

A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD).

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE**  
**DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO**

**O PREÇO DE MERCADO DO RISCO DE CRÉDITO NOS TÍTULOS  
PÚBLICOS FEDERAIS**

**Marcelo Villela de Araujo**  
**Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato**

**São Paulo - SP**  
**Novembro de 2004**

Professor Dr. Adolfo José Melfi  
Reitor

Professora Dra. Maria Tereza Leme Fleury  
Diretora da FEA

Professor Dr. Eduardo Pinheiro Gondim de Vasconcellos  
Chefe de Departamento de Administração

Professor Dr. Isak Kruglianskas  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

A663p

T658 A663p  
T86966  
20600027050



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

O PREÇO DE MERCADO DO RISCO DE CRÉDITO NOS TÍTULOS  
PÚBLICOS FEDERAIS

DEDALUS - Acervo - FEA

20600027050

Marcelo Villela de Araujo  
Orientador: Prof. Dr. José Roberto Securato

Dissertação apresentada ao Departamento de Administração  
da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da  
Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção  
do título de Mestre em Administração.

USP - FEA - SBD  
DATA DA DEFESA 06, 12, 04

São Paulo - SP  
Novembro de 2004

86966

86966

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

Elaborada pela Seção de Publicações e Divulgação do SBD/FEA/USP

Araujo, Marcelo Villela de  
O preço de mercado do risco de crédito nos títulos públicos federais /  
Marcelo Villela de Araujo. -- São Paulo, 2004.  
108 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2004  
Bibliografia.

1. Administração 2. Modelos em séries temporais 3. Crédito 4. Títulos  
públicos I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP  
II. Título.

CDD – 658

## **RESUMO:**

Esta dissertação consiste em aplicar e testar um modelo de estrutura temporal de dois fatores para descrever a taxa de desconto ajustada ao risco de crédito de títulos públicos no Brasil. O modelo baseia-se em dois fatores de risco independentes: a taxa de juros interbancária para um ano de prazo, especificado como processo raiz quadrada, e o *spread* de crédito dos títulos, medido através do excesso de retorno sobre a taxa interbancária e especificado como processo de Ohrstein-Uhrlenbeck. Estima-se os parâmetros do modelo pelo método da máxima verossimilhança e testa-se o preço de mercado pelo risco de crédito pelo teste de razão de verossimilhança.

## ***ABSTRACT:***

*This dissertation applies and tests a two-factor model of the term structure of interest rates adapted to account for the sovereign default risk adjusted discount rate of Brazilian local government bonds. This model is based upon two independent risk factors: one-year local interbank deposit rate, specified as a square-root process; and the credit spread embedded on these bonds, measured as an excess return over the interbank deposit rate and specified as an Ohrstein-Uhrlenbeck process. It uses a maximum-likelihood estimation procedure and it tests the market price of default risk through a likelihood ratio test.*



## **AGRADECIMENTOS:**

Esta dissertação marca o final do curso de mestrado. Agradecer àqueles que contribuíram para este projeto, implica primeiramente em lembrar de quem me motivou antes mesmo do seu início até este momento final. Por isso, já peço desculpas pelo meu possível esquecimento.

Mas tenho um particular débito com os colegas e amigos Ricardo Humberto Rocha e José Carlos Luxo, juntamente com minha esposa Patrícia, por me incentivarem a entrar no programa de mestrado, e pela convivência e amizade dos últimos anos.

Outro responsável pelo meu envolvimento com a vida acadêmica foi meu orientador Professor Securato, quem me acolheu dentro do Laboratório de Finanças da FIA-USP, me direcionou na profissão de professor e sempre se mostrou generoso e amigo, compartilhando os momentos de alegria e nos dando forças para ultrapassar as dificuldades.

Agradeço também à professora Celma de Oliveira Ribeiro e ao professor Edson Ferreira de Oliveira por participarem da banca de qualificação e, principalmente, por terem realizado comentários fundamentais para colocar este trabalho no rumo final. Agradeço também pela gentileza de aceitarem participar da banca de defesa.

Meus novos amigos, com quem convivi na USP, certamente tornaram estes anos mais prazerosos e, por isso gostaria de citá-los, mas deixaria alguns nomes para trás. Desta forma, agradeço a todos pela amizade que compartilhamos e levamos à frente.

Agradeço também àqueles que participam do PPGA da FEA-USP, suportando o programa, como a FIA-USP, e se dedicando a ele, como funcionários e professores.

For fim devo agradecer a meus pais, e também aos meus amores Pat e Nic, que souberam compreender minha ausência em tantos bons momentos, além de me proporcionarem a motivação e a energia para seguir adiante.



## SUMÁRIO

RESUMO.....	i
SUMÁRIO.....	ii
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	v
ÍNDICE DE TABELAS.....	v
ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. Situação Problema .....	1
1.2. Objetivo do Trabalho .....	5
1.3. Jusificativa do Tema.....	6
1.4. Metodologia do Trabalho .....	7
1.5. Descrição dos Capítulos .....	9
<b>2. A TEORIA DE FORMAÇÃO DE PREÇOS DE TÍTULOS DE RENDA FIXA.....</b>	<b>11</b>
2.1. Características dos Títulos de Renda Fixa .....	11
2.1.1. Definição.....	11
2.1.2. Classificação dos Títulos quanto aos Emissores.....	12
2.1.3. Classificação dos Títulos quanto ao seu Vencimento .....	13
2.1.4. Formas de Amortização .....	13
2.1.5. Formas de Pagamento de Juros .....	14
2.1.6. Fluxos de Caixa dos Títulos com Taxas Pré-Fixadas .....	16
2.1.7. Fluxos de Caixa dos Títulos com Taxas Pós-Fixadas .....	17
2.2. Rentabilidade de um Título de Renda Fixa .....	18
2.2.1. O Conceito de Taxas de Juros .....	18
2.2.2. Medidas de Rentabilidade Esperada .....	20
2.2.3. O Preço de Mercado de um Título de Renda Fixa .....	21
2.2.4. O Conceito de Retorno .....	22
2.3. Estrutura Temporal das Taxas de Juros .....	24

2.3. Estrutura Temporal das Taxas de Juros .....	24
2.3.1. Processo de Formação das Taxas de Juros .....	25
2.3.2. Taxas de Juros à Vista .....	28
2.3.3. Taxas de Juros a Termo .....	29
2.4. Avaliação de Títulos Públicos no Mercado Brasileiro.....	29
2.4.1. O Conceito da Taxa SELIC .....	29
2.4.1.1. Metodologia de Cálculo .....	30
2.4.2. O Preço de um Título Público.....	31
2.4.3. Características dos Títulos .....	32
2.4.3.1. Letras Financeiras do Tesouro (LFTs).....	32
2.4.3.2. Letras do Tesouro Nacional (LTNs).....	33
2.4.4. Risco de Default em Títulos Públicos .....	34
2.4.4.1. Spread pelo Risco de Crédito .....	35
2.4.5. Retorno do Investidor.....	35
<b>3. MODELOS DE ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS.....</b>	<b>37</b>
3.1. Fundamentos do Cálculo Estocástico.....	37
3.1.1. Movimentos brownianos .....	38
3.1.2. Processos de Itô e Equações Diferenciais Estocásticas (EDE) .....	42
3.1.3. Processos de Difusão .....	46
3.2. Medida de probabilidade neutra ao risco e arbitragem.....	51
3.2.1. O Conceito de Arbitragem.....	54
3.3. Momentos Condicionais.....	55
3.3.1. O Conceito de Condicionamento.....	57

3.3.1. Esperança Condicional.....	58
3.4. Modelos para Estrutura Temporal .....	59
3.4.1. Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juros .....	62
3.4.1.1. Modelo de Vasicek .....	64
3.4.1.2. Modelo Cox-Ingersoll-Ross .....	65
3.4.2. Modelos de Estrutura Temporal para Títulos em Risco de Default .....	69
3.4.2.1. Modelo de DUFFIE-SINGLETON .....	70
3.4.2.2. Modelo de DUFFIE-PEDERSEN-SINGLETON.....	72
<b>4. APLICAÇÃO DO MODELO DUFFIE-SINGLETON PARA TÍTULOS PÚBLICOS FEDERAIS (LFTs).....</b>	<b>75</b>
4.1. Especificação do Modelo para a Estrutura Temporal dos Spreads de Crédito Soberano.....	76
4.2. Estimação do Modelo para a Estrutura Temporal dos Spreads de Crédito Soberano.....	79
4.2.1. Estimação por Máxima Verossimilhança.....	79
4.2.2. Estimação por Aproximação da Função de Máxima Verossimilhança.....	81
4.2.3. Funções Densidade de Probabilidade.....	82
<b>5. ANÁLISE DE DADOS .....</b>	<b>83</b>
5.1. Processo $r(t)$ : taxa de juros intercambiária para 360 dias.....	83
5.2. Processo $v(t)$ : volatilidade estocástica de taxa de juros interbancária.....	83
5.3. Processo $s(t)$ : spread de crédito das LFTs.....	84
5.4. Modelo de dois fatores para Estrutura Temporal.....	85
5.5. Teste de Razão de Verossimilhança para preço de mercado do Risco de Crédito.....	86
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>91</b>

<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>93</b>
---------------------------	-----------

## **ÍNDICE DE GRÁFICOS**

Gráfico 1: Spread de Crédito das LTFs.....	10
Gráfico 2: Taxas de juros interbancárias à vista .....	36
Gráfico 3: Taxas de juros interbancárias a termo .....	36
Gráfico 4: Trajetória para Processos Estocásticos de interesse.....	88
Gráfico 5: Taxa de Juros Intercambiária.....	88
Gráfico 6: Volatilidade Estocástica $v(t)$ da taxa de juros. Período: janeiro de 1999 – junho de 2004.....	89
Gráfico 7: Volatilidade Estocástica $v(t)$ da taxa de juros. Período: janeiro de 2001 – junho de 2004.....	89
Gráfico 8: Spread de Crédito sobre LFTs.....	90

## **ÍNDICE DE TABELAS**

Tabela 1: Especificações Alternativas para o processo de taxa de juros em modelos de um fator para a estrutura temporal.....	63
Tabela 2: Especificações Alternativas para o processo de taxa de juros em modelos multifatoriais para a estrutura temporal.....	68
Tabela 3: Estatística descritiva dos processos.....	84
Tabela 4: Funções utilizadas no software Matlab, versão 6.1.....	85
Tabela 5: Parâmetros estimados por máxima verossimilhança.....	86
Tabela 6: Teste de Razão Verossimilhança.....	86

## **ÍNDICE DE FIGURAS**

Figura 1: Fluxo de Caixa do Investidor de um Título Bullet Pré-fixado.....	16
Figura 2: Fluxo de Caixa do Investidor – Título de Taxas Pós-fixadas.....	17
Figura 3: Fluxo de Caixa do Investidor – Título com Capitalização de Juros.....	17
Figura 4: Taxa de Juros a Termo.....	29

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1. Situação Problema

De acordo com ARAÚJO (2002: 9), a Lei 4.595, de 31 de dezembro de 1964, em seu artigo 10º., outorgou ao Banco Central do Brasil (BC) a atribuição de efetuar, como instrumento de política monetária, operações de compra e venda de títulos públicos federais, conhecidas como operações de mercado aberto.

Em 1979, segundo LOUREIRO E BARBOSA (2003: 12), buscando maior segurança para estas operações, o BC criou o Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), mecanismo pelo qual os títulos públicos passaram a ser negociados sob a forma escritural, com as operações liquidadas via sensibilização de reservas bancárias das instituições junto ao BC.

Devido à crise do petróleo na década de 70, o país sofreu os efeitos da inflação e do esgotamento das suas fontes de financiamento externo, o que levou o governo a promover, além da maxidesvalorização em dezembro de 1979, uma série de medidas unilaterais com respeito à manutenção de contratos da dívida pública federal, que resultaram em severas perdas para os investidores.

A atuação governamental no gerenciamento da dívida pública, através de expurgos e quebras contratuais, acabou por afetar a confiança da sociedade em sua capacidade de pagamento, bem como na sua vontade de pagar as suas obrigações, e introduziu o chamado **prêmio de risco** para a compra de títulos públicos, terminologia utilizada neste trabalho.

Dentre as medidas adotadas, segundo LOUREIRO E BARBOSA (2003: 12) estão a prefixação dos juros (em um ambiente de taxas crescentes), mudanças de cálculos da correção monetária e de indexadores, tributação diferenciada de ganhos dos

investidores na maxidesvalorização, troca involuntária de títulos, assim como a moratória de sua dívida junto a credores internacionais em 1987.

Em face do maior prêmio de risco exigido pelo mercado, o BC lançou em 1988 as Letras Financeiras do Tesouro (LFT), indexando parte de sua dívida mobiliária às altas taxas de juros *overnight* da época.

O Plano Collor, em março de 1990, foi o ícone do confisco da dívida pública no Brasil. Baseado na premissa de que a inflação decorria desta indexação da dívida e de um excessivo estoque de ativos financeiros líquidos em poder do público, o BC congelou 80% dos haveres financeiros, que passaram a render compulsoriamente correção monetária mais 6% a.a.

Esta medida possibilitou o alongamento do prazo médio de vencimento e dos encargos de serviço da dívida pública. O custo maior foi a perda total da confiança na manutenção das regras e o crescimento dos índices de inflação levaram a uma exigência maior por prêmios de risco nos títulos públicos federais, refletida também nas taxas básicas referenciais de juros.

Após o Plano Real em 1994, o BC adotou uma âncora cambial, atrelando a moeda à taxa de câmbio, e monetária, mantendo uma política de juros reais elevados, a fim de atrair capital estrangeiro. A dificuldade de aprovar medidas fiscais e reformas estruturais da economia fez com que a dívida pública crescesse 288% em termos reais entre os anos de 1995 e 1998.

A rigidez da política cambial e o esgotamento das reservas internacionais, e seus efeitos sobre o balanço de pagamentos, forçou o governo a abandonar o regime de câmbio fixo e a permitir a flutuação da taxa de câmbio em janeiro de 1999.

Devido à oferta de hedge cambial através de títulos indexados à taxa de câmbio e da atuação do BC no mercado futuro de dólar na BM&F, bem como o estoque de LFTs,

a dívida mobiliária brasileira tornou-se muito sensível a variações nas taxas de juros de curto prazo e de câmbio. Esta combinação de fatores elevou a dívida líquida do setor público a 67% do PIB durante a crise pré-eleitoral em setembro de 2002.

Este significativo crescimento trouxe à discussão o debate quanto à solvência do setor público. Uma dívida crescente, leva o mercado financeiro a exigir prêmios de risco cada vez maiores, ao questionar a capacidade de financiamento do governo e sua habilidade de rolar sua dívida sem a já conhecida quebra de contratos de suas obrigações.

O gráfico 1 mostra a evolução do prêmio de risco das LFTs na crise de 2002, medido através do excesso de retorno anual sobre a taxa SELIC para o investidor nestes títulos, conhecido como *spread* de crédito.

Até maio de 2002, objetivando o financiamento da dívida pública, o BC permitia que Fundos de Investimento Financeiro (FIFs) comprassem títulos públicos para suas carteiras e os contabilizassem por seu custo de aquisição e sua respectiva curva de rendimento nesta data.

Este procedimento visava reduzir a variabilidade do preço destes ativos, permitindo que os FIFs fizessem um investimento, que acarretaria baixa volatilidade em suas cotas. Porém, devido ao aumento do *spread* de crédito, principalmente nos títulos de vencimento mais longo, como mostra o gráfico referente à LFT de um ano de prazo na Figura 1, estes FIFs criaram grandes descasamentos entre ativos e passivos.

Os passivos destes fundos têm como referência o horizonte de investimento dos seus cotistas, a saber, a maior parte deles visava uma rentabilidade de curto prazo. O prazo de seus ativos seria o prazo de vencimento de títulos apurados na sua curva de rendimento, ou curto prazo para ativos contabilizados a mercado, uma vez que os títulos têm liquidez no mercado secundário.

Desta forma, para evitar um aumento das diferenças já existentes em maio de 2002, entre o valor de mercado de seus ativos e o valor contábil das cotas de FIFs, o BC obrigou que todos os fundos de investimentos contabilizassem seus ativos e passivos por seus valores a mercado, acarretando grandes perdas contábeis para seus cotistas e um forte movimento de venda dos títulos públicos.

Apesar de os *spreads* de crédito serem mensuráveis, como disposto na Figura 1, uma dificuldade existente na avaliação do prêmio de risco é que algumas das variáveis envolvidas não são observáveis, na ausência efetiva de um evento de *default*, como por exemplo, qual o valor de recuperação de um título sujeito a uma reestruturação de dívida por parte do devedor? Como transformar uma medida de mercado, o spread de crédito, em um risco de *default*, que possa ser aplicado em outros títulos do mesmo emissor? Estes problemas não triviais são tratados pela abordagem proposta neste trabalho.

Os fluxos de caixa prometidos por um título público podem ser descontados usando uma taxa de juros de curto prazo, ajustada ao risco de *default*, que reflete a taxa média de ocorrência ou proximidade de um evento de crédito, além das perdas de valor de mercado associadas a ele.

Ocorre que o risco de *default* é não observável e, portanto, não mensurável diretamente das variáveis macroeconômicas ou da situação política do país. A única informação disponível é o preço de mercado destes títulos e é nela que se baseia a metodologia aqui apresentada.

Vale lembrar que este risco deve ser único para dois ativos emitidos pelo governo e paguem um fluxo de caixa na mesma data. Logo, o risco de *default* de um título de dois anos de prazo deve ser a soma do risco de um título de vencimento em um ano, mais o risco de um investidor carregá-lo no seu segundo ano de vida.



Este raciocínio leva ao desenvolvimento de uma estrutura temporal para o risco de crédito, de forma semelhante à construção de uma estrutura temporal para as taxas de juros livres de risco (de crédito).

Uma dificuldade latente para o trabalho, para a sorte do investidor em títulos brasileiros, é a ausência de um evento de *default* na história recente.

Uma vez que este problema afeta a instituições financeiras, administradores de recursos e investidores em geral, assim como o outro lado interessado, o emissor da dívida pública, o governo, a busca de metodologias mais simples para a avaliação do preço de mercado pelo risco de crédito é um terreno a ser ainda bastante explorado nos próximos anos.

## 1.2. Objetivo do Trabalho

O **objetivo principal** do trabalho é testar o modelo de estrutura temporal para os *spreads* de crédito implícitos nos preços das LFTs no período entre janeiro de 2001 e março de 2004, conforme especificação de DUFFIE, PEDERSEN E SINGLETON (2003: 133) testada para títulos da Rússia.

O modelo acima parte da metodologia construída por DUFFIE E SINGLETON (1999: 694), que adapta os modelos de estrutura temporal de taxas de juros com vários fatores, tais como o de COX, INGERSOLL E ROSS (1985: 398), a fluxos de caixa prometidos por um título público sujeito ao risco de crédito, os quais podem ser descontados usando uma taxa de juros de curto prazo ajustada ao risco de *default*.

Busca-se identificar uma relação entre a taxa de desconto ajustada ao risco e dois fatores de risco da sua estrutura temporal: a taxa de juros de referência ou livre de risco e o *spread* de crédito.

Para atingir o objetivo principal do trabalho, utiliza-se preços de mercado de LFTs e de swaps de taxas prefixadas para estimar os parâmetros de interesse, que definem a trajetória dinâmica do modelo.

O **objetivo secundário** do trabalho é testar a significância do preço de mercado do risco de crédito associado ao modelo estimado.

As LFTs empregadas neste estudo são títulos emitidos pelo Tesouro Nacional, que possuem rendimentos flutuantes, definidos por 100% da taxa SELIC diária sobre o valor de seu principal atualizado diariamente.

### 1.3. Justificativa do Tema

O tema deste trabalho é a construção de um modelo em tempo contínuo para identificar a estrutura temporal dos *spreads* de crédito de títulos de dívida soberana sujeitos a risco de crédito (*default*), utilizando-se seus preços de mercado.

Modela-se o processo para a taxa de desconto ajustada ao risco de *default* como a soma algébrica de dois fatores: (i) a taxa de juros interbancária; (ii) e o *spread* de crédito do título público.

Ao identificar a estrutura temporal para *spreads* de títulos de dívida federal doméstica, de acordo com DUFFIE, PEDERSEN E SINGLETON (2003: 120), pode-se também:

- (i) Avaliar títulos do mesmo emissor, mas com cláusulas contratuais distintas. Verifica-se quais expectativas de mercado para a ocorrência de um evento de *default* ou para perdas associadas a cada título. Por exemplo, pode-se comparar títulos da dívida local com os da dívida externa.
- (ii) Avaliar títulos de mesmo emissor e com as mesmas cláusulas contratuais, mas com fluxos de caixa distintos, como por exemplo, LFTs remuneradas

com base na taxa SELIC com Notas do Tesouro Nacional (NTN) indexadas ao Índice Geral de Preços do Mercado (NTN-C) ou com NTN's indexadas à taxa de câmbio (NTN-D).

- (iii) Medir as correlações destes *spreads* com várias séries temporais macroeconômicas, a fim de identificar seus fatores determinantes.

A identificação do *spread* de crédito é o primeiro passo para proceder com os testes acima. Porém, ao contrário dos títulos de dívida da Rússia durante o período analisado por DUFFIE, PEDERSEN E SINGLETON (2003: 119), o qual inclui a reestruturação parcial da dívida local e sua moratória externa, não há na história recente brasileira dados de mercado que incluam um destes eventos de crédito.

Por causa do período de análise de dados, o trabalho de DUFFIE, PEDERSEN E SINGLETON (2003: 119) traz resultados interessantes para a integração entre mercados (dívidas interna e externa), avaliação e liquidez relativa dos diferentes títulos, taxa esperada de recuperação sob um evento de *default*, bem como a expectativa implícita (pelo mercado) de diferentes cenários de *default*.

Por último, o trabalho comprova a correlação negativa entre o *spread* russo e o nível de suas reservas internacionais e também com o preço de mercado do petróleo, *commodity* importante nas exportações russas.

Em suma, resta a dúvida se esta metodologia fornece bons resultados dadas as particularidades do mercado doméstico brasileiro. Mas a identificação de uma especificação adequada amplia os campos de estudo nesta área.

#### **1.4. Metodologia do Trabalho**

A pesquisa a ser realizada terá como base a pesquisa bibliográfica, as práticas de negociação no mercado financeiro brasileiro e uma aplicação prática neste mercado.

A pesquisa bibliográfica constitui um suporte teórico ao trabalho, abordando os principais desenvolvimentos e contribuições ao tema desenvolvido.

O conhecimento das práticas do mercado financeiro brasileiro visa possibilitar uma abordagem voltada às peculiaridades deste mercado, no qual a aplicação prática permitirá uma comprovação da teoria e modelos propostos na realidade brasileira.

O método de abordagem da pesquisa é o hipotético-dedutivo, o qual segundo LAKATOS e MARCONI (1991: 95), parte-se de um problema, ao qual aplica-se uma solução provisória ou teoria tentativa, e busca-se uma negação ou comprovação empírica desta teoria, com objetivo de eliminar o erro.

Assim, este trabalho utiliza um método de procedimento estatístico, de acordo com LAKATOS e MARCONI (1991: 108), “que permite obter, de conjuntos complexos, representações simples e constatar se essas verificações simplificadas têm relações entre si.”. O método estatístico fornece uma descrição quantitativa do todo, juntamente com um método de experimentação e prova. Assim são classificados os trabalhos orientados pelo delineamento experimental, ou quase-experimental com uso de levantamento de amostras e análise estatística para validação de hipóteses.

Esta pesquisa também pode ser vista como positivista, pois segundo MARTINS (1997: 28), as pesquisas consideradas positivistas utilizam fundamentalmente como técnicas de investigação os estudos descritivos, ou ainda, “têm por objetivo descrição das características de determinada população ou fenômeno, bem como o estabelecimento de relações entre variáveis e fatos”.

Enfim, a pesquisa pode ser classificada, de acordo com LAKATOS e MARCONI (1991: 188) como exploratória, que visa fornecer ao pesquisador um maior conhecimento sobre o tema em perspectiva, e como conclusivo-descritiva, que possui objetivo bem definido, bem estruturada e dirigida para a solução de problemas ou avaliação de alternativas ou cursos de ação.

Quanto ao método de abordagem:

- define-se o problema, a identificação da estrutura temporal de *spreads* de crédito;
- especifica-se a estrutura temporal conforme sugestão de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 133);
- estima-se o modelo;
- formula-se as hipóteses para testar o modelo.

Quanto ao plano de trabalho, tem-se que:

- tabela-se os dados secundários referentes às cotações dos títulos públicos federais negociados no mercado secundário, bem como às taxas de juros negociadas para aplicações interbancárias de prazos equivalentes, dados obtidos junto à ANDIMA e ao sistema Bloomberg de difusão de cotações de mercado;
- utiliza-se a metodologia descrita em VAN HORNE (1991: 105), para se decompor a curva de juros e os rendimentos dos títulos públicos em questão;
- estima-se os parâmetros da estrutura temporal para as taxas de juros e para o risco de crédito de títulos públicos, de acordo com os modelos de três fatores de risco de COX, ROSS e RUBINSTEIN (1985: 398) e DUFFIE, PEDERSEN E SINGLETON (2003: 133);
- testa-se a hipótese nula: o preço de mercado do risco de crédito das LFTs é igual a zero.

### **1.5. Descrição dos Capítulos**

Neste primeiro capítulo procurou-se dar uma idéia da situação problema e dos objetivos deste estudo.

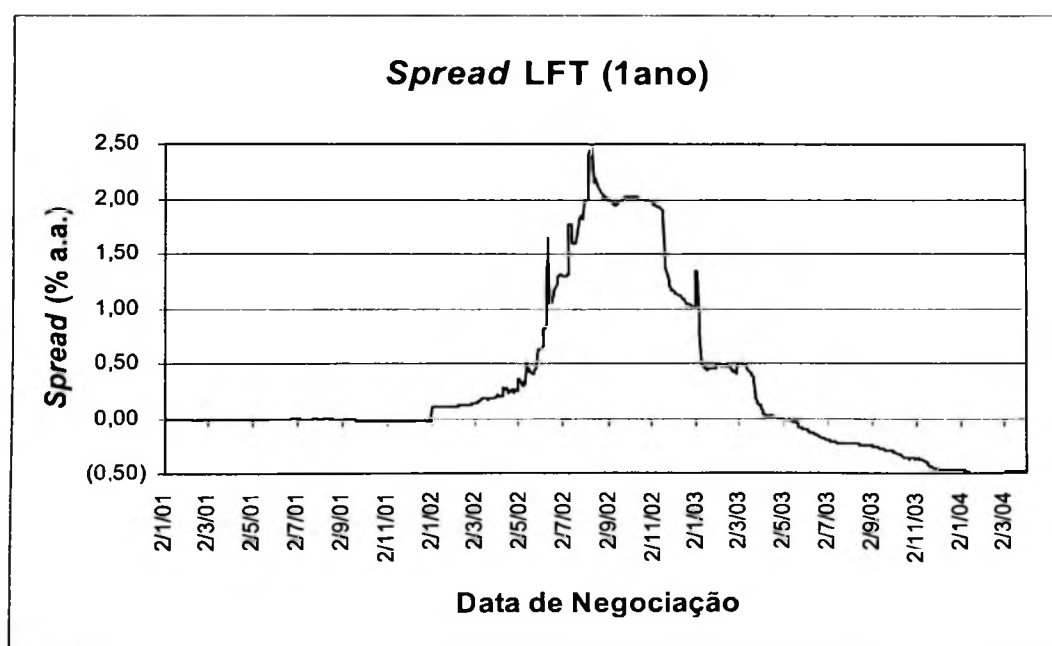
O capítulo 2 descreve a teoria de formação de preços de títulos públicos no Brasil.

O capítulo 3 contém a fundamentação teórica presente nos modelos de avaliação de ativos financeiros em tempo contínuo, objetivando alcançar a descrição dos principais modelos para a estrutura temporal das taxas de juros e as metodologias adaptadas a ativos sujeitos ao risco de crédito.

O capítulo 4 especifica o modelo utilizado no trabalho para a avaliação da estrutura temporal de *spreads* de crédito e descreve o método de estimação utilizado e outros métodos alternativos.

O capítulo 5 analisa os dados e resultados obtidos e, finalmente, são apresentadas as considerações finais.

**Gráfico 1: *Spread* de Crédito das LFTs - prazo de vencimento de 1 ano; período de Jan 2001 a Jan 2004. (Fonte: Andima, [www.andima.com.br](http://www.andima.com.br) )**



## 2. A TEORIA DE FORMAÇÃO DE PREÇOS DE TÍTULOS DE RENDA FIXA

### 2.1. Características dos Títulos de Renda Fixa

#### 2.1.1. Definição

Títulos de renda fixa são, geralmente, caracterizados como uma obrigação do seu emissor de pagar ao investidor um fluxo de caixa contratado. De acordo com FABOZZI (1996: 1), “um título de renda fixa é um instrumento de dívida, que exige do seu emissor (devedor) o pagamento ao investidor (credor) a quantia emprestada mais juros sobre um período de tempo especificado.”.

Segundo REILLY (1994: 443), “títulos de renda fixa são obrigações de dívida emitidas em denominações acessíveis, para venda a indivíduos e instituições financeiras de forma direta”. E ainda, “são considerados títulos de renda fixa, pois impõem obrigações financeiras fixas aos seus emissores, que concordam em: (i) pagar uma quantia fixa de juros periodicamente ao investidor; (ii) quitar um montante de principal na data de vencimento.”

ROSE (2000: 815) define títulos de dívida como “uma reivindicação financeira sobre os ativos de uma empresa, de um indivíduo ou unidade governamental, representada por bônus, garantias e outros contratos evidenciando um empréstimo de recursos”.

Ainda sobre as características destes títulos, FABOZZI (1996: 1) define: “a data na qual é exigido o pagamento do valor principal é chamada de **vencimento** do título, e a um investidor que o mantenha até sua data de vencimento é garantido um conhecido fluxo de caixa.”.

De acordo com ELTON e GRUBER (1995: 494), um título de renda fixa é mais facilmente avaliado do que uma ação, pois o emissor assumiu a obrigação de um fluxo de caixa de pagamentos (cupons de juros e principal), além de haver uma vida máxima (vencimento).

Porém, dois fatores levam a uma certa dificuldade na sua avaliação: (i) as datas deste fluxo de caixa tornaram-se mais variáveis e, com isso, maior incerteza nos pagamentos; (ii) a volatilidade das taxas de juros e os efeitos da relação preço-rentabilidade dos títulos.

### **2.1.2. Classificação dos Títulos quanto aos Emissores**

De acordo com FABOZZI (1996: 3), o emissor do título é uma característica-chave de um título de renda fixa. E há alguns tipos de emissores: Governo Federal ou o Tesouro Nacional, as agências governamentais, Governos Estaduais e Municipais, e entidades privadas, firmas de capital privado ou estatal.

O risco da inadimplência de um emissor sobre seus fluxos de caixa prometidos é conhecido como **risco de *default*** ou **risco de crédito do título**, e por causa deste risco, títulos com risco de *default* são negociados no mercado a um preço inferior àqueles livres de risco de crédito, para uma mesma data de vencimento, ou seja, prometem uma taxa de rendimento maior sobre o valor emprestado.

Para comparar o risco de *default* de emissores distintos, este risco é ordenado por agências de classificação de risco de crédito, conhecidas como agências de *rating*. De acordo com VAN HORNE (1990: 181), tal julgamento é feito desde a emissão do título até seu vencimento e, por esta análise, o emissor paga uma taxa de serviços à agência de *rating*.



### **2.1.3. Classificação dos Títulos quanto ao seu Vencimento**

O prazo de vencimento de um título é, de acordo com FABOZZI (1996: 3), o período de tempo sobre o qual o emissor promete cumprir as condições de uma obrigação. O vencimento de um título refere-se à data, a partir da qual a dívida deixa de existir, na qual o emissor irá resgatar o título ao pagar o seu valor principal.

Geralmente, o vencimento de um título é fixado na sua data de emissão, mas em alguns casos, há títulos com cláusulas de recompra por parte do emissor, conhecidas como *call* ou uma opção de compra do emissor, e outros, com cláusulas de resgate antecipado por opção do investidor, conhecidas como *put* ou opção de venda do investidor.

FABOZZI (1996: 3) atribui três razões para a importância do prazo de vencimento de um título de renda fixa: (i) indica o período de tempo sobre o qual o investidor espera receber seus pagamentos de cupom de juros e o período antes do pagamento do principal; (ii) a rentabilidade do título irá depender do prazo de vencimento; e (iii) o preço de um título irá variar durante toda a sua existência, sempre que sua rentabilidade esperada pelo mercado for alterada. A magnitude destas variações depende de seu prazo de vencimento, ou seja, quanto mais distante seu vencimento, maior será a variabilidade de seu preço de mercado.

### **2.1.4. Formas de Amortização**

O **valor principal**, ou simplesmente principal, do título é a quantia que o emissor concorda em pagar ao investidor até a data de vencimento. As diversas formas de amortização diferem com respeito à distribuição dos pagamentos de principal ao longo da vida do título.

A forma mais comum é a amortização única na data de vencimento, conhecida como *bullet*, quando o emissor paga 100% do valor principal na data de resgate da obrigação.

O **Sistema de Amortização Francês** é mais conhecido no Brasil como Sistema da Tabela Price, e consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento, é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de amortização de principal.

Os empréstimos a pessoas físicas no Brasil empregam esta forma de amortização, tanto para financiamento imobiliário como para bens de consumo, tais como eletrodomésticos, móveis e automóveis. Desta forma, o desembolso mensal do tomador de empréstimo é constante, o que facilita seu planejamento financeiro.

Outra forma é o **Sistema de Amortizações Constantes**, cuja principal característica é a amortização constante e periódica do saldo devedor do empréstimo. Por exemplo, um empréstimo de prazo de vencimento em 60 meses poderá ser amortizado em 60 parcelas iguais a 1/60 do valor principal original. As taxas de juros incidirão sobre o saldo devedor atualizado e, desta forma, o valor das parcelas será decrescente, juntamente com o saldo do empréstimo e os juros sobre cada período.

Por fim, em títulos de renda fixa utiliza-se também o **Fundo de Amortização** ou *Sinking Fund*, cujas amortizações são pré-definidas, mas irregulares, a fim de permitir maior capacidade de pagamento ao emissor do título.

#### **2.1.5. Formas de Pagamentos de Juros**

O **cupom de juros** de um título é a taxa de juros que o emissor se compromete a pagar ao investidor anualmente sobre todo o valor principal da obrigação. Há títulos,

por exemplo, com cupom de 10% a.a., 6% a.a., 3% a.a. ou até mesmo sem cupom de juros, conhecidos como títulos de cupom zero ou de desconto.

Esta denominação vem do fato de que, por exigirem uma rentabilidade, títulos sem pagamento de cupom de juros devem ser negociados com desconto sobre seu valor principal, para que um investidor obtenha uma rentabilidade igual ao ganho de capital entre o preço de compra e seu valor de resgate.

Além disso, na existência de um cupom de juros, este pode pagar: (i) uma taxa fixa e determinada, conhecida como pré-fixada, por exemplo, 6% a.a. por toda a vida do título; (ii) uma taxa crescente e determinada, por exemplo 3% a.a. no primeiro ano, 6% a.a. no segundo ano, e 8% a.a. a partir do terceiro ano até o vencimento, conhecido como *step-up coupon*, ou cupons em degraus crescentes; (iii) uma taxa variável e flutuante, conhecida como pós-fixada, por exemplo, 100% da taxa média de Certificado de Depósito Bancário (CDB 30) do primeiro dia do mês, pagos no primeiro dia do mês seguinte; (iv) um cupom de capitalização, onde o cupom de juros contratado, ao invés de ser pago em dinheiro na sua data e frequência de pagamento, é incorporado ou capitalizado ao principal do título a partir daquela data, por exemplo, 100% da taxa média de Certificado de Depósito Interfinanceiro de um dia (CDI-over) pagos no vencimento.

A periodicidade dos pagamentos de juros é a frequência com que o emissor paga o cupom de juros ao investidor. Ela pode ser mensal, trimestral, semestral ou anual, de acordo com a prática comum de mercado.

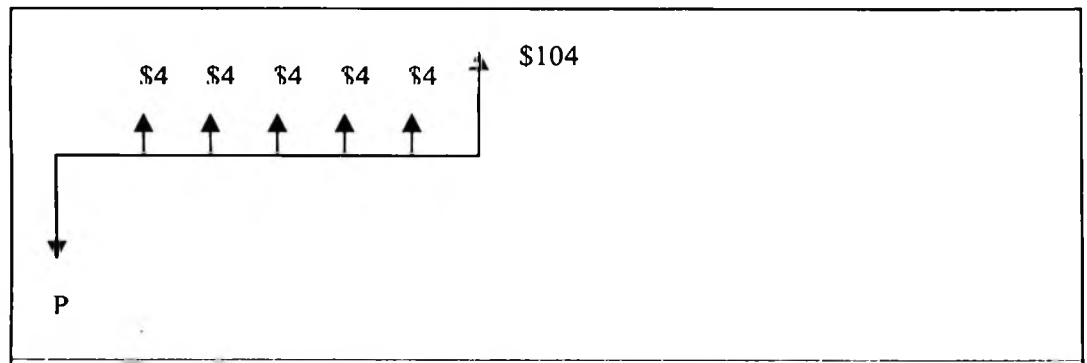
Sejam quais forem as formas de amortização e de pagamentos de juros, elas devem ser refletidas no fluxo de caixa prometido pelo título de renda fixa.

### 2.1.6. Fluxos de Caixa de Títulos com Taxas Pré-Fixadas

Os fluxos de caixa de títulos com cupom de juros fixos e amortização única são os mais comuns nos mercados de renda fixa internacional. Assim são emitidos, por exemplo, os títulos do Tesouro dos EUA, do Governo Japonês, do Governo Alemão, do Reino Unido etc. Nesta situação, o investidor conhece antecipadamente o seu fluxo de caixa.

Supondo um título *bullet* de \$100, cujo prazo de vencimento são 6 períodos semestrais e cupom de juros de 8% a.a., tem-se que o pagamento semestral de juros é de  $\$100 * (8\% / 2) = \$4$ , já que há 2 semestres por ano. Portanto, seu fluxo de caixa é conhecido:

**Figura 1:** Fluxo de Caixa do Investidor de um Título *Bullet* Pré-Fixado.



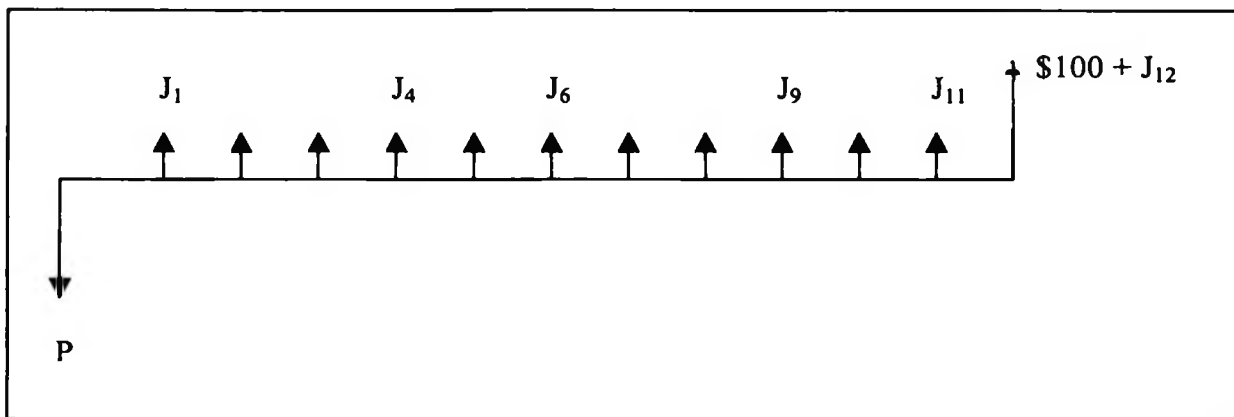
O valor presente do fluxo acima, representado por P, é igual ao valor de mercado deste fluxo de caixa, ou seja, o preço P é o valor presente do fluxo prometido, descontado a uma taxa de desconto apropriada. Naturalmente, o preço P irá depender do valor do cupom de juros, do prazo de vencimento, da forma de amortização e da taxa de desconto adequada a este título.

### 2.1.7. Fluxos de Caixa de Títulos com Taxas Pós-Fixadas

Os fluxos de caixa de títulos pós-fixados são incertos e dependem do nível das taxas de juros. Algumas debêntures de emissão privada utilizam esta forma de remuneração, permitindo que o investidor não exija um prêmio pelo risco de um aumento nas taxas de juros do mercado.

Por exemplo, um título que prometa um cupom de taxa ANBID + 2% a.a., com pagamentos mensais e vencimento em um ano, promete o seguinte fluxo de caixa ao investidor:

**Figura 2:** Fluxo de Caixa do Investidor – Título de Taxas Pós-Fixadas.



Cada pagamento de juros  $J_1, J_2, \dots, J_{12}$  refere-se à taxa média de CDB 30 dias pré-fixada, criada pela Associação Nacional de Bancos de Investimento e Distribuidoras de Valores, conhecida como taxa ANBID, no início de cada período 1, 2, ... , 12. Desta forma,

$$J_{i+1} = 100 \left[ (1 + ANBID_i + 2\%)^{30/360} - 1 \right]$$

Outro tipo de título com taxa pós-fixada são aqueles que remuneram como cupom de juros um percentual da taxa de juros *overnight*. No caso de títulos federais, que

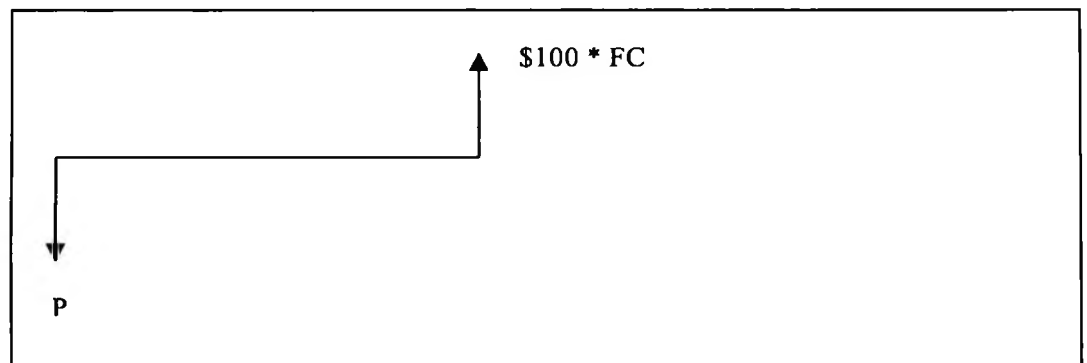
pagam 100% da taxa de juros de 1 dia, apenas no dia do vencimento, há uma capitalização diária de juros sobre o valor principal.

Desta forma, um título com vencimento em um ano, ou 252 dias úteis, que prometa 100% da taxa de juros de 1 dia tem um fluxo de caixa, conforme a Figura 4.

No vencimento, o investidor receberá seu valor de principal inicial multiplicado por um fator de capitalização ( $FC$ ), o qual deve representar todos os rendimentos diários capitalizados diariamente:

$$FC = \prod_{i=1}^{252} (1 + taxa_i)^{1/252}$$

**Figura 3:** Fluxo de Caixa do Investidor – Título com Capitalização de Juros



## 2.2. Rentabilidade de um Título de Renda Fixa

### 2.2.1. O Conceito de Taxas de Juros

De acordo com ARAÚJO (2002: 32):

“Em uma linguagem simplificada, pode-se definir a taxa de juros como o prêmio pelo qual os agentes econômicos, em favor de

acréscimos no consumo futuro de bens e serviços, aceitam suprimir parcela do consumo presente de bens e serviços. Nesse sentido, parcela dos agentes aceitam guardar (poupar) uma fração de sua renda presente. De modo simétrico, a taxa de juros pode ser entendida como a taxa que os agentes econômicos estão dispostos a pagar para antecipar consumo futuro de bens e serviços.”

Na realidade, segundo ARAÚJO (2002: 33), a troca de recursos entre agentes econômicos acontece de maneira indireta, por intermédio de compra e venda de moeda. Ao comprar um título de crédito de vencimento em um ano, um indivíduo está comprando moeda para entrega futura em um ano. O entregador desta moeda é o emissor do título, que aceita pagar uma remuneração pela utilização de moeda por um ano.

De acordo com ROSE (2000: 243), **taxa de juros** é o preço cobrado de um tomador de empréstimo pelos recursos disponibilizados. Segundo o autor, este preço é único por ser a razão entre duas quantidades: a taxa de serviço cobrada pelo prestador pelo uso de crédito por um determinado período de tempo e o volume de crédito disponível ao tomador.

Taxas de juros são usualmente expressas em taxa percentual ao ano, mesmo para períodos inferiores a um ano.

Portanto, taxa de juros é a taxa de retorno anual prometida pelo tomador de dinheiro ao seu prestador como uma das condições para levantar os recursos. Porém, ela não é a melhor representação da rentabilidade para o investidor durante a vigência do empréstimo. A rentabilidade observada ou taxa de retorno para o prestador e a taxa de juros acordada junto ao devedor podem ser bastante diferentes. Logo, há a necessidade de explorar algumas das medidas de rentabilidade ou de taxa de retorno.

### 2.2.2. Medidas de Rentabilidade Esperada

Para o propósito de avaliação e comparação de títulos de renda fixa, há a necessidade de se medir a expectativa de rentabilidade gerada por estes títulos. Para ilustração desta necessidade, considere dois títulos de 5 anos de prazo de vencimento e com cupons semestrais de 12% a.a. O primeiro título é mais bem avaliado pelo mercado, que o negocia a \$110 ou 110% do seu valor principal. Enquanto que o segundo, pode ser comprado a \$85 para cada \$100 de principal. Esta situação mostra que dois títulos com mesmas características, ou seja, data de vencimento e cupom de juros, podem ter preços diferentes, de acordo com sua avaliação.

Segundo ROSE (2000: 247), “o valor de um título de dívida depende da sua taxa prometida (cupom de juros) relativamente a taxas de juros vigentes no mercado para títulos com qualidade (emissor) e condições (cupom e vencimento) comparáveis”.

No entanto, várias destas medidas aparecem na literatura. Uma bastante popular, segundo ROSE (2000: 246), é a **rentabilidade corrente** (*current yield - CY*), que mede a razão entre a renda auferida no período e preço de mercado deste título.

Para o exemplo acima, o primeiro título teria  $CY_1 = \$12/\$110 = 10,91\%a.a.$ , enquanto que o segundo,  $CY_2 = \$12/\$85 = 14,12\%a.a.$  A interpretação desta medida é a renda anual recebida através do pagamento de juros em relação ao capital investido, sem considerar um eventual ganho de capital.

Alternativamente, a medida de taxa de retorno mais amplamente aceita é a **rentabilidade até o vencimento** (*yield to maturity - YTM*), que é a taxa de desconto que iguala o valor presente do seu fluxo ao preço de mercado. Portanto, é a taxa interna de retorno (TIR) recebida por investir em um título hoje e manter este



investimento até o seu vencimento, reinvestindo o seu fluxo de caixa à mesma taxa YTM.

$$P = \frac{\$6}{\left(1 + \frac{YTM}{2}\right)} + \frac{\$6}{\left(1 + \frac{YTM}{2}\right)^2} + \dots + \frac{\$6}{\left(1 + \frac{YTM}{2}\right)^9} + \frac{\$106}{\left(1 + \frac{YTM}{2}\right)^{10}}$$

Para o exemplo acima, o primeiro título teria  $YTM_1 = 9,44\%a.a.$  , enquanto que o segundo,  $YTM_2 = 16,52\%a.a.$  O inconveniente desta medida, de acordo com ELTON e GRUBER (1995: 499), é a premissa de que é possível reinvestir todos os fluxos de caixa futuros a esta mesma taxa. Outro, segundo ROSE (2000: 247), é que nem sempre o investidor busca investir em um título até seu vencimento, que pode ocorrer em 30 anos, por exemplo.

Uma forma de modificar a medida de rentabilidade acima é estimar uma **taxa de retorno esperada ou observada** (recebida) durante um período ou horizonte de investimento, incluindo o ganho ou perda de capital referente à diferença entre preços de compra e venda do título, assim como a renda recebida de cupons de juros durante o investimento.

Para calcular a taxa de retorno de um título, ganha importância a forma de estimar seu preço de mercado em qualquer instante futuro.

### 2.2.3. O Preço de Mercado de um Título de Renda Fixa

Uma das funções da teoria apresentada neste trabalho é a avaliação dos instrumentos financeiros no seu preço de mercado. Parte destes instrumentos são negociados diariamente tanto em bolsas quanto no mercado de balcão, permitindo uma transparência quanto ao seu valor de mercado atualizado. No entanto, há também vários instrumentos que não apresentam um mercado secundário ativo, de forma que sua valorização deve ser feita a partir de modelos de precificação, que possibilitem estimar o valor pelo qual o mercado negociaria este título, o seu **preço de mercado**.

De acordo com FABOZZI (1996: 18), “o preço de qualquer instrumento financeiro é igual ao valor presente dos fluxos de caixa esperados deste instrumento. Então, para determinar seu preço são requeridas: (i) uma estimativa dos fluxos de caixa estimados; (ii) uma estimativa da taxa de rendimento apropriada.”.

No caso de títulos de renda fixa de um mesmo emissor, o modelo de precificação básico consiste na identificação de uma estrutura temporal de taxas de juros, que deve refletir a avaliação de mercado para os instrumentos em questão. O preço de mercado é obtido pelo cálculo do valor presente dos fluxos de caixa trazidos por esta estrutura temporal de taxas de juros.

Seja o preço  $P(t, T)$ , o preço de um título no instante de tempo  $t$ , e com pagamento assegurado  $X$  na sua data de vencimento  $T$ , onde  $t \leq T$ . O preço deste título na data de vencimento é dado por:

$$P(T, T) = X \quad (2.1)$$

O preço  $P(t, T)$  pode ser calculado em tempo contínuo, mesmo que a taxa de juros sem risco no período de  $t$  a  $T$  seja variante no tempo, bastando ser conhecida,  $R(t, T)$ :

$$P(t, T) = X \exp\left(-\int_t^T R(t, T) dt\right) \quad (2.2)$$

#### 2.2.4. O Conceito de Retorno

Como notado anteriormente, há problemas em utilizar as medidas tradicionais de rentabilidade. É preciso então definir o conceito de retorno. O **retorno**, durante um período ou horizonte de investimento, inclui o ganho ou perda de capital referente à diferença entre preços de compra e venda do título, juntamente com o rendimento de cupons de juros durante o investimento.

$$RET_t = \frac{P(t,T) + PMT((t-1), t)}{P(t-1, T)} \quad (2.3)$$

onde,  $RET_t$  é o retorno do ativo na data  $t$ ,  $PMT((t-1), t)$  é o fluxo de caixa gerado pelo ativo entre os instantes de tempo  $t-1$  e  $t$ . Para títulos que não pagam cupom, o retorno seria apenas:

$$RET_t = \frac{P(t,T)}{P(t-1, T)} \quad (2.4)$$

A **taxa de retorno** de um título durante um período ou horizonte de investimento é:

$$R(t) = RET_t - 1 \quad (2.5)$$

Alternativamente, a taxa de retorno de um título no intervalo entre os instantes de tempo  $t-1$  e  $t$  é:

$$R(t-1, t) = -\log\left(\frac{P(t-1, T)}{P(t, T)}\right) \quad (2.6)$$

No sistema de taxas de juros continuamente capitalizadas, a trajetória da taxa de retorno instantânea  $r(t)$ , se esta for conhecida com certeza, define a taxa de retorno no período entre os instantes de tempo  $t$  e  $T$ :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Porém,  $r(t)$  é de natureza estocástica, o que leva à representação dada inicialmente por VASICEK (1977: 179):

$$R(t, T) = \mathbb{E}_t \left[ \frac{1}{T-t} \int_t^T r(\tau) d\tau \right] + \pi(t, T, r(t)) \quad (2.8)$$

A função  $\pi$  é definida de acordo com as diversas teorias sobre a estrutura temporal de taxas de juros apresentadas a seguir.

### 2.3. Estrutura Temporal das Taxas de Juros

REILLY (1995: 505) define: “A estrutura temporal das taxas de juros, também conhecida como curva de juros, é uma função estática que relaciona prazo ao vencimento e YTM para uma amostra de títulos de mesmo emissor em um dado instante de tempo.”

De acordo com a definição acima, a curva de juros representa uma sessão cruzada de rentabilidades de títulos comparáveis, ou de mesma qualidade, mas de prazos de vencimentos diferentes. Desta forma, pode-se construir uma curva para cada classe de ativos, por exemplo, títulos públicos, taxas interbancárias, títulos de empresas industriais de primeira linha etc.

A utilidade da estrutura temporal de taxas de juros é servir de base para a precificação de títulos de renda fixa comparáveis e fornecer subsídios para a apuração de valor de mercado dos fluxos futuros de outros instrumentos, com o objetivo de trazê-los a valores presentes.

A forma da curva de juros, segundo REILLY (1995: 507), pode ser: crescente ou positivamente inclinada; declinante ou invertida; constante (*flat*); e corcovada, quando o rendimento de títulos de prazos intermediários são superiores aos de curto prazo e aos de longo prazo.

De acordo com VAN HORNE (1991:104), estas diferentes formas dependem das expectativas dos agentes econômicos com respeito à trajetória futura das taxas de juros. Há controvérsias, porém, sobre outros fatores de influência sobre a curva de juros.

Inicialmente, apresenta-se a seguir as teoria de formação de taxas de juros: a partir da utilização da hipótese das expectativas, onde a estrutura temporal é inteira e unicamente explicada pelas expectativas de taxas de juros futuras, considera-se

teorias adicionais para a explicação da relação entre rendimentos e prazos dos títulos de renda fixa.

### **2.3.1. Processo de Formação das Taxas de Juros**

Segundo VAN HORNE (1991:103), a estrutura de retornos de qualquer tipo de instrumento de renda fixa é composta basicamente por três fatores de risco financeiro: a taxa de juros básica de mercado, o prêmio pela liquidez e o prêmio pelo risco de crédito.

Segundo REILLY (1995: 506), a **hipótese das expectativas** assume que a forma da curva de juros resulta das expectativas de taxas de juros futuras de todos os participantes do mercado. Mais especificamente, “qualquer taxa de juros de longo prazo representa a média geométrica entre taxas de juros atuais e futuras esperadas de ocorrer durante a vida do título”.

Alternativamente, VAN HORNE (1991:104) denomina esta hipótese de **teoria das expectativas puras**, e estabelece, “que a taxa de retorno esperada por um período de tempo em um investimento é a mesma, independente do prazo do título no qual se investe.”

Ou seja, se um investidor decide por uma aplicação de recursos por um ano de prazo, não há diferença entre investir em um título de vencimento final em um ano ou em um outro, com vencimento final em dois anos, e vendê-lo ao final do primeiro ano. No momento do investimento inicial, o retorno esperado no período de investimento é o mesmo para todos os títulos, independentemente de seus prazos de vencimento.

Ao ampliar o exemplo anterior, pode-se considerar que o investidor tem uma terceira alternativa de investimento: aplicar recursos por seis meses de prazo e renovar este investimento por outros seis meses após seu vencimento. Sob esta

hipótese, as três alternativas são indiferentes para o investidor, ou seja, têm a mesma utilidade. Portanto, mesmo para taxas de longo prazo, a oferta e demanda por títulos deste prazo serão totalmente determinadas pelas mudanças nas expectativas do mercado com respeito às taxas de juros de curto prazo num futuro distante.

Outra forma de entender estes títulos de mesmo emissor e diferentes prazos de vencimento sob a hipótese das expectativas, segundo VAN HORNE (1991: 107), é vê-los como bens substitutos perfeitos. E os participantes do mercado buscam maximizar seus retornos, baseados em suas expectativas. Com isso, toda informação relevante às trajetórias das taxas de juros futuras estarão implícitas na sua estrutura temporal.

E, pela hipótese das expectativas, somente novas informações relevantes causam variações nas taxas de juros e na estrutura temporal. Este conceito é similar ao de **eficiência de mercado**, como definido por COPELAND e WESTON (1988: 331): há competição perfeita entre os títulos, ou seja, os participantes não têm poder de mercado e são tomadores do preço; a informação é pública e disponível a todos; e os indivíduos são racionais e objetivam a maximização de suas riquezas.

Sob esta hipótese, as taxas a termo definem as expectativas futuras e não contém qualquer compensação pelo risco. Em um mundo sujeito a riscos e incertezas, levanta-se esta questão novamente: qual o apetite de risco dos investidores e agentes do mercado?

Alternativamente, pode-se imaginar investidores que não sejam indiferentes às três alternativas do exemplo anterior. Por exemplo, um agente pode preferir investir por 6 meses e ter o direito, mas não a obrigação, de renovar esta aplicação por mais seis meses de prazo. Com isso, ele teria a oportunidade de avaliar outras alternativas de investimento no futuro.

Na primeira situação, os investidores são reconhecidamente **neutros ao risco** avaliado, enquanto que, na segunda, têm **aversão ao risco** de explorar uma oportunidade de lucro, de acordo com VAN HORNE (1991: 109).

Para explicar melhor a realidade, deve-se modificar a hipótese das expectativas puras: quanto mais longo o prazo de vencimento do título, maior é o risco de flutuação de preços percebido pelos participantes do mercado. Por causa deste risco e também pela aversão a ele, investidores têm uma preferência por aplicar em prazos mais curtos.

A **teoria da preferência pela liquidez** afirma, segundo FABOZZI (2000: 101), que títulos de longo prazo devem proporcionar maiores retornos esperados do que títulos de curto prazo, uma vez que investidores esperam ser recompensados pelo risco de manterem ativos mais longos na sua carteira. Da mesma forma, sacrificam seus retornos esperados para terem títulos de vencimentos mais curtos.

Tal comportamento se deve à incerteza sobre eventos inesperados. Esta teoria argumenta, de acordo com REILLY (1995: 510), que “a curva de juros seja positivamente inclinada e qualquer outra forma seja uma aberração de curto prazo”.

Nesta teoria, as taxas de juros a termo definidas pelo mercado serão estimativas viesadas das taxas futuras de curto prazo, uma vez que elas devem incluir um prêmio pela liquidez. Este prêmio de risco é proporcional a uma maior ou menor aversão a riscos dos agentes.

Alternativamente, a **hipótese da segmentação do mercado** ou **teoria do habitat preferido** assume que diferentes investidores institucionais têm necessidades distintas quanto às suas alocações temporais de seus ativos, o que os força a investir concentradamente em segmentos específicos da curva de juros. Nesta teoria, a forma da curva de juros é função da oferta e da demanda geradas por estas políticas de investimentos institucionais.

Nesta situação, títulos de prazos distintos não são mais substitutos perfeitos, assim como um investidor irá aceitar investir em um título com prêmio de risco inferior para aquele prazo que lhe interessa, independente se este prazo é menor ou maior, mas ele irá buscar reduzir seus riscos de descasamentos entre ativos e passivos.

Informações disponíveis em títulos de diferentes vencimentos podem auxiliar na formulação de cenários para as taxas futuras, apenas ao observar a curva de juros: uma curva declinante sugere que taxas de juros futuras serão menores, segundo evidências históricas descritas por REILLY (1995: 511).

Portanto, baseados nas teorias descritas, investidores em títulos de renda fixa utilizam a curva de juros de mercado para inferir sobre as taxas de juros futuras. Para tanto, é necessário decompor as taxas de longo prazo em períodos menores, como mostrado a seguir.

### **2.3.2. Taxas de Juros à Vista**

Dada a relação exposta anteriormente entre credores e devedores, justificam-se:

- Uma correlação positiva entre a taxa de juros e o prazo (preferência pela liquidez);
- Uma correlação positiva entre taxa de juros e o volume de recursos envolvido em uma operação financeira.

O gráfico 2 mostra a relação entre taxas de juros à vista observadas no mercado brasileiro para alguns dados selecionados de taxas de *swap* interbancário (Pré x CDI) negociados no mercado de balcão.

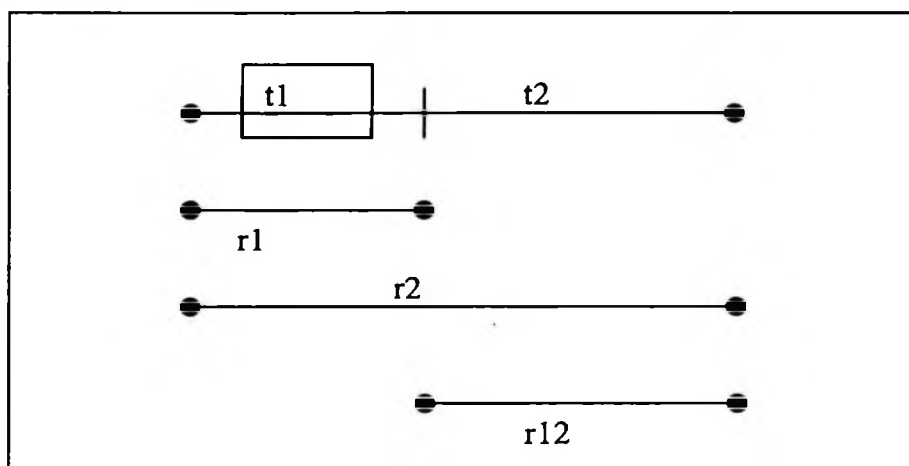
Com base nos argumentos acima, entende-se porque é negativa a relação entre o preço de um título com o seu prazo de vencimento ou maturação. Fixado o valor de face, o preço é função inversamente proporcional ao valor de face.



### 2.3.3. Taxas de Juros a Termo

Nos mercados financeiros atuais, as apostas ocorrem envolvendo taxas de juros para períodos futuros, conhecidas como taxas a termo. A visualização destas é feita na Figura 3 abaixo.

**Figura 4:** Taxas de juros a termo, representando as taxas de juros entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ .



Onde,  $r_1$  é taxa à vista de hoje ao tempo  $t_1$ ,  $r_2$  é a taxa à vista de hoje a  $t_2$ , e  $r_{12}$  é a taxa a termo de  $t_1$  a  $t_2$ . A relação entre as taxa é  $(1+r_1)(1+r_{12}) = (1+r_2)$ . A partir daí, pode-se calcular a estrutura a termo das taxas de juros, como as taxas de mercado no gráfico 3.

## 2.4. Avaliação de Títulos Públicos no Mercado Brasileiro

### 2.4.1. O Conceito da Taxa SELIC

É a taxa apurada no SELIC, a saber, Sistema Especial de Liquidação e Custódia do Banco Central, obtida mediante o cálculo da taxa média ponderada e ajustada das operações de financiamento por um dia, lastreadas em títulos públicos federais e cursadas no referido Sistema na forma de **operações compromissadas**. Neste caso, as operações compromissadas são operações de venda de títulos com

compromisso de recompra assumido pelo vendedor, conjuntamente com compromisso de revenda assumido pelo comprador, para liquidação no dia útil seguinte.

Deve-se ressaltar, ainda, que estão aptas a realizar operações compromissadas, por um dia útil, fundamentalmente as instituições financeiras habilitadas, tais como bancos comerciais, bancos de investimento, corretoras e distribuidoras de valores.

#### 2.4.1.1. Metodologia de Cálculo

A taxa média ajustada das mencionadas operações de financiamento é calculada de acordo com a seguinte fórmula:

$$\left\{ \left[ \left( \frac{\sum_{j=1}^n L_j V_j}{\sum_{j=1}^n V_j} \right)^{252} - 1 \right] \times 100 \right\} \% a.d.$$

onde, n: número de operações que compõem a amostra;

$L_j$ : fator diário correspondente à taxa da  $j$ -ésima operação;

$V_j$ : valor financeiro correspondente à taxa da  $j$ -ésima operação.

A amostra é constituída excluindo-se do universo as operações atípicas, assim consideradas:

- no caso de distribuição simétrica, 2,5% das operações com os maiores fatores diários e 2,5% das operações com os menores fatores diários;
- no caso de distribuição assimétrica positiva, 5% das operações com os maiores fatores diários;

- no caso de distribuição assimétrica negativa, 5% das operações com os menores fatores diários.

Pode-se concluir que a Taxa SELIC se origina de taxas de juros efetivamente observadas no mercado. As taxas de juros relativas às operações em questão refletem, basicamente, as condições instantâneas de liquidez no mercado monetário (oferta *versus* demanda de recursos). Estas taxas de juros não sofrem influência do risco do tomador de recursos financeiros nas operações compromissadas, uma vez que o lastro oferecido é homogêneo.

Segundo Araújo (2002: 26), da mesma forma que todas as taxas de juros nominais, por outro lado, a Taxa SELIC pode ser decomposta *ex post*, em duas parcelas: taxa de juros reais e taxa de inflação no período considerado. De acordo com Araújo (2002: 27), a Taxa SELIC, acumulada para determinados períodos de tempo, correlaciona-se positivamente com a taxa de inflação apurada *ex post*.

#### 2.4.2. O Preço de um Título Público

A prática de mercado de títulos públicos determinou o aparecimento de diversos métodos para precificação destes títulos. De certa forma, os diferentes preços apurados servem a propósitos distintos.

- **Preço de mercado** é o preço que equilibra a oferta e a demanda por um título. E por isso, é o que melhor reflete o seu verdadeiro valor. Por este motivo, é o preço utilizado nas marcações a mercado dos títulos de uma carteira.
- **Preço par ou valor nominal atualizado** é obtido pela atualização do valor de face de um título desde sua data de emissão. Títulos prefixados têm preço par constante e os de rentabilidade pós-fixada o têm atualizado por diversos critérios, em intervalos mensais ou diários.
- **Preço da curva** é obtido por intermédio de uma taxa de desconto do seu fluxo de caixa, onde cada componente ou vencimento será descontado ou

descapitalizado por uma taxa calculada a partir da estrutura temporal de taxas de juros.

- **Preço de carregamento** é obtido por intermédio da atualização do valor efetivamente pago por ocasião da compra do título. O fator de atualização deve ser igual ao custo de financiamento da compra deste título no mercado de reservas bancárias (financiamento pela taxa SELIC).
- **Preço de lastro** é definido como o valor que o Banco Central aceita vender ou comprar um título federal em uma operação compromissada.

### **2.4.3. Características dos Títulos**

Com objetivo de esclarecer a metodologia de precificação de títulos públicos, apresentam-se as características dos títulos juntamente com exemplos de preços de negociação.

#### **2.4.3.1. Letras Financeiras do Tesouro (LFTs)**

Prazo: definido pelo Tesouro, quando de sua emissão;

Forma de colocação: oferta pública ou colocação direta;

Valor nominal na data-base (emissão): R\$1.000,00

Rendimento: taxa SELIC;

Resgate: valor nominal acrescido do rendimento, desde a data de emissão do título.

Para exemplificar, admite-se uma LFT com as seguintes características:

Data da liquidação financeira da compra: 5/03/2004

Data de vencimento: 1/03/2006

Prazo: 500 dias úteis

Cotação (COT): 99,00

Valor nominal (VN): R\$1.000,0000

Cálculo da taxa de rentabilidade (ágio/deságio sobre a taxa SELIC):

$$i = \left[ (100/COT)^{252/500} - 1 \right] = 0,5078\%a.a. \text{ (acima da taxa SELIC)}$$

Analogamente, a partir do ágio/deságio:

$$COT = \left[ 100 / (1 + 0,5078\%)^{500/252} \right] = 99,0000$$

O Preço Unitário de liquidação (PU) da operação é dado por  $PU = (COT/100)VN$ , onde VN é o valor nominal na data base de negociação, ou seja, o valor nominal emitido, adicionado ou capitalizado pela taxa SELIC diária até a data base.

#### 2.4.3.2. Letras do Tesouro Nacional (LTNs)

Prazo: definido pelo Tesouro, quando de sua emissão;

Forma de colocação: oferta pública ou colocação direta;

Valor nominal na data-base (emissão): múltiplo de R\$1.000,00

Rendimento: deságio sobre o valor nominal;

Resgate: valor nominal.

Note, no exemplo a seguir, que a rentabilidade esperada é previamente conhecida pelo investidor. Admitindo uma LTN com as seguintes características:

Data da liquidação financeira da compra: 5/03/2004

Data de vencimento: 1/04/2005

Prazo: 268 dias úteis

Preço Unitário (PU): 852,101873

Valor nominal (VN): R\$1.000,0000

Cálculo da taxa de rentabilidade:  $i = \left[ (VN/PU)^{252/268} - 1 \right] = 16,24\%a.a.$

Analogamente, a partir da rentabilidade:  $PU = \left[ VN / (1 + 16,24\%)^{268/252} \right] = 852,101873$

#### **2.4.4. Risco de *Default* em Títulos Públicos**

A caracterização do risco de *default* em títulos públicos compreende os seguintes cenários ou eventos de crédito:

- (i) em caso de *default*: o Governo anuncia unilateralmente, que irá interromper seus pagamentos sobre a dívida pública;
- (ii) quebra de contrato: o Governo altera a forma de remuneração ou prazos de pagamentos de sua dívida;
- (iii) em uma reestruturação ou renegociação: o Governo juntamente com os investidores “concordam” em reduzir ou retardar pagamentos futuros;
- (iv) uma mudança de regime (*regime shift*), como uma mudança de governo ou *default* em outro título comparável, que aumente o risco percebido pelo evento de *default*.

#### 2.4.4.1. *Spread* pelo Risco de Crédito

Considerando as LFTs apresentadas neste capítulo, pode-se fazer uma ressalva: uma vez que os títulos são rentabilizados por 100% da taxa SELIC, qualquer ágio ou deságio de negociação significa redução ou excesso de rentabilidade sobre a taxa SELIC. Da mesma forma, o passivo destes títulos é representado pelas operações compromissadas de um dia, aquelas operações que formam a taxa SELIC, ou seja, também 100% desta.

Neste raciocínio, qualquer ágio ou deságio deve ser visto como um *spread* de crédito negativo ou positivo, respectivamente. O *spread* de crédito, segundo FABOZZI (1996: 132), é a rentabilidade adicional à taxa básica de juros, ou excesso de retorno sobre a taxa básica livre de risco.

No exemplo da seção 2.4.3.1, o *spread* de crédito é calculado em 0,5078% a.a., pois é essa a rentabilidade excedente à taxa SELIC para um investidor que adquire aquele título à cotação de 99,0000.

#### 2.4.5. Retorno do Investidor

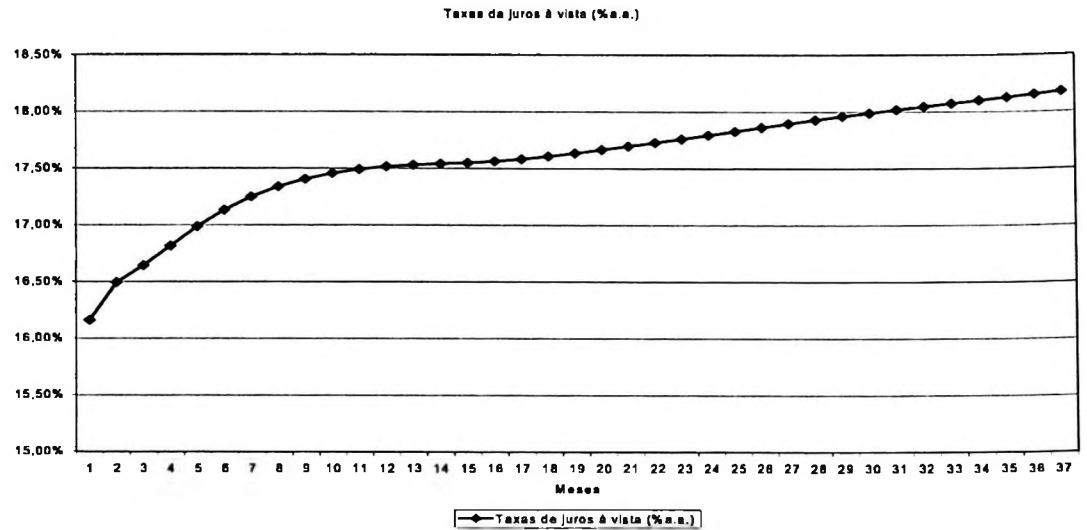
O retorno para um investidor que adquire uma LFT é dado pelo ganho de capital entre preço de compra e preço de venda, uma vez que estes títulos não pagam juros antes de seu vencimento. Porém, considere que um investidor comprou o título da seção 4.3.1 na cotação de 99,0000 e o vendeu após uma semana (5 dias úteis) na cotação de 99,5000.

Seu preço de compra é  $PU_1 = (COT_1/100) \times VN_1 = (99,00/100) \times VN_1$  e, analogamente, seu preço de venda é  $PU_2 = (COT_2/100) \times VN_2 = (99,50/100) \times VN_2$ . Mas note, que o valor nominal do título tem rentabilidade (capitalização) da taxa SELIC. Supondo a taxa SELIC de 16,50% a.a. por 5 dias úteis,  $VN_2 = VN_1 [1 + 16,50\%]^{5/252}$ . Então, para títulos sem pagamento de cupom de juros, o cálculo do retorno ao investidor é:

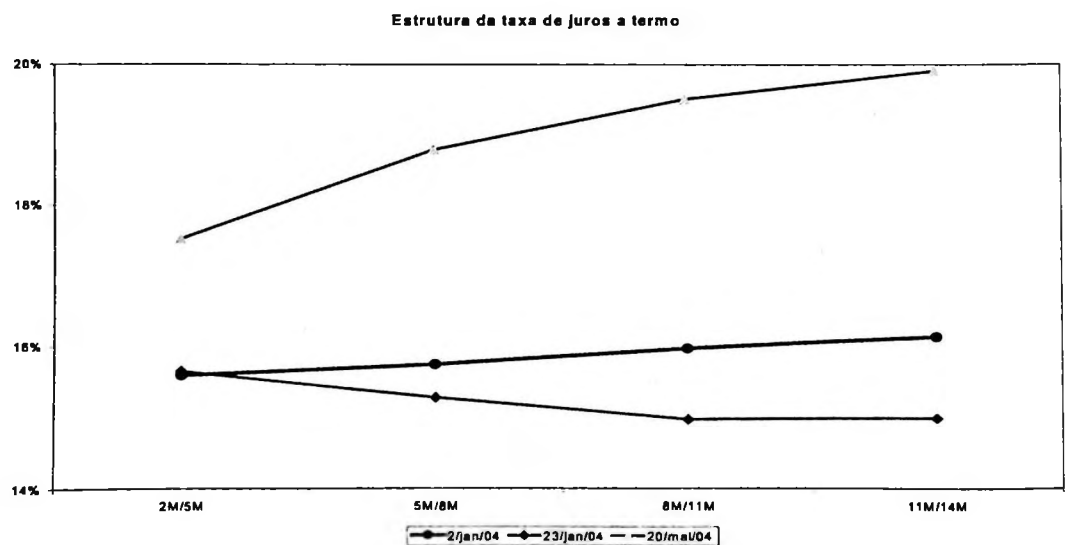
$$R_2 = \frac{PU_2}{PU_1} = \frac{(99,50/100) \times VN_2}{(99,00/100) \times VN_1} = \left( \frac{99,50}{99,00} \right) \times [1 + 16,50\%]^{\frac{5}{252}} = 1,008101$$

A taxa de retorno  $r_2 = R_2 - 1 = 0,8101\%$  no período.

**Gráfico 2:** Taxas de juros interbancárias à vista (Fonte: Bloomberg)



**Gráfico 3:** Taxas de juros interbancárias a termo (Fonte: Bloomberg)





### **3 MODELOS DE ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JUROS**

De acordo com DUFFEE e STANTON (2004: 1), modelos de estrutura temporal especificam uma forma funcional para as taxas de juros de curto prazo e também para o prêmio de risco exigido pelos investidores para aplicarem em prazos mais longos. Esta compensação é requerida por causa do risco de variação das taxas de juros.

Nos modelos de estrutura temporal sujeitos a riscos de crédito, o investidor é compensado pelos riscos de variações nas taxas de juros livres de risco e também pela flutuação na percepção sobre o risco de crédito.

O modelo de estrutura temporal sujeito ao risco de crédito de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 119) utiliza algumas idéias introduzidas por VASICEK (1977: 177) e por COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398), bem como várias definições e conceitos do cálculo estocástico descritos a seguir.

#### **3.1 Fundamentos do Cálculo Estocástico**

Modelos de estrutura temporal de taxas de juros, como os descritos neste capítulo, baseiam-se em alguns instrumentos do cálculo estocástico. Para estudá-los, são necessários alguns fundamentos importantes.

A seguir, apresenta-se alguns dos processos estocásticos utilizados nas modelagens da estrutura temporal das taxas de juros e do risco de crédito. Dentre tais processos, destaca-se o movimento Browniano, que tem importância fundamental no desenvolvimento da teoria sobre a estrutura temporal. Completa-se a seção com os processos de difusão, como os processos gaussianos, de Ornstein-Uhlenbeck e raiz

quadrada, que permitem soluções através do cálculo de Itô, e estão presentes nos modelos financeiros de avaliação de ativos.

**Definição 3.1:** Um processo estocástico é, segundo SPANOS (1999: 403), uma coleção indexada  $\{X_t, t \text{ inteiro}\}$  de variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , isto é:

$X_t$  é uma variável aleatória relativa a  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , para cada índice  $t$ . Portanto, um processo estocástico é uma função no  $\mathbb{R}^n$  de 2 argumentos:

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times t \rightarrow \mathbb{R}^n$$

O conceito básico de processos estocásticos amplia a noção de variáveis aleatórias. Quando uma coleção destas estão ordenadas ou indexadas, por uma dimensão de tempo, por exemplo, é necessário explorar algumas de suas condições, como dependência e homogeneidade da amostra. Formalmente, processos estocásticos seguem a **definição 3.1**, mas busca-se aqui a conexão entre processos estocásticos e finanças.

A história mostra, que esta ligação não é recente. BACHELIER (1900), apud LAMBERTON e LAPEYRE (1996: 8), em sua dissertação chamada *Théorie de la Speculation*, é a origem dos processos estocásticos em finanças.

### 3.1.1. Movimentos Brownianos

De acordo com OKSENDAL (2000: 11), em 1828, um botânico escocês chamado Robert Brown observava, que grãos de pólen suspensos em um líquido produziam um movimento irregular. Na época, este comportamento foi erroneamente justificado pelo movimento de partículas vivas. Este movimento foi mais tarde

explicado pelas colisões aleatórias entre as moléculas do líquido, a saber, sua difusão térmica. Os efeitos individuais das partículas em colisão eram irrisórios, mas o efeito acumulado de milhões delas produzia um movimento errático observável, que exibia um certo padrão de regularidade.

A primeira tentativa de modelar esta regularidade foi feita por Albert Einstein em 1905, de acordo com SPANOS (1999: 411), utilizando uma equação diferencial estocástica da forma:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \delta \left( \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \right), \text{ onde } \delta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \right)$$

$\delta$  é o coeficiente de difusão

$f(x,t)dx$  é Prob( $X(t) \in [x, x + dx]$ )

A solução desta equação diferencial estocástica para distribuição  $f(x,t)$  sujeita à restrição inicial  $X(0) = 0$ ,

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi\delta t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\delta t}\right)$$

equivalente a

$$f(x,t) \sim N(0, 2\delta t)$$

A primeira formulação matemática rigorosa do movimento Browniano foi feita em 1920 por Wiener e, avançada por Lévy entre 1930 e 1940. Ao final dos anos 20, Wiener provou a existência das probabilidades do modelo de Einstein e, por seu trabalho, o movimento Browniano é também conhecido como Processo de Wiener.

Movimentos brownianos são o núcleo da maioria dos modelos financeiros. Antes de discutir a sua importância, bem como a razão de estudá-lo tão profundamente, deve-se considerar algumas definições, como em ROGERS e WILLIAMS(2000a: 1):

**Definição 3.2:** Dado um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , um processo estocástico  $\{B_t\}$  é um **movimento Browniano**, se tiver as seguintes propriedades:

- (i)  $B_0(\omega) = 0, \forall \omega$ ;
- (ii)  $t \rightarrow B_t(\omega)$  é uma função contínua de  $t$  para todo  $\omega$ ;
- (iii) para todos  $t, h \geq 0$ ,  
 $B_{t+h} - B_t$  é independente de  $\{B_u : 0 \leq u \leq t\}$   
e tem distribuição  $N(0, h)$ .

Na notação em tempo contínuo,  $B(t) \sim N(0, t)$  é um movimento browniano padrão unidimensional.

Quanto às razões de um estudo minucioso deste processo, ROGERS e WILLIAMS (2000a) indicam três motivos principais:

- (i) Virtualmente, toda classe de processos estocásticos de interesse contém um movimento browniano: martingales, processo Gaussiano, de Markov, de Lévy, uma difusão etc.;
- (ii) É um movimento suficientemente concreto, a ponto de ser passível de cálculos explícitos;
- (iii) Pode ser usado como ponto de partida para outros processos.

**Definição 3.3: Movimento browniano multidimensional.** Um processo em  $d$  dimensões,  $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))^T, 0 \leq t \leq T$ , é um movimento browniano padrão no  $\mathbb{R}^d$ , se tem trajetórias contínuas, incrementos independentes, além de ter  $B(0) = 0$  e, para  $0 \leq s \leq t \leq T$  e  $\mathbf{I}$ , a matriz identidade  $d \times d$ :

$$B(t) - B(s) \sim N(0, (t-s)\mathbf{I}) \quad (3.1)$$

Segue a definição acima, dada por GLASSERMAN (2003: 90), que cada processo  $B_i(t)$  é um movimento browniano padrão unidimensional e que  $B_i(t)$  e  $B_j(t), i \neq j$  são independentes.

**Definição 3.4: Movimento browniano como um *martingale*.** Seja  $\{B_t : t > 0\}$  um movimento Browniano definido em  $\mathfrak{B}_t$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{Para } 0 \leq s \leq t, \quad B_t &\sim N(0, t) \\ \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathfrak{B}_s] &= 0 \Rightarrow \mathbb{E}[B_t | \mathfrak{B}_s] = B_s \end{aligned}$$

Portanto,  $\{B_t, \mathfrak{B}_t\}_{t > 0}$  é um *martingale*. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \text{Para } 0 \leq s \leq t, \quad (B_t - B_s) &\sim N(0, t - s) \\ \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathfrak{B}_s] &= t - s \\ \text{Mas,} \\ \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathfrak{B}_s] &= \mathbb{E}[B_t^2 - 2B_t B_s + B_s^2 | \mathfrak{B}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 | \mathfrak{B}_s] - B_s^2 \\ \text{Rearrmando os termos,} \\ \mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathfrak{B}_s] &= B_s^2 - s \end{aligned}$$

Logo,  $\{B_t^2 - t | \mathfrak{B}_t\}_{t > 0}$  também é um *martingale*.

**Definição 3.5: Movimento browniano como um processo gaussiano.** Um processo  $X(t)$  é dito um processo Gaussiano, segundo ROGERS e WILLIAMS (2000a : 3), se para todo  $t$ , a função densidade de probabilidade de  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$  é Gaussiana ou Normal multivariada (para o caso de um vetor  $\mathbf{X}_t$ ). Esta função é inteiramente definida por dois parâmetros:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbb{E}[X_t] \\ \rho(s, t) &= \text{cov}[X_s, X_t] \end{aligned}$$

Um movimento Browniano é também um processo Gaussiano de média zero e covariância (t-s). Alternativamente, nota-se que um **processo gaussiano** pode ser construído a partir de um movimento browniano padrão:

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \mu t + \sigma B(t) , \text{ em uma dimensão ou} \\
 \mathbf{X}(t) &= \boldsymbol{\mu} t + \mathbf{D}B(t) , \text{ multidimensional.} \\
 \mathbf{X}(t) &= (X_1(t) \ \dots \ X_d(t))^T \\
 \boldsymbol{\mu}(t) &= (\mu_1(t) \ \dots \ \mu_d(t))^T \\
 \mathbf{D}\mathbf{D}^T &= \boldsymbol{\Sigma} , \text{ matriz } d \times d \\
 \mathbf{B}(t) &\text{ é movimento browniano padrão em } \mathbb{R}^d
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

### 3.1.2. Processos de Itô e Equações Diferenciais Estocásticas (EDE)

O movimento browniano é bastante restritivo para modelar um processo, que descreva preços de títulos financeiros, sendo o processo de Itô, segundo DUFFIE (2001: 86), uma representação mais ampla e flexível para estes preços:

$$P_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s
 \tag{3.3}$$

Na equação acima,  $P_t$  é o preço de um título,  $x$  é um número real,  $\sigma$  e  $\mu$  são também processos estocásticos. É comum a (3.3) ser escrita na forma diferencial:

$$\begin{aligned}
 dP_t &= \mu_s ds + \sigma_s dB_s \\
 P_0 &= x
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

E pode-se interpretar  $dP_t$  como o incremento de  $P$  no período  $t$ , causado por duas componentes: uma esperada ( $\mu$ ) e uma aleatória ( $\sigma$ ). Note, que pelas propriedades de  $B_t$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[P_t] &= \mu_t \\
 \text{Var}[P_t] &= \sigma_t^2
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

O cálculo estocástico amplia a teoria do cálculo integral e diferencial newtoniano para integrandos e medidas estocásticas. As integrais estocásticas são definidas, de acordo com GOURIEROUX e JASIAK (2001: 244), como limites de somatórios de Riemann. Por exemplo, ao considerar uma função estocástica  $g$ , dependente de valores passados e contemporâneos de um movimento Browniano  $B_t$ . Pode-se definir sob certas condições de integrabilidade:

$$\int_0^t g_u du \quad \text{e} \quad \int_0^t g_u dB_u \quad (3.6)$$

Na primeira integral,  $g$ , é estocástica, mas os pesos  $du$  são deterministas, enquanto os dois termos são estocásticos na segunda integral. Estas duas integrais são definidas respectivamente como:

$$\begin{aligned} \int_0^t g_u du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{t_i} (t_{i+1} - t_i) \\ \int_0^t g_u dB_u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

É interessante notar, que o lado direito das equações acima são um tipo de representação de médias móveis (MA).

A definição da integral estocástica como em (3.7) permite definir seus momentos de primeira e de segunda ordem como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t g_u dB_u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ g_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{t_i} \mathbb{E} \left[ B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \mid B_{t_i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da mesma forma, para a covariância:

$$\begin{aligned}
\text{Cov} \left[ \int_0^t g_u dB_u; \int_0^t h_u dB_u \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^t g_u dB_u \int_0^t h_u dB_u \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ g_{t_i} h_{t_j} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ g_{t_i} h_{t_i} (t_{i+1} - t_i) \right] = \int_0^t \mathbb{E} (g_u h_u) du
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Uma vez definida a integral estocástica, pode-se introduzir a noção da equação diferencial estocástica (EDE).

**Definição 3.6:** Um processo estocástico  $\{y_t\}$  satisfaz à EDE

$$dy_t = \mu(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dB_t \tag{3.10}$$

se e somente se  $\{y_t\}$  for solução da equação integral

$$y_t - y_0 = \int_0^t \mu(u, y_u)du + \int_0^t \sigma(u, y_u)dB_u \tag{3.11}$$

A notação  $dy_t$  ou  $dB_t$  é apenas uma convenção, uma vez que as trajetórias não são necessariamente diferenciáveis, como por exemplo um movimento Browniano. Se o processo  $y_t$  for solução de (3.11), ele é chamado de **processo de difusão**.

A função  $\mu$  é chamada de arrasto (*drift*) e mede a variação instantânea (retorno) esperada de  $y_t$ . De forma similar, a função  $\sigma$  é conhecida como volatilidade instantânea e pode ser interpretada como uma medida de incerteza dos movimentos de  $y_t$  ao redor de seu retorno esperado.

Como no cálculo tradicional, expressões para integrais estocásticas e para EDE podem ser alteradas por uma mudança de variáveis. A fórmula para esta mudança



em EDE é chamada de **Lema de Itô**. A explicação abaixo é baseada em GOURIEROUX e JASIAK (2001: 246).

Inicialmente, considere uma equação diferencial determinista de ordem 1:

$$dy_t = \mu(t, y_t)dt \quad (3.12)$$

além de uma transformação diferenciável de  $y_t$  em  $\zeta_t$  :

$$\zeta_t = f(t, y_t) \Leftrightarrow y_t = f^{-1}(t, \zeta_t) \quad (3.13)$$

Derivando (3.13), e substituindo  $dy_t = \mu(t, y_t)dt$  e  $y_t = f^{-1}(t, \zeta_t)$ :

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y_t)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_t)dy_t \\ d\zeta_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, f^{-1}(t, \zeta_t))dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t, f^{-1}(t, \zeta_t))\mu(t, f^{-1}(t, \zeta_t))dt \\ d\zeta_t &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(t, f^{-1}(t, \zeta_t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, f^{-1}(t, \zeta_t))\mu(t, f^{-1}(t, \zeta_t)) \right] dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

O Lema de Itô implica que, no caso de uma EDE como (3.10), é necessário adicionar à formula (3.14) um termo de correção de 2ª ordem, conhecido como efeito convexidade.

**Definição 3.7: Lema de Itô:** ao considerar a EDE  $dy_t = \mu(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dB_t$  e uma transformação diferenciável como  $\zeta_t = f(t, y_t) \Leftrightarrow y_t = f^{-1}(t, \zeta_t)$  , então o processo  $\zeta_t$  satisfaz à EDE:

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dy_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy_t)^2 \\ d\zeta_t &= \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial f}{\partial y} \sigma dB_t \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mais do que qualquer outro resultado, a **Fórmula de Itô** é a base para soluções analíticas ou explícitas dos problemas de avaliação de ativos financeiros em tempo contínuo.

Conforme descrição de DUFFIE (2001: 87), para um processo de Itô  $\{X_t\}$ , que siga  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ , então um processo  $\{Y_t\}$ , definido por  $Y_t = f(X_t, t)$ , sendo  $f$  duas vezes continuamente diferenciável, é também um processo de Itô com:

$$dY_t = \left[ f_x(X_t, t)\mu_t + f_t(X_t, t) + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + f_x(X_t, t)\sigma_t dB_t \quad (3.16)$$

Há duas alternativas para se solucionar as EDE, que modelam os preços financeiros: (i) a solução analítica, obtida através do cálculo de Itô; (ii) a solução de um processo de Itô convencional, sujeito a uma mudança na medida de probabilidade.

### 3.1.3. Processos de Difusão

Como visto na seção anterior, um processo  $y_t$ , que seja solução de (3.11), é chamado de **processo de difusão**. Estes processos são úteis para modelar a maioria dos ativos financeiros, segundo LAMBERTON e LAPEYRE (1996: 49), desde ações até as taxas de juros. A seguir, são apresentadas algumas propriedades destes processos.

**Definição 3.8: Movimento browniano como um processo de difusão.** Segundo ROGERS e WILLIAMS(2000: 7), um processo de difusão é um processo em tempo contínuo, caracterizado por uma tendência instantânea  $\mu$  e por uma variância instantânea  $\sigma^2$ . Ou seja, para  $h$  muito pequeno:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+h} - X_t | \mathfrak{F}_t] &= h\mu(X_t) \\ \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t - h\mu)^2 | \mathfrak{F}_t] &= h\sigma^2(X_t) \end{aligned}$$

Um processo de difusão, que atende à proposição acima pode ser escrito como:

$$X_t = \mu t + \sigma B_t \quad (3.17)$$

Ainda de acordo com ROGERS e WILLIAMS (2000), há três abordagens para o processo de difusão: (i) a das EDE; (ii) a do problema de Martingale; e (iii) a das Equações Diferenciais Parciais.

Na abordagem das EDE, um processo de difusão é solução da equação integral estocástica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s \quad (3.18)$$

Ou na forma diferencial:

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (3.19)$$

De acordo com GOURIEROUX e JASIAK (2001: 248-258), soluções analíticas para equações de difusão existem apenas em casos especiais e os mais importantes são apresentados a seguir. Obviamente, há soluções explícitas também para todas EDE derivadas destas descritas abaixo, a partir de uma mudança de variáveis, pelo Lema de Itô.

### **Definição 3.9: Movimento browniano geométrico com arrasto**

Um movimento browniano geométrico com arrasto satisfaz à equação de difusão

$$dy_t = \mu y_t dt + \sigma y_t dB_t \quad (3.20)$$

Aplicando a fórmula de Itô, equação (3.15) para  $\zeta_t = f(t, y_t) = \log y_t$  :

$$d \log y_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \quad (3.21)$$

A equação acima (3.21) pode ser diretamente integrada, uma vez que  $y_t$  não aparece mais no seu lado direito. Portanto,

$$\begin{aligned} \log y_t &= \log y_0 + \int_0^t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) du + \int_0^t \sigma dB_u \\ \log y_t &= \log y_0 + t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma B_t \\ y_t &= y_0 \exp \left[ t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \exp[\sigma B_t] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da expressão acima, pode-se extrair algumas propriedades desta solução. Por exemplo, a distribuição condicional de  $y_t$  dado  $y_0$  é a distribuição lognormal com

parâmetros  $\log y_0 + t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$  e  $\sigma^2$ . Sua esperança condicional é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_t; y_0] &= y_0 \exp \left[ t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \mathbb{E} \exp[\sigma B_t] \\ \mathbb{E}[y_t; y_0] &= y_0 \exp \left[ t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \mathbb{E} \exp \left[ \frac{\sigma^2}{2} t \right] \\ \mathbb{E}[y_t; y_0] &= y_0 \exp \mu t \end{aligned} \quad (3.23)$$

A trajetória da solução  $y_t$  apresenta uma tendência exponencial. Sua variância condicional é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}[y_t | y_0] &= \mathbb{E}[y_t^2 | y_0] - \{\mathbb{E}[y_t | y_0]\}^2 \\ &= y_0^2 \exp t(2\mu - \sigma^2) \mathbb{E}(\exp 2\sigma B_t) - y_0^2 \exp(2\mu t) \\ &= y_0^2 \exp(2\mu t) [\exp(\sigma^2 t) - 1] \\ \text{Var}[y_t | y_0] &= \{\mathbb{E}[y_t | y_0]\}^2 [\exp(\sigma^2 t) - 1] \end{aligned} \quad (3.24)$$

A equação acima implica em uma razão exponencialmente crescente no tempo entre a variância e a média condicionais de um movimento Browniano geométrico.

**Definição 3.10: Processo de Ornstein-Uhlenbeck**

A EDE para o processo conhecido como Ornstein-Uhlenbeck é:

$$dy_t = (\phi - \lambda y_t) dt + \sigma dB_t \tag{3.25}$$

Este processo, segundo SPANOS (1999: 456), foi proposto por Ornstein e Uhlenbeck em 1930, para modelar o mesmo problema das partículas suspensas em um líquido. O processo Ornstein-Uhlenbeck pode ser visto como uma versão estacionária do movimento browniano, devido a seu efeito de reversão à média.

Ao aplicar o Lema de Itô à transformação  $y_t = \zeta_t \exp(-\lambda t) + \frac{\phi}{\lambda}$ , não é necessário o termo de correção de 2ª ordem, pois a relação entre  $y_t$  e  $\zeta_t$  é linear. Portanto,

$$\begin{aligned} dy_t &= d\zeta_t \exp(-\lambda t) - \lambda \zeta_t \exp(-\lambda t) dt \\ &= d\zeta_t \exp(-\lambda t) - \lambda \left( y_t - \frac{\phi}{\lambda} \right) dt = \\ &= d\zeta_t \exp(-\lambda t) + (\phi - \lambda y_t) dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

Combinando (3.25) e (3.26):

$$\begin{aligned} \sigma dB_t &= d\zeta_t \exp(-\lambda t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d\zeta_t &= \sigma \exp(\lambda t) dB_t \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ao integrar  $d\zeta_t$  entre  $t_0$  e  $t$  ( $t_0 < t$ ), pode-se expressar  $\zeta_t$  em função de  $\zeta_{t_0}$  e de distúrbios aleatórios até o instante  $t$ :

$$\zeta_t = \zeta_{t_0} + \int_{t_0}^t \sigma \exp(\lambda u) dB_u \quad (3.28)$$

A viabilidade na obtenção de uma solução explícita para (3.26), fez o processo Orstein-Uhlenbeck ser utilizado na modelagem de VASICEK (1977) da estrutura temporal das taxas de juros. Além de modelar valores futuros com base na observação atual, Vasicek identifica nas taxas de juros uma tendência de reversão à média. Note, porém, que o processo Orstein-Uhlenbeck é um caso particular de um processo gaussiano, o que leva a valores negativos com probabilidade maior do que zero.

**Definição 3.11: Processo Raiz Quadrada.**

O processo de difusão raiz quadrada, conforme GLASSERMAN (2003: 120), tem sua forma geral como:

$$dy(t) = \alpha (b - y(t)) dt + \sigma \sqrt{y(t)} dB(t) \quad (3.29)$$

Nesta classe de processos, estudada inicialmente por Feller em 1951, segundo GLASSERMAN (2003: 120), ao considerar-se  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $y(t) \geq 0$  sempre, condição estabelecida em FELLER (1951), é um tipo de especificação para processos estritamente positivos, como são alguns preços financeiros, tais como taxas de juros nominais.

Desta forma, estes processos foram introduzidos na modelagem financeira por COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 390) como um modelo para a taxa de juros de curto prazo. Além disso, o processo raiz quadrada também permite uma solução explícita na solução da EDE.

Assim como na modelagem de VASICEK (1977), a forma da função arrasto em (3.29) sugere, que  $y(t)$  seja atraído na direção de  $b$ , a uma taxa de variação ou velocidade controlada por  $\alpha$ .

Já o termo de difusão  $\sigma\sqrt{y(t)}$ , aproxima-se de zero juntamente com  $y(t)$ , o que previne  $y(t)$  de assumir valores negativos. Em uma formulação mais ampla, pode-se substituir  $b$  por  $b(t)$ , uma trajetória determinista em  $t$ .

### 3.2. Medida de probabilidade neutra ao risco e arbitragem

GLASSERMAN (2003: 25) nota que, apesar de desejada, a solução da EDE pode não ser obtida na prática. Por isso, é necessária a busca de um método alternativo para a solução da EDE.

Seja um ativo com preço  $S(t)$ , cuja equação de movimento é um movimento browniano geométrico, dado por:

$$\frac{dS(t)}{S} = \mu(S(t), t) + \sigma(S(t), t) dB^P(t) \quad (3.30)$$

Em particular,  $B^P(t)$  é um movimento browniano padrão sob a medida de probabilidade  $P$ , que pretende descrever as probabilidades de ocorrências de eventos no mundo real.

Pode-se introduzir um outro processo, aparentemente instrumental, que seja um processo estritamente positivo  $Z(t)$ , chamado de **fator de desconto estocástico**, caso a razão entre os processos  $S(t)$  e  $Z(t)$  for um *martingale*, ou seja:

$$\frac{S(t)}{Z(t)} = \mathbb{E}_P \left[ \frac{S(T)}{Z(T)} \mid \mathfrak{F}_t \right], \quad t < T \quad (3.31)$$

Note que,  $\mathbb{E}_P[\cdot]$  denota esperança sob a medida  $P$ , e  $\mathfrak{F}_t$  representa o histórico de  $B^P(t)$  até o instante de tempo  $t$ . A equação acima pode ser reescrita para melhor explicar o termo fator de desconto estocástico como:

$$S(t) = \mathbb{E}_P \left[ S(T) \frac{Z(t)}{Z(T)} \mid \mathfrak{F}_t \right], \quad t < T \quad (3.32)$$

Em um ambiente livre de riscos, como é o caso de um título, com pagamento prometido de  $X$  na sua data de vencimento  $T$ , com preço  $P(t, T)$ :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_P \left[ X \frac{Z(t)}{Z(T)} \mid \mathfrak{F}_t \right], \quad t < T \quad (3.33)$$

Deve-se avaliar neste momento, as atitudes dos investidores com respeito ao risco: se o título não apresenta risco, ou seja, no vencimento, o investidor receberá  $X$  com certeza, o fator de desconto será menor, ou os investidores aceitarão pagar um maior valor pelo título; ao contrário, caso o pagamento de  $X$  seja incerto, o mercado utilizará um maior fator de desconto sobre o pagamento futuro, reduzindo o preço do título na data  $t$ . Isto acontece, pois os investidores têm **aversão ao risco** e exigem um maior retorno sobre títulos mais arriscados.

Pode-se também reescrever o preço do ativo em função de sua taxa de desconto  $R(t, T)$ :

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)) \mathbb{E}_P [X \mid \mathfrak{F}_t] \quad (3.34)$$

Pode-se escolher a medida de probabilidade  $P$ , tal que,  $\mathbb{E}_P [X \mid \mathfrak{F}_t] = X$ , ou seja, uma probabilidade neutra ao risco e, neste caso  $R(t, T)$  será uma taxa de juros livre de riscos. Note que, para que isto ocorra, é necessário que  $\mu^P(S(t), t) = R(t, T)$  na equação (3.30).



Percebe-se também, que no mundo real sob a medida  $Q$ , sujeito a riscos,  $\sigma^Q(S(t),t) \neq 0$  e  $\mu^Q(S(t),t) \neq \mu^P(S(t),t)$ . Chega-se, então, intuitivamente, a um dos resultados importantes do Teorema de Girsanov, sobre mudança de medidas de probabilidades em processos estocásticos:

$$dB^Q(t) = -\lambda(t)dt + dB^P(t) \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) em (3.30):

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S} &= R(t,T) + \sigma^P(t)dB^P(t) \\ dB^P(t) &= \lambda(t)dt + dB^Q(t) \\ \frac{dS(t)}{S} &= R(t,T) + \sigma^P(t)[\lambda(t)dt + dB^Q(t)] \\ &= [R(t,T) + \lambda(t)\sigma^P(t)] + \sigma^P(t)dB^Q(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Note, que a mudança da medida de probabilidade  $P$  para a medida  $Q$  tem um efeito de adicionar um termo à função arrasto na equação de movimento, ou seja:

$$\mu^Q(t) = R(t,T) + \lambda(t)\sigma^P(t) = \mu^P(t) + \lambda(t)\sigma^P(t) \quad (3.37)$$

Esta representação acima sugere, que interprete-se  $\lambda(t)$  como o **preço de mercado pelo risco**, uma vez mede o excesso de retorno demandado pelos investidores por unidade de risco, ou seja:

$$\lambda(t) = \frac{\mu^Q(t) - R(t,T)}{\sigma^P(t)} \quad (3.38)$$

Percebe-se, que  $\lambda = 0$ , quando  $\mu^Q(t) = R(t,T)$ . A interpretação deste resultado é dada no Teorema de Arbitragem, enunciado a seguir, uma vez que a existência de um preço de mercado pelo risco implica na existência de um fator de desconto estocástico.

### 3.2.1. O Conceito de Arbitragem

Modelos de avaliação de ativos utilizam, segundo NEFTCI (1996), a noção de arbitragem. Em alguns deles, os preços são obtidos por condições que inibem oportunidades de arbitragem. São conhecidos por modelos de ausência de arbitragem.

NEFTCI (1996: 12) define **arbitragem** como:

“assumir posições simultâneas em diferentes ativos de forma a garantir, com certeza ou sem riscos, um lucro maior do que o retorno livre de risco do mercado. Caso este lucro seja possível, existe uma **possibilidade de arbitragem.**”

Do ponto-de-vista teórico, segundo DUFFIE (1989: 15):

“a **arbitragem** é uma estratégia financeira, que rende um lucro livre de risco e não requer investimento inicial. Para propósitos teóricos, sempre esperamos que os preços se ajustem rapidamente, a fim de inibir arbitragem.”

Estes conceitos são utilizados para calcular um **preço justo** para os ativos ou derivativos financeiros livres de arbitragem, apesar de na prática, existirem oportunidades de arbitragem momentâneas no mercado.

#### **Definição 3.12: Teorema de Arbitragem:**

- a existência de um fator de desconto estocástico elimina a possibilidade de arbitragem.
- a existência de um fator de desconto estocástico é equivalente à existência de um preço de mercado pelo risco.

- o preço de mercado pelo risco é determinado pela aversão a riscos dos agentes e, conseqüentemente à existência de um fator de desconto estocástico.

De acordo com GLASSERMAN (2003: 33), uma vez feita a mudança de medida descrita na equação (3.36), pode-se estimar o preço de mercado pelo risco, uma vez conhecida a trajetória de  $R(t, T)$  pelos preços de mercado.

**Definição 3.13: Teorema de Girsanov.**

O processo  $dB^Q(t) = -\lambda(t)dt + dB^P(t)$  é um movimento browniano padrão com respeito a Q, uma vez que:

$$\begin{aligned}
 &\text{se } X(t) = \exp\left[-\frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma(u)\|^2 du + \int_0^t \gamma(u)dB(u)\right] \\
 &\text{e } \int_0^t \|\gamma(u)\|^2 du < \infty \text{ e } \mathbb{E}_P[X(t)] = 1, \text{ então} \\
 &\{X(t), t \in [0, T]\} \text{ é um martingale} \\
 &\text{e a medida Q, definida por:} \\
 &\frac{dQ}{dP} = X(T), \text{ é equivalente a P.}
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

Dentre os resultados de interesse do Teorema de Girsanov para a teoria de finanças está a mudança de medidas equivalentes para processos estocásticos, que assegura que a taxa de retorno esperada por um ativo, definida pela função arrasto  $\mu(t)$  em sua equação de movimento, é diferente sob distintas medidas de probabilidades P e Q.

**3.3. Momentos Condicionais**

Processos estocásticos, conforme SPANOS (1999:337), ultrapassam o modelo estatístico simples, que utiliza-se de amostras aleatórias de variáveis independentes e identicamente distribuídas (IID). Ao contrário, estes processos são realizações de variáveis aleatórias, cuja sequência apresenta propriedades de dependência ou

heterogeneidade. Para tratar realisticamente amostras não aleatórias, faz-se necessário o entendimento de alguns conceitos estatísticos.

HAMILTON (1994: 740) define **momentos amostrais**, como “uma estimativa particular do momento populacional baseada em um conjunto observado de dados”, por exemplo, uma amostra  $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ . Em sua forma geral, o momento amostral de ordem  $r$  é dado por:

$$\hat{m}_r = \frac{1}{T} (x_1^r + x_2^r + \dots + x_T^r) \quad (3.40)$$

A amostra tem como sua função densidade de probabilidade conjunta  $f_{X_1, X_2, \dots, X_T}$ , que calcula a probabilidade  $P\{X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2; \dots; X_T \leq x_T\}$ :

$$P\{X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2; \dots; X_T \leq x_T\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_T} f_{f_{X_1, X_2, \dots, X_T}} dX_1 dX_2 \dots dX_T \quad (3.41)$$

E a função densidade marginal  $f_{X_1}$  é obtida por:

$$f_{X_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{f_{X_1, X_2, \dots, X_T}} dX_2 \dots dX_T \quad (3.42)$$

No caso do modelo estatístico simples com variáveis IID, a função densidade conjunta da amostra é o produto das densidades marginais univariadas, devido à independência entre as variáveis. Já no caso de uma amostra sequencial, ou não aleatória, faz-se necessária a noção de condicionamento para descrever a função densidade conjunta.

$$f_{X_1, \dots, X_T} = f_{X_1} \prod_{k=2}^T f_{X_k | X_{k-1}, \dots, X_1} \quad (3.43)$$

Portanto, o condicionamento, como apresentado a seguir, é uma das formas de se modelar a dependência entre variáveis aleatórias sequenciais. Note que, as

densidades marginais são adequadas a processos, que não haja informação passada recente disponível, de modo a auxiliar um procedimento de previsão.

Ocorre que, segundo GOURIEROUX e JASIAK (2001: 13), a esperança e a variância de retornos de ativos, por exemplo, são parcialmente previsíveis pelo seu passado. Esta propriedade é conhecida como dependência temporal e exige uma abordagem dinâmica, que consiste em atualizar os seus momentos condicionais ao condicioná-los às suas observações passadas. Neste trabalho, limita-se a análise de momentos aos seus momentos condicionais de primeira e de segunda ordens.

### 3.3.1. O Conceito de Condicionamento

Para generalizar o conceito de condicionamento, ao invés de condicionar uma função densidade a uma única realização da amostra, ou seja, a um evento específico, SPANOS (1999: 356) sugere, que leve-se em consideração todos os eventos possíveis relacionados à realização da variável aleatória  $X$ , e não apenas um intervalo de valores pertinentes.

Formaliza-se o condicionamento, dentro de um contexto de espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , à  $\sigma$ -álgebra gerada pela variável aleatória  $X$ . Esta formalização permite a definição das funções de momento condicional estocástico:

$$m_r(X) = \mathbb{E}[X^r | \mathfrak{F}] \quad (3.44)$$

Note, que deve-se diferenciar o momento amostral da função de momento condicional estocástico, uma vez que esta é uma variável aleatória, sendo uma função de variáveis aleatórias.

### 3.3.2. Esperança Condicional

De acordo com OKSENDAL (1998: 295), a esperança condicional de  $X$  dado  $\mathcal{D}$ , denotado por  $\mathbb{E}[X | \mathcal{D}]$ , segue a definição abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{Seja o espaço de probabilidade } (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \mathcal{D} \subset \mathfrak{F} \text{ e} \\ &X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ uma var.aleatória com } \mathbb{E}[X] < \infty \\ &\int_{\mathcal{D}} \mathbb{E}[X | \mathcal{D}] dP = \int_{\mathcal{D}} X dP, \text{ para todo } D \in \mathcal{D} \quad (3.45) \\ &\text{então: } \mathbb{E}[X | \mathcal{D}] \text{ é uma função única de } \Omega \text{ em } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

No âmbito dos problemas financeiros, o condicionamento refere-se às informações passadas, ou seja, ao descrever uma equação de movimento para a trajetória de preços de um ativo, por exemplo, pode-se condicionar a trajetória futura e desconhecida destes preços à toda a informação disponível sobre preços históricos do passado.

Em termos de suas funções densidade de probabilidade, uma série ou uma amostra de  $n$  observações de um processo estocástico apresenta sua função densidade conjunta,  $f(x_1, \dots, x_n)$ , e portanto a função densidade de probabilidade de  $x_n$  condicional às observações passadas  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  é:

$$f(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_n | \mathfrak{F}_{n-1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_{n-1})} \quad (3.46)$$

E a esperança condicional de  $x_n$  condicional às observações passadas  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  é:

$$\mathbb{E}[x_n | x_1, \dots, x_{n-1}] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n f(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) dx_n \quad (3.47)$$

**Definição 3.14: Propriedade de Markov.** Um processo estocástico  $\{X(t)\}$  é conhecido como processo de Markov, segundo SPANOS (1999: 433):

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < \infty$$

$$f(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_k | x_{t_{k-1}}) \quad (3.48)$$

Alguns processos estocásticos, como movimento browniano, têm a propriedade acima, também conhecida como **dependência de Markov**, pois dependem apenas da última informação disponível e independe das ocorrências anteriores a esta. Para três observações  $(x_m, x_k, x_n)$ ,  $m < k < n$ , a relação abaixo entre as densidades condicionais aos três instantes de tempo, denominada **equação de Chapman-Kolmogorov**:

$$f(x_n | x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_n | x_k) f(x_k | x_m) dx_k \quad (3.49)$$

Note, que na equação acima,  $f(x_n | x_m)$  é conhecida como densidade de transição, uma vez que representa a densidade de probabilidade de ter uma sequência de observações do tipo  $(x_m, x_n)$ .

### 3.4. Modelos para Estrutura Temporal

Em uma de suas aplicações, segundo DUFFEE e STANTON (2004: 1), modelos de estrutura temporal especificam a trajetória das taxas de juros de curto prazo e também para o prêmio de risco exigido pelos investidores para aplicarem em títulos de prazos mais longos, devido ao risco de variação das taxas de juros. Quando sujeito a riscos de crédito, o investidor avalia os riscos de variações nas taxas de juros livres de risco e também do risco de crédito.

Neste tipo de modelo, utiliza-se a especificação da forma funcional com parâmetros desconhecidos para descrever os preços históricos observados. Portanto, ao especificar uma forma funcional com distribuição de probabilidade conhecida, pode-se estimar os parâmetros de interesse por algum dos métodos de estimação descritos

em Hamilton (1994), como o de máxima verossimilhança – *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) em Hamilton (1994: 117), método de momentos generalizados – *Generalized Method of Moments* (GMM) em Hamilton (1994: 409) ou pelo Filtro de Kalman, descrito em Hamilton (1994: 372).

De acordo com SUNDARESAN (2000: 1571), os modelos de estrutura temporal em tempo contínuo tiveram a seguinte evolução nos últimos 25 anos:

- **estabelecimento de uma relação** na forma de uma equação de movimento dinâmico, a qual tem uma solução explícita e analítica segundo o cálculo de Itô, exemplo do processo Ohrstein-Uhrlenbeck por VASICEK (1977);
- **reconciliação entre a teoria e algumas observações empíricas**, teorema de arbitragem e a reversão à média, utilizados por VASICEK (1977) ou não negatividade das taxas de juros, proposta pelo processo raiz quadrada de COX, INGERSOLL e ROSS (1985), ou mesmo o insucesso dos modelos de um fator em replicar as diversas formas possíveis da estrutura temporal de taxas de juros;
- **incorporação de efeitos reais** nos modelos, tais como custos de transação, impostos, assimetria de informações etc.;
- **calibragem dos modelos aos dados de mercado**, como, por exemplo, a estrutura temporal de taxas de juros ou a estrutura temporal de volatilidades, estimando os parâmetros da equação de movimento, a fim de utilizá-la na avaliação de outros ativos e derivativos;
- como progressão lógica da atividade de pesquisa, a **estimação** dos modelos tornou-se uma área mais ativa de trabalhos científicos, onde a econometria contribui com diversas abordagens paramétricas e não paramétricas.



Em relação à estrutura temporal das taxas de juros, o teorema da arbitragem tem dois propósitos: (i) avaliar todos os títulos zero-cupom livres de risco de variados vencimentos, a partir de um número finito de variáveis econômicas (variáveis de estado) ou **fatores de risco**; e (ii) avaliar todos fluxos de caixa sensíveis às taxas de juros tomando como base os preços dos títulos zero-cupom ou uma estrutura temporal de taxas de juros.

No primeiro, busca-se uma especificação para a trajetória ou equação de movimento das taxas de juros e, em seguida, utilizam-se preços observados para a calibragem aos dados de mercado. Inicialmente, a evolução da teoria sobre a estrutura temporal ocorreu à medida que novos processos eram introduzidos na especificação das trajetórias das taxas de juros.

Porém, esbarrava-se na limitação de buscar soluções analíticas para a EDE especificada. Com a utilização da mudança de medidas de probabilidades sugerida por HARRISON e KREPS (1979: 381), permitiu-se especificações alternativas mais complexas, tais como com vários fatores de risco, então restritas ao conhecimento da distribuição de probabilidades do processo estocástico.

Com a evolução também dos métodos de estimação, a distribuição dos processos não precisa mais, necessariamente, ser identificada e conhecida. Por isso, extensões destes modelos incluem também descontinuidades em sua trajetória, tais como saltos ou mudanças de regime. A utilização de métodos de simulação também viabiliza a utilização de processos mais complexos.

O modelo de estrutura temporal sujeito ao risco de crédito de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 119) utiliza algumas idéias introduzidas por VASICEK (1977: 177) e por COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398) e, por isso, torna-se necessária uma melhor compreensão destes modelos.

### 3.4.1. Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juros

Os modelos de estrutura temporal de taxas de juros tiveram, segundo SUNDARESAN (2000: 1581), grande importância no desenvolvimento da teoria de finanças em tempo contínuo. Estes modelos descrevem o comportamento estocástico das taxas de juros para todos os prazos, portanto eles têm foco na trajetória de toda a curva de juros, e não de uma única variável.

Estes modelos derivam um processo para a taxa de juros de curto prazo livre de risco  $\{r_t\}$ . A taxa instantânea  $r_t$  é uma taxa de curto prazo, que se aplica por um período infinitesimal. A variável aleatória de interesse a estes modelos é o processo  $\{r_t\}$  em uma medida de probabilidade neutra ao risco.

O valor de mercado de um fluxo de caixa futuro  $f_T$  no período de tempo  $T$  é:  $\mathbb{E}_t^{P^*} [\exp(-\bar{r}(T-t)) f_T]$ . Onde  $\bar{r}$  é o valor médio de  $r$  no intervalo de tempo  $[t, T]$  e  $P^*$  é uma medida de probabilidade neutra ao risco.

Para tais modelos, define-se  $P(t, T)$  como o preço no instante de tempo  $t$  de um título negociado com desconto (zero cupom) com um fluxo de caixa de \$1 no seu vencimento no instante de tempo  $T$ . Logo,

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^{P^*} \left[ \exp(-\bar{r}(T-t)) \right] \quad (3.50)$$

Ou, para um processo  $\{r_t\}$  qualquer,

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^{P^*} \left[ \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right] \quad (3.51)$$

Se  $R(t, T)$  é uma taxa de juros continuamente composta no instante de tempo  $t$  para o prazo  $(T-t)$ , a relação para a estrutura temporal das taxas de juros é dada por:

$$\begin{aligned}
P(t,T) &= \exp(-R(t,T)[T-t]) \\
R(t,T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T) \\
R(t,T) &= -\frac{1}{T-t} \ln \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}^*} \left[ \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

A equação (3.52) mostra que, uma vez definido o processo para  $\{r_t\}$  neutro ao risco, estará completamente definida a estrutura temporal e sua trajetória futura.

Portanto, os modelos a seguir buscam identificar o processo para a taxa de juros de curto prazo. Pelo fato da estrutura temporal ser totalmente definida a partir de um único parâmetro, estes modelos são conhecidos como modelos de um fator, segundo HULL (2002). Estas formulações implicam, que todas as taxas de juros movem na mesma direção durante um mesmo intervalo curto de tempo, mas não necessariamente na mesma magnitude. Usualmente, os processos para  $\{r_t\}$  são descritos em uma probabilidade neutra ao risco por um processo de Itô.

No entanto, há diversas especificações alternativas para o processo  $\{r_t\}$  em modelos de um fator, segundo SUNDARESAN (2000:1582), conforme a equação (3.53) e seus parâmetros descritos na Tabela 1 abaixo.

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dB(t) \tag{3.53}$$

**Tabela 1:** Especificações alternativas para o processo de taxas de juros em modelos de um fator para a estrutura temporal

$\mu(r)$	$\sigma(r)$	Estacionário	Referência
$\beta(\alpha - r)$	$\sigma$	Sim	VASICEK (1977)
$\beta(\alpha - r)$	$\sigma r^{1/2}$	Sim	COX, INGERSOLL e ROSS (1985)
$\beta(\alpha - r)$	$\sqrt{\sigma + \gamma r}$	Sim	DUFFIE e KAN (1996)
$\beta r(\alpha - \ln r)$	$\sigma r$	Sim	BRENNAN e SCHWARTZ (1979)

### 3.4.1.1. Modelo de Vasicek

De acordo com VASICEK (1977: 177), a forma geral de modelos de estrutura temporal assume as seguintes premissas:

- a taxa de juros segue um processo estocástico de difusão;
- o preço de um título depende apenas da taxa de juros de hoje até o seu vencimento;
- o mercado é eficiente.

Sob estas premissas e um argumento de ausência de arbitragem, VASICEK (1977: 177) mostra que a taxa de retorno esperada de título acima da taxa de juros até seu vencimento é proporcional ao seu desvio-padrão. Intuitivamente, este resultado é verdadeiro, pois ao considerar o desvio-padrão das taxas de juros como uma medida de risco, nota-se que um investidor avesso ao risco demandará um maior retorno para compensá-lo neste investimento. Utiliza-se este resultado para derivar uma forma funcional para os preços dos títulos.

De acordo com VASICEK (1977), há fortes argumentos econômicos, para que o processo para a taxa de curto prazo esteja sujeito a uma reversão à média de longo prazo. Logo, quando as taxas estão altas, há um desaquecimento da economia, uma redução nas transações e menor demanda por moeda. Como resultado, as taxas estarão sujeitas a uma queda. Ao contrário, quando há taxas muito baixas, aumenta a demanda por recursos, impactando em taxas mais altas no futuro.

Por isso, VASICEK (1977) sugere um modelo para o processo  $\{r_t\}$ , que incorpora o efeito de reversão à média:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dB_t \quad (3.54)$$

Na equação acima,  $b$  é a taxa média de equilíbrio e  $a$  é taxa de ajustamento à média. Além disso, é imposto um termo estocástico  $\sigma dB_t$ , normalmente distribuído. Note, que o processo acima é um Orstein-Uhlenbeck. Este processo tem solução explícita, como em VASICEK (1977), resultando para a estrutura temporal, sob os argumento de ausência de arbitragem e de eficiência de mercado, após determinados  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}
 R(t,T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T) = -\frac{1}{T-t} [\ln A(t,T) - B(t,T)r(t)] \\
 A(t,T) &= \exp\left(\frac{(B(t,T)-T+t)(a^2b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 [B(t,T)]^2}{4a}\right) \\
 B(t,T) &= \frac{1 - \exp(-a(T-t))}{a}
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

A crítica ao modelo de Vasicek é sobre a distribuição do processo para a taxa de curto prazo. Por assumir normalidade, nesta especificação as taxas de juros no futuro podem ser negativas, ao contrário da realidade. Uma das alternativas a esta modelagem foi feita por COX, INGERSOLL e ROSS (1985), apresentado a seguir.

A modelagem de Vasicek permite uma descrição do processo estocástico observado para os *spreads* de crédito, uma vez que estes podem assumir valores negativos, além de terem um comportamento de reversão à média de longo prazo.

#### 3.4.1.2. Modelo Cox-Ingersoll-Ross

COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398) ampliam o modelo de VASICEK (1977), o qual assumia apenas um único fator aleatório, a taxa de juros, para explicar os preços de títulos, argumentando que esta modelagem é bastante restritiva, por implicar nas seguintes propriedades:

- os preços de títulos não dependem da trajetória seguida pela taxa de juros;

- as variações de preços de títulos de diferentes vencimentos sejam perfeitamente correlacionadas;
- o processo Orstein-Uhrlenbeck utilizado permite a possibilidade de taxas de juros negativas, incoerente com o caso real.

O modelo de estrutura temporal multifatorial proposto por COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398) tem maior flexibilidade para ajustar-se à realidade, sob o custo de uma maior dificuldade em analisá-lo. Sua outra contribuição ocorreu na utilização do processo raiz quadrada, que permite apenas valores positivos para as taxas de juros.

Desta forma, no modelo de COX, INGERSOLL e ROSS (1985), as taxas de juros assumem sempre valores não negativos, além de representar o fenômeno de reversão à média proposto por Vasicek. O processo univariado descrito pelas taxas de juros é:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dB_t \quad (3.56)$$

Este processo, conhecido como processo da raiz quadrada, tem um termo estocástico com variância proporcional ao nível das taxas de juros, ou seja, taxas mais altas, implicam em maior volatilidade das taxas de juros. O processo raiz quadrada também permite uma solução analítica, e COX, INGERSOLL e ROSS (1985) mostram, que os preços  $P(t, T)$  têm a mesma forma que em Vasicek (1977), ou seja a primeira equação de (3.55), mas com valores distintos para  $A(t, T)$  e  $B(t, T)$ :

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma \exp((a + \gamma)(T - t)/2)}{2\gamma + (a + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1)} \right]^{2ab/\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(\exp(\gamma(T - t)) - 1)}{2\gamma + (a + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1)} \quad (3.57)$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Por exemplo, se  $r(t)$  for especificado como um processo raiz quadrada abaixo:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dB(t) \quad (3.58)$$

Então, a distribuição de  $r(t)$  condicional a  $r(u)$ ,  $u < t$ , é uma quiquadrado não-centralizada com  $n$  graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade  $\delta$ , e pode ser descrita por:

$$r(t) = \frac{\sigma^2(1 - \exp(-a(t-u)))}{4a} \chi_n^2 \left( \frac{4a \exp(-a(t-u))}{\sigma^2(1 - \exp(-a(t-u)))} r(u) \right) \quad (3.59)$$

$$n = \frac{4ab}{\sigma^2} \quad (3.60)$$

$$\delta = \frac{4a \exp(-a(t-u))}{\sigma^2(1 - \exp(-a(t-u)))} r(u) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \Pr(\chi_n^2(\delta) \leq y) &= F_{\chi_n^2(\delta)}(y) = \\ &= \exp(-\delta/2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\delta\right)^j / j!}{2^{(n/2)+j} \Gamma(n/2 + j)} \int_0^y z^{(n/2)+j-1} \exp(-z/2) dz \end{aligned} \quad (3.62)$$

Apesar de permitir uma solução explícita, na prática há uma dificuldade em estimar os parâmetros da distribuição condicional de  $R(t, T)$ , dada a forma de sua distribuição. Como o preço de um título é dado pela primeira equação de (3.55), utilizando os valores de (3.57), ele depende então explicitamente de  $\gamma$ , conhecido como preço de mercado pelo risco. COX, INGERSOLL e ROSS (1985) fixam este parâmetro e determinam endogenamente o processo estocástico para as taxas de juros a termo.

Devido a algumas restrições para a obtenção da solução analítica, COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 390) não é consistente com todo tipo possível de curvas de juros. De acordo com as críticas de HEATH, JARROW e MORTON

(1992), isto acontece, pois o modelo de um fator de COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 390) é baseado em uma única variável de estado: a taxa de juros de curto prazo.

Há, entretanto, a formulação multifatorial de COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 398), a qual permite que a taxa de juros seja uma função dos diversos fatores de risco. Considera-se, conforme SUNDARESAN (2000: 1584), entre as diversas especificações descritas na Tabela 2, quais variáveis de estado são caracterizadas como fatores de risco, bem como as relações entre elas.

**Tabela 2:** Especificações alternativas para o processo de taxas de juros em modelos multifatoriais para a estrutura temporal

Variáveis de Estado	Relação entre variáveis	Referências
Várias variáveis não-observáveis	Taxa de curto prazo é a soma de todas as variáveis de estado	LANGETIEG (1980)
Taxas de curto e de longo prazos	Correlacionadas	LONGSTAFF e SCHWARTZ (1979)
Taxa de curto prazo e sua volatilidade	Correlacionadas	LONGSTAFF e SCHWARTZ (1992)
Não especificadas	Flexível e correlacionadas	DUFFIE e KAN (1996)

Baseando-se nos modelos de dois e de três fatores de COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 398), alguns autores, como DAI e SINGLETON (2000: 1943) e também AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002: 16), apresentam diversas especificações para o problema de identificar e estimar a estrutura temporal de taxas de juros.

A especificação da volatilidade das taxas de juros como um dos fatores de risco na estrutura temporal é bastante usual, conforme LONGSTAFF e SCHWARTZ (1992)



e DAI e SINGLETON (2000: 1943), e a estimação dos valores é feita por um dos modelos de volatilidade estocástica.

Para um modelo de dois fatores, a taxa de juros de curto prazo e sua volatilidade, a especificação, segundo COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 398) é dada por:

$$d \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & 0 \\ K_{rv} & K_{rr} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \theta_v \\ \theta_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \right) dt + \sqrt{v(t)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Sigma_{rv} & \Sigma_{rr} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_v \\ W_r \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Note que, no termo de reversão à média, o arrasto de  $v(t)$  não depende diretamente de  $r(t)$  devido ao coeficiente zero na matriz  $K_{vr} = 0$ . Ao contrário, o arrasto de  $r(t)$  depende tanto do nível das taxas de juros como de sua volatilidade.

E para completar o modelo, especifica-se a distribuição do movimento browniano neutro ao risco  $\tilde{W} = (\tilde{W}_v, \tilde{W}_r)^T$  como:

$$d \begin{bmatrix} W_v \\ W_r \end{bmatrix} = -\sqrt{v(t)} \begin{bmatrix} \lambda_v \\ \lambda_r \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \tilde{W}_v \\ \tilde{W}_r \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Os componentes do vetor  $\lambda = (\lambda_v, \lambda_r)^T$  são conhecidos como **preços de mercado pelos riscos** associados aos dois fatores.

### 3.4.2. Modelos de estrutura temporal para títulos com risco de *default*

A fim de especificar a trajetória de preços de títulos sujeitos ao risco de *default*, DUFFIE e SINGLETON (1999) propõe que, sob certas restrições, é possível descrever o preço deste título como:

$$p(t, T) = \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^T R_s ds \right) \right] \quad (3.65)$$

Onde  $R_t = (r_t + \lambda_t L_t) = (r_t + s_t)$  pode ser interpretada como a taxa de desconto ajustada ao risco de default ou à taxa de perda esperada devida ao evento de default. Esta abordagem, segundo SUNDARESAN (2000) generaliza a avaliação de títulos sem risco de default para a de fluxos de caixa sujeitos a riscos de crédito.

Os modelos de VASICEK (1977) e de COX, INGERSOLL e ROSS (1985) foram desenvolvidos para especificar o processo  $\{r_t\}$ , enquanto a próxima seção busca especificações para o processo  $\{s_t\}$ .

#### 3.4.2.1. Modelo DUFFIE-SINGLETON

DUFFIE e SINGLETON (1999) adaptam a metodologia multifatorial de COX, INGERSOLL e ROSS (1985) ao caso de títulos ou da estrutura temporal sujeita a riscos de default. Esta adaptação é feita mudando o processo de taxas de juros livres de risco de default para um processo ajustado a este risco.

O modelo sugerido decompõe a taxa de desconto ajustada ao risco de crédito em uma taxa de juros livre de risco mais um *spread* pelo risco de crédito. DUFFIE e SINGLETON (1999) aplicam este processo à avaliação dos preços de títulos soberanos com risco de default.

Uma vez identificada a trajetória dos *spreads*, pode-se buscar a parametrização das perdas no valor de mercado sob um evento de default ou mesmo a correlação entre os *spreads* soberanos e variáveis macroeconômicas. O presente trabalho visa apenas a identificação do processo  $\{s_t\}$ .

DUFFIE e SINGLETON (1999) mostram, que este fluxo de caixa pode ser avaliado como se fosse livre de risco de crédito, ao mudar o processo usual para taxa  $r$ , por um processo de taxa de desconto ajustada ao risco de *default*. Mede-se o *spread*

como excesso da taxa de desconto sobre a taxa livre de risco. Isto é, sob certas condições descritas em HARRISON e KREPS (1979), o valor de mercado  $V_0$  deste título sujeito a risco de crédito é:

$$V_0 = \mathbb{E}_0^Q \left[ X \exp \left( - \int_0^T R_t dt \right) \right] \quad (3.66)$$

Na equação acima,  $\mathbb{E}_0^Q$  denota esperança condicional neutra ao risco na data  $t=0$ . A taxa de desconto  $R$  considera além da estrutura temporal das taxas de juros, a probabilidade de default ao longo da vida do título e as perdas associadas a um evento de default.

A partir do comportamento conjunto dos processos  $s$  e  $r$ , juntamente com o prêmio de mercado pelo risco, pode-se caracterizar a trajetória da estrutura temporal do rendimento destes títulos (sujeitos a risco de crédito).

Nas aplicações práticas, pode-se observar os preços de mercado destes títulos, estimar o processo para a taxa livre de risco por dados de mercado e então, identificar o prêmio de mercado pelo risco de crédito.

Um dos temas de interesse em finanças é como o mercado compensa investidores pelo risco de crédito incorrido ao manter títulos emitidos por entidades (públicas ou privadas) com possibilidades de não pagamento de suas obrigações. Eventos recentes, como as crises financeiras no final da década de 90, assim como as crises argentina em 2001 e brasileira em 2002, demonstram que mudanças na propensão dos investidores de manter estes riscos de crédito em suas carteiras, podem trazer efeitos dramáticos nos mercados financeiros. Além disso, tais eventos indicam que a variação nos prêmios de crédito pode refletir tanto a mudança na percepção de risco de default, como na liquidez relativa dos títulos.

### 3.4.2.1. Modelo DUFFIE-PEDERSEN-SINGLETON

O modelo de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 119) utiliza o modelo multifatorial de COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398) para descrever a forma funcional para o *spread* de crédito dos títulos públicos federais.

Ao escolher o processo estocástico para descrever cada um dos fatores de risco, busca-se adequá-los a sua realidade. Desta forma, por exemplo, taxas de juros livres de risco e sua volatilidade são estritamente positivas e elegíveis a serem descritas por um processo raiz quadrada, como em COX, INGERSOLL e ROSS (1985:398). Já os *spreads* de crédito podem assumir valores negativos e tendem a uma média de longo prazo, o que sugere um processo Orstein-Uhlenbeck.

Desconta-se os fluxos de caixa prometidos por um título soberano com uma taxa de desconto ajustada ao risco de default,  $R(t)$ , e DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 127) definem esta taxa de desconto  $R(t)$  como a soma algébrica da taxa de juros sem risco de crédito ou de referência,  $r(t)$ , mais o *spread* de crédito pelo risco soberano,  $s(t)$ :

$$R(t) = r(t) + s(t) \quad (3.67)$$

O preço de mercado no instante de tempo  $t$  dos títulos soberanos com vencimento no instante de tempo  $T$ ,  $P(t)$ , e a taxa de juros de referência,  $r(t)$ , definem o seu *spread*  $s(t)$ , de acordo com a expectativa:

$$P(t) = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_t^T R(u) du} \right) \quad (3.68)$$

DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 130-134) utilizam um modelo de três fatores, sendo  $r(t)$ ,  $s(t)$  e  $v(t)$ , onde o fator  $v(t)$  é a volatilidade estocástica de  $r(t)$  estimada por um modelo GARCH (1,1), conforme descrição de BOLLERSLEV (1986). A trajetória dos processo sob a medida de probabilidade real é descrita por:

$$R(t) = r(t) + s(t)$$

e sua forma dinâmica:

$$d \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & 0 & 0 \\ K_{rv} & K_{rr} & 0 \\ K_{sv} & K_{sr} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_v \\ \theta_r \\ \theta_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Sigma_{rv} & \Sigma_{rr} & 0 \\ \Sigma_{sv} & \Sigma_{sr} & \Sigma_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_v \\ W_r \\ W_s \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

onde  $W = (W_v, W_r, W_s)^T$  é um movimento browniano padrão no  $\mathbb{R}^3$

E para completar o modelo, DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 133) especificam a distribuição do movimento browniano neutro ao risco

$\tilde{W} = (\tilde{W}_v, \tilde{W}_r, \tilde{W}_s)^T$  como:

$$d \begin{bmatrix} W_v \\ W_r \\ W_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_v \\ \lambda_r \\ \lambda_s \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \tilde{W}_v \\ \tilde{W}_r \\ \tilde{W}_s \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Os componentes do vetor  $\lambda = (\lambda_v, \lambda_r, \lambda_s)^T$  são conhecidos como **preços de mercado pelos riscos** associados aos três fatores.

Nota-se, que o *spread* de crédito  $s(t)$  é modelado como processo gaussiano, podendo então assumir valores negativos. De acordo com os autores, isso não é logicamente inconsistente com o modelo teórico, uma vez que  $s(t)$  pode tornar-se negativo devido a fatores de liquidez ou investimento compulsório nestes títulos. Por este modelo, a função arrasto de  $s(t)$  sofre influência de  $v(t)$  e de  $r(t)$ , como espera-se para o *spread* de crédito:  $K_{sv} \neq 0; K_{sr} \neq 0$ .

Ao contrário,  $r(t)$  e  $v(t)$  são processos raiz quadrada, os quais não podem assumir valores negativos. Além disso,  $v(t)$  influencia  $r(t)$ , mas não o contrário:  $K_{rv} \neq 0; K_{vr} = 0$ .

Além disso, define-se  $v(t)$  como um modelo GARCH (1,1) da taxa de juros  $r(t)$ , de acordo com BOLLERSLEV (1986: 311), em sua forma discreta:

$$v_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_t^2 + a_2 v_{t-1}^2 \quad (3.71)$$

Esta parametrização permite tanto a correlação de sinal irrestrito entre os fatores, como a volatilidade estocástica em  $r(t)$  induzida por  $v(t)$ . Uma parametrização alternativa, como processos puramente gaussianos ou puramente raiz quadrada de dois fatores, como descrito em COX, INGERSOLL e ROSS (1985: 398) pode acomodar uma ou outra destas restrições, mas não as duas ao mesmo tempo.

AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002: 23) obtiveram para os parâmetros de (3.69) e (3.70) condições de existência e de estacionariedade, assim como para outros modelos de dois e três fatores.

Há, porém, na especificação de DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 133), a inconveniência de uma certa complexidade do modelo de três fatores, o que dificulta o processo de estimação. Faz-se necessária uma dose de parcimônia na especificação do modelo, a fim de viabilizar o processo de estimação dos parâmetros.

## 4. APLICAÇÃO DO MODELO DUFFIE-SINGLETON PARA TÍTULOS PÚBLICO FEDERAIS (LFT)

Este trabalho aplica uma variação do modelo de estrutura temporal para bônus sujeitos a riscos de default, implementado por DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 119) para títulos da dívida russa, testando-o para o mercado de títulos públicos federais e, em particular, LFT's no período entre janeiro de 2001 e março de 2004.

O modelo desenvolvido por DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 126) baseia-se na metodologia proposta por DUFFIE e SINGLETON (1999: 694) e permite a identificação do processo  $s(t)$  para o *spread* de crédito dos títulos, ou seja, o excesso de retorno prometido por um título em relação a sua taxa de juros de referência ou sua taxa de juros sem risco de crédito.

De acordo com DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 119), um evento de default para um crédito soberano não é uma data terminal para a negociação dos seus ativos. Ao contrário, o modelo permite a negociação e a formação de preços destes ativos soberanos de uma forma contínua, mesmo ao longo da ocorrência de eventos de default, conforme exemplos para os títulos da Rússia entre os anos de 1998 e 1999.

A aplicação proposta utiliza um modelo paramétrico de dois fatores para a estrutura temporal das taxas de desconto ajustadas ao risco de crédito: (i) a taxa de juros interbancária; (ii) e o *spread* de crédito. A especificação é semelhante àquela adotada por DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 133), no entanto, não considera os efeitos diretos da volatilidade estocástica  $v(t)$  no *spread*  $s(t)$ .

A razão, pela qual adota-se um modelo simplificado, é pela complexidade no procedimento de estimação do modelo de três fatores proposto por DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 130), ou seja, busca-se aqui uma implementação de um modelo simplificado, apesar da utilização do mesmo arcabouço teórico necessário ao modelo completo.

Além da redução em um dos fatores, considera-se a independência entre os processos  $r(t)$  e  $s(t)$ , de modo a possibilitar o cálculo da função de verossimilhança na sua forma exata.

#### 4.1. Especificação do Modelo para a Estrutura Temporal dos *Spreads* de Crédito Soberano

A taxa de desconto  $R(t)$  é definida como a soma algébrica da taxa de juros sem risco de crédito ou de referência,  $r(t)$ , mais o *spread* de crédito pelo risco soberano,  $s(t)$ :

$$R(t) = r(t) + s(t) \quad (4.1)$$

O preço de mercado no instante de tempo  $t$  dos títulos soberanos com vencimento no instante de tempo  $T$ ,  $P(t)$ , e a taxa de juros de referência,  $r(t)$ , definem o seu *spread*  $s(t)$ , de acordo com a expectativa:

$$P(t) = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_t^T R(u) du} \right) \quad (4.2)$$

Para modelar a estrutura temporal de  $r(t)$  e  $s(t)$ , DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 130-134) utilizam um modelo dinâmico de difusão de três fatores, sendo  $r(t)$ ,  $s(t)$  e  $v(t)$ . Neste presente trabalho, considera-se um modelo dinâmico de difusão de dois fatores, onde exclui-se o fator  $v(t)$ , referente à volatilidade estocástica estimada de  $r(t)$ . Tal modelo de dois fatores tem sua forma geral, conforme AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002:18), descrito nas equações (4.3):



$$R(t) = \delta_0 + \delta_1 X_1(t) + \delta_2 X_2(t)$$

e sua forma dinâmica:

$$d \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sqrt{X_1(t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + \beta_{21} X_1(t)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} B_1^p(t) \\ B_2^p(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde  $\begin{bmatrix} B_1^p(t) & B_2^p(t) \end{bmatrix}^T$  é um movimento browniano padrão no  $\mathbb{R}^2$ .

Especificada nesta forma geral, a função de verossimilhança para o tipo de difusão descrita em (4.3) não é conhecida em um formato analítico. Porém, AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002:17) consideram que, ao restringir algumas das constantes acima, as duas variáveis de estado tornam-se independentes, e sua densidade conjunta de transição é o produto de duas funções densidade marginais de transição, uma gaussiana e outra quidradrada não-centrada, respectivamente.

$$R(t) = r(t) + s(t)$$

e sua forma dinâmica, após restringir:

$$K_{12} = K_{21} = \beta_{21} = 0 \quad (\text{independência})$$

$$\theta_2 = 0 \quad (\text{spread de longo prazo pelo risco de crédito})$$

$$d \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \theta_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_r \sqrt{r(t)} & 0 \\ 0 & 1 \cdot \sigma_s \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} B_1^p(t) \\ B_2^p(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Sob a medida neutra ao risco  $Q$ , as trajetória dinâmica do vetor de estado, após a mudança de medida de probabilidade e inclusão dos prêmios de mercado pelos riscos de taxa de juros e de crédito,  $\lambda_r$  e  $\lambda_s$ :

$$d \begin{bmatrix} B_1^p(t) \\ B_2^p(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sqrt{r(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_s \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^Q(t) \\ \tilde{B}_2^Q(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$d \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \theta_r K_r \\ -\lambda_s \sigma_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_r + \lambda_r & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_r \sqrt{r(t)} & 0 \\ 0 & 1 \cdot \sigma_s \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^Q(t) \\ \tilde{B}_2^Q(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Os componentes do vetor  $\lambda = (\lambda_r, \lambda_s)^T$  são conhecidos como **preços de mercado pelos riscos** associados ao dois fatores.

Nota-se, que o *spread* de crédito  $s(t)$  é modelado como processo gaussiano, podendo então assumir valores negativos. De acordo com DUFFIE, PEDERSEN e SINGLETON (2003: 130), isso não é logicamente inconsistente com o modelo teórico, uma vez que  $s(t)$  pode tornar-se negativo devido a fatores de liquidez ou investimento compulsório nestes títulos.

Ao contrário,  $r(t)$  é um processo raiz quadrada, o qual não pode assumir valores negativos.

Modelos de estrutura temporal objetivam a identificação dos parâmetros a partir de dados observados de preços de mercados de títulos de vários vencimentos. Conhecendo-se as séries observadas de  $r(t)$  e  $s(t)$ , pode-se estimar então o vetor  $\Psi$  de parâmetros de interesse, que nesse caso, reduz-se a:

$$\Psi = (K_{11}, K_{21}, K_{22}, \theta_r, \theta_s, \sigma_r, \sigma_s, \lambda_r, \lambda_s) = (K_r, K_s, \sigma_r, \sigma_s, \lambda_r, \lambda_s) \quad (4.7)$$

De acordo com AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002: 23), pode-se impor as restrições de existência da forma analítica,  $K_{11}\theta_r \geq 0; \theta_r \geq 0$ , sem deteriorar a modelagem proposta. Outra restrição, a fim de que os processos sejam estacionários, são necessários  $K_{11} > 0; K_{22} > 0$ . E, por último, impõe-se a taxa de juros de referência de longo prazo,  $\bar{\theta}_r = 0,20318$ , igual a sua média amostral de um prazo longo, utilizando-se dados diários do período de janeiro de 1999 a junho de 2004.

## 4.2. Estimação do Modelo para a Estrutura Temporal dos *Spreads* de Crédito Soberano

O método de estimação de modelos descritos através de equações de difusão, sejam univariadas ou multivariadas, depende do conhecimento ou não de sua distribuição de probabilidade. Ao especificar uma forma funcional com parâmetros desconhecidos para descrever os preços históricos observados, deve-se primeiramente avaliar se a distribuição conjunta dos dados amostrais é conhecida analiticamente.

Processos, cujas densidades de probabilidade conjunta sejam conhecidas, podem ser estimados pelo método de máxima verossimilhança, descrito a seguir, ou mesmo por outros métodos descritos em HAMILTON (1994), como filtro de Kalman, ou mesmo por simulação de momentos da distribuição. Método de momentos generalizados permite a estimação de parâmetros mesmo sem a forma exata de sua distribuição, conforme descrito em HAMILTON (1994), bastando estabelecer algumas condições de momentos para o procedimento de estimação.

### 4.2.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

De acordo com SPANOS (1999: 659), o **método de máxima verossimilhança** (MMV) foi desenvolvido para a abordagem de inferência. Tal abordagem especifica um modelo estatístico destinado a descrever probabilisticamente um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

Especifica-se, então, a sua distribuição conjunta,  $D(X_1, X_2, \dots, X_n; \psi)$ , além das distribuições condicionais e marginais deste conjunto. Ao obter um conjunto de dados observados  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , ou seja, uma realização da amostra, define-se a **função de verossimilhança**,  $L(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n)$ , como uma função proporcional à distribuição da amostra, mas interpretada como função de  $\psi$ :

$$L(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) \propto D(X_1, X_2, \dots, X_n; \psi) \quad (4.8)$$

Neste sentido, a função de verossimilhança avalia a pertinência, associada a diferentes valores dos parâmetros de interesse  $\psi$ , destes serem os verdadeiros parâmetros do mecanismo estocástico, que especifica a realização da amostra.

O **estimador de máxima verossimilhança** para  $\psi$  é o conjunto de parâmetros  $\hat{\psi}$ , tal que  $L(\hat{\psi}; x)$  maximiza a função  $L(\psi; x)$ , ou seja:

$$L(\hat{\psi}; x_1, x_2, \dots, x_n) = \max L(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.9)$$

Note, que por tratar-se de um procedimento de maximização, o estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\psi}$  pode: não existir; não ser único; ou não ter uma expressão analítica, devendo ser encontrado através de métodos numéricos, neste último caso.

Frequentemente, prefere-se maximizar o logaritmo da função de verossimilhança, por elas terem o mesmo ponto de máximo, e devido à propriedade da função logaritmo ser uma transformação monotônica. Portanto, se  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ , as condições de primeira ordem para os estimadores de MMV assumem a forma do sistema de equações:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \ln L(\psi; \mathbf{x})}{\partial \psi_1} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial \ln L(\psi; \mathbf{x})}{\partial \psi_2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

As condições de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança é dada pelo valor do determinante da **matriz de informação de Fisher**, que segundo SPANOS (1999: 610), deve ser não negativo, ou seja:

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{x})}{\partial \psi_1^2} \right) & \left( \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{x})}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} \right) \\ \left( \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{x})}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} \right) & \left( \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{x})}{\partial \psi_2^2} \right) \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\psi}=\hat{\boldsymbol{\psi}}} > 0 \quad (4.11)$$

#### 4.2.2 Estimação por Aproximação da Função de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança para o sistema descrito em (4.3) é conhecida analiticamente na sua forma exata apenas em alguns poucos casos particulares. Apesar de estes casos serem de interesse comum, busca-se um método alternativo para a estimação de uma classe mais ampla de modelos.

AÏT-SAHALIA e KIMMEL (2002:20) derivam uma aproximação para a densidade de transição do modelo dinâmico descrito em (4.3), através da expansão em séries de Taylor das densidades de probabilidade de transição. Os autores simulam a densidade de transição real do modelo especificado e comparam a aproximação sugerida com a densidade de transição exata do modelo descrito por (4.4). Mostram que as diferenças são muito pequenas, tanto em termos absolutos como relativos. Essa conclusão sugere a utilização da aproximação da função de verossimilhança para o modelo proposto em (4.6).

Neste trabalho, ao supor independência entre os processo  $r(t)$  e  $s(t)$ , para fins práticos, pode-se calcular a função de verossimilhança na forma exata, uma vez que ela é o produto de duas densidades marginais: uma quiquadrada não-centrada para  $r(t)$ , descrito por um processo raiz quadrada, e uma densidade gaussiana para  $s(t)$ , descrito por um processo Ohrstein-Uhrlenbeck.

Para os casos onde não há processos independentes, recomenda-se a utilização da forma aproximada da função de verossimilhança, uma vez que permite o seu cálculo através de uma soma finita de polinômios, facilitando o procedimento de estimação.

### 4.2.3 Funções densidade de probabilidade

Para o caso de processos independentes, a função de verossimilhança pode ser descrita pelo produto abaixo:

$$L_r(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_r^2} (r(i) - \theta_r)^2\right) \right)$$

$$L_s(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_s^2 (1 - e^{-K_r})}{4K_r} \chi_d^2 \left( \frac{4K_r e^{-K_r}}{\sigma_r^2 (1 - e^{-K_r})} s(i) \right) \right) \quad (4.12)$$

$$d = \frac{4\theta_r K_r}{\sigma_s^2} \quad (\text{graus de liberdade})$$

$$L(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) = L_r(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n) \times L_s(\psi; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Esta suposição de independência permite o cálculo de estimadores mais fácil computacionalmente.

No capítulo 5, apresenta-se os resultados obtidos da aplicação aqui proposta.

## **5. ANÁLISE DE DADOS**

A fim de aplicar o modelo descrito no capítulo 4, coleta-se dados no mercado brasileiro. Inicialmente, uma série de dados para a taxa de juros interbancária e, posteriormente, uma série de preços de títulos do tipo LFT com prazos de um ano até seu vencimento. Mostra-se, a seguir, qual o tratamento dado a estas séries, com a finalidade de obter um conjunto de dados necessários à estimação do modelo, ou seja, as trajetórias para os processos  $r(t)$  e  $s(t)$  no período entre janeiro de 2001 e maio de 2004, e apresenta-se também a trajetória das estimativas da volatilidade estocástica da taxa de juros, descrita pelo processo  $v(t)$ , conforme o gráfico 4.

### **5.1. Processo $r(t)$ : taxa de juros interbancária para 360 dias**

Para descrever a taxa de juros interbancária, obteve-se junto a Bloomberg News Service cotações diárias de uma taxa de swap interbancário entre taxas prefixadas de 360 dias e taxa média diária do Certificado de Depósito Interfinanceiro de um dia (CDI-Over) para o período entre janeiro de 1999 e junho de 2004.

As razões para buscar um período anterior a janeiro de 2001, encontram-se na intenção de estimar a volatilidade estocástica da taxa de juros neste período, bem como de calcular sua média de longo prazo, para refletir o efeito de reversão à média.

### **5.2. Processo $v(t)$ : volatilidade estocástica da taxa de juros interbancária**

Para estimar a volatilidade estocástica da taxa de juros interbancária, utilizou-se um modelo GARCH (1,1), estimado no software E-Views, versão 4.0. Os resultados para a previsão de um dia a frente pelo modelo GARCH (1,1) são apresentados nos gráficos 6 e 7.

Apesar de não ser utilizado para a estimação do modelo final, a inspeção gráfica da trajetória de  $v(t)$  sugere explorar sua relação com o processo  $s(t)$ , conforme observa-se no gráfico 4, da trajetória conjunta, e nos seus gráficos individuais 7 e 8, respectivamente.

### 5.3. Processo $s(t)$ : *spread* de crédito das LFTs

Alguma manipulação dos dados faz-se necessária, para trazer o *spread*  $s(t)$  para uma mesma base de comparação, que a série observada para  $r(t)$ . Isso, porque a LFT é um título de taxa flutuante ou de rentabilidade posfixada, conforme sua descrição na seção 2.4.3.1.

Portanto, o preço de negociação deste título é obtido através de um ágio (prêmio) ou deságio (desconto) sobre o valor de seu principal corrigido. Uma forma de comparar as taxas de juros interbancárias  $r(t)$  já obtidas com o *spread* da LFT, é transformar a LFT de um ano em um título prefixado sintético de um ano.

Por exemplo, para uma taxa de juros de um ano negociada a 17%a.a. e uma LFT de mesmo prazo negociada com deságio de 0,5%a.a., a rentabilidade  $R$  da LFT seria:

$$1 + R = (1 + r)(1 + s) \quad (5.1)$$

Ao fazer esta transformação para a séries de preços de LFTs obtida junto à ANDIMA, obtém-se a série para  $s(t)$  descrita no gráfico 8.

**Tabela 3:** Estatísticas descritivas dos processos.

	$r(t)$	$v(t)$	$s(t)$
Média	19,7032%	0,1733%	0,2712%
Desvio-padrão	3,8513%	0,2091%	0,7302%
Variância	0,1483%	0,0004%	0,0053%



#### 5.4. Modelo de dois fatores para a estrutura temporal

O modelo estimado a seguir é o da equação dinâmica para os processos  $r(t)$  e  $s(t)$ , apresentado em (4.4) que, juntamente com a mudança de medidas descrita em (4.5), resulta na equação (4.6), apresentada novamente abaixo, sob a medida de probabilidade  $Q$  neutra ao risco:

$$d \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \theta_r K_r \\ -\lambda_s \sigma_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_r + \lambda_r & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \right) dt + \begin{bmatrix} \sigma_r \sqrt{r(t)} & 0 \\ 0 & 1 \cdot \sigma_s \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^Q(t) \\ \tilde{B}_2^Q(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Os parâmetros de interesse a serem estimados resumem-se a:

$$\Psi = (K_r, K_s, \sigma_r, \sigma_s, \lambda_r, \lambda_s) \quad (5.3)$$

Adotou-se o método de estimação por máxima verossimilhança, utilizando-se para isso as funções pré-programadas do *software* MatLab, versão 6.1, descritas na Tabela 4 abaixo.

**Tabela 4:** Funções utilizadas no *software* MatLab, versão 6.1.

Código	Função	Descrição	Argumentos
mle	Estimação por máxima verossimilhança	Retorna os estimadores de máxima verossimilhança, para os dados amostras, sob a distribuição especificada.	Distribuição, dados, % significância.
Ncx2pdf	Função densidade Quidradrado não-centrada	Retorna o valor da função.	Dados, graus de liberdade, parâmetro de não-centralidade.
normpdf	Função densidade normal	Retorna o valor da função.	Dados, média e variância.

**Tabela 5:** Parâmetros estimados por máxima verossimilhança (95%).

	$K_r$	$K_s$	$\sigma_r$	$\sigma_s$	$\lambda_r$	$\lambda_s$
Estimadores	0,0004564	0,0078	0,0241	0,0014	-0,0653	-0,3462

Os sinais dos estimadores coincidem com as expectativas para  $\lambda_r$  e  $\lambda_s$  de terem sinais negativos. O sinal negativo para o prêmio de mercado pelo risco adiciona retorno acima da taxa livre de risco, como é desejado demonstrar.

#### 5.4. Teste de Razão de Verossimilhança para o Preço de Mercado do Risco de Crédito ( $\lambda_s$ )

Uma vez estimados os parâmetros do modelo original (irrestrito), o teste da significância do parâmetro estimado  $\hat{\lambda}_s$  pela razão de verossimilhança consiste na reestimação do modelo (5.2), com a restrição adicional  $\lambda_s = 0$ . Calcula-se, então o valor da função de máxima verossimilhança do modelo restrito.

A estatística do teste de razão de verossimilhança é a razão entre os valores máximos das funções de verossimilhança no modelo irrestrito ( $\lambda_s = \hat{\lambda}_s$ ) e no modelo restrito ( $\lambda_s = 0$ ). Esta estatística tem distribuição quiquadrado com um grau de liberdade, devido a sua única restrição, cujo valor crítico  $C_1$ , juntamente com os valores obtidos estão apresentados na Tabela 6. (maior que  $C_1$ , rejeita a hipótese)...

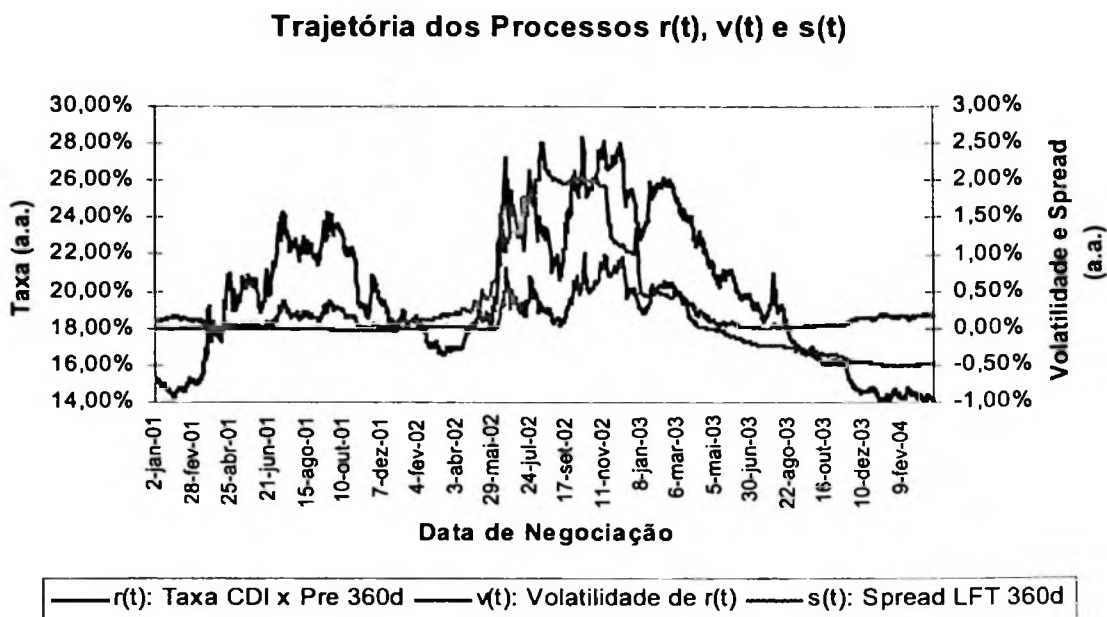
**Tabela 6:** Teste de Razão de Verossimilhança.

	$L_{irr}$	$L_r$	Razão	$C_1(75\%)$	$C_1(95\%)$
Valores	4,8814	4,7672	1,121	1,32	3,84

De acordo com a Tabela 6, não é possível rejeitar a hipótese  $H_0 : \lambda_s = 0$  nem a 75% de confiança, uma vez que a razão de verossimilhança não é significativamente diferente de um.

Portanto, apesar de apresentar um estimador igual a  $-0,3462$  e significativo a 95%, de acordo com o procedimento de máxima verossimilhança (Tabela 5), ao testar a hipótese do preço de mercado pelo risco de crédito ser igual a zero, não se pode rejeitá-la nem mesmo com 75% de grau de confiança.

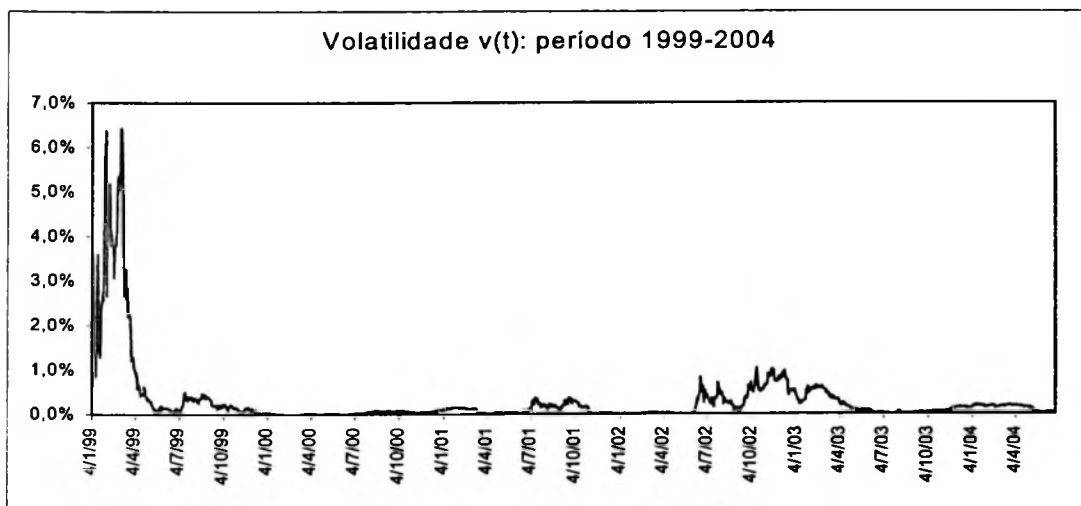
**Gráfico 4: Trajetórias para os processos estocásticos de interesse**



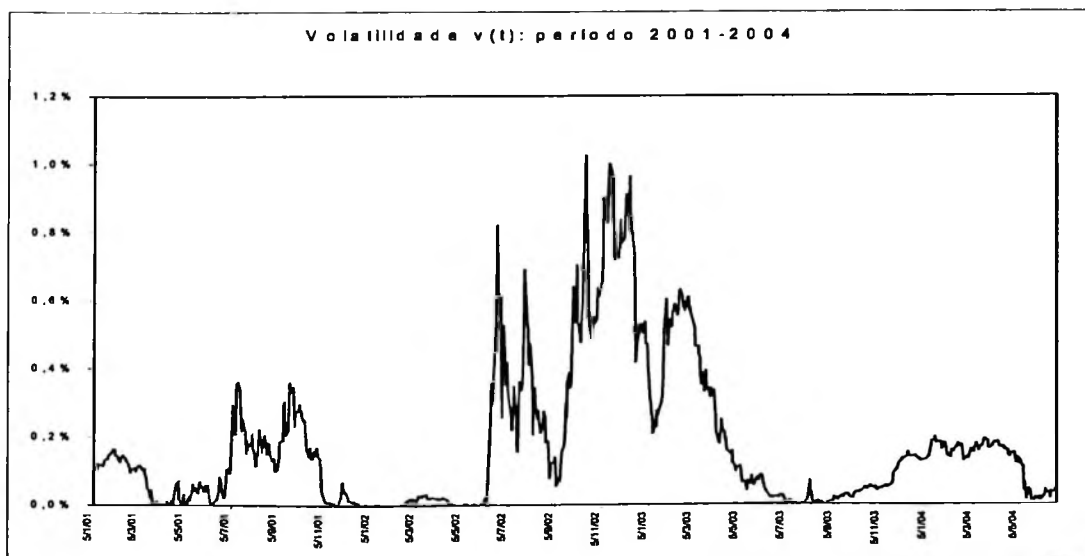
**Gráfico 5: Taxa de Juros Interbancária (Fonte: Bloomberg)**



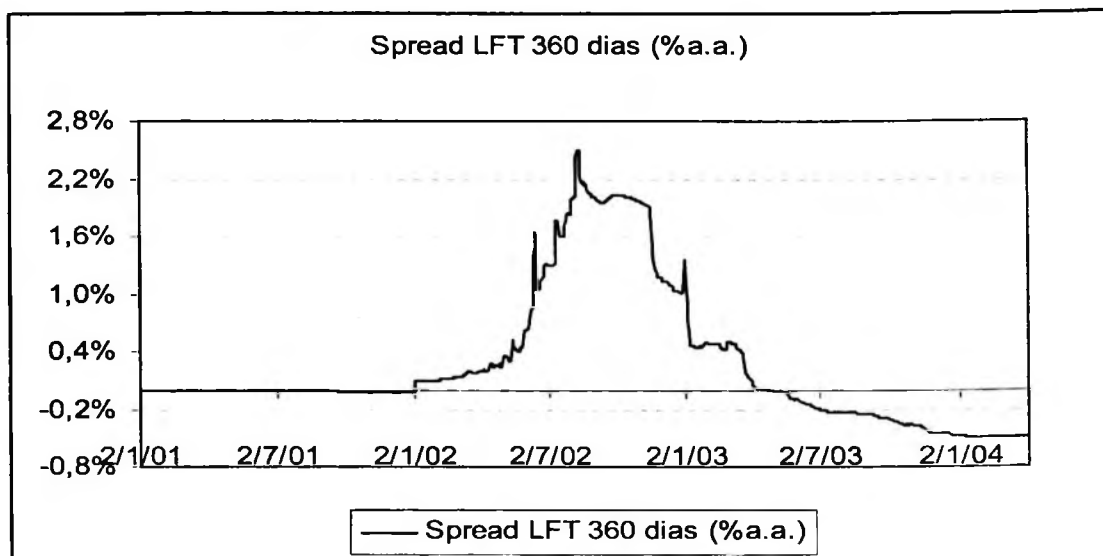
**Gráfico 6:** Volatilidade estocástica  $v(t)$  da taxa de juros. Período: janeiro 1999-junho 2004. (E-Views, versão 4.0).



**Gráfico 7:** Volatilidade estocástica  $v(t)$  da taxa de juros. Período: janeiro 2001-junho 2004. (E-Views, versão 4.0).



**Gráfico 8:** *Spread* de crédito sobre LFT's (Fonte: ANDIMA)



## CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Neste trabalho procurou-se avaliar a aplicabilidade de um modelo de estrutura temporal de dois fatores para descrever a taxa de desconto ajustada ao risco de crédito de um título público federal, as Letras Financeiras do Tesouro (LFT) com vencimento em um ano de prazo.

Estes dois fatores, que são aqui modelados conjuntamente, são a taxa de juros interbancária para o prazo de um ano e o *spread* de crédito implícito nos preços de mercado das LFTs.

Com respeito a seu objetivo principal, o teste do modelo especificado permitiu a estimação pelo método de máxima verossimilhança dos seis parâmetros de interesse ao grau de significância de 95%. Notou-se, porém, a necessidade de assumir independência entre os dois fatores do modelo, o que pode limitar as suas aplicações no futuro.

No que tange ao objetivo secundário, o teste do preço de mercado pelo risco de crédito pelo teste de razão de verossimilhança, pode-se constatar que o modelo com uma restrição adicional, aquele que iguala o preço de mercado a zero, não apresenta um máximo na sua função de verossimilhança significativamente menor que o modelo irrestrito, o que leva ao questionamento da utilização deste modelo.

Tal evidência sugere, que a premissa de independência entre os dois fatores seja refutável; ou que o modelo não seja adequado para o *spread* de crédito; ou que os erros de estimação sejam altos.

Há de se ressaltar, a dificuldade do procedimento de estimação para um modelo de maior complexidade do que este apresentado neste trabalho, seja de dois fatores

interdependentes, seja de um modelo de três fatores. Nestes casos, a função de verossimilhança não pode ser calculada explicitamente, fazendo-se necessária a adoção de outros métodos de estimação.

Outra possibilidade de extensão, encontra-se na identificação de correlações entre variáveis macroeconômicas e os *spreads* de crédito, uma vez identificada sua equação de movimento.

Por fim, tentou-se neste trabalho contribuir de forma positiva para uma maior exploração dos modelos multifatoriais de estrutura temporal, e em particular, daqueles que tentam modelar o risco de crédito soberano.



## BIBLIOGRAFIA

AÏT-SAHALIA, Y. Nonparametric Pricing of interest rate derivative securities. *Econometrica*: Vol.64, No.3, p. 527-560, 1996.

AÏT-SAHALIA, Y. Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate. *Review of Financial Studies*: Vol.9, No.2, pp. 385-426, 1996.

AÏT-SAHALIA, Y. Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions. *Journal of Finance*: Vol.54, No.4, p. 1361-1395, 1999.

AÏT-SAHALIA, Y. Maximum Likelihood Estimation of Discretely Sampled Diffusions: a Closed-form Approximation Approach. *Econometrica*: Vol.70, No.1, p. 223-262, 2002.

AÏT-SAHALIA, Y. e KIMMEL, Estimating Affine Multifactor Term Structure Using Closed-Form Likelihood Expansions. *Princeton University*: Working Paper, 2002.

ARAÚJO, C.H.V. Mercado de Títulos Públicos e Operações de Mercado Aberto no Brasil – Aspectos Históricos e Operacionais. *Notas Técnicas do Banco Central do Brasil*: No.12, 2002.

BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. 3a. Edição. Nova York: John Wiley & Sons, 1995.

BLANCHET-SCALLIET, C. e JEANBLANC, M. Hazard Rate for Credit Risk and Hedging Defaultable Contingent Claims. *Université d'Evry Val d'Essonne*, Working Paper, 2002.

- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*: 32, p.307-327, 1986.
- BOLLERSLEV, T. A Multivariate GARCH Model with Constant Conditional Correlations for a Set of Exchange Rates. *Northwestern University*, Working Paper, 1987.
- BRENNAN, M.J. e SCHWARTZ, E. A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds". *Journal of Banking and Finance*: 3, p.133-155, 1979.
- CAMPBELL, J.Y. Asset Pricing at the Millennium. *Journal of Finance*: Vol.55, No. 4, p. 1515-1567, 2000.
- CAMPBELL, J., LO, A. L. e MACKINLAY, A. C. *The Econometrics of Financial Time Series*. Princeton University Press, 1997.
- COCHRANE, J. *Asset Pricing*. Princeton University Press, 2001.
- COPELAND, T. e WESTON, F. *Theory of Finance and Corporate Policy*. Nova York: Addison Wesley, 1988.
- COX, J. C., INGERSOLL JR., J. E. e ROSS, S. A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*: Vol. 53, No. 2, p. 363-384, 1985.
- COX, J. C., INGERSOLL JR., J. E. e ROSS, S. A., A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*: Vol. 53, No. 2, p. 385-407, 1985.
- DAI , Q. e SINGLETON, K. Specification Analysis of Affine Term Structure Models. *Journal of Finance*: Vol. 55, No.5, 2000.
- DAI , Q. e SINGLETON, K. Fixed Income Pricing. *Stanford University*. Working Paper, 2002.

DEBREU, G. *Theory of Value: an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Cowles Foundation Monograph 17, Yale University Press, 1959.

DELBAEN, F. e SCHACHERMAYER, W. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. *Mathematische Annalen*: Vol. 300, p. 463-520, 1994.

DUFFEE, G. R. Estimating the Price of Default Risk. *Review of Financial Studies*: Vol. 12, No. 1, p. 197-226, 1999.

DUFFEE, G. R. Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models. *Journal of Finance*: Vol. 57, No. 1, p. 405-443, 2002.

DUFFEE, G. R. e STANTON, R.H. Estimation of Dynamic Term Structure Models. *University of Berkeley*. Working Paper. 2004.

DUFFIE, D. "Futures Markets", Prentice Hall, 1989.

DUFFIE, D. "Dynamic Asset Pricing". Princeton University Press, 2001.

DUFFIE, D. Defaultable Term Structure Models with Fractional Recovery of Par. *Stanford University, Graduate School of Business*, Working Paper, 1998.

DUFFIE, D. e KAN, R. A Yield factor model of interest rate. *Mathematical Finance*: Vol. 6, p.379-406, 1996.

DUFFIE, D., PEDERSEN, L. H. e SINGLETON, K. J. Modeling Sovereign Yield Spreads: a Case Study of Russian Debt. *Journal of Finance*: Vol. 53, No.1, p. 119-159, 2003.

DUFFIE, D. e SINGLETON, K. Modeling Term Structure of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*: Vol. 12, No. 4, p. 687-720, 1999.

- ELTON, E.J. e GRUBER, M.J. Modern Portfolio Theory, 1950 to date. *Journal of Banking and Finance*: Vol.21, p.1743-1759, 2000.
- ELTON, E.J. e GRUBER, M.J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 5a. edição. New York: Wiley, 1995.
- ENGLE, R. F., LILIEN, D. M. e ROBINS, R. P. Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model. *Econometrica*: Vol.55, No.2, p. 391-407, 1987.
- FABOZZI, F. *Bond Markets: Analysis and Strategies*. New York: Prentice Hall, 1996.
- FELLER, W. Two Singular Diffusion Problems. *Annals of Mathematics*: 54, p. 173-182, 1951.
- FERNANDEZ, P. J.. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2002.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2003.
- GOURIEROUX, C. e JASIAK, J. *Financial Econometrics: problems, models and methods*. Princeton University Press, 2001.
- GOURIEROUX, C. *ARCH Models and Financial Applications*. Heidelberg: Springer Verlag, 1997.
- GRANGER, C. W. J. *Empirical Modeling in Economics: Specification and Evaluation*. Cambridge University Press, 1999.
- HANSEN, L.P. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, 50, p.1029-1054, 1982.

HANSEN, L.P. Generalized Method of Moments Estimation: a Time Series Perspective. *University of Chicago, Working Paper*, 2001.

HANSEN, L.P. e JAGANNATHAN, R. Assessing Escecification Errors in Stochastic Discount Factor Models. *NBER, Technical Working Paper*, No. 153, 1994.

HAMILTON, J., *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.

HARRISON J. M. e KREPS, D. M. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, p. 381-408, 1979.

HEATH, D., JARROW, R. e MORTON, A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a Discrete Time Approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*: Vol. 25, No. 4, p. 419-440, 1990.

HEATH, D., JARROW, R. e MORTON, A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*: Vol. 60, No. 1, p. 77-105, 1992.

HULL, J., *Options, Futures and Other Derivatives*. 5a. edição. Prentice Hall, 2002.

JARROW, R. A., LANDO, D. e TURNBULL, S. M. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *Review of Financial Studies*: Vol. 10, No. 2, p. 481-523, 1997.

KARATZAS, I. e SHREVE, S. *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer Verlag, 1998.

LAMBERTON, D. e LAPEYRE, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 1996.

LIPTON, A. *Mathematical Methods for Foreign Exchange: a Financial Engineer's Approach*. New York: World Scientific Publishing, 2001.

LIU, J., LONGSTAFF, F. A. e MANDELL, R. E. The Market Price of Credit Risk: an Empirical Analysis of Interest Rate Swap Spreads,

LJUNQVIST, L. e SARGENT, T.J. *Recursive Macroeconomic Theory*. Boston: MIT Press, 2001.

LANGSTAFF, T.C. A Multivariate Model of the Term Structure. *Journal of Finance*: Vol. 35, p. 71-97, 1980.

LONGSTAFF, F. A. e SCHWARTZ, E. S. Interest Rate Volatility and the Term Structure: a two factor general equilibrium model. *Journal of Finance*: Vol. 47, p. 1259-1282, 1992.

LONGSTAFF, F. A. e SCHWARTZ, E. S. A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *Journal of Finance*: Vol. 50, No. 3, p. 789-819, 1995.

LOUREIRO, A.S. e BARBOSA, F.H. Dívida Pública e Prêmio de Risco dos Títulos Públicos no Brasil. *Notas Técnicas do Banco Central do Brasil*: No.42, 2003.

MADAN, D.B. Pricing the Risks of Default, *University of Maryland*, Working Paper, 2000.

MADAN, D.B., e UNAL, H. A Two-Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spreads. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*: Vol. 35, p.43-65 , 2000.

MERTON, R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*: Vol. 29, p. 449-470, 1974.

MILLER, M.H. The History of Finance. *Journal of Portfolio Management*: Summer, 1999.

MIRANDA, M.J. e FACKLER, P.L. *Applied Computational Economics and Finance*. Boston: MIT Press, 2002.

NEFTCI, S.N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, 1996.

OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: an introduction with applications*. 5a. edição. Heidelberg: Springer Verlag, 2000.

PAGÈS, H. Can Liquidity Risk be subsumed in credit risk? A case study from Brady Bond prices. *Bank for International Settlements, BIS Working Papers*, No.101, 2001.

PEARSON, N.D. e SUN, T. Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: an Application to the Cox, Ingersoll and Ross Model. *Journal of Finance*: Vol. 49, No.4, 1994.

PIAZZESI, M. Affine Term Structure Models. *UCLA Anderson School, Working Paper*, 2002.

REILLY, F.K. *Investment Analysis and Portfolio Management*. New York: Dryden Press, 4<sup>th</sup> Edition, 1994.

ROGERS, L. C. G. Stochastic Calculus and Markov Methods, em Dempster, M. e Pliska, S. (edit.) *Mathematics of Derivative Securities*. Cambridge University Press, 1997.

ROGERS L. C. G. e WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volume 1: Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition, 2000a.

ROGERS L. C. G. e WILLIAMS, D. *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volume 2: Itô Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition, 2000b.

ROSE, P. *Money and Capital Markets*. New York: Irwin, 2000.

SCHACHERMAYER, W. No Arbitrage: On the Work of David Kreps. *Vienna University of Technology*, Working Paper, 2002.

SHREVE, S., CHALASANI, P. e JHA, S. *Stochastic Calculus and Finance*, *Carnegie Mellon University*, Lecture Notes, 1997.

SPANOS, A.. *Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data*. London: Cambridge University Press, 1999.

SUNDARESAN, S. M. Continuous-Time Methods in Finance: a Review and an Assessment. *Journal of Finance*: Vol. 55, No.4, 2000.

VAN HORNE, J.C. *Financial Market Rates and Flows*. New York: Prentice-Hall, 1990.

VASICEK, O., An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, p.177-188, 1977.