

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E  
CONTABILIDADE**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

**APLICAÇÕES DE QUASE MONTE-CARLO NO  
MERCADO DE DERIVATIVOS BRASILEIRO**

**THIERRY BARBE**

**ORIENTADOR: PROF. MARCOS EUGÊNIO DA SILVA**

**SÃO PAULO  
2001**

DEDALUS - Acervo - FEA



20600022324

# UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E  
CONTABILIDADE

DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

## APLICAÇÕES DE QUASE MONTE-CARLO NO MERCADO DE DERIVATIVOS BRASILEIRO

THIERRY BARBE

ORIENTADOR: PROF. MARCOS EUGÊNIO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Concentração Finanças / Derivativos

SÃO PAULO  
2001

T332 B233a  
T82912



20600022324



Powered by RfidProcStar - www.logprocess.com.br

Barbe, Thierry

Aplicações de Quase Monte Carlo no mercado de derivativos brasileiro / Thierry Barbe. — São Paulo : FEA/USP, 2001.

83 p.

Dissertação - Mestrado  
Bibliografia

1. Finanças 2. Simulação Monte Carlo 3. Derivativos  
4. Controle de risco I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP.

CDD – 332

## Resumo

O objetivo deste trabalho é duplo. Em primeira instância, testamos, pela primeira vez em trabalho aplicado de finanças, a seqüência de Niederreiter-Xing em simulação quase Monte-Carlo. De acordo com medidas de dispersão, a seqüência de Niederreiter-Xing deve apresentar desempenho superior às construções clássicas de Sobol e Halton. Espera-se assim atenuar os problemas apresentados por estas quando cresce a dimensão das simulações. Em segunda instância aplicamos o método de quase Monte-Carlo ao cálculo de exposição a risco de mercado de um portfolio de opções (VaR). Acreditamos que este seja o campo mais fértil à aplicação da simulação quase Monte-Carlo no mercado financeiro brasileiro. Após uma breve introdução à simulação Monte-Carlo e à construção de seqüências quase-aleatórias, efetuaremos uma resenha dos principais trabalhos que tratam do método quase Monte-Carlo em finanças. Finalmente apresentaremos os resultados obtidos em nossos experimentos. Estes incluem o cálculo de VaR de um portfolio de opções e precificações de opções exóticas. Uma apresentação formal das seqüências quase-aleatórias e de suas principais propriedades matemáticas encontra-se em apêndice.

## Abstract

This dissertation has two purposes. One of them is to test, for the first time in applied finance, the Niederreiter-Xing low-discrepancy sequence in a quasi Monte-carlo setting. According to uniformity criteria the Niederreiter-Xing sequence should exhibit superior performance when compared to classical constructions such as those of Sobol and Halton. It is well known that, as the dimension of the simulation increases, quasi Monte-Carlo with these sequences becomes inaccurate. We hope the Niederreiter-Xing sequence attenuates this problem. The other is to apply quasi Monte-Carlo in the calculation of market risk exposure of a portfolio which includes options. We believe this application to be the most fertile ground for quasi Monte-carlo in the Brazilian financial market. Following a brief introduction on Monte-Carlo methods and guidelines on how to implement low-discrepancy sequences we will give a detailed account of the findings obtained in research thus far. Finally we show the results of our investigations, which include the VaR of portfolios consisting of options and the pricing of exotic options. A more rigorous presentation of low-discrepancy sequences and their main mathematical properties is given in appendix.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, o professor Dr. Marcos Eugênio da Silva, pelos seus conselhos esclarecidos, sua inesgotável boa-vontade em me atender nos horários mais inusitados e, principalmente, por mostrar-me claramente em que consiste o sentido, o rigor e a ética da pesquisa acadêmica, não só de maneira explícita como também através de seu comportamento.

Gostaria de agradecer à Ana Paula, minha esposa, pela sua paciência ao lidar com os sacrifícios sem os quais não seria possível efetuar este trabalho.

Agradeço também aos professores Dr. Paulo Picchetti e Dr. José Carlos de Souza Santos pelas suas valiosas sugestões, que permitiram dar corpo a esta pesquisa.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Simulação Quase Monte-Carlo em Finanças</b>	<b>4</b>
2.1	A Simulação Monte-Carlo . . . . .	4
2.2	Aplicações da SMC - Precificação de Opções . . . . .	6
2.2.1	Conceitos preliminares . . . . .	6
2.2.2	Determinação do preço de uma opção via SMC . . . . .	8
2.3	Aplicações da SMC - Exposição a Risco de Mercado de um Portfólio . . . . .	11
2.4	Números Pseudo-Aleatórios . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Construção de Seqüências Quase Aleatórias</b>	<b>17</b>
3.1	As Seqüências Clássicas . . . . .	17
3.2	A Seqüência de Sobol . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Resenha dos Artigos sobre SQMC em finanças</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Testes</b>	<b>31</b>
5.1	Considerações Gerais . . . . .	31
5.2	Teste 1: Opção de Compra Européia . . . . .	32
5.3	Teste 2: VaR Univariado - Venda de Borboleta . . . . .	35
5.4	Teste 3: VaR Multivariado - Opções sobre Ações . . . . .	43
5.5	Teste 4: Opções Look-Back . . . . .	49
5.6	Teste 5: Opções com Barreira . . . . .	54
5.7	Resumo dos Resultados Obtidos . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>O Modelo de Black &amp; Scholes</b>	<b>67</b>

<b>B</b>	<b>Seqüências de Baixa Discrepância: uma Apresentação</b>	<b>70</b>
B.1	Seqüências Uniformes Módulo 1 . . . . .	70
B.2	Discrepância . . . . .	71
B.3	Seqüências de Baixa Discrepância . . . . .	73
B.3.1	As construções na teoria . . . . .	73
B.3.2	As construções na prática . . . . .	75

# Lista de Tabelas

4.1	Resultados obtidos por Galanti & Jung . . . . .	29
5.1	Teste 1, SQMC . . . . .	33
5.2	Teste 1, SMC vs SQMC . . . . .	34
5.3	Teste 1, desvio padrão do erro com SMC . . . . .	34
5.4	Teste 2, benchmark . . . . .	37
5.5	Teste 2, erro médio . . . . .	42
5.6	Teste 2, EQM . . . . .	42
5.7	Teste 4, EQM para SMC e SQMC (Sobol) . . . . .	52
5.8	Teste 5, EQM para SMC e SQMC (Sobol) . . . . .	57
B.1	Seqüências-(t,s), valores de $t$ na base 2 . . . . .	75

# Lista de Figuras

5.1	Teste 2, venda de borboleta . . . . .	36
5.2	Teste 2, Halton, Sobol e NX . . . . .	37
5.3	Teste 2, zoom do gráfico 5.2 . . . . .	38
5.4	Teste 2, VaR 99%: Halton, Sobol e NX . . . . .	38
5.5	Teste 2, VaR 95%: Halton, Sobol e NX . . . . .	39
5.6	Teste 2, VaR 90%: Halton, Sobol e NX . . . . .	39
5.7	Teste 2, médias de VaR: NX e Matlab . . . . .	40
5.8	Teste 2, VaR 99%: NX e Matlab . . . . .	40
5.9	Teste 2, VaR 95%: NX e Matlab . . . . .	41
5.10	Teste 2, VaR 90%: NX e Matlab . . . . .	41
5.11	Teste 3, Matlab . . . . .	44
5.12	Teste 3, Sobol . . . . .	45
5.13	Teste 3, NX . . . . .	45
5.14	Teste 3, Sobol com 25, 35 e 45 mil pontos . . . . .	47
5.15	Teste 3, NX com 25, 35 e 45 mil pontos . . . . .	47
5.16	Teste 3, simulações de 30 mil pontos . . . . .	48
5.17	Teste 3, simulações de 40 mil pontos . . . . .	48
5.18	Teste 3, simulações de 50 mil pontos . . . . .	49
5.19	Teste 4, simulações de 5 mil pontos . . . . .	51
5.20	Teste 4, simulações de 25 mil pontos . . . . .	51
5.21	Teste 4, simulações de 50 mil pontos . . . . .	52
5.22	Teste 4, NX, simulações de 5 a 50 mil pontos . . . . .	53
5.23	Teste 4, Sobol, simulações de 5 a 50 mil pontos . . . . .	53
5.24	Teste 5, simulações de 5 mil pontos . . . . .	55
5.25	Teste 5, simulações de 25 mil pontos . . . . .	55
5.26	Teste 5, simulações de 50 mil pontos . . . . .	56
5.27	Teste 5, NX, simulações de 5 a 50 mil pontos . . . . .	56
B.1	Distribuição de 8 pontos seguidos de Sobol para $d_1 = 0$ e $d_2 = 3$	76
B.2	Distribuição de 8 pontos seguidos de Sobol para $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$	77

B.3	Distribuição de 16 pontos seguidos de Sobol . . . . .	77
B.4	Distribuição de 32 pontos seguidos de Sobol . . . . .	78
B.5	Seqüência de Sobol - dimensões 1 e 2 (mil pontos) . . . . .	78
B.6	Seqüência de Sobol - dimensões 10 e 11 (mil pontos) . . . . .	79
B.7	Seqüência de Sobol - dimensões 20 e 21 (mil pontos) . . . . .	79
B.8	Seqüência de Sobol - dimensões 30 e 31 (mil pontos) . . . . .	80
B.9	Seqüência de NX - dimensões 1 e 2 (mil pontos) . . . . .	80
B.10	Seqüência de NX - dimensões 10 e 11 (mil pontos) . . . . .	81
B.11	Seqüência de NX - dimensões 20 e 21 (mil pontos) . . . . .	81
B.12	Seqüência de NX - dimensões 30 e 31 (mil pontos) . . . . .	82

# Capítulo 1

## Introdução

Os últimos vinte anos tem sido o palco de uma grande popularização do uso de derivativos. Estes instrumentos, cujos preços dependem de preços de outros ativos, são desenvolvidos para atender demandas muito específicas. Este tratamento "à la carte" gera uma grande diversidade de produtos disponíveis no mercado, ao mesmo tempo em que dificulta a formação de mercados líquidos que oferecem uma idéia precisa dos preços de equilíbrio. Portanto, a participação nestes mercados depende crucialmente de modelos que determinam o preço teórico dos instrumentos transacionados. Por outro lado, o maior grau de alavancagem permitido pelo uso de derivativos assim como a já mencionada dificuldade em avaliar o seu preço justo para fins de marcação a mercado, tornou mais difícil a mensuração dos risco assumidos pelos participantes. Efetivamente, o grau de complexidade dos modelos em questão faz com que soluções analíticas sejam mais a exceção do que a regra. Os participantes do mercado financeiro, sejam eles "traders" ou gestores de risco de mercado, dependem então de métodos numéricos ou probabilísticos, que por sua vez dependem de um uso intensivo do computador. Claramente, o desenvolvimento mencionado inicialmente anda em paralelo com o desenvolvimento tecnológico que, sabemos, foi extraordinário ao longo das duas última décadas.

Nesse contexto, a simulação Monte-Carlo (SMC), pela sua simplicidade, constituiu-se numa das principais ferramentas utilizadas nos mercados. O uso da SMC em finanças depende da geração de números pseudo-aleatórios em larga escala e de subseqüentes transformações destes, o conjunto representando um processo demandante em termos de computação. Este aspecto, conjugado com a necessidade freqüente de obter-se resultados num curtíssimo horizonte de tempo, tem às vezes restringido o uso da SMC, não

obstante sua comprovada eficácia. Este problema tem gerado uma busca por soluções que visam a obtenção de resultados equivalentes (ou até melhores) aos gerados via SMC porém através de métodos mais parcimoniosos no que tange ao uso do computador.

Uma inspeção dos casos em que se aplica a SMC revela que geralmente o importante não é a característica aleatória dos números que servem de base para a simulação, mas sim, a uniformidade com a qual estes são distribuídos. Esta constatação sugere a possibilidade de substituir os números pseudo-aleatórios por construções cujo objetivo principal é atingir um espalhamento uniforme em determinado intervalo, contanto que a geração destes números não seja muito complexa em termos de processamento. Seguindo esta linha de raciocínio e inspirando-se em resultados obtidos em física, alguns trabalhos têm sido recentemente desenvolvidos em finanças, nos quais os números pseudo-aleatórios são substituídos por seqüências de baixa discrepância (apeladas também de quase-aleatórias). Este procedimento tem por nome simulação quase Monte-Carlo (SQMC) e constitui o cerne deste trabalho. Mais precisamente o nosso objetivo consiste em fazer uso dos últimos resultados obtidos no campo da matemática que estuda a distribuição dos números usados em SQMC e aplicá-los a problemas usualmente encontrados em instituições financeiras. Acreditamos na utilidade dessa pesquisa pois não conhecemos nenhuma aplicação de uma construção recentemente desenvolvida por Niederreiter e Xing [15], cujo objetivo é melhorar o desempenho das seqüências quase-aleatórias em situações onde estas tornam-se geralmente inoperantes.

Em primeira instância trataremos de familiarizar o leitor com as situações em que geralmente se faz uso da SMC nos mercados financeiros. Entraremos em detalhes nas aplicações que mais adiante serão utilizadas para a avaliação empírica dos diferentes conjuntos de números. Será então mostrado como se desenvolve uma SMC ou uma SQMC. Discutiremos também a questão dos números que servem de base para as simulações. Após uma breve apresentação do processo de geração de números pseudo-aleatórios entraremos no mundo das seqüências quase-aleatórias. Veremos como construir as seqüências de Halton e Sobol de modo que o leitor possa implementar uma SQMC com facilidade. Uma apresentação formal das seqüências quase-aleatórias pode ser encontrada no apêndice. Em seguida fornecemos uma resenha da literatura que aborda a questão, permitindo um melhor entendimento do estado atual da pesquisa sobre SQMC. Resumiremos detalhadamente os trabalhos que tratam do tema no mundo financeiro. Veremos que existe um largo campo a ser desbravado e que os resultados obtidos estão longe de constituírem algo unânime. Estas deficiências e a ausência de trabalhos que

fazem uso dos recentes desenvolvimentos teóricos guiaram os nossos experimentos. Estes são apresentados por último e têm o duplo objetivo de testar a eficácia da construção citada acima em comparação com as construções até hoje usadas em SQMC e de demonstrar que para certas aplicações e particularmente para cálculo de exposição à risco de mercado a SQMC é uma alternativa preferível à SMC quando se considera a precisão do resultado obtido e o custo de computação exigido para a obtenção de números confiáveis ou, em outros termos, o tamanho da simulação. Por último, efetuaremos um resumo dos resultados obtidos chegando a uma conclusão sobre a eficácia da SQMC nos diferentes contextos em que foi testada.

Tentamos desenvolver uma pesquisa que possa ser útil, tanto ao indivíduo interessado em acrescentar ao seu arsenal mais uma ferramenta de tratamento de derivativos, como ao indivíduo que deseja se familiarizar de uma forma rigorosa com as seqüências quase-aleatórias e entender o que elas tem a oferecer no âmbito das aplicações em finanças. Para o primeiro, que certamente já domina os conceitos relativos à teoria financeira, os capítulos de interesse são os de número 3, 4 e 5. Nestes ele encontrará em detalhes os algoritmos necessários à implementação de uma SQMC assim como uma ampla gama de aplicações, tanto nos artigos comentados como nos testes efetuados, que permitirá avaliar a pertinência da adoção do método para o problema que ele enfrenta. Para o segundo, além dos capítulos mencionados, será de interesse ler o capítulo 2 e apêndice A para obter maior desinvolvura com as aplicações às quais se aplica o método de Monte-Carlo assim como o apêndice B onde apresentamos formalmente as seqüências quase aleatórias assim como algumas de suas principais propriedades matemáticas.

## Capítulo 2

# A Simulação Quase Monte-Carlo em Finanças

### 2.1 A Simulação Monte-Carlo

A SMC pode ser definida como um método numérico baseado em amostragem aleatória. Em grandes linhas trata-se de gerar aleatoriamente várias realizações do problema estudado (integral, processos de difusão, funções objetivo etc) e determinar, através de inferência estatística (geralmente a média dos valores obtidos nas diversas realizações), a sua solução. Podemos ilustrar estas palavras com um exemplo clássico que consiste em calcular o valor de uma integral. O uso da SMC é muito usual neste caso e surgiu como uma solução à chamada "maldição da dimensionalidade" (curse of dimensionality). O termo dimensão usado neste contexto corresponde à dimensão do espaço sobre o qual é calculada a integral. Esta "maldição" tem como consequência a necessidade de se usar, para os métodos numéricos tradicionais tais como a regra trapezoidal, um número de pontos que cresce de forma exponencial com a dimensão da integral. Chega-se rapidamente à um patamar para o qual outro método torna-se necessário. Vejamos como se calcula uma integral com o uso da SMC.

Seja a integral:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Geramos  $N$  números aleatórios oriundos da distribuição uniforme no intervalo  $[a, b]$ . Calcula-se em seguida o valor da função em cada um desses números. O próximo passo consiste em calcular a esperança dos valores que a função assume nesses  $N$  pontos e multiplicá-la pela medida do intervalo

$[a, b]$ . Obtemos assim o valor da integral:

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i)(b-a)$$

Uma apresentação mais formal segue os seguintes passos; seja a integral:

$$\int_B f(u) du$$

onde  $B \subseteq R^s$  com  $0 < \lambda_B < \infty$ , onde  $\lambda_s$  representa a medida de Lebesgue na dimensão  $s$ . Transformamos  $B$  num espaço de probabilidade com medida de probabilidade:

$$d\mu = \frac{du}{\lambda_s(B)}$$

Para  $f \in L^1(\mu)$  temos:

$$\int_B f(u) du = \lambda_s(B) \int f d\mu = \lambda_s(B) E(f) \quad (2.1)$$

onde  $E(f)$  é a esperança da variável aleatória  $f$ . Esta esperança é estimada com o uso de uma amostra. Desenvolvemos o conceito num espaço de probabilidade arbitrário.

Seja  $f$  uma variável aleatória num espaço de probabilidade  $(A, \mathcal{A}, \lambda)$ . O método de Monte Carlo consiste em gerar  $N$  amostras aleatórias  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  e aplicar:

$$E(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n)$$

A lei dos grandes números assegura a convergência quase-certa do método:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = E(f)$$

Para a análise do erro necessitamos da variância:

$$\sigma^2(f) = \int_A (f - E(f))^2 d\lambda$$

que é finita quando  $f \in L^2$ . Segue o teorema: se  $f \in L^2$ , então para qualquer  $N \geq 1$  temos:

$$\int_A \dots \int_A \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N f(a_n) - E(f) \right)^2 d\lambda(a_1) \dots d\lambda(a_n) = \frac{\sigma^2(f)}{N}$$

A demonstração encontra-se em Niederreiter [13].

Este é o conhecido resultado segundo o qual o desvio padrão do erro de integração é, em média,  $\frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}}$ . No nosso exemplo, o erro seria (probabilisticamente):

$$\frac{\lambda_s(B)\sigma(f)}{\sqrt{N}}$$

Tendo estes resultados em vista podemos dizer que a SMC gera um patamar probabilístico para o erro de ordem  $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ , independente de  $s$ , dimensão da integral.

É importante ter-se em mente que estes resultados dependem das propriedades estatísticas das variáveis aleatórias. Se estas não atenderem aos critérios desejados os resultados podem ser catastróficos.

Vimos acima duas propriedades importantes da SMC que podem ser estendidas às aplicações em finanças. São estas a independência da ordem probabilística do erro em relação à dimensão do problema assim como uma expressão numérica de  $(\sqrt{N})^{-1}$  para essa ordem. Uma interpretação intuitiva desse resultado é que uma diminuição do erro na escala de uma casa decimal requer cem vezes o número de simulações utilizado até o momento. O nosso próximo objetivo consiste em apresentar aplicações do método em teoria financeira. Todavia alguns conceitos de finanças serão necessários para entendermos as aplicações da SMC neste âmbito.

## 2.2 Aplicações da SMC - Precificação de Opções

### 2.2.1 Conceitos preliminares

O uso de SMC no mercado financeiro é, de forma geral, direcionado a problemas envolvendo opções. Mais precisamente, o grosso das aplicações se restringe à questão de encontrar um preço justo para a opção ou, usando um termo já consagrado, para precificá-la. Dentre esse conjunto de problemas efetuaremos uma divisão entre a atividade de precificação per se e o problema de se mensurar o risco incorrido em posições compostas de opções, onde muitas vezes a determinação do preço da opção pode ser efetuada de maneira analítica. Entraremos em detalhes nestas duas questões mais adiante. No momento é conveniente definirmos alguns conceitos que devem permitir uma melhor compreensão do resto desta pesquisa.

Uma opção pode ser definida como um ativo que oferece ao seu detentor o direito (e não a obrigação) de comprar ou vender outro ativo, denominado de ativo-objeto, por um preço predeterminado. As opções fazem parte,

como vimos na introdução, de um grupo de ativos financeiros chamados de derivativos pois seus preços dependem de preços de outros ativos. O detentor da opção poderá comprar o ativo caso tenha adquirido uma opção de compra e vendê-lo caso tenha adquirido uma opção de venda. O preço pelo qual o ativo-objeto poderá ser vendido ou comprado é chamado de preço de exercício pois quando o investidor que adquiriu a opção decide comprar ou vender o ativo-objeto ele está exercendo a sua opção. As opções têm um tempo de vida limitado. No Brasil, por exemplo, as opções de maior liquidez costumam ter um prazo até o seu vencimento inferior a três meses. Quando o investidor pode exercer a opção de forma contínua durante o seu tempo de vida, então a opção é dita de tipo americana. Caso a opção possa unicamente ser exercida no seu vencimento então a opção é de tipo européia. O preço que se paga pela opção é chamado de prêmio. Podemos ilustrar a dinâmica do investimento em uma opção de compra de tipo européia através do fluxo de caixa em dois instantes,  $t$  quando a opção é negociada e  $T$  no seu vencimento:

Seja  $P$ , o prêmio da opção,  $X$ , o preço de exercício e  $S$  o preço do ativo subjacente no vencimento da opção.

	Comprador	Vendedor
Tempo $t$	$-P$	$+P$
Tempo $T$	$\max(S - X, 0)$	$-\max(S - X, 0)$

Caso estivéssemos trabalhando com uma opção de venda, no vencimento, o seu detentor teria o fluxo  $\max(X - S, 0)$ . A regra que determina o pagamento no vencimento da opção será chamada de função payoff ou simplesmente payoff. Existem inúmeras estratégias que podem ser montadas com o uso de opções. É até possível criar ativos sintéticos de renda fixa combinando-se adequadamente e oportunamente algumas opções. Enfim a flexibilidade permitida pelo uso de esse tipo de instrumento o torna muito atraente para especulação ou proteção contra oscilações de efeito adverso para o seu portfólio. Um bom número de instituições financeiras de grande porte possuem opções em suas carteiras próprias.

Transações envolvendo opções não constituem fenômeno recente. Encontramos por exemplo um relato de uso de tais instrumentos em Londres, no início do século dezoito, no livro de Edward Chancellor [3]. A grande popularização do uso de opções deve-se ao surgimento, nos anos setenta, de estudos que firmaram solidamente bases rigorosas de uma teoria de precificação desses derivativos. O marco principal desta evolução foi a publicação em 1973 do artigo de Black & Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" no Journal of Political Economy. A partir deste momento

os atores dos mercados financeiros detiveram em suas mãos uma ferramenta poderosa que permitiu uma visão mais clara do risco que se incorpora a um portfólio ao negociar opções. Como utilizaremos o modelo de Black & Scholes em nossos testes, apresentamos este no apêndice A.

### **2.2.2 Determinação do preço de uma opção via SMC**

Infelizmente o número de opções para as quais os modelos de precificação possuem solução analítica é reduzido. Em geral quando o preço da opção depende do histórico da ação entre a data de aquisição e a data de vencimento não é possível obter tal solução. É o caso de qualquer opção de tipo "americana". É o caso também de muitas opções ditas exóticas (termo usado em decorrência da abrangência de regras usadas para o cálculo do "payoff" da opção). Surge aí um campo muito fértil para o uso de SMC. As principais alternativas ao uso da SMC são os métodos de diferenças e árvores binomiais ou trinomiais. Nos limitaremos aqui à abordagem das opções que usaremos para testar as seqüências quase-aleatórias e, portanto, cujo método de precificação mais adequado é a SMC.

#### **Opções exóticas**

A criatividade dos mercados em inventar funções de payoff é sem limites. A proliferação de opções com tipos variados, muitas vezes "à la carte", de payoffs, levou os protagonistas do mercado financeiro a agruparem estes derivativos sob a denominação de opções exóticas. Como mencionamos acima, muitas destas opções não possuem uma fórmula fechada para determinação de seus preços e esta tarefa depende então de métodos numéricos ou probabilísticos. Vamos descrever em seguida as características dos dois tipos de opção que serão usadas nos nossos testes assim como o procedimento para precificá-las via SMC. Ambos os tipos fazem parte de um conjunto de derivativos que dependem da trajetória seguida pelo ativo-objeto durante o tempo de vida (ou um subintervalo deste) da opção. O termo usado normalmente é opção "path-dependent". Trataremos aqui de opções look-back e opções com barreira.

#### **Opções look-back**

Opções look-back são instrumentos que outorgam ao seu detentor o direito de comprar ou vender o ativo-objeto ao melhor preço (do ponto de vista do agente) que o ativo atingiu durante o período de vigência da opção. As

funções payoff são as seguintes,  
Para a opção de compra:

$$\max(S_T - \min(S_0, S_1, \dots, S_T), 0)$$

Para a opção de venda:

$$\max(0, \max(S_0, S_1, \dots, S_T) - S_T)$$

onde  $S_T$  representa o preço do ativo-objeto no instante  $T$ . Estas opções são também conhecidas como "floating-strike options".

Naturalmente existem variações das regras estipuladas acima. Pode-se escolher um período de tempo inferior ao tempo de vigência da opção para formação do conjunto de preços que entra na função payoff. Pode-se também escolher um percentual do máximo ou mínimo deste conjunto. Existem também as chamadas "modified look-backs" que possuem um preço de exercício fixo ao invés de variável como definido acima. Neste caso as funções payoff seriam as seguintes,

Para a opção de compra:

$$\max(0, \max(S_0, S_1, \dots, S_T) - X)$$

Para a opção de venda:

$$\max(0, X - \min(S_0, S_1, \dots, S_T))$$

Usaremos este tipo (modified look-back) de opção nos nossos testes.

### Opções com barreira.

O detentor de uma opção com barreira está sujeito a algumas condições no que tange ao exercício de seu derivativo. Estas condições dependem de um patamar (a barreira) que o preço do ativo-objeto pode ou não transpor durante o período de vigência da opção. De forma mais explícita existem dois tipos de opções com barreira. A primeira categoria, dita "knock-out" ou "down-and-out", possui as seguintes funções payoff,

Para a opção de compra:

$$\max(0, S_t - X) \text{ se } S_t \geq B \text{ para todo } t, 0 \leq t \leq T$$

$$0 \text{ se } S_t < B \text{ para algum } t, 0 \leq t \leq T$$

Para a opção de venda:

$$\max(0, X - S_t) \text{ se } S_t \leq B \text{ para todo } t, 0 \leq t \leq T$$

$$0 \text{ se } S_t > B \text{ para algum } t, 0 \leq t \leq T$$

Neste caso a barreira atua como fator de risco adicional para o detentor da opção. No caso da opção de compra por exemplo, caso o preço do ativo-objeto venha a transpor a barreira, o investidor não possui mais a oportunidade de ver o preço do ativo-objeto inverter a sua trajetória de modo a minimizar a sua perda. A opção automaticamente "vira pó". A segunda categoria, dita "knock-in", possui regras opostas à "knock-out". Neste caso a opção passa a existir caso o ativo transponha a barreira estipulada. As funções payoff são,

Para a opção de compra:

$$\max(0, S_t - X) \text{ se } S_t \geq B \text{ para algum } t, 0 \leq t \leq T$$

$$0 \text{ se } S_t < B \text{ para todo } t, 0 \leq t \leq T$$

Para a opção de venda:

$$\max(0, X - S_t) \text{ se } S_t \leq B \text{ para algum } t, 0 \leq t \leq T$$

$$0 \text{ se } S_t > B \text{ para todo } t, 0 \leq t \leq T$$

Em nossos testes utilizamos opções de compra "knock-out".

### A precificação

Agora que introduzimos as opções com as quais iremos trabalhar, vamos explicar como elaboramos a SMC que usaremos para efetuar a precificação.

A definição da SMC vista no início do capítulo 2 descreve adequadamente o nosso procedimento. Em primeira instância geramos números pseudo-aleatórios distribuídos de acordo com uma distribuição normal padrão. Em geral, se o derivativo depender de uma série de  $d$  preços do ativo subjacente (neste caso temos uma simulação de dimensão  $d$ ) e queremos efetuar uma SMC de  $n$  "pontos", geramos um conjunto de  $n$  vezes  $d$  números pseudo-aleatórios. Estes vão servir de argumento para o seguinte processo recursivo para o preço do ativo-objeto:

$$S_j^i = S_j^{i-1} \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \text{ com } i = 1, \dots, d \text{ e } j = 1, \dots, n$$

onde  $S_j^i$  corresponde ao  $i$ -ésimo preço da  $j$ -ésima trajetória,  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $dz$  é o choque aleatório de forma  $dz = \epsilon\sqrt{dt}$  para  $\epsilon$  distribuído de acordo com uma distribuição normal padrão, e  $dt$  é o intervalo de tempo que separa os preços. No nosso caso estaremos sempre trabalhando com os preços de fechamento do mercado.  $dt$  será então equivalente a um dia útil ou  $\frac{1}{252}$  ano. Uma vez que temos os  $d$  preços de  $n$  trajetórias podemos determinar qual seria o preço da opção no vencimento para cada uma delas. No caso da opção look-back de compra escolheremos o preço máximo entre os  $d + 1$  preços (inclui-se o preço do ativo-objeto no momento da aquisição da opção) da  $j$ -ésima trajetória e usamos este como argumento da função payoff. Repetimos este procedimento  $n$  vezes e efetuamos a média dos valores obtidos. O preço da opção nada mais é que esta média trazida a valor presente pela taxa de juros livre de risco. Quando estivermos trabalhando com as opções com barreira a nossa tarefa consistirá em verificar se, na trajetória simulada, o ativo-objeto transpôs a barreira. Se isto ocorrer o valor usado para cálculo da média é nulo. Vemos que a montagem de uma SMC é algo relativamente simples. Fica também claro que o aspecto crucial do procedimento reside na propriedade dos números pseudo-aleatórios que entram como argumento no membro  $dz$  do processo recursivo. Tocaremos neste assunto mais adiante. Vejamos agora em quais outras circunstâncias podemos usar a SMC.

### 2.3 Aplicações da SMC - Exposição a Risco de Mercado de um Portfólio

Conforme citado na introdução, o uso de operações envolvendo derivativos tem aumentado significativamente. Um dos atrativos destes instrumentos é a capacidade que eles oferecem de alavancar uma posição. Uma instituição que deseja, por exemplo, especular no mercado de renda variável através de um portfólio indexado à variação do índice Bovespa, ao invés de replicar a carteira teórica do índice, pode adquirir contratos de índice futuro sem incorrer em nenhum desembolso inicial tendo somente que se comprometer a depositar a margem requerida pela BM&F. Deste modo a instituição consegue aumentar o volume de sua posição em renda variável. Naturalmente a possibilidade de se auferir um retorno maior, dada esta alavancagem, acarreta também riscos superiores de perda. No começo da década de 90 alguns bancos amargaram sérios prejuízos nos mercados de derivativos e reforçaram a idéia que havia a necessidade de se desenvolver um instrumental rigoroso para se mensurar de forma adequada o risco de mercado. Os casos usual-

mente citados como exemplo são o de Orange County em que um administrador foi responsável por perdas de ordem de um bilhão e meio de USD, o caso Barings onde as operações sobre índice Nikkei futuro na bolsa de Cingapura levaram um banco de 233 anos à falência e o caso Daiwa onde um operador foi responsável por perdas de ordem de um bilhão de USD. Em todos esses casos o denominador comum é um elevado grau de alavancagem aliado a um arranjo onde o indivíduo que tomava as decisões de investimento era também responsável pelo controle de sua própria posição. Rapidamente as instituições financeiras começaram a criar departamentos de controle de risco onde começaram a brotar as primeiras ferramentas para avaliação de risco de mercado. O banco JP Morgan lançou em 1994 um produto chamado RiskMetrics que se propunha a calcular a exposição à risco de mercado (cunhada de VaR para "Value at Risk") de qualquer portfólio, acompanhado de um documento [11] contendo a metodologia empregada para tal. Houve uma rápida aceitação deste documento e a metodologia RiskMetrics tornou-se a espinha dorsal do cálculo de VaR nas instituições financeiras. Veremos de forma sucinta como se gera o VaR de uma carteira de acordo com o RiskMetrics Technical Document [11] e nos concentraremos particularmente no tratamento que se deve adotar para portfólios que contém opções, onde veremos um outro domínio no qual as SMC podem ser utilizadas.

### Cálculo de VaR

O VaR de uma carteira é geralmente definido (Riskmetrics Technical Document [11]) como a perda máxima que se pode obter para determinados nível de confiança e horizonte de tempo. Algo mais intuitivo pode ser expresso da seguinte maneira: dado um portfólio, se fixarmos um nível de confiança em  $p$  e trabalharmos com um período de  $dt$ , em média será apurado um retorno inferior ao VaR em  $(1 - p)\%$  dos retornos calculados. Por exemplo se escolhermos 95% de nível de confiança e um horizonte de um dia teríamos, em média, um retorno inferior ao VaR estimado a cada 20 dias. Existem várias maneiras de se calcular o VaR. O método paramétrico é o mais comum. Nesta abordagem, os ativos que compõem a carteira são inicialmente decompostos em fatores de risco no intuito de facilitar os cálculos. Em seguida é assumida uma distribuição de probabilidade conjunta para os retornos desses fatores de risco. A maioria esmagadora dos participantes do mercado financeiro parte da hipótese que os retornos dos fatores são distribuídos de acordo com uma distribuição normal multivariada. O próximo passo consiste em estimar os parâmetros desta distribuição. Para curtos intervalos de tempo a média é geralmente insignificante estatisticamente e

é portanto fixada em zero. O grande problema, objeto de uma extensa pesquisa acadêmica, consiste em estimar a matriz de covariância desta distribuição. O manual Riskmetrics Technical Document [11] sugere o uso de um estimador denominado de EWMA para "exponentially weighted moving average" onde são atribuídos pesos maiores para as observações mais recentes. No caso univariado teríamos:

$$\sigma^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^n \lambda^i (r_{t-i} - \mu)^2$$

Aqui  $r_t$  representa o retorno do ativo no tempo  $t$  e  $\lambda$  o fator de decaimento exponencial, geralmente fixado em 0,94 no Brasil. Dentro do mesmo enfoque condicional, o uso de estimadores da família GARCH tem sido amplamente sugerido pela pesquisa acadêmica, embora não tenha obtido muita popularidade. Uma vez estimada a matriz de covariância, o intervalo de confiança correspondente ao nível de confiança estipulado segue naturalmente. Ilustraremos novamente este conceito para o caso univariado onde o nível de confiança é de 95% e um horizonte temporal de um dia para o qual a média é tomada como zero:

$$VaR = \mu - (1,6495 \sigma) = -1,6495 \sigma$$

Quando o retorno do ativo é uma função linear dos fatores de risco em que este foi decomposto, a fórmula acima gera o VaR correspondente ao nível de confiança desejado. Porém encontramos um problema quando o retorno do ativo não é mais uma função linear de seu(s) fator(es) de risco. Este é o caso das opções. De acordo com o documento Riskmetrics Technical Document [11],

*quando a relação entre o valor da posição e as taxas de mercado não é linear, então não podemos estimar mudanças no valor da posição multiplicando a estimativa da mudança de taxa pela sensibilidade do valor da posição em relação às taxas (esta sensibilidade não é constante).*

Encontramos este tipo de problema quando tentamos medir o risco de posições compostas por opções (com exceção das posições sintéticas que podem criar relações lineares entre o portfólio como um todo e um fator de risco específico). Tradicionalmente as opções têm sido tratadas de duas maneiras distintas: utilizando-se uma aproximação analítica ou efetuando-se uma SMC.

Na primeira alternativa usamos uma expansão de Taylor onde os termos que implicam na ausência de linearidade entre a opção e o ativo-objeto são introduzidos. Portanto além do delta da opção (derivada parcial da função que gera o preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto) é acrescentado o gamma da opção (derivada parcial segunda da função que gera o preço da opção em relação ao preço do ativo-objeto). É possível incluir também nesta expansão as derivadas parciais da função que gera o preço da opção em relação aos outros fatores que afetam o resultado final, tal como o  $\rho$  (para captar a sensibilidade em relação a mudanças na taxa de juros) e o vega (para captar a sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade).

Na segunda alternativa, é gerado, via SMC um número grande de preços possíveis para o ativo-objeto. Em seguida para cada preço obtido a opção é novamente precificada. Estes novos preços geram diferentes retornos para a carteira. Estes são em seguida ordenados. Para chegarmos à perda referente ao nível de confiança determinado para o cálculo de VaR escolhemos a perda equivalente ao percentil pertinente. Quando existem vários ativos-objeto temos a obrigação de respeitar a correlação entre os retornos destes ativos. Para isso podemos por exemplo aplicar a decomposição de Cholesky à matriz de covariância obtendo desta maneira uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior. Pode-se mostrar que quando pré-multiplicamos a matriz triangular inferior pelo vetor de números pseudo-aleatórios obtemos um novo vetor que, quando usado como argumento da SMC, replica perfeitamente a estrutura de correlação entre os ativos-objeto. É este método que será usado quando serão testadas as seqüências quase-aleatórias para cálculo de VaR.

Naturalmente a SMC estima com muito mais precisão o risco de mercado de um portfólio do que a aproximação analítica. Um estudo que confirma o que a intuição sugere pode ser encontrado no Riskmetrics Technical Document [11]. Todavia este resultado é obtido através de um uso muito mais intensivo do computador. Em muitos casos isto pode inviabilizar o uso da SMC. Por isso o interesse muito grande em técnicas que visam reduzir o ônus computacional da SMC, tais como a SQMC.

## 2.4 Números Pseudo-Aleatórios

Além do requisito de perfil de hardware mínimo, o uso da SMC depende também das propriedades dos números pseudo-aleatórios que lhe conferem o caráter probabilístico. Tipicamente o experimento depende de uma distribuição de probabilidade específica cujos parâmetros são conhecidos ou

foram estimados. Se as variáveis aleatórias geradas pelo computador não atenderem aos critérios desejados, os resultados podem ser prejudiciais à quem necessita de resultados muito precisos. Uma citação anedótica de Press et al [18] ilustra bem a preocupação que devemos ter com estes números,

*If all scientific papers whose results are at doubt because of bad rand()s were to disappear from library shelves, there would be a gap on each shelf about as big as your fist.*

A teoria sobre geração de números pseudo-aleatórios tem evoluído de forma concomitante à popularização do método de Monte-Carlo.

### Geradores de números pseudo-aleatórios

O problema consiste em gerar pontos distribuídos de maneira independente e de acordo com a distribuição uniforme no intervalo  $[0,1)$  que transmitam a impressão de terem sido gerados de forma aleatória. De acordo com Rubinstein [19] a este critério incontornável podemos acrescentar a necessidade do algoritmo ser de fácil implementação e de execução rápida o suficiente para não interferir no cálculo que depende dos números em questão. Ainda conforme Rubinstein [19], os algoritmos congruênciais são os mais comuns. Estes são baseados na relação recursiva:

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(\text{mod } m) \text{ para } i = 1, \dots, n$$

onde  $a$ , o multiplicador,  $c$ , o incremento e  $m$ , o módulo, são inteiros não negativos. A relação implica:

$$x_{i+1} = ax_i + c - mk_i \text{ com } k_i = \left\lfloor \frac{ax_i + c}{m} \right\rfloor$$

A notação  $[x]$  indica a parte inteira de  $x$ .

Esse tipo de gerador de números pseudo-aleatórios é chamado de congruencial misto. Fica claro que não há nada de aleatório neste processo. Fixada a semente, a mesma seqüência será reproduzida. Este fenômeno ocorre também dentro da seqüência quando a semente é gerada pela relação recursiva. Um dos problemas é o tamanho de  $m$  pois a seqüência se repete em ciclos de no máximo  $m$  elementos. Para que  $m$  seja igual ao período da seqüência certas regras devem ser observadas. Para um estudo exaustivo da questão o livro de Knuth [9] constitui a referência absoluta.

Uma vez gerados números no intervalo unitário, estes têm que ser transformados na distribuição requerida pelo problema tratado. Para isto toma-se

a função de distribuição de probabilidade (fdp) inversa e chega-se a um ponto do domínio desta fdp. Para a maioria dos casos a fdp não possui uma inversa tratável analiticamente. São então utilizados métodos numéricos. Para o caso da distribuição normal existem vários algoritmos que se propõem a resolver este problema. De acordo com Galanti e Jung [6] o algoritmo de Box-Muller, freqüentemente usado, pode prejudicar as propriedades de algumas seqüências de números e para evitarmos este tipo de situação implementamos o algoritmo de Moro que pode ser encontrado no apêndice da referência citada. No mesmo contexto de implementação dos métodos, vejamos agora como construir seqüências quase-aleatórias.

## Capítulo 3

# Construção de Seqüências Quase Aleatórias

Inicialmente apresentaremos, de modo informal, as construções "clássicas" de Van de Corput, Halton e Hammersley, cuja implementação é imediata. Em seguida explicaremos detalhadamente, no intuito de facilitar a sua programação, o algoritmo que gera os números de Sobol, na versão Antonov & Saleev. No apêndice B o leitor pode encontrar uma apresentação rigorosa das diferentes seqüências quase-aleatórias e dos critérios utilizados para comparação entre elas.

### 3.1 As Seqüências Clássicas

Seja um inteiro  $b \geq 2$ . Seja  $Z_b = 0, 1, \dots, b - 1$ . Todo inteiro  $n \geq 0$  tem uma única expansão na base  $b$  da forma:

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^j$$

onde  $a_j(n) \in Z_b$  para todo  $j \geq 0$ , e  $a_j(n) = 0$  para  $j$  suficientemente grande, fazendo com que a soma acima seja finita.

Para um inteiro a função radical inversa na base  $b$  é definida por:

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^{-j-1}$$

para todos os inteiros  $n \geq 0$ , e  $n$  é dado pela sua expansão na base  $b$ . Com estas duas definições podemos construir as seqüências quase-aleatórias

que nos interessam. Começemos com a seqüência de Van de Corput, única construção unidimensional.

### Seqüência de Van de Corput

Para um inteiro  $b \geq 2$ , a seqüência de Van de Corput na base  $b$  é a seqüência  $x_0, x_1, \dots$ , com  $x_n = \phi_n(n)$  para todo  $n \geq 0$ .

Pode-se demonstrar que a escolha da base 3 gera a menor discrepância (medida de "uniformidade" cuja definição encontra-se no apêndice B). Existe uma seqüência de Van de Corput generalizada obtida da mesma função radical inversa, onde é efetuada uma permuta dos dígitos  $a_j(n)$ . As seqüências de Halton são uma generalização da seqüência de Van de Corput.

### Seqüência de Halton

Seja uma dimensão  $s$ , e sejam  $b_1, \dots, b_s$  inteiros maiores ou iguais a 2. A seqüência de Halton nas bases  $b_1, \dots, b_s$  é dada pela seqüência  $x_0, x_1, \dots$ , com:

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s \text{ para todo } n \geq 0$$

A escolha das bases determina a discrepância. Esta possui fórmula analítica quando são escolhidas números primos relativos, e minimizada quando são escolhidos números primos.

A seqüência de Hammersley é uma variante da seqüência de Halton. A única diferença reside no primeiro termo do vetor  $s$ -dimensional de números quase-aleatórios.

### Seqüência de Hammersley

Seja uma dimensão  $s$ , e sejam  $b_1, \dots, b_{s-1}$  inteiros maiores ou iguais a 2. A seqüência de  $N$  pontos de Hammersley nas bases  $b_1, \dots, b_{s-1}$  é dada pela seqüência  $x_0, x_1, \dots$ , com:

$$x_n = \left(\frac{n}{N}, \phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)\right) \in I^s \text{ para todo } n \geq 0$$

Vemos que um inconveniente em usar a seqüência de Hammersley é que a escolha do número de pontos que a simulação vai comportar tem que ser feita com antecedência. Portanto não poderíamos, a exemplo do que certos autores praticam, aplicar um critério de término automático. Números primos escolhidos como base obtém, também neste caso, o melhor rendimento.

## 3.2 A Seqüência de Sobol

A geração de uma seqüência de Sobol requer mais cálculos e a literatura é unânime quanto à maior lentidão computacional. Contudo este processo só precisa ser efetuado uma única vez pois o aspecto determinista da SQMC permite que os números sejam armazenados e utilizados na mesma ordem para cada simulação. Discutiremos aqui a versão de Antonov e Saleev, considerada mais eficiente que o algoritmo original, Sobol [21]. As seqüências de Sobol são geradas a partir de uma mesma base. O procedimento para obtenção de  $n$  pontos unidimensionais pode ser decomposto em quatro etapas.

1. O primeiro passo consiste em gerar uma seqüência  $\{z\}$  de  $[\log_2 n]^1$  inteiros ímpares que obedecem à restrição  $0 < z_i < 2^i$ . Para isto escolhe-se um polinômio primitivo de módulo 2. Os coeficientes deste polinômio são usados para formar uma relação recursiva que gera os elementos de  $z$  superiores ao grau do polinômio usado.
2. O segundo passo leva à construção de números direcionais,  $d$ , convertendo os números da seqüência  $z$  numa fração binária de base 2.
3. A terceira etapa reside em construir uma seqüência  $m$  de  $n$  inteiros não negativos.
4. Termina-se derivando os números de Sobol,  $s$ , do algoritmo recursivo de Antonov e Saleev,  $s_{n+1} = s \oplus d_j$ , onde  $j$  é a posição do primeiro bit zero da expressão do inteiro  $s_n$  na base 2.

Para tornar mais claro este procedimento, vamos agora gerar os dez primeiros pontos de Sobol em uma dimensão.

### Primeira etapa: geração de $\{z\}$

Um polinômio primitivo módulo 2 pode ser escrito da seguinte forma:

$$P = x^d + h_1x^{d-1} + h_2x^{d-2} + \dots + h_{d-1}x + 1$$

Uma lista de polinômios primitivos módulo 2 pode ser encontrada em Press et Al. [18]. Trabalharemos neste exemplo com um polinômio primitivo módulo 2 de grau 3:

$$P = x^3 + x^2 + 1$$

---

<sup>1</sup>Lembramos que  $[x]$  representa a parte inteira de  $x$ .

Estamos interessados nos coeficientes do polinômio. Portanto temos neste caso:

$$h_1 = 1 \text{ e } h_2 = 0$$

Para gerar a seqüência  $\{z\}$  usamos a seguinte relação recursiva:

$$z_i = 2h_1z_{i-1} \oplus 2^2h_2z_{i-2} \oplus \dots \oplus 2^{d-1}h_{d-1}z_{i-d+1} \oplus 2^d z_{i-d} \oplus z_{i-d}$$

$\oplus$  representa o operador XOR - bit by bit exclusive or. No nosso exemplo a relação torna-se:

$$z_i = 2z_{i-1} \oplus 2^3 z_{i-3} \oplus z_{i-3}$$

Temos que determinar arbitrariamente os três primeiros elementos da seqüência. Podemos optar por:

$$z_1 = 1, z_2 = 3 \text{ e } z_3 = 5$$

Aplicando a fórmula recursiva obtemos:

$$\begin{aligned} z_4 &= 10 \oplus 8 \oplus 1 \\ &= 1010 \oplus 1000 \oplus 0001 \\ &= 0011 \\ &= 3 \end{aligned}$$

e assim por diante até chegar ao número  $k = \lceil \log_2 n \rceil$  desejado de elementos de  $z$ . Continuando desta maneira obteríamos os dez primeiros elementos de  $\{z\}$ :

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i$	1	3	5	3	29	23	53	159	401	703

### Segunda etapa: geração dos números direcionais

Os números direcionais decorrem do seguinte algoritmo:

$$d_i = \frac{z_i}{2^i}$$

Existe um método muito simples para a obtenção dos números direcionais. Trata-se de efetuar uma translação de  $z_i$  para depois do ponto e aplicar a função radical inversa a esta nova representação. Note que  $z_i$  tem que ser transladado na sua forma integral não podendo-se eliminar os zeros à esquerda do primeiro bit unitário no sentido da leitura. No nosso exemplo:

$$d_4 = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} = \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \dots$$

### Terceira etapa: geração da seqüência de inteiros

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

### Quarta etapa: geração dos números de Sobol

Obtemos estes números através do algoritmo  $s_{n+1} = s_n \oplus d_j$ . Vejamos a formação dos primeiros números:

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = s_0 \oplus d_2 = 0.0 \oplus 0.1 = 0.1 = \frac{1}{2}$$

já que o bit zero mais próximo da direita na expansão de 1 (igual a 01) na base 2 é o segundo.

$$s_2 = s_1 \oplus d_1 = 0.01 \oplus 0.11 = 0.01 = \frac{1}{4}$$

Cada dimensão é obtida usando-se um polinômio diferente.

Os dez primeiros números de Sobol obtidos com os parâmetros usados são:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s_i$	0	0.5	0.25	0.75	0.375	0.875	0.125	0.625	0.5625	0.0625

O código deste algoritmo na linguagem C++ encontra-se disponível em Press et al. [18]. No apêndice B são apresentados gráficos de seqüências aleatórias bi-dimensionais. É possível então visualizar a maneira uniforme com a qual estas preenchem o quadrado unitário.

Antes de prosseguirmos gostaríamos de salientar as divergências entre a SMC e a SQMC (a derivação das afirmações sobre SQMC pode ser encontrada no apêndice B). As duas grandes diferenças entre os dois métodos são:

1. A SMC oferece ordem de grandeza probabilística para os erros de integração enquanto que a SQMC fornece uma ordem de grandeza determinista para limite do mesmo erro.
2. O erro de integração em SMC é independente da dimensão do problema, o que não ocorre no caso da SQMC.

Veremos agora os resultados obtidos quando se utiliza seqüências quase-aleatórias em problemas de finanças.

## Capítulo 4

# Resenha dos Artigos sobre SQMC em finanças

Os artigos que tratam do método quasi-Monte Carlo aplicado a problemas de natureza financeira são escassos. Conseguimos encontrar cinco referências inovadoras. Além destas podemos citar o trabalho de Paskov [4]. Todavia este trabalho simplesmente reitera os resultados obtidos pelo mesmo autor em um artigo anterior que será tratado abaixo. Estes são, em ordem cronológica:

- John R. Birge, "Quasi-Monte Carlo Approaches to Option Pricing", University of Michigan Working Paper - não datado.
- S. Paskov & J. Traub, "Faster Valuation of Financial Derivatives", The Journal of Portfolio Management - 1995.
- C. Joy, P. Boyle & K. Sen Tang, "Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance", Management Science - 1996.
- P. Boyle, M. Broadie & P. Glasserman, "Monte Carlo Methods for Security Pricing", Journal of Economic Dynamics and Control - 1997.
- S. Galanti & A. Jung, "Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices", The Journal of Derivatives - 1997.

Poderíamos também ter acrescentado a esta lista o trabalho de Tezuka [23], porém o tratamento das aplicações financeiras é muito sucinto e não acrescenta nenhuma informação às investigações que veremos em seguida.

Segue uma rápida exposição dos resultados obtidos por cada uma das pesquisas.

**John R. Birge: "Quasi-Monte Carlo Approaches to Option Pricing" University of Michigan Working Paper.**

Um dos motivos que leva o autor a testar a eficácia das seqüências de baixa discrepância é o artigo de Wozniakowski [25] que, alega-se, demonstra que para certas seqüências de baixa discrepância e certos tipos de integrais, os problemas relacionados à dimensão cessam de existir. As seqüências estudadas são as de Halton, Sobol e Faure, além de uma seqüência denominada Alpha que o autor introduz. O gerador de números pseudo-aleatórios é o algoritmo sugerido por Schrage [20]. Uma opção plain vanilla é precificada com 10, 30 e 180 dimensões. Para o caso de 10 dimensões o método de Sobol mostra-se superior, sendo igualado pelo método de Faure somente para simulações de vinte e oito mil pontos. Para 30 dimensões a seqüência Alpha e a seqüência de Faure são as mais eficazes. A seqüência de Sobol apresenta bons resultados, mas oscila muito, enquanto que a seqüência de Halton é estável, mas apresenta erro grande. Tanto para 10 como para 30 dimensões a seqüência pseudo-aleatória oscila enormemente. Para 180 dimensões a seqüência Alpha continua sendo a mais eficiente enquanto que as seqüências de Halton e de Faure geram um erro superior a 2%. O autor conclui que em geral as seqüências Alpha e de Sobol atingem rapidamente um erro pequeno. As seqüências de Halton e Faure são as mais regulares mas geram um erro muito grande quando se trabalha com altas dimensões. A seqüência pseudo-aleatória tende a apresentar resultados relativamente melhores quando o número de dimensões aumenta, mas oscila muito.

**Paskov & Traub: "Faster Valuation of Financial Derivatives" em The Journal of Portfolio Management, Fall 1995.**

Os autores usam uma CMO - collateralized mortgage obligation - de 10 tranches o que os obriga a calcular dez integrais, cada uma podendo atingir até 360 dimensões (fluxos de caixa mensais durante trinta anos). Os números quase-aleatórios escolhidos são os de Halton e os de Sobol, que serão comparados às SMC efetuadas com o uso do gerador RAN2 de Press et al. [18], com e sem variáveis antitéticas. As comparações entre os diferentes métodos são efetuadas para uma tranche. O preço real é obtido efetuando uma SMC com variáveis antitéticas de 20 milhões de pontos. Os erros obtidos na precificação evidenciam que os números de Sobol são superiores aos outros geradores (incluindo uma média de 20 SMCs). A convergência é mais rápida e mais suave para os métodos deterministas, sendo que os

números de Sobol são mais eficientes que os de Halton. Quando é usado um critério arbitrário de término das simulações, o método de Sobol encerra as simulações de duas a cinco vezes mais rapidamente que a SMC. O critério consiste em cessar o procedimento cada vez que duas diferenças consecutivas de preços são menores que uma determinada constante. Acharmos este critério questionável já que pelas nossas observações a convergência é raramente regular para os preços obtidos com seqüências pseudo-aleatórias. Os autores concluem que a SMC é sensível à semente inicial. Quando se compara o método de Sobol com SMC com variáveis antitéticas os números de Sobol mostram-se novamente superiores. O uso das variáveis antitéticas melhora o desempenho da SMC. Os resultados são válidos para simulações de pequeno número de pontos (quatro mil neste caso). Outro resultado aponta para a necessidade de se efetuar de sete a setenta e nove vezes o número de simulações efetuadas com o método de Sobol para que a SMC com variáveis antitéticas obtenha resultados idênticos num nível de confiança de 95%. A convergência, usando-se variáveis antitéticas - também sensíveis à semente inicial - é mais suave que no caso da SMC sem técnica de redução de variância. Em determinado ponto os autores deixam de trabalhar com seqüências de Halton para um número de pontos por simulação inferior a quatro mil, usando como justificativa a inferioridade dos resultados obtidos em relação a todos os outros métodos. Quando se considera um universo de 20 vezes 10 tranches o método de Sobol é superior à SMC, com e sem variáveis antitéticas, em respectivamente 70% e 90% das vezes (cada tranche). Em suma o artigo de Paskov & Traub confirma resultados já observados e sugere que para o derivativo em questão os problemas de dimensão já mencionados não teriam influência nenhuma, indo ao encontro de Niederreiter [13] que afirma que para integrais de dimensão maior que 12 a SMC é superior à SQMC. Uma das sugestões dos autores para pesquisa é justamente a definição de classes de derivativos com propriedades semelhantes quanto à precificação via SMC ou SQMC. Para certas classes a dimensão não teria influência.

**Corwin Joy, Phelim Boyle & Ken Seng Tan: "Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance" em Management Science vol. 42, nº 6, June 1996.**

Os resultados empíricos apresentados neste artigo foram obtidos com o uso da seqüência de Faure cujo algoritmo é apresentado detalhadamente. O gerador de números pseudo-aleatórios não é descrito, portanto não sabemos se os autores utilizaram um algoritmo já consagrado pela literatura. O

primeiro realizado consiste em precificar opções européias (dimensão 1). Os resultados são apresentados graficamente. Para a opção de compra são efetuadas precificações com até dez mil pontos. A convergência do preço obtido via SQMC é mais veloz e mais estável quando comparada com a simulação tradicional. As mesmas conclusões são válidas quando se trata da opção de venda. É também efetuado o cálculo do Delta e do Gamma da opção de compra. Os resultados obtidos com o auxílio das seqüências de baixa discrepância são superiores aos obtidos com números pseudo-aleatórios. Em seguida os autores trabalham com derivativos mais complexos. O primeiro deles é uma opção européia que depende da média geométrica de vários ativos. Neste caso existe uma solução analítica. De novo a SQMC apresenta convergência mais rápida e mais estável para simulações de até dez mil pontos. O segundo deles é um "basket option", uma opção sobre uma composição de ativos (ou cesta). Uma tabela mostra que o método SQMC gera um preço que não se modifica mais a partir de simulações de cinquenta mil pontos (são feitas simulações de cem mil e quinhentos mil pontos). Os preços obtidos pelo método tradicional oscilam ao redor deste resultado. Tomando-o como justo, observamos novamente que a convergência dos preços obtidos via SQMC é mais rápida e mais suave. Os autores testam seqüências multidimensionais precificando duas opções asiáticas. A primeira depende de 5 passos no tempo. Neste caso os resultados obtidos anteriormente continuam válidos. A segunda opção depende de 53 passos no tempo. A convergência dos dois métodos revelou-se mais lenta do que previamente observado. No entanto a seqüência de Faure continua mais eficiente. Este resultado é indiscutível a partir de simulações efetuadas com mais de vinte mil pontos. Com um número de pontos inferior, a seqüência de Faure apresenta o mesmo comportamento errático que a seqüência pseudo-aleatória. Quando lidamos com simulações de mais de 1 milhão de pontos, a SQMC oferece um preço muito próximo do sugerido como justo pelos autores. O último teste consiste na precificação de uma swaption de gás. A precificação é feita usando um modelo HJM de três fatores com 6 passos no tempo necessitando portanto de uma seqüência de 18 dimensões. Os resultados mostram novamente uma maior eficiência da SQMC. Finalmente os autores incentivam o uso de técnicas de redução de variância em conjunto com seqüências de baixa discrepância.

Phelim Boyle, Mark Broadie & Paul Glasserman: "Monte Carlo Methods for Security Pricing" em *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 21, nº 8-9, June 1997.

Este artigo difere dos outros pela sua abrangência. Vários tópicos são abordados, dentre os quais podemos destacar: métodos de redução de variância aplicados à SMC, seqüências de baixa discrepância e precificação de derivativos de tipo americano com o uso de simulações. Trataremos da segunda parte do artigo. As SQMC são efetuadas com as seqüências de Faure e de Sobol. O primeiro experimento consiste em precificar uma opção européia. Os autores escolhem aleatoriamente um conjunto de 500 parâmetros diferentes, dentro de uma distribuição de parâmetros que espelha o comportamento do mercado. São portanto calculados 500 preços diferentes para cada tamanho de simulação. A medida de erro adotada é o "root-mean-squared error":

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{P_i - P}{P} \right)^2}$$

onde  $P$  é o preço obtido aplicando a fórmula de Black & Scholes, e  $P_i$  o preço obtido na  $i$ -ésima simulação. O gráfico da média desta medida para simulações de cem a dez mil pontos confirma os resultados obtidos nas outras pesquisas. O erro obtido com números quase-aleatórios é inferior ao erro obtido com números pseudo-aleatórios. Dentre as SQMC a seqüência de Sobol apresenta melhores resultados que a seqüência de Faure. Para testar o comportamento das seqüências de baixa discrepância em dimensões mais altas, é escolhida uma opção asiática para as dimensões 10, 50 e 100. Essas opções são também precificadas usando variáveis antitéticas na SMC. São efetuadas duas simulações de respectivamente cinquenta e duzentos mil pontos para cada dimensão. Observamos que para as simulações de cinquenta mil pontos as seqüências de Faure e Sobol são as mais eficientes até 50 passos no tempo. Para a dimensão 100 a seqüência de Faure torna-se ineficiente, enquanto que a seqüência de Sobol continua apresentando um erro inferior a qualquer outro método de precificação. Porém o erro obtido cresce com o número de dimensões. Para simulações de duzentos mil pontos as seqüências de baixa discrepância apresentam novamente resultados mais eficientes para todas as dimensões escolhidas. Curiosamente a seqüência de Faure gera um erro inferior à de Sobol para 50 passos no tempo. A SMC com variáveis antitéticas apresenta um resultado ligeiramente superior à SMC tradicional. Os autores efetuam uma observação muito interessante: seqüências pseudo-aleatórias de periodicidade semelhante ao número de pontos usados na sim-

ulação geram resultados semelhantes às seqüências de baixa discrepância.

**Silvio Galanti & Alan Jung: "Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices" em The Journal of Derivatives, Fall 1997.**

Os autores testam as seqüências quase-aleatórias de Sobol, Faure, Halton assim como o gerador de números pseudo-aleatórios RAN2 encontrado em Press et al. [18] na precificação de uma opção "plain vanilla" e de "path-dependent options" tais como opções com barreira, opções asiáticas, e "look-back" options. Os resultados obtidos mostram que para dimensões pequenas as seqüências de baixa discrepância revelam-se superiores às seqüências pseudo-aleatórias. Para dimensões maiores os resultados são inconcludentes. Dentre as seqüências de baixa discrepância uma classificação por ordem de eficiência é outro ponto ambíguo.

Para testar os problemas relacionados a dimensões altas, os autores determinam uma medida geométrica que os permite medir a porcentagem da área destituída de pontos quando se gera um gráfico de dispersão para 500 pontos de dimensões adjacentes. Quando esta área atinge 30%, os autores estimam que identificaram a mais alta dimensão aceitável para posterior simulação. Os números de Halton deixam de ser satisfatórios a partir da décima quarta dimensão, os de Faure na vigésima quinta dimensão enquanto que os números de Sobol não apresentam nenhuma irregularidade até a dimensão 260, número máximo permitido pelo código dos autores. O erro obtido na precificação da opção é definido como:

$$e = \left| \frac{c - pbs}{pbs} \right| \times 100$$

onde  $c$  é o preço obtido via simulação e  $pbs$  o preço obtido usando-se uma fórmula analítica. Todas as simulações efetuadas com o gerador RAN2 empregam variáveis antitéticas.

Na precificação da opção plain vanilla, OP1, gerando-se unicamente o preço terminal do ativo subjacente, o erro obtido usando seqüências de baixa discrepância é inferior ao obtido pela SMC com variáveis antitéticas. A seqüência de Sobol aparenta ser a mais eficiente neste caso com um erro de 0,03% para simulações de 15 mil pontos. Quando a precificação é efetuada com 10 dimensões o método de Sobol continua superior aos outros, a partir de simulações de quinze mil pontos. Dentre os restantes nenhum se destaca. Para 250 dimensões o método de Sobol é julgado o mais eficiente. Esta afirmação é ambígua pois, entre simulações de cinquenta mil a cento e

cinquenta mil pontos, o gerador pseudo-aleatório apresenta melhores resultados. Neste caso a seqüência de Halton e, em grau menor, a seqüência de Faure, demonstram ser consistentemente menos eficientes que a seqüência pseudo-aleatória. Um gráfico que mostra a evolução do erro a cada intervalo de 10 dimensões deixa claro que a seqüência de Halton é inoperante após 15 dimensões. A seqüência de Faure tem resultados irregulares e, a partir da dimensão 60, não oferece nenhum ganho. A seqüência de Sobol apresenta um erro crescente até a dimensão 100 quando começa a convergir novamente para o preço justo.

A opção de compra com barreira, OP2, confirma os resultados obtidos com a opção plain vanilla.

Na precificação da opção de compra asiática (com média geométrica), OP3, a seqüência pseudo-aleatória mostrou-se a mais eficiente. A partir de 50 mil simulações, a seqüência de Faure é superior à seqüência de Sobol.

A opção de compra look-back, OP4, confirma a inferioridade do método de Sobol e não permite a identificação de uma seqüência mais eficiente entre as demais.

Como os testes efetuados neste trabalho assemelham-se bastante ao que será visto mais adiante, decidimos agrupar os resultados obtidos na tabela 4.1, no intuito de facilitar uma futura comparação. Nesta, a relação  $x > y$  indica que o método  $x$  produz um erro menor que o erro do método  $y$ . Os métodos correspondem a Sobol para S, Faure para F, Halton para H e ran2 para a SMC. A notação dos derivativos precificados corresponde a utilizada ao comentarmos o artigo. Assim, se tivermos,  $S > F > H > ran2$ , para OP1 sabemos que para a opção de compra plain vanilla, a SQMC com números de Sobol gerou um erro inferior ao obtido com os números de Faure, que por sua vez foi inferior ao obtido com os números de Halton. A SMC neste caso apresentou pior desempenho.

### **Comentários sobre as pesquisas efetuadas**

As pesquisas efetuadas até agora mostram irrefutavelmente que, quando se trabalha com dimensões pequenas - até 15 - os resultados obtidos com o uso das seqüências de baixa discrepância são superiores aos resultados obtidos com SMC, sendo esta com ou sem variáveis antitéticas. Vale ressaltar que esta é a única técnica de redução de variância testada.

Algumas pesquisas não divulgam o algoritmo do gerador de números pseudo-aleatórios, porém acreditamos que seja difícil encontrar, nos tempos atuais, um gerador pseudo-aleatório que não obedeça às regras fundamentais da categoria.

Número de simulações (mil)	Opção	Dimensão	Resultado
Até 200	OP1	1	$S > F > H > ran2$
Até 10	OP1	10	$F > S > ran2 > H$
10-25	OP1	10	$S > F > ran2 > H$
25-200	OP1	10	$S > H > F > ran2$
Até 10	OP1	250	$S > ran2 > F > H$
10-25	OP1	250	$S > F = ran2 > H$
25-125	OP1	250	$ran2 > F > S > H$
125-250	OP1	250	$S > ran2 > F > H$
20	OP1	1-15	$S = F = H > ran2$
20	OP1	16-60	$F > S > ran2 > H$
20	OP1	61-110	$ran2 > F \Rightarrow S > H$
20	OP1	111-250	$ran2 = F > S > H$
Até 75	OP2	250	$S > ran2 > F > H$
75-200	OP2	250	$S > F > ran2 > H$
Até 50	OP3	250	$ran2 > S > F > H$
50-125	OP3	250	$ran2 > F > S > H$
125-200	OP3	250	$ran2 > F = S > H$
Até 20	OP4	250	$S > ran2 > F > H$
20-40	OP4	250	$H > S = ran2 = F$
40-200	OP4	250	$S = ran2 = F > H$

Tabela 4.1: Resultados obtidos por Galanti & Jung

Quando derivativos que requerem simulações de dimensão alta são precificados, nos deparamos com algumas incongruências. Em primeira instância temos um conflito entre a teoria e a prática financeira. São várias as referências (Niederreiter [13], Moskowitz & Caflisch [12], Owen [16]) que evocam o problema de integração com dimensões altas, advogando o uso da SMC para dimensões acima de 10. No entanto vemos que as pesquisas efetuadas com a seqüência de Sobol mostram que, mesmo se o erro gerado na precificação tende a aumentar, ele permanece inferior ao obtido com o uso dos outros métodos. O artigo de Galanti & Jung é o único artigo que mitiga um pouco este resultado. A teoria só é averiguada no caso da seqüência de Halton.

Quando analisamos a seqüência de Faure os resultados são conflitantes. De um lado temos o estudo de Joy, Boyle & Tan que valida o uso da seqüência e por outro lado o estudo de Boyle, Broadie e Glasserman que aponta problemas no uso dos números de Faure a partir de 60 passos no tempo. A

pesquisa de Birge relata problemas com a seqüência de Faure para 180 passos no tempo. Por outro lado o método de Faure em alguns casos mostra-se mais eficiente que o método de Sobol.

Existe uma discrepância entre os resultados obtidos em física e em finanças. As pesquisas efetuadas em física corroboram a teoria. Em nenhum momento encontramos resultados conflitantes. SQMC são usadas exclusivamente para dimensões pequenas. Uma das explicações para esta discrepância poderia ser a irregularidade das integrais encontradas no âmbito da física. Os problemas financeiros seriam muito mais regulares. Resta-nos agora relatar quais foram os resultados obtidos em nossos testes.

# Capítulo 5

## Testes

### 5.1 Considerações Gerais

O objetivo dos nossos experimentos é duplo. Em primeiro lugar estaremos testando a eficácia da seqüência de Niederreiter-Xing, doravante designada por NX, em problemas de finanças que requerem o uso de SMC, na esperança que obtenhamos uma solução para o problema da dimensão. Em segunda instância estaremos interessados em avaliar o desempenho das seqüências de baixa discrepância quando aplicadas ao cálculo de VaR, pois entendemos que esta modalidade pode se beneficiar muito de um método mais econômico e preciso que a SMC, já que esta é ainda a única alternativa à aproximação via expansão de Taylor. Entendemos que no Brasil esta seja a principal aplicação da SQMC. Numa primeira fase efetuaremos experimentos para os quais existe uma solução analítica permitindo assim uma comparação precisa entre os diferentes métodos utilizados. Para motivar o nosso trabalho começamos com a precificação de uma opção de compra européia. Este experimento visa mostrar algumas propriedades dos diferentes métodos usados. Em seguida passamos para o contexto de cálculo de VaR onde testaremos a SQMC para um portfólio que consiste numa venda de borboleta montada com opções de compra. Neste caso não temos uma fórmula analítica que nos fornece o VaR porém, um número grande de simulações Monte-Carlo permite ter uma boa estimação dos valores esperados. O próximo passo consiste em testar as seqüências quase-aleatórias em simulações multi-dimensionais, terreno no qual elas têm apresentado resultados variados. Para isto calculamos inicialmente o VaR para portfólios de até 55 ações que compõem o índice Ibovespa. Finalmente efetuaremos uma comparação entre os diferentes métodos no contexto de precificação

de opções ditas "path-dependent" (ou que dependem da trajetória seguida pelo ativo-subjacente durante a vigência do derivativo). Estes experimentos nos permitirão confrontar os resultados apresentados no capítulo 4, além de introduzir o uso da seqüência de NX neste contexto.

## 5.2 Teste 1: Opção de Compra Européia

O nosso primeiro experimento consiste em precificar uma opção de compra européia com as seguintes características:

Preço do ativo-objeto:	R\$1982,41
Preço de exercício:	R\$2200,00
Taxa de juros até o vencimento:	20% a.a. (252 d.u.)
Volatilidade do ativo-objeto:	20% a.a.
Tempo até o vencimento:	126 dias

O preço desta opção de acordo com o modelo de Black & Scholes é de R\$100,00, de tal modo que qualquer desvio em relação a este preço representa também o desvio percentual ou erro relativo. Para cada gerador de números pseudo-aleatórios efetuamos 100 mil simulações de mil, 5 mil, 10 mil, 20 mil e 30 mil pontos. Dada a intensidade computacional do procedimento não foi possível usar os geradores do Matlab e do Scilab. Optamos por geradores que pudessem facilmente ser implementados na linguagem C. São estes o RAN2 de Press et al. [18] e o gerador que apelidaremos de RAN3, sugerido pelo Marsaglia, de acordo com Rubinstein [19]. O gerador RAN2 será usado para os experimentos 4 e 5, de tal modo que compará-lo neste experimento simples com outros geradores pseudo-aleatórios nos fornecerá uma maneira de validá-lo. Foi possível utilizar o gerador de números pseudo-aleatórios do Excel numa "macro". No caso das seqüências de Halton, Sobol e NX, por serem deterministas, efetuamos uma única SQMC de número de pontos idêntico ao usado para as seqüências pseudo-aleatórias. Usamos a seqüência de Halton unicamente neste e no próximo experimento como meio de mostrar que a seqüência de Sobol, conforme relatado na literatura, apresenta desempenho superior. Deste modo nada perdemos quando, para o caso de problemas multi-dimensionais, utilizamos a seqüência de Sobol como critério de comparação para a seqüência de NX. Pela própria natureza do exercício (pelo menos é o que se espera de uma seqüência de números pseudo-aleatórios) os preços obtidos via SMC são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Uma vez obtidos os cem mil preços para cada

número de pontos, estimamos a média do preço obtido assim como a sua variância.

Como vimos anteriormente o preço da opção obtido via simulação nada mais é que a média do payoff da opção trazida a valor presente. Admitindo que o payoff da opção tenha média e variância finitas o teorema do limite central nos garante que o preço da opção terá portanto uma distribuição normal. Podemos então, dada esta distribuição para os preços da opção e os parâmetros estimados, calcular a probabilidade da SMC gerar preços que apresentam um erro inferior em valor absoluto ao erro obtido via SQMC.

Na tabela 5.1 podemos ver os resultados obtidos para a SQMC. Em seguida, na tabela 5.2, para cada gerador de números pseudo-aleatórios apresentamos as médias e as variâncias obtidas para cada tamanho de simulação. Nas colunas à direita da variância mostramos qual seria a probabilidade de obtermos, para determinado gerador de números pseudo-aleatórios, um erro de precificação superior ao atingido com o uso das seqüências quase-aleatórias. Por exemplo, se efetuarmos uma SMC de 20 mil pontos com o gerador RAN3, a probabilidade de obtermos um erro de precificação superior ao que seria obtido com uma SQMC de 20 mil pontos com seqüência de NX, é de 99,39%.

Pontos	Halton	Sobol	NX
mil	98,57	99,39	99,61
5 mil	99,61	99,91	99,92
10 mil	99,79	99,95	99,99
20 mil	99,89	99,92	100,01
30 mil	99,91	100,00	99,99

Tabela 5.1: Teste 1, SQMC

Em primeira instância podemos verificar que os nossos geradores de números pseudo-aleatórios corresponderam amplamente ao que se esperava deles. Em todos os casos, com exceção do gerador RAN3 para as séries de 1000 pontos, a média apresentou um desvio ínfimo em relação ao preço justo. Em seguida, o desvio padrão do erro observado obedeceu à regra mencionada no capítulo 2, decaindo à razão de  $(\sqrt{N})^{-1}$ . A tabela 5.3 mostra isso com mais clareza, partindo-se da média dos desvios padrões para simulações de mil pontos (desvio padrão teórico).

Novamente o gerador RAN3 apresenta um resultado um pouco discrepante do esperado (agora para 10 mil pontos) porém os demais desvios padrões não divergem dos observados para os outros dois geradores. Um

Gerador	Pontos	$\mu$	$\sigma$	Halton	Sobol	NX
Excel	1 mil	100,00	5,36	78,93%	90,86%	94,25%
Excel	5 mil	100,00	2,44	87,31%	96,92%	97,35%
Excel	10 mil	100,00	1,73	90,33%	97,57%	99,47%
Excel	20 mil	100,00	1,23	92,77%	95,04%	99,40%
Excel	30 mil	100,00	1,01	92,89%	99,96%	99,01%
RAN2	1 mil	100,00	5,36	78,93%	90,86%	94,25%
RAN2	5 mil	100,00	2,40	87,12%	96,88%	97,30%
RAN2	10 mil	100,00	1,73	90,09%	97,51%	97,65%
RAN2	20 mil	100,00	1,23	92,57%	94,90%	99,38%
RAN2	30 mil	100,00	0,97	92,44%	99,80%	98,80%
RAN3	1 mil	99,97	5,42	79,62%	91,43%	94,77%
RAN3	5 mil	100,00	2,43	87,31%	96,95%	97,37%
RAN3	10 mil	100,01	2,10	91,68%	97,65%	99,22%
RAN3	20 mil	100,00	1,21	92,63%	94,94%	99,39%
RAN3	30 mil	100,00	1,02	92,70%	99,71 %	98,77%

Tabela 5.2: Teste 1, SMC vs SQMC

Pontos	Razão	$\sigma$ teórico	$\sigma$ teórico	$\sigma$ teórico	$\sigma$ teórico
1000	1.00	5.38	5.36	5.36	5.42
5000	2.24	2.41	2.44	2.40	2.43
10000	1.41	1.70	1.73	1.69	2.10
20000	1.41	1.20	1.23	1.20	1.21
30000	1.22	0.98	1.01	0.97	1.02

Tabela 5.3: Teste 1, desvio padrão do erro com SMC

outro fator interessante é que o desvio padrão não difere de um gerador para outro, demonstrando uma certa robustez do problema às seqüências pseudo-aleatórias utilizadas. Esses fatores possuem o mérito de tranquilizar-nos quanto à eficiência das SMC de tal modo que a comparação com a SQMC não pode ser desacreditada em função da pobreza das seqüências pseudo-aleatórias.

Quando nos debruçamos sobre os resultados obtidos via SQMC, a superioridade deste método para o problema em questão fica evidente. No pior dos casos para as SQMC - simulação com mil números de Halton - a probabilidade de obtermos um resultado mais preciso via SMC é inferior à 22%. Todavia para um número de pontos superior a mil esta probabili-

dade oscila ao redor de 10% para as SQMC com números de Halton, 4-5% para SQMC com números de Sobol e 1-2% para SQMC com números de NX. Novamente estes resultados eram esperados. De um lado a baixa discrepância das seqüências permite replicar com mais fidelidade a distribuição de probabilidade e de outro a suposta hierarquia destas seqüências é confirmada. A melhora observada na convergência para o preço justo é nítida quando se passa de simulações com números de Halton para simulações com números de Sobol ou NX, e mais discreta, porém incontestável, quando se passa de simulações com números de Sobol para simulações com números de NX. Naturalmente, no caso estudado não existe nenhum ganho em usarmos qualquer tipo de simulação, já que o problema possui solução analítica. Todavia o nosso intuito consiste em mostrar que para o caso uni-dimensional existem indícios fortes que o uso de SQMC oferece uma solução mais eficaz do que a SMC tradicional. O uso de um problema que possui uma solução fechada permite inferirmos com mais segurança e precisão. De qualquer modo, além de validarmos o gerador RAN2, os resultados obtidos acima servem de motivação para o nosso próximo experimento para qual o uso da SMC é amplamente difundido no mercado financeiro.

### 5.3 Teste 2: VaR Univariado - Venda de Borboleta

Este experimento consiste em transportar o caso unidimensional testado acima para o universo da mensuração de risco de mercado. Criamos um portfólio que consiste numa venda de borboleta. Segue uma descrição desta operação:

Natureza do derivativo:	Opção de compra de tipo européia
Preço do ativo-objeto:	R\$1000,00
Preços de exercício:	R\$900,00 R\$1000,00 e R\$1100,00
Taxa de juros até o vencimento:	20% a.a. (252 d.u.)
Volatilidade do ativo-objeto:	20% a.a.
Tempo até o vencimento:	126 dias

A estratégia consiste em vender cem unidades de opções de strike R\$900,00 e R\$1100,00 e comprar duzentas unidades de opção de strike R\$1000,00. Podemos imaginar que o gestor da carteira acredita que uma ação específica terá um movimento amplo tanto para cima ou para baixo e decide captar dinheiro para outros fins através de uma venda de borboleta. No gráfico 5.1 podemos ver a relação entre a lucratividade e o preço do ativo-objeto no vencimento (não ajustamos pela taxa livre de risco).

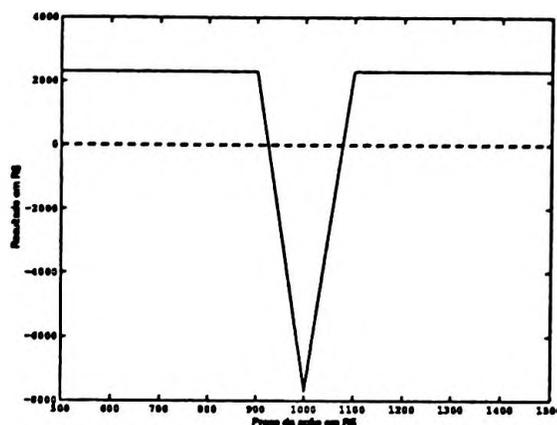


Figura 5.1: Teste 2, venda de borboleta

Consideramos que a marcação a mercado das opções forneceu os seguintes preços:

Opção 1, preço de exercício de R\$900,00:	R\$183,00
Opção 2, preço de exercício de R\$1000,00:	R\$108,00
Opção 3, preço de exercício de R\$1100,00:	R\$54,00

O segundo teste visa comparar os resultados obtidos no cálculo de um VaR de um dia para níveis de confiança variando de 90% a 99% (intervalos de 1%) e um número de pontos usados nas simulações variando de mil a 50 mil, em acréscimos de mil. De acordo com a metodologia exposta no capítulo 2, o procedimento consiste em simular, para a ação subjacente na data  $d+1$ ,  $n$  preços, que são em seguida usados como parâmetro da fórmula de Black & Scholes. Obtemos assim  $n$  preços para cada opção. Quando comparamos estes preços com os preços na data  $d$  geramos  $n$  retornos para o nosso portfólio. Este vetor de resultados é ordenado e escolhemos os valores que correspondem aos níveis de confiança previamente estipulados. Neste teste trabalhamos com os geradores pseudo-aleatórios do Excel, do Matlab e do Scilab comparados às seqüências quase-aleatórias de Halton, Sobol e NX. O valor que usaremos como benchmark corresponde à média de 1000 simulações Monte Carlo de 5 mil pontos efetuadas com o uso do aplicativo Matlab. Para cada gerador de dados pseudo/quase aleatórios obtemos, portanto, uma tabela de 50 linhas (pontos usados na simulação) e 10 colunas (nível de confiança do VaR). Na tabela 5.4 mostramos o benchmark que será usado para avaliarmos os nossos resultados.

Para cada VaR calculamos o erro percentual incorrido usando-se os diferentes métodos. A visualização dos erros e a sua interpretação não é fácil

Nível de Confiança	99%	98%	97%	96%	95%
VaR	-223.21	-202.63	-188.91	-178.38	-169.72
Nível de Confiança	94%	93%	92%	91%	90%
VaR	-162.14	-155.33	-149.18	-143.55	-138.41

Tabela 5.4: Teste 2, benchmark

quando se olha para as tabelas de resultados. Preferimos, portanto, apresentar o nosso experimento com o uso de gráficos. Essa escolha será adotada para os demais testes. Em primeiro lugar efetuamos uma comparação entre as seqüências de baixa discrepância. Para isto calculamos o erro médio (a amostra é portanto constituída dos valores obtidos para os dez níveis de confiança) para cada número de pontos utilizados e geramos as figuras 5.2 e 5.3.

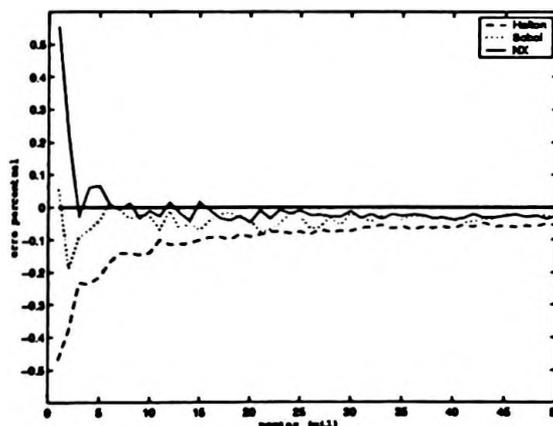


Figura 5.2: Teste 2, Halton, Sobol e NX

Podemos constatar imediatamente que os erros obtidos via SQMC são de ordem muito pequena, mesmo considerando-se um número reduzido de pontos (mil a cinco mil). Os valores obtidos encontram-se em média muito próximos dos esperados e certamente não invalidariam o VaR assim obtido. Todavia nos interessa obter um resultado superior ao que conseguiríamos se fosse usada a expansão de Taylor (delta-gama). Um erro inferior a 0,1% é obtido para simulações acima de 16 mil pontos para as seqüências de Halton e de 3 mil ! pontos para as seqüências de Sobol e NX. Quando comparamos as seqüências de baixa discrepância entre si verificamos que a seqüência de Halton é nitidamente inferior às demais, sem todavia deixar de ser operacional para o problema estudado. Este ponto, aliado à facili-

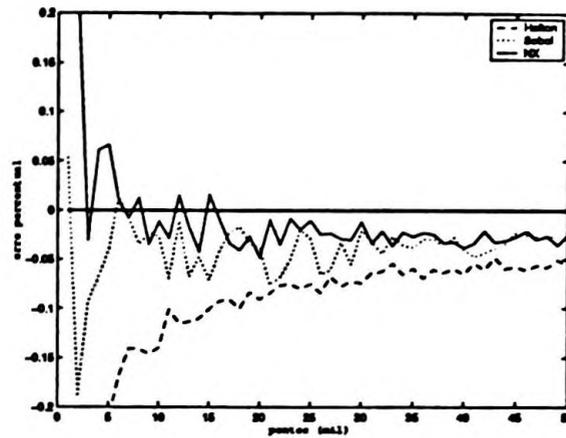


Figura 5.3: Teste 2, zoom do gráfico 5.2

dade de implementação de um gerador de números de Halton podem entrar em consideração quando se decide trabalhar com seqüências de baixa discrepância. Entre as seqüências de Sobol e NX não há grandes diferenças, senão uma ligeira vantagem para os números de NX. Este resultado está de acordo com os números obtidos quando precificamos o derivativo do primeiro experimento. Efetivamente a teoria indica que a melhora da seqüência de NX em relação à de Sobol torna-se progressivamente mais nítida conforme vai aumentando a dimensão do problema. Lembramos que até agora trabalhamos com a média dos erros obtidos para cada número de pontos usados no experimento. Podemos ver nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6 como estas mesmas seqüências se comportaram para os níveis de confiança mais usados pelos analistas.

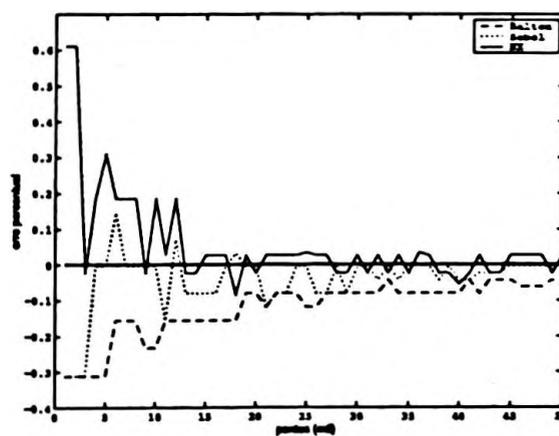


Figura 5.4: Teste 2, VaR 99%: Halton, Sobol e NX

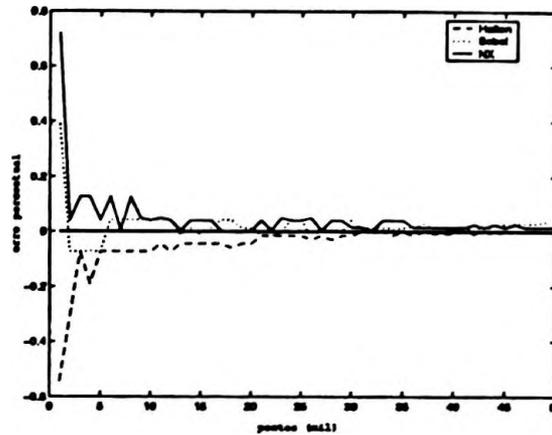


Figura 5.5: Teste 2, VaR 95%: Halton, Sobol e NX

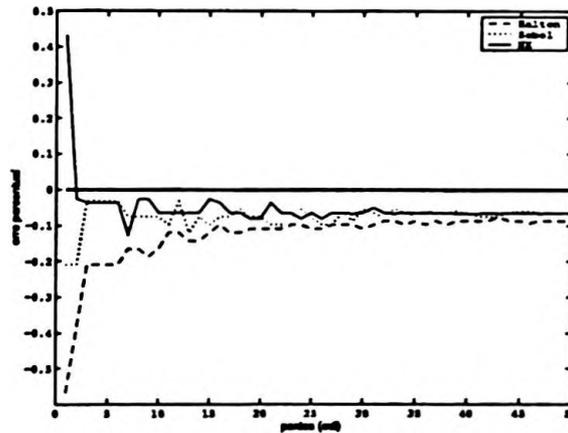


Figura 5.6: Teste 2, VaR 90%: Halton, Sobol e NX

Quando olhamos para o gráfico 5.4 vemos que este não difere muito do que vimos acima quando trabalhamos com a média dos erros. Para o VaR de 99% o comportamento das seqüências de NX e Sobol é mais errático. Todavia o erro gerado pela seqüência de NX não ultrapassa 0,05% a partir de simulações de vinte mil pontos. Para o VaR de 95% a seqüência de Halton obtém um desempenho surpreendente e apresenta resultados equivalentes aos que seriam obtidos com as demais seqüências de baixa discrepância. Notamos para estes três casos específicos que os resultados estão de acordo com o que vimos para as médias. Nos resta verificar se o uso das seqüências quase-aleatórias gera algum ganho quando comparado ao uso de seqüências pseudo-aleatórias. Para efeito de comparação escolhemos a seqüência de NX e o gerador do aplicativo Matlab. Os gráficos 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 ilustram os

nossos resultados para a média dos VaRs quando se varia o nível de confiança assim como para os VaRs de 99%, 95% e 90% de nível de confiança.

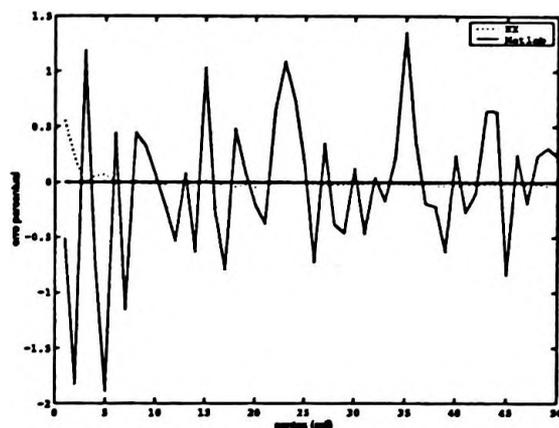


Figura 5.7: Teste 2, médias de VaR: NX e Matlab

Não temos dúvidas quanto à superioridade, na média, da SQMC. Para um número muito pequeno de pontos a SMC pode rivalizar com a SQMC. Para a maioria dos casos o erro gerado via SMC é de proporção muito mais ampla do que os observados para qualquer uma das seqüências de baixa discrepância.

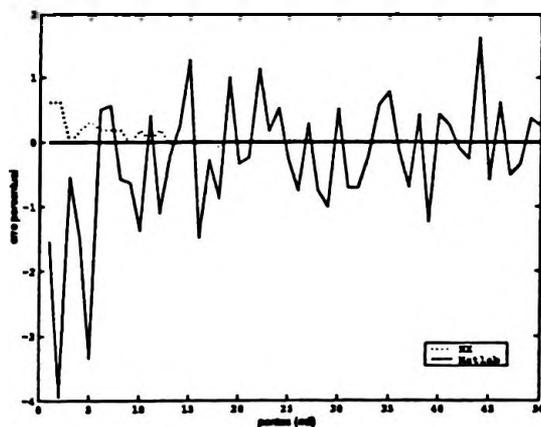


Figura 5.8: Teste 2, VaR 99%: NX e Matlab

Quando olhamos para níveis de confiança específicos, como se pode averiguar para os três casos expostos, podemos afirmar que o comportamento da SMC é bastante volátil. Mesmo com simulações de mais de quarenta mil pontos erros de ordem de 1% continuam sendo gerados, o que confirma a

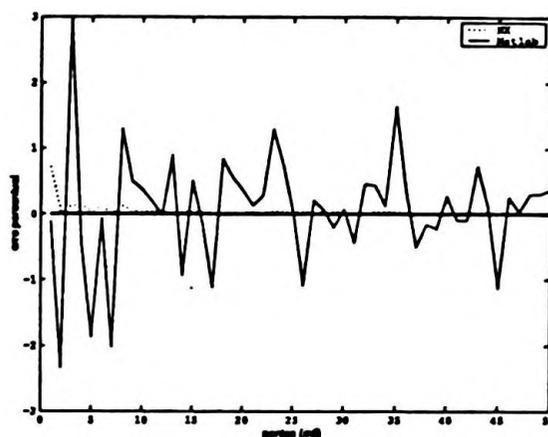


Figura 5.9: Teste 2, VaR 95%: NX e Matlab

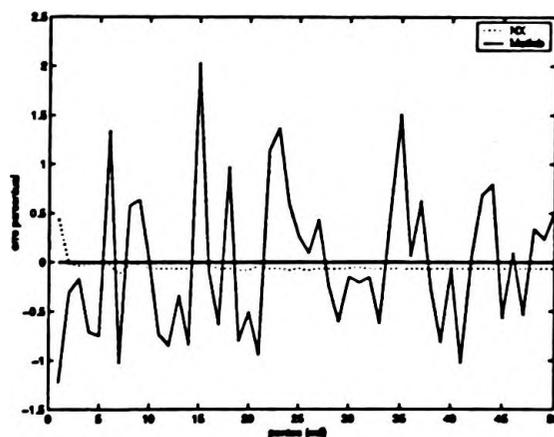


Figura 5.10: Teste 2, VaR 90%: NX e Matlab

constante que encontramos na literatura sobre VaR de que o uso da SMC é muito demandante em termos computacionais e que o seu uso requer um certo cuidado, pois dependendo do número de pontos com os quais o analista estiver trabalhando, ele pode alcançar resultados inferiores aos obtidos via aproximação de Taylor. Esta configuração de eventos não deixaria de comportar uma certa dose de ironia. Como forma de resumir os nossos resultados apresentamos a tabela 5.5, onde podemos ver o erro médio para cada gerador em simulações com número de pontos múltiplo de cinco mil (além de mil).

A informação adicional que esta tabela nos oferece é que dentre os geradores pseudo-aleatórios o gerador do aplicativo Matlab não distoia de modo algum dos demais e as comparações com a seqüência de NX efetuadas acima

N (mil) / Gerador	Halton	Sobol	NX	Matlab	Scilab	Excel
1	-0.47%	0.05%	0.55%	-0.51%	2.25%	-0.40%
5	-0.21%	-0.04%	0.07%	-1.89%	-0.28%	-0.94%
10	-0.14%	-0.03%	-0.01%	0.06%	0.56%	0.50%
20	-0.09%	-0.04%	-0.05%	-0.20%	0.48%	0.59%
30	-0.07%	-0.02%	-0.01%	0.13%	0.26%	0.26%
40	-0.06%	-0.04%	-0.04%	0.24%	0.21%	0.24%
50	-0.06%	-0.03%	-0.02%	0.23%	0.20%	0.09%

Tabela 5.5: Teste 2, erro médio

são robustas à escolha do gerador de números pseudo-aleatórios. Uma outra análise consiste em penalizar os erros de valor absoluto maior utilizando como medida o erro quadrático médio (EQM). Na tabela 5.6 mostramos o EQM obtido para cada nível de confiança.

% / Gerador	Halton	Sobol	NX	Matlab	Scilab	Excel
1	0.10	0.04	0.11	5.45	4.14	1.84
2	0.05	0.03	0.06	3.52	4.83	2.60
3	0.08	0.01	0.03	2.92	3.81	1.58
4	0.05	0.01	0.05	1.91	3.73	1.05
5	0.03	0.01	0.04	2.20	3.95	0.61
6	0.04	0.00	0.01	1.27	2.68	1.07
7	0.03	0.01	0.04	1.34	2.01	1.41
8	0.06	0.02	0.03	1.38	1.83	3.01
9	0.07	0.03	0.02	1.39	2.15	2.79
10	0.04	0.01	0.01	1.04	1.81	2.93

Tabela 5.6: Teste 2, EQM

Ao analisá-la notamos novamente que as seqüências de baixa discrepância mostram um resultado muito superior às seqüências pseudo-aleatórias. Dentre estas o gerador Malab apresenta os melhores resultados para níveis de confiança acima de 6%. Para os demais níveis de confiança o gerador Excel possui os menores erros. Fica claro que, para problemas de natureza semelhante ao estudado, o uso de SQMC representa não só um ganho de precisão em relação à SMC como também uma garantia que o resultado não vai diferir muito do esperado, tornando a simulação mais econômica e confiável.

## 5.4 Teste 3: VaR Multivariado - Opções sobre Ações

Até agora vimos que para simulações de uma dimensão os métodos quase-aleatórios oferecem um ganho incontestável de precisão. Todavia, de acordo com a literatura apresentada no capítulo 4, existe evidência de que, conforme a dimensão do problema cresce, a SQMC vai perdendo sua eficácia. De agora em diante os nossos testes vão focar este problema. O nosso objetivo consiste principalmente em testar exaustivamente a seqüência de NX para verificarmos se a SQMC pode se estender a uma gama mais ampla de problemas de precificação. Paralelamente os nossos experimentos poderão eventualmente corroborar o que até hoje já foi publicado sobre o assunto para seqüências de Sobol quando aplicadas a outro contexto.

Nesta etapa o problema escolhido consiste em calcular o VaR de 95% de nível de confiança para um horizonte de um dia, de um portfólio cujo número de ativos varia de 2 a 55. Sabemos que o método mais preciso para se calcular o VaR de um portfólio de opções é a SMC. Esta aplicação da SMC, apresentada no capítulo 2, consiste, no primeiro momento, em simular os preços dos ativos-objeto para o instante em que o VaR será calculado e, no segundo momento, em precificar as opções utilizando os preços gerados na primeira etapa. É evidente que se a SQMC tem algo mais a oferecer isto se dará no primeiro momento. Se os preços dos ativos-objeto estiverem distribuídos de maneira mais suave, o cálculo do VaR ganhará em precisão. A segunda etapa não depende das propriedades dos números pseudo ou quase-aleatórios. Esta constatação nos permite trabalhar sem as opções, o que simplifica consideravelmente a elaboração do teste, permitindo a economia de vários dias de processamento. Além disso o problema tratado possui solução analítica, oferecendo um preço justo para comparação dos resultados obtidos. Todavia manteremos em mente que o objetivo final consiste em calcular o VaR de um portfólio contendo diversas opções cujo número de ativos objeto varia de 2 a 55.

Os ativos escolhidos para este teste foram as ações que compunham o Ibovespa em 2 de abril de 2001. Os códigos de negociação das ações foram ordenados de maneira alfabética de tal modo que cada vez que se aumenta a dimensão <sup>1</sup> do problema escolhe-se o ativo cujo código é o próximo desta lista. Ao portfólio que contém as 55 ações foi atribuído o valor de R\$1 milhão. Este montante foi distribuído uniformemente entre as ações, de tal modo que o

---

<sup>1</sup>A dimensão da simulação para um VaR de 1 dia corresponde ao número de ativos-objeto em carteira

número de ações de cada empresa multiplicado pelo seu preço de fechamento em 2 de abril de 2001 tem valor de mercado de R\$18.181,82. Portanto cada portfólio possui um valor a mercado correspondente à dimensão da simulação (ou número de ativos) vezes esta quantia. O cálculo da matriz de covariância foi efetuado no sistema de VaR da empresa Prandini, Rabbat & Associados escolhendo-se a metodologia EWMA com lambda de 0,94 (Riskmetrics Technical Document [11]). O algoritmo usado para cálculo da matriz não afeta o nosso experimento. Esta poderia ter sido determinada arbitrariamente, contanto que fosse positiva definida. Esta condição, necessária para o uso da decomposição de Cholesky, foi testada para a nossa matriz de covariância. Os autovalores da matriz são todos positivos. Finalmente terminamos a descrição do teste mencionando que cada dimensão foi tratada com simulações variando de 5 a 50 mil pontos, de cinco em cinco mil. Vejamos os resultados obtidos.

Apresentamos nos gráficos 5.11, 5.12 e 5.13 o comportamento do erro relativo de cada método para simulações de 5 mil, 25 mil e 50 mil pontos.

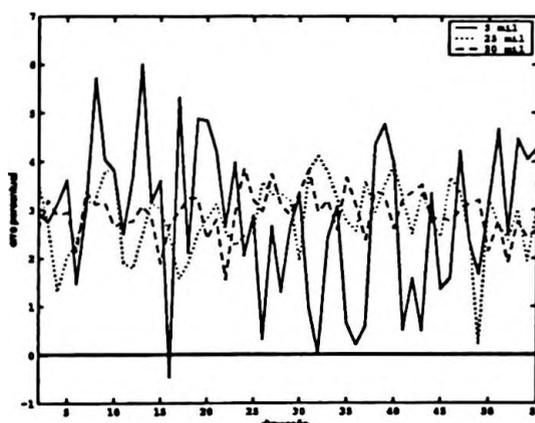


Figura 5.11: Teste 3, Matlab

Os resultados obtidos com o uso do gerador de números pseudo-aleatórios do Matlab estão de acordo com a teoria. É nitida no gráfico 5.11 a menor amplitude alcançada quando se trabalha com um número maior de pontos. Também de acordo com a teoria sobre SMC a volatilidade do erro diminui de forma muito mais sensível quando se passa de 5 para 25 mil pontos. Estranhamente os erros são quase todos positivos, o que significa que os valores gerados via Matlab são sempre inferiores aos desejados (o VaR é negativo). Isto sugere fortemente a presença de agrupamentos em determinadas regiões em detrimento de um espalhamento uniforme. Outro ponto interessante é que mesmo com 50 mil pontos o erro gira ao redor de 2,5% o que pode ser

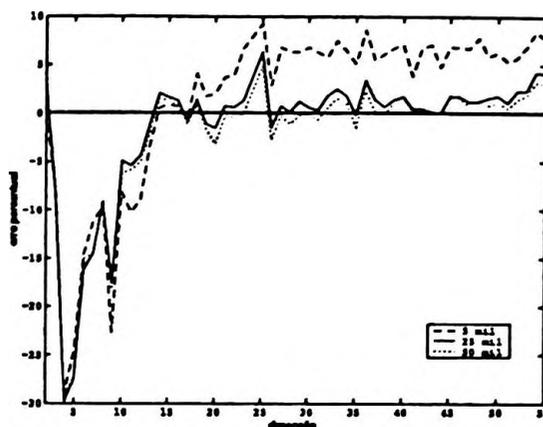


Figura 5.12: Teste 3, Sobol

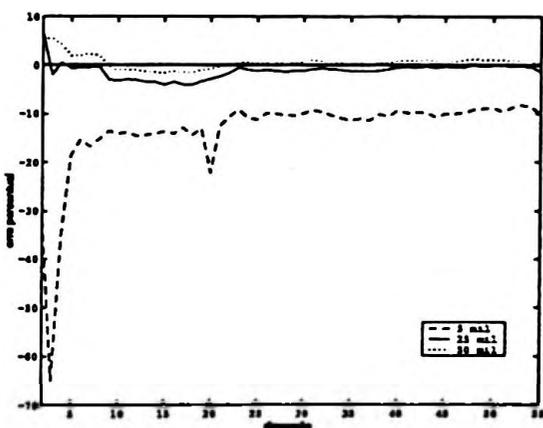


Figura 5.13: Teste 3, NX

considerado grande, a ponto de até se questionar a pertinência do uso de SMC em relação à aproximação com uso das gregas. É claro que isto pode ser resultado do caráter probabilístico da SMC e talvez tivemos o infortúnio de gerar uma série de resultados "pior" do que se esperaria na média (além é claro do ponto citado anteriormente). Porém esse fator é justamente um dos elementos que nos leva a buscar soluções como a SQMC. Decidimos portanto permanecer com a primeira leva de resultados gerados e não continuamos o nosso experimento até atingirmos números mais próximos do esperado. Não podemos esquecer que os números pseudo-aleatórios sofrem uma transformação ao serem multiplicados pela matriz triangular inferior decorrente da decomposição de Cholesky. Este processo pode também constituir-se num fator de agravamento de viéses existentes.

A seqüência de Sobol apresenta um desvio muito grande para dimensões menores. O método é claramente inoperante até a dimensão 13. Este resultado surpreende pois esperávamos uma divergência somente a partir desta dimensão. Em geral a seqüência de Sobol sempre tem apresentado excelente convergência para dimensões consideradas pequenas. Simulações de 5 mil pontos são claramente inadequadas para o problema estudado. O erro diminui para dimensões compreendidas entre 13 e 21 para depois estabelecer-se num patamar acima dos 5%, claramente inaceitável. Todavia quando aumentamos o número de pontos o resultado converge para o esperado, mantendo-se numa faixa dentro da qual o método pode ser usado sem preocupações.

A seqüência de NX possui o mesmo comportamento que a seqüência de Sobol para as dimensões 2 e 3. A partir da quarta dimensão as simulações com 25 mil e 50 mil pontos aproximam-se do resultado esperado. No caso das simulações de 50 mil pontos o erro a partir deste patamar nunca ultrapassa 2%. Na maioria das vezes este é inferior a 1%. As simulações de 25 mil pontos apresentam um erro ligeiramente maior até a dimensão 22 e depois equiparam-se à simulação de maior número de pontos. Da mesma maneira que para a seqüência de Sobol a simulação de 5 mil pontos gera um erro que se estabiliza em torno de 5%, o erro obtido com a seqüência de NX tem como patamar 10%. Claramente qualquer cálculo com cinco mil pontos está fadado ao fracasso. Em suma observamos que as seqüências quase-aleatórias tiveram um desempenho anômalo para dimensões pequenas, estabilizando-se a partir de um nível que depende da seqüência utilizada e do número de pontos usados nas simulações. O problema relacionado às pequenas dimensões talvez possa ser explicado pelo fato de estarmos gerando pontos correlacionados o que nos obriga a reordenar a seqüência. É possível que para dimensões maiores os erros oriundos deste processo se compensem. Apresentamos os gráficos 5.14 e 5.15 para termos uma idéia da evolução do erro em relação à dimensão para diversos números de pontos utilizados na simulação.

Conforme a dimensão aumenta o erro diminui. Para comparar os diferentes métodos entre si geramos os gráficos 5.16, 5.17 e 5.18. Escolhemos as simulações com 30 mil, 40 mil e 50 mil pontos. Para cada número de pontos segue um gráfico que mostra o desempenho de cada método para cada dimensão.

Como já observado acima, a SMC apresenta um erro extremamente estável ao redor de 2,5%. Claramente o comportamento das seqüências quase-aleatórias possui o mesmo padrão nos gráficos 5.16 a 5.18. A seqüência de Sobol, por exemplo, gera erros de magnitude importante para as di-

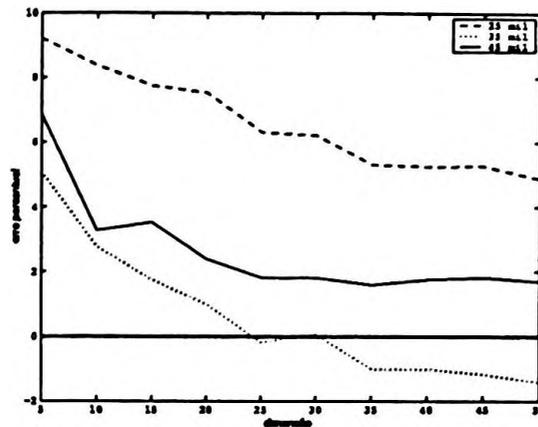


Figura 5.14: Teste 3, Sobol com 25, 35 e 45 mil pontos

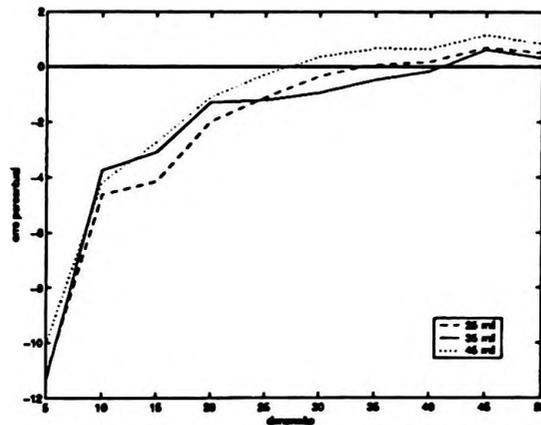


Figura 5.15: Teste 3, NX com 25, 35 e 45 mil pontos

mensões 24 e 25, independentemente do número de pontos usados na simulação. Podemos observar no gráfico 5.14 que este fenômeno já ocorre com 5 mil pontos. Isso sugere que existem determinadas relações entre os pontos de certa forma independentes do tamanho da simulação. Se compararmos a SQMC e a SMC podemos verificar que para problemas de dimensão reduzida o uso da SQMC é arriscado. A seqüência de Sobol só apresenta um resultado superior à SMC a partir da dimensão 13 enquanto que o mesmo ocorre a partir da dimensão 3 para a seqüência de NX. Todavia estes números podem depender de outros fatores tais como a estrutura de correlação entre os ativos-objeto e não podem ser tomados como limites inferiores para uso das SQMC. Existe portanto uma zona cinza, que parece ser bem menor para a seqüência de NX, para a qual o uso da SMC é mais seguro. A partir

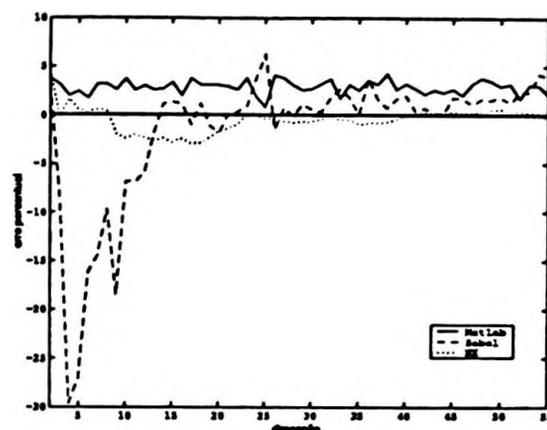


Figura 5.16: Teste 3, simulações de 30 mil pontos

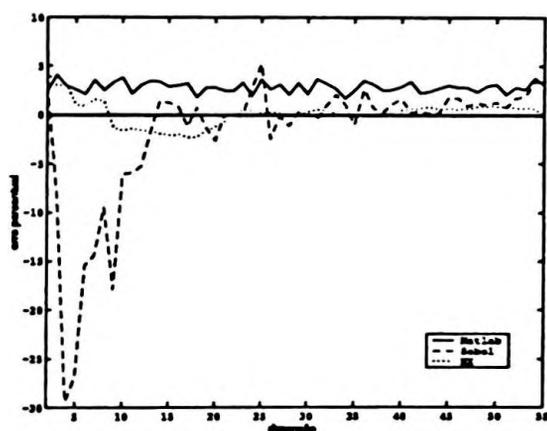


Figura 5.17: Teste 3, simulações de 40 mil pontos

deste momento, com exceção das simulações de dimensões 24 e 25 para as seqüências de Sobol, os resultados obtidos via SQMC são mais próximos do VaR obtido analiticamente. Esta exceção para a seqüência de Sobol é um fator preocupante pois não sabemos se pode ocorrer ou onde pode ocorrer para outro portfólio. Dado que para a simulação de dimensão 25 o erro gira ao redor de 5% este ponto não pode ser desprezado. Se compararmos o desempenho das duas seqüências quase-aleatórias podemos ver que o erro obtido usando-se a seqüência de Sobol possui um comportamento muito mais errático do que o erro obtido usando-se a seqüência de NX. Este último é muito bem comportado. Observamos que a partir de simulações de 40 mil pontos e de dimensão superior a 20, o erro nunca ultrapassa 1%. Este patamar é transposto raramente quando se trabalha com 50 mil pontos.

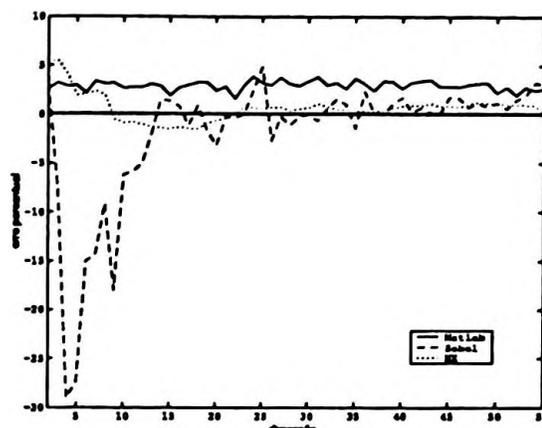


Figura 5.18: Teste 3, simulações de 50 mil pontos

Em suma, de acordo com os gráficos acima o uso da seqüência de Sobol não nos fornece garantia de melhora em relação à SMC. Já, a seqüência de NX, para simulações de dimensão superior a 3, gera resultados muito superiores aos obtidos via SMC, sem mostrar nenhuma tendência a se desviar do benchmark. Ficamos surpresos com o fato da seqüência de Sobol não funcionar adequadamente para simulações de dimensão reduzida pois os experimentos relatados em outras pesquisas apontam para um problema inverso. No apêndice B mostramos que a seqüência de NX exibe um alto grau de interdependência entre dimensões adjacentes até aproximadamente a décima dimensão. Poderíamos então esperar algum tipo de distorção. Todavia este não é o caso para as seqüências de Sobol. Especulamos que o fato de forçarmos uma correlação entre os números quase-aleatórios deve ter surtido este efeito. O problema consiste em conseguir determinar as propriedades destas transformações de modo a podermos utilizar a SQMC com mais segurança. Os próximos testes retornam ao arcabouço da precificação de opções.

## 5.5 Teste 4: Opções Look-Back

Apresentamos a opção look-back no capítulo 2 do nosso trabalho. Como vimos anteriormente estes derivativos dependem dos preços aos quais o ativo-objeto foi negociado durante a vigência (ou parte dela) da opção. Na maioria das vezes trata-se de qualquer preço negociado em determinado mercado, e por isso a precificação deste tipo de opção é feito usando-se o método das árvores, numa tentativa de replicar uma negociação contínua. Todavia nada

impede de se ter um contrato de opção look-back onde o conjunto de preços que será levado em consideração para determinação do payoff é constituído, por exemplo, do preço de fechamento para cada dia de negociação<sup>2</sup>. Trabalharemos aqui com este tipo de regra, gerando a seguinte regra de payoff para opções de compra:

$$\text{Payoff} = \max(\max(S_1, \dots, S_n) - X, 0)$$

onde  $S_1, \dots, S_n$  representa o conjunto de preços de fechamento durante o período de vigência da opção. Os parâmetros de interesse são:

Preço do ativo-objeto:	R\$100,00
Preço de exercício:	R\$100,00
Taxa de juros até o vencimento:	20% a.a. (252 d.u.)
Volatilidade do ativo-objeto:	30% a.a.
Tempo até o vencimento:	Variável de 5 a 50 dias

Para este problema de precificação não possuímos fórmula analítica. Para estabelecermos um benchmark contra o qual as nossas simulações serão julgadas efetuamos 50 mil simulações de 5 mil pontos utilizando o gerador RAN2, já apresentado no primeiro teste. Neste experimento foi possível observar que a partir de 20 a 25 mil simulações de 5 mil pontos a média difere de forma infinitesimal da média de cem mil simulações. O critério adotado para estabelecer o benchmark nos parece portanto amplamente satisfatório. Os gráficos 5.19, 5.20 e 5.21 permitem a comparação entre os diferentes métodos utilizados. As opções vencem para prazos que variam de 5 a 50 dias em intervalos de 5 dias.

Em cada gráfico delimitamos, com uso de duas retas, uma área que representa um erro inferior a um por cento em valor absoluto. Denominamos esta região de zona de aceitação. A primeira característica que salta aos olhos é que novamente a seqüência de NX diverge muito do resultado justo para problemas de dimensão baixa. O erro gerado nestes casos é muito grande, ao contrário do que se pode observar para os outros métodos. Neste aspecto os resultados obtidos com a seqüência de Sobol correspondem inteiramente ao que se esperava. Para problemas de baixa dimensão a SQMC é extremamente precisa. Para um problema de dimensão 5, o erro não ultrapassa 0,1% quando se efetua simulações de 5 mil a 50 mil pontos fazendo aumentar o número de pontos de 5 mil a cada vez. Neste mesmo contexto o erro raramente ultrapassa 0,5% até simulações de dimensão 35. A partir deste

---

<sup>2</sup>A dimensão da simulação corresponde então ao número de dias até o vencimento

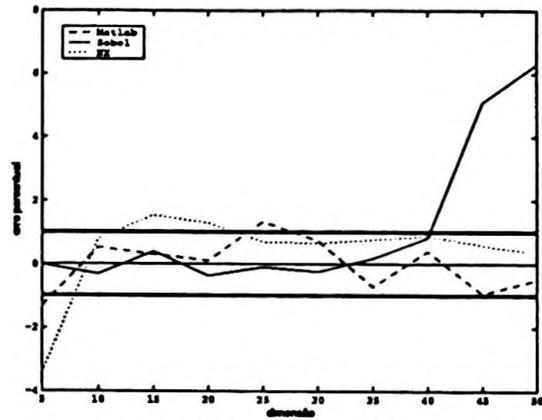


Figura 5.19: Teste 4, simulações de 5 mil pontos

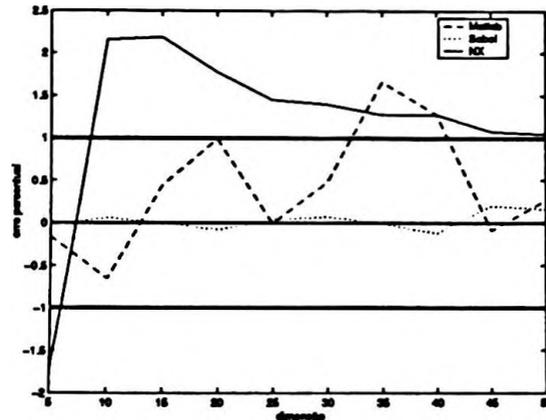


Figura 5.20: Teste 4, simulações de 25 mil pontos

patamar a seqüência gera resultados satisfatórios quando se trabalha com um número de pontos superior a 10 mil. Como podemos ver no gráfico 5.19 o preço das opções de 45 e 50 dias até o vencimento diverge substancialmente quando se trabalha com poucos pontos. A SMC apresenta também resultados extremamente satisfatórios porém ligeiramente inferiores aos obtidos com a seqüência de Sobol. Eles tendem a ser mais voláteis. Este fator pode ser notado na tabela 5.6 que relata o erro quadrático médio para os dois métodos.

Os números apresentados na tabela reforçam as nossas observações anteriores. Somente a partir da dimensão 40 torna-se mais confiável realizar a precificação via SMC. Desta vez os resultados obtidos com a seqüência de Sobol estão de acordo com as evidências empíricas relatadas no capítulo 4,

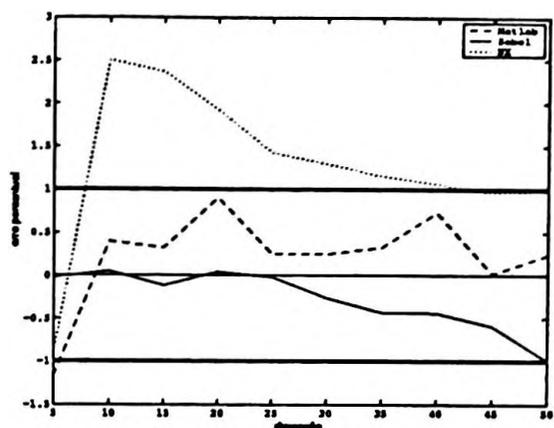


Figura 5.21: Teste 4, simulações de 50 mil pontos

Dimensão	Sobol	Matlab
5	0.0000	0.0037
10	0.0003	0.0065
15	0.0020	0.0144
20	0.0031	0.0150
25	0.0039	0.0230
30	0.0113	0.0141
35	0.0291	0.0920
40	0.0507	0.0364
45	0.3607	0.0267
50	0.6459	0.0207

Tabela 5.7: Teste 4, EQM para SMC e SQMC (Sobol)

que levam os diferentes pesquisadores a advogarem o uso da SQMC no lugar da tradicional SMC. No caso dos preços obtidos através do uso da seqüência de NX evidenciamos novamente erros substanciais para opções com vencimento curto. Outra vez as relações entre seqüências de dimensões adjacentes parece afetar seriamente o desempenho da SQMC. Todavia, mesmo aumentando-se o número de dimensões, o preço obtido com a seqüência de NX só entra na banda de aceitação para simulações de 5, 10 e 15 mil pontos a partir de problemas de dimensão 25. Curiosamente quando se aumenta o número de pontos na simulação o resultado diverge do benchmark. Vejamos o gráfico 5.22 que mostra o comportamento do erro para simulações de dimensão 40, 45 e 50 quando o número de pontos varia de 5 a 50 mil.

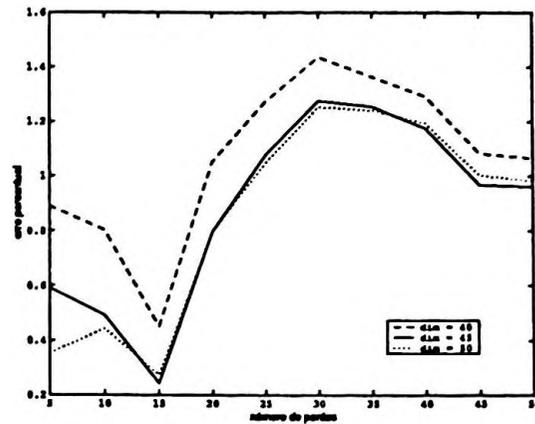


Figura 5.22: Teste 4, NX, simulações de 5 a 50 mil pontos

Podemos ver que de forma geral o erro diminui até simulações de 15 mil pontos para depois aumentar sensivelmente até simulações de 30 mil pontos. Depois deste patamar o erro diminui novamente. Este comportamento não é desejável pois numa situação real não se conhece o desempenho da seqüência de antemão. Isto pode levar a situações onde o usuário está sujeito a, inadvertidamente, estipular um número de pontos para a simulação que acaba maximizando o erro em relação ao preço que se deseja obter. Preferimos uma convergência monotônica em relação ao número de pontos utilizados na simulação. Obtemos esta propriedade com a seqüência de Sobol para a qual reproduzimos o gráfico acima na figura 5.23. Escolhimos dimensões para as quais o método de Sobol deve ser usado, por exemplo 10, 15 e 20.

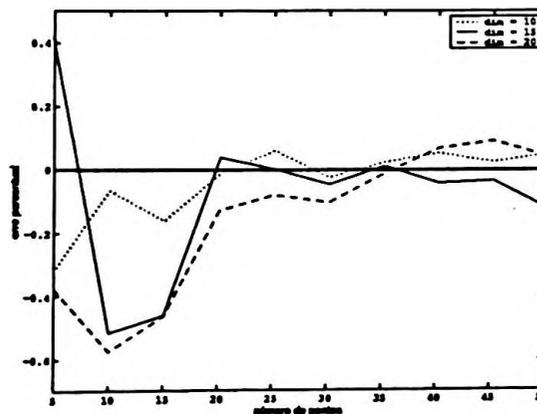


Figura 5.23: Teste 4, Sobol, simulações de 5 a 50 mil pontos

Podemos reparar que os erros encontram-se num intervalo satisfatório e que, conforme o número de pontos vai aumentando, o erro torna-se cada vez mais insignificante. Vimos que neste caso o uso da seqüência de NX não nos trouxe nenhum benefício em relação à construção clássica de Sobol. Já o método de Sobol mostrou ganhos de eficiência em relação à SMC para simulações de dimensão inferior ou igual a 35. Nestes casos o seu uso é recomendável. Vejamos se, variando-se a natureza do problema de precificação, obtemos resultados semelhantes.

## 5.6 Teste 5: Opções com Barreira

Vamos agora trabalhar com opções com barreira. Mais precisamente estaremos precificando opções ditas "knock-out", para as quais, se o ativo-objeto atingir um preço inferior à barreira estipulada, a opção cessa de existir ou "vira pó". Novamente, como no caso da opção look-back, o conjunto de preços pertinente para o problema será constituído dos preços de fechamento. Trataremos aqui de opções de compra. Segue uma lista dos parâmetros necessários para a elaboração da simulação.

Preço do ativo-objeto:	R\$100,00
Preço de exercício:	R\$100,00
Taxa de juros até o vencimento:	20% a.a. (252 d.u.)
Volatilidade do ativo-objeto:	30% a.a.
Barreira:	R\$98,00
Tempo até o vencimento:	Variável, de 5 a 50 dias.

Novamente, para obtenção de um benchmark, realizamos 50 mil SMC de 5 mil pontos com o uso do gerador de números pseudo-aleatórios RAN2. Apresentaremos nesta seção os gráficos equivalentes aos da seção anterior de modo a permitir uma comparação entre os dois tipos de opção, além da comparação entre os diferentes métodos.

À primeira vista podemos notar que os erros, independentemente do método utilizado, são de magnitude maior do que os erros observados no teste anterior. Simulações de 5 mil pontos claramente não são suficientes para atingir-se um preço aceitável. Começaremos a nossa análise com o desempenho da seqüência de NX. Curiosamente para simulações de 5 mil pontos este método mostra-se superior aos demais. Novamente a simulação de dimensão menor apresenta um erro muito grande. Todavia para dimensões acima de 10 os erros mantêm-se dentro da banda de aceitação. Não obstante

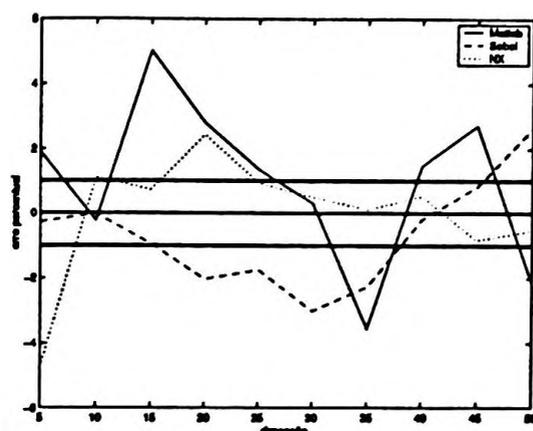


Figura 5.24: Teste 5, simulações de 5 mil pontos

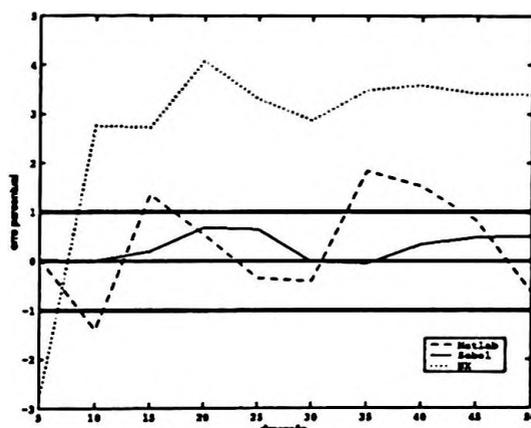


Figura 5.25: Teste 5, simulações de 25 mil pontos

esta façanha, ao depararmos-nos com os demais gráficos ficamos imediatamente surpresos com o desempenho sofrível do método em questão. Novamente os erros tendem a crescer conforme se aumenta o número de pontos na simulação, o que torna o seu uso inviável. No gráfico 5.27 podemos ver a evolução do erro quando se aumenta o número de pontos usados na simulação. As dimensões escolhidas são as mesmas que no teste 4 ou seja 40, 45 e 50.

Verificamos novamente a existência de um padrão, independente da dimensão, para o qual o erro cresce até chegarmos à dimensão 40, para depois cair. Qualquer praticante que porventura escolher efetuar uma simulação com 40 mil pontos, acreditando judiciosamente ser este um número amplo o suficiente, estaria na verdade maximizando o erro em relação ao preço

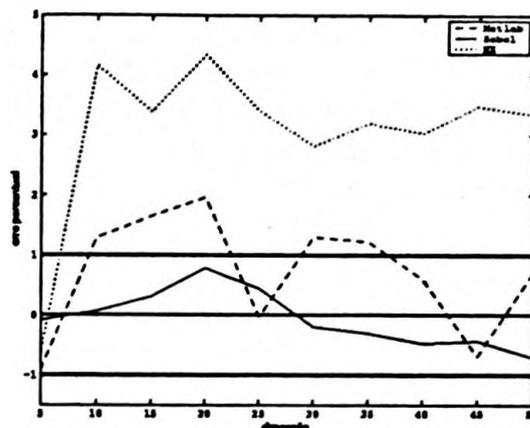


Figura 5.26: Teste 5, simulações de 50 mil pontos

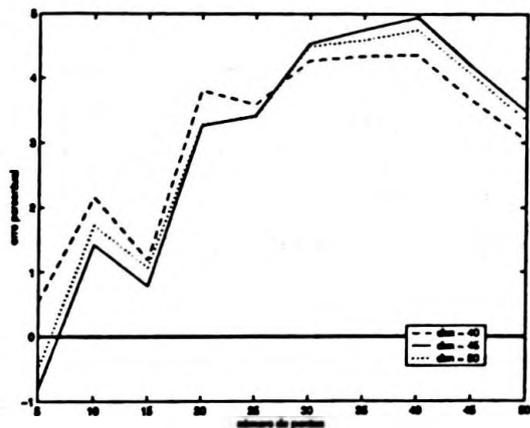


Figura 5.27: Teste 5, NX, simulações de 5 a 50 mil pontos

justo ! Nitidamente os resultados obtidos com o uso da seqüência de NX nos levam à conclusão que, dado um tamanho de simulação semelhante ao usado neste trabalho, os critérios de mensuração de equidistribuição apresentados no apêndice B não são garantia de convergência mais rápida ou de possibilidade de tratamento de problemas de dimensões médias a altas.

A SMC apresenta novamente um bom desempenho porém de acordo com a nossa primeira observação a precisão da simulação diminui como um todo. Incurções fora da região de aceitação são mais freqüentes que no teste 4. Também existe a necessidade de se trabalhar com simulações de pelo menos 20 a 25 mil pontos. O método de Sobolj permite diminuir este requerimento mínimo para simulações de 10 a 15 mil pontos. Novamente o método de Sobolj aproxima-se em geral muito mais do benchmark do que

a SMC. Vale notar que neste caso as opções com vencimento acima de 35 dias foram precificadas de forma muito satisfatória pela SQMC. Os números sugerem que no caso de opções com barreira o método de Sobol possa ser adequado para problemas de dimensão superior a 50. Voltamos a apresentar na tabela 5.7 os erros quadráticos médios no intuito de comparar a eficiência da seqüência de Sobol em relação à SMC.

Dimensão	Matlab	Sobol
5	0.0034	0.0000
10	0.0060	0.0001
15	0.0311	0.0017
20	0.0318	0.0061
25	0.0134	0.0050
30	0.0083	0.0131
35	0.0463	0.0088
40	0.0125	0.0024
45	0.0292	0.0063
50	0.0128	0.0176

Tabela 5.8: Teste 5, EQM para SMC e SQMC (Sobol)

A tabela confirma as nossas observações anteriores. Podemos ressaltar que, não obstante o erro sensível gerado com simulações de 5 mil pontos, o método de Sobol consegue convergir rapidamente para o preço desejado a ponto de, no caso de opções que vencem em cinco dias, possuir um EQM nulo até a quarta casa decimal. Os erros, neste caso, também tendem a diminuir. Novamente, como para o quarto teste, vemos que a SQMC com seqüência de Sobol é nitidamente preferível à SMC tradicional. A semelhança do comportamento dos três métodos para as opções escolhidas neste trabalho tendem a sugerir que, de modo geral, para problemas de dimensão pequena a média (até 30), o uso do método de Sobol pode gerar ganhos tanto em tempo de processamento como em termos de precisão do resultado obtido. Tentemos agora resumir as nossas experiências.

## 5.7 Resumo dos Resultados Obtidos

De maneira a facilitar a tarefa do leitor, procuraremos sintetizar os nossos experimentos antes de concluirmos. Para isso, apresentaremos uma pequena sinopse de cada teste, nos mesmos moldes do que foi visto no capítulo 4, tentando salientar os resultados mais importantes, assim como o fio condutor

entre estes. Vale ressaltar antes de prosseguirmos que os números quase-aleatórios podem ser armazenados de uma vez por todas no ambiente onde serão efetuadas as simulações. Portanto, não existe um gasto de tempo associado à construção das seqüências. Como a geração de números pseudo-aleatórios é na maioria das vezes extremamente veloz, podemos considerar que os ganhos de tempo associados ao uso da SQMC residem no número inferior de pontos que devem ser utilizados para atingir precisão semelhante ou melhor do que a apresentada pela SMC. Nos nossos testes a natureza dos algoritmos permite que seja efetuada uma conta simples para quantificar as diferenças de tempo de processamento. Basta comparar os números de pontos entre as simulações. Por exemplo, se uma SQMC de 5 mil pontos atinge o mesmo grau de precisão que uma SMC de 10 mil pontos então podemos afirmar que a SQMC deve gerar o resultado em aproximadamente a metade do tempo necessário à SMC. Uma medida cardinal dependerá do perfil de hardware utilizado.

## Teste 1

Precificação de uma opção de compra simples. Este problema possui uma solução analítica - fórmula de Black & Scholes, que será usada como benchmark para avaliar-se a precisão de 100 mil simulações Monte-Carlo de número de pontos variável e SQMCs de mesmo tamanho.

### Métodos:

- SMC com uso dos geradores Excel, RAN2 e RAN3.
- SQMC com seqüências de Halton, Sobol e NX.

### Objetivo:

- Demonstrar que as seqüências de baixa discrepância possuem propriedades que as tornam atraentes para problemas de precificação.
- Verificar se os resultados teóricos se traduzem em resultados concretos no que tange à seqüência de NX.
- Tentar quantificar sob a forma de probabilidades o quão é vantajoso utilizar a SQMC em comparação com a SMC.

- Estabelecer uma classificação entre seqüências quase-aleatórias no intuito de unicamente selecionar uma dentre Sobol e Halton para servir de ponto de comparação para a seqüência de NX.
- Demonstrar que o gerador RAN2 é confiável para SMC.

#### Resultados:

- Todas as seqüências quase-aleatórias apresentaram um desempenho muito superior à SMC. Na maioria dos casos a probabilidade de obter-se um resultado mais preciso com o uso de seqüências quase-aleatórias é superior a 90% !
- O gerador de números pseudo-aleatórios RAN2 não apresentou nenhuma irregularidade que possa invalidá-lo para uso posterior na geração de benchmark.
- Dentre as seqüências quase-aleatórias o método de Halton mostrou-se sensivelmente inferior ao método de Sobol que por sua vez foi ligeiramente dominado pela seqüência de NX.

#### Teste 2

Cálculo de VaR de um portfólio que consiste numa venda de borboleta. São efetuadas simulações de até 50 mil pontos para VaRs de níveis de confiança variando de 1% a 10%. Os resultados são comparados com uma média obtida de uma amostra de 500 mil simulações de mil pontos em Matlab.

#### Métodos:

- Geradores pseudo-aleatórios do Excel, do Scilab e do Matlab.
- Seqüências de baixa-discrepância de Halton, Sobol e NX.

#### Objetivos:

- Mostrar que os resultados obtidos no primeiro teste para uma situação que pode ser considerada artificial possui equivalentes reais (problemas

uni-dimensionais para os quais não existem soluções analíticas). Neste caso enfocamos o cálculo de risco de mercado, campo que consideramos extremamente fértil para uso de SQMC.

- Mostrar que a seqüência de Halton tem desempenho inferior à seqüência de Sobol.
- Verificar se os resultados obtidos no primeiro teste podem ser estendidos ao VaR para o qual a posição em opções depende unicamente de um ativo-objeto.

#### Resultados:

- Confirmamos os achados do primeiro experimento. As seqüências quase-aleatórias geram resultados mais precisos que a SMC. Novamente a seqüência de Sobol aparenta ser mais eficiente que a seqüência de Halton.

### Teste 3

Cálculo de VaR (5% de confiança) de um portfólio que possui uma quantidade de ativos inferior ou igual a 55. Neste caso o número de ativos representa a dimensão da simulação. Novamente podemos trabalhar com um benchmark obtido de forma analítica. São efetuadas simulações de 5 mil a 50 mil pontos.

#### Métodos:

- SMC em Matlab.
- Seqüências quase-aleatórias de Sobol e NX.

#### Objetivos:

- Testar o desempenho das seqüências quase-aleatórias num contexto de mensuração de risco de mercado onde o fator dimensão deixa de ser desprezível.

- Comparar o desempenho da seqüência de NX em relação à seqüência de Sobol.

#### Resultados:

- A SMC apresenta certa estabilidade porém com erro não desprezível.
- O método de Sobol não funciona para dimensões inferiores a 13. Este resultado entra em choque com os experimentos relatados na literatura.
- Para dimensões altas o método de Sobol mostra-se também inadequado.
- A seqüência de NX não funciona para as dimensões 3 e 4. A partir deste momento o método gera resultados mais próximos do benchmark do que qualquer outro método.
- Ergueram-se dúvidas:
  - O limite inferior para uso da seqüência de NX depende da estrutura de correlação entre os ativos ?
  - O que gerou o comportamento atípico da seqüência de Sobol ?

#### Teste 4

Precificação de opções de compra look-back. O vencimento destas opções varia de 5 a 50 dias. O benchmark é calculado efetuando-se 50 mil SMCs de 5 mil pontos com auxílio do gerador de números aleatórios RAN2. Foram realizadas simulações de 5 mil a 50 mil pontos.

#### Métodos:

- SMC em Matlab.
- Seqüências quase-aleatórias de Sobol e NX.

#### Objetivos:

- Testar a seqüência de NX num contexto onde a dimensão deveria afetar negativamente o seu desempenho conforme relatado para outras seqüências de baixa discrepância. Espera-se que Sobol perca de sua eficácia conforme a dimensão vai aumentando.
- Verificar se os resultados surpreendentes obtidos no cálculo de VaR multi-dimensional se reproduzem em um problema de natureza distinta.

#### Resultados:

- De acordo com o esperado o método de Sobol gera resultados muito precisos. O desempenho desta seqüência é bem superior à SMC.
- Quando a dimensão da simulação excede 35, as seqüências de Sobol começam a divergir do preço usado como benchmark. A partir deste momento é mais seguro utilizar a SMC.
- A seqüência de NX mostra um comportamento muito volátil para dimensões reduzidas e gera um erro superior ao observado quando se usa a seqüência de Sobol.
- Quando se aumenta o número de pontos o desempenho da seqüência de NX tende a piorar. O inverso ocorre com a seqüência de Sobol. O que pode causar tal fenômeno surpreendente é uma questão interessante.

#### Teste 5

Precificação de opções de compra de tipo barreira (knock-out). O benchmark é calculado efetuando-se a média de 50 mil SMCs de 5 mil pontos com gerador RAN2. São precificadas opções vencendo num prazo de 5 a 50 dias em simulações com número de pontos variando de 5 mil a 50 mil.

#### Métodos:

- SMC em Matlab.
- SQMC com seqüências de Sobol e NX.

### Objetivos:

- Verificar se, modificando-se ligeiramente a natureza do problema anterior, obtem-se os mesmos resultados.
- Testar o desempenho da seqüência de NX em várias dimensões.

### Resultados:

- Novamente o desempenho da seqüência de Sobol foi o mais satisfatório.
- Desta vez o método de Sobol não apresenta sinais de divergência antes da dimensão 50 sugerindo que poderíamos continuar usando esta seqüência além deste patamar.
- A amplitude dos preços gerados é mais alta para opções com barreira do que para opções look-back, independente do método usado.
- A seqüência de NX possui o pior desempenho dentre todos os métodos. Dada a magnitude dos erros gerados estes desqualificam o método para este tipo de problema. Estes novamente crescem conforme o número de pontos da simulação aumenta.

## Capítulo 6

# Conclusão

Como vimos ao longo deste trabalho, existe um grande desafio em tentar estender o raio de ação da SQMC para problemas de dimensão alta. Hoje sabemos que, para problemas de dimensão pequena (abaixo de dez), as seqüências de baixa discrepância geram ótimos resultados, na maioria das vezes superiores aos que seriam obtidos através de SMC. Quando a dimensão do problema aumenta, alguns estudos restritos a casos específicos mostram que certas seqüências quase-aleatórias continuam eficazes. No entanto, não existe um mapeamento rigoroso que nos forneça o limite de funcionalidade de cada seqüência para determinada classe de problemas.

No intuito de alcançar o objetivo estipulado acima constituíram-se duas correntes. Uma delas sugere a adoção de métodos híbridos. Foram propostas, por exemplo, permutações dos números quase-aleatórios, misturas de SMC e SQMC e transformações do problema no intuito de diminuir a sua dimensão. A outra, que julgamos mais rigorosa, porém mais demandante tecnicamente, consiste em criar seqüências quase-aleatórias menos sensíveis à dimensão da simulação. O desenvolvimento da seqüência de Niederreiter-Xing inclui-se neste contexto. Os dois cientistas encontram-se na ponta da pesquisa em termos de construções de seqüências-(t,s) e a possibilidade (os autores oferecem um gerador para download via internet) de testar a última de suas construções no âmbito financeiro nos pareceu atraente, tanto pelo aspecto inédito do uso da seqüência de Niederreiter-Xing (NX), como pela esperança de ampliarmos o escopo de aplicação da SQMC. Afinal a seqüência de Sobol, hoje a mais popular entre os usuários de seqüências quase-aleatórias, foi proposta em 1967 ! Ao mesmo tempo queríamos mostrar que os problemas para os quais se pode utilizar a SQMC não se restringem a derivativos exóticos. No contexto de mensuração de

risco de mercado existem inúmeras situações que podem se beneficiar deste novo método. Não conhecemos, na literatura, nenhuma aplicação da SQMC neste contexto. Inicialmente focamos as nossas atenções na comparação entre a seqüência de NX e a seqüência de Sobol no arcabouço de cálculo de Value-at-Risk. O desenrolar dos nossos experimentos nos levou a estender as nossas simulações à precificação de opções "path-dependent".

Infelizmente a seqüência de NX teve um desempenho mitigado nos nossos testes. Dentro do contexto de cálculo de risco de mercado, a seqüência obteve resultados satisfatórios e superiores às demais construções de baixa discrepância. No caso uni-dimensional não há dúvidas que o método de NX gera grandes ganhos a serem explorados. Todavia o teste 3 (VaR multivariado) foi palco de resultados surpreendentes tais como os problemas da seqüência de Sobol em lidar com simulações de pequena dimensão onde justamente esta deveria atingir resultados muito precisos. Numa escala menor a seqüência de NX também apresentou erros significantes para problemas de pequena dimensão. Vimos no apêndice B que a seqüência de NX apresenta uma grande dependência entre dimensões baixas que desaparece a partir de dimensões de dois dígitos. Ao contrário, a seqüência de Sobol gera este fenômeno somente a partir de dimensões na vizinhança de 30 porém de forma irreversível. Estes padrões poderiam explicar o comportamento dos erros obtidos com a seqüência de NX, porém não se adequam ao observado com a seqüência de Sobol. Portanto estes resultados não nos permitem opinar a favor das seqüências quase-aleatórias com firmeza. De um lado a seqüência de Sobol mostrou-se claramente inadequada, e do outro a seqüência de NX depende de um número mínimo de ativos em portfólio. Não sabemos se este número é endógeno à matriz de covariância, podendo então variar sensivelmente. Os nossos resultados deixam claro que o usuário deve ser muito cauteloso na aplicação de SQMC em cálculo de VaR o que é muito importante considerando-se que alguns sistemas de gerenciamento de risco oferecidos no mercado permitem ao usuário efetuar SQMC. Vimos que o uso indiscriminado deste método pode criar distorções não desprezíveis.

Quando passamos para o problema de precificação de opções cujo preço depende da trajetória do ativo-objeto os resultados se invertem. Desta vez a seqüência de Sobol apresenta resultados surpreendentes e indiscutíveis. Claramente o seu uso é preferível à SMC para simulações de dimensão pequena a média. Por outro lado a seqüência de NX causa surpresa ao gerar preços muito distantes do esperado, com erros crescentes conforme o número de pontos aumenta. Novamente invocamos as dependências mencionadas acima. As dimensões de nossos testes não seriam grandes o suficiente para expurgar o efeito das dependências encontradas nas primeiras dimensões.

Em contraste com estas disparidades entre testes, a SMC demonstra sempre ser uma opção conservadora.

Em suma achamos que as propriedades da seqüência de NX necessitam ser melhor compreendidas. A construção destas seqüências depende de noções avançadas de matemática - geometria algébrica em campos finitos - que, se melhor entendidas, podem talvez ajudar na elaboração da simulação. É possível que o número requerido de pontos para se obter um resultado decente seja muito maior do que o que vimos até agora. A precisão viria a um custo operacional grande. Numa situação sem restrições de tipo temporal poderíamos resgatar o método. Não acreditamos que seja possível descartar a seqüência de NX antes de efetuarmos outros testes. Esperamos que os experimentos realizados aqui possam servir de base para exploração mais detalhada desta seqüência quase-aleatória. Entretanto o método de Sobol continua apresentando resultados muito encorajadores em problemas de precificação de opções "path-dependent" e acreditamos que deva ser considerado seriamente pelos profissionais de mercado como uma maneira de aprimorar a precisão e o tempo de processamento de suas simulações. Finalmente, para o caso do cálculo de risco de mercado envolvendo simulações de uma dimensão, as vantagens da SQMC são incontestáveis.

## Apêndice A

# O Modelo de Black & Scholes

Vamos expôr a seguir o modelo proposto por Black & Scholes para entendermos os conceitos que servem de base para a precificação de uma opção. Este modelo pressupõe uma lista de hipóteses que serão enunciadas à seguir:

1. A dinâmica do ativo-objeto é caracterizada por um processo de Wiener generalizado. Seja  $S$  o preço do ativo objeto. O processo estocástico que governa a trajetória deste preço é:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (\text{A.1})$$

onde

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \quad (\text{A.2})$$

e  $\epsilon$  é uma variável aleatória distribuída de acordo com uma distribuição normal padrão,  $\mu$  é a taxa de crescimento do preço do ativo-objeto ("drift" ou tendência) e  $\sigma$  é o desvio padrão do preço do ativo-objeto.

2. Os investidores podem assumir posições vendidas sem restrições quanto ao uso das quantias arrecadadas neste processo.
3. Não existem custos de transação ou impostos. Todos os ativos são perfeitamente divisíveis.
4. Não ocorrerá pagamento de dividendos sobre o ativo-objeto durante o tempo de vida da opção.
5. Não existem possibilidades de arbitragem no mercado.
6. A negociação dos ativos ocorre continuamente.

7. A taxa de juros livre de risco é constante e idêntica para todos os vencimentos.

Vamos agora desenvolver os passos que levam à equação diferencial que nos permite precificar opções européias. Para isto é necessário apresentarmos um resultado conhecido como lema de Itô.

Supondo que o valor de uma variável segue um processo de Itô:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

(um processo de Wiener generalizado é portanto um caso particular de processo de Itô onde  $a(x, t) = \mu$  e  $b(x, t) = \sigma$ ). Então uma função  $F$  de  $x$  e  $t$  segue o processo:

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b dz \quad (\text{A.3})$$

Partindo então da equação (A.3) e definindo  $f$  como uma função que determina o preço da opção - e que portanto depende de  $S$  e  $t$  - aplicamos o lema de Itô:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (\text{A.4})$$

Agora montamos um portfólio composto por:

- -1 unidade da opção
- $\frac{\partial f}{\partial S}$  do ativo-objeto

Definimos como  $\Pi$  o valor deste portfólio. Por definição:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (\text{A.5})$$

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (\text{A.6})$$

Com um pouco de álgebra (substituindo as equações (A.3) e (A.4) na equação (A.5)), obtemos:

$$d\Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt$$

Podemos ver que nesta expressão o termo  $dz$  desapareceu. Portanto conseguimos criar um portfólio que durante o intervalo de tempo  $dt$  permanece livre de risco. Neste caso este portfólio deve ter um rendimento igual ao de um ativo livre de risco ou seja  $r$ . Caso contrário haveria a possibilidade de

arbitrar este mercado. Temos então que o rendimento do portfólio pode ser expresso pela equação seguinte:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.7) obtemos:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt$$

de tal modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.8) é a equação diferencial de Black & Scholes. As soluções desta equação irão depender das condições de contorno. No caso de uma opção de compra de tipo europeia a condição de contorno é representada por:

$$f = \max(S - X, 0) \text{ quando } t = T$$

Para uma opção de venda de tipo europeia:

$$f = \max(X - S, 0) \text{ quando } t = T$$

A resolução da equação diferencial resulta nas seguintes fórmulas para os preços de opções de compra  $c$  e opções de venda  $p$ .

$$c = SN(d_1) - Xe^{r(T-t)}N(d_2) \quad (\text{A.9})$$

$$p = Xe^{r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (\text{A.10})$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

e  $N(x)$  é a função densidade acumulada da distribuição normal padrão.

## Apêndice B

# Seqüências de Baixa Discrepância: uma Apresentação

### B.1 Seqüências Uniformes Módulo 1

A teoria que trata de seqüências distribuídas de maneira uniforme é recente, originando-se de um artigo do Herman Weyl [24]. O que nos interessa especificamente são as seqüências uniformes módulo 1.

Seja  $[y]$  a parte inteira de  $y$ . Definindo  $x = y - [y]$  temos que  $x \in [0, 1)$ .

Definição: A seqüência  $w = \{x\}$  constituída da parte fracionária da seqüência  $\{y\}$  é uniformemente distribuída módulo 1 se para cada par  $a$  e  $b$  de números reais com  $0 \leq a < b \leq 1$  e para  $N \in \mathbf{Z}^+$ ,  $N > 0$  temos:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A([a, b); N; w)}{N} = b - a$$

onde  $A(E; N; w)$  é o número de termos de  $\{x\}$  para  $1 \leq n \leq N$  tal que  $x_n \in E$ . Usaremos também a notação  $A(E; w)$ . Podemos também usar a função característica  $c_{[a,b)}$  e escrever a condição suficiente como:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 c_{[a,b)}(x) dx$$

Para identificar seqüências uniformemente distribuídas dispomos de regras como por exemplo o critério de Weyl que estipula o seguinte,

**Critério de Weyl:** a seqüência  $\{x_n\}$  é uniformemente distribuída módulo 1 se e somente se,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i h x_n} = 0$$

Existe uma miríade de seqüências que obedecem à definição acima. Vejamos alguns exemplos.

- A seqüência  $\{n\Theta - [n\Theta]\}$  onde  $\Theta$  é irracional, é uniforme módulo um.
- Definindo o polinômio:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$

onde pelo menos um dos coeficientes  $a_n$  é irracional. Então a seqüência  $\{p(n) - [p(n)]\}$  onde  $n = 1, 2, \dots$  é uniforme módulo um.

## B.2 Discrepância

Podemos pensar intuitivamente que algumas seqüências são distribuídas de maneira mais ou menos uniforme que outras. Para conseguirmos efetuar uma classificação dentre estas seqüências necessitamos de alguma medida de dispersão. A medida mais popular na literatura é a discrepância. Nas palavras de Niederreiter [13],

a discrepância pode ser vista como uma medida quantitativa de desvio em relação à distribuição uniforme.

Apresentamos abaixo as suas formas mais conhecidas.

Seja  $P$  um conjunto de  $N$  pontos no cubo unitário  $[0, 1]^s$ . Seja  $B$  um subconjunto arbitrário de  $[0, 1]^s$ . Conforme visto acima,

$$A(B; P) = \sum_{n=1}^N c_B(x_n)$$

Seja  $\beta$  uma família de subconjuntos de  $[0, 1]^s$  mensuráveis no sentido de Lebesgue. A noção geral de discrepância pode então ser formulada da seguinte maneira para o conjunto de pontos  $P$ :

$$D_N(\beta, P) = \sup_{B \in \beta} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right|$$

Dependendo da forma pela qual escolhermos a família  $\beta$  obtemos as duas definições mais populares de discrepância:

- A discrepância estrela  $D_N^*(P) = D_N(\Psi^*, P)$  onde  $\Psi^*$  é a família de todos os subintervalos de  $[0, 1]^s$  do tipo  $\Pi_{i=1}^s [0, u_i]$ .
- A discrepância extrema  $D_N(P) = D_N(\Psi, P)$  onde  $\Psi$  é a família de todos os subintervalos de  $[0, 1]^s$  do tipo  $\Pi_{i=1}^s [u_i, v_i]$ .

Seja  $D_N(w)$  a discrepância da seqüência  $\{w\}$ . As duas definições de discrepância permitem caracterizar seqüências distribuídas de maneira uniforme no sentido definido anteriormente. De acordo com Niederreiter & Kuipers [14] as três propriedades seguintes são equivalentes:

1.  $\{w\}$  é distribuída de maneira uniforme módulo 1.
2.  $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(w) = 0$
3.  $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N^*(w) = 0$

Além de quantificar a definição de seqüência distribuída de maneira uniforme a discrepância nos fornece um resultado muito mais poderoso pois nos dá o limite de erro de integração.

No caso uni-dimensional temos a desigualdade de Koksma [10],

Se  $f$  é de variação limitada  $V(f)$  no intervalo  $[0, 1]$ , então para qualquer conjunto de pontos  $P \in [0, 1]$  temos,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq V(f) D_n^*(P)$$

No caso n-dimensional temos a desigualdade de Koksma-Hlawka,

Se  $f$  é de variação limitada  $V(f)$  no sentido de Hardy e Krause no intervalo  $[0, 1]^s$ , então para qualquer conjunto de pontos  $P \in [0, 1]^s$  temos,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X_n) - \int_{[0,1]^s} f(u) du \right| \leq V(f) D_n^*(P)$$

A discrepância não é só útil na análise de seqüências uniformemente distribuídas e na obtenção de limites de erro de integração. Ela também é usada como medida de calibração de seqüências pseudo-aleatórias. Os resultados acima são um incentivo forte à busca de construções de baixa discrepância, tópico que abordamos à seguir.

## B.3 Seqüências de Baixa Discrepância

### B.3.1 As construções na teoria

Existem várias seqüências de baixa discrepância. As primeiras construções são devidas a Van de Corput e Hammersley. A seqüência de Halton que utilizamos neste trabalho é uma generalização da seqüência de Van de Corput. Posteriormente foram propostas a seqüência de Sobol [21] e a seqüência de Faure [5]. Estas duas tendo como princípio uma reordenação da seqüência de Halton.

Halton [7] prova que a discrepância de sua seqüência é  $O(N^{-1}(\ln N)^s)$ . Este patamar tornou-se então uma condição necessária para a denominação "baixa-discrepância". Já a seqüência de Hammersley apresenta uma discrepância  $O(N^{-1}(\ln N)^{s-1})$ . Existe uma conjectura, provada até então para  $s \leq 2$ , estipulando que a discrepância estrela de qualquer conjunto  $P$  de  $N$  elementos satisfaz:

$$D_N^*(P) \geq B_s N^{-1}(\ln N)^{s-1}$$

Se este resultado vier a ser provado poderíamos então afirmar que a seqüência de Hammersley é a construção de menor magnitude de discrepância. O limite de erro para o método de Sobol é da mesma ordem que o limite para o método de Halton.

Lembramos então que as duas grandes diferenças entre a SQMC e a SMC são:

1. A SMC oferece ordem de grandeza probabilística para os erros de integração enquanto que a SQMC fornece uma ordem de grandeza determinista para limite do mesmo erro.
2. O erro de integração em SMC é independente da dimensão do problema, o que não ocorre no caso da SQMC.

Entendemos o conceito de eficiência como a obtenção de um erro de integração inferior para simulações efetuados com igual número de pontos. A teoria sugere fortemente que para problemas de integração de dimensão pequena, a SQMC é mais eficiente que a SMC. Vimos no capítulo 4 o resultado de algumas pesquisas

As primeiras construções clássicas (Van der Corput, Hammersley, Halton) geraram uma demanda por uma teoria mais geral. Estabeleceu-se uma linguagem mais abrangente que permite classificar as diferentes seqüências e até mesmo efetuar comparações entre elas. Introduziremos aqui as definições elementares deste novo enfoque.

Definição: Um intervalo elementar na base  $b$  é um intervalo  $E$  em  $[0, 1]^s$  do tipo:

$$E = \prod_{j=1}^s \left[ \frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right]$$

onde  $d_j \geq 0$ ,  $0 \leq a_j \leq b^{d_j}$  com  $a_j$  e  $d_j$  inteiros.

Um intervalo elementar é portanto um subintervalo do cubo unitário  $[0, 1]^s$  cujo eixo  $j$  tem comprimento  $b^{d_j-1}$ . Quando se divide o eixo  $j$  em  $b^{d_j}$  partes iguais e repetimos a operação para os outros eixos, então o subintervalo obtido é um intervalo elementar de volume  $b^{-\sum_{j=1}^s d_j}$ .

Definição: Sejam os inteiros  $t$  e  $m$  tais que  $0 \leq t \leq m$ . Uma rede-( $t, m, s$ ) na base  $b$  é um conjunto finito de  $b^m$  pontos no cubo  $[0, 1]^s$  distribuídos de tal modo que cada intervalo elementar na base  $b$  de volume  $b^{t-m}$  contém exatamente  $b^t$  pontos da seqüência. Essa definição se estende para seqüências infinitas gerando seqüência-( $t, s$ ).

Definição: Uma seqüência infinita de pontos  $\{X_n\}$  é uma seqüência-( $t, s$ ) na base  $b$  se para todos os  $k \geq 0$  e  $m \geq t$ , a seqüência finita  $X_{kb^m+1}, \dots, X_{(k+1)b^m}$  forma uma rede-( $t, m, s$ ) na base  $b$ .

Um resultado muito importante para a teoria das seqüências-( $t, s$ ) nos dá um limite superior para as suas discrepâncias. Para qualquer seqüência-( $t, s$ ) na base  $b$  temos:

$$D_N^*(S) \leq C_b(s, t) N^{-1} (\ln N)^s + O(N^{-1} (\ln N)^{s-1})$$

para todo  $N \geq 2$ , onde  $C_b(s, t)$  é uma função crescente do parâmetro  $t$ . Portanto quanto menor o  $t$ , menor o limite superior para a discrepância. Em Niederreiter & Xing [15] os autores constroem uma tabela com os valores de  $t$  quando se varia a dimensão. Nesta tabela, que reproduzimos na tabela B.1, são comparadas quatro seqüências. São estas a de Sobol, uma seqüência dita de Niederreiter (trata-se de uma generalização da seqüência de Sobol para qualquer dimensão) uma seqüência devida a Niederreiter e Xing em 1995 que apelidaremos de NX95 e a seqüência NX que usamos no nosso trabalho, também devida a Niederreiter e Xing [15].

A melhora é gritante quando se compara a seqüência de Sobol com a seqüência de NX. Esta última se destaca também das demais construções e nos deixa esperançosos que possamos conseguir resultados mais precisos do que os que se obteriam com o uso da seqüência de Sobol em SQMC de dimensão elevada.

Dentre as seqüências mencionadas até agora podemos classificar a construção de Sobol como uma seqüência-( $t, s$ ) ou rede( $t, m, s$ ) na base 2. A construção de Faure é uma rede-( $t, m, s$ ) ou seqüência ( $t, s$ ) em base prima

s	Sobol	Nidereiter	NX95	NX
1	0	0	3	0
2	0	0	4	0
3	1	1	6	1
4	3	3	8	1
5	5	5	10	2
6	8	8	12	3
7	11	11	15	4
8	15	14	18	5
9	19	18	21	6
10	23	22	24	8
11	27	26	27	9
12	31	30	31	10
13	35	34	35	11
14	40	38	39	13
15	45	43	43	15
16	50	48	47	15
17	55	53	51	18
18	60	58	55	19
19	65	63	59	19
20	71	68	64	21

Tabela B.1: Seqüências-(t,s), valores de  $t$  na base 2

superior ou igual a  $s$ . Em 1987 Niederreiter generalizou as construções de Sobol para qualquer base. A seqüência que usamos nos nossos testes é a última de uma série de seqüências criadas por Niederreiter & Xing que visam sempre melhorar a equidistribuição dos pontos.

### B.3.2 As construções na prática

É muito interessante ver como os conceitos citados acima funcionam na prática. Para isso, inspirando-nos no trabalho de Tan e Boyle [22], iremos mostrar como as seqüências-(t,s) se espalham no cubo unitário. De modo a facilitarmos a exposição usaremos a seqüência de Sobol, gerada na base 2. Para podermos visualizar os nossos resultados trabalharemos com duas dimensões e para simplificarmos fixamos  $t = 0$ . Portanto temos uma seqüência-(0,2). Por definição a subsequência finita,  $X_{kb^m+1}, \dots, X_{(k+1)b^m}$ , é uma rede-(0,m,2) na base 2, para todo  $k \geq 0$  e  $m > 0$ . Escolhemos  $m = 3$

para não trabalharmos com intervalos muito pequenos. A subsequência de interesse é portanto uma rede-(0,3,2) com 8 elementos ( $2^3 = 8$  elementos). Pelo que vimos acima, a teoria nos garante que em cada intervalo elementar na base 2 de área  $2^{-3}$  unidades, encontra-se um ponto da subsequência. Os intervalos de interesse são da forma:

$$\left[ \frac{a_1}{2^{d_1}}, \frac{(a_1 + 1)}{2^{d_1}} \right) \times \left[ \frac{a_2}{2^{d_2}}, \frac{(a_2 + 1)}{2^{d_2}} \right)$$

em  $[0, 1)^2$  com  $a_i, d_i$  tais que  $d_i \geq 0$  e  $0 \leq a_i < 2^{d_i}$ , para  $i = 1, 2$ .

Para escolhermos  $d_1$  e  $d_2$ , atentamos também para o fato de cada intervalo elementar ter por área  $2^{-3}$  unidades. Os intervalos produzidos acima têm área  $2^{-(d_1+d_2)}$ . Temos então a seguinte equação:

$$2^{-(d_1+d_2)} = 2^{-3}$$

que nos oferece 4 soluções diferentes para  $d_1$  e  $d_2$ . Estas são os pares:

$$S = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

Escolhemos inicialmente  $d_1 = 0$  e  $d_2 = 3$ . O inteiro  $k$  será fixado arbitrariamente em 8. Os intervalos gerados assim como os pontos que compõem a subsequência escolhida podem ser vistos no gráfico abaixo.

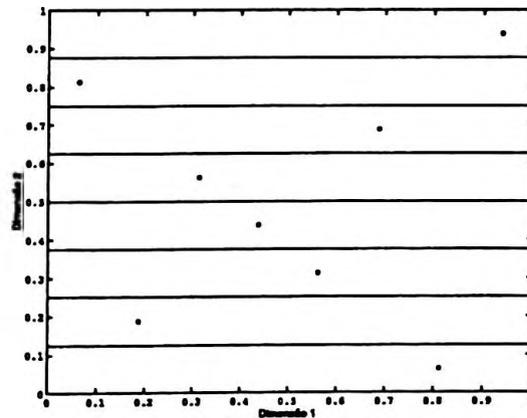


Figura B.1: Distribuição de 8 pontos seguidos de Sobol para  $d_1 = 0$  e  $d_2 = 3$

Como podemos observar no gráfico B.1, cada intervalo elementar contém unicamente um ponto da subsequência. Vejamos o que acontece quando escolhemos  $d_1 = 1$  e  $d_2 = 2$ .

Novamente, como pode ser visto na figura B.2, cada intervalo elementar possui unicamente um ponto da subsequência. Se aumentarmos o parâmetro

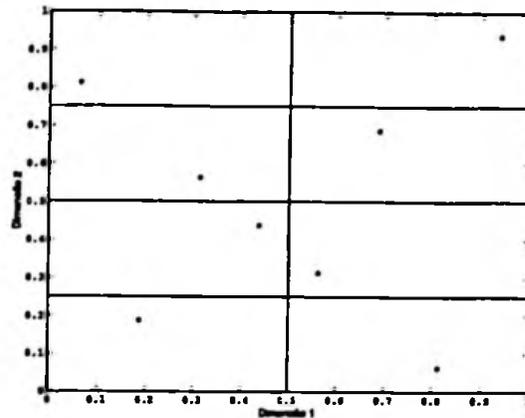


Figura B.2: Distribuição de 8 pontos seguidos de Sobol para  $d_1 = 1$  e  $d_2 = 2$

m para 4 de tal modo a termos 16 termos na subsequência esperamos que novamente o mesmo fenômeno observado acima se repita. Não repetimos o processo de escolha dos intervalos elementares para o caso de  $m = 4$  pois este segue o mesmo princípio que vimos anteriormente. O resultado segue na figura B.3

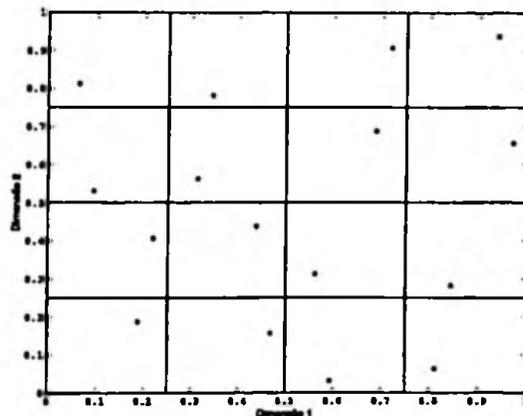


Figura B.3: Distribuição de 16 pontos seguidos de Sobol

Finalmente reiteramos o mesmo raciocínio para  $m = 5$  e desenhamos o gráfico B.4 com os intervalos elementares dividindo a partição do eixo das ordenadas do gráfico B.3.

Novamente a construção obedece à definição de rede-(t,s). A capacidade da seqüência se espalhar de tal forma que cada intervalo elementar seja preenchido com a cota de pontos que lhe é devida, independentemente da maneira pela qual estes intervalos foram escolhidos é fascinante. Não

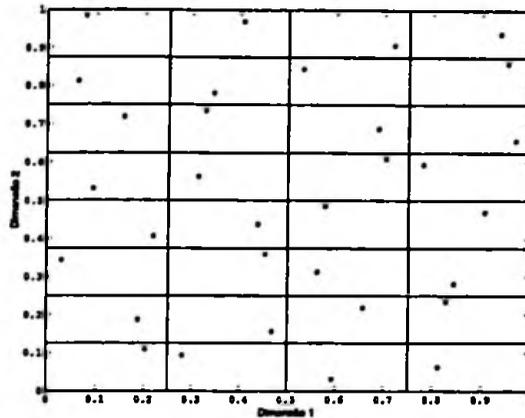


Figura B.4: Distribuição de 32 pontos seguidos de Sobol

podemos efetuar a mesma análise com a seqüência de NX pois Niederreiter não divulga a base utilizada. Também não é possível efetuarmos a mesma análise para dimensões superiores a dois. Todavia é interessante desenharmos os mesmos gráficos para dimensões adjacentes já que na maioria dos nossos problemas a trajetória do ativo-objeto depende de incrementos consecutivos dados em cima do preço a vista. Novamente gostaríamos que as trajetórias representassem de maneira mais suave possível a distribuição probabilística do processo estocástico. Portanto não queremos observar nenhum tipo de padrão nos choques que serão dados à trajetória do ativo-objeto. Para termos uma idéia de como são distribuídos estes choques iremos desenhar o gráfico de dispersão de mil pontos para duas dimensões adjacentes. Mostraremos os resultados para as seqüências de NX e de Sobol.

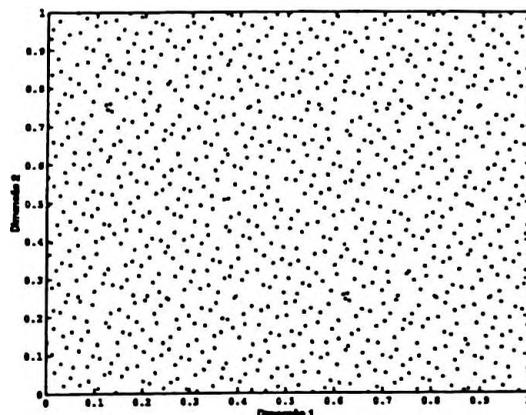


Figura B.5: Seqüência de Sobol - dimensões 1 e 2 (mil pontos)

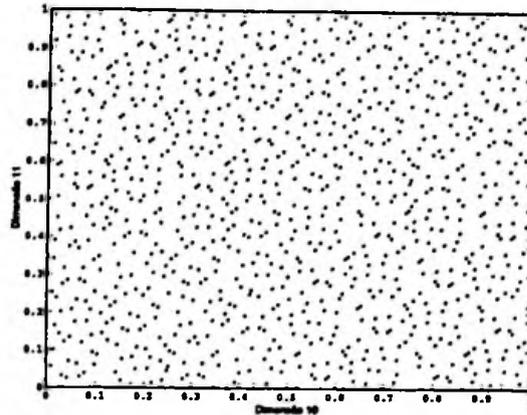


Figura B.6: Seqüência de Sobol - dimensões 10 e 11 (mil pontos)

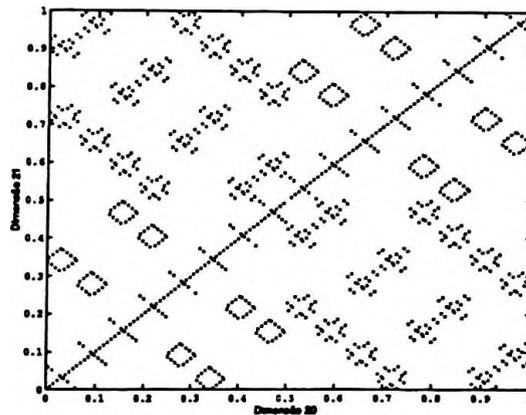


Figura B.7: Seqüência de Sobol - dimensões 20 e 21 (mil pontos)

Podemos observar que os gráficos de dispersão B.5 e B.6 mostram que os pontos de dimensão adjacente da seqüência de Sobol tendem a se espalhar no quadrado unitário de maneira uniforme. Todavia quando olhamos para as figura B.7 e B.8 fica nítida a formação de padrões de preenchimento. O mesmo ocorre para dimensões superiores a 30. Este comportamento pode levar a viéses em nossos experimentos. Basta que os incrementos futuros não consigam anular este efeito de agrupamento. Mais ainda, se o problema tratado não for de dimensão suficientemente alta para permitir algum tipo de compensação então o resultado pode divergir substancialmente do esperado. Vejamos como a seqüência de NX se comporta. Para este propósito geramos as figuras B.9, B.10, B.11 e B.12.

Para dimensões superiores a 30 os pontos espalham-se de maneira cada

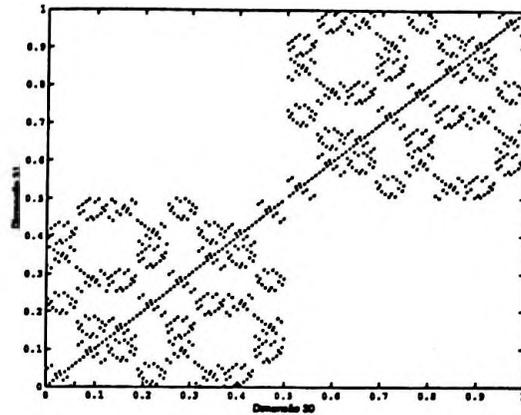


Figura B.8: Seqüência de Sobol - dimensões 30 e 31 (mil pontos)

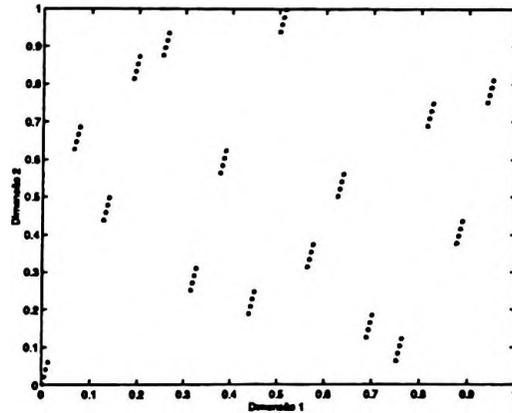


Figura B.9: Seqüência de NX - dimensões 1 e 2 (mil pontos)

vez mais uniforme. Vemos portanto que o comportamento da seqüência de NX é diametralmente oposto ao da seqüência de Sobol. Os gráficos para dimensões inferiores a 8 apresentam agrupamentos ainda mais concentrados que os vistos para a seqüência de Sobol. Já quando olhamos gráficos de dimensões superiores reparamos que os pontos espalham-se da mesma maneira que em gráficos de dimensões pequenas para as seqüências de Sobol. O tipo de comportamento observado para as seqüências de Sobol deixa presumir que quando se trabalha com problemas de dimensão alta os resultados podem divergir substancialmente do esperado. Já o mesmo pode ser esperado para problemas de dimensão baixa quando se trabalha com a seqüência de NX. Por outro lado quanto maior a dimensão, neste caso, menor deve ser a influência das dimensões iniciais, fazendo com que talvez possamos utilizar

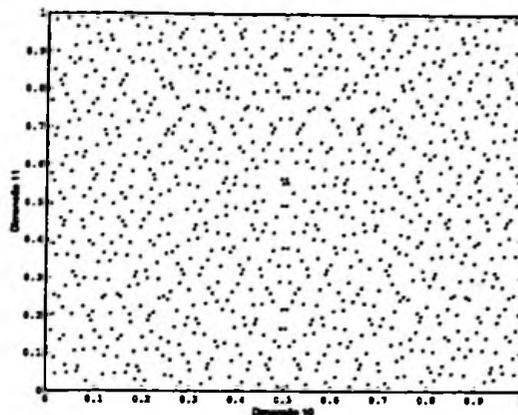


Figura B.10: Seqüência de NX - dimensões 10 e 11 (mil pontos)

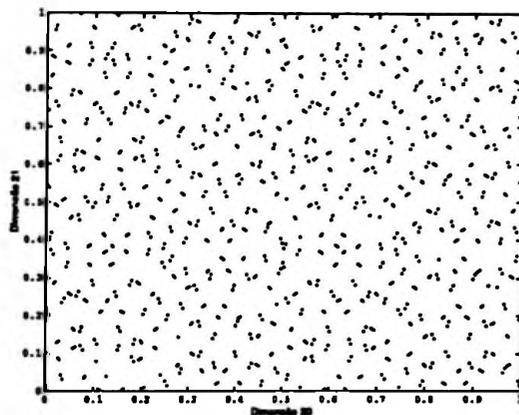


Figura B.11: Seqüência de NX - dimensões 20 e 21 (mil pontos)

esta seqüência quase-aleatória para problemas dessa natureza. Um dos objetivos deste trabalho consiste justamente em verificar se esta nova seqüência é adaptada a problemas de dimensões para as quais geralmente a SQMC é deficiente.

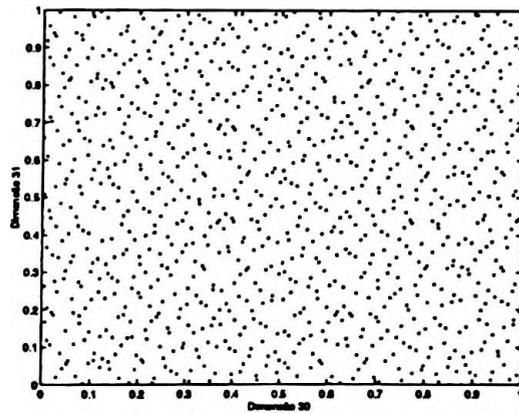


Figura B.12: Seqüência de NX - dimensões 30 e 31 (mil pontos)

# Bibliografia

- [1] J.R. Birge. Quasi monte-carlo aproaches to option pricing. University of Michigan Working Paper, 1992.
- [2] P. Boyle, M. Broadie, and P. Glasserman. Monte-carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics*, 21, 1997.
- [3] E. Chancellor. *Salve-se quem puder, uma história da especulação financeira*. Companhia das letras, 2001.
- [4] M. Dempster and H. Pliska. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] H. Faure. Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension  $s$ ). *Acta Arithmetica*, 41:337–351, 1982.
- [6] S. Galanti and A. Jung. Low-discrepancy sequences: Monte-carlo simulation of option prices. *Journal of derivatives*, Fall 1997.
- [7] J.H. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerical Mathematics*, 2:84–90, 1960.
- [8] C. Joy, P. Boyle, and K.S. Tan. Quasi-monte carlo methods in numerical finance. *Management Science*, 42:926–938, 1996.
- [9] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming vol. 2*. Addison-Wesley, 1981.
- [10] J.F. Koksma. Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1. *Mathematica B (Zutphen)*, 11:7–11, 1942-3.
- [11] JP Morgan. *Riskmetrics Technical Document*. 1996.

- [12] B. Moskowitz and R.E. Caflisch. Smoothness and dimension reduction in quasi-monte carlo methods. *Mathematical Computer Modelling*, 23:37–54, 1996.
- [13] H. Niederreiter. *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 63, SIAM, 1992.
- [14] H. Niederreiter and L. Kuipers. *Uniform distribution of sequences*. John Wiley and Sons, 1974.
- [15] H. Niederreiter and C.P. Xing. Low-discrepancy sequences and global function fields with many rational places. *Finite Fields Applications*, 2:241–273, 1996.
- [16] A. Owen. Monte-carlo extension of quasi-monte carlo. Stanford University Working Paper, 1998.
- [17] S.H. Paskov and J.F. Traub. Faster valuation of financial derivatives. *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1995.
- [18] W. Press, S. Teukolsky, T.V. William, and P.F. Brian. *Numerical Recipes in C, 2nd edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [19] R. Rubinstein. *The Monte-Carlo Simulation*. Wiley, 1992.
- [20] L. Shrage. A more portable random number generator. *ACM Trans. Math. Software*, 5:132–38, 1978.
- [21] I.M. Sobol. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7:86–112, 1967.
- [22] K.S. Tan and P. Boyle. Applications of randomized low discrepancy sequences to the valuation of complex securities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24:1747–1782, 2000.
- [23] S. Tezuka. Financial applications of monte-carlo and quasi-monte carlo methods. *Lecture Notes in Statistics - Springer*, 138, 1998.
- [24] H. Weyl. Über die gleichverteilung von zahlen mod eins. *Math. Ann.*, 77:313–352, 1916.
- [25] H. Wozniakowski. Average-case complexity of multivariate integration. *Bulletin of the American Math. Society*, 24:185–194, 1991.