

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE**  
**DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**SWARCH E VOLATILIDADE IMPLÍCITA**  
**NA TAXA DE CÂMBIO REAL/USD**

**Rafael Machado Santana**

**Orientador: Prof. Dr. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno**

**SÃO PAULO**

**2005**

**Prof. Dr. Adolpho José Melfi**  
**Reitor da Universidade de São Paulo**

**Profa. Dra. Maria Tereza Leme Fleury**  
**Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade**

**Prof. Dr. Ricardo Abramovay**  
**Chefe do Departamento de Economia**

**Profa. Dra. Fabiana Rocha**  
**Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Teoria Econômica**

T332.4  
52325

T332.4 S232\$  
187604  
20600028021



Powered by RfidProStar - www.toprocess.com.br

**RAFAEL MACHADO SANTANA**

**DEDALUS - Acervo - FEA**



20600028021

**SWARCH E VOLATILIDADE IMPLÍCITA  
NA TAXA DE CÂMBIO REAL/USD**

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Economia.

**Orientador: Prof. Dr. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno**

<b>USP - FEA - SBD</b>
DATA DA DEFESA <u>16/08/05</u>

**SÃO PAULO  
2005**

87604



Dissertação defendida e aprovada, em 16.08.2005, no Programa de Pós-Graduação em Economia, pela seguinte comissão julgadora:

Prof. Dr. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves

Prof. Dr. Afonso de Campos Pinto

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

Elaborada pela Seção de Publicações e Divulgação do SBD/FEA/USP

Santana, Rafael Machado

SWARCH e volatilidade implícita na taxa de câmbio REAL/USD / Rafael Machado Santana. – São Paulo, 2005.

57 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2005.  
Bibliografia.

1. Câmbio (Economia) 2. Taxa de câmbio 3. Análise de séries temporais 4. Opções financeiras I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. II. Título.

CDD – 332.4

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar algumas breves palavras de agradecimento a certas pessoas que contribuíram para a elaboração desta dissertação, a começar por meu orientador, Rodrigo De Losso. A ele sou grato por todo tempo que me disponibilizou, pela atenção e seriedade que mostrou durante toda a orientação e por compartilhar comigo um pouco de seu conhecimento e de sua inteligência.

Também devo agradecer ao professor Denisard Alves, que esteve presente na elaboração do projeto e para aclarar diversas questões que surgiam ao longo do trabalho. À professora Vera Fava pelo excelente curso de séries temporais que me forneceu a base sobre a qual foi feita esta dissertação. Ao professor Antonio Gledson de Carvalho por seus comentários e sugestões quando da realização do projeto de dissertação, os quais levei muito em conta. Ao professor Joe Yoshino pelo seu rico e intenso curso de finanças que me ajudou a obter um melhor entendimento de algumas questões tratadas neste trabalho. A todos os colegas do mestrado pelo agradável convívio e pela troca de idéias que sempre ajuda a dirimir dúvidas e a solucionar problemas. A José Carlos Domingues da Silva pelos seus comentários e sugestões e a Alan Dario e Gabriel Garber por me fornecerem alguns dos dados utilizados. A Márcia e Beth da coordenação de pós-graduação por todo trabalho, atencioso e competente, de suporte aos alunos. Ao pessoal da secretaria de pós-graduação, Cida, Valéria, Márcia, Francisco e Luciene pelo apóio técnico e institucional durante todo o mestrado. A Gisele Oliveira da Seção de Publicações e Divulgação do SBD/FEA/USP pelo trabalho de catalogar minha dissertação. Ao CNPq por me fornecer a bolsa de estudos.

Não obstante toda essa colaboração, eventuais erros presentes neste trabalho são de exclusiva responsabilidade minha.

## RESUMO

Este trabalho faz uma comparação empírica entre previsões da volatilidade do retorno da taxa de câmbio entre o real e o dólar, obtidas por meio de um modelo de séries temporais com mudança de regime na variância condicional, o SWARCH de Hamilton e Susmel (1994), e da volatilidade implícita nos preços de opções sobre aquele ativo, negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F). A comparação é feita por meio de regressões que avaliam o poder de predição e o conteúdo informacional das previsões. Os resultados apontam que considerar distintos estados para a volatilidade do retorno da taxa de câmbio faz com que o desempenho do modelo de série de tempo seja melhor do que o da volatilidade implícita, produzindo, dessa forma, resultados inversos aos constatados na literatura, onde se utilizam especificações sem mudança de regime, como o GARCH.

**ABSTRACT**

*This article evaluates empirically the performance of two approaches for predicting the volatility of REAL/USD exchange rate return, one of those using a time series model with conditional variance subject to regime switch, the SWARCH model of Hamilton and Susmel (1994), and the other one based on the volatility implied in the price of options quoted at the Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F). The comparison between those two approaches relies on regression based tests of predictive ability and informational content. The results show that the use of a time series model with distinct regimes of volatility for the return of the exchange rate outperforms the forecast obtained by implied volatility, contradicting, therefore, the evidences pointed out in the literature obtained with time series models with no regime switch in variance, such as GARCH.*

## SUMÁRIO

1	Introdução.....	5
2	Volatilidade histórica .....	11
2.1	O modelo SWARCH .....	11
2.2	O modelo GARCH .....	15
2.3	O modelo TARCH.....	15
3	Volatilidade implícita.....	17
4	GARCH, mudança de regime na variância do retorno da taxa de câmbio e superestimação da persistência.....	19
4.1	Persistência no GARCH.....	19
4.2	Mudança de regime e a superestimação da persistência .....	20
4.2.1	Inferência a respeito dos regimes de volatilidade .....	20
4.2.2	Superestimação da persistência.....	24
5	Procedimento de comparação das estimativas de volatilidade.....	27
5.1	Volatilidade realizada.....	28
5.2	Volatilidade histórica .....	29
5.3	Regressores gerados .....	29
5.4	Sobreposição de dados e autocorrelação .....	32
6	Descrição dos dados e resultados .....	35
6.1	Dados.....	35
6.2	Estimação dos modelos de volatilidade histórica.....	36
6.3	Raiz unitária e não-linearidade.....	38
6.4	Avaliação dos previsores de volatilidade .....	42
7	Conclusão .....	47
	REFERÊNCIAS .....	49

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Retorno da taxa de câmbio .....	21
Tabela 2 – Persistência no GARCH.....	25
Tabela 3 – Coeficientes estimados .....	37
Tabela 4 – Testes de raiz unitária.....	38
Tabela 5 – Testes de raiz unitária.....	40
Tabela 6 – Regressões da vol. realizada sobre a vol. implícita.....	43
Tabela 7 – Regressões da vol. realizada sobre as vol. históricas .....	44
Tabela 8 – Avaliando o conteúdo informacional com o desvio-padrão como proxy .....	45
Tabela 9 - Avaliando o conteúdo informacional com o estimador de Parkinson como proxy	45

**LISTA DE GRÁFICOS**

Gráfico 1 - Distribuição normal .....	14
Gráfico 2 - Distribuição normal .....	14
Gráfico 3 - Mistura de normais .....	14
Gráfico 4 - Mistura de normais .....	14
Gráfico 5 - Taxa de câmbio, retorno diário do REAL/USD, EMBI+ Brasil e probabilidades suavizadas (SWARCH).....	22
Gráfico 6 - Volatilidade realizada (%a.a.): desvio-padrão.....	42
Gráfico 7 - Volatilidade realizada (%a.a.): Parkinson .....	42
Gráfico 8 - Volatilidade implícita (%a.a.).....	42
Gráfico 9 – Volatilidade SWARCH (%a.a.) .....	42
Gráfico 10 – Volatilidade GARCH (% a.a.) .....	42
Gráfico 11 – Volatilidade TARCH (% a.a.).....	42

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda o problema de como prever a volatilidade do retorno de um ativo financeiro, analisando algumas técnicas disponíveis que tentam resolvê-lo. Esse é um problema prático em diversas áreas em finanças e que, por essa razão, motiva a análise que estaremos fazendo. Como resumem Engle e Patton (2001), tal problema está presente na administração de risco ao se tentar calcular a probabilidade de uma determinada perda, ou quando se estão negociando opções, ou ainda quando se decide se um ativo deve ser vendido ou se permanecerá em carteira. Por outro lado, formadores de mercado podem estar interessados em prever a volatilidade do preço de um determinado ativo ao estabelecer a magnitude do seu *bid-ask spread*.

Neste trabalho vamos seguir uma linha de investigação que vem desenvolvendo-se na literatura especializada e que trata da comparação de duas técnicas de previsão da volatilidade, as quais são essencialmente distintas no que se refere às motivações teóricas que as originam e, conseqüentemente, distintas também na forma como computam a estimativa desejada. Em uma dessas técnicas, a previsão da volatilidade é construída a partir da modelagem de séries temporais, buscando-se prever o futuro observando o movimento passado de certas variáveis de interesse e estimando parâmetros que descrevam da maneira mais adequada esse movimento. Nesse sentido, aliás, podemos chamar a previsão assim obtida de *volatilidade histórica*. Dessa técnica, os modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e GARCH (*Generalized ARCH*) de Engle (1982) e Bollerslev (1986) são provavelmente os representantes mais conhecidos. Por outro lado, uma segunda forma de previsão se dá por meio do cálculo da chamada *volatilidade implícita* nos preços de opções. Nesta técnica, parte-se de uma fórmula de apreçamento de opções e obtém-se a previsão como sendo aquele valor do parâmetro de volatilidade da fórmula, consistente com o conjunto de informação disponível e relevante do qual o preço da opção faz parte. Dentro dessa abordagem, temos o modelo de Black e Scholes (1973) como seu precursor.

Nesta linha de investigação, as comparações feitas buscam, basicamente, indícios que apontem para a superioridade de uma técnica em relação à outra. Mais especificamente, o que se tem feito na literatura é testar a hipótese de que a volatilidade implícita é o melhor previsor da volatilidade e, portanto, superior aos modelos de séries temporais. O argumento por trás



dessa hipótese é de que, na medida em que a volatilidade implícita é derivada dos preços de mercado das opções e mantém uma relação direta com esses mesmos preços, se houver um previsor melhor, então é possível conceber uma estratégia que produza lucros anormais, arbitrando entre contratos com preços desalinhados (JORION, 1995, p. 507). Na realidade, implícito nesse argumento está a hipótese de que os mercados de opções são eficientes, no sentido de que os agentes usam todas as informações disponíveis ao negociar os contratos, fazendo com que os seus preços reflitam essas informações e tornando esses preços, conseqüentemente, a única informação relevante a respeito dos valores futuros das opções.

A forma como se tem comparado essas técnicas de previsão é avaliando a *capacidade de predição* e o *conteúdo informacional* da volatilidade histórica *vis-à-vis* o da volatilidade implícita, inferindo, por um lado, quanto cada tipo de previsão consegue explicar de uma *proxy* da volatilidade realizada e, por outro lado, se uma das estimativas subjuga a outra quanto à “quantidade” de informação que ela aporta para explicar aquela *proxy*, de tal forma a tornar essa outra estimativa insignificante como previsor da volatilidade realizada. Muitos artigos têm realizado essas avaliações, mas os resultados não apontam para uma única resposta.

Jorion (1995), examinando a volatilidade do retorno de diversas taxas de câmbio com relação ao dólar e utilizando opções sobre futuros de taxas de câmbio, mostra que o conteúdo informacional da medida histórica não acrescenta nada em relação ao conteúdo informacional da volatilidade implícita. Também sobre taxas de câmbio, mas utilizando agora opções sobre taxas à vista, Xu e Taylor (1995) obtêm resultados semelhantes. Ainda corroborando os resultados anteriores, mas investigando a volatilidade do índice S&P 100, temos os trabalhos de Fleming (1998), Christensen e Prabhala (1998), Blair *et al* (2001) e Day e Lewis (1992), muito embora neste último artigo as evidências sejam tênues.

Alternativamente, Kroner *et al* (1993), usando opções sobre *commodities*, Lamoureux e Lastrapes (1993) e Vasilellis e Meade (1996), trabalhando com opções sobre ações da CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) e da bolsa de Londres, respectivamente, e Amin e Ng (1997), estudando a volatilidade da taxa de juros com opções de eurodólar negociadas na CME (*Chicago Mercantile Exchange*), mostram que a volatilidade histórica acrescenta informação com relação à volatilidade implícita, para explicar a volatilidade realizada.

No Brasil, dois estudos fazem comparações entre modelos de volatilidade do retorno da taxa de câmbio REAL/USD. Nos artigos de Andrade e Tabak (2000) e Chang *et al* (2002), os autores verificam que, quando as volatilidades implícita e histórica são colocadas em um mesmo modelo para explicar a volatilidade realizada, o papel da volatilidade histórica é estatisticamente insignificante, sendo o oposto constatado para a outra previsão de volatilidade.

Por outro lado, mais recentemente, Gabe e Portugal (2004), utilizando ações e opções da Telemar, chegam a um resultado distinto, notando que as duas previsões de volatilidade são significantes quando consideradas conjuntamente para explicar a volatilidade realizada.

Neste artigo, iremos fazer tais comparações, mas averiguando os resultados que podem surgir ao modelar a série de retorno de um determinado ativo, permitindo que ela tenha distintos regimes de volatilidade ao longo do tempo. Particularmente, estamos interessados em rever o desempenho dos previsores de volatilidade para o caso da taxa de câmbio entre o real e o dólar, mudando a especificação do modelo de série temporal utilizada nos dois artigos citados acima, de um GARCH(1,1) gaussiano para o *Switching ARCH* (SWARCH) de Hamilton e Susmel (1994), no qual a variância<sup>1</sup> condicional possui um número finito de regimes nos quais ela pode estar, com a ocorrência desses regimes sendo determinada por uma cadeia de Markov.

A razão pela qual desejamos realizar essa tarefa se deve à constatação de que nos estudos mencionados não se considera a hipótese de que as séries financeiras e suas volatilidades tenham padrões de comportamento distintos ao longo do tempo, muito embora existam evidências de que a variância condicional dos retornos de ativos financeiros sofra mudanças de regime. Especificamente para a taxa de câmbio REAL/USD, essas evidências podem ser encontradas em Issler (1999) e Pereira *et al* (1999).

Considerar a possibilidade de que uma série apresente mudanças de regime na volatilidade quando se trata de modelar seu comportamento é um aspecto importante por dois motivos. Em primeiro lugar, como ilustraremos em detalhes na seção 4, se não se admite a ocorrência de tal descontinuidade quando, na verdade, ela existe, modelos do tipo GARCH tendem a ter

---

<sup>1</sup> Utilizaremos os termos variância e volatilidade indistintamente, apenas fazendo a diferenciação quando for necessária.

seus parâmetros superestimados, produzindo padrões de volatilidade que não correspondem à realidade e prejudicando o desempenho das previsões. Nessas circunstâncias, a utilização de uma especificação que incorpore a mudança de regime permite contornar tais dificuldades produzindo resultados melhores. De fato, Bollen *et al* (2000), trabalhando com as taxas de câmbio da Libra esterlina, do Iene e do Marco alemão, com relação ao US dólar, mostram que a utilização de um modelo com mudança de regime na média e na variância produz um ajuste melhor aos dados e previsões mais precisas do que um modelo GARCH (1,1). Também Daouk e Guo (2004), analisando opções sobre um índice de volatilidade, obtêm melhor ajuste aos dados considerando uma especificação com distintos estados para a variância condicional. Ademais, para o caso brasileiro, Issler (1999) chega à conclusão de que o SWARCH é superior a vários outros modelos ARCH no que se refere à aderência aos dados e à capacidade de previsão.

Em segundo lugar, é importante considerar a possibilidade de mudanças de regime porque, empregando a abordagem de *Markov Switching*, obtém-se uma estrutura econométrica capaz de modelar a probabilidade de ocorrência de determinados eventos que, se ocorrerem, justificam esperar um comportamento particular de certas variáveis econômicas de interesse, distinto daquele que se verificaria na ausência de tais eventos, e isso, por si só, pode ser relevante na previsão da volatilidade. Além disso, como veremos adiante, o SWARCH é um caso particular de um modelo de mistura de densidades de probabilidade e, portanto, oferece maior flexibilidade para se ajustar aos dados de retornos quando estes não seguem uma distribuição conhecida (McLachlan e Peel, 2000).

No cálculo da volatilidade implícita estaremos usando o modelo de Garman e Kohlhagen (1983), de agora em diante denominado GK, uma extensão do modelo de Black e Scholes (1973) para opções sobre taxas de câmbio. A sua utilização se justifica por ele ser uma referência empregada na literatura na comparação com outros modelos, não apenas no que diz respeito à previsão da volatilidade, mas também no que se refere ao próprio apreçamento de opções. Ademais, como esse foi o modelo empregado em Andrade e Tabak (2000) e Chang *et al* (2002) a comparação entre nossos resultados e aqueles obtidos pelos autores é direta, não obstante devemos destacar que nossa série de taxa de câmbio é de um período distinto ao considerado por eles.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: na seção 2, expomos o modelo com mudança de regime na variância condicional que estaremos utilizando. Ademais, ainda nessa seção, outros dois modelos da família ARCH que não permitem distintos estados para a variância são apresentados. A seção 3 traz o modelo de apreçamento de opções usado para calcular as volatilidades implícitas. Na seção 4, descrevemos o problema que surge ao estimar o modelo GARCH quando existe mudança de regime na variância da série. A seguir, a seção 5 apresenta o arcabouço econométrico que estaremos utilizando para comparar as previsões da volatilidade. Na seção 6, faz-se uma descrição dos dados e apresentam-se os resultados obtidos. A seção 7 conclui o trabalho.

## 2 VOLATILIDADE HISTÓRICA

Muito embora nosso intuito seja averiguar o desempenho do modelo SWARCH relativamente à previsão feita pela volatilidade implícita, vamos apresentar e estimar também os modelos GARCH e TARCH, para contrastar o uso de especificações com e sem mudança de regime.

### 2.1 O modelo SWARCH

O modelo de volatilidade histórica com mudança de regime que vamos utilizar é o modelo SWARCH – *Switching Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, de Hamilton e Susmel (1994). Trata-se de uma extensão do modelo seminal de Engle (1982) para a volatilidade condicional de uma série, o modelo ARCH. No artigo de Engle, o processo estocástico de uma determinada variável de interesse é representado da seguinte forma:

$$(1) \quad y_t = E[y_t | \Omega_{t-1}] + \varepsilon_t$$

$$(2) \quad \varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t}, \quad v_t \sim iid$$

$$(3) \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2$$

Nessa especificação,  $y_t$  é a série em estudo, que em nosso caso é o retorno da taxa de câmbio, e  $h_t$  é sua variância condicional. Para o termo aleatório  $v_t$ , assume-se usualmente uma distribuição normal ou *t-student*.

O atrativo do modelo ARCH no uso em séries financeiras está em que ele incorpora em sua especificação as evidências de que os erros dos retornos em relação às suas médias tendem a se aglomerar, com os desvios de grande magnitude tendendo a serem seguidos por outros desvios elevados, o mesmo ocorrendo com os erros de menor tamanho.

No modelo SWARCH, a extensão que se faz é permitir que a série  $y_t$  esteja sujeita a distintos regimes de volatilidade, fazendo com que os erros do retorno ao longo do tempo possam oscilar ainda mais sem, no entanto, deixar de modelar as aglomerações como o ARCH o faz. Isso é conseguido por meio da seguinte especificação:

$$\begin{aligned}
 y_t &= E[y_t | \Omega_{t-1}] + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= u_t \sqrt{g_{s_t}} \\
 u_t &= v_t \sqrt{h_t}, \quad v_t \sim iid \\
 h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Na formulação acima  $s_t$  é uma variável latente independente de  $y_t$  e  $v_s$ , para todo  $r$  e  $s$ , assumindo os valores  $1, 2, \dots, k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) e que segue uma cadeia de Markov com  $k$  estados descrita por

$$\begin{aligned}
 &P(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = K, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \\
 (5) \quad &= P(s_t = j | s_{t-1} = i) \\
 &= p_{ij}, \quad i, j, K \in \{1, 2, \dots, k\}
 \end{aligned}$$

A variável  $s_t$  atua como um índice de  $g$ , onde  $g \in \mathbb{R}^+$ . Dessa forma o termo aleatório  $v_t$  pode ter seu efeito sobre o retorno acentuado (ou reduzido) a depender da escala que se realize no instante  $t$ . E isso, por sua vez, faz com que a variância de  $y_t$ , condicionada em  $\Omega_{t-1}$  e  $s_t$ , seja dada por  $g_{s_t} h_t$ . Logo, neste modelo, a mudança de regime se dá com uma alteração na escala da variância do modelo ARCH. Em geral, costuma-se fazer do primeiro estado aquele de menor variância, normalizando sua escala para um,  $g_1 = 1$ .

Um aspecto interessante do SWARCH é que ele introduz uma incerteza a respeito da distribuição de probabilidade do retorno no instante  $t$ , condicionado ao conjunto de toda informação disponível até o instante  $t-1$ ,  $\Omega_{t-1}$ . No modelo ARCH acima, uma vez conhecido  $\Omega_{t-1}$ , e assumindo, por exemplo, que a distribuição de  $v$  seja uma normal, a distribuição de probabilidade de  $y_t$  passa a ser uma normal com média  $E[y_t | \Omega_{t-1}]$  e variância



$h_t$ . Já no modelo SWARCH o termo latente  $s_t$  impõem outra aleatoriedade além daquela produzida por  $v_t$ . Neste caso, a distribuição de probabilidade do retorno passa a ser uma mistura de normais. Isso tem como vantagem, dar mais flexibilidade à modelagem do retorno, na medida em que seu comportamento probabilístico não fica restrito a uma única distribuição.

Para ilustrar o que estamos dizendo, assumamos que  $E[y_t | \Omega_{t-1}] = \gamma$ , com  $\gamma \in \mathbb{R}$ , e seja  $Y_{t-1} = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0)$  e  $S_{t-1} = (s_{t-1}, s_{t-2}, \dots, s_{t-0})$ . Então temos, para  $k = 2$ ,

$$(6) \quad \begin{aligned} E(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= \gamma + E(v_t \sqrt{h_t} \sqrt{g_{s_t}} | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

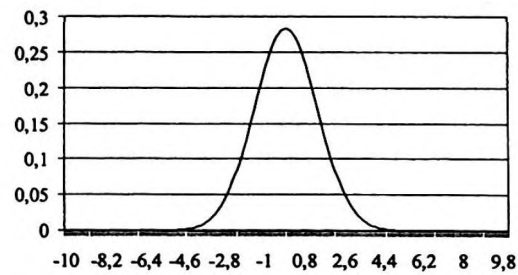
$$(7) \quad \begin{aligned} V(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= E\{[y_t - E(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t)]^2 | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t\} \\ &= E(\varepsilon_t^2 | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \\ &= g_{s_t} h_t \end{aligned}$$

Seja  $f(x|y)$  a função densidade de probabilidade normal de  $x$  condicionado em  $y$ . Logo, temos que:

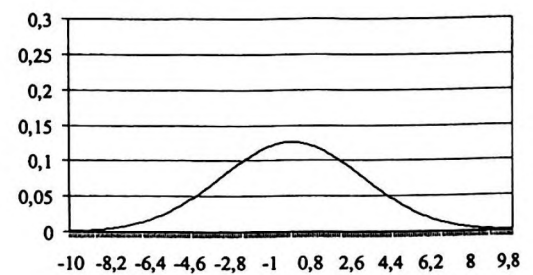
$$\begin{aligned} y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t &\sim N(\gamma, g_{s_t} h_t) \\ &\Downarrow \\ f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) &= \frac{f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})}{P(s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})} = \frac{f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1})}{P(s_t | s_{t-1})} \\ &\Downarrow \\ f^*(y_t, s_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= P(s_t | s_{t-1}) \times f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t) \\ &\Downarrow \\ F(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= \sum_{i=1}^2 P(s_t = i | s_{t-1}) \times f(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}, s_t = i) \\ (8) \quad F(y_t | Y_{t-1}, S_{t-1}) &= \sum_{s_t=1}^2 P(s_t | s_{t-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi g_{s_t} h_t}} \exp\left\{\frac{-(y_t - \gamma)^2}{2 g_{s_t} h_t}\right\} \end{aligned}$$

Pela equação (8) acima vemos como o SWARCH considera a possibilidade de o retorno estar no período seguinte em um regime de alta ou baixa volatilidade, para os quais existem distribuições de probabilidade distintas. Nesse sentido, aliás, o modelo SWARCH pode ser

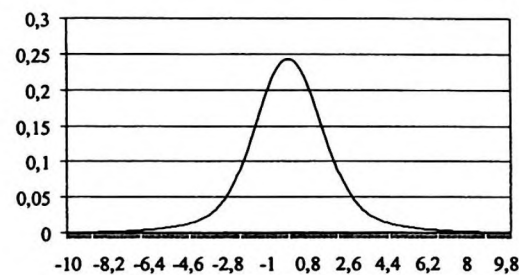
encarado como um modelo de volatilidade estocástica, na medida em que a variância no instante  $t$  não está completamente definida pelo conjunto de informação  $\Omega_{t-1}$ . Ainda resta o termo aleatório dado por  $s_t$ , que determinará o regime naquele instante. Essa mistura de distribuições de probabilidade é ilustrada abaixo.



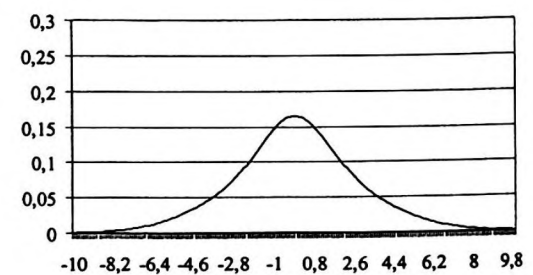
**Gráfico 1 - Distribuição normal**  
 $g_1 = 1, h_t = 2, \gamma = 0$



**Gráfico 2 - Distribuição normal**  
 $g_2 = 5, h_t = 2, \gamma = 0$



**Gráfico 3 - Mistura de normais**  
 $p(s_t = 1 | s_{t-1}) = 0,75$



**Gráfico 4 - Mistura de normais**  
 $p(s_t = 1 | s_{t-1}) = 0,25$

Nos gráficos 1 e 2 desenhamos as funções densidade de duas distribuições normais, uma para cada regime de variância, sendo que a única diferença entre elas é a escala,  $g$ . No instante  $t$ , condicionado ao conjunto de informação  $\Omega_{t-1}$ , o retorno do ativo financeiro poderá ter uma dessas distribuições de probabilidade. Contudo, como temos ainda o termo  $s_t$ , o retorno será uma mistura dessas duas distribuições. Os gráficos 3 e 4 ilustram algumas possibilidades.



## 2.2 O modelo GARCH

Como o próprio nome indica (*Generalized ARCH*), trata-se de uma generalização do modelo de Engle (1982), feita por Bollerslev (1986) na qual se adiciona à especificação da variância condicional a própria variância condicional defasada. Isto é, em um GARCH(p,q) temos a seguinte expressão:

$$(9) \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

A vantagem desse modelo em relação ao ARCH está em que ele permite captar a estrutura auto-regressiva da variância condicional com uma especificação mais parcimoniosa, tornando mais fácil sua identificação e estimação.

## 2.3 O modelo TARARCH

No modelo TARARCH (*Threshold ARCH*), introduzido independentemente por Glosten *et al* (1993) e Zakoian (1994), busca-se modelar, junto com a estrutura ARCH, a constatação empírica de que choques positivos e negativos de uma mesma magnitude produzem efeitos distintos sobre a variância condicional. O modelo TARARCH(p,q) pode ser representado da seguinte forma:

$$(10) \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i v_{t-i}^2 + \delta v_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

Na equação (10) temos que  $d_t = 1$  se  $v_t < 0$ , e  $d_t = 0$  caso contrário. Se  $\delta \neq 0$ , então temos efeitos assimétricos nos choques. Particularmente para o caso do retorno da taxa de câmbio cotada em termos de reais por dólar, o sinal esperado para  $\delta$  é negativo.

Originalmente os modelos com efeito assimétrico, como o TARARCH, foram propostos pensando no mercado acionário e levando em conta que quando surgem novas informações a respeito de determinada empresa, se essas informações forem negativas (“ruins”), no sentido de desvalorizar seus papéis e, portanto, gerar retornos negativos, a volatilidade do retorno que

se observa subsequente é maior do que aquela que se verificaria caso aquelas informações houvessem produzido uma valorização dos papéis em uma mesma magnitude. Esse efeito assimétrico recebeu o nome de "efeito alavancagem" (*leverage effect*), fazendo referência à alteração que ocorre no grau de alavancagem de uma empresa quando seu valor de mercado varia enquanto seu passivo se mantém constante. No caso em que se tem uma informação negativa, o preço da ação cai, elevando a alavancagem da firma, para um determinado passivo. Isso, por sua vez, tende a aumentar a percepção de risco dos investidores a respeito daquela firma, aumentando a volatilidade das suas ações. Nesse caso, pode-se esperar que  $\delta$  tenha sinal positivo. Assim, quando se observa um retorno negativo a variância tende a aumentar.

Mas no caso do retorno da taxa de câmbio, as notícias ruins, aquelas que depreciam o real, são as que produzem retornos positivos, dada a forma como é cotada a taxa de câmbio. Na realidade, a justificativa para efeitos assimétricos no retorno pode ter inspiração na questão da alavancagem mencionada acima se considerarmos que, por um lado, a desvalorização do real tende a dificultar a quitação de compromissos de dívida externa na medida em que encarece a mesma. E, por outro lado, esse encarecimento tende a afetar de maneira direta a aversão ao risco dos agentes, influenciando a volatilidade do mercado de câmbio. De todas formas, o importante a notar aqui é que se houver um efeito assimétrico de boas e más notícias sobre a variância do retorno da taxa de câmbio, então devemos esperar um coeficiente  $\delta$  negativo.

### 3 VOLATILIDADE IMPLÍCITA

A volatilidade implícita derivada do modelo de Black e Scholes é considerada a expectativa a respeito da volatilidade média do retorno do ativo subjacente à opção até o vencimento do contrato. Como mencionado na introdução, visto que estaremos trabalhando com a taxa de câmbio, o modelo que utilizaremos no cálculo da volatilidade implícita é o modelo GK. Escolhemos esse modelo por representar uma referência sobre a qual se avaliam outros modelos de apreçamento de opções. Ademais, sua utilização para a previsão da volatilidade tem como respaldo teórico o fato de sua fórmula de apreçamento poder ser derivada a partir de um modelo econômico de equilíbrio geral,<sup>2</sup> dando dessa forma ao termo de volatilidade do modelo um caráter de expectativa, do ponto de vista teórico.

Seja  $C_t$  o preço da opção,  $T_t$  o número de dias até o vencimento,  $E_t$  o preço de exercício,  $i_t$  a taxa de juros livre de risco,  $F_t$  o preço de ajuste do contrato futuro de dólar<sup>3</sup>,  $N(\cdot)$  a função de distribuição acumulada normal padrão e  $\sigma_t$  a volatilidade que queremos encontrar. Nesses termos, o preço de uma opção de compra sobre taxa de câmbio no modelo de GK é dado por:

$$(11) \quad c_t = \frac{1}{(1+i_t)^{T_t}} \left[ F_t N(d_t) - E_t N(d_t - \sigma_t \sqrt{T_t}) \right]$$

$$d_t = \frac{\ln(F_t / E_t)}{\sigma_t \sqrt{T_t}} + \frac{1}{2} \sigma_t \sqrt{T_t}$$

Para calcular a volatilidade implícita um dos insumos na fórmula de apreçamento é o preço da opção. Como para cada dia do mês temos vários contratos distintos de opção sendo negociados, o preço a ser utilizado será o daquela opção que esteja mais próxima do dinheiro, entendendo-se aí, a opção que tenha o preço de exercício mais próximo do dólar futuro, e cujo prazo de vencimento esteja num intervalo de dez a trinta dias úteis. As razões para utilizar esses dois critérios são duas.

<sup>2</sup> Huang e Litzenberger (1988) apresentam uma derivação do modelo de Black e Scholes (1973) em equilíbrio geral. O modelo GK pode ser derivado no mesmo arcabouço teórico de uma opção de compra sobre uma ação que paga dividendos.

<sup>3</sup> Seguindo Andrade e Tabak (2000), estamos usando o preço de ajuste do dólar futuro ao invés da cotação de fechamento do dólar à vista para minimizar os problemas de assincronia entre as negociações no mercado de câmbio à vista e no mercado de opções. Maiores detalhes serão expostos na seção 5.3.

Em primeiro lugar, desejamos usar os contratos de maior liquidez e isso é obtido com as opções que satisfaçam aqueles critérios. A existência da liquidez é importante porque uma das hipóteses do modelo GK é de que os ganhos com arbitragem nos mercados de taxa de câmbio e opções são instantaneamente exauridos, o que por sua vez requer que esses mercados funcionem como “[...] mecanismo[s] eficiente[s] [...] para montar e desmontar posições de maneira rápida [...]” (DUFFIE, 1989, p. 7), isto é, requer que os mercados sejam líquidos. Logo, contratos com pouca liquidez podem comprometer a validade daquela hipótese.

Por outro lado, como será mencionado em maiores detalhes na subseção 5.3, a escolha das opções mais próximas do dinheiro minimiza o erro de especificação do modelo GK relacionado à sua hipótese de volatilidade constante no tempo. Como mostra Fleming (1998), utilizando opções *at the money*<sup>4</sup>, é válido interpretar a volatilidade implícita como um previsor da volatilidade média do retorno durante o período de vigência do contrato.

Uma vez selecionadas as opções, calcularemos a volatilidade implícita para cada dia dentro de um intervalo de tempo no qual estaremos avaliando as previsões. Cada um dos valores gerados para cada dia dentro desse intervalo será a previsão da volatilidade média do retorno da taxa de câmbio para o período de vigência do contrato de opção. Tais valores serão obtidos resolvendo numericamente a fórmula ( 11 ) para o termo  $\sigma_t$ .

---

<sup>4</sup> Opções *at the money* são aquelas cujo preço de exercício é igual ao preço do ativo subjacente.

## 4 GARCH, MUDANÇA DE REGIME NA VARIÂNCIA DO RETORNO DA TAXA DE CÂMBIO E SUPERESTIMAÇÃO DA PERSISTÊNCIA

### 4.1 Persistência no GARCH

No modelo GARCH, o efeito que um choque no instante  $t-s$  tem sobre a variância condicional em  $t$  depende da magnitude dos seus coeficientes. Seguindo o trabalho de Lamoureux e Lastrapes (1990a), consideremos um GARCH(1,1). A partir da expressão em ( 9 ) pode-se escrever a variância condicional da série da seguinte forma:

$$(12) \quad h_t = \alpha_0 + \lambda h_{t-1} + \alpha_1 e_{t-1}, \quad \lambda = \alpha_1 + \beta_1, \quad e_{t-1} = v_{t-1}^2 - h_{t-1}$$

Manipulando recursivamente a equação ( 12 ) temos que:

$$(13) \quad h_t = \sigma^2 + \alpha_1 [e_{t-1} + \lambda e_{t-2} + \lambda^2 e_{t-3} + \dots + \lambda^{s-1} e_{t-s} + \dots]$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 / (1 - \lambda)$$

Pela equação ( 13 ) é possível perceber o papel dos coeficientes  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  na persistência de um choque sobre  $h_t$ . Quanto maior for  $\lambda$ , por mais tempo permanecerá um choque exercendo influência sobre a variância. Uma forma bastante clara de apreciar a magnitude dessa persistência é calculando a meia-vida do choque, isto é, calculando o tempo necessário para que o efeito de um choque caia pela metade. A partir da equação ( 13 ) e assumindo que a unidade de tempo seja o dia, pode-se mostrar que o número de dias necessários para que o efeito do choque sobre a variância condicional caia pela metade - sua meia-vida (MH) - é dado por:

$$(14) \quad MH = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \lambda}$$

Pela expressão ( 14 ) fica nítido o papel de  $\lambda$  sobre a persistência do choque.

Por meio de simulações de Monte Carlo e de uma análise empírica com retornos diários de ações, Lamoureux e Lastrapes (1990a) mostram que se ocorrerem mudanças de regime na variância não-condicional  $\lambda$  passa a ser superestimada no GARCH, alcançando valores acima de 0,97, correspondendo isto a meias-vidas maiores que 23 dias. Ademais, de acordo com os autores, essa superestimação é mais comum acontecer quando se aplica o modelo a séries financeiras com frequência diária e com horizontes de tempo relativamente longos, com mais de 2000 observações, por exemplo, uma vez que as chances de uma série longa conter mudanças de regime são maiores do que em uma série mais curta. De fato, em um outro estudo por eles mesmos realizado (Lamoureux e Lastrapes, 1990b), onde se estima o modelo GARCH(1,1) sobre os retornos de 20 ações, com apenas 300 observações cada, obtém-se um  $\lambda$  médio de 0,728, representando meias-vidas em torno 3 dias.

## **4.2 Mudança de regime e a superestimação da persistência**

Para ilustrar o possível problema de persistência que pode existir em estimar o modelo GARCH para nossa série de taxa de câmbio, realizaremos o seguinte exercício inspirado no que foi feito por Lamoureux e Lastrapes (1990 a,b). Tomaremos a série de retorno da taxa de câmbio entre REAL/USD e estimaremos o modelo SWARCH com esses dados. Em seguida, empregaremos o modelo estimado para identificar os distintos regimes de volatilidade ao longo do tempo e separar a amostra de acordo com o regime identificado, criando intervalos onde acreditamos que apenas um determinado regime ocorreu. Em cada um desses intervalos o GARCH será estimado e sua meia-vida computada. Os valores obtidos serão comparados com a meia-vida obtida na estimação do GARCH feita sobre toda a amostra.

### **4.2.1 Inferência a respeito dos regimes de volatilidade**

A série de taxa de câmbio que estaremos utilizando possui frequência diária, começa em 3 de março de 1999 e termina em 16 de abril de 2004, totalizando 1283 observações. Para identificar os distintos regimes de volatilidade que ocorreram ao longo do tempo estimamos o



SWARCH e obtivemos como melhor especificação um AR(1)-ARCH(3) com dois regimes e distribuição t-Student<sup>6</sup>. Com esse modelo calculamos as “probabilidades suavizadas”:

$$(15) \quad p(s_t = r | y_T, y_{T-1}, \dots, y_0), \quad r = 1, \dots, k$$

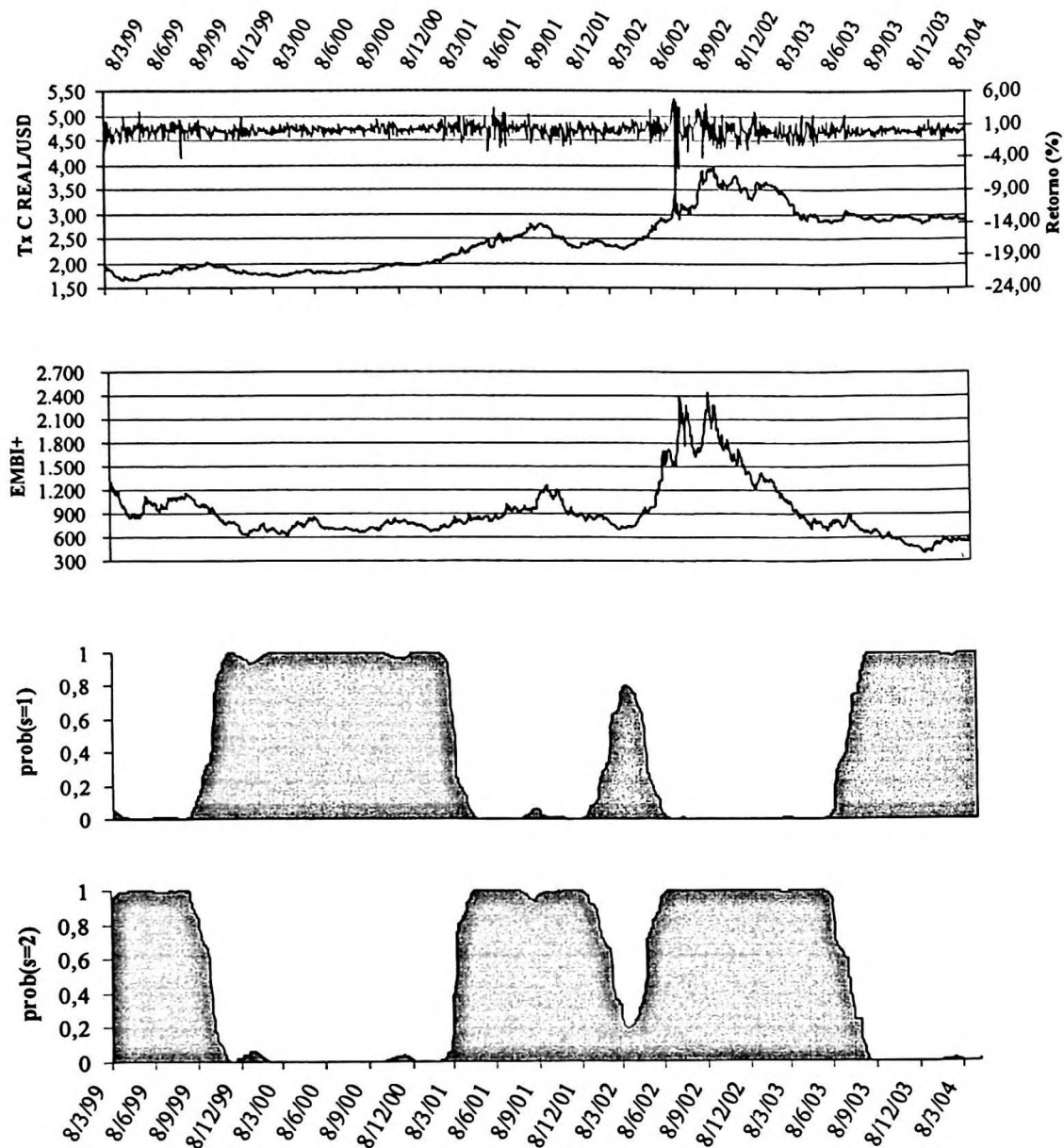
Essas probabilidades nos permitem fazer uma inferência sobre em qual regime estava a variância no instante  $t$ , associando a esse instante aquele regime que apresentar a maior probabilidade. Os detalhes a respeito do algoritmo que calcula essa quantidade podem ser encontrados em Hamilton (1994). Apenas notemos que a inferência sobre um determinado dia,  $t$ , é feita utilizando todos os dados da amostra. Isto é, leva-se em conta o que aconteceu antes e depois de  $t$  para indicar as probabilidades de cada estado ter ocorrido naquele instante.

Na tabela 1 temos algumas estatísticas do retorno da taxa de câmbio. Por sua vez, o gráfico 5 traz as séries de taxa de câmbio e de seu retorno para o período em questão, assim como o índice EMBI+ e as probabilidades suavizadas. Como se pode observar, os retornos se aglomeram em valores de alta e baixa oscilação, sugerindo, dessa forma, o uso de modelos do tipo ARCH. Contudo, observando essas aglomerações, vemos que suas amplitudes variam substancialmente ao longo da amostra. Períodos de pequena variação se alternam com momentos em que o retorno assume valores que ultrapassam cinco desvios-padrão. Por isso, o uso do SWARCH, permitindo maiores oscilações do retorno do que as que seriam causadas por um termo aleatório apenas, como é o caso no ARCH, pode ser mais adequado.

**Tabela 1 – Retorno da taxa de câmbio**

<i>Média (%)</i>	0,023	<i>Jarque-Bera</i>	4180,8
<i>Desvio-padrão (%)</i>	1,026	<i>P-valor</i>	0,000

<sup>6</sup> Maiores detalhes a respeito da identificação e estimação do modelo, assim como sua escolha em detrimento de especificações sem mudança de regime, serão oferecidos mais adiante.



**Gráfico 5 - Taxa de câmbio, retorno diário do REAL/USD, EMBI+ Brasil e probabilidades suavizadas (SWARCH)**

Fonte (taxa de câmbio; EMBI +): BANCO CENTRAL DO BRASIL; BLOOMBERG

Lembrando que  $s = 1$  indica o regime de menor variância, vemos que aproximadamente entre novembro de 1999 a março de 2001 esse regime tem uma probabilidade elevadíssima de ter ocorrido. Trata-se, na realidade, de um período de relativa “tranqüilidade” no mercado de câmbio. Calculando os desvios-padrão do retorno para esse intervalo de tempo e para o



momento que o precede consegue-se caracterizar bem tal “tranqüilidade” com valores aproximados de 0,50% e 1,12% (ao dia útil), respectivamente.

Esse comportamento do mercado de câmbio pode ser atribuído, pelo menos em parte, a uma conjunção de fatores internos que foram capazes de melhorar as expectativas dos agentes com relação às variáveis macroeconômicas fundamentais brasileiras, principalmente quanto à inflação. A implementação do sistema de metas de inflação, somada à execução de uma política fiscal austera – o resultado consolidado do setor público passou de um valor praticamente nulo em 1998, para 3,3% do PIB em 1999 e 3,5% em 2000 – permitiram que o país mantivesse sob controle o processo inflacionário cujas expectativas haviam se deteriorado substancialmente após a desvalorização cambial de janeiro de 1999 e do reajuste dos preços administrados, por volta de junho (ver FACHADA, 2001 e MINELLA *et al*, 2003).

Por sua vez, no período que se estende de abril de 2001 até janeiro de 2002, o retorno da taxa de câmbio entra no regime de elevada volatilidade, com um desvio padrão de 1,11%. Para esse momento, podemos apontar a crise energética brasileira, o desaquecimento da economia mundial, a crise argentina e os atentados terroristas de 11 de setembro como fatores que trouxeram grande volatilidade para o mercado de câmbio doméstico.

Um dado interessante de se observar nessas transições de regimes de variância é o comportamento do risco país medido pelo índice EMBI+, pois ele serve como um “bom indicador de crises financeiras” (MINELLA *et al*, 2003, p. 1036), podendo sinalizar momentos de maior e menor volatilidade no mercado cambial. Seria um ponto positivo para o ajuste obtido pelo modelo SWARCH e para a inferência que ele faz dos regimes de volatilidade, se fosse possível estabelecer uma relação direta entre a evolução do risco país e a volatilidade no retorno do câmbio. E, de fato, observando o gráfico desse índice, conseguimos fazer uma associação entre os grandes movimentos da série e as mudanças de regime relatadas.

Entre setembro e dezembro de 1999, vemos como a mudança para o regime de baixa volatilidade é acompanhada de um declínio do risco país, de um patamar de 1000 pontos-base para um nível em torno de 750. Posteriormente, por volta de março de 2001, quando ocorre uma nova alteração de regime, é possível apreciar como o índice toma uma trajetória

ascendente e retorna a oscilar entre os 900 e 1200 pontos. Em seguida, durante um pequeno intervalo de tempo entre março e maio de 2002, quando a variância retorna para seu regime de baixa, a série volta a oscilar entre 600 e 900 pontos, até se elevar fortemente a partir de junho acompanhada de uma nova mudança de regime, mantendo-se em patamares elevados até maio de 2003.

Assim, parece que os momentos de *stress* e de tranquilidade no mercado de dívida externa, e que se refletem no nível da série do EMBI+, correspondem aos mesmos momentos no mercado de câmbio. E isso, por sua vez, sugere que a inferência dos regimes de volatilidade cambial talvez possa servir para identificar diferentes estados para o risco soberano. Porém, essa é uma questão que demanda uma investigação à parte.

Um outro aspecto interessante dos gráficos acima a se destacar é que, levando em conta os possíveis efeitos assimétricos do retorno do câmbio sobre sua volatilidade, os quais se verificarão quando apresentarmos as estimações na seção 6, vemos que o que foi discutido anteriormente sobre o modelo TARARCH responder de maneira mais intensa a choques positivos do que negativos parece ocorrer nos dados. Fazendo uma inspeção dos gráficos do câmbio e seu retorno, quando temos a taxa se apreciando (produzindo retornos negativos para as posições compradas em dólar), a oscilação do retorno aparenta ser menor. Ademais, observando as probabilidades suavizadas, é possível perceber que quando o real se deprecia (a taxa aumenta e os retornos são positivos) a probabilidade do regime ser de alta volatilidade é, em geral, maior. Isso indica que há uma certa “coerência” entre o SWARCH e o TARARCH, na medida em que, quando ocorre um retorno positivo, o modelo TARARCH indica que deve haver maior volatilidade e o modelo SWARCH, por sua vez, atribui uma maior probabilidade ao regime de elevada variância estar vigorando naquele momento, com o mesmo acontecendo quando o retorno é negativo. Logo, parece ser possível estabelecer uma relação entre assimetria e mudança de regime na variância condicional.

#### 4.2.2 Superestimação da persistência

Resumindo as evidências apresentadas acima, tivemos uma mudança de regime por volta de março/abril de 2001, sendo o período precedente, iniciado em novembro de 1999 caracterizado por um regime de baixa volatilidade e o período subsequente, até janeiro de

2002, governado por um estado de elevada variância. Com essas informações, o que fizemos foi estimar quatro modelos GARCH(1,1) gaussianos. Em um deles usamos os dados do período de baixa volatilidade, com 351 observações, enquanto que em outro usamos os dados subseqüentes, até janeiro de 2002, com 208 observações, para pegar o regime de alta. Por sua vez, os outros dois modelos foram estimados com os dados de ambos os períodos, de novembro de 1999 a janeiro de 2002. A diferença entre eles está, no entanto, em que ao quarto modelo foi adicionada uma variável *dummy* de intercepto na equação da variância, refletindo o momento em que a amostra passa do regime de baixa para o de alta volatilidade e representando, portanto, o instante em que a variância não-condicional muda. Dessa forma, esperamos ver se a persistência do GARCH é afetada (no sentido de ser menor que a do terceiro modelo) quando fazemos com que o intercepto da equação se altere ao longo do tempo<sup>6</sup>. Os resultados dessas estimações são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2 – Persistência no GARCH

	$Q(1)^*$	ARCH-LM*	$\alpha_1$	$\beta_1$	<i>dummy</i>	$\lambda$	MH
<b>Modelo 1</b>	0,001	0,001	0,127 (0,063)	0,730 (0,137)		0,857	5,492
<b>Modelo 2</b>	0,009	0,010	0,170 (0,101)	0,708 (0,154)		0,878	6,327
<b>Modelo 3</b>	0,000	0,000	0,160 (0,037)	0,815 (0,043)		0,975	28,378
<b>Modelo 4</b>	0,000	0,000	0,149 (0,055)	0,714 (0,101)	0,129 (0,062)	0,863	5,704

Desvios-padrão entre parênteses.

\* *p*-valor

Nesse exercício temos dois resultados que merecem ser destacados. O primeiro deles é que nas três amostras que utilizamos encontramos correlação nos quadrados dos resíduos e o teste ARCH LM rejeitou a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH. Logo, a utilização de amostras menores não resultou na perda dos efeitos ARCH nos resíduos da série. Contudo, o segundo resultado é o mais interessante. Nos dois primeiros modelos, os  $\lambda$ 's encontrados

<sup>6</sup> Essa maneira de captar a mudança de regime no GARCH, por meio de variáveis *dummy*, é utilizada por Lamoureux e Lastrapes (1990a). Ela também é empregada por Almeida e Pereira (1999) em um estudo com ações do índice Bovespa. Mas, como é observado em ambos os trabalhos, trata-se de uma representação *ad hoc*, dado que os instantes das mudanças de regime são escolhidos pelos autores. Em nosso caso, baseamos as escolhas nas probabilidades suavizadas. O dia escolhido para a ocorrência da mudança de regime foi 14 de março de 2001, dia em que a probabilidade do regime de baixa variância ter ocorrido fica menor que a de alta. Contudo dias alternativos foram considerados sem que houvesse mudanças significativas nos resultados.

foram de aproximadamente 0,86 e 0,88, correspondendo a meias-vidas de 5,49 e 6,33 dias. Já no terceiro modelo, o  $\lambda$  ficou em torno de 0,97, produzindo 28,38 de meia-vida. Isto é, quando estimamos o GARCH em uma série que apresenta indícios de ter sofrido uma mudança de regime, a persistência aumenta consideravelmente com relação aos outros modelos onde supostamente não ocorreu a mudança, corroborando a hipótese de superestimação dos parâmetros. E essa hipótese é ainda reforçada pelos resultados do modelo 4, os quais mostram como o coeficiente da variável *dummy* é significativo e como a persistência se reduz, fazendo com que a meia-vida passe a ser de 5,70 dias.

Não obstante os resultados acima irem ao encontro das hipóteses e resultados de Lamoureux e Lastrapes (1990a), note-se que o que foi feito aqui é apenas um exercício sugestivo do que pode ocorrer com a estimação do modelo GARCH sob mudanças de regime, pois não realizamos testes para averiguar se as diferenças apresentadas acima são estatisticamente significantes.

## 5 PROCEDIMENTO DE COMPARAÇÃO DAS ESTIMATIVAS DE VOLATILIDADE

A maneira como vamos comparar as formas de previsão da volatilidade será respondendo a duas questões. Na primeira delas queremos saber se uma estimativa é melhor do que a outra em explicar uma medida *ex post* da volatilidade. Para essa pergunta, a resposta pode ser dada fazendo uso dos seguintes modelos de regressão:

$$(16) \quad \sigma_t = a_i + b_i \sigma_t^i + \varepsilon_t^i$$

$$(17) \quad \sigma_t = a_h + b_h \sigma_t^h + \varepsilon_t^h$$

Nas equações acima  $\sigma_t$  é uma medida da volatilidade realizada e  $\sigma_t^i$  e  $\sigma_t^h$  são as volatilidades implícita e histórica. Sendo estatisticamente diferentes de zero os coeficientes de inclinação, os  $R^2$  dos modelos (16) e (17) nos fornecem uma medida sobre quanto cada estimativa explica da volatilidade realizada.

A segunda pergunta que buscaremos responder é se as duas medidas de volatilidade se complementariam para explicar a volatilidade *ex post* ou se uma delas se tornaria dispensável uma vez que a outra estimativa estivesse sendo empregada. Nesse caso, a resposta pode ser obtida a partir do seguinte modelo:

$$(18) \quad \sigma_t = a + b_i \sigma_t^i + b_h \sigma_t^h + \varepsilon_t$$

No modelo acima, se um dos coeficientes "b" não for estatisticamente diferente de zero, então a estimativa associada a esse coeficiente não estará acrescentando informação para explicar a volatilidade realizada que já não esteja presente na outra estimativa.



### 5.1 Volatilidade realizada

Para nossos testes comparativos das previsões feitas pelas volatilidades histórica e implícita vamos usar como *proxy* da volatilidade realizada duas medidas de volatilidade. A primeira delas é o desvio-padrão do retorno da taxa de câmbio,  $SD_t$ , calculado no instante  $t$  para o intervalo de tempo de vigência da opção,  $T_t$ , subsequente a  $t$ . Sendo  $S_t$  a taxa de câmbio à vista de fechamento no dia  $t$ , temos:

$$(19) \quad SD_t = \sqrt{\frac{1}{T_t - 1} \sum_{k=1}^{T_t} (r_{t+k} - \bar{r}_t)^2}$$

$$\bar{r}_t = \frac{1}{T_t} \sum_{k=1}^{T_t} r_{t+k} \quad e \quad r_{t+k} = \ln \frac{S_{t+k}}{S_{t+k-1}}$$

A outra medida de volatilidade é o estimador de valor extremo de Parkinson (1980),  $PK_t$ , o qual é mais eficiente que o desvio-padrão sob a hipótese de que  $\ln(S_t)$  segue um movimento browniano. Esse estimador se baseia no uso das cotações máxima e mínima ocorridas durante o pregão:

$$(20) \quad PK_t = \sqrt{\frac{1}{4T_t \ln(2)} \sum_{k=1}^{T_t} (H_{t+k} - L_{t+k})^2}$$

Na equação (20)  $H_s$  e  $L_s$  são os logaritmos naturais das cotações máxima e mínima no dia  $s$ . A vantagem deste estimador em relação ao desvio-padrão está em que nele usam-se informações “melhores” sobre a dispersão dos preços, oferecendo uma medida mais precisa de quanto pode ser o movimento no valor do ativo durante o pregão. Se, por exemplo, o valor da taxa de câmbio fechar em um dia a R\$2,70, abrir no dia seguinte a esse preço, oscilar entre uma máxima de R\$2,72 e uma mínima de R\$2,69, e encerrar em R\$2,70, novamente, pode-se apreciar como o estimador de Parkinson consegue captar a oscilação efetiva da taxa de câmbio enquanto que o desvio-padrão, baseado em dados de fechamento, não. De fato, em função dessa diferença a respeito dos dados empregados, veremos abaixo que os formatos dos gráficos das séries de volatilidade realizada são bastante distintos.

Comparações empíricas entre esses dois estimadores são oferecidas em Beckers (1983) e Wiggins (1991 e 1992). Como a eficiência do estimador de Parkinson (1980) é derivada pelo autor assumindo um processo estocástico contínuo, no tempo e nas variações do preço, esses estudos buscam verificar se na prática, com dados discretos, essa eficiência se mantém, obtendo resultados a favor desse estimador.

## 5.2 Volatilidade histórica

Como estamos utilizando dados diários dos retornos, as previsões de volatilidade feitas pelos modelos GARCH, TARCH e SWARCH são para um dia apenas e referem-se à variância condicional. Contudo a volatilidade implícita nos fornece uma previsão da volatilidade média para período de vigência da opção, sendo a volatilidade entendida como a raiz quadrada da variância. Logo, o que fizemos, seguindo Jorion (1995), foi gerar a cada dia as previsões (“para fora da amostra”) da variância para os dias subseqüentes até o vencimento da opção e tirar a média dessas previsões. Feito isso, extraímos ainda a raiz quadrada. Algebricamente, sendo  $h_{i,t}^e$  a expectativa para a variância condicional do instante  $i$  calculada em  $t$ , a volatilidade histórica em  $t$  para o período de vigência da opção que vence no  $T$ -ésimo dia é dada por:

$$(21) \quad \sigma_i^h = \sqrt{\frac{1}{T-t} \sum_{i=t+1}^T h_{i,t}^e}$$

## 5.3 Regressores gerados

É preciso destacar que, para estimar as regressões acima, estaremos empregando variáveis geradas como regressores. Isso traz duas complicações que precisam ser levadas em conta.

A primeira delas refere-se ao fato de que a volatilidade implícita contém erros de medida, e que tais erros podem tornar as estimativas dos parâmetros inconsistentes. Para contornar esse problema, vamos recorrer ao método de estimação por variáveis instrumentais, seguindo Christensen e Prabhala (1998). Contudo, para que possamos implementar esse método, é preciso que entendamos o que está gerando os erros de medida para que busquemos os

instrumentos adequados. Para que determinadas variáveis sirvam como instrumentos é necessário que elas sejam correlacionadas (parcialmente) com os regressores que elas estão instrumentalizando e que sejam não correlacionadas com os erros de medida daqueles regressores. Por isso devemos entender como surgem esses erros.

A existência dos erros de medida é constatada por autores como Day e Lewis (1992), Fleming (1998), Christensen e Prabhala (1998), Blair *et al* (2001) e Chang *et al* (2002), entre outros. Em síntese, podemos enumerar duas razões que podem estar causando esse erro:

- a) *Assincronia das cotações*: a fórmula de GK é derivada impondo-se a condição de que não existem ganhos de arbitragem entre os valores da opção, do ativo subjacente e da taxa de juros livre de risco em um determinado instante do tempo. Logo, para um dado nível de volatilidade e taxa de juros, os valores do ativo objeto e da opção ficam “pegados” um ao outro. Dessa forma, para que tenhamos a medida correta da volatilidade que está sendo prevista pelo mercado é preciso que utilizemos na fórmula de GK o preço da opção e da taxa de câmbio, assim como o valor da taxa de juros, coletados em um mesmo instante de tempo. Contudo, se dados de fechamento são utilizados, pode ocorrer de as cotações empregadas terem sido produzidas em momentos distintos nos mercados de câmbio e opções e, conseqüentemente, não refletirem a relação de não-arbitragem que deveria existir entre esses mercados para um dado nível de volatilidade previsto pelos agentes. E se esse “desalinhamento” de preços estiver de fato ocorrendo, ele se transmitirá ao valor da volatilidade implícita que estaremos calculando, produzindo, dessa forma, uma expectativa que não refletirá fielmente a verdadeira expectativa do mercado;
- b) *Erro de especificação do modelo*: se o modelo de GK não for o modelo adequado para o apreçamento das opções de câmbio, a volatilidade implícita que ele produz não será exatamente a expectativa do mercado para a volatilidade futura.

Com relação ao item (a), procuramos mitigar o possível efeito que a assincronia das cotações pode ter sobre o cálculo da volatilidade implícita usando o preço de ajuste do dólar futuro descontado pelo custo de carregamento (*cost of carry*) no lugar da cotação de fechamento do dólar à vista. Como estamos usando a cotação de fechamento da opção e sendo o preço de ajuste uma média ponderada das cotações do dólar futuro nos últimos quinze minutos de



pregão, o erro tende a ser menor. Essa é a abordagem adotada por Andrade e Tabak (2000) e Chang *et al* (2002).

Quanto ao item (b), é preciso notar que a fórmula de GK é derivada assumindo-se certas hipóteses a respeito das variáveis relevantes na determinação do preço de uma opção, e que a inadequação de alguma dessas hipóteses é o que produz os erros de especificação. Dentre as hipóteses do modelo, estão os pressupostos de que a taxa de juros livre de risco é constante e de que o retorno da taxa de câmbio possui distribuição normal. Porém, para a aplicação que se faz aqui da fórmula de GK, a hipótese que mais sugere a possível utilização de uma especificação incorreta é a de que a volatilidade do retorno da taxa de câmbio é constante, uma vez que existem fortes evidências do contrário, a começar pela própria concepção do modelo GARCH. Na realidade, há uma aparente incoerência em utilizar a volatilidade implícita como previsor da volatilidade, dado que o modelo assume que esse parâmetro é constante no tempo, e essa incoerência reforça a idéia de que se está usando uma especificação equivocada.

Contudo, pode-se mostrar, seguindo os trabalhos de Cox e Rubinstein (1985) e Lamoureux e Lastrapes (1993), que, sob certas condições, se assumirmos que a volatilidade é variante no tempo, o cálculo desse parâmetro a partir da fórmula de GK é aproximadamente igual à volatilidade média esperada pelo mercado para o retorno da taxa de câmbio para o período de vigência do contrato, considerando opções *at the money* (CHRISTENSEN; PRABHALA, 1998)<sup>7</sup>. Logo, mesmo havendo erro de especificação, continua sendo válido empregar a volatilidade implícita como uma previsão da volatilidade média futura, ainda que sendo uma aproximação.

Porém, não obstante as considerações feitas acima, o erro de medida continua a existir, sendo necessário buscar um instrumento para a volatilidade implícita. Um candidato natural é a volatilidade implícita defasada  $\sigma_{t-1}^i$ . É pouco provável que ela esteja correlacionada com o erro de medida em  $\sigma_t^i$ . Considerando o problema citado em (a), não há razão para acreditar que exista uma correlação entre o erro em um instante e o erro no instante seguinte. A diferença, devida à assincronia, entre a cotação fornecida pelo modelo de GK para um dado

---

<sup>7</sup> No seu artigo, Christensen e Prabhala fazem essa afirmação com relação ao modelo de Black e Scholes e não de GK. Contudo pode-se mostrar que a afirmação também é válida para este último modelo. Uma demonstração sucinta desse resultado para a fórmula de Black e Scholes pode ser encontrada em Fleming (1998).

preço do ativo objeto e o preço da opção que de fato é obtido nos dados não deve apresentar um padrão de comportamento sistemático ao longo do tempo. Por outro lado, os erros de medida associados ao item (b) são, em grande medida, minimizados pela forma como escolhemos os contratos, buscando as opções mais próximas do dinheiro.

A segunda complicação referente ao uso de regressores gerados diz respeito à validade dos testes sobre os coeficientes das regressões em ( 17 ) e ( 18 ), pois as previsões da volatilidade histórica são produzidas com os parâmetros estimados e não com os “verdadeiros” parâmetros dos modelos de série de tempo.

Sob certas condições bastante gerais, se os parâmetros são estimados de maneira consistente, o uso de regressores gerados com esses parâmetros produz coeficientes também consistentes nas regressões, sejam elas estimadas por OLS ou 2SLS. Contudo, de um modo geral, os desvios-padrão desses coeficientes precisam ser corrigidos para dar conta da estocasticidade, não apenas das variáveis utilizadas para produzir os regressores, que em nosso caso foi apenas o retorno da taxa de câmbio, como também da aleatoriedade dos parâmetros.

Porém, segundo Wooldridge (2002, p. 117), existe um caso em que os desvios-padrão produzidos pelo método de estimação de variáveis instrumentais com regressores gerados são válidos. Esse caso ocorre se a hipótese nula que estivermos testando for de que os coeficientes da regressão são iguais a zero. Sob essa hipótese, as distribuições dos coeficientes estimados nos modelos ( 17 ) e ( 18 ) não dependem das distribuições dos estimadores dos parâmetros (WOOLDRIDGE, 2002, p. 118). Como nossos testes estarão avaliando a hipótese nula de que os coeficientes estimados são iguais a zero, podemos confiar nos desvios-padrão estimados pelo método de variáveis instrumentais.

#### **5.4 Sobreposição de dados e autocorrelação**

Na construção das volatilidades realizadas e históricas ocorre sobreposição de dados devido à necessidade de produzir estimativas e previsores para a volatilidade média do ativo em certo período. Essa sobreposição, por sua vez, gera autocorrelação nos resíduos das regressões, pois causa inércia nos dados.

Por outro lado, no caso da volatilidade implícita, Jorion (1995) e Fleming (1998), entre outros, notam que o ciclo de vencimento dos contratos também tende a causar autocorrelação nos resíduos. Como descrito anteriormente, no cálculo da volatilidade implícita escolhemos um contrato de opção, o qual tem uma data de vencimento específica que determina o período que a volatilidade implícita está prevendo. Por exemplo, se no dia primeiro de julho escolhemos o contrato que vence no dia primeiro do mês seguinte, então a volatilidade calculada com essa opção é a volatilidade média esperada para esse período. Se ao dia seguinte, continuamos a usar um contrato que vence no dia primeiro do próximo mês, então, essa segunda volatilidade calculada vai ser uma previsão para um período de tempo praticamente igual ao anterior, à diferença de um dia. E essa sobreposição de períodos tende a produzir autocorrelação nos resíduos. Por essas razões, vamos usar a matriz de variância-covariância de Newey e West (1987) no cálculo de todos os desvios-padrão.

87604

## 6 DESCRIÇÃO DOS DADOS E RESULTADOS

### 6.1 Dados

Relembrando o mencionado na subseção 4.2.1, nossa série de taxa de câmbio se estende de 3 de março de 1999 a 16 de abril de 2004. Trata-se da cotação do dólar americano (PTAX800) coletada junto ao Banco Central do Brasil. No total a série possui 1283 observações.

Ainda junto ao Banco Central, coletamos os dados referentes à taxa de juros ao dia útil do certificado de depósito interbancário (CDI), com frequência diária, para o período de primeiro de julho de 2003 a 16 de abril de 2004. Também para esse mesmo período, obtivemos junto à Bolsa de Mercadorias e Futuros os preços de ajuste do contrato futuro do dólar e os preços de fechamento de opções de compra do dólar. Para este segundo contrato foram coletados junto com os preços de fechamento, as datas de vencimento e os preços de exercício. Finalmente, ainda para o mesmo período, coletamos junto a Reuters as cotações máxima e mínima do dólar comercial para cada dia útil. Cada uma dessas quatro séries possui 197 observações.

Para computar a volatilidade histórica dividimos nossa série do retorno da taxa de câmbio em duas partes, com a primeira delas abrangendo o período de 3 de março de 1999 até primeiro de julho de 2003 (1087 observações). Com essa primeira parte da amostra estimamos os três modelos de séries de tempo para a variância condicional do retorno e, em seguida, usamos a segunda parte da amostra, composta de 197 observações, para realizar as previsões, feitas para “fora da amostra”.

Um aspecto relevante a se notar é que, muito embora nossas previsões foram feitas para “fora da amostra”, fizemos atualizações nos dados à medida que avançamos ao longo dos 197 dias. Dessa forma, como ilustração, para fazer a previsão no dia primeiro de julho para os próximos  $n$  dias seguintes, utilizamos os dados dos retornos disponíveis até o dia primeiro e fizemos  $n$  previsões para fora da amostra. Para a previsão feita no dia dois, fizemos a mesma coisa mas

levando em conta os dados disponíveis até esse dia. Assim se seguiu até 16 de abril. No entanto, esse processo iterativo foi realizado sem reestimar os modelos<sup>8</sup>.

## 6.2 Estimação dos modelos de volatilidade histórica

Foram testadas várias especificações para o modelo SWARCH<sup>9</sup>. Estimamos o modelo com diferentes equações para a média, para a variância condicional e com distintas hipóteses a respeito da distribuição do termo aleatório  $v_t$ . Também alteramos o número de estados que o processo poderia ter, estimando o modelo com dois, três e quatro estados. Baseando-se nos critérios de informação de Akaike e de Schwartz e analisando os correlogramas dos resíduos e dos quadrados dos resíduos optamos pela seguinte especificação, onde  $\eta$  são os graus de liberdade da distribuição *t* – *Student*:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \gamma + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= u_t \sqrt{g_s}, \quad s = 1, 2. \\
 (22) \quad u_t &= v_t \sqrt{h_t}, \quad v_t \sim iid \text{ Student } (\eta) \\
 h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_{t-i}^2
 \end{aligned}$$

Por sua vez, na estimação dos modelos GARCH e TARCH continuamos a empregar os critérios de escolha mencionados acima, obtendo um termo auto-regressivo para as equações do nível. Para as especificações das variâncias, as estimações indicaram o uso de um termo auto-regressivo e um termo de média móvel. Assim, os resultados são um GARCH(1,1) e um TARCH(1,1). A tabela 3 expõe os modelos estimados.

<sup>8</sup> Também criamos uma série de volatilidade histórica reestimando os modelos sempre que mudava o contrato de opção e os resultados não produziram diferenças qualitativas. Por isso empregamos os mesmos parâmetros para toda a amostra.

<sup>9</sup> O modelo SWARCH foi estimado com o programa Ox, versão 3.4 (ver [www.doornik.com](http://www.doornik.com) e DOORNIK, 2002) e com o auxílio do pacote M@ximize, versão 1.0, (ver LAURENT; URBAIN, 2003). A rotina em GAUSS foi fornecida por James Hamilton.

Tabela 3 – Coeficientes estimados

	<i>GARCH</i>	<i>TARCH</i>	<i>SWARCH</i>
$\gamma$	0,012 (0,025)	0,040 (0,026)	0,015 (0,020)
$\phi_1$	0,082 (0,031)	0,090 (0,032)	0,099 (0,033)
$\alpha_0$	0,023 (0,005)	0,020 (0,005)	0,158 (0,025)
$\alpha_1$	0,202 (0,023)	0,254 (0,032)	0,134 (0,043)
$\alpha_2$			0,242 (0,057)
$\alpha_3$			0,143 (0,051)
$\beta_1$	0,789 (0,022)	0,809 (0,022)	
$\delta$		-0,137 (0,032)	
$g_2$			4,448 (0,696)
$\eta$			14,646 (5,934)
<i>AIC</i>	2,562	2,548	2,535
<i>SBC</i>	2,585	2,576	2,581
<i>Log-like.</i>	-1386,00	-1377,80	-1362,66
<i>Obs.</i>	1086	1086	1083

Desvios-padrão entre parênteses

Com relação ao ajuste dos modelos aos dados, vemos que com base no critério de informação de Akaike, o SWARCH é o que tem a melhor aderência. Por outro lado, considerando o critério de Schwartz, o TARCH é quem se destaca. De todas formas, no entanto, os valores obtidos indicam que a modelagem da variância condicional do retorno da taxa de câmbio deve levar em conta especificações não-lineares. De fato, quanto ao TARCH, seu termo de assimetria, denotado por  $\delta$ , mostra-se estatisticamente diferente de zero e com o sinal esperado, negativo, indicando que movimentos de apreciação do real frente ao dólar tendem a produzir volatilidades menores do que movimentos de depreciação de uma mesma magnitude. Já no que se refere à mudança de regime, vemos que o coeficiente multiplicador da variância,  $g_2$ , é estatisticamente diferente de um aos níveis de significância usuais, sugerindo, portanto, a existência de um segundo regime de volatilidade.



Por outro lado, os resultados da tabela acima mostram que os coeficientes do GARCH e do TARARCH somam aproximadamente 0,99 e 0,93, respectivamente. Como era de se esperar, dada a discussão feita na seção 4, temos valores elevados para a persistência dos choques sobre a variância condicional. De fato, testando a hipótese de que esses coeficientes somam um, obtivemos os seguintes resultados:

**Tabela 4 – Testes de raiz unitária**

	<i>Hipótese nula</i>	<i>P-valor</i>
<i>GARCH</i>	$\alpha_1 + \beta_1 = 1$	0,409
<i>TARCH</i>	$\alpha_1 + \delta/2 + \beta_1 = 1$	0,599

Nos testes acima assumimos como hipótese nula que os modelos GARCH e TARARCH possuem uma raiz unitária. Particularmente, o GARCH sob essa hipótese é conhecido como IGARCH (*Integrated GARCH*). Como se pode observar, os dados da tabela 4 indicam que a variância condicional se comporta como um processo I(1). Esses são resultados similares aos obtidos por Issler (1999) com a série de retorno da taxa de câmbio para um período anterior. Mas, como nota o autor e é discutido em Hamilton e Susmel (1994), a ocorrência de mudanças de regime na volatilidade tende a indicar a presença de uma raiz unitária “espúria” nos modelos GARCH. E, como mencionado anteriormente, a significância do termo  $g_2$  sugere que a alternância de regimes ocorre.

### 6.3 Raiz unitária e não-linearidade

Para que as regressões de poder de predição e conteúdo informacional sejam válidas é preciso verificar se as séries utilizadas são estacionárias. Quanto às volatilidades históricas, os dados apresentados na tabela 4 poderiam nos levar a crer que as séries associadas aos modelos GARCH e TARARCH apresentariam uma raiz unitária. Contudo, o teste ADF de Dickey e Fuller (1979) e o teste de Phillips e Perron (1988) rejeitaram essa hipótese para ambas as séries. Muito embora, esses resultados pareçam contraditórios, é importante destacar o significado da raiz unitária na variância condicional.



Consideremos o modelo GARCH(1,1) dado pela seguinte equação:

$$(23) \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 v_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Tomando a esperança condicional ao conjunto de informação disponível em  $t-1$  e assumindo que  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , temos o seguinte:

$$(24) \quad E_{t-1}(h_t) = \alpha_0 + h_{t-1}$$

Logo, a variância condicional toma a forma de um *random walk* com *drift*. Porém, como mostra Nelson (1990), a analogia com os processos ARIMA não é exata. Manipulando recursivamente a equação (23) com  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , temos que:

$$(25) \quad h_t = \frac{\alpha_0}{1-\beta_1} + (1-\beta_1) \sum_{i=0}^{\infty} \beta_1^i v_{t-i-1}^2$$

Pela equação (25) vemos que os efeitos dos choques se dissipam ao longo do tempo, ao contrário do que ocorre em um processo não-estacionário. Como mostra Nelson (1990), o IGARCH é de fato estacionário e essa propriedade é o que pode estar produzindo os resultados nos testes de raiz unitária sobre as volatilidades históricas associadas ao GARCH e ao TARCH.

Quanto à volatilidade histórica derivada do SWARCH, a não-estacionariedade foi rejeitada pelo teste ADF mas não o foi pelo teste de Phillips e Perron (1988).

É importante destacar que a questão dos regressores gerados também se coloca aqui quando fazemos os testes de raiz unitária. Como discutido anteriormente, as séries de volatilidade histórica são construídas com parâmetros estimados. Portanto, a validade dos testes fica comprometida nesse contexto. Não obstante, estamos apresentando os resultados obtidos nesses testes porque estes são realizados por alguns autores, tais como Andrade e Tabak (2000), Chang *et al* (2002) e Gabe e Portugal (2004), e porque eles podem servir ao leitor como um indicativo, se examinados com ressalvas, de se existe raiz unitária ou não. De todas

formas, podemos esperar que, uma vez sendo os modelos de séries temporais estacionários, essa propriedade se apresente também nas volatilidades médias produzidas com eles<sup>10</sup>.

Já com relação às *proxies* da volatilidade realizada, ambos os testes apontaram para a existência da raiz unitária, tanto para a série de desvio-padrão como para a estimada por Parkinson (1980).

Finalmente, quanto à volatilidade implícita, ambos os testes rejeitaram a hipótese nula de raiz unitária. Os valores das estatísticas de teste são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 5 – Testes de raiz unitária

		<i>ADF</i>	<i>PP</i>
<i>Vol. implícita</i>		-3,249**	-5,348*
<i>Vol. histórica</i>	<i>GARCH</i>	-3,451**	-3,300**
	<i>TARCH</i>	-3,507*	-3,124**
	<i>SWARCH</i>	-2,770***	-2,503
<i>Vol. realizada</i>	<i>Desvio-padrão</i>	-2,218	-2,325
	<i>Parkinson</i>	-2,276	-2,074

\* Significante a 1%; \*\* a 5%; \*\*\* a 10%

À luz desses resultados, particularmente os associados às volatilidades realizadas, algumas considerações precisam ser feitas a respeito da dificuldade em aplicar os testes de raiz unitária às séries em questão.

Devemos notar que, como ponto de partida deste trabalho, adotamos a perspectiva de que a variância do retorno da taxa de câmbio pode apresentar mudanças de regime ao longo do tempo, ou seja, pode possuir um comportamento não-linear. Mas em um contexto onde o processo estocástico em questão é não-linear, a aplicação desses testes de raiz unitária pode não ser adequada.

Por um lado, Perron (1989) mostra que o poder do teste ADF se reduz substancialmente quando aplicado a uma série que possui uma quebra estrutural. Além disso, Nelson *et al*

<sup>10</sup> No modelo SWARCH não temos um teste de raiz unitária como o realizado com o GARCH e TARCH. Contudo, a condição de estacionariedade do termo ARCH, dada por  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 1$ , é satisfeita pelas estimativas obtidas sem que tenha sido imposta essa condição ao estimar o modelo.

(2001) também constatam que o teste ADF perde potência quando a hipótese alternativa (verdadeira) é de um processo estacionário com mudança de regime na tendência via *Markov-switching*.

Em contraposição, Dufrénot e Mignon (2002) obtêm, para alguns modelos não-lineares, resultados de simulação indicando que o teste ADF não tem problema de potência, mas possui dificuldades em identificar a raiz unitária quando ela existe. Isto é, quando o modelo não-linear é não-estacionário, o teste tende a rejeitar a hipótese nula com mais frequência do que deveria.

Portanto, fica difícil trabalhar a questão da raiz unitária no contexto dos processos não-lineares, pois, particularmente, se levarmos em conta o que foi dito dois parágrafos acima, o fato do teste não ter rejeitado a hipótese nula nas séries de volatilidade realizada pode ser resultado da mudança de regime e não da existência da raiz unitária.

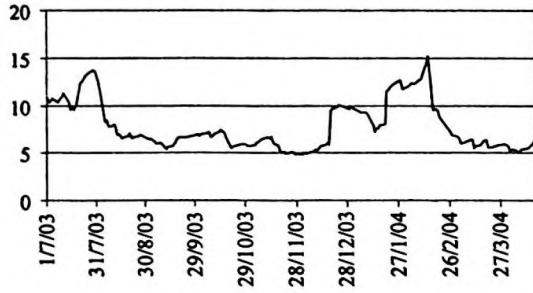
Diante dessas dificuldades, o que faremos neste trabalho será utilizar nossos dados sob o pressuposto de que eles são estacionários. Como estamos considerando que a série de variância sofre mudanças de regime governadas por uma cadeia de Markov, vamos proceder dessa forma baseando-nos no resultado obtido por Nelson *et al* (2001) de que o teste ADF sofre de perda de potência.

Além disso, levando em conta o problema “clássico” de regressão espúria, levantado primeiramente por Granger e Newbold (1974) e estudado em detalhe por Phillips (1986), a relação que buscamos estabelecer entre regressando e regressor ocorre entre variáveis que representam a volatilidade do retorno de um mesmo ativo, volatilidade essa referente a um mesmo intervalo de tempo. Por isso, é pouco provável que qualquer relação que vier a se constatar entre essas variáveis seja espúria, dado que a única diferença entre elas é a forma como são calculadas.

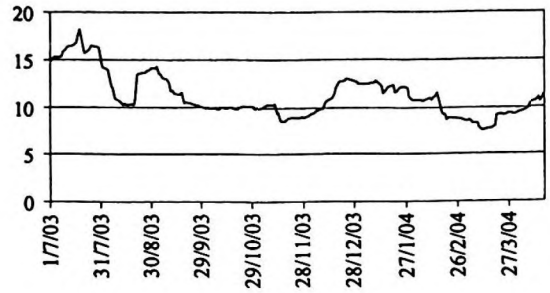
De todas formas, é importante deixar constatado o problema potencial que existe em estarmos trabalhando com séries sujeitas a mudanças de regime, dada a forma como pretendemos comparar as previsões de volatilidade.

### 6.4 Avaliação dos previsores de volatilidade

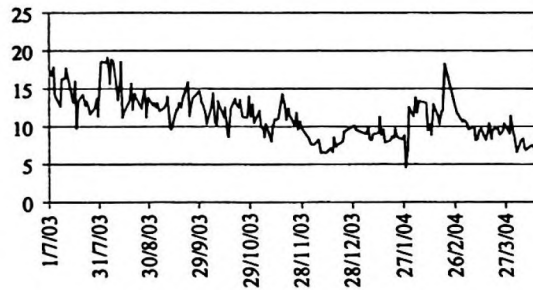
Os cálculos das volatilidades realizadas, assim como das volatilidades histórica e implícita, são apresentados nos gráficos abaixo:



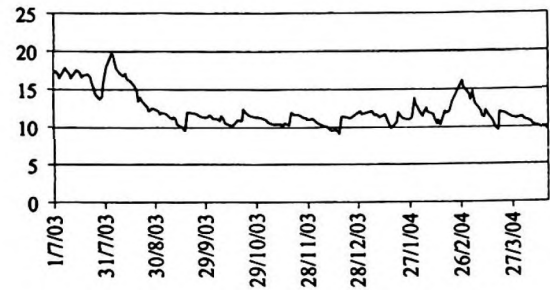
**Gráfico 6 - Volatilidade realizada (%a.a.): desvio-padrão**



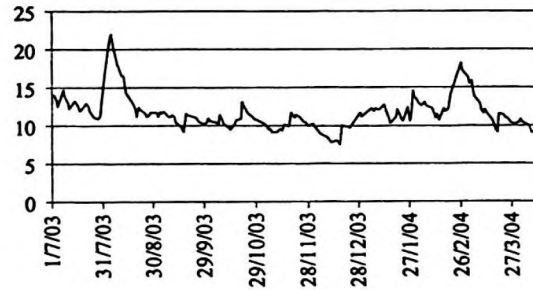
**Gráfico 7 - Volatilidade realizada (%a.a.): Parkinson**



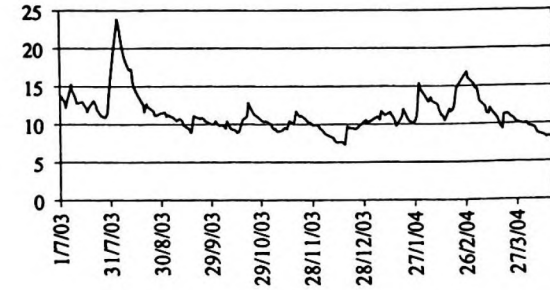
**Gráfico 8 - Volatilidade implícita (%a.a.)**



**Gráfico 9 - Volatilidade SWARCH (%a.a.)**



**Gráfico 10 - Volatilidade GARCH (% a.a.)**



**Gráfico 11 - Volatilidade TARCH (% a.a.)**

Na tabela 6 temos os resultados da estimação do modelo ( 16 ) utilizando o desvio-padrão e a medida de volatilidade de Parkinson. Como mencionado acima o instrumento utilizado foi a volatilidade implícita defasada em um período.

**Tabela 6 – Regressões da vol. realizada sobre a vol. implícita**

<i>Vol. realiz.</i>	$a_i$	$b_i$	$R^2$
<i>Desv. pad.</i>	5,534 (1,548) [0,000]	0,191 (0,129) [0,141]	0,041
<i>Parkinson</i>	7,193 (1,368) [0,000]	0,348 (0,129) [0,008]	0,109

Desvios-padrão entre parênteses  
P-valor entre colchetes

Na regressão do desvio-padrão sobre a volatilidade implícita, obtivemos um coeficiente de inclinação não-estatisticamente diferente de zero. Ademais, o  $R^2$  do modelo foi de apenas 4,1%. Observando os gráficos das respectivas séries, vemos que a volatilidade implícita oscila muito mais que o desvio-padrão. Isso acontece porque, no caso da volatilidade realizada, ela é construída usando uma média de retornos ao quadrado, fazendo com que as suas variações de um dia para o outro sejam mais suaves do que aquelas apresentadas pela volatilidade implícita, que usa a cotação de um dia apenas no seu cômputo. Contudo, analisando o segundo resultado, que usa o estimador de Parkinson, vemos que a excessiva oscilação do regressor não deve ser a causa do coeficiente não diferente de zero para explicar o desvio-padrão. Nessa segunda regressão, a volatilidade implícita não se mostra nula, muito embora o gráfico 7 também exiba uma série menos oscilante do que a do gráfico 8.

Uma possível explicação do porquê dessa diferença nos coeficientes obtidos nas duas regressões pode ser a maior eficiência do estimador de Parkinson e, de maneira mais específica, a forma como ele é calculado, usando as cotações máxima e mínima. O preço de uma opção possui uma relação direta com a volatilidade esperada do ativo subjacente. Então, se pudermos assumir que a oscilação da taxa de câmbio durante o pregão influencia, até certo ponto, as cotações das opções nesse pregão, podemos dizer que a volatilidade implícita que calculamos, em certa medida, reflete aquela variação do câmbio. Por outro lado, lembrando

do pequeno exemplo numérico, apresentado na subseção 5.1, a respeito dos estimadores da volatilidade realizada, vimos que o desvio-padrão calculado com as cotações de fechamento do dólar não conseguia captar, naquele exemplo, o movimento na taxa de câmbio de fato ocorrido durante o pregão, enquanto que o estimador de Parkinson o captava. Portanto, podemos interpretar os diferentes resultados sobre os coeficientes da volatilidade implícita nas regressões de poder de predição, como decorrendo de a volatilidade implícita estar mais relacionada ao estimador de valor extremo do que ao desvio-padrão, na medida em que aquele reflete melhor as variações intra-diárias no preço do câmbio.

Para os modelos de volatilidade histórica também estimamos a regressão referente ao modelo ( 17 ). Os resultados são apresentados na tabela 7, logo abaixo.

**Tabela 7 – Regressões da vol. realizada sobre as vol. históricas**

<i>Vol. realiz.</i>		$a_h$	$b_h$	$R^2$
<i>Desv. pad.</i>	<i>GARCH</i>	3,943	0,324	0,085
		(1,351)	(0,119)	
		[0,004]	[0,007]	
	<i>TARCH</i>	4,081	0,318	0,099
		(1,293)	(0,117)	
		[0,002]	[0,007]	
<i>SWARCH</i>	2,374	0,433	0,156	
	(1,469)	(0,115)		
	[0,108]	[0,000]		
<i>Parkinson</i>	<i>GARCH</i>	8,837	0,198	0,039
		(1,183)	(0,113)	
		[0,000]	[0,078]	
	<i>TARCH</i>	8,957	0,191	0,045
		(0,936)	(0,091)	
		[0,000]	[0,048]	
<i>SWARCH</i>	4,538	0,536	0,298	
	(1,642)	(0,143)		
	[0,006]	[0,000]		

Desvios-padrão entre parênteses

P-valores entre colchetes

Como podemos observar, todas as medidas de volatilidade histórica apresentam coeficientes significantes para explicar o desvio-padrão. Contudo, quando mudamos a *proxy* para a volatilidade realizada, apenas a previsão de volatilidade produzida pelo GARCH não possui



um coeficiente estatisticamente distinto de zero, a um nível de significância de 5%. Além disso, vale destacar que, considerando os resultados das tabelas 6 e 7, o modelo SWARCH obteve o maior  $R^2$ , para ambas as medidas de volatilidade realizada.

Quanto à avaliação do conteúdo informacional das previsões implícita e histórica, a tabela 8 expõe o modelo ( 18 ) estimado com o desvio-padrão sendo a *proxy* a ser explicada e a tabela 9 faz o mesmo, mas empregando o estimador de Parkinson. Como estamos fazendo a estimação por 2SLS, usamos as volatilidades históricas, contemporâneas, como instrumentos para elas mesmas.

**Tabela 8 – Avaliando o conteúdo informacional com o desvio-padrão como proxy**

<i>a</i>	<i>b<sub>r</sub>- vimp</i>	<i>b<sub>k</sub>- GARCH</i>	<i>b<sub>k</sub>- TARCH</i>	<i>b<sub>k</sub>- SWARCH</i>	$R^2$
4,082 (1,500) [0,007]	-0,033 (0,213) [0,877]	0,344 (0,195) [0,079]			0,079
4,362 (1,565) [0,006]	-0,077 (0,212) [0,718]		0,369 (0,180) [0,042]		0,091
2,778 (1,520) [0,069]	-0,314 (0,215) [0,147]			0,687 (0,206) [0,001]	0,117

Desvios-padrão entre parênteses  
P-valor entre colchetes

**Tabela 9 - Avaliando o conteúdo informacional com o estimador de Parkinson como proxy**

<i>a</i>	<i>b<sub>r</sub>- vimp</i>	<i>b<sub>k</sub>- GARCH</i>	<i>b<sub>k</sub>- TARCH</i>	<i>b<sub>k</sub>- SWARCH</i>	$R^2$
7,752 (1,205) [0,000]	0,434 (0,201) [0,032]	-0,132 (0,162) [0,415]			0,094
7,611 (1,200) [0,000]	0,443 (0,206) [0,033]		-0,131 (0,151) [0,387]		0,093
4,717 (1,642) [0,005]	-0,106 (0,184) [0,566]			0,617 (0,218) [0,005]	0,282

Desvios-padrão entre parênteses  
P-valor entre colchetes



Na tabela 8, todos os coeficientes das previsões de volatilidade histórica se mostraram significantes, a um nível de 10%. Já a volatilidade implícita não se verificou estatisticamente diferente de zero. De fato, esse era um resultado esperado dado que nas regressões de capacidade de predição obtivemos um coeficiente não significativo para ela.

Na tabela 9, quando trocamos a *proxy* utilizada, a volatilidade implícita passa a subjugar os modelos GARCH e TARARCH, quanto ao conteúdo informacional que ela aporta para explicar a volatilidade realizada. Contudo, quando fazemos a comparação entre a volatilidade implícita e a previsão produzida pelo SWARCH, o resultado se inverte. Além disso, essa última regressão produz o maior  $R^2$  dentre os três modelos, mostrando que o SWARCH contribui para explicar melhor a volatilidade realizada, algo observado também na tabela 8.

Portanto, o que temos são evidências de que trabalhar explicitamente com mudanças de regime altera os resultados de maneira substancial. Em princípio, se olharmos apenas os resultados referentes à volatilidade implícita e aos modelos GARCH e TARARCH, veremos resultados ambíguos. Considerando o desvio-padrão como a medida *ex post*, temos as previsões históricas se sobressaindo em relação à implícita, observando os  $R^2$ 's das regressões de capacidade de predição. Já se levarmos em conta a medida de Parkinson, o resultado se altera. Por outro lado, nas regressões de conteúdo informacional, as significâncias dos coeficientes também se invertem quando alteramos a *proxy* empregada, notando que com a volatilidade medida por Parkinson nossas estimações corroboram os resultados de Chang *et al* (2002).

No entanto, quando passamos a olhar também as estimações feitas com o previsor do SWARCH e usando ambas as medidas de volatilidade, notamos como os valores obtidos são favoráveis a este último modelo, tanto no que se refere ao  $R^2$ , como com relação à significância dos parâmetros nos testes de conteúdo informacional.

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho tratamos do problema de como fazer a previsão da volatilidade do retorno de um ativo financeiro, dada a importância que esse assunto tem em diversas áreas em finanças, tais como a formação de carteiras, o apreçamento de opções, a administração de risco ou a cotação dos preços de *bid* e *ask*.

A questão foi tratada avaliando empiricamente duas metodologias alternativas para obter essa previsão, uma delas associada ao uso de séries temporais na inferência do processo gerador do retorno, e que, por essa característica produz previsões que podemos denominar como sendo volatilidades históricas; e uma outra baseada em modelos de apreçamento de opções e que produz as chamadas volatilidades implícitas.

Em relação à literatura existente que trata do problema, demos um passo adiante ao considerar dentro deste estudo, a modelagem da série de retorno da taxa de câmbio assumindo que ela sofra mudanças de regime na sua variância condicional e atendendo, dessa forma, às constatações empíricas que indicam que o retorno desse ativo apresenta padrões de variação substancialmente distintos ao longo do tempo. Para tanto, utilizamos o modelo SWARCH de Hamilton e Susmel (1994), uma especificação de séries temporais que permite a existência de distintos regimes na variância condicional ao longo do tempo, com esses regimes determinando a sua escala e sendo governados por uma cadeia de Markov.

Como subsídio para o desenvolvimento deste trabalho, apresentamos uma caracterização da persistência da variância condicional do modelo GARCH aos efeitos dos choques sobre o retorno da taxa de câmbio, admitindo a possibilidade de terem ocorrido mudanças de regime no segundo momento do retorno. Obtivemos resultados mostrando que, quando tais mudanças acontecem e não são explicitamente consideradas, a persistência que o GARCH atribui aos efeitos dos choques fica superestimada, implicando, portanto, que as previsões da variância feitas nessas circunstâncias e com essa especificação devem ser prejudicadas.

Por outro lado, como subproduto do uso do modelo SWARCH como previsor da volatilidade, sua estimação permitiu que fosse feita uma inferência sobre os regimes de variância em que esteve o retorno da taxa de câmbio no período de março de 1999 a abril de 2004, sendo

possível associar eventos econômicos que justificariam os regimes inferidos. Também pudemos estabelecer, ainda que de maneira informal, uma relação direta entre a volatilidade no mercado cambial e o risco soberano do país, medido pelo EMBI+, sugerindo que aos regimes de variância do retorno da taxa de câmbio correspondem distintos regimes para o nível do risco país e indicando, dessa forma, que a volatilidade do mercado cambial pode ser uma função (não-linear) dos determinantes do risco soberano.

Nosso estudo foi baseado em regressões que avaliam o poder preditivo e o conteúdo informacional das previsões feitas pelas metodologias alternativas, e produziu evidências de que as previsões geradas pelo modelo SWARCH apresentam um desempenho melhor, tanto no que se refere à capacidade de explicar isoladamente as *proxies* da volatilidade realizada, como na comparação com as previsões obtidas por meio da volatilidade implícita e por meio de outros modelos de séries temporais. Portanto, obtivemos indícios de que considerar a mudança de regime na modelagem de séries de tempo pode melhorar o desempenho das previsões realizadas.

Contudo, levando em conta que outros estudos constatarem empiricamente a existência de distintos padrões para a variância condicional ao longo do tempo, é possível ainda interpretar os indícios encontrados aqui como sugerindo que o uso de estruturas não-lineares do tipo *Markov-switching* na volatilidade pode ir além do seu emprego na modelagem de séries de tempo e ser incorporado na própria construção de modelos de apreçamento de opções, como, de fato, vem sendo feito, com resultados positivos, em alguns trabalhos, tais como os artigos de Bollen *et al* (2000), ou Daouk e Guo (2004).

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Nuno C. G. de; PEREIRA, Pedro L. Valls. Mudança de regime em volatilidade: os modelos SWGARCH. *In: XXI ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMETRIA*, 1999, Belém. *Anais ...* Belém: Sociedade Brasileira de Econometria, 1999.
- AMIN, Kaushik; NG, Victor. *Inferring future volatility from the information in implied volatility in Eurodollar options: a new approach*. *The Review of Financial Studies*. Oxford, v. 10, n. 2, p. 333-367, 1997.
- ANDRADRE, Sandro; TABAK, Benjamin. *Is it worth tracking dollar/real implied volatility?* *In: XXII ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMETRIA*, 2000, Campinas. *Anais...* Campinas: Sociedade Brasileira de Econometria, 2000.
- BECKERS, Stan. *Variances of security price returns based on high, low, and closing prices*. *Journal of Business*. Chicago, v. 56, p. 97-112, 1983.
- BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. *The pricing of options and corporate liabilities*. *Journal of Political Economy*. Chicago, v. 81, p. 637-659, 1973.
- BLAIR, Bevan *et al.* *Forecasting S&P 100 volatility: the incremental information content of implied volatilities and high-frequency index returns*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 105, p. 5-26, 2001.
- BOLLEN, Nicolas *et al.* *Regime switching in foreign exchange rates: evidence from currency option prices*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 94, p. 239-276, 2000.
- BOLLERSLEV, Tim. *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 31, p. 307-327, 1986.
- CHANG, Eui Jung. *et al.* *Forecasting exchange rate volatility*. *In: XXIV ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMETRIA*, 2002, Nova Friburgo. *Anais...* Nova Friburgo: Sociedade Brasileira de Econometria, 2002.
- CHRISTENSEN, Bent J.; PRABHALA, Nagpurmanand R. *The relation between implied and realized volatility*. *Journal of Financial Economics*. [S.l.], v. 50, p. 125-150, 1998.
- COX, John; RUBINSTEIN, Mark. *Options markets*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985.
- DAOUK, Hazem; GUO, Jie Qun. *Switching asymmetric GARCH and options on a volatility index*. *Journal of Futures Markets*. [S.l.], v. 24, n. 3, p. 251-282, 2004.

DAY, Theodore; LEWIS, Craig. *Stock market volatility and the information content of stock index options*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 52, p. 267-287, 1992.

DICKEY, David; FULLER, Wayne. *Distribution of the estimators for autoregressive time series with unit root*. *Journal of the American Statistical Association*. Washington, DC, v. 74, p. 427-431, 1979.

DOORNIK, Jurgen. *Object-oriented matrix programming using ox*. 3rd ed. London: Timberlake Consultants Press, 2002.

DUFFIE, Darrel. *Futures markets*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.

DUFRENOT, Gilles; MIGNON, Valérie. *Recent developments in nonlinear cointegration with applications to macroeconomics and finance*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

ENGLE, Robert. *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. *Econometrica*. [S.l.], v. 50, p. 987-1007, 1982.

ENGLE, Robert; PATTON, Andrew. *What good is a volatility model?* *Quantitative Finance*. [S.l.], v. 1, p. 237-245, 2001.

FACHADA, Pedro. *Inflation targeting in Brazil: reviewing two years of monetary policy 1999/00*. *Working Paper Series*. Brasília, DF: Banco Central do Brasil, n. 25, 2001. Disponível em <<http://www.bcb.gov.br/?TRABDISC>>. Acesso em 07/03/2005.

FLEMING, Jeff. *The quality of market volatility forecasts implied by S&P 100 index option prices*. *Journal of Empirical Finance*. [S.l.], v. 5, p. 317-345, 1998.

GABE, João; PORTUGAL, Marcelo Savino. Volatilidade implícita versus volatilidade estatística: um exercício usando opções e ações da Telemar S.A. *Revista Brasileira de Finanças*. São Paulo, v. 2, n.1, p. 47-73, 2004.

GARMAN, Mark; KOHLHAGEN, Steven. *Foreign currency option values*. *Journal of International Money and Finance*. [S.l.], v. 2, p. 231-237, 1983.

GLOSTEN, Lawrence *et al.* *On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks*. *Journal of Finance*. New York, v. 48, p. 1779-1801, 1993.

GRANGER, Clive; NEWBOLD, Paul. *Spurious regressions in econometrics*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 2, p. 111-120, 1974.

HAMILTON, James. *Time series analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994.



HAMILTON, James; SUSMEL, Raul. *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime*. **Journal of Econometrics**. [S.l.], v. 64, p. 307-333, 1994.

HUANG, Chi-fu; LITZENBERGER, Robert. *Foundation of financial economics*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.

ISSLER, João Victor. *Estimating and forecasting the volatility of Brazilian finance series using ARCH models*. **Revista de Econometria**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Econometria, v. 19, n. 1, p. 5-56, 1999.

JORION, Philippe. *Predicting volatility in the foreign exchange market*. **Journal of Finance**. New York, v. 50, n. 2, p. 507-528, 1995.

KRONER, Kenneth. *et al. Forecasting volatility in commodity markets*. **World Bank Policy Research Working Paper**. [S.l.], n. 1226, 1993.

LAMOUREUX, Christopher; LASTRAPES, William. *Persistence in variance, structural change and the GARCH model*. **Journal of Business and Economic Statistics**. [S.l.], v. 8, p. 225-234, 1990(a).

LAMOUREUX, Christopher; LASTRAPES, William. *Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effects*. **Journal of Finance**. New York, v. 45, p. 221-229, 1990(b).

LAMOUREUX, Christopher; LASTRAPES, William. *Forecasting stock return variance: towards understanding stochastic implied volatility*. **The Review of Financial Studies**. Oxford, v. 6, p. 293-326, 1993.

LAURENT, Sébastien; URBAIN, Jean-Pierre. *Bridging the gap between Ox and Gauss using OxGauss*. FIRST OXMETRICS USER CONFERENCE, 2003, London. Disponível em <<http://www.core.ucl.ac.be/~laurent/M@ximize/index.html>>. Acesso em 25/02/2005.

McLACHLAN, Geoffrey; PEEL, David. *Finite mixture models*. New York: John Wiley & Sons, 2000.

MINELLA, André *et al. Inflation targeting in Brazil: constructing credibility under exchange rate volatility*. **Journal of International Money and Finance**. [S.l.], v. 22, n. 7, p. 1015-1040, 2003.

NELSON, Charles R. *et al. Markov regime switching and unit root tests*. **Journal of Business and Economic Statistics**. [S.l.], v. 19, n. 4, p. 404-415, 2001.

NELSON, Daniel B. *Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model*. **Econometric Theory**. [S.l.], v. 6, p. 318-334, 1990.

- NEWBY, Whitney; WEST, Kenneth. *A simple positive semi-definite, heteroscedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix*. *Econometrica*. [S.l.], v. 55, n. 3, p. 703-708, 1987.
- PARKINSON, Michael. *The extreme value method for estimating the variance of the rate of return*. *Journal of Business*. Chicago, v. 53, n. 1, p. 61-65, 1980.
- PEREIRA, Pedro Valls *et al.* *Alternative models to extract asset volatility: a comparative study*. *Revista de Econometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Econometria, v. 19, n. 1, p. 57-109, 1999.
- PERRON, Pierre. *The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis*. *Econometrica*. [S.l.], v. 57, n. 6, p. 1361-1401, 1989.
- PHILLIPS, Peter. *Understanding spurious regressions*. *Journal of Econometrics*. [S.l.], v. 33, p. 311-340, 1986.
- PHILLIPS, Peter.; PERRON, Pierre. *Testing for unit root in time series regression*. *Biometrika*. London, v. 75, p. 335-346, 1988.
- VASILELLIS, G.A.; MEADE, N. *Forecasting volatility for portfolio selection*. *Journal of Business Finance and Accounting*. Oxford: Blackwell Publisher, v. 23, p. 125-143, 1996.
- WOOLDRIDGE, Jeffrey. *Econometric analysis of cross section and panel data*. Cambridge: MIT Press, 2002.
- WIGGINS, James B. *Empirical tests of the bias and efficiency of the extreme-value variance estimator for common stocks*. *Journal of Business*. Chicago, v. 64, n. 3, p. 417-432, 1991.
- WIGGINS, James B. *Estimating the volatility of S&P 500 futures prices using the extreme-value method*. *Journal of Futures Markets*. New York, v. 12, n. 3, p. 265-273, 1992.
- XU, Xinzhong.; TAYLOR, Stephen J. *Conditional volatility and the informational efficiency of PHLX currency options market*. *Journal of Banking and Finance*. [S.l.], v. 19, p. 803-821, 1995.
- ZAKOÏAN, Jean-Michel. *Threshold heteroskedastic models*. *Journal of Economic Dynamics and Control*. [S.l.], v. 18, p. 931-955, 1994.