanças abriga constante discussão entre teóricos e práticos sobre qual modelo correto de avaliação de risco deva ser empregado.

O referido autor afirma que como prelúdio ao exame de diferentes modelos de risco e retorno, deve-se exigir que o modelo escolhido atenda os seguintes requisitos:

- O modelo deve oferecer uma medida de risco que seja aplicável a todos os investimentos, quer sejam ações, títulos corporativos ou imóveis, pois todos competem pelo mesmo dólar de investimento;

- O modelo deve especificar quais tipos de risco são recompensados e quais não o são. Uma característica geralmente aceita dos investimentos é que nem todos os riscos são recompensados, e um bom modelo deve ser capaz de fazer a distinção entre riscos recompensados e riscos não-recompensados;

- O modelo deve padronizar medidas de risco, permitindo análises e comparações;

- O modelo deve ser capaz de traduzir medida de risco em retorno esperado. Um dos objetivos na medição de risco é chegar a uma estimativa de um retorno esperado sobre um investimento. Este retorno esperado torna-se um benchmark que determina se um investimento é bom ou ruim. Não é suficiente dizer que investimentos de maior risco devem

render retornos esperados mais altos, sem fornecer uma estimativa específica de prêmio de risco.

2.3. Risco de Crédito

O risco de crédito é tão antigo quanto os próprios empréstimos. Acredita-se que o Código de Hamurabi de cerca de 1800 AC incluía muitas seções relativas à regulamentação do crédito na Babilônia.

Segundo Altman et al. (2000, p. 1), o risco de crédito é a mais antiga forma de risco nos mercados financeiros. Se pudermos definir crédito como a expectativa de uma quantia em dinheiro dentro de um intervalo de tempo limitado, o risco de crédito será a chance de que esta expectativa não se cumpra. O risco de crédito é a conseqüência de uma transação contratada entre um fornecedor de fundos e um usuário desses fundos.

Ainda segundo o referido autor, a análise de crédito clássica se desenvolveu como reação a mudanças fundamentais na atividade bancária. Historicamente, a missão fundamental de um banco era financiar o capital de giro e proporcionar crédito mercantil, e os banqueiros geralmente concediam empréstimos garantidos por bens ou outras formas aceitáveis de garantia. Empréstimos de capital de giro, por exemplo, eram realizados contra os estoques e os recebíveis do tomador, sendo que o oferecimento destes bens protegia o banco de possíveis perdas se a empresa se encontrasse em dificuldades financeiras. Contudo, na medida que se começa a financiar ativos fixos, as garantias outrora suficientes se tornaram virtualmente irrelevantes no processo creditício, pois não há mercado líquido para garantias como suprimentos hospitalares, autopeças ou alienação de implementos agrícolas.

Segundo Altman *et al.* (2000, p. 95), estas transformações fizeram com que os doadores de recursos se concentrassem mais no fluxo de caixa do tomador que no seu balanço patrimonial. O fluxo de caixa operacional define a liquidez das empresas, ou seja, se elas são capazes de gerar a partir de suas operações internas dinheiro suficiente para realizar o serviço de suas dívidas.

2.4. Insolvência e a Legislação Brasileira

O novo Código Civil Brasileiro com redação final aprovada em 06/12/2001 afirma no art. 955 que se procede à declaração de insolvência toda vez que as dívidas excedam à importância dos bens do devedor. É importante destacar que segundo o art. 1.425 do aludido Código, a dívida é considerada vencida se o devedor cair em insolvência ou falir.

O Código de Processo Civil, instituído pela Lei 5.869 de 11/01/1973, prevê no art. 748 que dá-se a insolvência toda vez que as dívidas excederem à importância dos bens do devedor. No que respeita a insolvência presumida, expressamente prevista no art. 750 do mesmo diploma legal, são previstos dois requisitos, a saber: (i) o devedor não possuir outros bens livres e desembaraçados para nomear à penhora e (ii) o devedor ter tido seus bens arrestados.

A Lei de Falências que entrou em vigor em junho de 2005 substituiu a legislação de 1945. A grande mudança feita é o fim da concordata e a criação do mecanismo de recuperação de empresas insolventes, em duas maneiras. Na forma extrajudicial, em que o processo corre informalmente, os credores formam uma assembléia, na qual discutem um plano de recuperação. Nessa etapa não entram dívidas trabalhistas ou fiscais. Já na recuperação judicial, é a Justiça quem convoca a assembléia.

O Congresso também alterou nesta lei a ordem de pagamento dos credores, no caso de falência. Os primeiros a serem pagos serão os funcionários da empresa, até o limite de 150 salários mínimos por trabalhador (R$ 39 mil). Em seguida, as dívidas com as instituições financeiras terão preferência. Esse ponto da lei reduzirá o *spread* bancário, ou seja, a variação do juro entre o momento que o dinheiro é captado no mercado financeiro e o do empréstimo.

Ainda na Lei de Falências, as dívidas fiscais vêm em terceiro, seguidas por outros credores, como os quirografários (credores que não têm preferências no recebimento). Atualmente, o credor quirografário leva vantagem ao pedir a falência de uma empresa, usando o processo como ação de cobrança. Ou seja, pede a falência como forma de coação da empresa devedora. Com medo de ser aceito o pedido de insolvência, o empresário quita a dívida, piorando a situação financeira da empresa muitas vezes.

2.5. A Insolvência

De acordo com Downes e Goodman (1991, p.503), solvência é a capacidade de honrar obrigações à medida que se tornam vencíveis e insolvência é a incapacidade de pagar a dívida no vencimento.

Segundo Altman (1983, p.6), citado por Castro Jr. (2003, p. 26-27), a insolvência pode ser separada em duas formas conceitualmente distintas:

- Insolvência baseada em fluxos também conhecida como insolvência técnica;
- Insolvência baseada em saldos.

Altman (1983, p.6), apresenta a insolvência técnica como uma falta de liquidez da firma que impossibilita o cumprimento de uma obrigação. Logo, a insolvência técnica pode ser um estado passageiro.

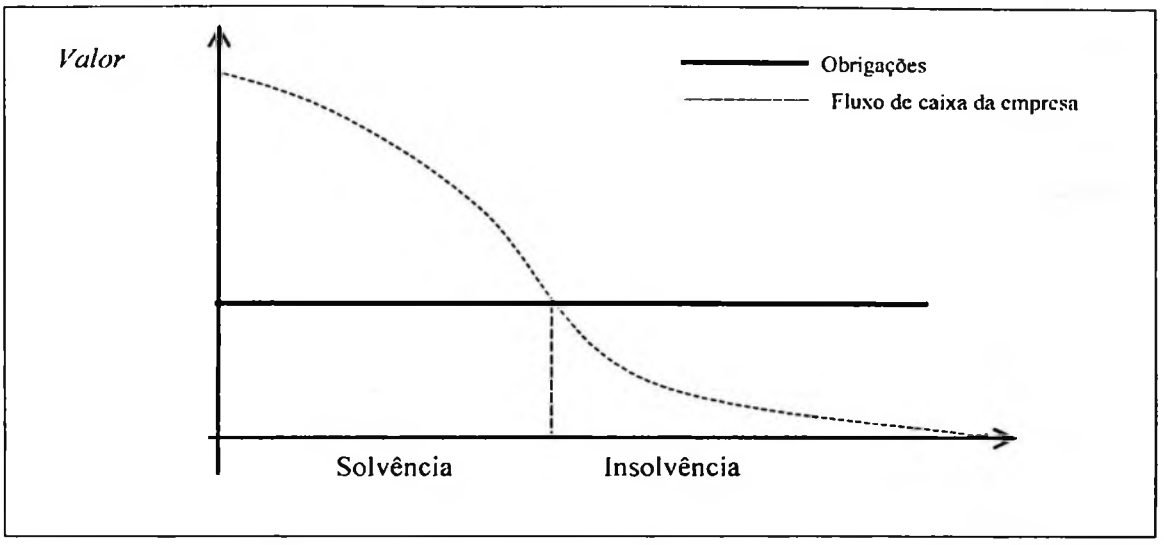
Wruck (1990, p.421), *apud* Castro Jr. (2003, p. 26-27), estabelece que a insolvência baseada em saldos ocorre quando a firma tem valor econômico negativo, ou seja, o valor presente dos fluxos de caixa futuros é menor que o total de suas obrigações.

Não obstante, Castro Jr. (2003, p. 26-27) afirma que a insolvência baseada em saldos ocorre quando o valor dos ativos de uma empresa é inferior ao valor de seu passivo, logo o PL é menor que zero, fenômeno denominado pelos contadores de passivo a descoberto.

Ainda segundo Castro Jr. (2003, p. 8-9), um problema sério a ser contornado em casos de inadimplência reside na assimetria de informação entre credores e acionistas. Interessa a estes últimos passar ao credor a idéia que a situação que a empresa passa é uma insolvência baseada em fluxos, estando momentaneamente inadimplente, tendo, por conseguinte, condições de se reerguer contando com os fluxos de caixa futuros.

- Os credores, por seu turno, temem agravamento da situação pois desconhecem a real situação da empresa e ficam inclinados a pensar que a empresa está passando por insolvência baseada em saldos.

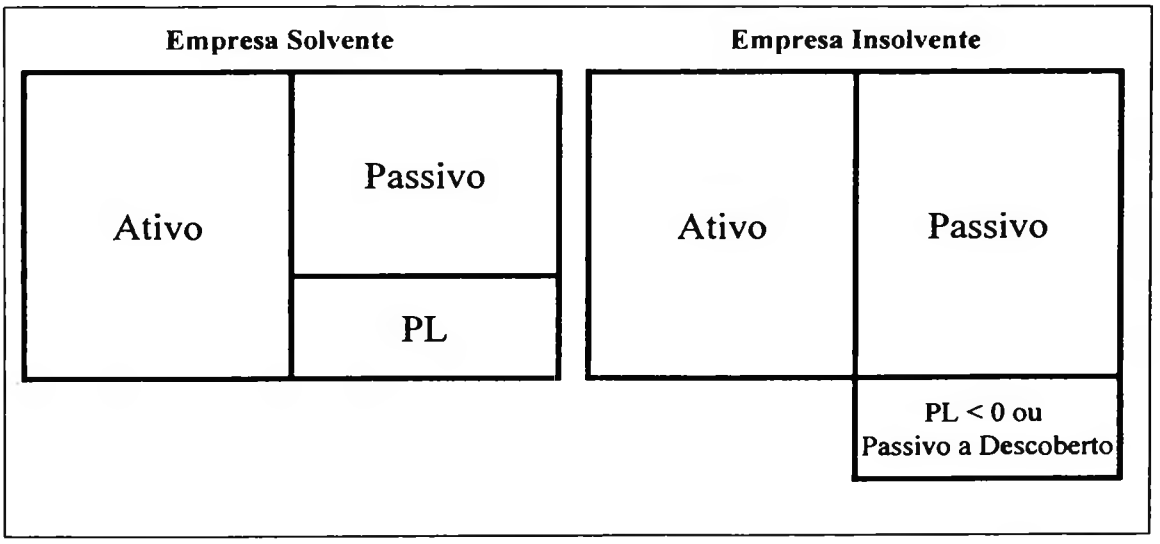
Figura 1 Insolvência baseada em fluxos ou insolvência técnica



Fonte: Autor

Pela figura anterior, nota-se que a empresa atingirá o estado de insolvência técnica se o valor dos fluxos de caixa gerados pela empresa se tornarem inferior ao valor de suas obrigações.

Figura 2 Insolvência baseada em saldos



Fonte: Autor

Pela figura anterior, nota-se que a empresa atingirá o estado de insolvência baseada em saldos se o valor do seu passivo ultrapassar o valor de seus ativos. A empresa ficará com um passivo a descoberto, sendo esta uma situação grave.

2.6. Primeiros Trabalhos sobre Insolvência: Fitzpatrick (1932), Beaver (1966) e Altman (1968)

O primeiro trabalho que se tem notícia sobre previsão de insolvência é o de Fitzpatrick de 1932 no qual comparou-se dezenove empresas bem-sucedidas com dezenove empresas que foram à falência durante os anos de 1920 a 1929 nos Estados Unidos.

Fitzpatrick (1932) utilizou dois métodos, hoje considerados elementares:

- observar alguns quocientes econômico-financeiros da empresa e classificá-los como acima ou abaixo de um padrão ideal;

- observar a tendência desses mesmos quocientes ao longo do tempo.

Após analisar os quocientes dos dois grupos de empresas, o referido autor concluiu que eles poderiam ser importantes quanto ao risco de insolvência de uma empresa. Não obstante, o próprio Fitzpatrick (1932) reconhece que os quocientes não são indicadores absolutos das dificuldades das empresas em honrar suas obrigações.

Outro trabalho clássico sobre este tema é o de Beaver (1966) intitulado *Financial Ratios as Predictors of Failure*, ou Quocientes Financeiros como Previsores de Falha, sendo Falha definida como a inabilidade da empresa de pagar suas obrigações financeiras.

Beaver (1966, p. 72-74) selecionou empresas que se mostraram solventes e insolventes, pareando-as a partir de critérios de similaridade baseados em setor de atuação e dimensão dos ativos.

Os dados financeiros foram então agrupados em 6 grandes grupos, quais sejam:

- Quocientes de Fluxo de Caixa;

- Quocientes de Lucratividade;
- Quocientes de Estrutura de Capital;
- Quocientes de Liquidez em relação aos Ativos Totais;
- Quocientes de Liquidez em relação ao Passivo;
- Quocientes relacionados aos Ciclos de Caixa e Operacional.

Adicionalmente, os índices foram tabulados de acordo com o número de anos antes da insolvência, isto é, tem-se o primeiro ano antes da insolvência, o segundo ano anterior a insolvência e assim por diante.

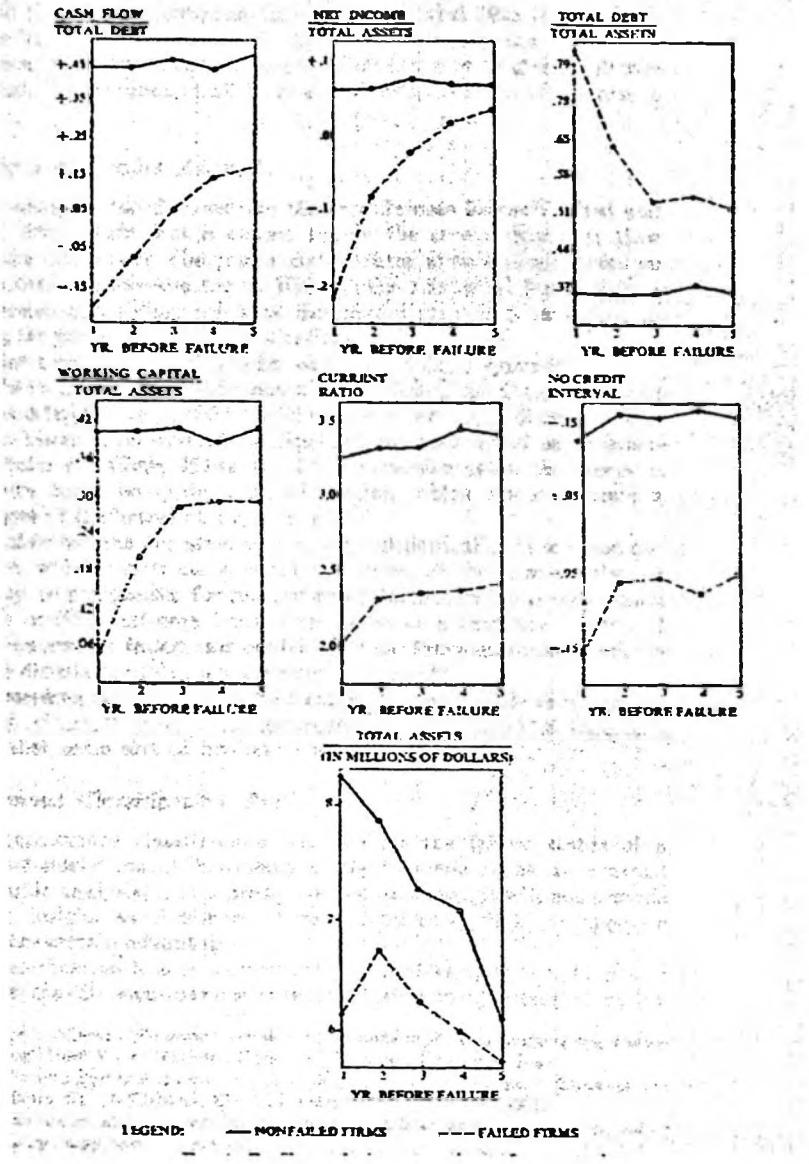
Beaver (1966, p. 79) comparou então as médias dos quocientes das firmas que falharam e daquelas que não falharam no cumprimento de suas obrigações financeiras para cada um dos anos que antecederam a insolvência. Beaver denominou esta técnica de análise de perfil.

Uma conclusão do trabalho é que o índice de grande capacidade de previsão de insolvência é o fluxo de caixa em relação ao endividamento total.

A figura da página seguinte evidencia, entre outros quocientes, o indicador fluxo de caixa sobre total da dívida de um a cinco anos antes da empresa se tornar insolvente. Para o grupo de empresas solventes, nota-se certa estabilidade deste indicador em torno de +0,45. Por outro lado, as empresas que se tornam insolventes apresentam grande queda neste indicador nos anos que antecedem a insolvência.

Ainda considerando a figura da página seguinte, nota-se um comportamento bastante similar com o indicador dado por lucro líquido dividido por ativos totais. Para o grupo de empresas solventes, nota-se estabilidade deste indicador num patamar positivo. Por outro lado, as empresas que se tornam insolventes apresentam queda significativa neste indicador nos anos que antecedem a insolvência, fazendo com que ele se torne muito negativo, algo que mostra sucessivos prejuízos antes da empresa se tornar insolvente.

Figura 3 Análise de Perfil



Fonte: Beaver (1966, p. 79)

Alguns anos depois, em 1968, Altman desenvolveu um método preditivo de insolvência baseado na análise discriminante multivariada.

Segundo Bohn et al. (2005, p. 6), o modelo de Altman surgiu como uma resposta a necessidade de identificar a saúde financeira da empresa com base em quocientes contábeis e de mercado prontamente observáveis.

A partir do modelo de Altman (1968), tem-se que a função discriminante capaz de segregar empresas boas e ruins é a seguinte:

$$Z = 0{,}012X1 + 0{,}014X2 + 0{,}033X3 + 0{,}006X4 + 0{,}999X5$$

Sendo que:

X1 = Capital de Giro dividido por ativos totais;

X2 = Lucros retidos dividido por ativos totais;

X3 = Lucro antes de juros e impostos dividido por ativos totais;

X4 = Valor de Mercado do patrimônio líquido dividido por valor contábil da dívida total;

X5 = Vendas divididas por ativos totais;

Um estudo posterior realizado por Altman em 1977 empregando um conjunto de dados maior selecionou outras variáveis explicativas produzindo um resultado superior ao obtido no estudo anterior.

De acordo com Pereira da Silva (2004, p. 363), a análise discriminante conduz a obtenção dos pesos e ao fornecimento de uma nota final (*score*) que, comparada com uma escala de avaliação, dará a classificação de risco da empresa. Para o desenvolvimento do modelo com uso da análise discriminante, é necessária uma amostra composta de empresas "boas" e de empresas insolventes. A análise discriminante para a previsão de insolvência foi a técnica mais utilizada até o final da década de 1970.

Segundo Bohn et al. (2005, p. 7), o modelo de Altaman produz um escore de 5 a 10, sendo que quanto maior o escore, melhor é a qualidade do devedor e menor é a probabilidade de inadimplência.

Os referidos autores salientam que o escore *z* de Altman não é diretamente interpretado como uma probabilidade de inadimplência, o que significa que este modelo não pode ser usado para avaliação quantitativa do risco ou com propósito de alocação de capital.

Nas décadas de 1970 e 1980 vicejaram as metodologias baseadas em Logit e Probit que são técnicas mais modernas que a análise de médias realizada por Beaver (1966) e a discriminante realizada por Altman (1968). Na Logit ou Regressão Logística, obtém-se a probabilidade de que uma observação pertença a um de dois conjuntos pré-determinados, em função de variáveis independentes.

Na década de 1990, a técnica de redes neurais produziram resultados bastante animadores na previsão de insolvência. Um dos grandes problemas dos modelos que se valem de indicadores é justamente a escolha deles.

Altman *et al.* (2000, p. 99) evidenciam o quadro abaixo contendo os índices financeiros comumente utilizados:

Quadro 1 Principais indicadores financeiros utilizados em análise de solvência

Categoria	Índice
Desempenho Operacional	EBITDA/faturamento
	Receita Líquida/faturamento
	Taxa de tributação efetiva
	Receita Líquida/Patrimônio Líquido
	Receita Líquida/Ativo Total
	Faturamento/ativo fixo
Cobertura do Serviço da Dívida	EBITDA/JUROS
	Fluxo de Caixa Livre
Alavancagem Financeira	Dívida de Longo Prazo/Capitalização
	Dívida de Longo Prazo/Patrimônio Líquido Tangível
	Passivo Total/Patrimônio Líquido Tangível
	Passivo Circulante/Patrimônio Líquido Tangível
Liquidez	Liquidez Corrente
	Liquidez Seca
	Estoque/faturamento líquido
	Estoque/capital de giro líquido
	Dívida circulante/estoques
Recebíveis	Maturidade dos recebíveis: 30, 60, 90 e mais de 90 dias
	Prazo médio de recebimento

Fonte : Altman

Segundo Dwyer et al. (2004, p. 26), uma possível falha nos modelos que empregam diversos quocientes é o *overfitting*.

Um modelo com *overfitting* apresenta resultados muito bons com os dados amostrais que deram origem a modelagem e, simultaneamente, apresentam desempenho sofrível com dados

fora da amostra. Uma das causas do *overfitting* é incorporação de muitas variáveis capazes de captar relações espúrias dos dado que dão origem ao modelo. Por outro lado, ao se utilizar modelos com muitas variáveis em empresas que não fizeram parte da amostra inicial, o modelo se torna muito instável.

O *overfitting* se manifesta também quando um modelo é muito bom para determinada indústria e muito ruim para um setor diferente.

2.7. *Default* e Inadimplência

Os conceitos de *default* e inadimplência serão a temática do presente estudo. Conquanto possa haver alguma diferença entre estes conceitos, este trabalho utilizará o termo consagrado *default* como sinônimo de inadimplência.

Hu e Perraudin (2002, p. 3) definem *default* como a ocorrência de um ou mais dos seguintes eventos:

- não-pagamento ou atraso de principal ou juros;
- pedido de concordata;
- decretação de falência.

Segundo Hamilton et al. (2001, p.18), a empresa de rating *Moody's* considera que houve o *default* desde que ocorra um ou mais dos seguintes eventos:

- ausência ou atraso no pagamento de principal ou juros;
- pedido de concordata;
- proposta de troca da dívida por outro ativo financeiro que monta um valor menor que o devido;

2.8. O Conceito de *Rating*

Um conceito inseparável da análise de crédito é o *rating*.

Rating é uma classificação de risco, por nota ou símbolo. Esta nota expressa a capacidade do emitente de título de dívida negociável ou inegociável em honrar seus compromissos de juros e amortização do principal até o vencimento final. O *rating* pode ser do emitente, refletindo sua capacidade em honrar qualquer compromisso de uma maneira geral, ou de uma emissão específica, em que é considerada apenas a capacidade do emitente em honrar aquela obrigação financeira determinada.

Segundo Fabozzi (2000, p . 195), as quatro principais empresas comerciais de avaliação de risco de crédito são: (1) Duff and Phelps Credit Rating Co., (2) Fitch Investors Service, (3) Moody's Investors Service e (4) Standard & Poor's Corporation.

Os sistemas de avaliação utilizam símbolos similares vistos a seguir:

Quadro 2 Notas de Crédito

Classificação de Investimento: Alta Credibilidade				
Moody's	**S&P**	**Ficth**	**D&P**	**Definição Resumida**
Aaa	AAA	AAA	AA A	Primeira Classe, Máxima segurança
Aa1	AA+	AA+	AA+	
Aa2	AA	AA	AA	Grau muito alto, alta qualidade
Aa3	AA-	AA-	AA-	
A1	A+	A+	A+	

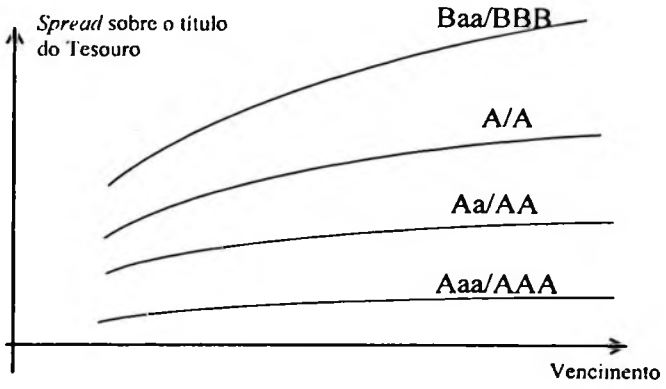
A2	A	A	A	Grau médio superior
A3	A-+	A-	A-	
Baa1	BBB	BBB	BBB	
Baa2	BBB	BBB	BBB	Grau médio inferior
Baa3	BBB-	BBB-	BBB-	
Distintamente Especulativos: Baixa Credibilidade				
Moody's	**S&P**	**Ficth**	**D&P**	**Definição Resumida**
Ba1	BB+	BB=	BB+	Grau baixo, especulativo
Ba2	BB	BB	BB	
Ba3	BB-	BB-	BB-	
B1	B+	B+	B+	
B2	B	B	B	Altamente especulativo
B3	B-	B-	B-	

Predominantemente Especulativos: Risco Substancial ou Inadimplente				
Moody's	**S&P**	**Ficth**	**D&P**	**Definição Resumida**
	CCC+			Risco Substancial, em más condições
Caa	CCC	CCC	CCC	
	CCC-			
Ca	CC	CC		Podem estar inadimplentes, extremamente especulativos
C	C	C		Ainda mais especulativos que os anteriores
	CI			CI = *Income bonds* (títulos de renda); os juros não estão sendo pagos
		DDD		Inadimplentes
		DD	DD	
	D	D		

Fonte: Altman

Ainda segundo Fabozzi (2000, p. 195), os dois sistemas mais largamente utilizados para avaliação de títulos são o da Moody's e o da Standard & Poor's. Hull (2002, p. 611) apresenta o seguinte diagrama, evidenciando que quanto pior *rating*, maior é o *spread* sobre o título do tesouro.

Figura 4 *Spread* de risco sobre o título do tesouro



Fonte : Hull (2002, p. 611)

Adicionalmente, percebe-se que quanto mais distante for o vencimento, maior é o *spread*.

Hull (2002) propõe que o *spread* cresce de maneira mais acentuada com o aumento do vencimento para os títulos de *rating* de crédito mais baixo.

2.9. Taxa de *Default* e Probabilidade de *Default*

Segundo Hu e Perraudin (2002, p. 1), dado um intervalo de tempo, a taxa de *default* ou *default rate* é definida como a fração dos títulos que entram em *default* do total de títulos analisados.

Finger (2000, p.4) afirma que o termo *default rate* ou taxa de *default* é usualmente empregado de forma solta na literatura, muitas vezes assemelhando-se com a probabilidade de *default*. De maneira a não deixar dúvidas do que é a taxa de *default*, Finger (2000, p.4) define *default rate* como uma variável aleatória dada pela proporção dos ativos no portfólio que entraram em *default*. Por exemplo, se a variável X_i^k for igual a 1 no caso de *default* do ativo *i* no ano *k*, então a taxa de *default* no ano *k* é dada por:

$$\textit{Default Rate no ano } k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Hamilton et al. (2001, p. 20) afirma que na ótica da *Moody's*, as taxas de *default* são frações em que o numerador representa o número de emissores que entraram em *default* num particular intervalo de tempo e o denominador representa o número de emissores que podiam ter entrado em *default* no mesmo intervalo de tempo.

A seguir está a tabela com *default rate* elaborada pela *Moody's* considerando o ano de 2000 individualmente e a média dos anos de 1970 até 2000.

Tabela 2 Taxa de Default

Setor	2000	Média de 1970 até 2000
Bancário	0,15%	0,46%
Produtos de Consumo	5,51%	1,34%
Energia	0,00%	1,47%
Financeiro não Bancário	0,76%	0,81%
Hoteleiro	4,68%	3,16%
Industrial	2,37%	1,92%
Varejo	4,22%	2,44%
Tecnologia	2,50%	1,24%
Transportes	3,63%	2,15%
Serviços Públicos	0,00%	0,10%

Fonte: Moody's

Hull (2002, p. 619) apresenta a seguinte tabela contendo taxas de *default* calculadas pela *Standard &Poor's*:

Tabela 3 Taxa de Default Média Acumulada

Rating	Vencimento em Anos						
	1	2	3	4	5	7	10
AAA	0.00	0.00	0.04	0.07	0.12	0.32	0.67
AA	0.01	0.04	0.10	0.18	0.29	0.62	0.96
A	0.04	0.12	0.21	0.36	0.57	1.01	1.86
BBB	0.24	0.55	0.89	1.55	2.23	3.60	5.20
BB	1.08	3.48	6.65	9.71	12.57	18.09	23.86
B	5.94	13.49	20.12	25.36	29.58	36.34	43.41
CCC	25.26	34.79	42.16	48.18	54.65	58.64	62.58

Fonte: Standard &Poor's, Janeiro 2001

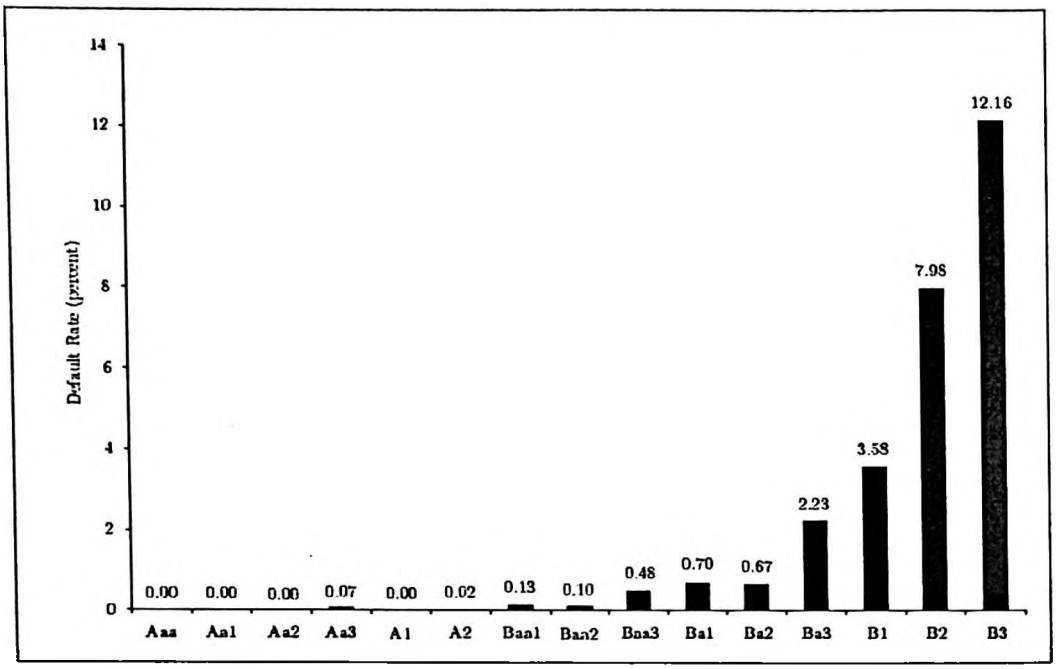
A tabela anterior evidencia a experiência observada no mercado, indicando que um título com um *rating* de crédito BBB tem uma chance de 0,24% de entrar em *default* até o final do primeiro ano, 0,55% de entrar em *default* até o final do segundo ano e assim por diante. A probabilidade do título entrar em *default* no segundo ano é de 0,55% - 0,24% = 0,31%.

É interessante notar que para títulos com grau de investimento, a probabilidade de *default* é uma função crescente com o tempo. O contrário é verdadeiro para títulos com baixa nota de crédito. Por exemplo, utilizando a tabela anterior, nota-se que as probabilidades de *default* de um título AA nos anos 1, 2, 3, 4 e 5 são de 0,01%, 0,03%, 0,06%, 0,08% e 0,11%. Por outro lado, estas probabilidades para um título CCC são de 25,26%, 9,53%, 7,37%, 6,02% e 6,47%.

É pertinente observar que Hull (2002) iniciou seu raciocínio empregando taxa de *default* e aproveitou os resultados obtidos chamando-os de probabilidade de *default*.

Abaixo é mostrado *default rate* obtido pela *Moody's* de acordo com o *rating* de crédito da empresa.

Figura 5 Default Rate de acordo com rating



Fonte: Moody's

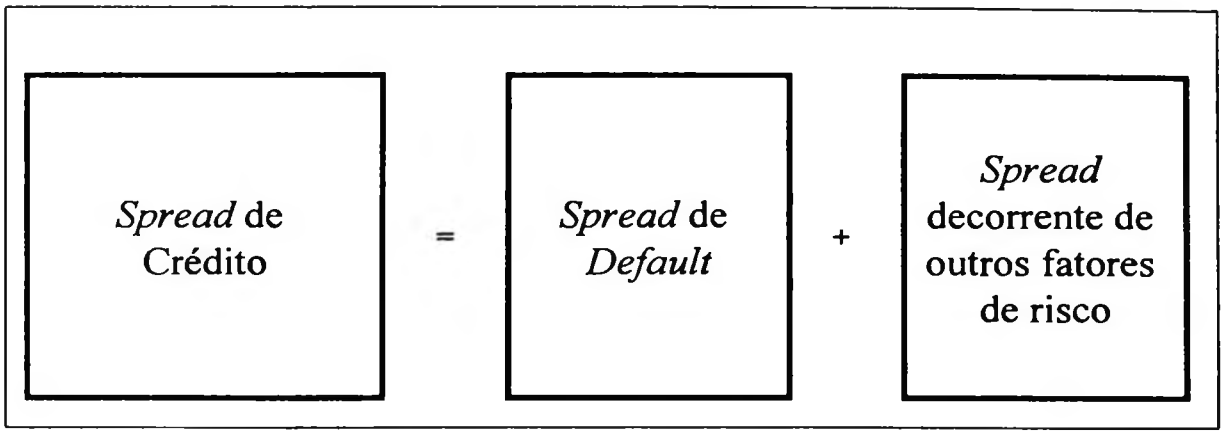
2.10. *Spread* de *default* e o *Spread* de Crédito

O *spread* de *default* é o prêmio embutido na taxa de rendimento dos títulos sujeito a *default* de forma a compensar o risco.

Segundo Delianedis e Geske (2001, p.1), o *spread* de crédito no mercado americano de títulos corporativos é geralmente medido e cotado como a diferença entre o rendimento de um título soberano comparado com o título corporativo adequadamente ajustados pela maturidade e pelo pagamento de cupom.

Os referidos autores afirmam que esta diferença costuma ser atribuída exclusivamente ao risco de *default*. Contudo, uma vez que títulos corporativos com elevados *ratings* de crédito possuem diminuta probabilidade de *default*, o *spread* de crédito parece ser muito grande para ser explicado exclusivamente pelo risco de *default*.

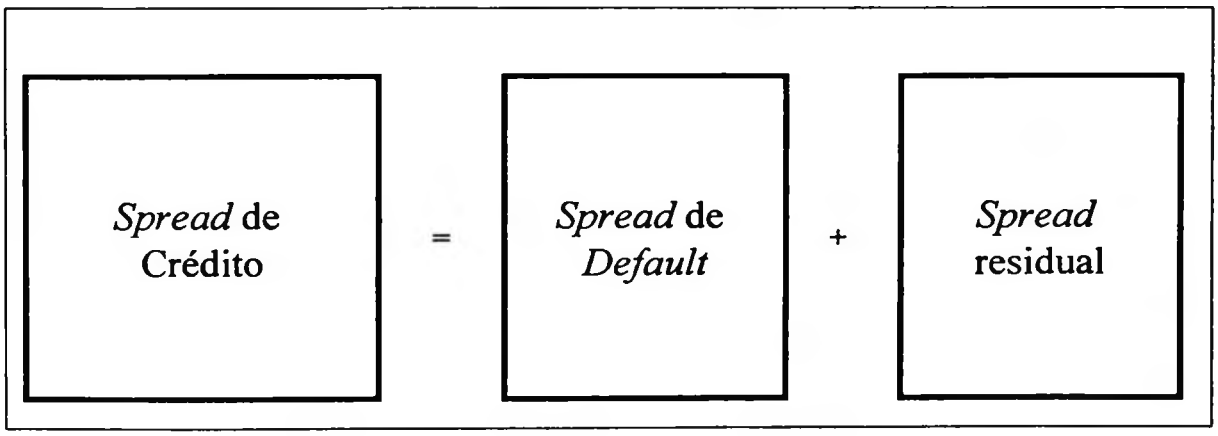
Figura 6 Spread de Crédito decomposto em spread de default e em outros fatores de risco



Fonte: Autor

Delianedis e Geske (2001, p. 4) definem o *spread* de *default* como a medida teórica da componente de *default* do *spread* de crédito e definem o *spread* residual como a diferença entre o *spread* de crédito observado e o *spread* de *default* calculado. Os referidos autores atribuem o *spread* residual a existência de outros fatores como impostos (Delineadis e Geske afirmam que nos Estados Unidos a tributação de títulos públicos é diferente da tributação de títulos corporativos), liquidez e riscos de mercado.

Figura 7 Srpead de Crédito na visão de Delianedis e Geske



Fonte: Autor

Os autores acima mencionados afirmam que a maior parte da literatura versando sobre risco de crédito tem presumido que o *spread* de crédito é primariamente atribuído ao risco de

default. Contudo, eles ponderam que as pesquisas sobre risco de *default* não explicam boa parcela do risco de crédito. Adicionalmente, eles citam o trabalho de Elton et al. (2001) em que o *spread* de crédito é decomposto nas componentes de *default*, impostos e risco de mercado.

Delianedis e Geske (2001, p. 4) ainda citam os resultados empíricos obtidos por Elton et al. (2001) que defendem que o *spread* de *default* não é a componente principal do *spread* de crédito para títulos corporativos com grau de investimento, concluindo que a componente de impostos e especialmente os fatores de risco e retorno de mercado são componentes mais significativoas no *spread* de crédito.

2.11. Probabilidade de *default*, *default intensity* e *hazard rate*

Brealey e Myers (1996, p. 662-663) lançam a seguinte pergunta: por que alguns tomadores pagam taxas de juros mais altas que outros?

Segundo os referidos autores, a resposta é óbvia: quando os preços dos títulos caem, as taxas de juros prometidas por tais títulos sobem porque a probabilidade de *default* aumenta. Se o tomador efetivamente torna-se inadimplente (entra em *default*) a taxa de juros efetivamente paga é menor que a taxa de juros prometida.

Madan e Unal (1999, p. 1) afirmam que *hazard rate* é a probabilidade da firma entrar em *default* no próximo período de tempo.

Segundo Hull et al. (2004, p. 1), intensidade de *default* ou *default intensity*, algumas vezes chamada de *hazard rate*, é a probabilidade de *default* por ano condicionada a ausência de *default* anterior.

Hull (2002, p. 613-614) afirma que existem duas maneira de quantificar a probabilidade de *default*. Uma delas é conhecida como *hazard rate* e a outra é conhecida como densidade de probabilidade de *default*. A *hazard rate* $h(t)$ no instante t é definida de tal forma que $h(t).\delta t$ é a probabilidade de *default* entre os instantes t e $t + \delta t$ condicional a inexistência de *default* entre os instantes 0 e t. Por outro lado, a densidade de probabilidade de *default* $q(t)$ é definida de modo que $q(t).\delta t$ não está condicionada a inexistência de *default* anterior.

Segundo Hull (2002, p. 614), tanto *h(t)* como *q(t)* podem ser empregados para descrever a probabilidade de *default*. Estas grandezas produzem informações equivalentes e a relação entre elas é dada por:

$$q(t) = h(t).\exp\left(-\int_0^t h(\tau)d\tau\right)$$

É importante salientar que muitos trabalhos se destacaram na modelagem do risco de *default* e na precificação do risco de crédito, empregado o conceito de *hazard rate*. Destacam-se os trabalhos de Jarrow e Turnbull (1995), Nielsen e Ronn (1996), Lando (1997), Madan e Unal (1998) e Duffie e Singleton (1999). Algumas características destes trabalhos são: (i) a modelagem do *default* permite a possibilidade do *default* num futuro imediato; (ii) o modelo sugerido, que governa a *hazard rate,* é exógeno, significando que esta taxa é modelada desconsiderando variáveis estruturais da empresa em análise.

2.12. A probabilidade de *default* e a perda esperada caso ocorra *default*

Segundo Hull (2002, p. 611), o primeiro passo para se estimar a probabilidade de *default* é, a partir dos preços dos títulos. Calcular a expectativa de perda de um título no evento de *default* envolve comparar o preço do título corporativo com o preço de um título sem risco que tenha o mesmo vencimento e pague o mesmo cupom.

A suposição usual é que o valor presente do custo do *default* é igual ao excesso de preço do título sem risco quando comparado com o preço do título corporativo. Isto significa que o maior rendimento esperado no título corporativo é inteiramente compensado pela possibilidade de perda no evento do *default.*

Ainda segundo Hull (2002), o preço de um título livre de risco é calculado a partir da curva zero do cupom sem risco. Uma escolha natural para a construção da curva de juros sem risco é o emprego da curva obtida a partir dos títulos do tesouro.

Muitos analistas efetivamente empregam a curva dos títulos do tesouro para comparar com o rendimento do título corporativo, conforme evidencia a tabela abaixo:

Tabela 4 Perda esperada pelo Default em Percentual. Rendimentos continuamente capitaliza

Vencimento em anos	Rendimento do título livre de risco zero cupom	Rendimento do título corporativo zero cupom	Perda esperada acumulada em %
1	5,00%	5,25%	0,2497%
2	5,00%	5,50%	0,9950%
3	5,00%	5,70%	2,0781%
4	5,00%	5,85%	3,3428%
5	5,00%	5,95%	4,6390%

Fonte: Hull (2002)

Para se entender a última coluna da tabela anterior, montou-se a tabela seguinte evidenciando a comparação entre os preços dos título com e sem risco:

Tabela 5 Perda esperada pelo Default em Valor utilizando capitalização contínua

Vencimento em anos	Valor Presente do título livre de risco zero cupom prometendo pagar $ 1.000 no vencimento	Valor Presente do título corporativo zero cupom prometendo pagar $ 1.000 no vencimento	Perda esperada acumulada em valor
1	951,22942	948,85432	2,37510
2	904,83742	895,83414	9,00328
3	860,70798	842,82157	17,88640
4	818,73075	791,36182	27,36894
5	778,80078	742,67258	36,12820

Fonte: Autor

A perda esperada pelo *default* em percentual presente na Tabela 3 é obtida ao se fazer um menos o quociente dado pelos valores observados nas colunas três e dois da Tabela 4.

Vejamos:

$$1-\frac{1000.e^{-0,0525\times 1}}{1000.e^{-0,0500\times 1}}=0,2497\%$$

A explicação e dedução desta relação matemática será feita adiante neste capítulo.

Isto significa que o detentor do título espera perder 0,2497% em *defaults* no primeiro ano. De maneira similar, o detentor do título espera perder 0,995% em *defaults* nos dois primeiros anos. Conclui-se também que entre os anos um e dois espera-se perder 0,7453% em *defaults*.

Expandindo este raciocínio, obtém-se a seguinte tabela:

Tabela 6 Perda esperada no ano pelo Default em percentual

Vencimento em anos	Probabilidade Acumulada de *Default*	Perda esperada no ano em %
1	0,2497%	0,2497%
2	0,9950%	0,7453%
3	2,0781%	1,0831%
4	3,3428%	1,2647%
5	4,6390%	1,2961%

Fonte: Autor

Hull (2002, p. 612) afirma que existem razões para que títulos do tesouro americano tenham rendimentos tão baixos. Como exemplo, ele cita que os juros dos *treasuries* não são taxados pelos estados enquanto que a grande maioria dos títulos corporativos são taxados tanto estadual como federalmente.

Logo, os títulos do tesouro podem oferecer um rendimento bruto aparentemente baixo, pois eles só serão taxados na esfera federal.

2.13. Taxa de Recuperação ou *Recovery Rate* e LGD

Hu e Perraudin (2002, p. 1) definem taxa de recuperação como a razão entre o valor de mercado do título um mês após o *default* e o valor devido e não-pago no vencimento do título.

Hamilton et al. (2001, p. 24) afirmam que na ótica da *Moody's* a taxa de recuperação é dada pelo valor de mercado do título um mês após o *default*. Contudo, mais adiante o referido autor declara que a taxa de recuperação é obtida ao se dividir o valor do título um mês após o *default* por seu valor ao par.

Hull (2002, p. 614) define taxa de recuperação como a proporção do valor reivindicado pelo credor efetivamente recebido no evento de *default*.

Considerando R a taxa de recuperação, Düllmann e Trapp (2004, p. 1) afirmam que a perda incorrida no evento de *default*, também denominada de LGD (*Loss Given Default*), é dada por:

$$R = 1 - LGD$$

Asarnow e Edwards (1995), citados por Düllmann e Trapp (2004, p. 3), realizaram um estudo empírico sobre taxas de recuperação que cobre um período de 24 anos de 1970 até 1993. Eles analisaram 830 empréstimos a empresas comerciais e industriais, e 89 empréstimos estruturados concedidos pelo Citibank que foram classificados como duvidosos sobre o ponto de vista creditício.

A perda no evento de *default* é medida como o valor do fluxo de caixa contratual não-pago trazido para valor presente pela taxa do empréstimo.

Os referidos autores obtiveram como conclusão que a perda ou LGD é independente de fatores macroeconômicos. Há um valor médio de 34,79% para empresas comerciais e industriais e de 12,75% para os empréstimos estruturados, sendo a monitoração pelo banco das empresas tomadoras a explicação para a menor perda.

Altman e Brady (2002) e Altman et al. (2003) exploram o impacto da oferta e demanda por títulos emitidos por empresas com histórico de *default* sobre a taxa de recuperação. O estudo deles cobre os anos de 1982 até 2001 com taxa de recuperação obtida a partir do primeiro preço do título logo após o evento de *default*.

A análise é realizada com a taxa agregada anual de recuperação como variável dependente. Esta taxa de recuperação é agregada, pois foi obtida pela média ponderada das taxas de recuperação de todos os títulos que entraram em default, que são aproximadamente 1000. Os autores do artigo alegam que o desempenho da economia é de importância secundária. Considerando um modelo univariado e introduzindo como variável independente das taxas de juros pagas pelos títulos sujeitos a risco, os autores descobriram que esta variável respondia por 60% da variabilidade encontrada na taxa de recuperação. Uma questão colocada pelos autores é a seguinte: por que variáveis macroeconômicas como crescimento do PIB influenciaram a taxa agregada de recuperação de maneira reduzida?

Um estudo de Gupton et al. (2000) investiga a taxa de recuperação de 181 empréstimos bancários para 121 grandes tomadores norte-americanos que entraram em *default* num intervalo de tempo entre 1989 e 2000. Preços dos empréstimos no mercado secundário um mês após o *default* são usados como *proxy* para a taxa de recuperação e para o LGD. Os autores encontraram LGD médio entre 30,5% e 47,9%, taxas mais altas se comparadas com os

resultados encontrados por Asarnow e Edwards (1995). Gupton et al. (2000) também concluíram que o LGD é determinado por diversos outros fatores como a disponibilidade de colateral e o número de empréstimos concedidos ao devedor.

Ao discutir taxa de recuperação, Hull (2002, p. 614) afirma que quando uma empresa vai a bancarrota, os credores pressionam a empresa devedora para que ativos sejam liquidados e o resultado das vendas seja utilizado para fazer frente aos valores devidos. Não obstante, alguns credores têm prioridade em relação ao demais. O referido autor mostra dados contidos na Tabela 6 indicando o percentual recuperado pelos credores de acordo com as garantias inerentes aos títulos considerando a realidade norte-americana.

Tabela 7 Taxa de Recuperação R como percentual do valor ao Par obtido da Moody's (2000)

Classe	Média da Taxa de Recuperação R	Desvio Padrão da Taxa de Recuperaçãc R
Senior Secured	52,3100%	25,1500%
Senior Unsecured	48,8400%	25,0100%
Senior Subordinated	39,4600%	24,5900%
Subordinated	33,1700%	20,7800%
Junior Subordinated	19,6900%	13,8500%

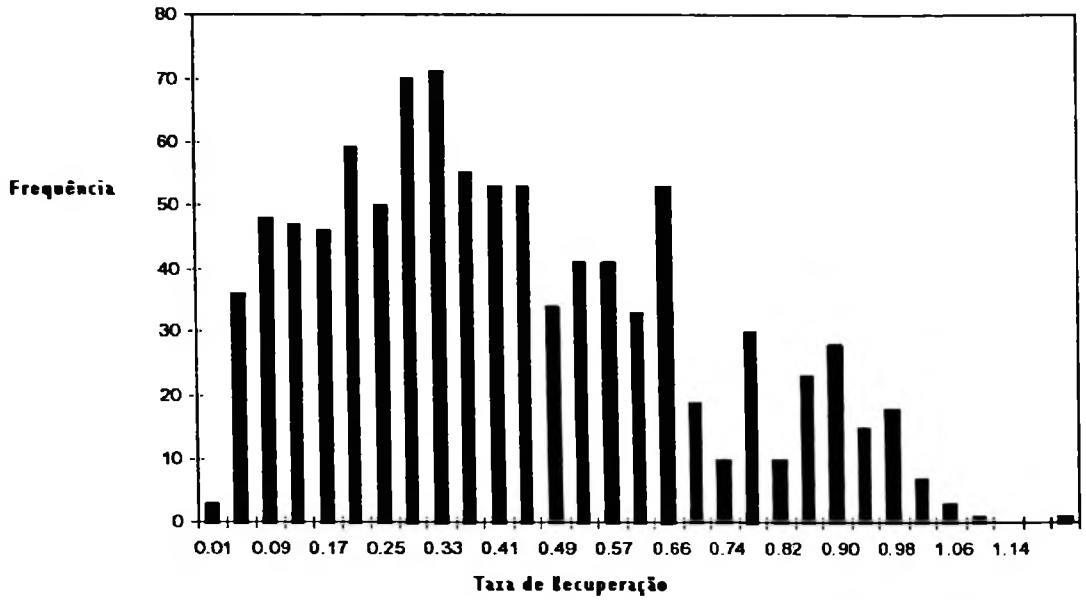
Fonte:Moody's

Frye (2003) estuda 960 títulos que entraram em *default* entre 1983 e 2001, os quais foram segmentados em 49 modalidades de dívida. Frye conclui que o LGD é geralmente maior em anos que muitos títulos entram em *default,* indicando a presença de um efeito sistêmico.

Hu e Perraudin (2002, p. 1) argumentam que os estudos de risco de crédito desenvolvidos por Gupton et al (1997), Jarrow, Lando e Turnbull (1997), Kijima e Komoribayashi (1998) assumem que as taxas de recuperação de títulos em *default* são independentes do evento de *default.* Diversos autores iniciaram seus estudos assumindo independência, porém esta presunção é questionada por Hu e Perraudin, sendo este questionamento o ponto de partida de seus estudos.

Hu e Perraudin (2002) realizaram uma regressão considerando 958 títulos em *default* entre 1.971 e 2.000.

Figura 8 Distribuição de freqüências das taxas de recuperação obtidas por Hu e Perraudin (2002)



Fonte: Hu e Perraudin (2002)

Os referidos autores encontraram evidências de uma correlação negativa entre a taxa de recuperação e a taxa de *default*. A correlação negativa aumenta após 1982. A taxa de recuperação utilizada por Hu e Perraudin(2002) foi obtida pela razão entre o valor de mercado do título um mês após o *default* e o valor não-pago.

Acharya et al. (2003) estudaram os determinantes da variabilidade das taxas de recuperação baseados no banco de dados da Standard & Poor's Credit Pro database. Os autores identificaram que a condição do setor da firma que entrou em *default* é um importante na determinação da taxa de recuperação. Esta conclusão está de acordo com Hu e Perraudin (2002, p. 1) que afirmam que diferentes setores possuem taxas de recuperação bem diferentes.

Segundo Zenios e Jobst (2001, p. 3) apresentam diferentes premissas para o valor recuperado no caso de *default:*

- Zero Recovery (ZR): Nesta hipótese, caso ocorra o *default*, o credor do título nada receberá. Esta hipótese é pouco realista. Contudo, foi utilizada nos trabalhos de Litterman e Iben (1991);

- *Recovery of Treasury* (RT): Nesta hipótese, caso ocorra o *default*, o credor do título receberá uma fração, eventualmente aleatória, do valor do título livre de risco equivalente sendo que esta fração é determinada de maneira independente do valor do título com risco;

- *Recovery of Face Value* (RFV): Nesta hipótese, caso ocorra o *default*, o credor do título receberá uma fração, eventualmente aleatória, do valor de face do título com risco;

- *Recovery of Market Value* (RMV): Nesta hipótese, caso ocorra o *default*, o credor do título receberá uma fração, eventualmente aleatória, do valor de mercado do título com risco. Este valor de mercado é imediatamente antes do anúncio do *default*;

Conforme será visto posteriormente, Duffie e Singleton (1999) realizaram pesquisa comparando as diferenças na modelagem do *default* de acordo com a premissa de taxa de recuperação adotada.

2.14. Probabilidade de *default* assumindo Taxa de Recuperação igual a zero

Embora já se tenha discutido o conceito probabilidade de *default*, os exemplos numéricos anteriores contidos nas Tabelas 2 e 3 servirão para ilustrar o conceito de probabilidade de *default* assumindo zero de recuperação.

Sejam:

$y(t)$ rendimento de um título corporativo zero cupom com vencimento em T;

$y^{*}(t)$ rendimento de um título sem risco zero cupom com vencimento em T;

$Q(t)$ probabilidade da firma entrar em *default* entre os instantes 0 e T;

O preço do título sem risco zero cupom com vencimento em T e com valor de face \$ 100 é $100.e^{-y^{*}(T).T}$ enquanto que o preço do título corporativo zero cupom com vencimento em T e com valor de face \$ 100 é $100.e^{-y(T).T}$.

O valor presente da perda esperada pelo *default* é:

$$100.e^{-y^*(T).T} - 100.e^{-y(T).T} = 100.\left(e^{-y^*(T).T} - e^{-y(T).T}\right)$$

Assumindo que no evento de *default* a firma pagará zero ao credor, isto é, assumindo taxa de recuperação zero, o cálculo de *Q(t)* é relativamente fácil.

Hull (2002, p. 612) afirma que existe uma probabilidade *Q(t)* do título corporativo valer zero no seu vencimento e uma probabilidade (1 -*Q(t)*) do título valer $100 na sua maturidade.

Portanto, uma fórmula para se obter o preço do título é:

$$\{Q(t)\times 0 + [1 - Q(t)]\times 100\}.e^{-y^*(T).T} = 100.[1 - Q(t)].e^{-y^*(T).T}$$

Deve-se salientar que na formulação anterior descontou-se o valor esperado para o título corporativo com risco por uma taxa de juros livre de risco, pois assumiu-se *Q(t)* como uma probabilidade risco-neutra, algo que será discutido com maior profundidade em tópico posterior.

Não obstante, sabe-se também que o preço do título pode ser obtido por $100.e^{-y(T).T}$.

Logo, tem-se que:

$$100.[1 - Q(t)].e^{-y^*(T).T} = 100.e^{-y(T).T}$$

$$Q(t) = \frac{e^{-y^*(T).T} - e^{-y(T).T}}{e^{-y^*(T).T}}$$

$$Q(t) = 1 - e^{-T.[y(T) - y^*(T)]}$$

De maneira a exemplificar, Hull (2002, p. 620) afirma que assumindo taxa de recuperação zero e aproveitando os dados das Tabelas 3 e 4, obtemos a Tabela 7:

Tabela 8 Probabilidades de Default Acumulada e Anual Considerando Taxa de Recuperação zero

Vencimento em anos	Probabilidade Acumulada de *Default*	Probabilidade de *Default* no Ano
1	0,2497%	0,2497%
2	0,9950%	0,7453%
3	2,0781%	1,0831%
4	3,3428%	1,2647%
5	4,6390%	1,2961%

Fonte: Autor

A título de ilustração, note que:

$$Q(1) = 1 - e^{-1.[0,0525-0,05]} = 0,2497\%$$

$$Q(2) = 1 - e^{-2.[0,0550-0,05]} = 0,9950\%$$

$$Q(3) = 1 - e^{-3.[0,0570-0,05]} = 2,0781\%$$

$$Q(4) = 1 - e^{-4.[0,0585-0,05]} = 3,3428\%$$

$$Q(5) = 1 - e^{-5.[0,0595-0,05]} = 4,639\%$$

2.15. Probabilidade de *default* assumindo Taxa de Recuperação diferente de zero: Modelo Simplificado

No tópico anterior, realizou-se uma modelagem para a probabilidade de *default* considerando zero a taxa de recuperação.

Utilizando a mesma notação do tópico anterior, definindo R como a taxa de recuperação e assumindo que na ausência de *default* o credor recebe no vencimento 100, tem-se que o preço do título é dado por:

$$100.[1 - Q(t)]e^{-y^*(T).T} + R.100.Q(t).e^{-y^*(T).T}$$

Não obstante, sabe-se também que o preço do título pode ser obtido por $100.e^{-y(T).T}$.

$$100.[1-Q(t)]e^{-y^*(T).T} + R.100.Q(t).e^{-y^*(T).T} = 100.e^{-y(T).T}$$

Fazendo as simplificações devidas, tem-se que:

$$Q(t) = \frac{1-e^{-T.[y(T)-y^*(T)]}}{1-R}$$

Utilizando os dados do tópico anterior e taxa de recuperação igual a 30%, segue que:

$$Q(1) = \frac{1-e^{-1.[0,0525-0,05]}}{0,7} = 0,3567\%$$

$$Q(2) = \frac{1-e^{-2.[0,0550-0,05]}}{0,7} = 1,4214\%$$

$$Q(3) = \frac{1-e^{-3.[0,0570-0,05]}}{0,7} = 2,9687\%$$

$$Q(4) = \frac{1-e^{-4.[0,0585-0,05]}}{0,7} = 4,7754\%$$

$$Q(5) = \frac{1-e^{-5.[0,0595-0,05]}}{0,7} = 6,6271\%$$

A relação anterior carrega consigo as seguintes premissas:

- supôs-se que no evento de *default*, o credor recebe uma proporção R do valor presente do título livre de risco e se não ocorrer *default*, o credor recebe $ 100. Embora esta suposição (receber uma proporção R do valor presente do título livre de risco) seja conveniente do ponto de vista analítico, ela não é plausível em termos práticos. Note também que em 2.9 foi visto que esta suposição é conhecida como *Recovery of Treasury* (RT). Uma premissa mais realista seria que a taxa de recuperação R seja obtida contemplando o valor de face do título acrescido de juros;

- considerou-se que o título fosse um zero cupom;
- considerou-se que o valor do título no vencimento fosse conhecido.

2.16. Probabilidade de *Default* assumindo Taxa de Recuperação Diferente de Zero: Modelo com Premissas Mais Realistas

De maneira a robustecer o modelo afrouxando algumas hipóteses, Hull (2002, p. 615) evidencia um modo de extrair probabilidades de *default* de títulos que pagam cupom.

Considerando um conjunto de N títulos que paguem cupons emitidos por uma firma em particular e/ou por outras empresas que ostentem probabilidade de *default* similar a empresa em particular em todos os períodos futuros de tempo. Aceita-se que o *default* apenas possa ocorrer no vencimento do respectivo título. Assumindo que a maturidade do *i-ésimo* título seja t_i com $t_1 < t_2 < .... t_N$, define-se:

B_j Preço hoje do *j-ésimo* título;

G_j Preço hoje do *j-ésimo* título se a probabilidade de *default* fosse zero. Este preço é o mesmo de um título sem risco e que possua a mesma promessa de pagamentos de B_j;

$F_j(t)$ Preço a termo do *j-ésimo* título com vencimento em t assumindo que o título seja livre de risco. Note que $F_j(t)$ é o preço a termo de G_j;

$v(t)$ Valor presente de $1 prometido na data t sem o risco de *default*;

$C_j(t)$ Valor reclamado pelo credor do *j-ésimo* título caso haja *default* no instante t;

$R_j(t)$ Taxa de recuperação para credor do *j-ésimo* título caso haja *default* no instante t;

α_{ij} Valor presente da perda decorrente do *default* do *j-ésimo* título ocorrido no instante t;

p_i: Probabilidade de *default* no instante t_i;

De maneira a facilitar a exposição, assume-se que as taxas de juros são determinísticas e que também o são a taxa de recuperação e o valor reclamado pelo credor. Hull (2002, p. 615) argumenta que os resultados obtidos continuam verdadeiros ao se assumir tais premissas desde que (i) os eventos de *default,* (ii) taxa de juros livre de risco e (iii) as taxas de recuperação sejam independentes.

Caso não ocorra *default,* o credor do *j-ésimo* título com risco receberá no vencimento $F_j(t_i)$. Caso ocorra *default,* o credor do *j-ésimo* título com risco receberá $R_j(t_i).C_j(t_i)$.

Logo, o valor presente da perda com o *default* para o *j-ésimo* título é dado por:

$$\alpha_{ij} = v(t_i).[F_j(t_i) - R_j(t_i).C_j(t_i)]$$

Vale salientar que em α_{ij}, o subscrito *j* representa o *j-ésimo* título enquanto que o subscrito *i* evidencia o pagamento do *i-ésimo* fluxo do título *j*.

Uma vez que a probabilidade de *default* no instante t_i é dada por p_i, sabe-se que o valor presente total das perdas do *j-ésimo* título com risco é dado por:

$$G_j - B_j = \sum_{i=1}^{j} p_i.\alpha_{ij}$$

Perceba que há necessidade de se utilizar somatória de *i=1* até *j,* pois o modelo permite que *j-ésimo* título com risco possa pagar cupons periódicos até o instante *j*.

Para *j =1,* tem-se que:

$$G_1 - B_1 = p_i.\alpha_{11}$$

Logo:

$$p_1 = \frac{G_1 - B_1}{\alpha_{11}}$$

Por indução, concluí-se que:

$$p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i.\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}$$

Nas considerações preliminares, afirmou-se que existe um conjunto de N títulos que pagam cupons que tenham sido emitidos por uma firma em particular ou por outra empresa que ostente probabilidade de *default* similar a empresa em particular em todos os períodos futuros de tempo. Logo, considera-se que p_i seja igual para todos os títulos que prometam pagamento na data i.

Outra hipótese simplificadora adicionada ao modelo será supor que a taxa de recuperação será igual para todos os títulos independentemente do vencimento, a qual será doravante designada por $\hat{R}$.

Desta maneira, reescreve-se a equação de α_{ij} da seguinte maneira:

$$\alpha_{ij} = v(t_i)\left[F_j(t_i) - \hat{R}.C_j(t_i)\right]$$

Com o objetivo de sedimentar o conjunto de fórmulas desenvolvidas, Hull (2002, p. 616) apresenta um exemplo numérico baseado na Tabela 9:

Tabela 9 Características dos títulos emitidos pela corporação

Vencimento em anos	Cupom pago semestralmente	Rendimento
1	7,0000%	6,6000%
2	7,0000%	6,7000%
3	7,0000%	6,8000%
4	7,0000%	6,9000%
5	7,0000%	7,0000%
10	7,0000%	7,2000%

Fonte: Hull (2002)

A tabela anterior apresenta dados hipotéticos sobre seis títulos emitidos por uma corporação em particular ou por outras empresas de risco similar. Tais títulos possuem maturidade variando de um a dez anos e pagam cupom semi-anualmente. Assume-se que:

- a taxa de juros livre de risco é plana em 5% ao ano composta semestralmente;
- a taxa rendimento de cada título é composta semestralmente;
- a taxa de recuperação é de 30%.

Com as premissas acima, obtém-se os seguintes fluxos de caixa descritos na Tabela 10:

Tabela 10 de Caixa de 6 Títulos que pagam cupom semestralmente

Semestre	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo de Caixa Título
0						
1	35,00	35,00	35,00	35,00	35,00	
2	1.035,00	35,00	35,00	35,00	35,00	
3		35,00	35,00	35,00	35,00	
4		1.035,00	35,00	35,00	35,00	
5			35,00	35,00	35,00	
6			1.035,00	35,00	35,00	
7				35,00	35,00	
8				1.035,00	35,00	
9					35,00	
10					1.035,00	
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						1
Rendimento do Título com risco ao ano	6,8000%	6,7000%	6,8000%	6,9000%	7,0000%	7
Rendimento do Título com risco ao semestre	3,3000%	3,3500%	3,4000%	3,4500%	3,5000%	3
G_j VP à taxa de 2,5% ao semestre	1.019,27	1.037,62	1.056,08	1.074,70	1.087,52	1
B_j VP à taxa do Rendimento do Título	1.003,81	1.005,53	1.005,35	1.003,44	1.000,00	1
$G_j - B_j$	15,46	32,09	49,74	68,26	87,52	

Fonte: Autor

Observe que na parte de baixo da tabela encontra-se $G_j - B_j$. Esta relação evidencia a perda esperada por conta de *default* do *j-ésimo* título.

Uma vez que Hull (2002) apresenta duas abordagens para o cálculo da probabilidade de *default*, uma na qual a taxa de recuperação é calculada sobre o valor de face no vencimento do título e outra em que a taxa de recuperação é calculada em cima do valor de face no vencimento do título acrescido de juros. Deve-se calcular a probabilidade de *default* em cada uma destas abordagens:

- Cálculo da probabilidade de *default* supondo que Cj(t) seja igual a Fj(t)

Uma vez que o *default* apenas pode ocorrer em datas que sejam vencimento de algum dos títulos da carteira, determinou-se o valor a termo de cada título da carteira para cada um dos vencimentos presentes na carteira. Isto é:

(i) o valor a termo do título $j=2$ no instante $i=1$ é R$ 1.054,27;

(ii) o valor a termo do título $j=3$ no instante $i=1$ é R$ 1.072,62;

(iii) o valor a termo do título $j=3$ no instante $i=2$ é R$ 1.054,27;

(iv) o valor a termo do título $j=4$ no instante $i=1$ é R$ 1.090,08;

(v) o valor a termo do título $j=4$ no instante $i=2$ é R$ 1.072,62;

(vi) e assim por diante.

O fluxo de caixa no vencimento do título é o valor de face acrescido do cupom correspondente. Este valor também será a quantia reclamada pelo credor.

Este raciocínio conduz à tabela 11:

Tabela 11 $F_j(t)$: Preço a Termo do G_j

	$F_j(t)$: Preço a Termo do G_j					
I-ésimo Vencimento (ano)	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo de Caixa Título j =
0						
1	1.036,00	1.054,27	1.072,62	1.090,08	1.106,70	1.178,
2		1.036,00	1.054,27	1.072,62	1.090,08	1.166,
3			1.036,00	1.054,27	1.072,62	1.151,
4				1.036,00	1.054,27	1.137,
5					1.036,00	1.122,
10						1.036

Fonte: Autor

O próximo passo é a construção do valor reclamado pelo credor Cj(t), o qual é ilustrado pela tabela 12:

Tabela 12 *Valor reclamado pelo credor no instante t*

I ésimo Vencimento (ano)	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo de Caixa Tí
0						
1	1 036,00	1 054,27	1 072,62	1 090,08	1 106,70	
2		1 036,00	1 054,27	1 072,62	1 090,08	
3			1 036,00	1 054,27	1 072,62	
4				1 036,00	1 054,27	
5					1 036,00	
10						

Fonte: Autor

Uma vez que a taxa de recuperação é 30%, pode-se calcular a tabela dos $alfa_{ij}$ evidenciando o valor presente da perda:

Tabela 13 alfa $_{ij}$: Valor Presente de $F_j(t)$ - $R.C_j(t)$

I ésimo Vencimento (ano)	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo de Caixa Tí
0						
1	689,58	702,43	714,66	726,29	737,36	
2		656,36	668,58	680,22	691,29	
3			624,73	636,37	647,44	
4				594,63	605,70	
5					565,98	
10						

Fonte: Autor

Utilizando as fórmulas a seguir, obtém-se a tabela 14:

$$p_1 = \frac{G_1 - B_1}{\alpha_{11}} \text{ e } p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i.\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}$$

Tabela 14 Probabilidade de Default

Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 1: p1*	0,0224
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 2: p2*	0,0249
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 3: p3*	0,0273
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 4: p4*	0,0297
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 5: p5*	0,0320
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 6: p6*	0,1717

Fonte: Autor

Observe que:

$$p_1 = \frac{15,46}{689,59} = 0,0224$$

$$p_2 = \frac{32,09 - 0,0224 \times 702,43}{656,36} = 0,0249$$

$$p_3 = \frac{49,74 - 0,0224 \times 714,65 - 0,0249 \times 668,58}{624,73} = 0,0273$$

- Cálculo da probabilidade de default supondo que Cj(t) seja igual ao valor de face acrescido de juros

Nesta abordagem supondo que $C_j(t)$ seja igual ao valor de face, no caso R$ 1.000, acrescido de juros. Logo, a tabela de $F_j(t)$ com o *Preço a Termo do* G_j não difere da anterior.

A diferença reside na construção do valor reclamado pelo credor $C_j(t)$, conforme ilustra a tabela 15:

Tabela 15 $C_j(t)$: Valor reclamado pelo credor no instante t

I-ésimo Vencimento (ano)	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo d
0						
1	1 033,00	1 033,50	1 034,00	1 034,50	1 035,00	
2		1 033,50	1 034,00	1 034,50	1 035,00	
3			1 034,00	1 034,50	1 035,00	
4				1 034,50	1 035,00	
5					1 035,00	
10						

Fonte: Autor

Uma vez que a taxa de recuperação é 30%, pode-se calcular a tabela dos $alfa_{ij}$ evidenciando o valor presente da perda:

Tabela 16 $alfa_{ij}$: *Valor Presente de $F_j(t)$ - $R.C_j(t)$*

I-ésimo Vencimento (ano)	Fluxo de Caixa Título j = 1	Fluxo de Caixa Título j = 2	Fluxo de Caixa Título j = 3	Fluxo de Caixa Título j = 4	Fluxo de Caixa Título j = 5	Fluxo de C
0						
1	690,16	708,36	725,68	742,16	757,84	
2		656,77	674,09	690,58	706,26	
3			624,99	641,48	657,17	
4				594,75	610,45	
5					565,98	
10						

Fonte: Autor

Utilizando as fórmulas a seguir, obtém-se a Tabela 17:

$$p_1 = \frac{G_1 - B_1}{\alpha_{11}} \text{ e } p_j = \frac{G_j - B_j - \sum_{i=1}^{j-1} p_i.\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}$$

Tabela 17 – Probabilidade de Default

Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 1: p1*	0,0224
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 2: p2*	0,0247
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 3: p3*	0,0269
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 4: p4*	0,0291
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 5: p5*	0,0312
Probabilidade de *Default para o Fluxo de Caixa prometido no ano 6: p6*	0,1659

Fonte: Autor

Ao se comparar as tabelas 13 e 16, notar-se-á que as diferentes metodologias conduzem a resultados muito próximos. Hull (2002, p. 617) assevera que este é o caso usual. As probabilidades apenas serão diferentes se os cupons forem muito diferentes da taxa de juros livre de risco.

2.17. Abordagens Mundo-Real e Risco-Neutra para o Cálculo da Probabilidade de *Default*

Hull et al. (2004, p. 1) apontam como característica importante dos mercados de crédito a diferença entre a probabilidade de *default* calculada a partir de dados históricos e a probabilidade de *default* implícita nos preços dos títulos. Como exemplo, ele cita um título que vence em sete anos que tenha um *rating* de crédito A. Hull et al. (2004) mostram que a média da probabilidade de *default* obtida a partir do preço do título é quase dez vezes maior que a probabilidade de *default* obtida com os dados históricos.

Segundo os referidos autores, a resposta para a pergunta por que estas estimativas de probabilidade são tão diferentes reside no fato de que os *traders* de títulos não atribuem preço aos títulos baseados na probabilidade atuarial de *default*. Os *traders* acrescentam um prêmio de retorno extra por conta dos riscos que eles estão incorrendo.

Doravante, a probabilidade de *default* calculada a partir de dados históricos será denominada de probabilidade de *default* mundo-real.

Analogamente, a probabilidade de *default* implícita nos preços dos títulos será denominada de probabilidade de *default* risco-neutra.

Hull et al. (2004, p. 1) asseveram que a probabilidade de *default* mundo-real são geralmente menores que a probabilidade de *default* risco-neutra.

De acordo com estes autores, a probabilidade de *default* risco-neutra é utilizada quando instrumentos de crédito são valorados ao passo que a probabilidade de *default* mundo-real é utilizada em análise de cenários para o cálculo do capital mínimo requerido sob o conceito da Basiléia II.

Altman (1989), *apud* Hull et al. (2004, p. 1), foi um dos primeiros pesquisadores a comentar a discrepância entre preço do título e informações históricas como fonte para o cálculo da probabilidade de *default*. Ele mostrou que, mesmo levando-se em consideração o impacto dos *defaults*, o investidor poderia esperar significativos retornos ao investir em títulos corporativos em comparação ao investimento em títulos livres de risco. Na medida que os *ratings* de crédito da companhia caiam, a magnitude da expectativa dos ganhos aumentava.

2.18. Modelos Estruturais e na Forma Reduzida

O risco de *default* de uma empresa ou título foi modelado utilizando diversas abordagens. As mais antigas incluem análise discriminante, modelos *logit* e tábuas de mortalidade.

Conforme Sundaram (2001, p. 1), os modelos de risco de crédito podem ser subdivididos em duas grandes categorias, a saber: modelos estruturais e modelos na forma reduzida.

Altman et al. (2003, p. 2) afirmam que os modelos de risco de crédito podem ser divididos em três categorias, quais sejam:

- modelos estruturais de primeira geração;
- modelos estruturais de segunda geração;
- modelos na forma reduzida.

Segundo Delianedis e Geske (2001, p.4), tanto os modelos estruturais como os modelos na forma reduzida baseiam suas hipóteses na pressuposição de que o valor da firma ou o preço do título seguem um processo estocástico que permite o cálculo da probabilidade de *default*.

Os modelos estruturais de primeira geração são aqueles baseados no arcabouço original montado por Merton (1974) utilizando princípios da precificação de opções e empregando os modelos de Black e Scholes (1973). Neste arcabouço, o processo de *default* de uma firma é dirigido pelo valor dos ativos da companhia. O risco do *default* da firma está ligado à variabilidade do valor dos ativos.

Ainda consoante Altman et al. (2003, p. 3), nestes modelos todos os elementos relevantes do risco de crédito, incluindo a taxa de *default* e taxa de recuperação, são funções das características estruturais da firma, a saber: volatilidade dos ativos (risco do negócio) e alavancagem (risco financeiro). Adicionalmente, a taxa de recuperação, embora não tratada explicitamente nestes modelos, é uma variável endógena uma vez que o resultado para o credor é o valor residual dos ativos da companhia em *default*. Mais precisamente, sob o manto do arcabouço teórico de Merton (1974), a probabilidade de *default* e a taxa de recuperação esperada são inversamente proporcionais. Outro ponto a ser salientado é que no modelo original de Merton (1974), o *default* pode ocorrer apenas na maturidade da dívida, quando os ativos da firma não mais são suficientes para cobrir as obrigações assumidas por conta da dívida.

Altman et al. (2003, p. 3) afirmam que além de Merton (1974), outros autores contribuiram para os modelos de primeira geração incluindo Black e Cox (1976), Geske (1977), e Vasicek (1984). Cada um destes modelos tentou redefinir alguma premissa simplificadora assumida por Merton (1974). Black e Cox (1976) introduziram a possibilidade de estruturas de capital mais complexas com dívidas subordinadas, Geske (1977) introduziu a possibilidade do título pagar juros periodicamente, Vasicek (1984) introduziu a distinção entre títulos de curto e longo prazo.

Altman et al. (2003, p. 3) asseveram que nos modelos estruturais de segunda geração, o *default* pode ocorrer em qualquer instante entre a emissão e o vencimento da dívida desde que o valor dos ativos da companhia atinja um valor limite. Nestes modelos, a taxa de recuperação no evento de *default* é uma variável exógena e independente do valor dos ativos da firma. O motivo disto é que nestes modelos estruturais de segunda geração a taxa de *default* é geralmente definida como uma razão fixa de acordo com o montante da dívida não-paga, sendo a taxa de recuperação independente da taxa de *default*.

Segundo Delianedis e Geske (2001, p. 2), os *spreads* obtidos a partir de modelos na forma estrutural que se valem da abordagem de opções subestimam os *spreads* empiricamente observados. Os autores explicam esta diferença pelo fato dos modelos de precificação de opções assumirem mercados em que a negociação realiza-se continuamente. Ademais, os modelos estruturais requerem mais dados para serem implementados e são notavelmente melhores para explicar que para prever.

Altman et al. (2003, p. 3) declaram que os modelos na forma reduzida não condicionam o *default* ao valor da firma, tampouco necessitam do cálculo de parâmetros relacionados com o valor da firma. Os modelos na forma reduzida introduzem separadamente premissas explícitas sobre o comportamento da probabilidade de *default* e da taxa de recuperação. Estas variáveis são modeladas independentemente das características estruturais da firma, como volatilidade dos ativos e alavancagem.

A maior parte dos modelos na forma reduzida assumem uma taxa de recuperação exógena e independente da probabilidade de *default*. Mais especificamente, tais modelos assumem como dados o comportamento da taxa de juros livre de risco, a taxa de recuperação bem como o processo estocástico do *default*. A cada instante, há uma probabilidade de *default* das obrigações da firma. Tanto as funções que determinam as probabilidades de *default* quanto a taxa de recuperação do título no evento de *default* podem variar estocasticamente ao longo do tempo, ainda que elas não estejam correlacionadas.

Conforme Delianedis e Geske (2001, p. 2), os modelos na forma reduzida geralmente assumem Processo de Poisson e utilizam *spreads* de créditos observados para calibrar o processo de salto (*jump process*). Além disso, os modelos na forma reduzida requerem menos dados para serem implementados e são notavelmente melhores para prever que para explicar.

Delianedis e Geske (2001, p. 2) citam como as principais pesquisas com modelos estruturais empregando taxas de juros não-estocásticas que generalizam os modelos básicos de Merton (1974) os estudos de Black e Cox (1976), Geske (1977), Shimko, Tejimo e van Deventer (1993), Leland (1995), e Leland e Toft (1996). As principais pesquisas com modelos estruturais empregando taxas de juros estocásticas são Kim, Ramaswamy, e Sundaresan (1993), Longstaff e Schwartz (1995), Saá-Requeo e Santa-Clara (1997) e Brys e de Varnne (1997).

Delianedis e Geske (2001, p. 2) citam como as principais pesquisas com modelos na forma reduzida os trabalhos de Tufano (1996), Jarrow, Lando, Turnbull (1997), Duffie e Singleton (1997) e Duffee (1999).

2.19. Modelo na forma reduzida de Nielsen e Ronn (1996)

Segundo Nielsen e Ronn (1996, p. 1), desde Merton (1974), um corpo substancial de trabalho científico foi desenvolvido modelando o evento de *default* como dependente do valor da firma dado por F com $\frac{dF}{F} = \mu.dt + \sigma.dz$ e o evento de *default* sendo disparado por F < B, podendo ser B tanto o valor da dívida no vencimento como um valor padrão pré-determinado. Nesta mesma direção caminharam Hull e White (1992) e Schwartz (1994), entre outros já mencionados. Conforme visto, tais modelos são classificados como estruturais.

Em contraste, Nielsen e Ronn (1996, p. 1) apresentam uma abordagem na forma reduzida na qual é irrelevante o motivo pelo qual ocorreu *default* e, conseqüentemente, não requer nenhuma especificação dos eventos que precipitaram a bancarrota da firma, sendo esta generalidade um fator atraente para se estudar o trabalho dos referidos autores.

A pesquisa de Nielsen e Ronn (1996) modela o *spread* de *default* instantâneo de títulos, correlaciona este *spread* com a taxa de juros livre de risco e relaciona a intensidade do *default* com o *spread* instantâneo sobre a taxa de juros livre de risco. Logo, a pesquisa de Nielsen e Ronn (1996) é enquadrada como uma modelagem na forma reduzida.

Vejamos com maior cuidado algumas etapas da modelagem dos referidos autores:

Nielsen e Ronn (1996, p. 3) afirmam que um modelo de dois fatores para o risco de *default* assume os seguintes processos de difusão lognormais :

$$dr = \mu_r.r.dt + \sigma_r.r.dz_1$$

$$ds = \sigma_s.s.dz_2$$

Sendo que:

r: Taxa de juros livre de risco instantânea;

μ_t: Mudança esperada em dr. μ_t é escolhido de maneira a capturar a estrutura temporal das taxas de juros;

σ_r: Volatilidade de r;

s: *Spread* instantâneo do título corporativo com risco;

σ_s: Volatilidade de s;

Corr(dr, ds): $\rho \cdot dt$ é a correlação entre *dr* e *ds*.

Nielsen e Ronn (1996, p. 4) argumentam que há relação entre:

- a intensidade do *default* λ (conforme visto anteriormente, a intensidade de *default* também é conhecida como *hazard* rate ou probabilidade de *default*);
- o *spread* instantâneo de *defaults*;
- a taxa de recuperação *D*. Na verdade, caso a empresa não realize o pagamento na data combinada, o título poderá ser vendido por *D*;

Nielsen e Ronn (1996, p. 4) assumem um título com risco de crédito sendo negociado ao par. Assumindo a avaliação risco-neutra, o preço na data zero do título que promete pagar $e^{(r+s).dt}$ no instante *dt* é dado pelo valor descontado dos resultados esperados:

$$1 = e^{-r.dt}.\{D.\lambda.dt + e^{(r+s).dt}.(1 - \lambda.dt)\}$$

Multiplicando os dois lados da equação por $e^{r.dt}$, obtemos:

$$e^{r.dt} = D.\lambda.dt + e^{(r+s).dt}.(1 - \lambda.dt)$$

Realizando a substituição $e^{x.dt} \approx 1 + x.dt$, tem-se que:

$$1 + r.dt = D.\lambda.dt + [1 + (r + s).dt](1 - \lambda..dt)$$

Abrindo o produto, chegamos a:

$$1 + r.dt = D.\lambda.dt + (1 - \lambda.dt) + (r + s).dt.(1 - \lambda.dt)$$

$$1 + r.dt = D.\lambda.dt + 1 - \lambda.dt + r.dt.(1 - \lambda.dt) + s.dt.(1 - \lambda.dt)$$

$$r.dt = D.\lambda.dt - \lambda.dt + r.dt - r.dt.\lambda.dt + s.dt - s.dt.\lambda.dt$$

Note que podemos aproximar para zero os termos da equação acima que possuem diferencial *dt* elevado ao quadrado. Desta maneira:

$$r.dt = D.\lambda.dt - \lambda.dt + r.dt + s.dt$$

$$0 = D.\lambda. - \lambda. + s$$

$$s = \lambda. - D.\lambda$$

Colocando lâmbda em evidência, chegamos em:

$$\lambda = \frac{s}{1 - D}$$

Lembrando que:

λ: Probabilidade de *default*;

s: *Spread* de *default*;

D: Valor pelo qual título poderá ser vendido caso ocorra *default;*

Note que a relação acima é praticamente igual à formulação desenvolvida por Hull (2002) no tópico 2.11.

Uma vez estabelecidos os processos para cada variável do modelo de dois fatores e a relação entre lâmbda, *spread* de *default* e *D*, Nielsen e Ronn (1996, p. 5) propõem treliça

quadrinomial de forma a se estudar os possíveis valores de *r(t)* e *s(t)* num intervalo de tempo Δ.

A justificativa para o emprego da treliça reside no fato dela possuir o número de nós necessários para satisfazer as restrições especificadas pelas equações $dr = \mu_t.r.dt + \sigma_r.r.dz_1$ e $ds = \sigma_s.s.dz_2$.

Eis a treliça proposta pelos aludidos autores:

$$\begin{bmatrix} r(t+\Delta) \\ s(t+\Delta) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta + a_1.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{a_2.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = \lambda(s).\Delta \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta + b_1.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{b_2.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = \text{p-}\alpha.\lambda(s).\Delta \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta + c_1.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{c_2.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = \text{q-}\beta.\lambda(s).\Delta \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta + d_1.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{d_2.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = 1\text{ - p - q+ }(\alpha + \beta - 1).\lambda(s).\Delta \end{cases}$$

O conjunto de 12 parâmetros $\{a_i, b_i, c_i, d_i, p, q, \alpha, \beta; i = 1,2\}$ é escolhido de maneira a satisfazer a média, variância e covariância impostas pelas equações de *r(t)* e *s(t)*.

Especificamente, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$E\begin{bmatrix} dr/r \\ ds/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_t \\ 0 \end{bmatrix}.dt$$

$$Var\begin{bmatrix} dr/r \\ ds/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 \\ \sigma_s^2 \end{bmatrix}.dt$$

$$Cov\left[dr/r, ds/s\right] = \sigma_{12}.dt$$

- Nielsen e Ronn (1996, p. 19) afirmam que a treliça pode ser construída satisfazendo todas as condições impostas desde que $\alpha = \beta = a_1 = .d_1 = 0$ e $p = q = 0{,}25$. Desta forma, Nielsen e Ronn propõem as seguintes relações:

$$a_2 + d_2 = 0$$

$$b_1 + c_1 = 0$$

$$b_1^2 + c_1^2 = 4.\sigma_1^2$$

$$b_2 + c_2 + 2.d_2 = 0$$

$$b_2^2 + c_2^2 + 2.d_2^2 = 4.\sigma_2^2$$

$$b_1.b_2 + c_1.c_2 = 4.\sigma_{12}$$

Resolvendo as equações e sabendo que $\rho = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1.\sigma_2}$, tem-se os seguintes resultados:

$$b_1 = -\sqrt{2}.\sigma_1$$

$$c_1 = +\sqrt{2}.\sigma_1$$

$$a_2 = \pm\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

$$b_2 = \sigma_2\left[\sqrt{2}.\rho \pm \sqrt{1-\rho^2}\right]$$

$$c_2 = \sigma_2\left[\sqrt{2}.\rho \mp \sqrt{1-\rho^2}\right]$$

$$d_2 = \mp\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

Uma vez que as equações acima conduzem a mais de um resultado, Nielsen e Ronn (1996, p. 19-20) apelam para as condições econômicas subjacentes ao modelo.

Eles afirmam que a_2 é a mudança no *spread* de *default* no estado de *default*, logo a_2 deve ser positivo. Em virtude disto, tem-se que:

$$a_2 = +\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

$$d_2 = -\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

Em resumo, sabendo que $\sigma_1 = \sigma_r$ e $\sigma_2 = \sigma_s$, tem-se a seguinte árvore:

$$\begin{bmatrix} r(t+\Delta) \\ s(t+\Delta) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta\} \\ s(t).\exp\{\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = \lambda(s).\Delta \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta - \sqrt{2}.\sigma_r.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{\sigma_s[\sqrt{2}.\rho \pm \sqrt{1-\rho^2}].\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = 0{,}25 \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta + \sqrt{2}.\sigma_r.\sqrt{\Delta}\} \\ s(t).\exp\{\sigma_s[\sqrt{2}.\rho \mp \sqrt{1-\rho^2}]\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = 0{,}25 \\ \begin{bmatrix} r(t).\exp\{\mu(t).\Delta\} \\ s(t).\exp\{-\sigma_s\sqrt{1-\rho^2}.\sqrt{\Delta}\} \end{bmatrix} \text{com prob.} = 0{,}5 - \lambda(s).\Delta \end{cases}$$

Conforme pode ser visto, é necessário que $\lambda(s).\Delta < 0{,}5$.

O objetivo de evidenciar algumas etapas desta modelagem é mostrar que todas as considerações dos autores prescidiram de variáveis estruturais da firma. Isto é, em nenhum momento Nielsen e Ronn fizeram suposições sobre quanto representa a dívida em função dos ativos totais da empresa ou quanto a dívida representa do patrimônio líquido a mercado.

Outra questão interessante desta abordagem na forma reduzida é que foram construídos processos para a taxa de juros livre de risco e para o *spread* de *default*. Nos capítulos

posteriores em que a Modelagem Estrutural de Merton (1974) será detalhada, ficará bem claro a enorme diferença de abordagem entre os modelos estruturais e na forma reduzida.

2.20. Modelo estrutural de Madan e Unal (1999)

Este trabalho busca propor um modelo estrutural para a *hazard rate* numa forma fechada. A suposição chave é que o *default* é conseqüência de um evento de perda que conduz o valor do patrimônio líquido para zero e requer fluxos de caixa que não podem ser financiados externamente. Estes eventos de acentuada perda podem ser decorrentes de pendências legais, desvalorizações inesperadas de ativos, *default* repentino de um grande cliente ou fornecedor e catástrofes nas linhas de produção.

O modelo possui algumas características atraentes como:

(i) a probabilidade desta perda inesperada é capturada pelas equações de precificação ao se descontar os pagamentos prometidos pela *hazard rate*. Os autores obtêm, de maneira endógena, a *hazard rate* estocástica como uma função dos ativos insensíveis às taxas de juros e em função das taxas de juros livres de risco. Esta situação é considerada positiva por permitir a associação dos parâmetros envolvidos nesta modelagem a informações particulares da firma como valor do patrimônio líquido, *gap de duration*, etc. Adicionalmente, este trabalho difere de Duffie e Lando (1997) por não modelar a ocorrência do *default* quando o valor da firma ultrapassa pela primeira vez determinado patamar e sim quando há uma escassez de caixa causada pela perda inesperada;

(ii) o tratamento para a taxa de juros livre de risco difere dos trabalhos de Longstaff e Schwartz (1995) e Kim et al. (1993) que permitem relação entre a taxa de juros livre de risco e os *spreads* de crédito. De acordo Madan e Unal (1999), estes trabalhos, pelo fato de considerar o ativo circulante da empresa insensível às taxas de juros livres de risco, assume-se que o *gap* de *duration* da firma seja negativo. A conclusão decorrente é que ao se elevar a taxa de juros livre de risco, há um aumento no patrimônio líquido da empresa e uma diminuição no passivo. Madan e Unal (1999) consideram tal hipótese assaz simplista desde que seus ativos possuam *duration* superior a do seu passivo, tornando a suposição falsa. Em contraposição, o modelo proposto por Madan e Unal (1999) contempla a empresa possuidora de ativos sensíveis às taxas de juros. Este modelo é capaz de capturar o impacto nas mudanças

das taxas de juros livres de risco em balanços com *duration* tanto positiva quanto negativa. Há de se destacar que há controvérsia entre os estudos realizados sobre a eventual existência de correlação entre o *spread* de crédito e o comportamento das taxas de juros livres de risco. Duffe (1998) relata uma relação negativa. Morris, Neal e Rolph (1998) apresentam provas para uma correlação positiva quando se considera longo prazo.

(iii) finalmente, pelo fato da modelagem chegar numa forma fechada, é possível a realização de pesquisas que realizem análise estatística e aumentem a aplicabilidade do modelo. Ademais, uma vez que os parâmetros possuem significado econômico, o impacto de políticas e mudanças estruturais pode ser prontamente identificado no modelo.

Outro ponto digno de nota é que a abordagem de Madan e Unal (1999) permite a calibragem do modelo utilizando os dados da estrutura temporal dos *spreads* de crédito.

2.21. Modelo na forma reduzida de Skinner e Diaz (2001)

Muitos trabalhos investigaram estruturas temporais de juros sujeitas a risco de crédito. Destacam-se os trabalhos de Duffie e Singleton (1997), Duffie e Singleton (1999), Jarrow e Turnbull (1995), Jarrow, Lando e Turnbull (1997), Lando (1998).

Contudo, há pouco trabalho de natureza empírica focando questões mais fundamentais como a importância relativa dos diferentes parâmetros que descrevem o risco de crédito e se a correlação entre o risco de crédito e as taxas de juros livre de risco realmente importa. Por exemplo, enquanto Nielsen e Ronn (1996) sugerem processos estocásticos para taxa de juros livre de risco e para o *spread* de *default* inclusive com correlação entre estas duas variáveis, Skinner e Díaz (2001) propõem processos estocásticos para taxa de juros livre de risco e para a probabilidade de *default*.

Skinner e Díaz (2001) propõem e implementam processos estocásticos binomiais para a taxa de juros livre de risco e para a probabilidade de *default*. Os modelos resultantes geram estados de preços para os títulos corporativos que podem ser utilizados para precificar derivativos de crédito.

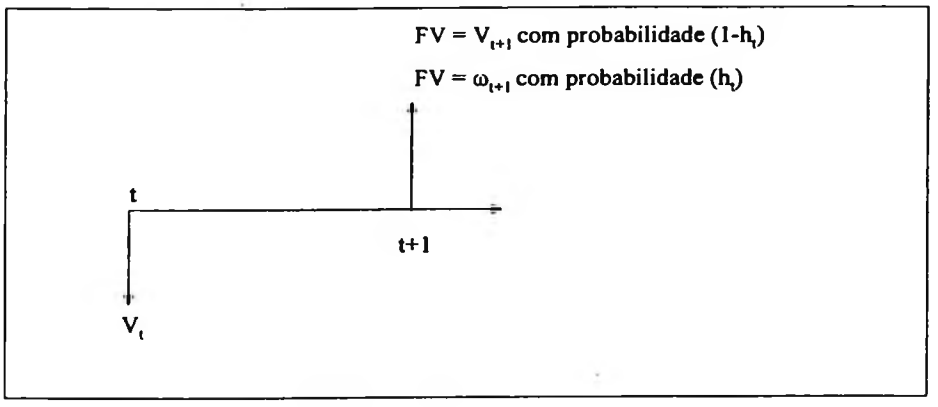
Os referidos autores mencionam que os modelos de risco de crédito na forma reduzida são ajustados até que os *portfolios* replicantes dos estados de preço dos títulos corporativos

coincidam com o preço do título zero cupom implícito aos respectivos títulos. Portanto, diferentes parametrizações conduzem a diferentes distribuições dos estados de preço. Ora, isto conduz a diferentes preços para o mesmo derivativo de crédito. Logo, há de se pesquisar quais são os parâmetros críticos.

Skinner e Díaz (2001) encontraram grandes diferenças nas distribuições de estado de preço de acordo com os parâmetros adotados na modelagem. Com o objetivo de determinar quais são os parâmetros relevantes que afetam o preço de um título sujeito a *default,* os referidos autores examinam a distribuição dos estados de preço obtidos a partir das versões binomiais de Jarrow e Turnbull (1995), Lando (1998) e Duffie e Singleton (1999). Com base nos trabalhos de Duffie e Singleton (1999), Skinner e Díaz (2001, p.3) evidenciam que sob a medida de probabilidade risco-neutra Q condicionada à informação disponível até o instante t, o preço de um título zero cupom sujeito a *default* e que promete pagar V_{t+1} no instante (t+1) é dado por:

$$V_t = E_t^Q\left[h_t.e^{-r.t}.\omega_{t+1} + (1-h_t).e^{-r.t}.V_{t+1}\right]$$

Figura 9 Diagrama de fluxo de caixa de título sujeito a default para 1 periodo



Fonte: Autor

Sendo que:

h_t: probabilidade de *default* condicionada a ausência de *default* anterior. h_t também é denominado de *hazard rate*;

r_t: taxa de juros pura ou sem risco vista do instante t;

ω_{t+1}: valor pago em (t+1) no caso de *default*. ω_{t+1} também é denominado de *recovery rate*;

Observe que uma vez que se trabalhe com a medida de probabilidade risco-neutra Q, o fluxo de caixa esperado no instante (t+1) pode ser descontado pela taxa de juros livre de risco.

Skinner e Díaz (2001, p.3) reescrevem a expressão dada por Duffie e Singleton (1999) contemplando um título zero cupom com risco de *default* para 2 períodos:

$$V_t = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}5.h_{(t,j)}.\omega_{t+1}.\left(e^{r_{(t+1,j+1)}} + e^{r_{(t+1,j)}}\right) + \\ +0{,}5.\left(1-h_{(t,j)}\right)\left(h_{(t+1,j+1)} + h_{(t+1,j)}\right)\omega_{t+2} + \\ +\left(1-h_{(t,j)}\right)\left[1-0{,}5.\left(h_{(t+1,j+1)} + h_{(t+1,j)}\right)\right]V_{t+2} \end{array} \right\}.e^{-r_{(t,j)}}.0{,}5.\left(e^{-r_{(t+1,j+1)}} + e^{-r_{(t+1,j)}}\right)$$

Sendo que:

$h_{(t,j)}$: probabilidade de *default* entre os instantes *t* e *(t + 1)*;

ω_{t+1}: taxa de recuperação em (*t + 1*);

ω_{t+2}: taxa de recuperação em (*t + 2*);

$h_{(t+1,j+1)}$: probabilidade de *default* entre os instantes (*t + 1)* e *(t + 2)*num estado de alto risco de crédito;

$h_{(t+1,j)}$: probabilidade de *default* entre os instantes (*t + 1)* e *(t + 2)*num estado de baixo risco de crédito;

j: estado do risco de crédito;

$r_{(t+1,\, i+1)}$: taxa de juros pura ou sem risco à vista;

$r_{(t+1,\,i)}$: taxa de juros pura ou sem risco à vista;

A relação anterior evidencia que no evento de *default* no instante ($t + 1$), ω_{t+1} será reinvestido até ($t + 2$) num título do governo à taxa de juros livre de risco.

Skinner e Díaz (2001, p.3) apontam dois desafios a serem resolvidos:

Desafio 1: qual é a relação entre probabilidade de *default* $h_{(t,j)}$ de um estado de risco dado por j e taxas de juros sem risco $r_{(t,\,i)}$ de um estado de taxa de juros dado por *i* ?

Desafio 2: probabilidades *default* $h_{(t,j)}$ são probabilidades condicionadas de modo tal que para haver default em (t+2) o default não pode ter ocorrido em (t+1). Isto significa que em todos os estados de risco dados por *j* e todos os estados de taxa de juros dados por *i*, deve-se medir os resultados esperados no evento do *default* ocorrer não apenas para o período corrente, mas para todos os períodos anteriores, o que requer grande esforço computacional.

Skinner e Díaz (2001, p.4) sugerem os seguintes processos estocásticos binomiais para a taxa de juros livre de risco e para as probabilidades de *default*:

$$r_{(t,i)} = r_{(0,0)}.e^{\left[u_t.\Delta T+(2.i-t).\sigma_r.\sqrt{\Delta T}\right]}$$

$$h_{(t,j)} = h_{(t,i)} = h_{(0,0)}.e^{\left[v_t.\Delta T+\rho_{h,r}.\frac{\sigma_h}{\sigma_r}.r_{(t,i)}.\Delta T\right]}$$

Os referidos autores encontraram cinco resultados, a saber:

- Ao se aplicar uma parametrização simples para o processo de default, isto é, com recuperação constante e correlação zero entre taxas de juros livre de risco, foram obtidos grandes mudanças nas distribuições dos estados de preço quando comparados com a distribuição obtida ao se modelar taxas de juros dos títulos corporativos sem a parametrização do processo de *default*;

- Ao se considerar correlação entre o processo de *default* e a taxa de juros livre de risco, são obtidos distribuição de estados de preço. Ademais, estas diferenças são proporcionais à intensidade da correlação;

- Os autores concordam com Duffie e Singleton (1999) que a suposição de taxa de recuperação obtida sobre o valor de mercado ou sobre o valor de face fazem pouca diferença. Contudo, a taxa de recuperação obtida sobre o título do tesouro gera diferenças nos estados de preço;

- Assumir taxa de recuperação não-estocástica, porém variável com o tempo, implica poucas diferenças nos estados de preço;

- A importância das conclusões acima está diretamente relacionada com a amplitude do *spread* de crédito;

Capítulo 3: OS MODELOS DE MERTON (1974) E KMV

3.1. As Idéias Centrais do Modelo de Merton (1974)

Segundo Bohn et al. (2005, p.7), no âmbito da análise de risco de crédito, o trabalho de Merton (1974) é o modelo estrutural original e talvez seja a contribuição mais importante na pesquisa quantitativa de risco de crédito.

Bharath e Shumway (2004, p. 4) afirmam que o modelo de previsão de *default* de Merton (1974) produz como resultado uma probabilidade de *default* para uma empresa em um determinado momento de tempo.

Conforme Hull et al. (2004, p. 3-5), o modelo de Merton (1974) assume que a estrutura de capital da firma seja composta por dois tipos de títulos: título de propriedade e título de dívida. Os títulos de propriedade são compostos por ações que não pagam dividendos. O título de dívida é um zero cupom que vence em T e que tem valor de face D_T.

A companhia entrará em *default* se o valor de seus ativos se tornar inferior ao valor que é devido ao credor no instante T.

O modelo de Merton (1974) pode ser empregado para estimar a probabilidade de a empresa entrar em *default* num horizonte T de tempo. Para obtenção da probabilidade de *default* em um determinado momento de tempo, o modelo de Merton (1974) requer que se descubra o valor V_t dos ativos da empresa e sua volatilidade σ, variáveis que não podem ser diretamente observadas.

Um caminho trilhado por Merton (1974) para determinar os valores de V_t e σ é assumir que o preço do patrimônio líquido da firma E_t é o prêmio de uma opção de compra sobre os ativos da empresa V_T. Em tópico posterior, demonstra-se porque o valor do patrimônio líquido corresponde efetivamente ao valor de uma opção de compra sobre os ativos da empresa.

O valor do patrimônio líquido da firma é diretamente observável a partir do preço das ações negociadas em mercado. A volatilidade do patrimônio líquido σ_E também pode ser facilmente calculada tendo os retornos dos preços das ações negociadas em bolsa.

Merton (1974), então, propõe uma metodologia para descobrir o valor de mercado dos ativos V_t e sua volatilidade σ a partir de outras variáveis, entre elas o valor do patrimônio líquido da firma E_t e da volatilidade do patrimônio líquido σ_E a partir de um modelo de apreçamento de opções.

O evento de *default* ocorrerá quando o valor dos ativos da firma ficar abaixo de um valor limite expresso por D_T. Por conseguinte, a chance de ocorrer o *default* consiste justamente na probabilidade da opção de compra não dar exercício, ou seja, de que $V_t < D_T$.

Desta maneira, dispondo do valor limite D_T, do valor dos ativos da firma e de sua volatilidade, a probabilidade de *default* pode ser estimada contemplando diversos horizontes de tempo. Isto é, pode-se calcular a probabilidade da empresa entrar em *default* em um mês, seis meses, um ano, etc.

O modelo de Merton (1974) baseia-se nos trabalhos de Black e Scholes (1973) para se determinar o preço das opções envolvidas nas análises.

As opções envolvidas no modelo de Merton (1974) têm como ativo objeto os ativos da empresa. Uma vez que se utiliza o modelo de Black e Scholes (1973) para o apreçamento das opções, deve-se supor que o valor dos ativos obedecem a um processo de difusão com distribuição lognormal. Segundo Benninga e Wiener (1998, p.2), a distribuição lognormal é uma distribuição mais apropriada que a distribuição normal, se o objetivo for descrever o preço dos ativos. Isto ocorre porque, ao contrário da distribuição normal, a distribuição lognormal não atribui probabilidades a valores negativos.

De maneira a construir o raciocínio até a formulação de Merton (1974) para o cálculo da probabilidade de *default* deve-se ter em mente que há ter duas formas de enxergar a questão:

- Sob a ótica do credor, a clássica decomposição da dívida com risco em dois outros instrumentos financeiros: título livre de risco e opção. Este item tem o objetivo de mostrar que existem diferentes alternativas de se decompor a dívida com risco em outros instrumentos financeiros.

- Sob a ótica do proprietário, as condições em que o *default* ocorrerá. Será a partir da ótica do proprietário, empregando opções de compra, que será construído o modelo proposto por Merton (1974).

3.2. Visão do Credor

Considerando V_t o valor dos ativos da empresa numa data t, os credores receberão o valor integral de D_T desde que o valor dos ativos da firma seja maior ou igual a D_T, sendo T a data de vencimento da dívida.

Isto é, a empresa honrará o pagamento no vencimento da dívida desde que $V_T \geq D_T$. Nesta hipótese, os proprietários da empresa teriam direito ao valor residual dado por $V_T - D_T$.

Contudo, se no instante T o valor dos ativos da empresa for inferior ao valor da dívida D_T, a dívida não será paga e, assim, os credores assumem a empresa, algo que corresponde a receber o valor dado por V_t.

Em resumo, no vencimento da dívida, os credores receberão:

$$\begin{cases} D_T \text{ se } V_T \geq D_T \\ V_T \text{ se } V_T < D_T, \end{cases}$$

Conforme Sundaram (2001, p. 2), Merton (1974) conseguiu enxergar na relação anterior o resultado de uma posição numa opção.

A relação anterior pode ser expressa de maneira mais sintética.

No vencimento da dívida os credores receberão:

$$D_T - Máximo(D_T - V_T, 0)$$

Note que a segunda parcela da formulação anterior corresponde a uma posição vendida numa opção, algo que será discutido em maior detalhe nos tópicos posteriores.

Por exemplo, assumindo uma empresa que possua uma dívida de R$ 500 vencendo no instante T, montou-se a tabela a seguir evidenciando (i) o valor da dívida, (ii) o valor dos ativos e (iii) o valor que o credor receberia contemplando diversos cenários de V_T.

Tabela 18 Valor Recebido pelo Credor de Acordo com o Cenário

Cenários	Valor dos Ativos	Valor da Dívida no Vencimento	Valor Recebido pelo Credor
1	0	500	0
2	100	500	100
3	200	500	200
4	300	500	300
5	400	500	400
6	500	500	500
7	600	500	500
8	700	500	500
9	800	500	500
10	900	500	500
11	1000	500	500

Fonte: Autor.

Deve-se notar que os 11 cenários acima expostos contemplam o valor recebido pelo credor no instante T, isto é, no vencimento.

Uma vantagem de modelar o valor recebido pelo credor com $D_T - Máximo(D_T - V_T, 0)$ é que cada termo desta simples fórmula pode adquirir uma interpretação interessante e, talvez, inédita, como segue:

3.2.1. Visão do Credor: Primeira Interpretação com Opção Européia de Venda

A primeira interpretação mostra que o valor a ser recebido pelo credor pode ser decomposto numa posição comprada num título livre de risco e numa posição vendida numa opção de venda.

Vejamos:

Conforme visto em tópico anterior, o valor a ser recebido pelo credor em T é dado pela relação matemática $D_T - Máximo(D - V_T, 0)$.

O primeiro termo D_T representa o valor de resgate de um título zero cupom com valor de face D_T e com vencimento no instante T.

O segundo termo dado por *Máximo*$(D_T - V_T , 0)$ representa o resultado de uma posição vendida numa opção de venda sendo o ativo objeto os ativos da empresa e o *strike* dado pelo valor de face da dívida D_T.

Naturalmente, o vencimento desta opção de venda é T.

Logo, a posição credora é equivalente a:

- uma posição comprada num título zero cupom com valor de face D_T remunerado à taxa de juros livre de risco e com vencimento no instante T;

- posição vendida numa opção de venda sobre os ativos da empresa com *strike* dado por D_T e vencimento em T;

De maneira a ilustrar esta interpretação, consideremos o cenário em que $V_T = 100$. O credor tem a receber no título R$ 500. Por outro lado, o credor está vendido numa *put* de *strike* R$ 500 e o ativo objeto vale R$ 100. Logo, o credor será exercido na *put* tendo que pagar R$ 500 por um ativo que vale apenas R$ 100 amargando um prejuízo de R$ 400 na *put*. Como ele já havia recebido R$ 500 do título livre de risco, o resultado geral é um recebimento de R$ 100.

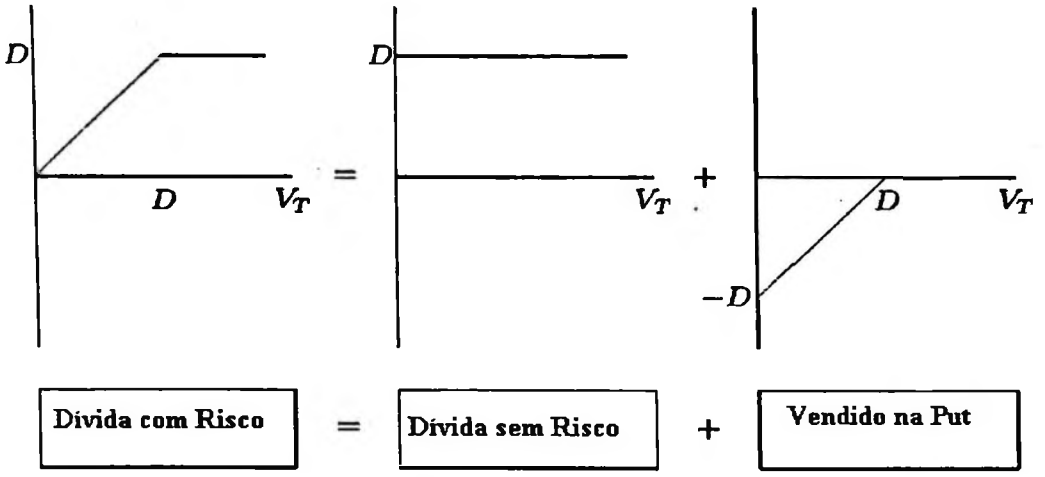
Analisemos o cenário em que $V_T = 600$. O credor tem a receber no título livre de risco R$ 500. Por outro lado, o credor está vendido numa *put* de *strike* R$ 500 e o ativo objeto vale R$ 700. Logo, o credor não será exercido na *put*. Como ele já havia recebido R$ 500 do título livre de risco, o resultado geral é um recebimento de R$ 500.

Obviamente, a análise anterior feita para o cenário 7 seria idêntica para todos os demais cenários em que o valor dos ativos superasse o valor da dívida.

A figura abaixo retrata a conclusão tirada por Merton (1974):

Figura 10 Decomposição da Dívida com Risco num título zero cupom sem risco mais uma posição vendida numa opção de venda. Visão do Credor

Figura 10 Decomposição da Dívida com Risco num título zero cupom sem risco mais uma posição vendida numa opção de venda. Visão do Credor



Fonte: Sundaram (2001).

3.2.2. Visão do Credor: Segunda Interpretação com Opção Européia de Compra

A segunda interpretação mostra que o valor a ser recebido pelo credor pode ser decomposto numa posição comprada num título zero cupom e numa posição vendida numa opção de compra.

Vejamos:

No tópico anterior foi mostrado que, no vencimento da dívida, o credor receberá o valor dado pela relação $D_T - Máximo(D_T - V_T, 0)$. Este resultado pode ser conseguido supondo: (i) o credor com uma posição comprada num título zero cupom com valor de face D_T e (ii) uma posição vendida numa *put* com ativo objeto o ativo da empresa e o *strike* da *put* sendo dado por D_T.

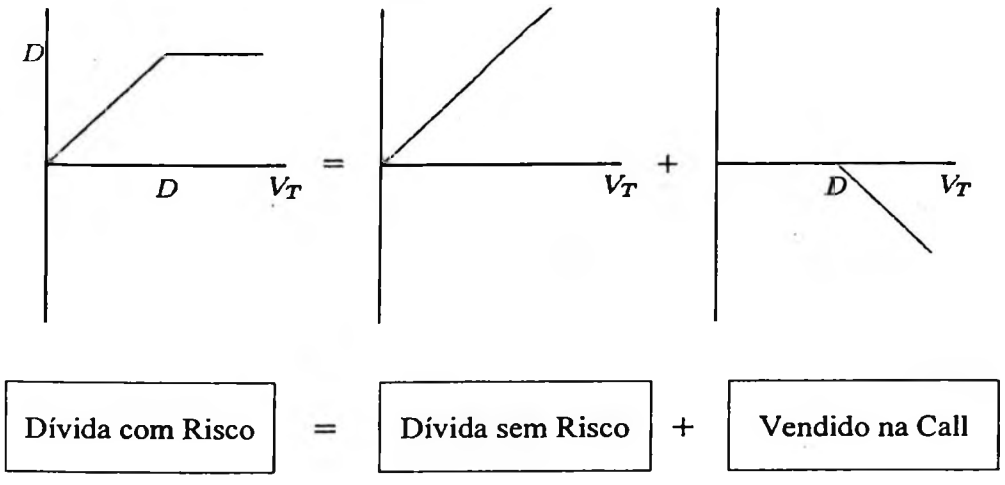
Outra interpretação equivalente a anterior diz que no vencimento o credor receberá o valor dado pela seguinte relação: $V_T - Máximo(V_T - D_T, 0)$, sendo que este resultado pode ser conseguido supondo (i) o credor com uma posição comprada num título zero cupom com

valor de face V_T e (ii) uma posição vendida numa *call* com ativo objeto, o ativo da empresa e o *strike* da *call* sendo dado por D_T.

De maneira a ilustrar esta interpretação consideremos o cenário em que $V_T = 100$. O credor tem a receber no título livre de risco R$ 100. Por outro lado, o credor está vendido numa *call* de *strike* R$ 500 e o ativo objeto vale R$ 100. Logo, o credor não será exercido na *call*. Como ele já havia recebido R$ 100 do título livre de risco, o resultado geral é um recebimento de R$ 100.

Analisemos o cenário em que $V_T = 600$. O credor tem a receber no título R$ 600. Por outro lado, o credor está vendido numa call de *strike* R$ 500 e o ativo objeto vale R$ 600. Logo, o credor será exercido na *call* tendo que entregar por R$ 500 por um ativo que vale R$ 600 amargando um prejuízo de R$ 100 na *call*. Como ele já havia recebido R$ 600 do título livre de risco, o resultado geral é um recebimento de R$ 500.

Figura 11 Decomposição da Dívida com Risco numa posição em que o credor está numa posição comprada num título livre de risco zero cupom com valor de face V_T e (ii) com uma posição vendida numa call com ativo objeto o ativo da empresa e o strike da call sendo dado por D_T.

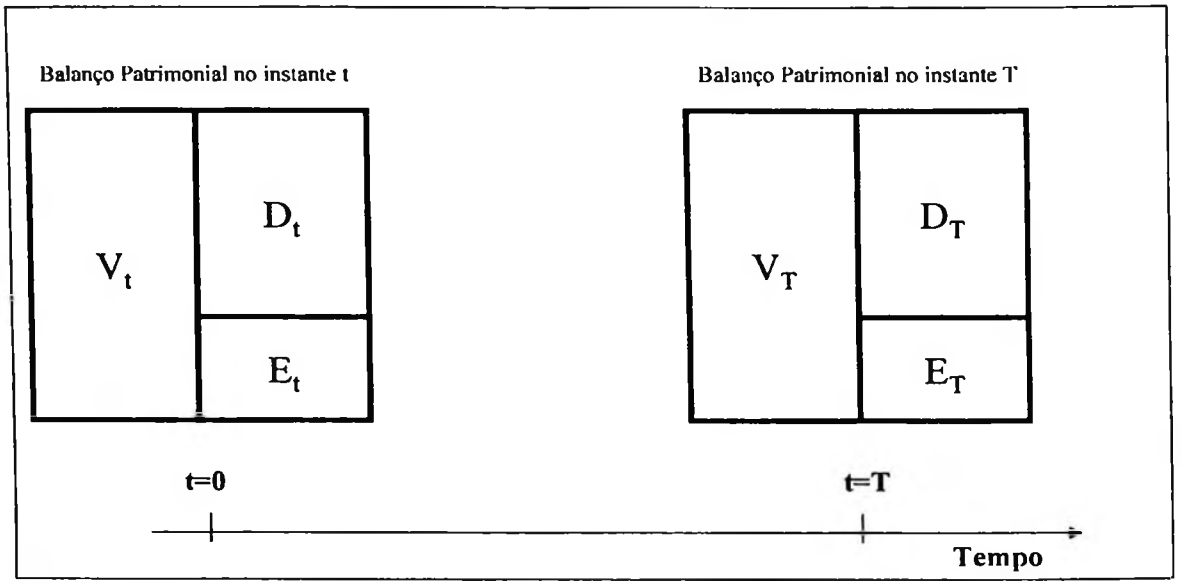


Fonte: Sundaram (2001).

3.3. Visão do Proprietário

Os proprietários são detentores dos direitos residuais sobre a firma após os credores serem pagos. Isto é, considerando uma empresa com dívida, cabe ao proprietário o que restar do valor da firma após a empresa saldar as dívidas com os credores.

Figura 12 Balanço Patrimonial da Firma nos instante t=0 e t=T



Fonte: Autor

Utilizando a figura anterior, percebe-se que se na data de vencimento T da dívida o valor dos ativos superar o da dívida, os credores serão integralmente pagos e aos proprietários caberá $V_T - D_T$.

Por outro lado, se no vencimento da dívida, o valor dos ativos for inferior ao valor da dívida, os credores receberão V_T, o que corresponde ao ato de o proprietário entregar a firma aos credores.

Colocando o texto anterior em forma matemática, tem-se que o valor que cabe aos proprietários é dado por:

$$\begin{cases} V_T - D \text{ se } V_T \geq D_T \\ 0 \text{ se } V_T < D_T \end{cases}$$

De maneira simplificada, pode-se dizer que o valor que cabe aos proprietários é *Máximo*$(V_T - D_T, 0)$

Ora, percebe-se que o resultado acima é idêntico ao resultado de uma posição comprada numa opção de compra sobre os ativos da empresa com *strike* dado por D_T e vencimento no instante T.

Logo, o valor do patrimônio líquido da firma é dado pelo preço de uma *call* com as seguintes características:

- Ativo Objeto do estudo: Ativos da Empresa
- Objeto do estudo: Preço dos Ativos da Empresa
- Preço de Exercício: Valor de face da Dívida D_T

Uma vez que a *call* é uma opção sobre o valor da firma, o preço dessa *opção* é o valor do patrimônio líquido da empresa. Por conseguinte, o valor desta *call* dependerá do valor V_T da firma, da volatilidade do valor da firma σ e de outras variáveis.

Seja E_t o valor do patrimônio líquido da firma, empregando a forma fechada do modelo de apreçamento de opções de modelo de Black e Scholes (1973), tem-se que:

$$E_t = V_t.N(d) - e^{-r(T)}.D_T.N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)$$

onde $d = \frac{1}{\sigma.\sqrt{T}}.\left[\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T)\right]$

Note que $N(.)$ é a distribuição normal padronizada acumulada, D_T é o *strike* e V_t é o preço do ativo objeto no instante t, r é a taxa de juros livre de risco, σ é a volatilidade das taxas de retorno do valor da firma e T é o vencimento da opção.

Para que o modelo de Black e Scholes (1973) possa ser empregado, algumas premissas devem ser respeitadas:

1. o preço do ativo à vista possui distribuição lognormal;

2. não existem custos operacionais tampouco os impostos e os ativos são perfeitamente divisíveis;

3. o ativo não receberá dividendos durante a vida da opção;

4. não há oportunidade de arbitragem;

5. a negociação com os ativos é contínua;

6. os investidores podem captar e aplicar à taxa livre de risco;

7. a taxa livre de risco de curto prazo é constante;

Da observação da fórmula de Black e Scholes (1973) adaptada às condições da empresa, tem-se que:

- O valor de E_t, que corresponde ao preço da *call*, é obtido pelo preço de mercado das ações da empresa. Logo, considerando empresas com negociação em bolsa, não há a menor dificuldade em se obter E_t.

- Não é difícil supor que a taxa de juros livre de risco r mantenha-se constante até o vencimento da opção. Mais uma vez, não há a menor dificuldade em se obter a taxa de juros livre de risco para o período de tempo correspondente ao vencimento da opção.

- Supõe-se que o valor de face da dívida D_T seja conhecido.

- Supõe-se conhecido a data de vencimento da dívida. Logo, T é sabido.

Desta forma, ao se analisar as relações acima, nota-se que restam duas variáveis a serem determinadas, quais sejam: valor da firma V_t (valor dos ativos da empresa no instante t= 0) e sua volatilidade σ (volatilidade das taxas de retorno dos ativos da empresa).

Logo, se temos duas variáveis e uma equação, torna-se necessário encontrar uma segunda equação para que possamos, enfim, determinar os valores de V_t e σ.

Será empregada uma equação para o valor da volatilidade do patrimônio líquido σ_E que será função g do valor da firma V_t e de sua volatilidade σ conforme indicado a seguir:

$$\sigma_E = g\,(V_T, \sigma)$$

Utilizando premissas do modelo de Black e Scholes (1973), tem-se que:

$$g(V_t,\sigma) = \sigma.V_t.\frac{N(d)}{f(V_t,\sigma)}$$

Portanto, uma vez que possuímos duas equações e duas incógnitas, agora é possível descobrir os valores de V_T e σ.

A relação $g(V_t,\sigma) = \sigma.V_t.\frac{N(d)}{f(V_t,\sigma)}$ pode ser demonstrada sabendo que o valor do patrimônio líquido no instante t é igual ao valor do prêmio da opção sobre os ativos da empresa considerando preço de exercício igual a D_T e vencimento dado por T.

Logo o valor do PL no instante $t=0$ é igual a:

$$E_t = V_t.N(d) - \frac{D_T.N(d - \sigma.\sqrt{T})}{e^{rT}}$$

Derivando a relação anterior em relação ao valor dos ativos, tem-se que:

$$\frac{\partial E_t}{\partial V_t} = N(d)$$

Podemos reescrever a relação anterior na forma discreta da seguinte maneira:

$$\Delta E_t = \Delta V_t \times N(d)$$

Ora, sabendo que $\Delta V_t = V_t \times \sigma$ e que $\Delta E_t = E_t \times \sigma_E$, chega-se a:

$$E_t \times \sigma_E = V_t \times \sigma \times N(d)$$

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{E_t} \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_E \times E_t}{V_t \times N(d)}$$

3.3.1. Como obter a probabilidade de *default* dispondo de V_t, σ, E_t e σ_E

Já foi visto que o valor dos ativos da empresa V_t e o desvio padrão dos ativos da empresa σ podem ser obtidos por intermédio das seguintes relações:

$$E_t = V_t.N(d) - \frac{D_T.N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)}{e^{r.T}}$$

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{E}$$

$$d = \frac{1}{\sigma.\sqrt{T}}.\left[\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T)\right]$$

As relações acima podem ser substancialmente simplificadas se enxergarmos que uma medida de alavancagem L pode ser obtida considerando que:

$$L = \frac{D_T \times e^{-rT}}{V_t}$$

Fazendo a substituição adequada, chega-se a:

$$E_t = V_t \times N(d) - L \times .V_t \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)$$

Colocando V em evidência, chega-se a:

$$E_t = V_t \times \left\{N(d) - L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right\}$$

Fazendo mais uma substituição, chega-se a:

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{V_t \times \left\{N(d) - L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right\}} = \frac{\sigma \times N(d)}{N(d) - L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)}$$

Briys et al. (1998, p. 64-68) afirmam que $N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)$ é a probabilidade da opção de compra dar exercício. Portanto, 1 - $N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)$ é a probabilidade da opção de compra não dar exercício.

Naturalmente, a probabilidade dada por $1 - N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)$ é idêntica a probabilidade fornecida por $N\left(\sigma.\sqrt{T} - d\right)$.

Assim, conclui-se que a probabilidade de a firma entrar em *default* no instante T é a probabilidade dos acionistas não exercerem a opção de compra sobre os ativos da firma com preço de exercício D_T e vencimento T, o que pode ser visto em Hull et al. (2004, p. 6).

Logo, tem-se que a probabilidade de *default* é dada por $N\left(\sigma.\sqrt{T} - d\right)$.

Vale salientar que o modelo KMV a ser apresentado, embora empregue o modelo de Merton (1974), não utiliza a fórmula $N\left(\sigma.\sqrt{T} - d\right)$ para se calcular a probabilidade de *default*.

3.3.2. Exemplo de Aplicação do Modelo de Merton (1974)

De maneira a exemplificar o cálculo de V_t e σ partir de E_t e σ_E empregando o modelo de Merton (1974), esta metodologia será aplicada para obter estimativas de V_t e σ da empresa Natura em 30/09/2005.

Eis as premissas utilizadas:

- consideraremos que a opção tem vencimento em 252 dias úteis;
- em 30/09/2005 o número de ações ordinárias é de 85.438.611. ;
- em 30/09/2005 os valores de passivo circulante e exigível a longo prazo são de R$ 334.659.000 e R$ 235.970.000, respectivamente;
- utilizando os retornos históricos da empresa, obtém-se volatilidade diária de 2,441%. Logo, a volatilidade anual é de 38,75%;
- o preço da ação em 30/09/2005 foi de R$ 89. Logo, o valor de mercado do patrimônio líquido nesta data é de R$ 7.604.036.379,00;
- a taxa livre de risco discreta para 252 dias úteis é de 18% ao ano. Convertida para taxa contínua, obtém-se o valor de 16,55%.

Foi visto que o modelo de Merton (1974) supõe que o passivo da firma seja composto por um único título zero cupom com valor de face dado por D_T. Obviamente, este não é o caso da Natura.

Para contornar este problema, será empregada uma aproximação feita por diversos autores (Sundaram (2001, p. 7), Bohn et al. (2005, p.7)).

Estes autores recomendam que o valor de D_T seja a totalidade dos passivos de curto prazo acrescido de 50% dos passivos de longo prazo. Aliás, este procedimento é empregado pelo KMV, tema a ser estudado mais adiante.

Por outro lado, Bharath e Shumway (2004, p. 6) recomendam que D_T seja a totalidade dos passivos de curto e longo prazo.

Com as informações disponíveis, encontra-se o valor de D_T.

D_T = 334.659.000 + 0,5* 235.970.000 = R$ 452.644.000

O próximo passo é descobrir o valor dos ativos da empresa V_t por intermédio das seguinte relação:

$$E_t = V_t \times N(d) - \frac{D_T \times N(d - \sigma.\sqrt{T})}{e^{r(T-t)}}$$

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{E_t}$$

$$d = \frac{1}{\sigma.\sqrt{T}}.\left[\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T)\right]$$

Substituindo os valores já conhecidos, tem-se que:

$$7.604.036.379 = V_t.N(d) - \frac{452.644.000.N(d - \sigma)}{e^{0,1655}}$$

$$0,3875 = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{7.604.036.379}$$

$$d = \frac{1}{\sigma}.\left[\ln\left(\frac{V_t}{452.644.000}\right) + \left(0,1655 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]$$

Note que temos 3 equações e 3 incógnitas: σ, V_t e d.

Resolvendo numericamente, obtém-se σ = 36,89% e V_t = R$ 7.987.638.527,76.

Sabendo que a probabilidade de *default* é dada por $N(\sigma.\sqrt{T} - d)$, tem-se que:

$$N(0{,}3689.\sqrt{1}-8{,}41)=N(-8{,}0411)=4{,}4\times 10E-16$$

A probabilidade de *default* é de 4,4 x 10E-16.

A probabilidade de 10E-16 é extremamente baixa. Contudo, deve-se notar que o valor de mercado dos ativos estimado pelo modelo de Merton (1974) é de R$ 8 bi enquanto que o valor da dívida é de menos de R$ 0,5 bi. Isto significa que, num intervalo de um ano, o valor dos ativos teria que se reduzir em 95% para que a dívida não pudesse ser paga.

Obviamente, uma redução tão drástica de R$ 7,5 bi nos ativos da empresa num intervalo de tempo tão curto é muito improvável, o que está de acordo com resultado obtido uma vez que a probabilidade de *default* é praticamente zero.

3.3.3. Modelo de Merton (1974) para Estruturas de Capital mais Complexas

Segundo Sundaram (2001, p. 5), um sério problema do mModelo de Merton (1974) é a simplicidade com que é assumida a estrutura de capital da empresa. Uma vez que as estruturas de capital no mundo real são muito mais complexas, este fato deixa ao pesquisador duas alternativas, a saber:

- estender o arcabouço teórico do modelo de modo que ele possa tratar estruturas de dívida mais complexas;
- simplificar a realidade para fazê-la se adequar ao modelo.

A primeira solução parece ser bastante atraente e, sob o ponto de vista econômico, correta.

Geske (1977), entre outros, desenvolveram extensões do modelo de Merton que permitem a simultaneidade de diferentes perfis de dívida nos aspectos relacionados a vencimento, tamanho do cupom e outras variáveis. Adicionalmente, tais modelos também incorporam questões como *convenants*, amortizações, provisões de *sinking fund* e outros parâmetros. Um ponto positivo destes modelos mais complexos é que eles ainda conseguem determinar o valor do patrimônio líquido da firma com uma fórmula fechada sob as suposições usuais de Black e Scholes ainda que estas soluções envolvam distribuições normais multivariadas. Um ponto negativo é que a complexidade introduzida por estes modelos acabam criando alguns

problemas. Sundaram (2001, p. 6) argumenta que a implementação destes modelos requer informação completa a respeito da estrutura da dívida. Um segundo problema é que o valor da firma e sua volatilidade permanecem inobserváveis. Sendo assim, mais uma vez é necessário empregar o valor do patrimônio líquido e a volatilidade do patrimônio líquido para se obter o valor da firma e sua volatilidade. Contudo, este processo é muitíssimo mais complexo que no modelo original de Merton (1974)

A segunda solução, contudo, funciona ao se simplificar a estrutura de capital existente de modo que ela se encaixe no modelo de Merton (1974). Isto é possível substituindo a estrutura atual da dívida, que pode ser assaz complexa, por um título zero cupom equivalente.

Acontece que o adjetivo equivalente não possui apenas um significado neste contexto. Logo, existem muitas alternativas a serem tentadas.

Uma abordagem seria identificar um título sintético zero cupom que possua a mesma *duration* que a da estrutura da dívida. Esta é basicamente o procedimento empregado por Delianedis e Geske (1999).

Uma alternativa similar a este espírito de simplificação é feita pelo KMV.

3.4. O *spread* de Crédito a partir do Modelo de Merton (1974)

Segundo Hull et al. (2004, p.7), o modelo de Merton (1974) pode ser empregado para se determinar o *spread* de crédito. Os referidos autores propõem o seguinte raciocínio:

Seja D_t o valor presente da dívida da empresa, V_t o valor atual dos ativos da empresa e E_t o valor atual de mercado do patrimônio líquido.

Logo, tem-se que $D_t = V_t - E_t$.

Sabendo que $E_t = V_t \times \{N(d) - L \times N(d - \sigma.\sqrt{T})\}$, chega-se a:

$$D_t = V_t - V_t \times \{N(d) - L \times N(d - \sigma.\sqrt{T})\} = V_t \times [1 - N(d) + L \times N(d - \sigma.\sqrt{T})]$$

$$D_t = V_t \times \left[N(-d) + L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right]$$

É sabido que o valor presente do título com risco e valor de face D_T é dado por $D_t = D_T \times e^{-y.T}$, sendo y a taxa de rendimento do título com risco.

Por outro lado, o valor presente do título de valor de face D_T, considerando-o sem risco, é dado por $D^{\bullet} = D_T \times e^{-rT}$.

Então:

$D_t = \dfrac{D^{\bullet}}{e^{-r.t}} \times e^{-y.T} = D^{\bullet} \times e^{(r-y).T}$, sendo $s = y - r$ o *spread* de crédito dado por:

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(\dfrac{D_t}{D^{\bullet}}\right)}{T}$$

Substituindo D_t por $V_t \times \left[N(-d) + L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right]$

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(\dfrac{V_t \times \left[N(-d) + L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right]}{D^{\bullet}}\right)}{T}$$

Lembrando que $L = \dfrac{D_T \times e^{-rT}}{V_t} = \dfrac{D^{\bullet}}{V_t}$

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(\dfrac{V_t \times \left[N(-d) + L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right]}{L \times V}\right)}{T} = -\frac{\ln\left(\dfrac{V_t \times \left[N(-d) + L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right]}{L \times V}\right)}{T}$$

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(\dfrac{V \times N(-d)}{L \times V} + \dfrac{V \times L \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)}{L \times V}\right)}{T}$$

$$s = y - r = -\frac{\ln\left(\frac{N(-d)}{L.} + N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)\right)}{T}$$

É interessante notar que o *spread* de crédito *s* depende da alavancagem *L*, da volatilidade dos ativos e do prazo de pagamento da dívida.

3.5. Modelo KMV

KMV é o nome de uma empresa que desenvolveu comercialmente a abordagem de Merton (1974) sendo que em abril de 2002 a KMV *Corporation* foi vendida para a Moody's por US$ 210 MM.

O modelo KMV emprega o modelo de Merton (1974) para cálculo da probabilidade de *default* da firma em determinado instante de tempo.

Segundo Bharath e Shumway (2004, p. 1), o KMV é um método inovador na previsão da probabilidade de *default* que tem sido empregado tanto na prática como na academia.

Pelo fato de seguir o modelo de Merton (1974), o modelo KMV parte do princípio de que o patrimônio líquido da firma é dado pelo preço da opção de compra sobre o valor dos ativos da firma e o preço de exercício é o valor de face da dívida da empresa.

Sundaram (2001, p. 7) estabelece que a abordagem KMV baseia-se na observação empírica que o *default* tende a ocorrer na prática quando o valor de mercado dos ativos da firma fica:

- abaixo do valor contábil de todo o passivo, sendo que o pedido de falência pelos credores costuma ocorrer antes do valor do ativo atingir um valor abaixo do valor contábil do passivo de curto prazo.

Baseado nesta constatação, o KMV estabelece um título zero cupom equivalente ao nível *D* de modo que D seja a soma:

- dos valores de face de todos os passivos de curto prazo;

- de uma fração do valor de face dos passivos de longo prazo. Sundaram (2001, p. 7) sugere uma fração de 50% do valor de face dos passivos de longo prazo. Esta mesma fração de 50% é recomendada por Bohn et al. (2005, p.7).

Sundaram (2001, p. 7) reconhece uma certa arbitrariedade nesta abordagem de simplificar uma realidade complexa de modo que esta se encaixe num modelo disponível. Chama particular atenção o fato de se empregar uma fração de 50% do valor de face dos passivos de longo prazo.

O KMV, ao utilizar a estrutura do modelo de Merton (1974), reconhece que nem o valor da firma tampouco sua volatilidade são observáveis.

Contudo, tais grandezas podem ser inferidas a partir da volatilidade e do valor do patrimônio líquido empregando duas equações não-lineares, a saber:

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma \times N(d)}{E_t}$$

Isolando a volatilidade do valor dos ativos, obtém-se:

$$\sigma = \frac{\sigma_E \times E_t}{V_t \times N(d)}$$

Enfim, pela fórmula de Black e Scholes (1974), sabe-se que o valor do patrimônio líquido é dado por:

$$E_t = V_t.N(d) - \frac{D_T.N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)}{e^{-r(T)}}$$

Lembrando que:

- E_t é o valor do patrimônio líquido da empresa estudada no instante t;
- σ_E é a volatilidade do patrimônio líquido;

- V_t é o valor da empresa estudada no instante t;
- σ é a volatilidade do valor da firma;
- $$d = \frac{1}{\sigma.\sqrt{T-t}}.\left[\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)\right]$$
- D_T é o valor de face da dívida;
- r é a taxa de juros livre de risco de curto prazo.

Assim, o modelo KMV, até este ponto, adota a mesma abordagem preconizada por Merton (1974).

Contudo, uma dificuldade do ponto de vista prático é que o modelo de Merton (1974) supõe que a dívida da empresa é formada por um título zero cupom com valor de face D_T, algo que não está de acordo com a realidade das empresas.

De acordo com Bharath e Shumway (2004, p. 4), o modelo de previsão de *default* KMV produz como resultado uma probabilidade de *default* para cada empresa para determinado horizonte de tempo. De modo a se obter a probabilidade, o modelo subtrai o valor de face da dívida de uma estimativa do valor dos ativos da firma. Este resultado é então dividido por uma estimativa da volatilidade dos ativos da firma obtendo um escore z.

É importante ressaltar que, diferentemente do modelo de Merton (1974) que calcula a probabilidade de *default* da firma no vencimento da dívida, o modelo KMV estuda para cada período de tempo a probabilidade do *default* da empresa. Isto é, por intermédio do KMV, pode-se obter a probabilidade da empresa entrar em *default* em um ano, dois anos e assim por diante. Desta feita, é razoável supor que para se obter D_T se utilize 100% da dívida de curto prazo e apenas uma fração da dívida de longo prazo.

Logo após descobrir todas as variáveis acima citadas, o modelo KMV especifica que a probabilidade de *default* é dada por um escore *z* obtido pela função de distribuição acumulada.

Este escore *z*, conforme visto, depende do valor da firma V_t, volatilidade do valor da firma σ e do valor de face da dívida D_T.

O escore *z* é obtido da seguinte maneira:

$$z = \frac{V_t - D_T}{\sigma \times V_t}.$$

O escore *z* é chamado também de distância do *default* ou distância até o *default*.

3.5.1. Procedimento para o Cálculo da probabilidade de *default* pelo KMV a partir de z

Segundo Sundaram (2001, p. 8), o procedimento para o emprego do KMV é o seguinte:

- Identificar o ponto de *default* D_T a ser usado nos cálculos.

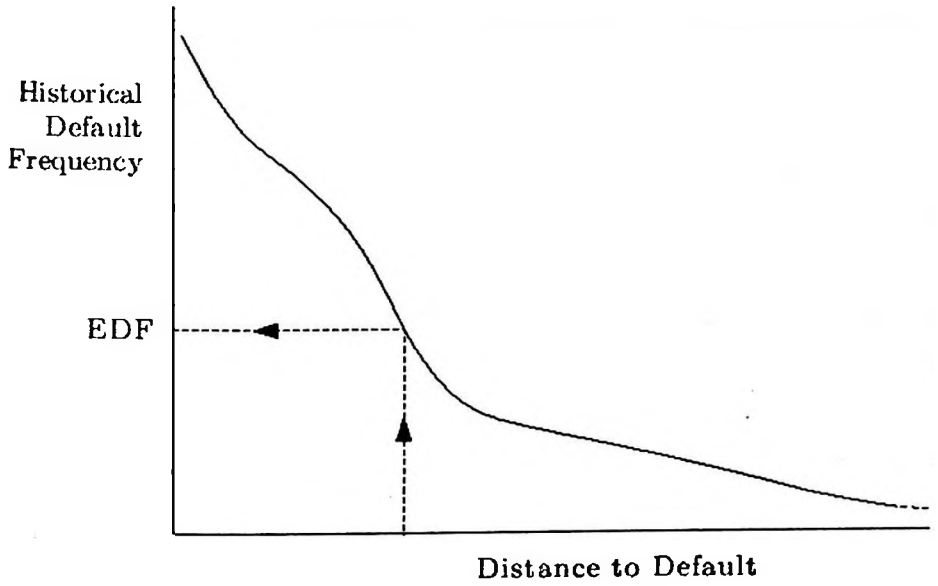
- Usar o ponto de *default* D_T em conjunto com o valor do patrimônio líquido da firma bem como a volatilidade do patrimônio líquido para identificar o valor V_t da firma e o valor da volatilidade sigma dos ativos da firma, empregando o modelo de Merton (1974).

- Identificar o número *z* de desvios padrões que faria com que o valor da firma ficasse abaixo do ponto de *default* D_T.

- Utilizar o banco de dados do KMV para identificar a proporção das firma com distância até *default* z que efetivamente entraram em *default* no horizonte de tempo que se deseja calcular a probabilidade de *default*. Esta grandeza é chamada de *Expected Default Frequency* ou EDF.

Note pela figura a seguir como, a partir da distância até *default* z encontra-se o EDF:

Figura 13 A partir da distância até o default z, obtém-se a EDF a partir de banco de dados com informações históricas



Fonte: Apresentação feita na Universidade de Stanford por Darrel Duffie

Exemplo 1: cálculo da probabilidade de *default* da Monsanto em 1998 (exemplo apresentado por Sundaram (2001, p.9))

Em 1998 a Monsanto apresentava os seguintes números:

- Valor contábil do passivo: US$ 7,2 bi
- Valor estimado de D_r : US$ 5,7 bi
- Valor de mercado do patrimônio líquido: US$ 33,9 bi
- Valor estimado do valor da firma V_t: US$ 41,3 bi
- Valor estimado da volatilidade da firma σ: 20%

O próximo passo é o cálculo do escore z:

$$z = \frac{41{,}3 - 5{,}7}{0{,}2 \times 41{,}3} = \frac{35{,}7}{8{,}26} = 4{,}3$$

Note que o valor dos ativos da firma de US$ 41,3 bi teriam que cair US$ 35,7 bi para a firma entrar em *default*.

Ora, o atual valor dos ativos da firma teriam que cair 4,3 desvios padrões para que a empresa entrasse em *default*.

Logo, basta descobrir a partir de uma função densidade de probabilidade a chance do valor da firma cair 4,3 desvios padrões.

Contudo, esta não é exatamente a abordagem feita pelo KMV.

O KMV, por outro lado, sugere que se pesquise num banco de dados e descubra do universo de todas as firmas que possuíam 4,3 desvios do *default*, qual proporção efetivamente entrou em *default* dentro de um ano. No caso específico da Monsanto, esta probabilidade é de 0,03%.

É importante salientar que o modelo KMV, por se basear no modelo de Black e Scholes (1973) assume que o valor dos ativos da empresa segue uma distribuição lognormal.

Ora, sendo assim, dispondo do valor de z, bastaria consultar uma tabela de distribuição *lognormal* para se encontrar a probabilidade de *default* ou, diretamente, calcular a probabilidade dada por $N\left(\sigma.\sqrt{T} - d\right)$, que segundo Hull et al. (2004, p. 6) é probabilidade de a firma entrar em *default* no instante T.

Então, o modelo KMV ao sugerir utilizar um banco de dados e descobrir do universo de todas as firmas que possuíam 4,3 desvios do *default*, qual proporção efetivamente entraram em *default* dentro de um ano implicitamente reconhece que a distribuição de valor dos ativos da empresa não necessariamente é lognormal, algo que será discutido com maior profundidade em tópico posterior.

Bharath e Shumway (2004, p.7) afirmam que em seu material promocional, a KMV cita o caso da Enron como um exemplo de como o método deles é superior aos métodos das agências tradicionais de *rating*. Quando o preço das ações da Enron começou a cair, o escore

z, também chamado de distância do *default* ou distância até o *default*, imediatamente decresceu. As agências de *rating*, por outro lado, demoraram vários dias para rebaixar a nota da Enron. Claramente, empregar valores de mercado do patrimônio líquido para se fazer inferências sobre probabilidades de *default* permite o KMV refletir a informação mais rapidamente que as agências de *rating* tradicionais.

Por outro lado, enquanto o preço das ações da Enron estava insustentavelmente alto, a expectativa de *default* pelo KMV era significativamente menor que a probabilidade de *default* associada a Enron por outras agências de *rating*.

3.5.2. Expected Default Frequency ou EDF

O resultado da aplicação do modelo KMV é o EDF.

Conforme visto, o EDF é uma medida quantitativa da qualidade do crédito. Mais especificamente, o EDF é uma estimativa da probabilidade de *default* de uma empresa em particular dado um horizonte de tempo, sendo que esta estimativa varia de 0,02% até 20%.

Segundo Kurbat e Korablev (2002, p. 1), o Novo Acordo da Basiléia determina que os bancos devem ter um sistema robusto para validar a acurácia das suas estimativas de probabilidade de *default*.

Uma parcela importante desta validação consiste em verificar se a média das probabilidades de *default* ocorridas em determinado horizonte de tempo coincidem com as estimativas feitas. Note que esta validação diz quão bem o modelo está calibrado.

Kurbat e Korablev (2002, p. 1) fazem a ressalva que esta calibração nada tem a ver com a faculdade do modelo de discriminar firmas boas das ruins.

Os referidos autores argumentam que uma abordagem direta para validar o modelo é comparar a média de *defaults* esperados com o número de *defaults* observados em certo intervalo de tempo e, então, averiguar se estas medidas coincidem, dado um intervalo de confiança.

Contudo, as taxas de *default* possuem distribuição que não é normal, sendo uma característica marcante a assimetria no formato da distribuição, algo que atrapalha esta validação.

De maneira a contornar o problema de assimetria e não-normalidade, Kurbat e Korablev (2002, p.1) propõem uma metodologia alternativa que permita validar o modelo.

Examinando dados empíricos de *default* entre 1991 e 2001, Kurbat e Korablev concluiram que o EDF é um previsor poderoso do *default*.

Os referidos autores argumentam que pelo fato de um evento de *default* ser raro, a validação do modelo torna-se mais difícil.

Isto é, para que a validação tenha significado estatístico, faz-se necessário uma amostra relativamente grande. Por exemplo, supondo que se disponha de 1.000 empresas não correlacionadas com uma probabilidade de *default* real de 0,1%, espera-se verificar 1 *default* por ano. Por outro lado, considerando uma empresa individualmente, sua taxa de *default* neste ano ou é zero (valor próximo ao esperado de 0,1%) ou é 100% (absolutamente distante para o valor esperado de 0,1%).

Quando a probabilidade de *default* é baixa, o desvio padrão em torno do número esperado de *defaults* tende a ser grande. Isto é, para uma amostra com *N defaults* não correlacionados com uma probabilidade *P* cada um, o desvio padrão *s* é dado por $\sqrt{N \times (P) \times (1-P)}$.

Utilizando o valor hipotético de 0,1% de taxa de *default* esperado e uma amostra de 1.000 firmas, o desvio padrão *s* é de $\sqrt{1000 \times (0{,}001) \times (0{,}999)}$, que resulta em aproximadamente 1.

Assumindo uma distribuição normal, obtém-se um intervalo de confiança de 95% dado por taxa de *default* mais ou menos 1,96 desvios.

Logo, com 95% de confiança, de um universo de 1.000 empresas, o número de empresas que se espera que entrem em *default* dentro de um ano seria de:

- $1 - 1{,}96 * 1 \approx -1$

- $1 + 1{,}96 * 1 \approx 3$

Obviamente, não se espera um número negativo de empresas entrem em *default*, logo este intervalo de confiança é dado por [0, 3].

A tabela abaixo ilustra os limites inferior (Lower) e superior (Upper) contemplando vários cenários de taxa de *default P*, número de empresas *N*.

Tabela 19 Cenários de P, N e intervalo de confiança considerando distribuição normal

P	N	Defaults	St.Dev.	Lower	Upper	CV
0.001	100	0.1	0.32	0.0	0.7	320.00
0.001	1000	1.0	1.00	0.0	3.0	100.00
0.001	10000	10.0	3.16	3.8	16.2	31.60
0.01	100	1.0	0.99	0.0	2.9	99.00
0.01	1000	10.0	3.15	3.8	16.2	31.50
0.01	10000	100.0	9.95	80.5	119.5	9.95
0.1	100	10.0	3.00	4.1	15.9	30.00
0.1	1000	100.0	9.49	81.4	118.6	9.49
0.1	10000	1000.0	30.00	941.2	1058.8	3.00

Fonte : Kurbat e Korablev (2002, p.3)

A tabela anterior nos diz que se estudássemos uma amostra com 10.000 empresas considerando a taxa de *default* calculada pelo modelo de 0,1%, obteríamos um intervalo de confiança com significância de 5% dado por]3,8 ; 16,2[. Agora, bastaria verificar se número de *defaults* observados em certo intervalo de tempo está dentro deste intervalo de confiança.

Se os *defaults* fossem independentes, os valores da tabela anterior consistiriam numa ótima ferramenta para comparar com os *defaults* que efetivamente ocorreram no intervalo de tempo estudado.

Ocorre que os *defaults* não são independentes e a distribuição da taxa de *default* não pode ser considerada normal, premissa utilizada na tabela anterior.

Kurbat e Korablev (2002, p. 2) asseveram que a distribuição da taxa média de *default* possui assimetria positiva e não pode ser considerada normal. Conseqüentemente, os intervalos de confiança criados não exprimem com rigor a realidade.

Kurbat e Korablev (2002, p. 4) apontam dois motivos para a distribuição da taxa de *default* ser assimétrica.

3.5.2.1. Por que a distribuição da taxa de default é assimétrica ? Motivo 1

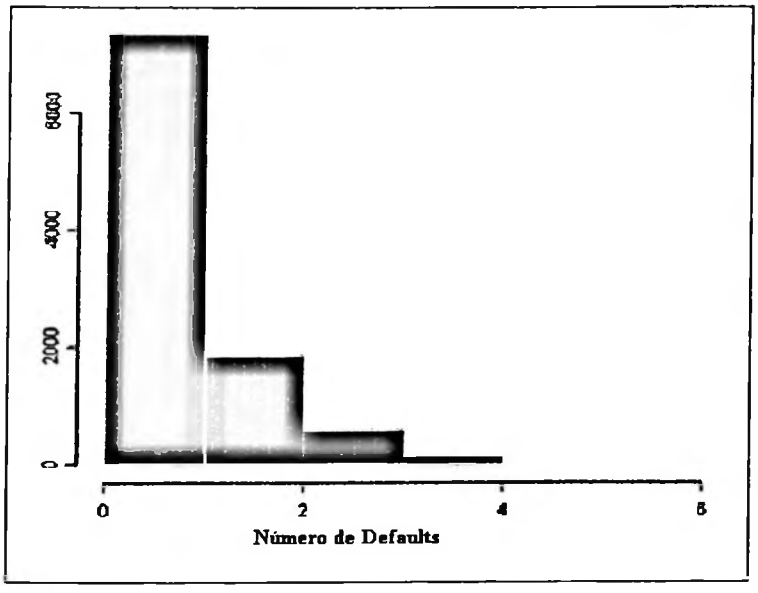
O primeiro motivo apontado é que o tamanho da amostra é relativamente pequeno em comparação com a taxa de *default*. Considerando N empresas independentes, todas elas com a mesma probabilidade P de entrar em *default*, o número de *defaults* que podem ocorrer em determinado intervalo de tempo segue uma distribuição binomial. A taxa de *default* é simplesmente o número de *defaults* dividido por N. Uma distribuição binomial é razoavelmente aproximada por uma normal com média $N.P$ e variância dada por $N.P.(1-P)$ desde que $N.P(1-P) > T$, sendo que T tipicamente é um número entre 5 e 10. Porém, o tamanho da amostra tipicamente empregado nestes estudos não é grande o suficiente para satisfazer esta restrição. Por exemplo, se estudarmos 1.000 empresas (que para o Brasil, já seria um número enorme) com EDF = 0,1%, $N.P(1-P) \approx 1.00 < 5$.

As *figuras 14* e *15* evidenciam as afirmações anteriores empregando uma simulação com 10.000 iterações.

Na *figura 14*, vê-se o resultado de simulação considerando 1.000 empresas com EDF = 0,1% evidenciando enorme assimetria.

Na *figura 15*, vê-se o resultado de simulação considerando 5.000 empresas e EDF = 0,1%, evidenciando uma menor assimetria em comparação com a figura 11, mas, ainda assim, a assimetria é pronunciada.

Figura 14 Resultado com 1.000 empresas, EDF = 0,1% e 10.000 simulações

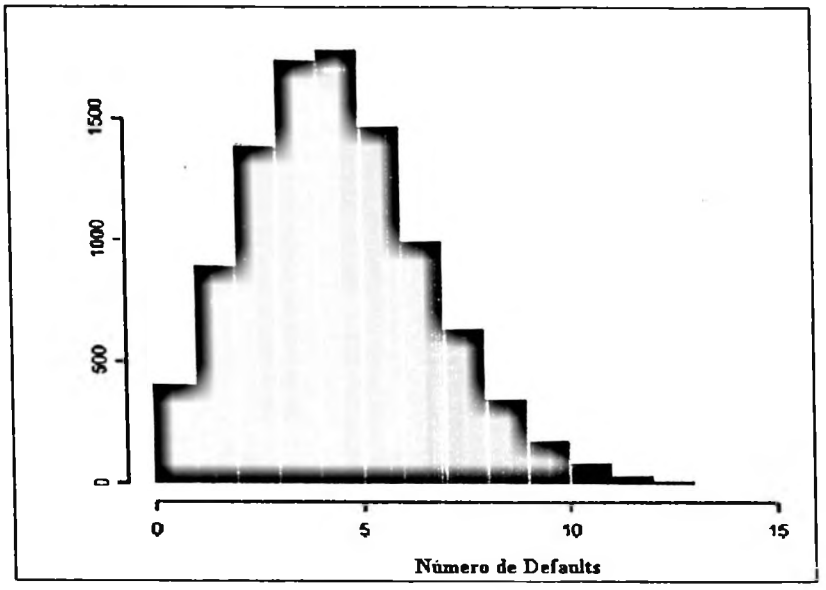


Fonte : Kurbat e Korablev (2002, p.5)

Pela figura acima, nota-se que das 10.000 simulações:

- Do universo de 1.000 empresas, nenhuma falhou em quase 8.000 simulações.
- Do universo de 1.000 empresas, 1 empresa falhou em quase 1.900 simulações.
- Do universo de 1.000 empresas, 2 ou mais empresas falharam em quase 100 simulações.

Figura 15 Resultado com 5.000 empresas, EDF = 0,1% e 10.000 simulações



Fonte : Kurbat e Korablev (2002, p.5)

3.5.2.2. Por que a distribuição da taxa de default é assimétrica ? Motivo 2

O segundo motivo apontado por Kurbat e Korablev (2002, p. 5) para não podermos utilizar os dados da tabela 10 é que a mesma foi construída supondo independência nos eventos de *default*. Os referidos autores sustentam que é falsa a premissa de independência. Segue a explicação.

Já foi visto que, segundo a modelagem de Merton (1974) e KMV, o *default* ocorre quando o valor da firma cai em relação a um determinado valor limite. Por este ponto de vista, o evento aleatório do *default* é causado por um evento aleatório mais fundamental que é justamente a queda no valor da firma.

Ora, por esta abordagem, a correlação dos *defaults* entre empresas pode ser inferida a partir da correlação entre o valor dos ativos de diferentes empresas.

Kurbat e Korablev (2002, p. 5) admitem que esta forma de se chegar a correlação não é muito precisa. Porém, qual seria outro caminho, dado que o evento de *default* é raro e, mais raro

ainda, é um evento de *default* conjunto de duas empresas. Logo, estimar a correlação com dados históricos não seria possível.

3.5.2.3. Quais são as conseqüências da assimetria da distribuição da taxa de default

Por conta da distribuição da taxa de *default* ser assimétrica, caso a média prevista para taxa de *default* seja usada para validar o modelo de risco de crédito, as previsões podem erroneamente aparentar ser tendenciosas uma vez que o processo de validação está incorreto.

De maneira a ilustrar o argumento anterior, considere o caso em que 1.000 empresas sejam estudadas, todas elas com EDF de 1% com uma correlação entre cada par de empresas de 0,15. Ao se fazer 10.000 simulações, encontrou-se a distribuição de taxa de *default* expressa pela figura 13.

Esta distribuição tem mediana de 6 *defaults* e média de 10 *defaults*.

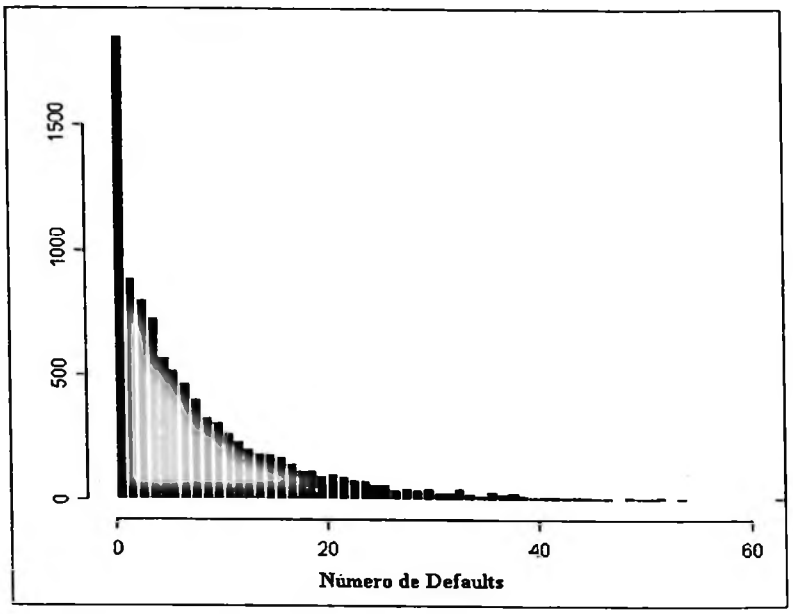
Obviamente, a mediana corresponde ao percentil 50%. A média foi encontrada ao fazer a conta: $1000.0{,}01*0{,}99 \cong 10$ e, neste caso, corresponde ao percentil 67%.

Portanto, se testássemos o modelo comparando os resultados obtidos na simulação com a média prevista de $\cong$ 10 *defaults* esperados, o modelo aparentaria estar superdimensionado a quantidade esperada de *defaults* em 66% das vezes.

Isto porque a distribuição da *figura 17* mostra que 66% das simulações apresentam como resultado menos de 10 *defaults*. Como a média esperada de *defaults* é de $\cong$ 10, este número pode aparentar estar muito alto dando a falsa impressão do modelo estar ruim por estimar uma quantidade de *defaults* mais alta que a observada.

Esta seria uma conclusão equivocada pois partiu de uma metodologia incorreta.

Figura 16 Resultado com 1.000 empresas, EDF = 1% e 10.000 simulações



Fonte : Kurbat e Korablev (2002, p.8)

De maneira a adotar uma metodologia correta, Kurbat e Korablev (2002, p. 9) sugerem que a comparação seja feita com a mediana da distribuição encontrada e não com sua média.

3.5.3. Outras questões envolvendo o *EDF*

Consoante Sundaram (2001, p.10), do ponto de vista matemático, parece que bastaria conhecer a distribuição de probabilidade governando a evolução do preço da firma *V* e dispor da distância até o *default* z para que pudéssemos calcular a probabilidade de *default*.

Uma vez que o modelo KMV emprega o modelo de Merton (1974) e este último utiliza o modelo de Black e Scholes (1973), está na raiz de todos estes modelos a suposição que o preço do ativo à vista, no caso o preço dos ativos da firma, segue uma distribuição lognormal.

Sobre estas questões, Sundaram (2001, p. 10) assevera que há uma possível inconsistência no raciocínio pelo fato de se obter os valores de V e σ a partir de E_t e σ_E acreditando na normalidade (no caso, supõe-se que o valor do ativo objeto segue uma distribuição lognormal) e depois, ao encontrar o valor do escore z dizer que não se pode mais supor normalidade e, portanto, deve-se descobrir empiricamente uma distribuição que descreva o evento de *default*.

Por este motivo, Sundaram (2001, p. 10) afirma que surge um problema na escolha da função distribuição de probabilidade para utilizar o escore *z*. Uma suposição normalmente empregada é assumir uma distribuição lognormal. Acontece que é comum que as distribuições que descrevem o comportamento dos títulos sejam leptocúrticas e apresentem caudas gordas, significando que observações de valores extremos sejam muito mais prováveis que a probabilidade indicada por uma distribuição normal.

Ora, como o evento de *default* é um evento extremo, o fato da cauda da distribuição ser gorda passa a ser um problema central de modo que o emprego de uma distribuição lognormal é uma solução ineficaz.

Outro ponto a ser discutido Sundaram (2001) diz respeito à expectativa de crescimento do valor dos ativos V_t.

Deve ser salientado que os procedimentos até aqui vistos para se determinar o valor da firma σ e sua volatilidade σ não fornece informação sobre o retorno esperado de V_t. Isto ocorreu, em grande parte, porque o cálculo do prêmio de uma opção não requer nenhuma premissa ou informação sobre o retorno esperado do ativo sobre o qual se calcula o valor da opção.

Tendo isto em vista, Sundaram (2001, p. 10) afirma que mesmo sabendo que o valor de uma firma é de US$ 10 bi e sua volatilidade anual é de 20%, não se pode predizer com nenhum grau de confiança a probabilidade teórica de *default* em um ano, se não for conhecida a taxa média de crescimento do valor dos ativos.

Segundo Bohn et al. (2005, p. 7), Sundaram (2001, p. 10), Bharath e Shumway (2004, p.6) a probabilidade de *default* é dada por: (eu também não estou mudando as figuras mas aqui, no caso, seria necessário juntar a palavra probabilidade)

$$\text{Probabilidade de Default} = \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{V}{D_T}\right)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\times t}{\sigma\times\sqrt{t}}\right)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_E \times E_t}{V_t \times N(d)}$$

Lembrando que:

- V é o valor atual da empresa estudada;
- σ é a volatilidade do valor da firma;
- σ_E é a volatilidade do valor da firma;

D_T é o valor de face da dívida;

- μ é a taxa de crescimento esperada dos ativos da firma;
- Φ é a função distribuição de probabilidade acumulada que descreve o comportamento de V;

3.6. Opções Reais

3.6.1. Introdução

Já foi visto nos tópicos anteriores o emprego de opções para determinar a probabilidade de *default* de uma empresa bem como o *spread* de *default*.

De forma a complementar a idéia de que a teoria de opções financeiras podem ser empregadas em outros campos das finanças, como em análise de crédito, ao se determinar a probabilidade de *default*, será explorado brevemente como a teoria de opções pode ser empregada para a avaliação de projetos de investimentos com o emprego de opções reais.

O objetivo de se estudar opções reais é verificar como os autores do tema resolvem problemas similares aos encontrados quando se emprega teoria de opções para modelar risco de crédito.

Um dos problemas comuns é a estimação das volatilidades envolvidas, particularmente quando a empresa não possuir títulos negociados em mercado.

3.6.2. O Conceito de Opções Reais

É largamente aceito que o termo opções reais foi utilizado pela primeira vez por Stewart Myers em 1977, destacando que as oportunidades de expansão de uma empresa (novos investimentos) podem ser vistas como sendo análogas às opções de compra, negociadas no mercado financeiro.

Segundo Copeland e Antikarov (2001, p. 6), uma opção é o direito, mas não a obrigação, de empreender uma ação, isto é, diferir, expandir, abandonar, a um custo predeterminado, denomina-se preço de exercício por um período de tempo predeterminado, que é a vida da opção.

Dentre as opções reais, comuns em muitos projetos de investimento, podem ser citadas:

- as opções de adiar o investimento, cancelar novas etapas do investimento;
- alterar a escala de produção;

- expandir;
- diminuir;
- fechar temporariamente;
- reiniciar;

- abandonar pelo valor;
- alterar usos (entradas e saídas);
- opções de crescimento;

De acordo com Damodaran (2002, p.3), o valor presente líquido de um projeto não captura os valores das opções de postergar, expandir ou abandonar o projeto. Quando as alternativas de investimento são comparadas pela abordagem tradicional que seleciona o projeto com maior VPL ou TIR, pode ser que se esteja preterindo outros projetos com maior flexibilidade de operações e investimento. Um modelo financeiro que objetiva a minimização do custo corrente de capital desconsidera o valor da flexibilidade originada pela capacidade de se poder tomar dívida adicional.

De maneira similar, uma firma que retenha caixa ao não distribuir dividendos e acumule grande montante pode estar desejando maior flexibilidade. O valor do patrimônio líquido obtido pelo valor presente dos fluxos esperados não é capaz de medir a opção que os acionistas possuem de determinar se e quando liquidar a firma, se e quando explorar outros ativos possuídos pela firma como patentes, licenças, recursos naturais, etc. Logicamente, esta flexibilidade de se dispor de múltiplas alternativas não é capturada pelos métodos tradicionais de avaliação de investimentos.

Indo ao encontro dos argumentos de Damodaran (2002, p.5), Matias et al. (1999, p. 4) asseveram que um número crescente de administradores e acadêmicos está convencido de que os métodos tradicionais de avaliação de investimentos (como o valor presente líquido e a taxa interna de retorno) têm falhado ao não considerar a flexibilidade de gestão para adaptar e revisar decisões a posteriori, em resposta às mudanças ocorridas no mercado.

Ainda segundo Matias et al. (1999, p. 4), as variáveis que influenciam o projeto, as quais fazem parte de uma previsão inicial, podem mudar significativamente. Essas mudanças podem ocorrer tanto na fase de avaliação do projeto, como durante a vida útil deste. Em um

ambiente de grande incerteza com relação ao futuro, é necessário considerar quanto o projeto irá permitir que a gerência possa reagir frente às mudanças no cenário empresarial.

Entretanto, a metodologia tradicional ignora as possíveis ações gerenciais que podem ser tomadas em resposta às mudanças no contexto empresarial, sejam estas favoráveis ou desfavoráveis ao projeto. A gerência pode adiar o investimento, até que as condições de mercado tornem-se mais favoráveis; pode expandir o projeto para tirar proveito de condições favoráveis ao mesmo; pode alterar a escala de produção (expandir, contrair, fechar temporariamente, reiniciar); pode abandonar o projeto pelo seu valor residual. Todas essas alternativas, que a gerência possui com relação a um projeto de investimento, são exemplos de opções reais.

O grau de importância de uma opção real com relação a outra depende das características do projeto a ser analisado, bem como do ambiente em que a empresa atua. Para alguns projetos, a opção de adiar o investimento pode ser a mais importante, como no caso de exploração de recursos naturais. Para outros projetos, a capacidade de alterar usos pode ser mais relevante, como no caso de um equipamento que se utilize tanto de energia elétrica como de gás natural.

Oliveira (2001, p. 49) afirma que a patente de um produto pode ser encarada como uma opção de compra sobre aquele produto. O desembolso necessário para o lançamento do produto é considerado o preço de exercício da opção e a vida da patente constituindo o tempo até o vencimento da opção.

Ao assumir que as oportunidades de uma empresa podem ser encaradas como opções, surge uma nova abordagem para a análise de investimentos. Isto é, no lugar de usar os métodos tradicionais de avaliação como VPL e TIR, pode-se empregar também um modelo de apreçamento de opções.

Vejamos a seguir como empregar o modelo de opções reais.

3.6.3. O Cálculo de Opções Reais

De maneira a ilustrar o mecanismo de cálculo com opções reais, Damodaran (2002, p. 30) apresenta o seguinte problema:

Considere que um investidor esteja interessado em adquirir os direitos exclusivos de comercializar um novo produto, que facilitará o acesso a e-mail em viagens rodoviárias. O investidor que adquirir os direitos do produto deverá aplicar US$ 500 MM para estabelecer a infra-estrutura necessária para prover o serviço. Deve-se supor que esta quantia será desembolsada no instante zero. Baseado nas projeções correntes, o investidor acredita que o serviço gerará US$ 100 em fluxo de caixa após os impostos anualmente.

Pelo cenário traçado, espera-se operar sem competição pelos próximos 5 anos. Esta informação mostra que há um custo ao se postergar a implementação do projeto. Quanto mais se demorar, pior será, pois novos concorrentes entrarão no mercado. Desta maneira, se os fluxos de caixa estiverem distribuídos uniformemente no tempo e a vida do projeto é em anos, tem-se a seguinte fórmula para o custo do atraso (em anos): $\frac{1}{n}$, sendo n em anos. Logo, para um projeto de 5 anos, o custo de se atrasar um ano é de $\frac{1}{5} = 20\%$. Ao fazer esta constatação, Damodaran (2002, p.30) compara o custo de se postergar um projeto ao mesmo efeito que o dividendo produz no preço do ativo objeto, diminuindo-o. Desta forma, opções de compra sobre ativos que pagam dividendos tendem a ficar mais baratas e opções de venda tendem a ficar mais caras quanto maior for a taxa de dividendo.

Empregando taxa de desconto de 15% ao ano, tem-se que:

- Valor Presente da anuidade de US$ 100 MM por 5 anos: US$ 335 MM.
- Valor presente líquido do projeto: 335 – 500 = US$ 165 milhões.

Damodaran (2002, p. 30) argumenta que a maior fonte de incerteza deste projeto é o número de pessoas que estarão interessadas neste produto. Enquanto os testes de mercado indicam que o projeto será capaz de capturar apenas uma pequena fração de pessoas que viajam a trabalho, estes mesmos testes também indicam uma possibilidade do mercado se tornar muito maior ao longo do tempo, criando outras fontes de receita. Uma simulação dos fluxos de caixa do projeto indica um valor esperado de US$ 335 milhões com desvio padrão de 42%.

De maneira a se avaliar os direitos exclusivos deste projeto, Damodaran (2002, p. 30) estrutura o problema da seguinte maneira: (precisaria juntar as palavras implementado e investimento na figura)

Valor do Ativo Objeto (S) = Valor Presente dos fluxos de caixa se projeto for implementado agora
Valor do Ativo Objeto (S) = US$ 335 MM

Preço de Exercício (K) = Investimento Inicial para introduzir o projeto
Preço de Exercício (K) = US$ 500 MM

Variância do Ativo Objeto (K) = $0{,}42^2 = 0{,}1764$

Vencimento = 5 anos

$$\text{Taxa de Dividendo} = \frac{1}{5\text{ anos}} = 0{,}2$$

Taxa de Juros Livre de Risco = 5% ao ano

$$\text{Preço da Call} = \frac{335}{e^{0{,}2\times 5}} \times N(d) - \frac{500 \times N\left(d - \sigma.\sqrt{T}\right)}{e^{0{,}05\times 5}}$$

$$d = \frac{1}{0{,}42.\sqrt{5}}\left[\ln\left(\frac{335}{500}\right) + \left(0{,}05 - 0{,}2 + \frac{1}{2}0{,}1764\right).(5)\right] = -0{,}755447651$$

$$d - \sigma \times \sqrt{5} = -1{,}6945962$$

$$N(-0{,}755447651) = 22{,}5\%$$

$$N(-1{,}694596202) = 4{,}5\%$$

$$\text{Preço da Call} = \frac{335}{e^{0{,}2\times 5}} \times 0{,}225 - \frac{500 \times 0{,}045}{e^{0{,}05\times 5}} = \text{US\$}10{,}2\text{MM}$$

Percebe-se que o direito de explorar este produto, que tem valor presente líquido negativo de US$ 165 MM, é de US$ 10,2 MM.

Nota-se, entretanto, que a probabilidade deste projeto se tornar viável antes de seu vencimento é baixa, algo que pode ser observado por um baixo valor de $N(d - \sigma.\sqrt{T})$.

3.6.4. Como estimar parâmetros ao empregar Opções Reais

Damodaran (2002, p. 62) afirma que o cálculo da volatilidade dos ativos da firma pode ser obtido diretamente desde que tanto suas ações como seus títulos de dívida possuam negociação no mercado. Assumindo que σ_e^2 seja a variância das taxas de retorno dos preços das ações e σ_d^2 seja a variância das taxas de retorno dos preços dos títulos de dívida, w_e seja a proporção do patrimônio líquido em relação ao ativo total e w_d a proporção da dívida em relação ao ativo total, tem-se que a variância dos ativos da firma σ_{firma}^2 é dado por:

$$\sigma_{\text{firma}}^2 = w_e^2 \times \sigma_e^2 + w_d^2 \times \sigma_d^2 + 2 \times w_e \times w_d \times \text{correlação}_{e,d}$$

Ainda Damodaran (2002, p. 62) sustenta que se os títulos da firma não forem negociados em mercado, a variância σ_d^2 pode ser estimada empregando títulos com mesmo *rating* que sejam negociados em mercado. Contudo, o referido autor comenta que, se a empresa em análise estiver em apuros financeiros, a estimativa sugerida pode levar a resultados estranhos. Nesta situação, recomenda-se empregar a média das variâncias do valor da firma de outras empresas do mesmo setor.

Outra questão levantada por Damodaran (2002, p.62), no que tange às estimativas necessárias para se empregar opções reais, diz respeito ao vencimento da dívida. A maior parte das firmas possuem mais de um título de dívida, os quais costumam pagar cupons. Uma vez que o modelo de apreçamento de opções requer apenas um dado para o vencimento da opção, os diversos títulos de dívida com múltiplos vencimentos para cupom e principal devem ser convertidos para um título zero cupom equivalente. Uma solução, que leva em conta tanto os cupons como as maturidades do títulos, é estimar a duração de cada título e depois ponderá-las para obter uma única medida de prazo médio. Quanto ao valor de face do título equivalente, Damodaran (2002, p.63) sugere que se deve somar ao valor de face dos títulos os cupons.

Sobre o preço e a variância de um projeto, Davis (1998, p.6) afirma que tais grandezas não são direta ou indiretamente transacionadas, forçando os analistas a fazerem estimativas sobre a variância do preço do projeto baseado em informações observáveis no mercado.

McDonald e Siegel (1986), Majd e Pindyck (1987), e Dixit e Pindyck (1994), *apud* Davis (1998, p.6), modelam como V e σ_V o valor de uma empresa e o respectivo desvio padrão das suas taxas de retorno. Tais autores assumem que σ_V é igual a 20 ou 30% do desvio padrão dos retornos das ações.

Infelizmente, uma má estimativa de σ_V causa grande impacto no cálculo do valor da opção. Trigeorgis (1990), *apud* Davis (1998, p.6), em seus cálculos do valor de uma opção real relacionada ao investimento na extração de petróleo mostra que um aumento de 50% em σ_V faz com que o preço da opção aumente em 40%. Muitos autores, reconhecendo a falibilidade de suas estimativas para σ_V, calculam o preço das opções reais empregando diversos valores de σ_V

Uma outra forma de estimar o desvio padrão das taxas de retorno dos ativos da firma σ_V foi deduzida no item 3.3 desta tese. O ponto de partida foi reconhecer o valor do PL da empresa como o prêmio de uma opção com *strike* dado pelo valor da dívida concentrada em data única. Logo o valor do PL no instante $t=0$ é igual a:

$E_t = V_t.N(d) - \frac{D.N(d - \sigma_V.\sqrt{T})}{e^{rT}}$. Ao se derivar esta função em relação ao valor dos ativos, obtendo-se $\frac{\partial E_t}{\partial V_t} = N(d)$.

Sabendo que $\Delta V_t = V_t \times \sigma_V$ e que $\Delta E_t = E_t \times \sigma_E$, chega-se a:

$$E_t \times \sigma_E = V_t \times \sigma_V \times N(d)$$

$$\sigma_E = \frac{V_t \times \sigma_V \times N(d)}{E_t} \Rightarrow \sigma_V = \frac{\sigma_E \times E_t}{V_t \times N(d)}$$

O inconveniente da fórmula acima é que o cálculo da volatilidade das taxas de retorno dos ativos da firma σ_V depende do valor dos ativos da firma, algo que também é desconhecido. Conforme, discutido anteriormente, faz-se necessário dispor de outras equações para que se obtenha as variáveis de interesse.

Capítulo 4: REVISITANDO O MODELO DE MERTON (1974) COM ÁRVORES BINOMIAIS

4.1. Motivação para se estudar Árvores Binomiais

Merton (1974) empregou o modelo de apreçamento de opções de Black e Scholes (1973), também indicado por MBS, com o intuito de obter a probabilidade de *default* de uma empresa para determinado horizonte de tempo.

A modelagem de Merton é de 1974 e, conforme será visto, o apreçamento de opções com árvores binomiais passou a ser popular por conta do estudo de Cox, Ross e Rubinstein de 1979. Isto significa que, em 1974, Merton não poderia ter derivado a probabilidade de *default* empregando árvores binomiais, fazendo com que ele tivesse que empregar o modelo disponível à época, qual seja: o modelo de precificação de Black e Scholes (1973). Contudo, para que MBS pudesse ser empregado, Merton teve que simplificar a estrutura da dívida da empresa.

A presente tese objetiva derivar um modelo de risco de crédito utilizando as idéias de Merton (1974) e substituindo o MBS por árvores binomiais, uma vez que esta última abordagem permite modelar estruturas de dívida mais complexas que aquelas contempladas pelo modelo original de Merton (1974).

4.2. Árvores Binomiais e o Apreçamento de Opções

Do ponto de vista histórico, Copeland e Weston (1992, p. 257) afirmam que, em 1979, Cox, Ross e Rubinstein bem como Rendleman e Barter, de maneira independente, derivaram um modelo de apreçamento de opções empregando árvores binomiais.

O modelo de apreçamento de opções empregando árvores binomiais desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein (CRR) apresenta uma série de vantagens sobre o modelo de Black e Scholes (1973), a saber:

- simplicidade;

- flexibilidade;

- possibilidade de apreçamento de opções americanas, algo que o modelo de Black e Scholes não é capaz;

- possibilidade de apreçamento de opções exóticas, algo que o modelo de Black e Scholes não é capaz;

Deseja-se aproveitar a simplicidade e flexibilidade do modelo de apreçamento, empregando árvores binomiais para se obter um modelo que seja capaz de determinar a probabilidade de *default* de estruturas de dívida mais sofisticadas que aquelas as quais o modelo original de Merton(1974) é capaz de resolver.

4.3. Árvore Binomial

A árvore binomial é um diagrama que representa possíveis caminhos que podem ser seguidos por um ativo (uma ação, por exemplo) durante a vida da opção.

De maneira a simplificar a notação, será assumido que $A_{t,E}$ é o preço no instante t do ativo A, podendo este preço assumir diversos estados E.

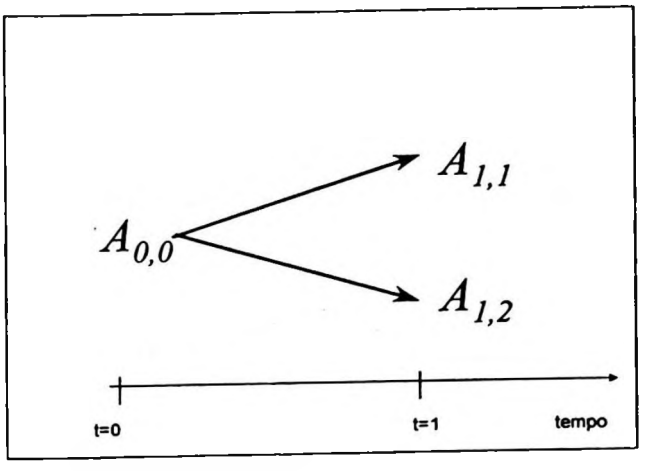
Uma vez que o preço à vista do ativo pode ser obtido por observação ao se verificar por quanto o ativo é negociado no mercado *spot*, o valor de $A_{0,0}$ é sempre conhecido. De maneira a deixar notação menos carregada, também pode-se representar por A_0 o preço *spot* do ativo.

Segundo Levy e Sarnat (1984, p. 588), o modelo binomial assume apenas dois possíveis estados da natureza, isto é, durante o período compreendido entre hoje, $t = 0$, e a data de vencimento, $t = 1$, o preço do ativo pode subir $x\%$ ou cair $y\%$, em que x e y são especificados.

Portanto, considerando que os estados de preço do ativo A sejam modelados por uma árvore binomial, dois são os possíveis estados de preço do ativo A no instante $t = 1$, a saber: $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$.

Os dois possíveis estados de preço do ativo A no instante $t = 1$ são evidenciados na figura a seguir:

Figura 17 Dois possíveis estados de preço no instante t=1.



Fonte: Autor

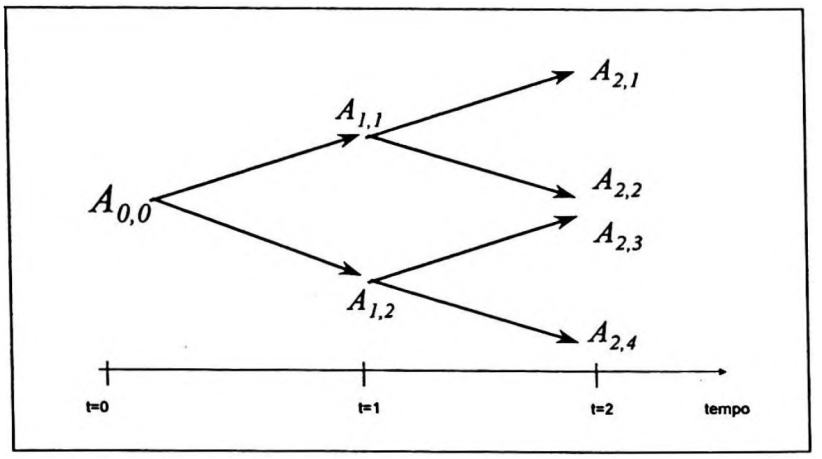
Uma vez que se construiu uma árvore binomial até o instante $t = 1$, o próximo passo é investigar o formato da árvore binomial até o instante $t = 2$.

Cada estado de preço $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$ verificado em $t = 1$ originará dois novos estados de preço.

Alternativamente, de maneira a facilitar a linguagem, cada estado de preço $A_{t,E}$ também poderá ser denominado de nó.

Desta feita, para $t = 0$, tem-se apenas 1 estado de preço. Para $t = 1$, tem-se apenas 2 estados de preço. Para $t = 3$, observar-se-á 4 estados de preço, quais sejam: $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$ e $A_{2,4}$. Os quatro possíveis estados de preço do ativo A no instante $t = 2$ são evidenciados na figura a seguir:

Figura 18 Quatro possíveis estados de preço no instante t=2



Fonte: Autor

Ora, não é difícil notar que, pela modelagem acima, o número de estados de preço do ativo A é dado por 2^t, sendo o t uma medida de tempo conforme indica as figuras anteriores.

Tabela 20 possíveis estados de preço em função de t

t	Número de Estados
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1.024
20	1.048.576
30	1.073.741.824
40	1.099.511.627.776
50	1.125.899.906.842.620
60	1.152.921.504.606.850.000
70	1.180.591.620.717.410.000.000
80	1.208.925.819.614.630.000.000.000
90	1.237.940.039.285.380.000.000.000.000
100	1.267.650.600.228.230.000.000.000.000.000
110	1.298.074.214.633.710.000.000.000.000.000.000
120	1.329.227.995.784.920.000.000.000.000.000.000.000
130	1.361.129.467.683.750.000.000.000.000.000.000.000.000

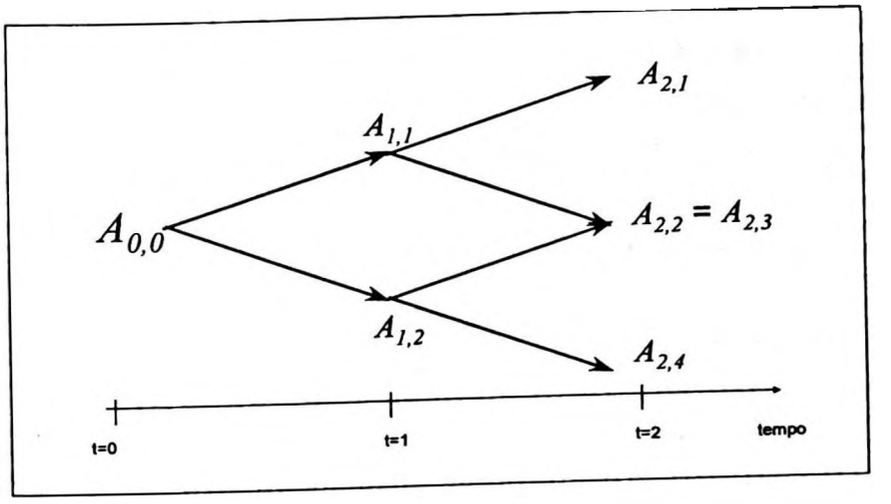
Fonte: Autor

Percebe-se, então, que uma árvore binomial é formada por um tronco inicial ($A_{0,0}$) de onde partem dois galhos ($A_{1,1}$ e $A_{1,2}$) os quais darão origem, cada um, a dois novos galhos e assim sucessivamente conforme o tempo t. Outra maneira de dizer a mesma coisa consiste em afirmar que, considerando um nó no instante t, este nó da árvore binomial dará origem a dois novos nós no instante $t + 1$.

Uma simplificação bastante usual é tornar a árvore binomial recombinante, isto é, fazer com que, por exemplo, $A_{2,2}$ seja igual a $A_{2,3}$.

Neste caso, considerando uma árvore binomial com até o instante $t = 1$, teríamos a seguinte figura:

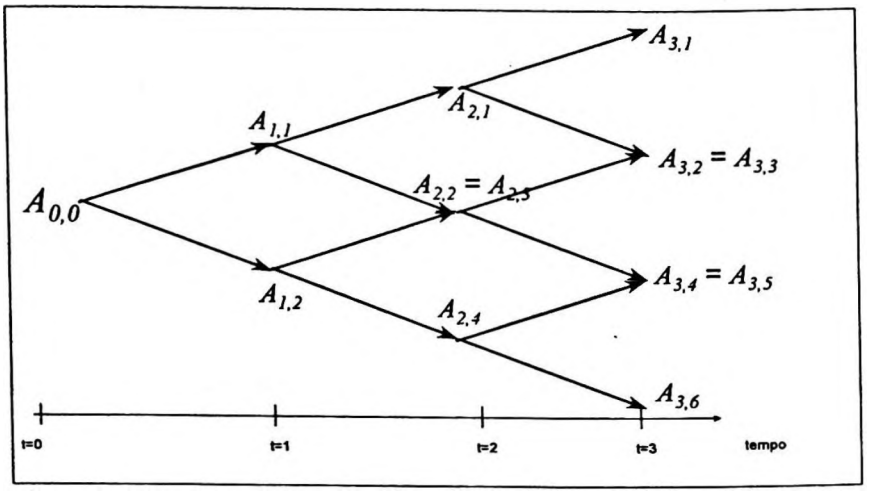
Figura 19 Três possíveis estados de preço no instante t=2. Árvore Recombinante



Fonte: Autor

Examinando o que ocorre no instante t = 3, pode-se observar a existência de quatro estados de preço, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 20 Quatro possíveis estados de preço no instante t=3. Árvore Recombinante



Fonte: Autor

Verifica-se significativa redução no número de estados desde que se construa árvore recombinante uma vez que o número de estados no instante t será de $t + 1$ é muito menor que o número de estados dado por 2^t, o que pode ser visualizado pela próxima tabela.

Tabela 21 Comparação do número de estados de preço

t	Número de Estados - Árvore não Recombinante	Número de Estados - Árvore Recombinante
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	8	4
4	16	5
5	32	6
6	64	7
7	128	8
8	256	9
9	512	10
10	1.024	11
20	1.048.576	21
30	1.073.741.824	31
40	1.099.511.627.776	41
50	1.125.899.906.842.620	51
60	1.152.921.504.606.850.000	61
70	1.180.591.620.717.410.000.000	71
80	1.208.925.819.614.630.000.000.000	81
90	1.237.940.039.285.380.000.000.000.000	91
100	1.267.650.600.228.230.000.000.000.000.000	101
110	1.298.074.214.633.710.000.000.000.000.000.000	111
120	1.329.227.995.784.920.000.000.000.000.000.000.000	121
130	1.361.129.467.683.750.000.000.000.000.000.000.000.000	131

Fonte: Autor

Nesta situação em que a árvore binomial é recombinante, costuma-se dizer que a árvore é uma rede.

4.4. Investigando a evolução do preço de um ativo até o instante t=n

O objetivo agora é investigar o comportamento de um ativo ao longo do tempo, sendo que tal ativo tem preço dado por A_0 no instante zero.

Uma premissa a ser empregada é que cada par de nós $A_{t+1,e1}$ e $A_{t+1,e2}$ originados pelo nó $A_{t,E}$ será obtido ao se multiplicar $A_{t,E}$ pelos fatores u e d, ou seja:

$$A_{t+1,e1} = u.A_{t,E}$$

$$A_{t+1,e2} = d.A_{t,E}$$

O fator u é dado por $u = 1 + i_u$ sendo i_u a taxa de variação de acréscimo de preço do ativo.

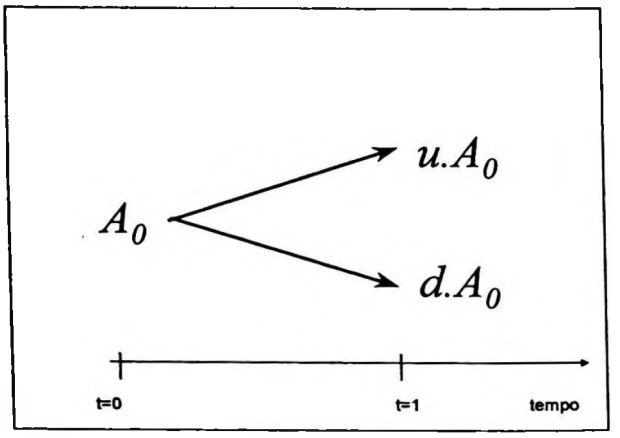
O fator d é dado por $d = 1 + i_d$ sendo i_d a taxa de variação de decréscimo de preço do ativo.

Para ser mais preciso na linguagem, não é necessário que i_u seja uma taxa que represente elevação no preço do ativo, evento sucesso, e i_d seja uma taxa que represente queda no preço do ativo, evento fracasso. Basta que i_u seja maior que i_d.

Em outras palavras, o evento sucesso não significa necessariamente que o preço do ativo sobe de um instante para outro, tampouco o evento fracasso significa que o preço do ativo cai de um instante para outro. É possível que o evento sucesso seja uma queda no preço do ativo em 4% e o evento fracasso seja uma queda de 6%. Analogamente, é possível que o evento sucesso seja uma subida no preço do ativo em 3% e o evento fracasso seja uma subida de 2%.

Desta maneira, uma árvore binomial para t=1 será da seguinte maneira:

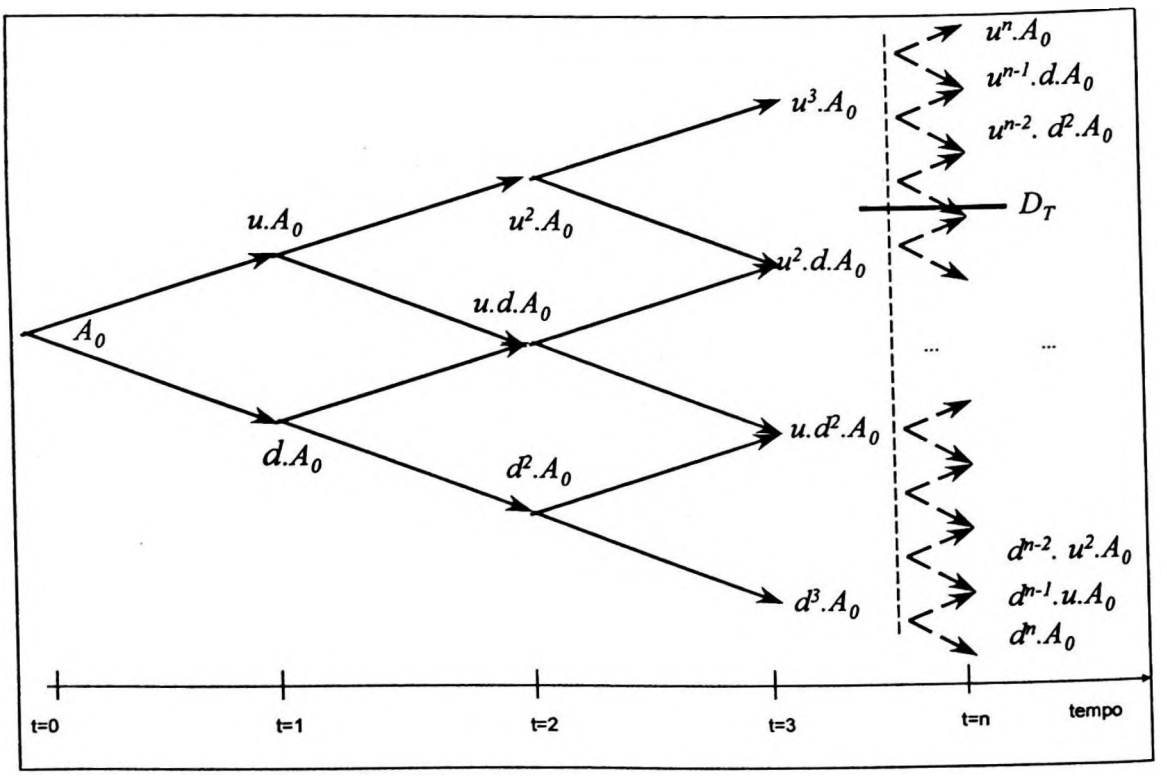
Figura 21 Dois possíveis estados de preço no instante t = 1 em função de u e d.



Fonte: Autor

Expandindo a árvore até o instante $t = n$, tem-se a seguinte figura:

Figura 22 Possíveis estados de preço no instante t=n para uma rede binomial



Fonte: Autor

Vale salientar que os preços dos ativos no instante $t = n$ pode ser obtido por diferentes caminhos de alta u e baixa d desde que o caminho trilhado pelo ativo passe pelo mesmo número de estados de alta e de baixa.

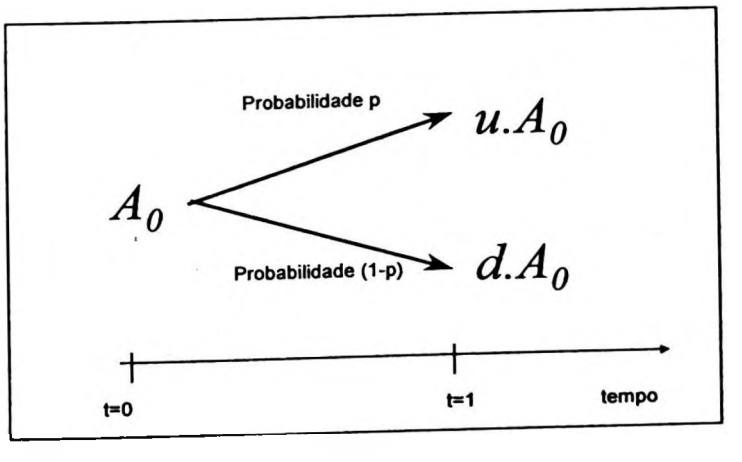
4.5. Associando probabilidades a evolução do preço de um ativo até o instante t=n

Uma vez estabelecidos os possíveis estados de preço do ativo para qualquer que seja o instante de tempo t, o próximo passo é associar a cada estado de preço uma probabilidade.

Ora, o modelo binomial de probabilidades assume que a realização de um evento aleatório pode resultar em apenas dois resultados, um com probabilidade p e o outro com probabilidade $1 - p$.

Logo, para uma rede binomial com $t = 1$ e dadas as simplificações até agora assumidas, estão ilustrados na figura seguinte os possíveis estados de preço e suas respectivas probabilidades:

Figura 23 Dois possíveis estados de preço no instante t = 1 em função de u e d com suas respectivas probabilidades



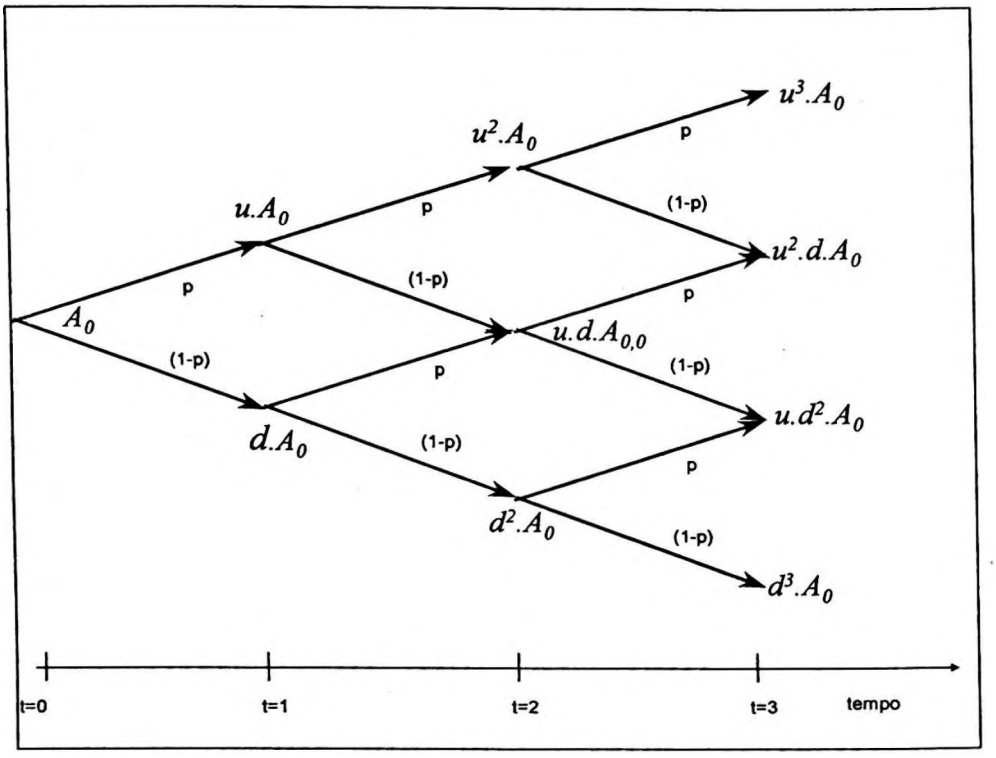
Fonte: Autor

Logo, para $t = 1$, tem-se dois possíveis estados de preço:

- $u.A_0$ com probabilidade p;
- $d.A_0$ com probabilidade $(1-p)$

Repetindo o raciocínio anterior para uma rede binomial com $t = 3$:

Figura 24 Quatro possíveis estados de preço no instante $t = 3$ em função de u e d com suas respectivas probabilidades



Fonte: Autor

Logo, para $t = 3$, tem-se quatro possíveis estados de preço:

- $u^3.A_0$ com probabilidade p^3 Note que há 1 caminho para se chegar a $u^3.A_0$

- $u^2.d.A_0$ com probabilidade $2.p^2.(1-p)$ Note que há 2 caminho para se chegar a $u^2.d.A_0$

- $u.d^2.A_0$ com probabilidade $2.(1-p)^2.p$ Note que há 2 caminho para se chegar a $u.d^2.A_0$

- $d^3.A_0$ com probabilidade $(1-p)^3$ Note que há 1 caminho para se chegar a $d^3.A_0$

Generalizando para uma rede binomial com *n* passos, tem-se *n + 1* possíveis estados de preço. O quadro seguinte evidencia os estados de preço e suas respectivas probabilidades:

Quadro 3 : Estado de preço e sua respectiva probabilidade

Preço	**Probabilidade**
$u^n.A_{0,0}$	$\binom{n}{n} p^n$
$u^{n-1}.d.A_{0,0}$	$\binom{n}{n-1} p^{n-1}.(1-p)$
$u^{n-2}.d^2.A_{0,0}$	$\binom{n}{n-2} p^{n-2}.(1-p)^2$
...	...
$u^2.d^{n-2}.A_{0,0}$	$\binom{n}{n-2} p^2.(1-p)^{n-2}$
$u.d^{n-1}.A_{0,0}$	$\binom{n}{n-1} p.(1-p)^{n-1}$
$d^n.A_{0,0}$	$\binom{n}{n} (1-p)^n$

Fonte : Autor

Considerando um ativo A que siga essa distribuição binomial, o valor esperado para o ativo A no instante $t = n$ é dado por:

$$E[A] = A_{0,0} \times (u.p + d(1-p))^n .$$

O desvio padrão de A é dado por:

$$\sigma = \sqrt{A_{0,0}^2 \times [d^2.(1-p) + u^2.p]^n - A_{0,0}^2 \times [d.(1-p) + u.p]^{2n}}$$

Segundo Newbold (1995, p. 158), a distribuição binomial supõe eventos aleatórios independentes com dois possíveis resultados: sucesso ou fracasso. Esta é uma suposição importante assume-se que o comportamento do preço futuro do ativo nada tem a ver com sua trajetória passada.

4.6. Cálculo do Preço de uma Call empregando árvore binomial de passo único

4.6.1. Introdução

Segundo Bodie *et al.* (2000, p. 496), uma compreensão completa de fórmulas para o apreçamento de opções comumente usadas torna-se difícil sem um fundamento matemático substancial. Mesmo assim, é possível desenvolver algum discernimento valioso na avaliação do preço de opções ao considerar um caso simples no qual o preço do ativo objeto possa assumir apenas dois preços diferentes em $t = 1$.

Conforme Levy e Sarnat (1984, p. 588), considerando que no instante $t = 1$ tem-se duas possibilidades de preço tanto para o ativo objeto como para a opção, pode-se criar uma carteira protegida a partir da qual pode-se determinar o preço da opção no instante $t = 0$.

O tópico seguinte apresenta a dedução da fórmula do preço de uma opção européia de compra empregando a carteira protegida.

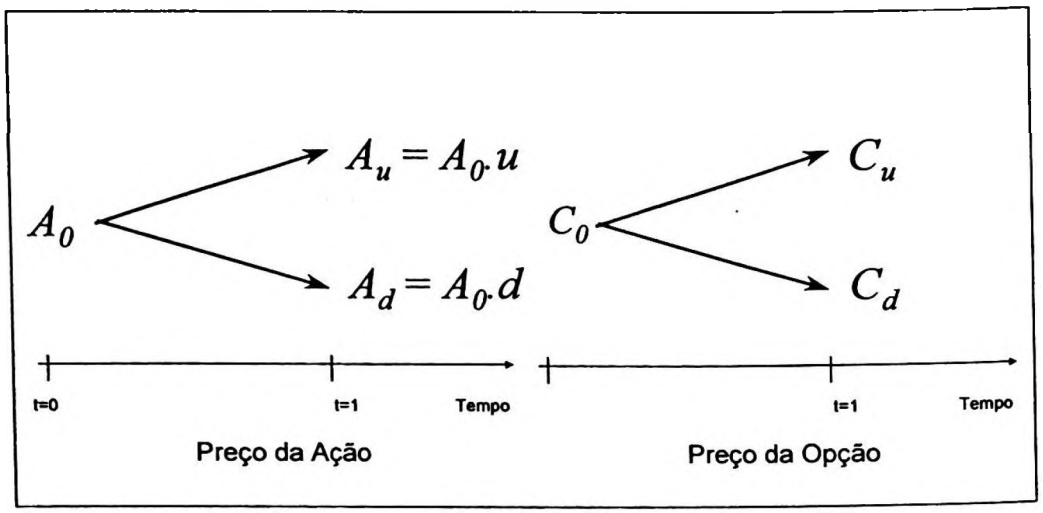
4.6.2. Fórmula do Preço de uma *Call* Européia empregando árvore binomial de passo único

De maneira a se calcular o preço de uma opção de compra européia empregando árvores binomiais de passo único, há de se considerar dois ativos, uma opção de compra européia e o ativo a que a *call* se refere, em dois momentos distintos, a saber:

- Preços dos ativos considerando $t=0$
  - Ativo objeto com preço *spot* dado por A_0;
  - Opção de compra sobre o ativo objeto cujo prêmio é C_0 e o *strike* é dado por K;
- Preços dos ativos considerando $t=1$;
  - Ativo objeto poderá assumir os valores $A_d=A_0.d$ ou $A_u=A_0.u$;
  - Opção de compra será indicada C_d caso ativo objeto valha $A_0.d$ ou será indicada por C_u caso ativo objeto valha $A_0.u$. Em outras palavras, tem-se que $C_d = Max[A_0.d - k; 0]$ enquanto que $C_u = Max[A_0.u - k; 0]$;

A figura a seguir ilustra as condições em que os preços dos ativos podem evoluir dos instantes 0 até 1:

Figura 25 Comparação dos preços do ativo objeto e uma opção de compra sobre o ativo



Fonte: Autor

Partindo das informações anteriores e assumindo ausência de arbitragem, montou-se seguinte carteira de investimento:

- Venda de uma opção de compra pelo preço C_0 com *strike* dado por K;
- Compra de uma fração Δ do ativo objeto pagando-se ΔA_0;

Esta carteira de investimento não é autofinanciada. Isto é, ao se comprar ΔA_0 e vender C_0, tem-se $PV = \Delta.A_0 - C_0 \neq 0$.

Assumindo que independente do caminho que a ação siga, o preço da carteira em $t = 1$ será o mesmo, conclui-se que $FV = \Delta.A_0.u - C_u = \Delta.A_0.d - C_d$.

Isolando delta, obtém-se: $\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{A_0.u - A_0.d}$

Ora, independente do preço do ativo objeto em $t = 1$, o valor futuro da carteira comprada em delta ativo e vendida numa opção de compra européia será sempre o mesmo.

Considerando $r = 1 +$ *taxa de juros livre de risco*, segue que:

$$\Delta.A_0 - C_0 = \frac{\Delta.A_0.u - C_u}{r} \quad (1)$$

$$\Delta.A_0 - C_0 = \frac{\Delta.A_0.d - C_d}{r} \quad (2)$$

De (1), segue que $C_0 = \Delta.A_0 - \dfrac{\Delta.A_0.u - C_u}{r}$.

Substituindo $\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{A_0.u - A_0.d}$, chega-se a:

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u - d} - \left[\frac{u.C_u - u.C_d}{u - d} - C_u\right] \times r^{-1}$$

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u - d} - \left[\frac{u.C_u - u.C_d - C_u.u + d.C_u}{u - d}\right] \times r^{-1}$$

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u - d} - \left[\frac{-u.C_d + d.C_u}{u - d}\right] \times r^{-1}$$

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \left[\frac{u.C_d - d.C_u}{u - d}\right] \times r^{-1}$$

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{1}{r} \times \frac{C_d.u - C_u.d}{u - d}$$

$$C_0 = \frac{1}{r}.\left[\frac{C_u.r - C_d.r + C_d.u - C_u.d}{u - d}\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{r}.\left[C_u \times \frac{r - d}{u - d} + C_d \times \frac{u - r}{u - d}\right]$$

4.7. Mundo Risco Neutro

De modo a evitar os inconvenientes de lidar com taxa de oportunidade de evolução dos preços do ativo, foi criado o que passou a ser chamado de mundo risco neutro.

Conforme Yang (1997, p. 7), *apud* Siqueira (1999, p. 9), a estimação da medida de probabilidade neutralizadora do preço da incerteza tornou-se um tema central em Finanças, sendo que o princípio da não-arbitragem fornece uma condição suficiente para a existência de uma medida de probabilidade neutralizadora do preço da incerteza necessário para a formação de preço livre de arbitragem.

Segundo Hull (2002, p. 204), num mundo risco neutro todos os indivíduos são indiferentes ao risco. Neste tipo de mundo, investidores não demandam compensação para o risco e o retorno esperado para todos os títulos é a taxa de juros livre de risco.

Segundo Hull (2002, p. 393), o princípio da avaliação risco neutra afirma que uma opção ou outro derivativo pode ser apreçado assumindo um mundo risco neutro. Empregando o princípio da avaliação risco neutra, pode-se afirmar que o preço obtido no mundo risco neutro é correto também no mundo real.

Segundo Siqueira (1999, p. 8), a introdução de um ente matemático chamado medida de probabilidade neutralizadora do preço da incerteza (*risk neutral probability*) permite a criação de um mundo virtual chamado de mundo com preço da incerteza neutralizado (*risk neutral world*). Essa medida de probabilidade elimina a necessidade de considerar o preço da incerteza do título.

Ora, ao se fazer esta consideração, o tomador de decisão pode tratar o ativo com preço da incerteza como se fosse um ativo sem risco. Nesta situação, a taxa de desconto desse mundo livre de preço da incerteza passa a ser a taxa de juros livre de risco.

Ainda segundo Siqueira (1999, p. 8), ao se trabalhar no mundo risco neutro, tem-se as seguintes vantagens:

- linearidade dos preços. Isto é, o preço de uma combinação linear de ativos é igual a combinação linear dos preços dos ativos;

- unicidade dos preços. Isto é, o preço de um ativo é único.

- como não há preço da incerteza, a esperança matemática é o operador linear adequado para a determinação de preço racional.

4.8. Probabilidades Mundo Real e Mundo Risco Neutro

Em seção anterior foi visto que o preço de uma opção considerando árvore binomial de passo único é dado por:

$$C_0 = \frac{1}{r}.\left[C_u \times \frac{r-d}{u-d} + C_d \times \frac{u-r}{u-d}\right].$$

O resultado obtido é particularmente interessante ao enxergamos nas proporções dadas por $\frac{r-d}{u-d} = q$ e $\frac{u-r}{u-d} = 1-q$ medidas similares a de probabilidades pois $\frac{u-r}{u-d} + \frac{r-d}{u-d} = 1$. É importante assegurar que q e (1-q) nunca assumam valores negativos ou maiores que 1.

Esta constatação torna-se interessante porque é possível concluir que o preço da opção em $t = 0$ comporta-se como o valor esperado para o preço da opção na data $t = 1$ trazido a data $t = 0$ empregando taxa de juros livre de risco.

Por conseguinte, diz-se que $q = \frac{r-d}{u-d}$ e $1-q = \frac{u-r}{u-d}$ são probabilidades risco neutras.

De maneira a diferenciar uma probabilidade risco neutra de uma probabilidade mundo real, Hull (2002, p. 200-201) apresenta os seguintes dados:

- *Strike*: \$ 21;

- A_0: 20;

- $u=1,1$ e $d=0,9$ significando que:
- $A_0.u = \$\ 22$ e $A_0.d = \$\ 18$
- $C_u = \$\ 1$ e $C_d = \$\ 0$
- r = 1,030454534

Com os dados apresentados, tem-se que:

$$C_0 = \frac{1}{1{,}030454534}.\left[1 \times \frac{1{,}030454534 - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} + 0 \times \frac{1{,}1 - 1{,}030454534}{1{,}1 - 0{,}9}\right] = \$0{,}633$$

$$q = \frac{r-d}{u-d} = \frac{1{,}030454534 - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 65{,}23\% \text{ e } 1 - q = \frac{u-r}{u-d} = \frac{1{,}1 - 1{,}030454534}{1{,}1 - 0{,}9} = 34{,}77\%$$

Outra forma de se obter os valores de q e $(1-q)$ parte do princípio que o valor esperado do ativo objeto em $t = 1$ é seu preço *spot* atualizado pela taxa de juros livre de risco. Adicionalmente, este valor esperado também deve coincidir com o valor futuro de $22, ponderado por sua probabilidade de ocorrência (q) e pelo valor futuro $ 18, ponderado por sua probabilidade de ocorrência (1-q).

Matematicamente, tem-se que:

$$q \times 22 + (1-q) \times 18 = 20 \times 1{,}030454534 \Rightarrow q = 0{,}6523$$

Este resultado indica que no mundo risco neutro a probabilidade do ativo valer em $t=1$ $ 22 é de 65,23%.

Ora, no mundo risco neutro, o valor da *call* em $t=1$ é $1 com probabilidade 65,23% e o valor da *call* em $t=1$ é $0 com probabilidade 34,77%. Logo, o valor esperado para a *call* em t=1 é $1 \times 0{,}6523 + 0 \times 0{,}3477 = \$0{,}6523$. Se $ 0,6523 é o valor esperado para a *call* em $t=1$ então $\frac{0{,}6523}{1{,}030454534} = \$0{,}633$ é o preço da *call* tem $t=0$, que coincide com o valor calculado anteriormente.

Hull (2002, p. 205) salienta que o valor encontrado para as probabilidades risco neutras *q* e *(1-q)* não necessariamente coincidem com as probabilidades mundo real *p* e *(1-p)*. Sendo assim, a próxima pergunta seria a seguinte: Quais são as probabilidade mundo real *p* e *(1-p)*?

Imaginando que no mundo real a expectativa de retorno do ativo objeto seja de 4,0810%, poder-se-ia calcular a probabilidade mundo real *p* ao se fazer o raciocínio anterior substituindo a taxa de juros livre de risco pela taxa de retorno com risco. Em vista disto, tem-se que:

$$p \times 22 + (1-p) \times 18 = 20 \times 1{,}0408104 \Rightarrow p = 0{,}7041$$

Ainda que se conheça a taxa de retorno esperado para o ativo objeto, esta não é a taxa a ser empregada para se descontar os fluxos esperados para uma opção.

4.9. Calibrando *u* e *d* a partir da volatilidade σ

Segundo Hull (2002, p. 211), ao se construir uma árvore binomial para representar os movimentos de um ativo, os parâmetros *u* e *d* são escolhidos de modo que a volatilidade do ativo na árvore seja igual a volatilidade real do ativo.

Supondo que o retorno logarítmico mundo real esperado do ativo seja μ e sua volatilidade seja σ, num intervalo de tempo δt, o valor esperado do ativo será $A_0 \times e^{\mu \times \delta t}$.

Logo, pode-se afirmar que $A_0 \times e^{\mu \times \delta t} = q \times A_0 \times u + (1-q) \times A_0 \times d$

A variância do valor esperado de A_0 é dado por:

$$\sigma^2[qA_0u + (1-q)A_0d] = E\left[(qA_0u + (1-q)A_0d)^2\right] - E^2[qA_0u + (1-q)A_0d]$$

Hull (2002, p. 211) demonstra que, após se realizar as devidas simplificações e considerando árvore recombinante, chega-se a:,

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\delta t}} \text{ e } d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\delta t}}$$

4.10. Generalização do Preço de uma Call Européia empregando árvore binomial de n passos

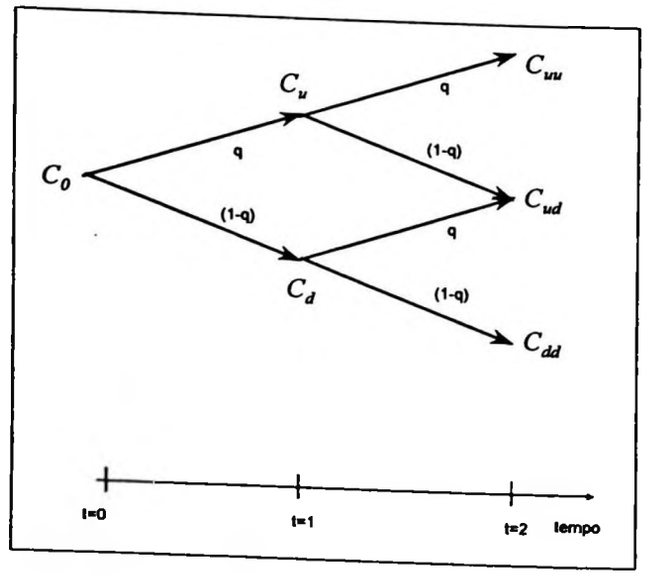
Em seção precedente foi explicado o significado da probabilidade risco neutra q dada por $q = \frac{r-d}{u-d}$.

Empregando a probabilidade risco neutra q, o preço de uma opção européia de passo único é dada por $C_0 = \frac{1}{r}.[C_u \times q + C_d \times (1-q)]$.

O objetivo agora é obter o preço de uma opção européia de compra empregando árvore binomial de passo n, sendo n>1.

Supondo uma árvore de dois passos, tem-se que:

Figura 26 Evolução do preço da call



Fonte : Autor

Ora, com base na figura acima, sabe-se que:

$$C_d = \frac{1}{r}.[C_{ud} \times q + C_{dd} \times (1-q)]$$

Substituindo os valores acima em $C_0 = \frac{1}{r}.[C_u \times q + C_d \times (1-q)]$, obtém-se:

$$C_0 = \frac{1}{r}.\left[\frac{1}{r}.[C_{uu} \times q + C_{du} \times (1-q)] \times q + \frac{1}{r}.[C_{ud} \times q + C_{dd} \times (1-q)] \times (1-q)\right]$$

Simplificando a relação anterior, chega-se ao preço de uma *call* européia considerando 2 passos:

$$C_0 = \frac{1}{r^2}.\left[C_{uu} \times q^2 + 2C_{du} \times (1-q) \times q + C_{dd} \times (1-q)^2\right]$$

Considerando n=3 passos, chega-se a:

$$C_0 = \frac{1}{r^3}.\left[q^3 C_{uuu} + 3q^2(1-q)C_{uud} + 3q\ (1-q)^2 C_{udd} + (1-q)^3 C_{ddd}\right]$$

Generalizando para n passos, encontra-se:

$C_0 = \frac{1}{r^n}.\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \times q^{n-j} \times (1-q)^j \times C_{(n-j)u,jd}$, sendo que *(n-j)u* significa que ocorre *(n-j)* subidas de fator u e a notação jd indica j descidas do fator d.

Sabendo-se que K é o preço de exercício da opção e $A_j = A_0.u^{n-j}.d^j$ os possíveis preços do ativo objeto, tem-se que $C_{(n-j)u,jd} = \max[A_0.u^{n-j}.d^j - K, 0]$.

Fazendo-se as devidas substituições, chega-se a:

$$C_0 = A_0.\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{n}{j}B(\lambda, j, Q) - \frac{K}{r^n}.B(\lambda, j, q)$$

$$Q = \frac{q.u}{r}$$

$B(\lambda, j, Q)$: Probabilidade dada pela distribuição binomial com λ eventos e j sucessos sendo a probabilidade de sucesso dada por Q;

$B(\lambda, j, q)$: Probabilidade dada pela distribuição binomial com λ eventos e j sucessos sendo a probabilidade de sucesso dada por q;

$$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{k}{A_0}\right)}{\ln\left(\frac{d}{u}\right)}, \lambda \text{ é um inteiro.}$$

4.11. Utilizando Árvores Binomiais para se estimar a probabilidade de *default* de uma empresa

O objetivo agora é obter a probabilidade de *default* de uma empresa qualquer que empregue capital de terceiros com valor de face D_T vencendo no instante T.

Inicialmente será desenvolvido modelo assumindo que todo o capital de terceiros resuma-se a uma dívida, comportando-se como um título zero cupom.

Tal como no modelo de Merton (1974), as variáveis fundamentais a serem determinadas são o valor a mercado dos ativos da empresa no instante zero indicado por V_0 e sua respectiva volatilidade σ. O caminho para se obter tais variáveis é a partir de um modelo de apreçamento de opções.

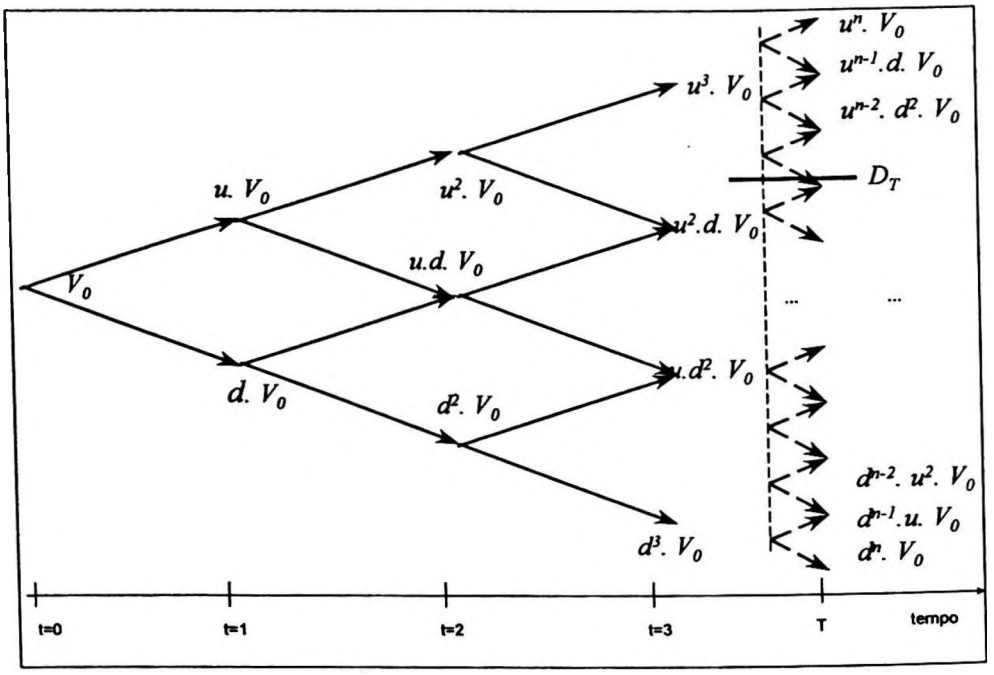
Contudo, no lugar de empregar o modelo de Black e Scholes (1973), o presente trabalho propõe o emprego de árvores binomiais.

Sendo assim, tem-se que:

$$C_0 = V_0 \cdot \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{n}{j} B(\lambda, j, Q) - \frac{K}{r^n} \cdot B(\lambda, j, q)$$

O preço C_0 corresponde ao preço a mercado do patrimônio líquido da empresa, suposto conhecido.

Figura 27 Evolução do Preço a mercado dos ativos da empresa



Fonte : Autor

Ora, pelo exposto, tem-se as seguintes variáveis:

- C_0: Preço a mercado do patrimônio líquido da empresa no instante zero;
- D_T: Valor de face da dívida vencendo em T;
- i_f: taxa de juros livre de risco ajustada para os n períodos;
- V_0: Preço a mercado dos ativos da empresa no instante zero;
- σ: Desvio padrão dos retornos do ativos da empresa;
- u: $u = 1 + i_u$ sendo i_u a taxa de variação do preço do ativo considerando subida no preço;

- q: probabilidade risco neutra

Das variáveis acima, as seguintes são conhecidas: C_0, D_T, i_f. Portanto, dispõe-se de uma equação e 5 variáveis a serem determinadas: V_0, u, d, q, σ.

Empregando a abordagem risco neutra, a probabilidade p é substituída por uma proporção q de tal maneira que $E[A] = V_0 \times (1 + i_f)^T$, em que i_f é a taxa de juros livre de risco.

Ora, já se sabe pela distribuição binomial que $E[A] = V_0 \times (u.p + d(1-p))^T$.

Contudo, no mundo risco neutro, não se pode empregar a probabilidade p utilizada nos tópicos precedentes, mas é possível empregar a proporção q.

Segundo Siqueira (1999, p. 8), a medida de probabilidade neutralizadora do preço da incerteza é um elemento fundamental para a determinação do preço da opção e é uma entidade não-observável e independe da distribuição do preço do valor do ativo subjacente.

Substituindo a probabilidade p por uma proporção q, tem-se:

$$V_0 \times (1 + i_f)^T = V_0 \times (u.q + d.(1-q))^T$$

$$(1 + i_f) = (u.q + d.(1-q))$$

Lembrando que $(1 + i_f) = r$, é interessante notar que esta fórmula, ao ser rearranjada, fornece $q = \dfrac{r-d}{u-d}$, equação já deduzida em tópicos precedentes.

Uma nova equação pode ser obtida ao se considerar que a árvore seja recombinante. Se este for o caso, pode-se adotar que: $u = \dfrac{1}{d}$.

Outra equação disponível foi obtida em tópico precedente segundo a qual o desvio padrão dos

$$\sigma = \sqrt{V_0^2 \times \left[d^2.(1-q)+u^2.q\right]^n - V_0^2 \times \left[d.(1-q)+u.q\right]^{2n}}\ :$$

Portanto, dispõe-se de cinco equações:

$$C_0 = \frac{1}{r^n}.\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \times q^{n-j} \times (1-q)^j \times C_{(n-j)u.jd}\ ;$$

$$q = \frac{r-d}{u-d}$$

$$u = e^{\sigma.\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma.\sqrt{\delta t}}$$

$\sigma = \dfrac{\sigma_E \times C_0}{V_0 \times N(d)}$, sendo σ_E a volatilidade do patrimônio líquido.

Dispondo de cinco equações e cinco incógnitas pode-se descobrir numericamente o valor de: V_0, u, d, q e σ.

Tendo descoberto os valores acima, o próximo passo será encontrar a probabilidade mundo real p empregando a seguinte relação:

$\sigma = \sqrt{V_0^2 \times \left[d^2.(1-p)+u^2.p\right]^n - V_0^2 \times \left[d.(1-p)+u.p\right]^{2n}}$, sendo n o número de passos empregados na árvore binomial.

4.12. Cálculo da probabilidade de *default* de uma empresa a partir da probabilidade mundo real

Uma vez que se conheça a probabilidade mundo real, o próximo passo é descobrir a probabilidade de *default* da empresa.

Esta maneira de enxergar o problema possibilita o emprego de árvores binomiais para casos mais complexos que aqueles previstos pelo modelo original de Merton (1973) em que se supunha toda a dívida como um título zero cupom.

Ademais, a metodologia apresentada nesta tese é mais elegante e menos arbitrária que a abordagem KMV uma vez que o KMV assume que a dívida da empresa será na forma de um título zero cupom equivalente ao nível *D* de modo que D seja a soma:

- dos valores de face de todos os passivos de curto prazo;

- de uma fração do valor de face dos passivos de longo prazo. Sundaram (2001, p. 7) sugere uma fração de 50% do valor de face dos passivos de longo prazo. Esta mesma fração de 50% é recomendada por Bohn et al. (2005, p.7).

A metodologia apresentada nesta tese permite o cálculo da probabilidade de *default* da empresa utilizando qualquer método em que se concentre toda a dívida da empresa em uma só data. Deve-se salientar que a maneira que o método KMV concentra a dívida numa única data é apenas uma de diversas alternativas para se realizar isto.

Uma grande vantagem da metodologia apresentada nesta tese é que o fluxo de caixa das diversas modalidades de dívida que a empresa tenha pode ser distribuído ao longo da árvore binomial. É também vantajosa por calcular a probabilidade de *default* contemplando o fluxo de pagamentos exatamente como ele é, sem ter que concentrá-lo em uma única data, algo que sempre carregará uma parcela de arbitrariedade.

No capítulo 5, a metodologia sugerida nesta tese será aplicada em alguns casos considerando a simplificação em que se concentra toda a dívida da empresa em uma única data. Embora se concentre a dívida em uma única data, será apresentada metodologia diferente daquela empregada pelo KMV.

No capítulo 6, a metodologia ora proposta será aplicada em alguns casos distribuindo o fluxo de pagamentos programados ao longo da árvore binomial.

Capítulo 5: Cálculo da Probabilidade de *Default* Empregando Modelo Binomial para Empresa com Dívida Concentrada em uma Única Parcela

5.1. Perfil da Dívida de uma Empresa

É sabido que uma empresa deve satisfazer suas novas necessidades de financiamento empregando capital próprio ou de terceiros. Ao decidir por empregar capital de terceiros, a empresa procura adequar os pagamentos de juros e de principal decorrentes dos financiamentos e empréstimos com a sua capacidade de geração de caixa.

Sobre essa questão, Assaf (2002, p. 167) afirma que o conceito básico de equilíbrio financeiro fica evidenciado ao se verificar que toda aplicação de recursos no ativo da empresa deve ser financiada com fundos levantados a um prazo de recuperação proporcional à aplicação efetuada. Claro está que esta situação nem sempre é possível ou mesmo desejada.

De uma forma geral, a empresa busca recursos vencíveis no curto prazo para financiar suas necessidades de caixa de curto prazo e, paralelamente, busca recursos que vençam no longo prazo para financiar seus projetos de longo prazo, especialmente aqueles que envolvem investimento de capital.

Desta feita, a empresa está sujeita a compromissos de curto prazo decorrentes tanto dos pagamentos de empréstimos de capital de giro como também das parcelas de curto prazo, de juros ou amortização, de dívidas de longo prazo.

Paradoxalmente, é possível enxergar que alguns compromissos de curto prazo da empresa assumem características de longo prazo. Isto ocorre sempre que esses compromissos são periodicamente renovados para que a companhia continue funcionando. Isto se verifica com o pagamento de fornecedores, salários e outros passivos de funcionamento, também denominados de passivos cíclicos.

Ao se contemplar uma empresa que tenha prazo médio de pagamento de compras de 30 dias, passivo notadamente de curto prazo, verifica-se que a dívida desta empresa é cíclica e, portanto, assume caráter de longo prazo, pois sabe-se que para a empresa funcionar ela

Assaf (2002, p.167) aduz que um aprofundamento no conceito de equilíbrio financeiro de uma empresa revela que uma parcela considerável do ativo circulante é melhor localizada, para efeitos de análise, no grupo permanente, indicando um potencial de realização a longo prazo por representarem valores cíclicos, tornando-se, por conseguinte, de natureza permanente.

Logo, no lugar de se encarar um passivo com o fornecedor como um título zero cupom é mais razoável encará-lo como uma série de pagamentos. Assumindo o princípio contábil da continuidade, esta série de pagamentos ao fornecedor se transforma numa perpetuidade.

Feitos estes comentários, pode-se dizer que, no caso geral, o fluxo de pagamentos de uma empresa é uma série irregular.

Com o objetivo de calcular a probabilidade de *default,* uma questão que se coloca é: deve-se ou não simplificar a realidade e considerar todo o fluxo da dívida numa data única?

Naturalmente, a melhor hipótese é aquela em que se encontra um modelo robusto o suficiente de modo que não seja necessária a concentração dos fluxos de pagamentos em data única.

Caso seja decidido concentrar todos os pagamentos em uma só data, dois aspectos devem ser pesquisados:

- quais são as conseqüências de se concentrar um fluxo irregular em uma só data;
- qual critério deve ser adotado para concentrar um fluxo irregular em uma só data.

Merton (1974) e KMV necessitam que os fluxos sejam concentrados. O modelo proposto no capitulo 6 é robusto o suficiente de modo a calcular a probabilidade de *default* de uma empresa assumindo ou não a concentração dos fluxos em data única.

5.2. Observações Metodológicas para o Estudo de Caso

Com o objetivo de diminuir a complexidade da realidade encontrada nas empresas, num

a) O presente estudo propõe que cada componente da dívida, sendo de curto ou longo prazo, seja levada até a data *duration* da dívida. Este é basicamente o procedimento empregado por Delianedis e Geske (1999). Merton (1974) assume que a dívida da empresa seja na forma de título zero cupom. KMV adota a metodologia de somar toda a dívida de curto prazo com 50% da de longo prazo, algo que, segundo Cooper e Davydenko (2002, p. 4), compreende os valores devidos em até um ano.

b) Com o objetivo de se trabalhar com informações obtidas diretamente das notas explicativas das empresas selecionadas, será computada apenas a dívida oriunda de empréstimos e financiamentos, desprezando passivos com fornecedores, salários a pagar, impostos a pagar. As notas explicativas costumam especificar o valor e os anos em que amortizações devem ser realizadas. Com tais informações, o cálculo da *duration* se tornará possível.

c) Considerar-se-á que os juros serão pagos junto com o principal nas datas especificadas para as amortizações. Isto significa que estão sendo desprezados os pagamentos periódicos de juros.

d) O passivo cíclico não é levado em consideração nos cálculos. Isto é, dívidas com fornecedores, salários a pagar e outros passivos operacionais não serão computados.

e) O valor a mercado do patrimônio líquido será obtido somando o valor das ações preferenciais e ordinárias na referida data, deduzindo do valor encontrado as ações em tesouraria. Segundo Levy e Sarnat (1984, p. 665), o conceito de eficiência num mercado de ações implica que toda a informação relevante pertinente a um determinado ativo está refletida no seu preço. Adicionalmente, a melhor estimativa do valor verdadeiro de uma ação é o preço atual pelo qual este ativo é transacionado no mercado. Uma dificuldade encontrada é que, para algumas empresas, não há liquidez para ações ordinárias. Esta dificuldade é contornada assumindo que o preço das ações ordinárias é o mesmo das ações preferenciais.

f) A volatilidade ao dia do patrimônio líquido foi obtida calculando-se a volatilidade dos retornos das ações das referidas empresas considerando dados diários de 01/03/2005 até 30/09/2005. A volatilidade sempre foi calculada empregando o tipo de ação com maior

g) O valor presente da dívida foi obtido a partir do relatório trimestral que as empresas de capital aberto divulgam. A título de ilustração, será evidenciado como o valor presente da dívida da Ripasa foi obtido. O relatório divulgado pela aludida empresa em 30/09/2005 evidencia as seguintes informações:

Tabela 22 Cronograma de Amortização da Ripasa

30/09/2005

Amortização Estimada R$ milhões	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	Total
Nacional	14,2	52,9	52,6	52,6	40,8	0,1	0,0	0,0	213,2
Estrangeira	34,9	118,1	55,9	99,7	63,4	54,5	24,8	16,7	468,0
Total	**49,1**	**171,0**	**108,5**	**152,3**	**104,2**	**54,6**	**24,8**	**16,7**	**681,2**

Fonte : Relatório Trimestral da Ripasa

h) Tabulando as informações anteriores, obtém-se que o valor atual da dívida é de R$ 681.200.000 com uma *duration* de 666 dias úteis.

i) Adotou-se como taxa de juros livre de risco a Taxa de Juros de Longo Prazo - TJLP que, à época do estudo, era de 9,75 % ao ano.

j) Com relação ao custo da dívida, tomou-se como base para todas as empresas o valor correspondente da TJLP acrescido do *del credere* de 4% ao ano, o que fornece custo anualizado de 13,75%. Será importante fazer estudo de análise de sensibilidade para diferentes taxas devido à diferença existente entre as empresas analisadas.

k) A metodologia empregada não considera os custos envolvidos na bancarrota.

l) A metodologia empregada não considera aspectos relacionados à liquidez. Supõe-se apenas que caso o valor dos ativos seja maior que o valor da dívida, a dívida vai ser paga.

m) A metodologia empregada não faz distinção entre as classes da dívida segundo as garantias ofertadas aos credores.

n) Será assumido que a empresa não contrairá novas dívidas ao longo da vida da opção.

o) Será assumido que a volatilidade é constante ao longo da vida da opção.

De maneira a exemplificar este procedimento, será feito um estudo de caso considerando empresas do setor de celulose e papel.

5.3. Estudo de caso no setor de celulose e papel

Conforme será discutido, o setor de celulose e papel requer vultoso investimento de capital. Além de serem vultosos, os investimentos são de longa maturação.

Uma solução adotada pelas empresas deste setor para financiar os grandes investimentos é o emprego intensivo de capital de terceiros. Esta constatação torna as empresas deste setor candidatas adequadas para que sejam aplicados os modelos de análise de risco de crédito propostos nesta tese.

Ademais, é importante salientar que o consumo de papéis de embalagem costuma ser um indicativo do grau de atividade econômica de um país, uma vez que está diretamente atrelado ao consumo de bens em geral, pois as mercadorias são embaladas ao serem comercializadas. Esta é mais uma evidencia da relevância do setor de papel e celulose.

5.3.1. O setor de celulose e papel

A cadeia produtiva do setor de celulose e papel engloba as etapas de produção de madeira, energia, celulose e papel, conversão em artefatos de papel e papelão, reciclagem de papel, produção gráfica e editorial, além de atividades de comércio, distribuição e transporte.

A cadeia de produção de celulose e papel é verticalizada e os investimentos nesse setor se direcionam para a integração da cadeia produtiva de maneira a tornar as empresas auto-suficientes em matérias primas. Isto significa que o setor é intensivo em capital com longo prazo para a maturação dos investimentos.

Segundo a revista FAE Business (2001), os investimentos são da ordem de US$ 1.400 por tonelada. As escalas mínimas de investimentos atualmente estão acima de 100 mil toneladas. Além disso, há necessidade de investimentos contínuos em torno de US$ 100 milhões por parte dos grandes produtores para a manutenção da capacidade produtiva e reposição da

depreciação do ativo. Parte do investimento é canalizada para o reflorestamento, fator fundamental para a perpetuação da fonte de matéria-prima, e para o desenvolvimento tecnológico.

Segundo os dados da Bracelpa, a produção estimada de celulose em 2004 foi de 9,5 milhões toneladas e a produção brasileira de papel para os mais diversos fins atingiu mais de 8,45 milhões de toneladas em 2004, conforme evidencia a tabela a seguir:

Tabela 23 Evolução da Produção de Papel no Brasil em Toneladas

Ano	Imprensa	Imprimir	Escrever	Embalagem	Fins Sanitários	Papelcartão	Cartolina, Pap. Paraná / Cinza e Polpa Moldada	Especiais	Total	Variação Média Anual %
1989	230.239	1.003.465	300.355	2.329.247	375.870	352.511	141.564	138.085	4.871.336	-
1990	246.400	931.531	357.732	2.184.300	403.712	330.760	139.278	122.078	4.715.791	-3,19
1991	253.097	995.701	378.841	2.229.720	419.257	371.950	137.888	127.659	4.914.113	4,21
1992	237.453	1.110.307	286.650	2.204.420	442.382	364.054	138.161	117.411	4.900.838	-0,27
1993	275.823	1.398.947	239.943	2.283.918	444.694	410.321	128.121	119.273	5.301.040	8,17
1994	263.890	1.653.647	171.003	2.441.469	428.844	405.657	156.048	133.039	5.653.597	6,65
1995	294.893	1.643.097	158.736	2.509.918	466.177	429.820	158.637	136.948	5.798.226	2,56
1996	277.293	1.669.434	143.361	2.799.751	549.696	426.313	170.389	139.756	6.175.993	6,52
1997	264.970	1.847.855	134.967	2.910.614	564.713	480.099	167.937	146.446	6.517.601	5,53
1998	273.517	1.848.376	109.732	2.977.581	573.599	463.059	191.280	152.157	6.589.301	1,10
1999	243.330	1.959.447	108.168	3.208.581	571.331	501.952	197.251	163.186	6.953.246	5,52
2000	266.179	1.992.229	100.403	3.347.384	596.732	519.589	204.064	173.552	7.200.132	3,55
2001	232.800	2.052.048	99.609	3.526.277	619.012	525.963	208.448	173.610	7.437.767	3,30
2002	247.708	2.091.618	93.905	3.715.634	673.117	558.839	211.762	181.330	7.773.913	4,52
2003	163.390	2.213.034	105.595	3.771.844	684.160	567.674	231.168	178.639	7.915.504	1,82
2004	133.120	2.325.555	101.214	4.140.713	735.049	583.430	232.760	200.570	8.452.411	6,78

Fonte : Bracelpa

O setor de papel e celulose está presente em 450 municípios de 16 estados brasileiros, nas cinco regiões do país. Ainda segundo a Bracelpa, são 220 empresas responsáveis por 100 mil empregos diretos nas indústrias e florestas, com faturamento total de R$ 23,1 bilhões. O Brasil ocupa o sétimo lugar no ranking mundial de produtores de celulose e o 11° entre os fabricantes de papel.

O país vem conseguindo maior espaço no mercado externo. Em 2004, o setor exportou o equivalente a US$ 3,1 bilhões. Mais da metade da produção de celulose é embarcada para outros países. Em 2004, as exportações do produto cresceram 7,2%, alcançando 4,9 milhões de toneladas. Já as exportações de papel aumentaram 4%, totalizando 1,8 milhão de toneladas,

de acordo com a Bracelpa. Os principais destinos das exportações brasileiras de papel e celulose são Europa (45%), Ásia (32%) e América do Norte (19%)

Considerando o Brasil, São Paulo é o principal Estado brasileiro fabricante de papel e celulose, sendo sua participação na produção nacional de papel de mais de 45% e de mais de 30% na produção de celulose. A produção de celulose paulista equivale praticamente à do Chile. O Estado é o 12º fabricante mundial desse produto.

É importante notar que o Brasil possui uma vantagem competitiva no setor de celulose e papel pelo clima. Este permite que o tempo médio entre o crescimento e o corte das florestas de eucaliptos seja 6 anos em média, ao passo que no hemisfério norte o ciclo para os pinheiros é de até 35 anos e, em alguns casos, até mais.

A indústria brasileira de celulose e papel não usa madeira de floresta nativa, mas exclusivamente árvores de florestas plantadas. Segundo informações institucionais da Aracruz, uma das empresas a serem analisadas, em 2004, a área total de florestas plantadas[1] no Brasil era de 5,5 milhões de hectares, gerando 2,5 milhões de empregos diretos e indiretos. O setor contribuiu com U$ 3,8 bilhões de impostos, exportando o equivalente a U$ 5,8 bilhões. Em todo o país, mantém 100 mil quilômetros de estradas vicinais e 1,6 milhão de hectares em áreas de preservação.

5.3.2. Aplicação do Modelo para a Aracruz

Os dados para o cálculo da volatilidade diária do patrimônio líquido da Aracruz foram obtidos a partir da volatilidade das ações negociadas em bolsa. Considerando o período de 01/03/2005 até 30/09/2005, foi obtida volatilidade das taxas de retorno do patrimônio líquido de 1,688% ao dia útil.

O valor de mercado do patrimônio liquido da Aracruz foi obtido ao se somar o valor de todas as ações da empresa, exceto aquelas em tesouraria, considerando a data de 30/09/2005. O valor obtido foi de R$ 8,655 bi.

Outra informação necessária é a respeito do fluxo de pagamentos agendados relativos a empréstimos e financiamentos. Observando o relatório trimestral da empresa, descobriu-se que:

Tabela 24 Cronograma de Amortizações da Aracruz

Ano		Principal a ser pago	
0	2005	R$	360.100.000
1	2006	R$	608.100.000
2	2007	R$	868.600.000
3	2008	R$	701.400.000
4	2009	R$	444.100.000
5	2010	R$	1.007.600.000

Fonte : Dados oriundos do relatório trimestra da Aracruz

Com os dados da tabela acima, calculou-se a *duration* de 711 dias úteis.

De maneira a se fazer uma analise mais conservadora, admitiu-se que a dívida que deveria ser paga em 2005 tivesse que ser quitada no instante zero. Admitindo a *duration* de 711 dias úteis e assumindo taxa de juros que remunera a dívida de 13,75% ao ano, pode-se calcular o preço de exercício da opção no valor de R$ 5,740 bi.

Conforme mencionado anteriormente, assume-se que a taxa de juros livre de risco seja dada pela TJLP que, à época, era de 9,75% ao ano.

De posse das informações acima e sabendo que árvore a ser construída terá 47 passos (outras árvores com um maior número de passos serão construídas em tópicos posteriores), tem-se a seguinte tabela resumida:

Tabela 25 Resumo das informações

σ_E ao dia útil	1,68863%
C_0	R$ 8.655.488.620,04
VP da Dívida	R$ 3.989.900.000,00
VF da Dívida	5.740.088.786
r: Taxa livre de risco aa	9,750%
r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%
Vencimento em du	711,4220407
1+r: Fator da Taxa livre de risco por nó	1,00560388
Número de Passos da Árvore	47
Custo Dívida ao ano	13,75%

Fonte : Autor

É interessante notar que o vencimento da opção européia empregada é de 711 dias úteis com 47 passos, o que significa que cada nó da árvore corresponde a 15 dias úteis.

A partir dos dados anteriores, as seguintes equações foram montadas:

$$8{,}655 = \frac{1}{r^n} \cdot \sum_{j=0}^{47} \binom{47}{j} \times q^{47-j} \times (1-q)^j \times C_{(47-j)u,jd}\,; \qquad (1)$$

$$q = \frac{1{,}00560 - d}{u - d} \qquad (2)$$

$$u = e^{\sigma.\sqrt{\delta t}} \qquad (3)$$

$$d = e^{-\sigma.\sqrt{\delta t}} \qquad (4)$$

$$\sigma = \frac{1{,}68\% \times 8{,}655bi}{V_0 \times N(d)}$$, sendo σ_E a volatilidade do patrimônio líquido. (5)

$$d = \frac{1}{\sigma.\sqrt{711}} \cdot \left[\ln\left(\frac{V_t}{5{,}740bi}\right) + \left(0{,}0369\% + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(711) \right]$$

sabido, assim como o preço de exercício. A questão é encontrar os demais parâmetros que definem a árvore binomial

Dispondo de cinco equações e cinco incógnitas pode-se descobrir numericamente os valores de: V_0, u, d, q e σ.

Tendo descoberto os valores acima, o próximo passo será encontrar a probabilidade mundo real p empregando a seguinte relação:

$\sigma = \sqrt{V_0^2 \times \left[d^2.(1-p)+u^2.p\right]^n - V_0^2 \times \left[d.(1-p)+u.p\right]^{2n}}$, sendo n o número de passos empregados na árvore binomial.

Ao se empregar o procedimento descrito, obtém-se:

Tabela 26 Resumo das informações obtidas numericamente

σ ao dia	**1,11840%**
V_0	13.069.631.781
p	0,48370309
u	1,044472647
d	0,957420956
q	0,553497832
d1	3,788098
N(d1)	0,9999

Fonte : Autor

Dispondo da probabilidade mundo real *p*, basta somar as probabilidades associadas aos valores da empresa que conduzem ao *default*, conforme ilustra o tópico seguinte.

5.3.2.1. Detalhe do Cálculo da Probabilidade de *Default*

A figura seguinte ilustra alguns dos possíveis valores do ativo da Aracruz, bem como sua respectiva probabilidade mundo real *p*, considerando uma árvore com 47 passos.

Figura 28 Detalhe do último passo da Árvore com 47 passos e 48 possíveis valores da Empresa

Valor da Empresa no último passo da árvore	Nó do último passo da árvore	Probabilidade Mundo Real
7.423.375.472,81	31	
6.804.673.399,27	32	
6.237.537.120,45	33	
5.717.668.879,33	34	0,00440042
5.241.129.115,92	35	0,00193410
4.804.306.613,32	36	0,00076681
4.403.891.131,92	37	0,00027284
4.036.848.324,37	38	0,00008658
3.700.396.741,39	39	0,00002432
3.391.986.753,89	40	0,00000599
3.109.281.231,88	41	0,00000128
2.850.137.833,78	42	0,00000023
2.612.592.771,69	43	0,00000004
2.394.845.929,82	44	0,00000000
2.195.247.223,27	45	0,00000000
2.012.284.093,63	46	0,00000000
1.844.570.046,86	47	0,00000000
1.690.834.146,39	48	0,00000000

Fonte : Autor

Tendo em mente que na data *duration* o valor projetado da dívida da Aracruz é de R$ 5,740 bi, a probabilidade de *default* será computada sempre que o último nó da árvore sugerir valor da empresa menor que R$ 5,740 bi.

Pela figura anterior, nota-se que o valor da empresa na terceira linha de cima para baixo é de R$ 6,237 bi, situação em que a empresa honra integralmente seus compromissos.

Contudo, na linha imediatamente abaixo, verifica-se o valor da empresa de R$ 5,717 bi, hipótese em que a empresa não honrará integralmente seus compromissos, configurando o *default*. Deste valor para baixo, sempre haverá inadimplência.

Logo, para se saber a probabilidade de *default,* deve-se somar todas as probabilidades associadas a valores da empresa inferiores a R$ 5,740 bi. Para tanto, somaram-se todas as probabilidades dentro do retângulo tracejado, resultando em 0,749%.

Naturalmente, este raciocínio deverá ser estendido para as demais empresas estudadas. Outro ponto a ser salientado é que a probabilidade empregada neste caso dever ser a mundo real p.

A probabilidade mundo real p foi obtida numericamente a partir da seguinte relação: $\sigma = \sqrt{V_0^2 \times [d^2.(1-p)+u^2.p]^n - V_0^2 \times [d.(1-p)+u.p]^{2n}}$.

A formula acima é oriunda do modelo binomial. Ocorre que a volatilidade dos ativos da empresa foi conseguida numericamente a partir da volatilidade do patrimônio líquido empregando a fórmula $\sigma = \frac{\sigma_E \times C_0}{V_0 \times N(d)}$, conforme discutido no capítulo anterior.

Ora, ao se conseguir a probabilidade mundo real p tornou-se possível associar as probabilidades mundo real evidenciadas na figura anterior.

5.3.3. Análise Comparativa das Empresas do Setor de Celulose e Papel

O quadro a seguir é um resumo dos resultados obtidos com todas as empresas estudadas do setor de celulose e papel seguindo o procedimento detalhado para a Aracruz.

Mais uma vez, o estudo foi feito considerando a data de 30/09/2005. O resultado do estudo está sumarizado na tabela a seguir:

Tabela 27 Resultado considerando Árvore com 47 Passos e Custo médio da Dívida de 13,75% ao ano

	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin	Observação
σ_E ao dia	1,689%	2,000%	1,947%	2,345%	2,847%	Vol ao dia do PL
C_0	R$ 8 655 488 620,04	R$ 5 275 998 250,00	R$ 1 315 788 720,50	R$ 3 582 353 738,15	R$ 4 221 341 800,00	PL a Mercado
VP da Dívida	R$ 3 989 900 000,00	R$ 3 116 000 000,00	R$ 681 200 000,00	R$ 2 707 415 000,00	R$ 1 835 400 000,00	Empréstimos e Financ. de CP e LP
VF da Dívida	R$ 5 740 088 786,30	R$ 5 408 077 276,96	R$ 957 531 898,83	R$ 3 613 728 559,40	R$ 2 419 508 738,92	Valor futuro da dívida usando TJLP
Taxa aa	9,750%	9,750%	9,750%	9,750%	9,750%	Taxa de juros livre de risco base 252
Taxa dia	0,03692541%	0,03692541%	0,03692541%	0,03692541%	0,03692541%	Taxa de juros livre de risco ao dia útil
Duration em du	711,42	1 078,44	666,03	564,79	540,45	Duration em dias úteis
r por nó	1,00560	1,00851	1,00525	1,00446	1,00425	Taxa de juros livre de risco para 1 nó
Nós	47	47	47	47	47	Número de Nós
Número de du de cada nó	15,137	22,946	14,171	12,017	11,499	Cada nó equivale a essa quant. de du.
σ_A ao dia	1,118396%	1,193349%	1,241663%	1,293718%	1,944384%	Vol ao dia do Ativo
V_0	R$ 13 069 631 780,72	R$ 8 899 724 866,45	R$ 2 064 506 471,04	R$ 6 514 096 708,91	R$ 6 200 324 583,85	Valor a Mercado dos Ativos
p	48,37%	47,86%	48,25%	48,32%	47,52%	Probabilidade mundo real
u	1,0444726	1,0588286	1,0478510	1,0458681	1,0681567	Fator de subida da árvore binomial
d	0,9574210	0,9444399	0,9543341	0,9561435	0,9361923	Fator de descida da árvore binomial
q	55,35%	56,01%	54,44%	53,83%	51,58%	Probabilidade risco neutra
d1	3,7681	2,4832	3,3253	2,7485	2,7493	
N(d1)	99,99%	99,35%	99,96%	99,70%	99,70%	
Prob. Default	0,749%	19,138%	1,725%	3,406%	4,314%	

Fonte : Autor

Ao analisar as probabilidades de *default* evidenciadas na tabela anterior, há de se ter em mente que as *durations* das dívidas das empresas são diferentes, dificultando a comparabilidade das probabilidades de *default.*

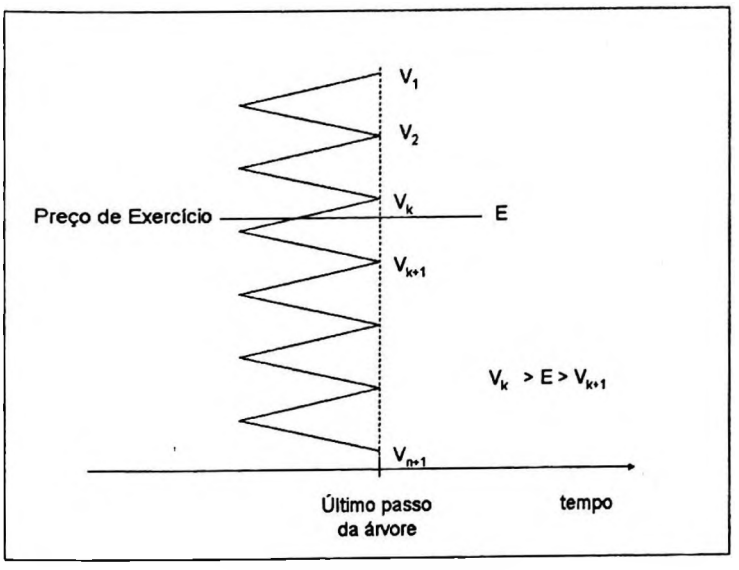
Quando se estuda probabilidades de *default* é comum ter um número que reflita a probabilidade da empresa tornar-se inadimplente em 1, 2, 3 anos, e assim por diante. O resultado evidenciado na tabela anterior não fornece este tipo de informação.

A maneira de se contornar o problema descrito no parágrafo precedente e fornecer comparabilidade para as probabilidades de *default* entre empresas diferentes para horizontes de tempo distintos é montar uma árvore binomial com diferentes datas de vencimento da opção, algo que será discutido com maior detalhe no capítulo 6.

5.3.4. Impacto ao se Alterar o Número de Nós da Árvore

Pelo fato do valor da empresa evoluir de acordo com a progressão da árvore binomial, uma questão que se coloca é a perda de parte da probabilidade de *default* pelo fato do montante da dívida não coincidir com um dos possíveis patamares atingidos pelo valor da empresa.

Figura 29 Detalhe do último passo da Árvore



Fonte : Autor

Observando a figura anterior, nota-se que a partir do nó correspondente ao valor da empresa V_{k+1} até o nó com valor V_{n+1}, deve-se somar suas respectivas probabilidades de ocorrência para obter a probabilidade da empresa se tornar inadimplente. Contudo, esta forma de calcular a probabilidade de *default* releva a probabilidade de ocorrência de valores da empresa de V_{k+1} até E, situações em também ocorreria *default*.

No caso específico da Aracruz, o valor da dívida na data *duration* é de R$ 5,740 bi. A figura da página seguinte mostra os 48 possíveis valores da Aracruz considerando árvore com 47 passos.

O primeiro nó de interesse para o calculo da probabilidade de *default* é o nó 34, o qual corresponde a um valor da empresa de R$ 5,717 bi, caso que já implicaria inadimplência, uma vez que a opção de compra não seria exercida.

Isto significa que valores entre R$ 5,717 bi e R$ 5,740 bi, calculandos entre os possíveis valores da empresa que também correspondem a default, foram computados como probabilidade zero.

Tabela 28 Detalhe do último passo da Árvore com 47 Passos e 48 possíveis valores da Aracruz

Valor da Empresa no último passo da árvore	Nó do último passo da árvore	Probabilidade Mundo Real
101.024.263.822,00	1	
92.604.385.057,41	2	
84.886.262.046,63	3	
77.811.406.876,48	4	
71.326.206.315,59	5	
65.381.515.533,45	6	
59.932.285.681,04	7	
54.937.222.510,79	8	
50.358.473.448,89	9	
46.161.340.748,61	10	
42.314.018.550,85	11	
38.787.351.859,49	12	
35.554.615.604,84	13	
32.591.312.121,22	14	
29.874.985.503,66	15	
27.385.051.437,15	16	
25.102.641.208,76	17	
23.010.458.720,59	18	
21.092.649.419,98	19	
19.334.680.153,77	20	
17.723.229.036,11	21	
16.246.084.495,23	22	
14.892.052.734,21	23	
13.650.872.904,39	24	
12.513.139.348,74	25	
11.470.230.325,75	26	
10.514.242.673,96	27	
9.637.931.921,80	28	
8.834.657.389,00	29	
8.098.331.863,55	30	
7.423.375.472,81	31	
6.804.673.399,27	32	
6.237.537.120,45	33	
5.717.668.879,33	34	0,00440042
5.241.129.115,92	35	0,00193410
4.804.306.613,32	36	0,00076681
4.403.891.131,92	37	0,00027284
4.036.848.324,37	38	0,00008658
3.700.396.741,39	39	0,00002432
3.391.986.753,89	40	0,00000599
3.109.281.231,88	41	0,00000128
2.850.137.833,78	42	0,00000023
2.612.592.771,69	43	0,00000004
2.394.845.929,82	44	0,00000000
2.195.247.223,27	45	0,00000000
2.012.284.093,63	46	0,00000000
1.844.570.046,86	47	0,00000000
1.690.834.146,39	48	0,00000000

Fonte: Autor

Uma maneira de minimizar este problema é fazer com que os possíveis valores da empresa no último nó da árvore sejam mais próximos uns dos outros, algo que pode ser conseguido ao se aumentar o número de nós da árvore binomial.

A figura seguinte ilustra os possíveis valores do ativo da Aracruz bem como sua respectiva probabilidade mundo real, considerando uma árvore com 100 passos. Mais uma vez, para se obter a probabilidade de *default* basta somar as probabilidades dos valores da empresa inferiores a R$ 5,740 bi.

De maneira similar, o resultado encontrado não terá considerado a probabilidade do valor da empresa assumir R$ 5,669 bi até R$ 5,740 bi, situação em que haveria *default*.

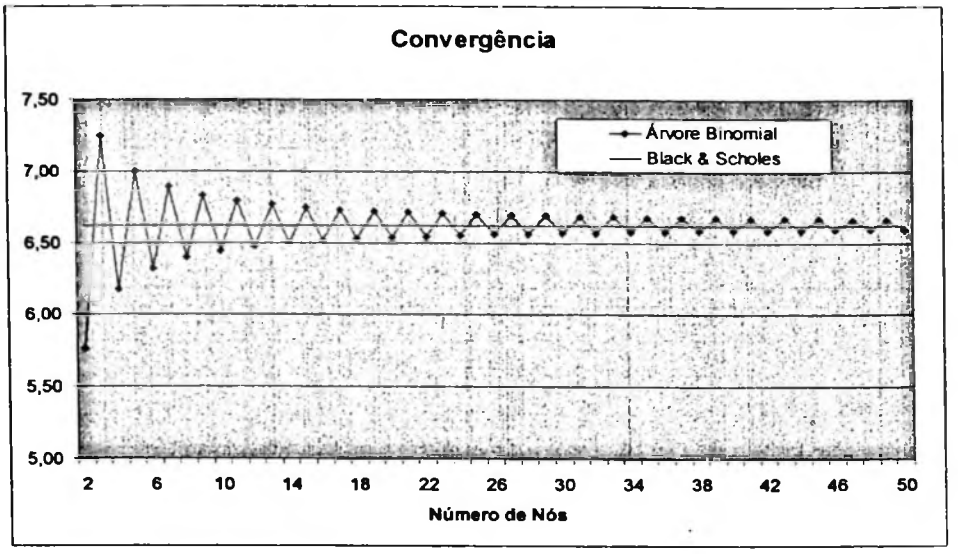
Tabela 29 Detalhe de alguns nós do último passo de Árvore com 100 Passos

Valor da Empresa no último passo da árvore	Nó do último passo da árvore	Probabilidade Mundo Real
6.017.666.303,16	64	
5.669.147.059,00	65	0,28455%
5.340.812.660,16	66	0,16480%
5.031.494.080,86	67	0,09139%
4.740.090.000,65	68	0,04850%
4.465.562.883,15	69	0,02461%
4.206.935.281,95	70	0,01194%
3.963.286.360,44	71	0,00553%
3.733.748.613,22	72	0,00244%
3.517.504.777,32	73	0,00103%
3.313.784.922,38	74	0,00041%
3.121.863.709,36	75	0,00016%
2.941.057.807,94	76	0,00006%

Fonte : Autor

Ora, já se esperava uma distância menor entre nós adjacentes considerando aumento do número de nós da árvore. Isto significa que quanto maior o número de nós na árvore, maior será a aproximação em relação ao valor teórico. Ocorre que este aumento de precisão tem um comportamento conforme ilustra o quadro a seguir:

Figura 30 Evolução do Preço da Opção ao se aumentar o número de nós



Fonte : Software que acompanha livro do Hull (2002)

Pela figura anterior, o preço da opção vai oscilando até convergir para o seu valor teórico, significando que, para o problema que se tenta resolver, ao aumentar o número de nós de uma árvore binomial, a probabilidade de *default* poderá aumentar ou diminuir até haver convergência. Ao se adicionar novos nós a árvore binomial, o valor da probabilidade de *default* oscilará, tendendo ao seu valor teórico. Baydia e Castro (2001, p. 25) chamam este processo de convergência oscilatória.

Segundo Levy e Sarnat (1984, p. 610), quando o número de nós de uma árvore binomial tende a infinito, o valor da opção tende ao valor teórico dado pela fórmula de Black e Scholes[2].

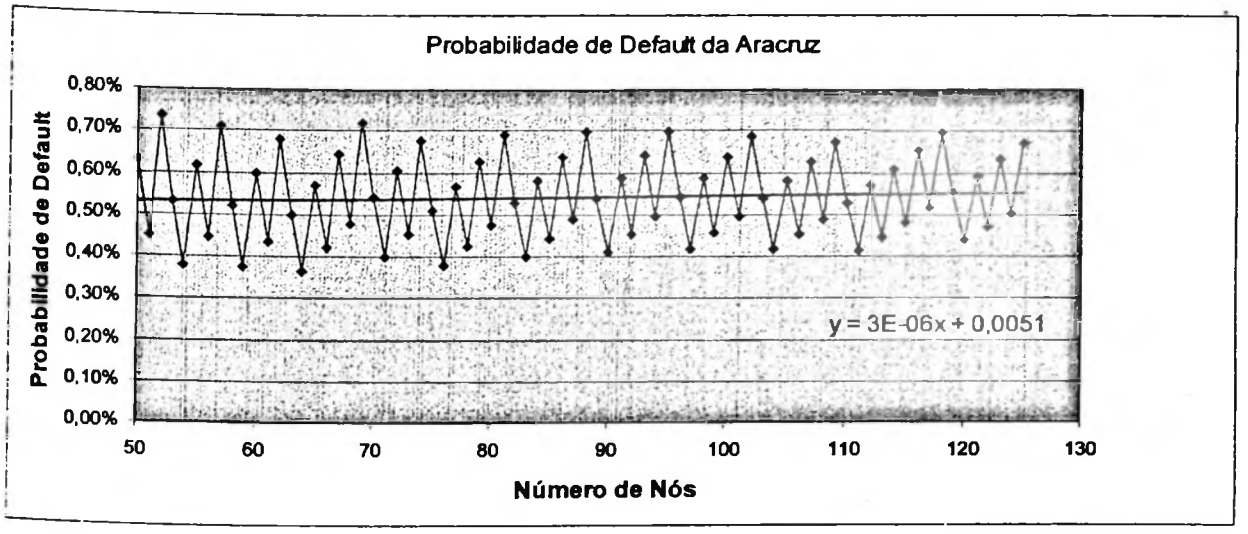
Adicionalmente, quando o número de períodos aumenta, a distribuição binomial se aproxima de uma distribuição normal. No estudo de risco de crédito, não é necessário esperar que o valor esperado do ativo em estudo apresente distribuição normal.

Baydia e Castro (2001, p. 24) afirmam que no cálculo do preço de uma opção baseado em métodos de árvores binomiais, a definição do número de intervalos de tempo, entre o lançamento e a maturidade da opção, é fundamental para a que o modelo consiga convergir para o valor verdadeiro, mas a convergência é lenta e oscilatória.

De maneira a se aquilatar o efeito na probabilidade de *default* ao se aumentar o número de nós, para o caso particular da Aracruz, foi realizada análise de sensibilidade alterando o número de nós de 50 até 125.

Eis o resultado obtido:

Figura 31 Evolução da Probabilidade de Default da Aracruz ao se aumentar o número de passos



Fonte : Autor

[2] Naturalmente, para o caso de opções européias.

Tabela 30 Evolução da Probabilidade de Default da Aracruz ao se aumentar o número de passos de 50 até 125

Passos	Prob. Default	Passos	Prob. Default
50	0,63%	88	0,70%
51	0,45%	89	0,54%
52	0,74%	90	0,41%
53	0,53%	91	0,59%
54	0,38%	92	0,45%
55	0,62%	93	0,64%
56	0,45%	94	0,49%
57	0,71%	95	0,70%
58	0,52%	96	0,54%
59	0,38%	97	0,42%
60	0,60%	98	0,59%
61	0,44%	99	0,46%
62	0,68%	100	0,64%
63	0,50%	101	0,49%
64	0,37%	102	0,69%
65	0,57%	103	0,54%
66	0,42%	104	0,42%
67	0,64%	105	0,58%
68	0,48%	106	0,45%
69	0,72%	107	0,63%
70	0,54%	108	0,49%
71	0,40%	109	0,67%
72	0,61%	110	0,53%
73	0,45%	111	0,41%
74	0,67%	112	0,57%
75	0,51%	113	0,45%
76	0,38%	114	0,61%
77	0,57%	115	0,48%
78	0,43%	116	0,65%
79	0,63%	117	0,52%
80	0,48%	118	0,70%
81	0,69%	119	0,55%
82	0,53%	120	0,44%
83	0,40%	121	0,59%
84	0,58%	122	0,47%
85	0,44%	123	0,63%
86	0,64%	124	0,50%
87	0,49%	125	0,67%

Fonte : Autor

Com os dados acima, foi realizada regressão linear simples cuja equação está descrita no próprio gráfico. Ainda aproveitando os dados acima, realizou-se os testes de hipóteses que verificavam a hipótese nula do coeficiente linear e angular serem zero.

Eis os resultados:

Tabela 31 Teste de Hipótese

	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interseção	0,005141	0,00047774	10,760451	8,62E-17	0,004188801	0,006092646	0,004188801	0,0060926-46
Nós	3,09E-06	5,296E-06	0,5843506	0,560762	-7,4578E-06	1,36472E-05	-7,4578E-06	1,36472E-05

Fonte : Autor

Em relação à hipótese do coeficiente linear ser zero, o p-valor de 8,26E-17 mostra que esta hipótese é fortemente rejeitada.

Em relação à hipótese do coeficiente angular ser zero, o p-valor de 0,58 mostra que não se pode rejeitar a hipótese nula de que tal parâmetro populacional seja zero. Isto é um indicativo que as oscilações verificadas no gráfico anterior não possuem tendência de alta ou baixa.

Como conclusão, pode-se dizer que a tabela acima evidencia que a probabilidade de *default* da Aracruz jaz no intervalo de 0,4188% até 0,6093% com um nível de confiança de 95%.

5.3.5. Impacto ao se Alterar a Premissa da Taxa que corrige a Dívida

A taxa de juros adotada e que corrige a dívida das empresas foi a Taxa de Juros de Longo Prazo TJLP mais um *delcredere* de 4% que, à época do estudo, resultava em 13,75% ao ano.

Ciente que esta taxa pode distorcer os resultados encontrados, realizou-se análise de sensibilidade dos resultados de acordo com diferentes taxas de juros representando o custo anual da dívida:

Tabela 32 Análise de Sensibilidade da Probabilidade de Default alterando Custo Médio da Dívida. Árvore com 47 Passos

	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin
7,00%	0,32%	0,04%	0,81%	3,51%	2,27%
7,50%	0,32%	0,12%	0,81%	3,50%	4,43%
8,00%	0,32%	0,12%	0,81%	3,50%	4,42%
8,50%	0,32%	12,63%	0,81%	3,49%	4,41%
9,00%	0,32%	12,59%	0,80%	3,48%	4,40%
9,50%	0,32%	12,54%	0,80%	3,47%	4,39%
10,00%	0,32%	12,50%	0,80%	3,46%	4,38%
10,50%	0,31%	12,45%	0,80%	3,46%	4,37%
11,00%	0,31%	12,40%	1,75%	3,45%	4,37%
11,50%	0,31%	12,36%	1,74%	3,44%	4,36%
12,00%	0,31%	12,31%	1,74%	3,43%	4,35%
12,50%	0,31%	12,27%	1,74%	3,42%	4,34%
13,00%	0,31%	19,23%	1,73%	3,42%	4,33%
13,50%	0,75%	19,17%	1,73%	3,41%	4,32%
14,00%	0,75%	19,11%	1,72%	3,40%	4,31%
14,50%	0,75%	19,05%	1,72%	3,39%	4,30%

	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin
15,00%	0,74%	18,99%	1,71%	6,31%	4,29%
15,50%	0,74%	18,93%	1,71%	6,30%	4,28%
16,00%	0,74%	18,87%	1,71%	6,28%	4,27%
16,50%	0,74%	18,81%	1,70%	6,27%	4,26%
17,00%	0,74%	18,75%	1,70%	6,26%	4,26%
17,50%	0,73%	18,70%	1,69%	6,25%	4,25%
18,00%	0,73%	18,64%	1,69%	6,24%	4,24%
18,50%	0,73%	18,58%	1,68%	6,22%	4,23%
19,00%	0,73%	18,52%	1,68%	6,21%	4,22%
19,50%	0,73%	18,46%	1,68%	6,20%	4,21%
20,00%	0,72%	18,41%	1,67%	6,19%	4,20%
20,50%	0,72%	27,13%	1,67%	6,18%	4,19%
21,00%	0,72%	27,06%	1,66%	6,16%	4,18%
21,50%	0,72%	26,99%	1,66%	6,15%	4,18%
22,00%	0,72%	26,92%	1,66%	6,14%	4,17%

Fonte : Autor

A tabela anterior foi obtida empregando árvores binomiais com 47 passos. Analisando os resultado da sensibilidade da probabilidade de *default* ao se aumentar a taxa de juros que remunera a dívida, chama a atenção a mudança abrupta de probabilidade de *default* da VCP ao se aumentar o custo da divida de 8 para 8,5%..

Uma hipótese para o problema verificado é o número insuficiente de nós na árvore binomial já que a VCP é a empresa com a maior *duration*, significando que o cálculo da probabilidade de *default* desta empresa está mais sujeita a um número de nós insuficiente.

Decidiu-se então rodar novamente o modelo com árvore binomial de 200 passos apenas para a VCP

Tabela 33 Análise de Sensibilidade alterando Custo Médio da Dívida. Árvore com 200 passos

Custo Médio da Dívida	Probabilidade de Default
7,00%	12,28%
7,50%	12,24%
8,00%	12,20%
8,50%	12,15%
9,00%	12,11%
9,50%	12,06%
10,00%	12,02%
10,50%	15,04%
11,00%	14,99%
11,50%	14,94%
12,00%	14,89%
12,50%	14,84%
13,00%	14,79%
13,50%	14,74%
14,00%	18,19%
14,50%	18,13%
15,00%	18,07%
15,50%	18,01%
16,00%	17,95%
16,50%	17,90%
17,00%	17,84%
17,50%	21,71%
18,00%	21,65%
18,50%	21,58%
19,00%	21,52%
19,50%	21,46%
20,00%	21,40%
20,50%	21,34%
21,00%	21,27%
21,50%	25,55%
22,00%	25,47%

Fonte : Autor

Ao se observar os resultados com a árvore binomial com 200 passos fica claro que quanto maior a taxa de juros que remunera a dívida da empresa, maior é a probabilidade de *default,* sem contudo mostrar uma grande subida na probabilidade de *default* ao se aumentar a taxa que remunera a dívida de 8 para 8,5%, tal como ocorreu quando se empregou a árvore com 47 passos.

Esta constatação é importante pois pode-se interpretar erroneamente o resultado obtido com árvores binomiais se estas forem construídas com um número insuficiente de passos.

5.3.6. Impacto ao se Alterar a Premissa da Taxa de Juros Livre de Risco

A taxa de juros livre de risco adotada foi de 9,75% ao ano. Novamente, empregou-se uma estimativa de taxa de juros livre de risco para os próximos anos.

De maneira a evidenciar a sensibilidade dos resultados de acordo com a taxa livre de risco adotada, foi montada a seguinte tabela.

Tabela 34 Análise de Sensibilidade alterando Taxa Livre de Risco. Árvore com 47 nós

Taxa Livre de Risco	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin
8,00%	0,31%	12,00%	0,78%	3,38%	4,28%
8,50%	0,31%	12,04%	1,71%	3,39%	4,29%
9,00%	0,31%	12,09%	1,72%	3,39%	4,30%
9,50%	0,31%	19,11%	1,72%	3,40%	4,31%
10,00%	0,75%	19,17%	1,73%	3,41%	4,32%
10,50%	0,75%	19,23%	1,73%	6,36%	4,33%
11,00%	0,75%	19,29%	1,74%	6,37%	4,34%
11,50%	0,76%	19,35%	1,74%	6,39%	4,35%
12,00%	0,76%	19,41%	1,75%	6,40%	4,36%
12,50%	0,76%	19,47%	1,75%	6,41%	4,37%
13,00%	0,76%	19,53%	1,75%	6,43%	4,37%
13,50%	0,76%	19,59%	1,76%	6,44%	4,38%
14,00%	0,77%	19,65%	1,76%	6,45%	4,39%
14,50%	0,77%	19,71%	1,77%	6,46%	4,40%
15,00%	0,77%	28,89%	3,56%	6,48%	4,41%
15,50%	0,77%	28,96%	3,57%	6,49%	4,42%
16,00%	1,70%	29,03%	3,58%	6,50%	4,43%

Fonte : Autor

Verifica-se pelas tabelas anterior e posterior que a probabilidade de *default* aumenta conforme a taxa de juros livre de risco sobe.

Tabela 35 Análise de Sensibilidade alterando Taxa de Juros Livre de Risco. Árvore com 100 Passos

Taxa Livre de Risco	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin
8,00%	0,35%	15,54%	1,14%	3,01%	3,84%
8,50%	0,35%	15,59%	1,15%	4,69%	3,85%
9,00%	0,63%	15,64%	1,15%	4,70%	3,85%
9,50%	0,64%	15,70%	1,15%	4,71%	3,86%
10,00%	0,64%	15,75%	1,93%	4,72%	3,87%
10,50%	0,64%	15,81%	1,94%	4,73%	3,88%
11,00%	0,64%	21,20%	1,94%	4,74%	3,89%
11,50%	0,64%	21,27%	1,95%	4,75%	3,90%
12,00%	0,64%	21,33%	1,95%	4,76%	3,91%
12,50%	0,65%	21,39%	1,96%	7,13%	3,91%
13,00%	1,12%	21,46%	1,96%	7,14%	3,92%
13,50%	1,13%	21,52%	1,97%	7,16%	5,98%
14,00%	1,13%	21,58%	1,97%	7,17%	5,99%
14,50%	1,13%	21,64%	3,17%	7,18%	6,00%
15,00%	1,14%	28,04%	3,18%	7,20%	6,01%
15,50%	1,14%	28,11%	3,19%	7,21%	6,02%
16,00%	1,14%	28,18%	3,19%	7,22%	6,04%

Fonte : Autor

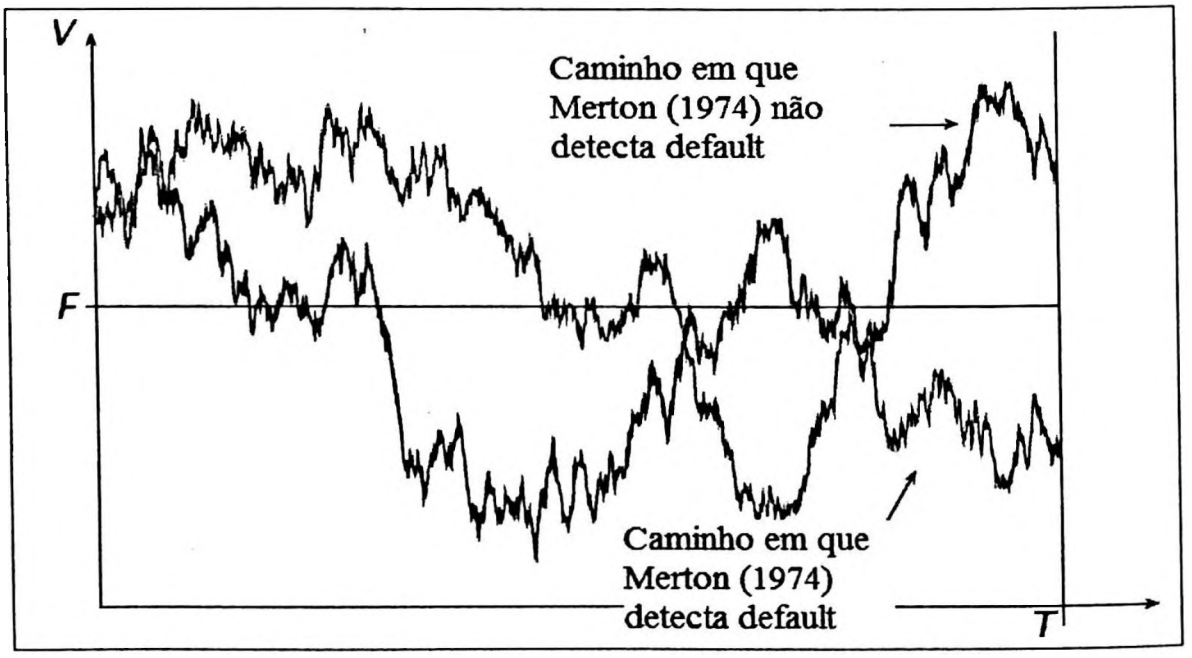
Capítulo 6: Cálculo da Probabilidade de Default para empresa com dívida distribuída ao longo do tempo (precisa colocar caixa alta)

6.1. O Problema de Concentrar a Dívida em Data Única

O modelo de Merton (1974), ao supor que a dívida da empresa está concentrada em data única e empregar modelagem com opções européias, apresenta a deficiência de não ser capaz de captar a probabilidade de inadimplência da empresa para os períodos anteriores à data assumida como vencimento da dívida. O modelo de Merton (1974) fornece como resposta a probabilidade de *default* na data de vencimento, assumindo como zero a probabilidade da empresa inadimplir antes do vencimento da dívida.

Observando a figura a seguir em que F é o valor da dívida a ser paga, fica mais fácil compreender que a modelagem propugnada por Merton (1974) é capaz de detectar probabilidade de *default* nos caminhos que conduzem a valor da empresa, na data de vencimento, abaixo de F.

Figura 32 Dois Possíveis caminhos que o Valor dos Ativos pode tomar



Fonte : Luitgard Veraart. Disponível em www.mathematik.uni-ulm.de/finmath/confpage/papers/veraart.pdf

Se, antes do vencimento T o valor da empresa se tornar abaixo do valor devido, a modelagem de Merton (1974) não será capaz de detectar esta probabilidade.

Black e Cox (1976), a fim de captar a possibilidade de *default* antes do vencimento da dívida, assumiram que o evento de *default* será disparado na primeira vez que o valor de mercado dos ativos se torna menor que um determinado valor limite. Isto significa que, ao considerarmos a figura anterior na ótica de Black e Cox (1976), os dois caminhos contribuiriam para o cálculo da probabilidade de *default* pois estes caminhos, em algum momento, indicam valor da empresa abaixo do valor limite F.

Este valor limite pode também ser originado de um *convenant* contratualmente estabelecido. *Covenants* são restrições estabelecidas às empresas por conta de captações de recursos de terceiros. Por exemplo, um *covenant* pode restringir novos endividamentos pela empresa. Outro exemplo de *covenant* é aquele que exige que o EBITDA da empresa seja sempre superior a determinado patamar. Caso o *covenant* seja desrespeitado, a empresa devedora será sujeita a penalidades. Entre elas, é muito comum a multa. Outra possibilidade de penalidade é o vencimento antecipado da dívida.

Supondo vencimento da dívida concentrado em data única, o raciocínio de disparar o evento de *default* sempre que o valor de mercado dos ativos se tornar menor que determinado limite é similar a substituir o modelo que emprega opções européias por um modelo utilizando opções americanas.

Contudo, assumir dívida concentrada em data única é algo que não se coaduna com a realidade.

O próximo passo é evidenciar um modelo que seja capaz de atribuir probabilidade de *default* contemplando os diferentes horizontes de tempo, horizontes correspondentes às datas de cada pagamento de amortização e/ou juros da empresa.

6.2. Procedimento para o Cálculo da Probabilidade de *Default* para empresa com dívida distribuída ao longo do tempo

O objetivo agora é o de encontrar um procedimento que permita calcular a probabilidade de *default* de uma empresa com passivo na forma de série irregular de pagamentos sem ter que lançar mão da simplificação na qual todo o fluxo é concentrado em única data.

Uma alternativa para resolver este problema é encarar o valor do patrimônio líquido da empresa como o preço de uma opção de compra com barreira do tipo *down and out*, com algumas alterações, as quais serão discutidas a diante.

Uma opção com barreira do tipo *down and out* é um tipo de opção exótica na qual a opção deixa de ter valor assim que o preço do ativo objeto fica abaixo de determinado patamar denominado barreira.

No caso da empresa com dívida na forma de série irregular, a barreira é justamente o valor a ser pago da dívida naquele particular instante. A modelagem deve permitir que sejam adotadas diversas barreiras, em valor ou tempo, representando os diferentes compromissos de pagamento ao longo do tempo.

Se o valor da empresa em determinado nó for abaixo do valor do pagamento, a opção é desativada pois a empresa entrou em *default*. Caso o valor da empresa seja acima do valor da barreira, considera-se que a dívida será paga e, portanto, o valor da empresa cairá até chegar(conferir se o sentido da frase está correto) justamente ao valor da dívida que acaba de ser saldada. Ora, esta redução de valor é absolutamente idêntica à redução do preço da ação quando do pagamento do dividendo.

Outra vantagem de enxergar o valor do patrimônio liquido como o preço de uma opção com múltiplas barreiras é poder incluir no modelo aspectos contratuais como *covenants*.

Um possível *covenant* poderia decretar o vencimento antecipado da dívida caso o valor da empresa, não importa quando, torne-se menor que determinado patamar. Nesta situação, sendo o *covenant* respeitado, nada ocorre na árvore binomial dos valores da empresa. Caso o *covenant* seja desrespeitado, o valor da empresa será o máximo entre o valor da empresa menos o valor da dívida vencida antecipadamente e zero.

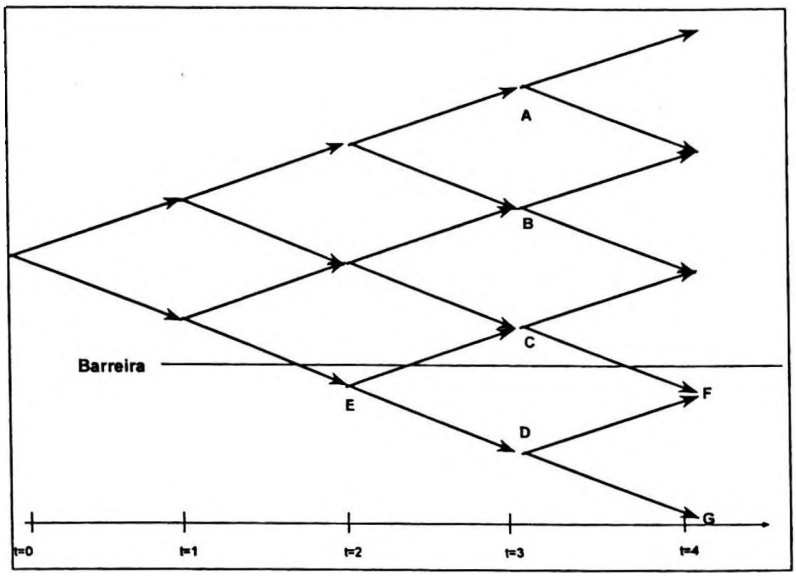
Conforme explica Hull (2002, p. 402-404), uma ressalva a ser feita é que quando se faz precificação de opções sobre ações que pagam dividendos, deve-se diferenciar o pagamento de dividendo quando se conhece o *dividend yield* e quando se conhece o valor em moeda a ser pago. O procedimento a ser empregado neste estudo é similar ao pagamento de dividendo quando se conhece o valor em moeda.

Ainda segundo Hull (2002, p. 467), o apreçamento de uma opção com barreira é realizada da mesma maneira que de uma opção simples (*plain vanilla*) usando árvores binomiais, exceto que, quando o preço do ativo objeto for abaixo da barreira, o preço da opção naquele nó será zero.

Um problema mencionado ao empregar árvores binomiais para precificar opções com barreira é o fato da barreira verdadeira jazer entre dois nós adjacentes. Quanto menor o número de nós, maior será a diferença entre a barreira real e a barreira empregada no modelo.

A figura a seguir ilustra este problema.

Figura 33 Detalhe da Barreira Única



Fonte : Autor

A figura anterior evidencia uma árvore binomial e o valor que estabelece a barreira.

Ainda utilizando a figura anterior, considerando o instante t=3, a barreira situa-se entre os nós C e D. Quanto maior for a distância entre os nós C e D, maior será a imprecisão do modelo empregado.

Numa opção com barreira tradicional, em todos os nós deve-se verificar se o preço do ativo objeto está acima ou abaixo da barreira. Conforme dito, caso o valor do ativo seja menor que o valor da barreira, o preço da opção naquele nó é ajustado para zero.

Contudo, ao se analisar uma opção real representada por uma empresa que deve fazer pagamentos em datas específicas, não é necessário comparar o valor dos ativos com o da barreira em todos os nós, compara-se apenas com aqueles em que se está programado o pagamento.

Observando a figura anterior, no caso de uma opção com barreira tradicional o preço da opção nos nós E, D, F e G é zero. Considerando que a barreira corresponda ao valor do pagamento em t=3, apenas o nó D seria zerado.

Ademais, dependendo do fluxo de pagamentos programados, ter-se-á uma barreira diferente para cada nó.

6.3. Observações Metodológicas

As observações metodológicas ora propostas são menos restritivas se comparadas àquelas em que a dívida é concentrada em data única:

a) A presente metodologia permite que cada componente da dívida, de curto ou longo prazo, seja considerado na efetiva data em que a dívida deve ser paga. Não é necessário nenhum cálculo com o intuito de se concentrar parte ou a totalidade do compromisso de pagamento em determinada data.

b) Com o objetivo de trabalhar com informações obtidas diretamente das notas explicativas das empresas selecionadas, será computada apenas dívida oriunda de empréstimos e financiamentos, desprezando passivos com fornecedores, salários a pagar, impostos a pagar. As notas explicativas costumam especificar o valor e os anos em que amortizações devem ser realizadas. Com tais informações, o cálculo da *duration* se tornará possível.

c) Considerar-se-á que os juros serão pagos junto com o principal nas datas especificadas para as amortizações. Isto significa que estão sendo desprezados os pagamentos periódicos de juros.

d) O passivo cíclico não é levado em consideração nos cálculos. Isto é, dívidas com fornecedores, salários a pagar e outros passivos operacionais não serão computados.

e) O valor de mercado do patrimônio líquido será obtido somando o valor das ações preferenciais e ordinárias na referida data, deduzindo do valor encontrado as ações em tesouraria.

f) A volatilidade ao dia do patrimônio líquido foi obtida calculando-se a volatilidade dos retornos das ações das referidas empresas considerando dados diários de 01/03/2005 até 30/09/2005. A volatilidade sempre foi calculada empregando o tipo de ação com maior liquidez.

g) O valor presente da dívida foi obtido a partir do relatório trimestral que as empresas de capital aberto divulgam. A título de ilustração, será evidenciado como o valor presente da dívida da Ripasa foi obtido.

h) Adotou-se como taxa de juros livre de risco a Taxa de Juros de Longo Prazo - TJLP que, à época do estudo, era de 9,75 % ao ano.

i) Com relação ao custo da dívida, tomou-se como base para todas as empresas o valor correspondente da TJLP acrescido do *del credere* de 4% ao ano, o que fornece custo anualizado de 13,75%. Será importante fazer estudo de análise de sensibilidade para diferentes taxas devido a diferença existente entre as empresas analisadas.

j) A metodologia empregada não considera os custos envolvidos na bancarrota;

k) A metodologia empregada não considera aspectos relacionados à liquidez. Supõe-se apenas que, caso o valor dos ativos seja maior que o valor da dívida, a dívida vai ser paga.

l) A metodologia empregada não faz distinção entre as classes da dívida segundo as garantias ofertadas aos credores.

m) Assume-se que a empresa não contrairá novas dívidas ao longo da vida da opção.

No procedimento descrito no capítulo anterior, uma das relações utilizadas era $\sigma = \frac{\sigma_E \times C_0}{V_0 \times N(d)}$. Entrementes, tal relação depende de d cujo cálculo assume que a opção seja européia. A maneira de se contornar este problema é empregar uma solução já vista no capítulo 3, mais especificamente quando foi discutido o modelo de opções reais. Foi visto que a volatilidade ao quadrado dos ativos da firma é dada por $\sigma^2 = w_e^2 \times \sigma_e^2 + w_d^2 \times \sigma_d^2 + 2 \times w_e \times w_d \times \text{correlação}_{e,d}$, sendo que cada termo desta fórmula é explicada no item 3.6.4 desta tese. Para o presente estudo de caso, assumiu-se que a taxa que corrige a dívida é a TJLP acrescida de *del credere* de 4%. Ora, uma vez que pela atual regra de cálculo da TJLP esta taxa é reajustada trimestralmente, sua volatilidade diária tende a zero,

6.4. Testes realizados para a Aracruz

Os dados de entrada para o cálculo da probabilidade de *default* da Aracruz são os mesmos empregados no capitulo anterior. De modo a não ser repetitivo, vamos partir já das seguintes informações:

- Volatilidade das taxas de retorno do patrimônio líquido de 1,688% ao dia útil.

- O valor de mercado do patrimônio liquido da Aracruz em 30/09/2005 era de R$ 8,655 bi.

- O fluxo de pagamentos da empresa era o seguinte:

Tabela 36 Cronograma de Amortizações da Aracruz

Ano		Principal a ser pago	
0	2005	R$	360.100.000
1	2006	R$	608.100.000
2	2007	R$	868.600.000
3	2008	R$	701.400.000
4	2009	R$	444.100.000
5	2010	R$	1.007.600.000

Fonte : Dados oriundos do relatório trimestra da Aracruz

- Assume-se taxa de juros livre de risco dada pela TJLP que, à época, era de 9,75% ao ano.

- Assume-se taxa que remunera a divida no valor de 13,75% ao ano.

De posse das informações anteriores e sabendo que árvore a ser construída terá 200 passos, tem-se a que:

$$8{,}655 = \frac{1}{r^n} \cdot \sum_{j=0}^{200} \binom{200}{j} \times q^{200-j} \times (1-q)^j \times C_{(200-j)u,jd}; \qquad (1)$$

$$q = \frac{1{,}00238 - d}{u - d} \qquad (2)$$

$$u = e^{\sigma.\sqrt{\delta t}} \qquad (3)$$

$$d = e^{-\sigma.\sqrt{\delta t}} \qquad (4)$$

$\sigma = w_e \times \sigma_e$, sendo σ_E a volatilidade do patrimônio líquido. (5)

Sob o aspecto prático, deve-se salientar que, na verdade, a equação (1) é a própria árvore binomial com 200 passos, já adaptada para o caso de múltiplas barreiras e para ter que contemplar a diminuição do valor do ativo ao longo do tempo por conta dos pagamentos intermediários de juros e principal.

Contudo, o preço da opção fornecido pela árvore binomial já é sabido, assim como o preço de exercício. A questão é encontrar os demais parâmetros que definem a árvore binomial.

Dispondo de cinco equações e cinco incógnitas pode-se descobrir numericamente os valores de: V_0, u, d, q e σ.

Tendo descoberto os valores acima, o próximo passo será encontrar a probabilidade mundo real p empregando a seguinte relação:

$\sigma = \sqrt{V_0^2 \times \left[d^2.(1-p) + u^2.p\right]^n - V_0^2 \times \left[d.(1-p) + u.p\right]^{2n}}$, sendo n o número de passos empregados na árvore binomial.

Ao se empregar o procedimento descrito, obtém-se:

Tabela 37 Resumo das informações obtidas numericamente

σ ao dia	1,29322%
V_0	11.301.939.854
p	0,48777089
u	1,032992157
d	0,968061561
q	0,527748392

Fonte : Autor

Dispondo da probabilidade mundo real *p,* basta somar as probabilidades associadas a valores da empresa que conduzem ao *default,* em cada passo da árvore que possui barreira. No caso da Aracruz, seus compromissos de pagamento vão de 2005 até 2010. Os valores devidos de 2005 até 2009 são as barreiras. O valor devido em 2010 é o *strike* da opção.

Sabe-se que o vencimento da opção é em 2010, o que significa 1260 dias úteis. Uma vez que a árvore possui 200 passos, cada passo corresponde a 6,3 dias úteis. De posse destas informações, conclui-se que o vencimento de 2006 corresponde ao passo 40, o vencimento de 2007 corresponde ao passo 80 e assim por diante.

A tabela abaixo evidencia a correspondência entre o passo da árvore binomial e o vencimento de cada parcela da dívida:

Tabela 38 Correspondência entre data de pagamento e passo da árvore binomial

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano
0	R$ 360.100.000,00	0	2005
40	R$ 608.100.000,00	1	2006
80	R$ 868.600.000,00	2	2007
120	R$ 701.400.000,00	3	2008
160	R$ 444.100.000,00	4	2009
200	R$ 1.007.600.000,00	5	2010

Fonte: Autor

Portanto, deve-se investigar nos passos evidenciados na tabela acima a probabilidade mundo real do valor dos ativos ser inferior ao principal corrigido pelo custo da dívida.

Então, a probabilidade da empresa entrar em *default* na data de pagamento 1 ano, correspondente ao passo número 40, é dada pela probabilidade mundo real do valor dos ativos ser inferior a R$ 608.100.000 corrigido por 13,75% ao ano.

Por conseguinte , a probabilidade da empresa entrar em *default* na data de pagamento 2 ano, correspondente ao passo número 80, é dada pela probabilidade mundo real do valor dos ativos ser inferior a R$ 868.600.000 corrigido por 13,75% ao ano.

Ao se repetir o raciocínio para todos os nós que coincidem com datas de pagamento, obtém-se a seguinte tabela para Aracruz:

Tabela 39 Probabilidade de Default da Aracruz em cada vencimento de dívida

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano	Probabilidade	σ_E ao dia útil	1,68863%	σ ao dia	1,29322%
0	R$ 360 100 000,00	0	2005		C_0	R$ 8.655.488.620,04	V_0	11.301.939.854
40	R$ 608 100 000,00	1	2006	0,0000000E+00			p	0,48777089
80	R$ 868 600 000,00	2	2007	1,4290080E-14	Strike	R$ 1.007.600.000,00	u	1,032992157
120	R$ 701 400 000,00	3	2008	8,8780528E-09	r: Taxa livre de risco aa	9,750%	d	0,968061561
160	R$ 444 100 000,00	4	2009	8,1104622E-08	r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%	q	0,527748392
200	R$ 1 007 600 000,00	5	2010	8,5454159E-04	Último Vencimento (du)	1260		
240		6	2011		1+r: Fator da Taxa livre de risco	1,00232858		
280		7	2012		Número de Passos da Árvore	200		
320		8	2013		Custo Dívida ao ano	13,75%	Intervalo entre passos(du)	6,3

Fonte: Autor

A tabela anterior mostra que o modelo apurou uma probabilidade de 0,0854% da Aracruz não ser capaz de honrar integralmente o pagamento devido no ano 5. As probabilidades da Aracruz se tornar inadimplente nos anos 2005, 2006, 2007, 2008 e 2009 são desprezíveis.

6.5. Resultado dos Testes para as Demais Empresas

Tabela 40 Probabilidade de Default da VCP em cada vencimento de dívida

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano	Probabilidade	σ_E ao dia útil	1,99987%	σ ao dia	1,11764
0	R$ 85 000 000,00	0	2005		C_0	R$ 5.275.998 250,00	V_0	9.440.740.26
40	R$ 135 000 000,00	1	2006	0,0000000E+00			p	0,48945050
80	R$ 142 000 000,00	2	2007	0,0000000E+00	Strike	R$ 2.116.000.000,00	u	1,028149
120	R$ 216 000 000,00	3	2008	2,3419608E-30	r: Taxa livre de risco aa	9,750%	d	0,97233733
160	R$ 422 000 000,00	4	2009	5,0549977E-12	r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%	q	0,53448586
200	R$ 2 116.000.000,00	5	2010	5,3368278E-02	Último Vencimento (du)	1260		
240		6	2011		1+r: Fator da Taxa livre de risco	1,00232858		
280		7	2012		Número de Passos da Árvore	200		
320		8	2013		Custo Dívida ao ano	13,75%	Intervalo entre passos(du)	6

Fonte: Autor

Observando a tabela anterior, percebe-se mais uma vez probabilidade de *default* desprezível até 2009. Em 2010, existe uma probabilidade de *default* de 5,33%.

Esta probabilidade, aparentemente alta, é decorrente do vultoso principal a ser quitado em 2010 no valor de R$ 2,116 bi. Esta quantia, levada a valor futuro, fornece R$ 4,0 bi, que consiste num valor muito significativo em comparação com o valor a mercado da empresa.

Outro ponto digno de nota é que para efeito de cálculo, assumiu-se para todas as empresas e para todos os anos taxa que remunera a dívida de 13,75% constituído da TJLP acrescida por um *spread*. Poder-se-ia argumentar que o custo de captação da VCP e das demais empresas não corresponde a 13,75%. Este argumento não invalida o modelo ora proposto. Dispondo do exato custo de captação, mesmo que ele seja diferente para os diversos horizontes de tempo, o modelo aqui apresentado seria capaz de determinar a probabilidade de *default* período a período bastando para isto alterar o valor da barreira no passo em que o valor é devido.

Tabela 41 Probabilidade de Default da Ripasa em cada vencimento de dívida

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano	Probabilidade	σ_I ao dia útil	1,94734%	σ ao dia	1,75791%
0	R$ 49 100 000,00	0	2005		C_0	R$ 1.315.788.720,50	V_0	1.457.578.082
29	R$ 171 000 000,00	1	2006	0,0000000E+00			p	0,48015314
57	R$ 108 500 000,00	2	2007	3,4803944E-07	Strike	R$ 16.700.000,00	u	1,053594034
86	R$ 152 300 000,00	3	2008	1,2948482E-03	r: Taxa livre de risco aa	9,750%	d	0,949132178
114	R$ 104 200 000,00	4	2009	3,5814142E-03	r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%	q	0,518173348
143	R$ 54 600 000,00	5	2010	1,0903936E-03	Último Vencimento (du)	1764		
171	R$ 24 800 000,00	6	2011	2,4074229E-04	1+r: Fator da Taxa livre de risco	1,00326153		
200	R$ 16 700 000,00	7	2012	1,3430635E-04	Número de Passos da Árvore	200		
229		8	2013		Custo Dívida ao ano	13,75%	Intervalo entre passos(du)	8,82

Fonte: Autor

Os valores de probabilidade de *default* ano a ano encontrados para a Ripasa são bastante esclarecedores pois auxiliam a evidenciar que as chances calculadas não são acumuladas. Isto é, a probabilidade de *default* encontrada para 2008 refere-se a chance da empresa não cumprir integralmente suas obrigações no ano especifico de 2008.

Outro ponto digno de nota é que, conforme mostra a tabela, não necessariamente quanto maior o prazo maior a probabilidade de *default*. O que se pode dizer é que quanto maior a prazo, maior é a probabilidade acumulada de *default*. Ora, em 2009, a Ripasa tem compromisso de pagamento de principal de mais de R$ 100 MM enquanto que em 2010 o compromisso de pagamento com principal de R$ 54MM. Logo, é bastante razoável que a

probabilidade da empresa entrar em *default* em 2009 seja maior que a probabilidade da empresa entrar em *default* em 2010. Confirmando o raciocínio anterior, a probabilidade da Ripasa não ser capaz de honrar seu compromisso em 2012 é de 0,01343% enquanto que a probabilidade dela se tornar inadimplente em 2011 é de 0,024074%.

A seguir são apresentados resultados encontrados para a Suzano e a Klabin.

Tabela 42 Probabilidade de Default da Suzano em cada vencimento de dívida

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano	Probabilidade	σ_E ao dia útil	2,34544%	σ ao dia	1,70961%
0	R$ 926.311.000,00	0	2005		C_0	R$ 3.582.353.738,15	V_0	4.914.666.378
33	R$ 118.472.000,00	1	2006	0,0000000E+00			p	0,48217807
67	R$ 385.997.000,00	2	2007	5,2028198E-08	Strike	R$ 155.114.000,00	u	1,048128922
100	R$ 456.223.000,00	3	2008	7,3373855E-04	r: Taxa livre de risco aa	9,750%	d	0,954081105
133	R$ 448.334.000,00	4	2009	8,7275646E-03	r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%	q	0,51796885
167	R$ 216.964.000,00	5	2010	4,0254046E-03	Último Vencimento (du)	1512		
200	R$ 155.114.000,00	6	2011	3,5520552E-03	1+r: Fator da Taxa livre de risco	1,00279494		
233		7	2012		Número de Passos da Árvore	200		
267		8	2013		Custo Dívida ao ano	13,75%	Intervalo entre passos(du)	7,56

Fonte: Autor

No capítulo 5 em que se empregou o modelo binomial concentrando a dívida na data *duration,* a probabilidade de *default* obtida para a Suzano foi superior a 3% sendo a *duration* da dívida da referida empresa de pouco mais de dois anos. Ora, observando a tabela anterior, percebe-se que a probabilidade de *default* para o ano dois é de 5,2 E-8. Isto evidencia a significativa distorção nos resultados introduzida ao se supor que a dívida está concentrada em data única.

Tabela 43 Probabilidade de Default da Klabin em cada vencimento de dívida

Passo	Principal a ser pago	Ano	Ano	Probabilidade	σ_E ao dia útil	2,84739%	σ ao dia	2,53662%
0	R$ 346.300.000,00	0	2005		C_0	R$ 4.221.341.800,00	V_0	4.738.517.669
29	R$ 327.600.000,00	1	2006	0,0000000E+00			p	0,47092895
57	R$ 541.400.000,00	2	2007	2,6307594E-03	Strike	R$ 60.600.000,00	u	1,078243953
86	R$ 340.600.000,00	3	2008	8,2536352E-03	r: Taxa livre de risco aa	9,750%	d	0,927433905
114	R$ 77.500.000,00	4	2009	5,4564957E-04	r: Taxa livre de risco dia	0,036925413%	q	0,502802191
143	R$ 78.500.000,00	5	2010	2,2191800E-03	Último Vencimento (du)	1764		
171	R$ 62.900.000,00	6	2011	4,3290623E-03	1+r: Fator da Taxa livre de risco	1,00326153		
200	R$ 60.600.000,00	7	2012	1,2831652E-02	Número de Passos da Árvore	200		
229		8	2013		Custo Dívida ao ano	13,75%	Intervalo entre passos(du)	8,82

Fonte: Autor

Tal como aconteceu com a Suzano, ao se comparar a probabilidade de *default* obtida no

6.6. Comparação entre as probabilidades de default assumindo dívida concentrada e distribuída

Conforme evidencia a tabela seguinte, para todas as empresas analisadas, a probabilidade de *default* calculada para cada data de amortização programada foi significativamente menor em relação à probabilidade de *default* assumindo dívida concentrada na data *duration*. Este resultado sugere que a distorção introduzida ao concentrar os pagamentos não é desprezível.

Tabela 44 Probabilidade de Default considerando dívida distrbuída ao longo do tempo e dívida concentrada na data duration. O número de passos empregados foi de 200.

Data	Aracruz	VCP	Ripasa	Suzano	Klabin
2006	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00	0,0000000E+00
2007	1,4290080E-14	0,0000000E+00	3,4803944E-07	5,2028198E-08	2,6307594E-03
2008	8,8780528E-09	2,3419608E-30	1,2948482E-03	7,3373855E-04	8,2536352E-03
2009	8,1104622E-08	5,0549977E-12	3,5814142E-03	8,7275646E-03	5,4564957E-04
2010	8,5454159E-04	5,3368278E-02	1,0903936E-03	4,0254046E-03	2,2191800E-03
2011			2,4074229E-04	3,5520552E-03	4,3290623E-03
2012			1,3430635E-04		1,2831652E-02
Duration	0,552%	18,215%	1,798%	4,644%	4,337%

Fonte : Autor

Ainda considerando a tabela anterior, a probabilidade das empresas estudadas inadimplirem num curto intervalo de tempo é praticamente zero. Percebe-se que muitas das probabilidades encontradas têm ordem de grandeza inferior a 0,00001 sendo, portanto, desprezíveis..

Nesta linha de raciocínio, no caso particular da Aracruz, a única probabilidade não desprezível é aquela associada ao pagamento em 2010 e ainda assim a probabilidade é de 0,0854%. No caso da VCP, a única probabilidade não desprezível é aquela associada ao pagamento em 2010. Para a Ripasa, notam-se probabilidades muito pequenas para os anos de 2008 até 2012. Analisando as probabilidades de default associadas aos pagamentos da Suzano, têm-se probabilidades muito pequenas de 2008 até 2011. Por último, a Klabin apresenta probabilidades não desprezíveis associadas aos pagamentos nos anos 2007 até 2012.

6.7. Limitações do Modelo

Uma limitação do modelo é assumir que a volatilidade dos ativos é constante ao longo da vida da opção, algo que também é assumido nos modelos de apreçamento de opções com barreira.

Contudo, esta premissa pode causar alterações indesejadas nos valores encontrados no u e no d. Ora, na medida que a empresa quita seus compromissos, a proporção entre capital de terceiros e próprio altera-se. Isto é, espera-se que, a cada pagamento de dívida, a volatilidade dos ativos fique mais próxima da volatilidade do patrimônio líquido, algo que o modelo, tal como foi apresentado, não é capaz de captar.

Outro ponto a ser salientado é que o número insuficiente de passos da árvore conduz a probabilidades muito baixas da empresa tornar-se inadimplente no curto prazo. Isto é, uma vez calculado o u e o d, dificilmente em poucos passos a partir do instante zero o valor da empresa se tornará inferior ao primeiro compromisso de pagamento, havendo a possibilidade de ser subestimada a probabilidade de *default* da empresa no curto prazo. Esta deficiência pode ser minimizada empregando árvores binomiais com mais passos.

Pressupor que as empresas analisadas possuíam ações negociadas em bolsa, o que facilita enormemente a determinação do valor a mercado do patrimônio líquido e de sua respectiva volatilidade, constitui também uma restrição ao modelo.

Em termos práticos há também limitações, visto que a possibilidade de pagamento de juros e principal decorre da capacidade de geração de caixa da empresa e não o valor a mercado de seus ativos. Neste aspecto, mesmo que o valor dos ativos da empresa seja superior ao valor do compromisso a ser honrado é possível que a empresa não possua liquidez para tal. Esta crítica pode ser feita à imensa maioria dos modelos estruturais que comparam o valor dos ativos com o valor do compromisso a ser saldado.

Capítulo 7: Conclusão

No primeiro capítulo deste trabalho, estabeleceu-se que o objetivo geral da tese era o de aprofundar o estudo da medida de risco de inadimplência de empresas que empreguem capital de terceiros para financiar seus ativos. Este objetivo geral contribui com a pesquisa na área de risco de crédito e está alinhada com as novas recomendações dos vários Acordos da Basiléia, também conhecidos como Basiléias I, II e III.

Das diversas maneiras de se contribuir com o estudo do risco de inadimplência, a linha de pesquisa adotada trata do cálculo da probabilidade de *default* utilizando como ponto de partida a modelagem estrutural iniciada por Merton em 1974. De maneira a enfatizar a importância deste tema, é importante salientar que Basiléia II sugere que os bancos calculem a exigência de capital face o risco de crédito utilizando abordagens que dependem essencialmente do valor da probabilidade de *default*.

Dado o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram estabelecidos:

(i) a formulação de metodologia para a determinação da probabilidade de *default* de corporações que possuam capital de terceiros financiando seus ativos.

(ii) o modelo a ser proposto deverá ser capaz de contemplar estruturas de endividamento complexas semelhantes àquelas que o modelo original de Merton (1974) é capaz de resolver.

(iii) o modelo proposto deverá ser capaz de minimizar as simplificações nos fluxos ou datas de pagamento das obrigações da empresa.

De maneira a atingir o objetivo específico (*i*) de formular metodologia para a determinação de probabilidade de *default* de corporações que empreguem capital de terceiros, enxergou-se o valor do patrimônio líquido da empresa que utiliza dívida para se financiar como o preço de uma opção de compra européia tal como fez Merton em 1974. Contudo, no lugar de empregar o modelo de Black e Scholes tal como se fez em 1974, árvores binomiais foram utilizadas como ferramenta de apreçamento.

Considerando a empresa com a dívida concentrada em data única e atendo-se ao fato que na medida em que se aumenta o número de passos da árvore binomial a resposta dada pelo modelo empregando árvores binomiais converge para aquela dada por Black e Scholes, não haveria significativas diferenças conceituais entre a abordagem aqui proposta e a de Merton. Contudo, sob o ponto de vista prático, empresas não têm dívida na forma de título zero cupom e a flexibilidade proporcionada pelas árvores binomiais será de fundamental importância para a consecução do objetivo específico (*iii*). Logo, atingir os objetivos específicos (*i*) e (*ii*) serve como passo intermediário para a consecução do objetivo específico (*iii*).

O objetivo específico (*ii*) estabelece que o modelo a ser proposto deve ser capaz de contemplar estruturas de endividamento complexas semelhantes àquelas que o modelo original de Merton (1974) é capaz de resolver. O modelo original de Merton (1974) é capaz de calcular probabilidade de *default* de empresas com dívida concentrada em data única supondo passivo da empresa na forma de título zero cupom. De maneira a atingir o objetivo específico (*ii*), este trabalho assumiu como hipótese simplificadora a concentração da dívida da empresa na data *duration*. Assumindo a dívida concentrada, foi possível empregar árvores binomiais sendo o preço do patrimônio liquido o preço da opção do tipo européia. Seguindo a metodologia propugnada no capítulo cinco, empregou-se o modelo para cinco empresas do setor de celulose e papel, a saber: Aracruz, VCP, Ripasa, Suzano e Klabin. Os resultados obtidos fornecem a probabilidade de *default* na data *duration* para estas empresas.

Empregando árvore binomial com 47 passos, as probabilidades 0,749%, 19,138%, 1,725%, 3,406% e 4,314% foram obtidas para as empresas Aracruz, VCP, Ripasa, Suzano e Klabin, respectivamente. Os dados obtidos não são diretamente comparáveis pois as *durations* das empresas são diferentes. Contudo, chama muita atenção a probabilidade de *default* da VCP. Ao se observar este valor, pode-se especular o porquê de um valor tão alto. Será que a empresa é realmente tão mais arriscada que as demais ou será que esta probabilidade é fruto da distorção causada ao se concentrar toda a dívida em data única?

A resposta para esta indagação pode ser respondida ao se empregar um modelo que seja capaz de calcular a probabilidade de *default* sem assumir a premissa de dívida concentrada, aumentando o interesse de se atingir o objetivo específico (*iii*).

O objetivo específico (*iii*) estabelece que o modelo proposto tem que ser capaz de minimizar as simplificações nos fluxos ou datas de pagamento das obrigações da empresa. Em outras palavras, o modelo proposto para atingir o objetivo específico (*iii*) assumirá as datas de pagamento tais quais elas são. Para tanto, o preço do patrimônio líquido da empresa não será encarado como o preço de uma opção européia, tal como pensou Merton, e sim como o preço de uma opção de compra com múltiplas barreira do tipo *down and out.* Cada barreira corresponde ao valor a ser pago pela dívida em cada particular momento do tempo. O *strike* desta opção é o último compromisso de pagamento a ser feito.

Com relação ao tipo de opção utilizada, deve-se salientar que ela é uma variante mais sofisticada da opção com barreira do tipo *down and out.* Numa opção tradicional com barreira do tipo *down and out*, existe apenas uma barreira. Se o valor do ativo objeto ficar abaixo da barreira, não importando o instante que isto ocorra, o preço da opção naquele nó será zero. Em cada nó da árvore binomial, não necessariamente em todos, foi estabelecida uma barreira correspondente ao compromisso de pagamento da empresa.

A solução natural para resolver um problema que envolve apreçamento de opções com barreira é o emprego de árvores binomiais.

Por ser uma estrutura flexível capaz de acomodar estruturas de capital condizentes com a realidade, a árvore binomial permitiu que praticamente nenhuma simplificação fosse feita em relação às datas originais dos pagamentos dos compromissos da empresa.

Caso o valor da empresa no instante de pagar uma parcela da dívida seja maior que a barreira, o valor da empresa imediatamente seria reduzido pelo valor da barreira, que corresponde ao valor a ser pago naquele instante. Caso o valor da empresa naquele instante seja menor que o valor da barreira, o preço da opção naquele nó especifico vai para zero, assim como iria para zero também o valor do ativo uma vez que ele é inferior ao compromisso de pagamento.

Desta maneira, continuou-se empregando a idéia central de Merton ao enxergar o valor do patrimônio liquido da empresa como o preço de uma opção sobre os ativos da empresa.

No capítulo seis, após desenvolver estas idéias, o modelo foi novamente aplicado considerando empresas do setor de papel e celulose, a saber: Aracruz, VCP, Ripasa, Suzano e

Klabin. Contudo, no lugar de calcular a probabilidade de *default* para uma data única, pode-se calcular a probabilidade de *default* para cada evento de pagamento. Isto significa que foi possível calcular a probabilidade de cada empresa analisada se tornar inadimplente em qualquer horizonte de tempo que se quisesse. Os instantes de tempo escolhidos para o cálculo da probabilidade de *default* foram justamente as datas de pagamento programadas para as amortizações. Uma conclusão interessante foi que a concentração da dívida em data única distorceu sensivelmente a probabilidade de *default* das empresas estudadas. Esta distorção fez com que a probabilidade de *default* obtida ao se concentrar a dívida fosse significativamente maior que as probabilidades associadas a cada evento de pagamento.

Embora não tenha sido feito, o modelo empregando opções com múltiplas barreiras permite que as probabilidades de *default* associadas ao pagamento de juros também sejam calculadas.

Uma vantagem oriunda da flexibilidade do modelo proposto é a possibilidade de colocar como barreira não apenas o valor a ser pago de juros e principal como também *covenants* que, caso desrespeitados, impliquem pagamento de multa ou de antecipação do vencimento da dívida.

Foram realizadas diversas analises de sensibilidade na probabilidade de *default* alterando-se taxa de juros livre de risco, taxa de juros que corrige a dívida e número de passos. Uma conclusão interessante é que ao se adicionar novos passos a árvore binomial, o valor da probabilidade de *default* oscilará tendendo ao seu valor teórico num processo de convergência oscilatória.

Como sugestão para futuras pesquisas, pode-se incluir novas condições que permeiam os empréstimos de maneira a deixar o modelo mais próximo da realidade. Uma condição que poderia ser adicionada seria permitir que a empresa assumisse novas dívidas ao longo da vida da opção.

Outro tópico que mereceria pesquisas adicionais é o estudo do comportamento da volatilidade dos ativos ao longo da vida da opção. Isto é, na medida em que a dívida vai sendo paga, a volatilidade dos ativos se altera pois a participação do capital próprio aumenta.

Outro ponto de fundamental importância e que ainda carece de estudos mais aprofundados diz respeito à validação da probabilidade de *default* obtida a partir dos modelos propostos. Ora, o modelo propugnado nesta tese valeu-se de uma série de teorias amplamente discutidas e sedimentadas no meio acadêmico. Nenhuma premissa nova foi acrescentada. Pelo contrário, este trabalho procurou relaxar premissas simplificadoras comumente assumidas nos modelos de risco de crédito. O presente trabalho concentrou-se na elaboração do modelo e na metodologia de sua aplicação ficando a validação e eventuais calibragens dos parâmetros para outros estudos.

Bibliografia

ALTMAN, E., *Financial Ratios,Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy*, Journal of Finance, September 1968.

ALTMAN, E., CAOUETTE, J. B., NARAYANAN, P. *Gestão de Riscos de Crédito: o próximo grande desafio financeiro*. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2000.

ALTMAN, E., BRADY, B., RESTI, A., SIRONI, A., *The Link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence and Implications, Report prepared for the International Swaps and Derivatives' Dealers Association,* 2003.

ANTIKAROV, V, COPELAND, T. *Opções Reais: um novo paradigma para reinventar a avaliação de investimentos*. 1. Ed. Rio de Janeiro: Campus, 2001.

ASSAF, A., *Estrutura e Análise de Balanços. 7° Ed.* , Atlas, 2002.

BAHDIA, T., CASTRO, *A Convergência dos Modelos de Árvores Binomiais para Avaliação de Opções*. Pesquisa Operacional PUC Rio de Janeiro. Vol 21. N° 1, 2001.

BEAVER, B. *Financial Ratios as Predictors of Failure*. Journal of Accounting Research, suplemento do vol. 5: 71-111, 1966.

BENNINGA, S, WIENER, Z. *Value-at-Risk (VAR)*. Mathematica in Education and Research, v.7, n.4, p.1-8, 1998. Disponível em: < http://pluto.mscc.huji.ac.il/~mswiener/research/Benninga74.pdf >. Acesso em 11 dez.2005.

BHARATH, S. T., SHUMWAY. *Forecasting Default with the KMV-Merton Model*, Working Paper, Michigan University, 2004.

BLACK, F., COX, J, *Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions*, Journal of Finance, 31(2), 351-367, 1976.

BODIE, Z., KANE, A., MARCUS, A. J. *Fundamentos de Investimentos*. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman. 2000.

BOHN, F, ARORA, N, KORABLEV, I. *Power and Level Validation of the EDF Credit Measure in North America*. Moody's KMV Company, 2005.

BREALEY, R., MYERS, S., *Principles of Corporate Finance*. 5. Ed. McGraw Hill, 1996.

BRYS, E., BELLALAH, M., MAI, H., VARENNE, F., *Options, Futures and Exotic Derivatives*. John Wiley, New York, 1998.

CASTRO JR, F. *Previsão de Insolvência de Empresas Brasileiras Usando Análise Discriminante, Regressão Logística e Redes Neurais*. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

COOPER, I, DAVYDENKO, S,. *Using Yields Spreads to Estimate Expected Returns on Debt and Equity*, , 2002.

COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. *Option Pricing: A simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 1979.

COPELAND, T.E., WESTON, J.F., *Financial Theory and Corporate Policy*, 3. Ed., Addison-Wesley, 1992.

DELIANEDIS, G., GESKE, R. *The Components of Corporate Credit Spreads: Default, Recovery, Tax, Jumps, Liquidity, and Market Factors*. University of California, 2001.

DAMODARAN, A. *Avaliação de Investimentos*. 1. Ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1997.

DAMODARAN, A. *Estimating Risk Parameters*. Stern School of Business, 2002.

DAVIS, G., *Estimating Volatility and Dividend Yield when Valuing Real Options to Invest or*

DIXIT. A. K., PINDYCK. R. S. *Investment under Uncertainty.* 1. Ed. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

DIAZ. A., SKINNER, F., *The Critical Parameters,* Credit Risk Special Report, 2001.

DOWNES, J; GOODMAN, J. *Dicionário de Termos Financeiros e de Investimentos*, Sao Paulo: Nobel, 1993.

DUFFIE. D., SINGLETON, K., *Modeling Term Structures of Defautable Bonds,* Review of Financial Studies, Vol 12, 1999.

DULMANN, K., TRAPP, M., *Systematic Risk and Recovery Rates – An Emprirical Analysis of US Corporate Credit Exposures,* Deutsche Bundes Bank, 2004.

DWYER, D., KOCAGIL, A, STEIN, R. *The Moody's KMV EDF RiskCalc v3.1 Model.* Moody's KMV Company, 2004.

ELTON, E., GRUBER, M., AGRAWAL, D., MANN, C., *Factors Affecting the Valuation of Corporate Bonds,* New York University, 2002.

ECO, H. *Como se faz uma tese.* São Paulo, Editora Perspectiva, 1977.

FABOZZI, F. *Handbook of Fixed Income Securities.* 5. Ed. California: McGraw-Hill, 1997.

FABOZZI, F. *Mercados, Análise e Estratégias de Bônus (Títulos de Renda Fixa).* 3. Ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2000.

FAE BUSINESS. *O mercado de papel e celulose.* Disponível em http://www.fae.edu/publicacoes/pdf/revista_fae_business/n1_dezembro_2001/analisesetorial_o_mercado_de_papel_e_celulose.pdf, 2001.

FINGER, C., *A Comparison of Stochastic Defaul Rate Models.* Riskmetrics, 2000.

FITZPATRICK, P.J. *A Comparison of Ratios of Successful Industrial Enterprises with those of Failed Firms.* 3. Certified Public Accountant, Oct 1932, pp.598-605, 1932.

HAMILTON, D., GUPTON, G., BERTHAULT. A., *Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers: 2000*. Moody's Investor Service, 2001.

HU, Y, PERRAUDIN, W. *The Dependence of Recovery Rate and Default.* Birkbeck College, 2002.

HULL, J, *Options, Futures and Other Derivatives.* 5. Ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

HULL, J., WHITE, A., *Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk,* University of Toronto, 2000.

HULL, J., WHITE, A., *The Valuation of Credit Default Swap Options,* University of Toronto, 2003.

HULL, J., WHITE, A., PREDESCU, M., *Bond Prices, Default Probabilities and Risk Premius,* University of Toronto, 2004.

JOBST, N., ZENIOS, S., *Extending credit risk models for the simulation of portfolios of interest rate and credit risk sensitive securities,* Working Paper Hermes Center of Excellence on Computational Finance, 2001.

JORION, P. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk.* 1. Ed. California: McGraw-Hill, 1997.

KNIGHT, F. H. *Risk, Uncertainty and Profit.* 1. Ed. 1921.

KURBAT, M, KORABLEV, I. *Methodology for Testing the Level of the EDF Credit Measure*. Moody's KMV Technical Report, 2002.

LANDO, D., *On Cox Processes and Credit-Risky Securities,* Review of Derivatives Research, 1997.

LAKATOS, E. M., MARCONI, M. A. *Metodologia Cientifica.* 2. Ed. São Paulo: Atlas, 1991.

LEVY, H, SARNAT, M. *Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice.* 1. Ed. New Jersey: Prentice-Hall International, 1984.

MADAN, D., UNAL, H., *A Two Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and th Short Term Structure of Credit Spreads,* University of Maryland, 1999.

MATIAS, A., MEIRELLES, J., REBELATTO, D., *A Teoria de Opções e sua Aplicação na Avaliação de Investimentos.* VI SEMEAD, 1999.

MERTON, R. *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.* Journal of Finance, Vol. 29, MIT (1974), pp. 449-470, 1974.

NEWBOLD, P. *Statistics for Business and Economics, 4. Ed.* New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

NEUMAN, J., MORGENSTERN, O. *Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico.* 1. Ed. 1944.

NIELSEN, S., RONN, E. *The Valuation of Default Risk in Corporate Bonds and Interest Rate Swaps*, Working Paper, Wharton, 1996.

OLIVEIRA, Edson Ferreira. *Contribuição à Modelagem de Avaliação de Empresas em Condições de Risco.* São Paulo, 2001. Tese (Doutorado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

PEREIRA, Leonel. *Utilização da Volatilidade Implícita Setorial de Ativos para Determinação do Valor de de Empresas Através do Modelo de Apreçamento de Opções.* São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

PEREIRA DA SILVA, J. *Análise Financeira das Empresas.* 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2004.

PEROBELI, F. *Um Modelo para Gerenciamento de Riscos em Instituições Não Financeiras: Aplicação ao Setor de Distribuição de Energia Elétrica no Brasil.* São Paulo, 2004. Tese

(Doutorado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

SAIN, P. *Estudo comparativo dos modelos de value-at-risk para instrumentos pré-fixados.* São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

SUNDARAM, R. *The Merton/KMV Approach to Price Credit Risk*, Stern School of Business, 2001.

TEIXEIRA, R. *Atribuição de Valor Utilizando Cenários Probabilísticos.* São Paulo, 1999. Tese (Doutorado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

YIN, R.K. *Case Study Research: Design and Methods.* Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc., 1989.