UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
Instituto de Pesquisas Econômicas

Hedge Dinâmico com Utilidade Diferencial Estocástica

Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

Orientador: Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves

São Paulo
2003

Reitor da Universidade de São Paulo
Prof. Dr. Adolpho José Melfi

Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Prof.ª Dr.ª Maria Tereza Leme Fleury

Chefe do Departamento de Economia
Prof.ª Dr.ª Elisabeth M. M. Q. Farina

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
Instituto de Pesquisas Econômicas

Hedge Dinâmico com Utilidade Diferencial Estocástica

Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

Orientador: Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves

Tese apresentada ao Instituto de Pesquisas Econômicas
da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade,
como parte dos requisitos para a obtenção do título de
Doutor em Economia.

São Paulo
2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Publicações e Divulgação do SBD/FEA/USP

Bueno, Rodrigo De Losso da Silveira

Hedge dinâmico com utilidade diferencial estocástica / Rodrigo De Losso da Silveira Bueno. – São Paulo : FEA/ USP, 2003.

100 f.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2003

Bibliografia.

1. Economia (Teoria) 2. Equação de Bellman 3. Semigrupos I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP II. Título.

CDD – 330

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema do hedge dinâmico usando três especificações diferentes de utilidade: utilidade diferencial estocástica, utilidade terminal, e uma nova transformação na utilidade que inclui características das duas abordagens anteriores. Assumimos que os preços seguem processos markovianos. Utilidade diferencial estocástica, SDU, impacta a demanda pura por hedge ambigüamente, mas reduz a demanda especulativa pura, pois a aversão ao risco aumenta. Mostramos que a decisão de consumo é independente da decisão de hedge, sob certo sentido. Com utilidade terminal, TWU, derivamos uma fórmula mais geral e compacta de hedge que os casos encontrados em Duffie and Jackson (1990). Com a nova utilidade, encontramos uma fórmula compacta que torna o segundo modelo um caso especial, e, assim, conseguimos mostrar que a demanda pura por hedge não é impactada pela SDU. Além disso, com utilidade dos tipos CRRA e CARA, mostramos que a demanda especulativa pura diminui, porque a aversão ao risco aumenta. Se preços futuros são martingais, então a transformação não exerce qualquer efeito sobre a taxa de hedge. Os resultados que encontramos são válidos para uma infinidade de distribuições de preços. Derivamos, ainda, as equações de Bellman relevantes, usandos técnicas matemáticas denominada de semigrupos.

Abstract

In this paper we study the dynamic hedging problem using three different utility specifications: stochastic differential utility, terminal wealth utility, and a new utility transformation which includes features from the two previous approaches. In all three cases, we assume Markovian prices. While stochastic differential utility (SDU) has an ambiguous effect on the pure hedging demand, it does decrease the pure speculative demand, because risk aversion increases. We also show that in this case the consumption decision is, in some sense, independent of the hedging decision. In the case of terminal wealth utility (TWU), we derive a general and compact hedging formula

which nests as special cases all of the models studied in Duffie and Jackson (1990). In the case of the new utility transformation we find a compact formula for hedging which nests the terminal wealth utility framework as a special case; we then show that this specification does not affect the pure hedging demand. In addition, with CRRA- and CARA-type utilities the risk aversion increases and consequently the pure speculative demand decreases. If futures prices are martingales, then the transformation plays no role in determining the hedging allocation. Our results hold for a number of different price distributions. We also use semigroup techniques to derive the relevant Bellman equation for each case.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS VI

1 INTRODUÇÃO 1

2 UTILIDADE ESPERADA GERAL 5

2.1 Utilidade Recursiva 6

2.1.1 Substituição e Aversão ao Risco 10

2.1.2 Consumo e Retorno de Ativos - Abordagem Geral . . . 15

2.2 Apreçamento de Ativos 19

2.2.1 Alguns Resultados Empíricos 23

2.3 Utilidade Diferencial Estocástica 24

2.3.1 Apreçamento de Ativos 27

3 SEMIGRUPOS E APREÇAMENTO DE ATIVOS 31

3.1 Intuição 31

3.2 Semigrupo e Gerador Infinitesimal 32

3.3 Difusão e Salto 37

3.4 Distribuição de Preços 41

3.5 Apreçamento de Ativos 43

3.5.1 Processos Construídos a Partir de Processos de Markov 45

3.5.2 Decomposição do Fator Estocástico de Desconto 49

3.5.3 Processo de Valorização 51

4 HEDGE DINÂMICO **57**

4.1 O Modelo 57

4.2 Equações de Hamilton-Jabobi-Bellman 61

4.2.1 Utilidade Aditiva Convencional 61

4.2.2 Utilidade Diferencial Estocástica 64

4.2.3 Utilidade Aditiva Degenerada 65

4.2.4 Utilidade Aditiva Degenerada Transformada 66

4.3 Utilidade Diferencial Estocástica 68

4.4 Riqueza Terminal 74

4.4.1 Preços Futuros Martingais - $m_t = 0$ 80

4.4.2 Utilidade Exponencial - $m_t \neq 0$ 81

4.4.3 Equilíbrio no Mercado Futuro 82

4.5 Conectando SDU e Utilidade Terminal 84

4.5.1 Ajustamento Exponencial de Risco CARA e CRRA . . 89

4.5.2 Equilíbrio 91

5 CONCLUSÕES **92**

REFERÊNCIAS **95**

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer às pessoas que tornaram esta tese possível.

Entre todos os professores que tive no doutorado, meu agradecimento especial ao Prof. Joe Yoshino, responsável direto por eu estar aqui.

Entre as pessoas que me ajudaram, direta ou indiretamente, Dora pelos inúmeros favores que me fez, e Valéria pela atenção e paciência infinitas.

Entre os amigos, Ricardo Pires pelos vários momentos de auxílio.

Entre as pessoas que leram esta tese, os membros da qualificação, notadamente o Prof. Fabio Kanczuk, os participantes dos seminários em que a apresentei na USP, EPGE, PUC-RJ e no III EFMA - Finlândia. Particularmente, agradeço aos comentários do Prof. Lars P. Hansen.

Não teria palavras para agradecer tudo o que devo ao meu orientador, Prof. Denisard Alves, responsável pela minha formação, pelas minhas conquistas e, certamente, pelo meu futuro.

Finalmente, agradeço à minha esposa pelo apoio, pelo carinho e pelo amor. Tais ingredientes, nem todos os têm, mas eu, felizmente, tenho mais do que mereço.

A LF, minha alegria.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos o problema the hedge[1] ótimo em mercado futuros, usando utilidade diferencial estocástica (Duffie and Epstein, 1992ab), SDU, e assumindo preços markovianos, como em Adler and Detemple (1988).

A questão do hedge vem sendo estudada há várias décadas. Os primeiros trabalhos começaram com Working (1953, 1962). Sua ótica ainda era um pouco imprecisa, mas dava os primeiros passos em direção à incorporação do modelo de hedge ao de Markowitz (1959). Posteriormente, Johnson (1960) e Stein (1961) associaram as idéias de Working às de fronteira média-variância de Markowitz. Mais tarde, num trabalho bastante famoso, Ederington (1979) sistematizou todas as idéias contidas nesses artigos, originando uma linha de pesquisa sobre hedge em mercados futuros bastante consistente e profícua[2].

Em nosso trabalho, estendemos o modelo de Duffie e Jackson (1990), DJ daqui para frente, em três direções. Na primeira, maximizamos a utilidade intertemporal do consumo, no espírito de Ho (1984). Interessamo-nos por esta abordagem porque no contexto intertemporal o agente está desejando estabilizar o fluxo de consumo esperado. Para isso, o agente ajusta o consumo presente de forma a levar em conta os investimentos necessários para financiar consumo futuro, e, portanto, assume posição em mercados futuros.

Utilidade recursiva separa a aversão ao risco da substitutabilidade intertemporal, por isso pode potencialmente melhorar a eficiência da estratégia

[1]Não há, na nossa visão, uma boa tradução para a palavra em inglês hedge, que, ao pé da letra, pode ser entendida como proteção. Por isso, escrevemo-la em inglês. Preferimos, também, não colocar a palavra entre aspas por simplicidade de notação.

[2]Sobre os conceitos de hedge ver Bueno (2002).

de hedge, em função de sua estrutura menos restritiva. Portanto, esta abordagem pode ser imaginada como sendo uma ferramenta que "hedgers" podem usar para melhorar a eficiência de sua posição futura, de tal sorte que adiciona maior flexibilidade em um possível tratamento empírico ainda a ser empreendido. Entretanto, a fórmula que obtemos depende das derivadas da função valor, cuja solução analítica não é fácil de encontrar. Assim temos que empregar métodos numéricos para obter a taxa ótima de hedge.

Na segunda direção, o agente maximiza a riqueza terminal, uma hipótese comum quando estamos apenas preocupados com uma data futura específica. Maximizar a utilidade da riqueza terminal tem a grande vantagem de produzir fórmulas fechadas para alguns casos que surgem naturalmente, e, portanto, nossa análise pode ser mais profunda. Em nosso caso, produzimos uma fórmula de hedge mais geral que a de DJ, porque em nossos resultados cabem os encontrados em seu artigo como também são válidos para uma infinidade de distribuições de preços. Nós, então, especializamos essa fórmula para mostrar como os casos estudados em DJ podem ser alcançados.

Porque consideramos os preços como processos de Markov, o problema de hedge míope a cada instante de tempo não mais ocorre necessariamente[3]. Conseqüentemente, nossas fórmulas ótimas de hedge não são comparáveis com as correspondentes fórmulas estáticas, nem diretamente comparáveis com fórmulas análogas obtidas em tempo discreto, como os resultados obtidos por Anderson e Danthine (1981, 1983).

Em seguida, estudamos os efeitos considerando um modelo de equilíbrio

[3]Hedge míope a cada instante de tempo significa que o agente está protegendo apenas variações locais da riqueza. Adicional discussão pode ser encontrada em Adler e Detemple (1988) e em suas referências.

geral com agentes heterogêneos, e analisamos os resultados obtidos.

A abordagem de maximização da riqueza terminal produz fórmulas de hedge bastante convenientes. Com base nessa idéia e inspirados pela abordagem de utilidade diferencial estocástica, propomos uma nova utilidade terminal que incorpora o certeza equivalente desse modelo. Então, estudamos os efeitos dessa modificação sobre a taxa de hedge ótima. Observamos que ganhamos maior grau de flexibilidade em relação aos modelos originais, e encontramos fórmulas de hedge bastante claras e intuitivas. Com isso, podemos potencialmente melhorar a estratégia de hedge a ser seguida.

Na verdade, a caracterização de otimalidade de Bellman pode ser aplicada sem a necessidade de variável de estado refletindo consumo passado, pois a continuação da função valor $J(z_t)$ é independente do consumo realizado antes de t, em conseqüência da natureza de se olhar para o futuro da equação de Bellman sob utilidade diferencial estocástica (veja Duffie and Epstein, 1992b, p. 416).

Em suma, nosso trabalho avança ao incorporar a utilidade diferencial estocástica ao problema de hedge ótimo, ao apresentar um modelo muito mais geral que o encontrado em DJ, ao introduzir certeza equivalente ao modelo de DJ, e ao derivar a equação de Bellman relevante para o último modelo considerado nesta tese, usando técnicas conhecidas mas não usuais.

Nosso modelo é similar ao de DJ em vários aspectos: preços à vista e futuros são processos de difusão vetoriais; o hedge é um processo estocástico vetorial que especifica uma posição futura em cada mercado futuro; e os lucros e perdas decorrentes do hedge são marcados a mercado em uma conta de margem que paga juros à taxa livre de risco. A taxa ótima de hedge será obtida maximizando a utilidade esperada, composta por uma carteira de ativos de mercado e o valor acumulado da conta de margem.

A tese é organizada como segue: no capítulo 2 apresentamos as idéias básicas sobre utilidade recursiva em tempo discreto e utilidade diferencial em tempo contínuo. Aproveitamos para derivar a fórmula de preço e estudar algumas de suas particularidades comparando-a ao (C)CAPM de Sharpe (1964), Lintner (1965), Lucas (1978) e Breeden (1979) No capítulo 3 apresentamos os conceitos de semigrupo e o aplicamos no apreçamento de ativos. Esses dois capítulos são instrumentais e não apresentam nenhuma novidade; é depois deles que introduzimos alguma inovação. De fato, no capítulo 4 apresentamos os vários modelos de hedge e estudamos seus efeitos sobre a taxa ótima. O último capítulo conclui o presente trabalho.

2 UTILIDADE ESPERADA GERAL

Neste capítulo discorremos sobre a utilidade esperada geral[4]. Trata-se de uma síntese de utilidade recursiva, cuja versão discreta é apresentada nos artigos de Epstein e Zin (1989, 1991). A versão contínua, utilidade estocástica diferencial, é apresentada nos artigos de Duffie e Epstein (1992a, 1992b).

Essas novas versões a respeito da utilidade têm três motivações principais: certas inconsistências empiricamente verificadas com relação às escolhas dos agentes, uma tentativa de resolver o famoso "equity premium puzzle"[5] e porque permitem a separação da aversão ao risco da taxa intertemporal de substituição. Tudo isso será melhor detalhado na próxima seção.

Portanto, considerando a inovação desses artigos, julgamos relevante que se apresentasse um resumo de suas principais idéias, enfatizando sua aplicabilidade teórica e empírica. Nossa abordagem é informal, não obstante algum grau de abstração seja necessário.

Embora estejamos mais interessados na versão contínua da utilidade esperada geral, apresentamos a versão discreta porque muito da intuição sub-

[4]Na verdade, não é tão geral assim. A versão mais geral conhecida até o momento é a preferência por robustez, da qual utilidade recursiva é um caso particular. Ver Anderson, Hansen e Sargent (2000).

[5]O "equity premium puzzle" se manifesta de várias maneiras. Em palavras pode ser descrito como a inabilidade dos modelos teóricos de gerarem o prêmio de ações observado no mercado (ver Mehra e Prescott, 1985). Depois deste artigo, vários outros tentaram explicar o prêmio de risco via modificação na função utilidade, introdução de restrições de empréstimos, introdução de mercados incompletos e de agentes heterogêneos, restrição de participação de mercados, etc. Na maior parte das vezes, esses modelos obtêm um sucesso limitado em explicar tal fenômeno (ver Barberis, Huang e Santos (2001), Campbell e Cochrane (1999), Constantinides e Duffie (1996), Heaton e Lucas (1992), Hansen, *et alli* (2001), Mankiw e Zeldes (1991)). Por outro lado, deve-se dizer que esse fenômeno não é encontrado no mercado brasileiro (ver Issler e Piqueira (2000)).

seqüente provém desse modelo. Além disso, os exemplos numéricos apresentados são mais facilmente calculados na versão discreta.

2.1 Utilidade Recursiva

Utilidade recursiva[6] é a versão discreta da classe de utilidades esperadas gerais. Ela é baseada na classe de utilidades desenvolvida por Kreps e Porteus (1978). Uma de suas características é permitir que a aversão ao risco e a substitutabilidade intertemporal sejam separadas. Além disso, como será visto, o risco sistemático de um ativo é determinado pela covariância entre o retorno da carteira de mercado e o crescimento do consumo simultaneamente, enquanto que nos modelos tradicionais apenas um de cada vez desses fatores exerce alguma importância. Essa característica supostamente ajudaria a explicar o "equity premium puzzle". Com efeito, no modelo tradicional de equilíbrio geral, com agente representativo e utilidade esperada, os resultados não têm sido satisfatórios (ver Hansen e Singleton (1983), Mehra e Prescott (1985)). Uma das possíveis explicações, então, tem sido a inflexibilidade das especificações das funções utilidades com relação a risco e elasticidade de substituição intertemporal.

Uma outra motivação para o desenvolvimento dessa classe de utilidade diz respeito à resolução de certas inconsistências com relação às escolhas dos agentes. Em particular, usando a utilidade esperada convencional, encontram-se certos resultados que não são intuitivamente razoáveis. Vamos apresentar um exemplo sobre isso a seguir.

[6]Seção baseada em Epstein e Zin (1989, 1991).

Exemplo 1 *Suponha dois possíveis planos estocásticos (em t) de consumo. No plano A, joga-se uma moeda. Se der cara, o agente consumirá l pelo resto da vida. Se der coroa, o agente consumirá $L > l$ pelo resto da vida, a partir de $t+1$. Considere o plano B, em que se joga a moeda para cada instante de tempo futuro, $t+1, t+2, \ldots$ Com a versão convencional de utilidade esperada, ambos os planos são igualmente preferidos, isto é, $c^A \sim c^B$. Com utilidade recursiva, será visto que $c^B \succ c^A$.*

De fato, o plano A envolve correlação perfeita entre consumo em todos os períodos. Por outro lado, os níveis de consumo não são sobrepostos no segundo caso. Assim, por razões de diversificação, o plano B parece ser estritamente preferido ao plano A, não obtante o custo psicológico de flutuação trabalhe na direção oposta.

Um outro exemplo, que também pode ser analisado é o seguinte:

Exemplo 2 *Suponha o plano B, como no exemplo anterior. Neste caso, observe que toda a incerteza se resolve em t. Considere agora o plano C em que se joga a moeda conforme o tempo passa, a cada instante de tempo. Com utilidade convencional, $c^B \sim c^C$. No entanto, usando utilidade recursiva, pode-se encontrar um preferido ao outro, conforme sejam os parâmetros escolhidos.*

De fato, argumentos baseados em custos psíquicos e benefícios com relação a resolução antecipada, ou não, dos planos de consumo podem ser levantados para justificar um ou outro resultado (veja Kreps e Porteus, 1978).

Dada alguma motivação para o estudo de utilidade recursiva, passemos à sua formalização funcional. Vamos iniciar imaginando um fluxo de consumo determinístico. Seja J, então, a utilidade recursiva desse fluxo de consumo:

$$J(c_0, c_1, ...) = W(c_0, J(c_1, c_2, ...)) \quad (1)$$

para alguma função W, em que este W é denominado *agregador*, por combinar o consumo corrente com a utilidade futura, de forma a determinar a utilidade corrente.

Para passar para o caso estocástico, basta perceber que a utilidade futura é aleatória. Portanto, parece ser natural calcular o equivalente certeza para a utilidade futura, e, então, combinar o nível de certeza equivalente com c_0 por meio de um agregador. O certeza equivalente por sua vez é um mapeamento tal que

$$\widetilde{\mu} : dom\widetilde{\mu} \subseteq M\left(\mathbb{R}_+\right) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

em que para algum espaço métrico X, $B(X)$ é a σ-álgebra de Borel e $M(X)$ é o espaço de probabilidades em X dotado com a convergência topológica fraca.

Temos, assim:

$$J\left(c_0, m\right) = W\left(c_0, \widetilde{\mu}\left(J\left[m\right]\right)\right) \quad (2)$$

para alguma função crescente $W : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e algum equivalente certeza, $\widetilde{\mu}$, consistente com a dominância estocástica de primeiro e segundo graus, e m representando uma medida de probabilidade convenientemente definida em Epstein e Zin (1989, p. 940).

Claramente, existem várias possibilidades para definir W. Epstein e Zin (1989) escolhem W com formato de CES:

$$W(c, z) = [c^{\rho} + \beta z^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}, 0 \neq \rho < 1, 0 < \beta < 1, \tag{3}$$

em que $c = c_0$ e $z = \widetilde{\mu}(J[m])$. A função $\widetilde{\mu}$, por hipótese, satisfará as seguintes propriedades:

Propriedade 1 *Se $\{p_n\}$ e p estão em $M([0, a]) \subset M(\mathbb{R}_+)$, então:*

a. $\lim \int f d_n = \int f dp, \forall f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *crescente* $\Longrightarrow \lim \widetilde{\mu}(p_n) = \widetilde{\mu}(p)$; *e*

b. $\limsup \int f d_n \leq \int f dp$, *para todos* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *crescente* $\Longrightarrow$ $\limsup \widetilde{\mu}(p_n) \leq \widetilde{\mu}(p)$.

O primeiro critério é uma forma de continuidade.

Propriedade 2 $\widetilde{\mu}(p_{\lambda x}) = \lambda \widetilde{\mu}(p_x)$, *para todo* $\lambda > 0$, *onde* $p_{\lambda x}$ *e* p_x *são medidas de probabilidade em dom*$\widetilde{\mu}$ *correspondentes às variáveis aleatórias* λx *e* x, *respectivamente.*

A segunda propriedade impõe homogeneidade para a medida de probabilidade.

Embora restritiva, a especificação CES para W é suficientemente flexível para permitir a separação entre substitutabilidade intertemporal de aversão ao risco.

Antes de compararmos o caso convencional com a utilidade recursiva definida em 3, note como é a especificação de Kreps e Porteus (1978) para o equivalente certeza:

$$\widetilde{\mu}(p) \equiv (E_p [x^\alpha])^{\frac{1}{\alpha}}, 0 \neq \alpha < 1$$

em que p é a medida de probabilidade convenientemente definida em Epstein e Zin (1989, p. 947) e x é a riqueza aleatória, de onde gera-se:

$$J(c_0, m) = \left[c_0^\rho + \beta \left(E_m [J^\alpha] \right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \tag{4}$$

em que m é uma medida de probabilidade temporal.

2.1.1 Substituição e Aversão ao Risco

Nesta seção, comparamos a elasticidade marginal de substituição e aversão ao risco entre a utilidade convencional e a utilidade recursiva. Iniciemos calculando ambos os valores para a utilidade convencional.

Seja a utilidade convencional dada por:

$$U(c_0, c_1, ...) = E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} \right)$$

Então:

$$\frac{\partial U}{\partial c_t} \equiv U_{c_t} = \beta^t c_t^{-\gamma}; \frac{\partial^2 U}{\partial c_t^2} \equiv U_{c_t c_t} = -\gamma \beta^t c_t^{-\gamma-1}$$

Logo, o coeficiente de aversão relativa ao risco (Arrow-Pratt) da utilidade global é:

$$-\frac{U_{c_t c_t}}{U_{c_t}} c_t = \gamma.$$

A taxa marginal de substituição é dada por[7]:

$$\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$$

A elasticidade intertemporal de substituição é dada por:

$$-\frac{\partial \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}{\partial \left(\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}\right)} \frac{\frac{U_{c_{t+1}}}{U_{c_t}}}{\frac{c_{t+1}}{c_t}} = \frac{1}{\gamma}$$

Disso, pode-se observar que a elasticidade de substituição intertemporal é o recíproco da aversão ao risco. Logo, ambas as medidas estão intimamente conectadas.

Seja a utilidade recursiva dada por:

$$J(c, z) = [c^{\rho} + \beta z^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \equiv W^{\frac{1}{\rho}}$$

Logo, o coeficiente de aversão relativa ao risco da utilidade global é:

$$-\frac{J_{cc}}{J_c} c = (1-\rho) \left[\frac{\beta z^{\rho}}{c^{\rho} + \beta z^{\rho}}\right]. \tag{5}$$

Desta fórmula é fácil ver que o coeficiente α, implícito em z, tem uma papel importante na determinação da aversão ao risco.

[7] A taxa marginal de substituição é calculada para cada estado da natureza.

Especializando um pouco mais, para supor um modelo a dois períodos, no estado estacionário, obtemos[8]:

$$-\frac{J_{cc}}{J_c}c = (1-\rho)\left[\frac{\beta}{1+\beta}\right]$$

A taxa marginal de substituição é dada por:

$$\frac{J_z}{J_c} = \beta\left(\frac{z}{c}\right)^{\rho-1}$$

A elasticidade intertemporal de substituição é dada pela variação percentual do consumo relativo dada uma variação percentual no relativo de preços, que é, por sua vez, medido pela taxa marginal de substituição:

$$-\frac{\partial\left(\frac{z}{c}\right)}{\partial\left(\frac{J_z}{J_c}\right)}\frac{\frac{J_z}{J_c}}{\frac{z}{c}} = -\frac{1}{-(1-\rho)\beta\left(\frac{z}{c}\right)^{\rho-2}}\frac{\beta\left(\frac{z}{c}\right)^{\rho-1}}{\frac{z}{c}} = \frac{1}{1-\rho}. \tag{6}$$

Portanto, ρ é um parâmetro que reflete a substitutabilidade entre os

---

[8] A utilidade CES não corresponde exatamente a $\ln c + \beta \ln z$ quando $\rho = 0$, o que nos daria $-\frac{J_{cc}}{J_c}c = 1$. Observe que, quando $\rho = 0$, então $-\frac{J_{cc}}{J_c}c = \frac{\beta}{1+\beta}$. O que está errado? Nada, é que trata-se da aversão ao risco quando a utilidade é uma Cobb-Douglas. Considere, para facilitar:

$$J(c,z) = \left[(1-\beta)c^{\rho} + \beta z^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \equiv W^{\frac{1}{\rho}}$$

E tome o limite quando $\rho \longrightarrow 0$. Use o seguinte truque:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\downarrow 0} U(c,z) &= \exp\left[\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{1}{\rho}\ln\left[(1-\beta)c^{\rho} + \beta z^{\rho}\right]\right] = \\
&= \exp\left[\lim_{\rho\downarrow 0}\frac{(1-\beta)c^{\rho}\ln c + \beta z^{\rho}\ln z}{(1-\beta)c^{\rho} + \beta z^{\rho}}\right] = \\
&= \exp\left[(1-\beta)\ln c + \beta\ln z\right] = c^{1-\beta}z^{\beta}.
\end{aligned}$$

planos de consumo[9]. A separação entre aversão ao risco e substitutabilidade intertemporal, então, se dá porque na Equação 5 não existe apenas ρ sendo considerado, mas também α e β.

A seguir, construímos um exemplo numérico para observarmos o significado do que obtivemos até agora. Suponha uma economia com três períodos e dois estados da natureza nos períodos $t+1$ e $t+2$. Os planos de consumo, c_{ts}, em que t representa o período e s o estado da natureza são assim definidos:

Consumo	Unidade	Utilidade	Probabilidade
c_0	10	$6,32$	1
c_1	30	$10,95$	1
c_{21}	30	$10,95$	$0,70$
c_{22}	40	$12,65$	$0,30$

A utilidade é calculada de acordo com uma CRRA, $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, em que $\gamma = 0,5$. Agora vamos calcular a utilidade aditiva convencional, com incerteza sendo resolvida antes de o jogo começar e depois que o jogo começou. Para isso, calculamos a função valor para cada caso, usando uma taxa de

[9] Aqui, usamos uma simplificação conveniente, por compararmos consumo presente com o equivalente certeza. Se comparássemos com um consumo futuro qualquer, obteríamos o mesmo resultado apenas se não houvesse incerteza.

desconto $\beta = 0,9$

V_{ts}	Incerteza resolvida em $t = 0$	Incerteza resolvida em $t > 0$
V_{21}	$10,95$	$10,95$
V_{22}	$12,65$	$12,65$
V_{11}	$20,81$	–
V_{12}	$22,34$	–
V_1	–	$21,27$
V_0	$25,47$	$25,47$

Vamos reproduzir o mesmo exercício com utilidade recursiva. E, para facilitar os cálculos colocamos o consumo diretamente na função valor, conforme se verá a seguir. Os parâmetros utilizados são os mesmos, e temos que $\rho = 0,9$ e $\alpha = 0,5$.

V_{ts}	Incerteza resolvida em $t = 0$	Incerteza resolvida em $t > 0, V^{\alpha}$
V_{21}	30	30
V_{22}	40	40
V_{11}	$61,21$	–
V_{12}	$70,81$	–
V_1	–	$63,96$
V_0	$70,31$	$70,26$

Se fizermos, $\rho = 0,3$ e $\alpha = 0,9$, prefere-se resolver a incerteza posteriormente. Ou seja, podemos interpretar α como sendo uma medida de aversão ao risco, de sorte que, quanto menor α, mais avesso ao risco será o agente.

No caso em que $\alpha = \rho$ resulta na utilidade aditiva convencional. Com efeito, a conclusão geral é que resolução do plano antecipadamente (posteriormente) é preferido se $\alpha < (>) \rho$. A observação importante é que, para ρ fixado, uma redução em α não apenas aumenta a aversão ao risco, como também pode transformar a preferência por resolução tardia para resolução antecipada.

2.1.2 Consumo e Retorno de Ativos - Abordagem Geral

Nesta seção, derivamos a equação de apreçamento de ativos, considerando utilidade recursiva. Inicialmente relembramos duas importantes definições matemáticas que utilizamos.

Definição 1 *Uma função $F(x)$ de um vetor x é dita ser homogênea de grau k no ponto x_0 se, para todo $\lambda \neq 0$*

$$F(\lambda(x - x_0)) = \lambda^k F(x - x_0).$$

Definição 2 *Uma função $F(x)$ é dita ser homotética se ela pode ser escrita como*

$$F(x) = h(g(x)),$$

onde g é homogênea e h é contínua, não decrescente e positiva.

Vamos a seguir, relembrar algumas propriedades de funções homogêneas. Suponha que a utilidade é homogênea de grau 1, então podemos usar a fórmula de Euler, de forma que

$$U\left(\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_t, \lambda c_{t+1}, \ldots\right) = \lambda U\left(c_1, c_2, \ldots, c_t, c_{t+1}, \ldots\right).$$

Conseqüentemente, assumindo convergência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U\left(\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_t, \lambda c_{t+1}, \ldots\right)}{\partial \lambda} &= \sum_{t=1}^{\infty} U_{\lambda c_t} c_t = \\ &= U\left(c_1, c_2, \ldots, c_t, c_{t+1}, \ldots\right). \end{aligned}$$

Isto vale para qualquer valor de λ, e em particular quando $\lambda = 1$. Portanto:

$$\sum_{t=1}^{\infty} U_{c_t} c_t = U\left(c_1, c_2, \ldots, c_t, c_{t+1}, \ldots\right).$$

Ou seja, para uma função utilidade homogênea de grau 1, a utilidade total é dada pela soma das utilidades marginais ponderadas pelo nível de consumo.

Maximizamos essa função sujeita à seguinte restrição orçamentária: $p_t \cdot c_t = W_t$. Como $U\left(c_t, w_t\right)$ é homogênea da grau 1 no consumo e na riqueza por imposição, e como, pelas condições de primeira ordem, $U_{c_t} = A\left(I_t\right) p_t$, onde $A(I_t)$ é uma constante calculada com as informações disponíveis até o período t, que funciona como o multiplicador de Lagrange, concluímos que a utilidade total é proporcional à riqueza total - homoteticidade da função requerida:

$$U\left(c_1, c_2, \ldots, c_t, c_{t+1}, \ldots\right) = A(I_t) W_t.$$

No modelo com utilidade recursiva, construímos a função utilidade de forma a que ela seja homogênea de grau 1, como, de fato é a função CES:

$$U(\lambda c, \lambda z) = \left[(c\lambda)^{\rho} + \beta (z\lambda)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = \lambda U(c, z)$$

Nossa restrição orçamentária é dada por: $W_{t+1} = (W_t - c_t) R_t$, em que W_t é a riqueza em t e R_t é o retorno da carteira de mercado. c é o consumo e z é a riqueza (equivalente certeza) em $t+1$. Logo, reescrevendo a restrição orçamentária, temos: $\frac{W_{t+1}}{R_t} + c_t = W_t$. Sabendo da homogeneidade de grau 1 e da restrição orçamentária[10], concluímos que $J(W_t, I_t) = A(I_t) W_t$.

Logo temos que resolver o seguinte programa:

$$\begin{aligned} J(W_t, I_t) &= \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} U(c_t, W_{t+1}) = \\ &= \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} \left[c_t^{\rho} + \beta \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{J(I_{t+1},(W_t - c_t) w_t' r_t)}\right) |I_t\right]^{\frac{1}{\rho}}, \end{aligned}$$

em que o argumento de $\widetilde{\mu}(\cdot)$ é a medida de probabilidade condicional em $I_t$para $J(I_{t+1}, (W_t - c_t) w_t' r_t)$. Aqui, admitimos a existência de K ativos, tal que o retorno bruto do k-ésimo ativo entre t e $t+1$ é descrito pela variável aleatória r_{kt}, $-\infty < t < \infty$, em que $r \in [\underline{r}, \overline{r}]$, $\underline{r} > 0$, $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{Kt})$.

Porque $J(I_{t+1}, (W_t - c_t) w_t' r_t) = J(I_{t+1}, W_{t+1}) = A(I_{t+1}) W_{t+1}$, temos que:

$$A(I_t) W_t = \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} \left[c_t^{\rho} + \beta (W_t - c_t)^{\rho} \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{A(I_{t+1}) w_t' r_t} | I_t\right)\right]^{\frac{1}{\rho}}. \qquad (7)$$

[10]Note que podemos escrever a restrição orçamentária como $\widetilde{p}_t \cdot \widetilde{c}_t = W_t$, em que $\widetilde{p}_t = \begin{bmatrix} 1 & R_t^{-1} \end{bmatrix}'$ e $\widetilde{c}_t = \begin{bmatrix} c_t & W_{t+1} \end{bmatrix}'$.

Note que a solução para o problema de carteiras é dada por

$$\max_{w_t \in S^K} \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{A(I_{t+1}) w_t' r_t} | I_t \right).$$

Defina $c_t^* = a_t W_t$ como o ponto de máximo. Então, fazendo as substituições apropriadas:

$$A^{\rho}(I_t) = a_t^{\rho} + \beta (1 - a_t)^{\rho} \widetilde{\mu}^{*\rho}.$$

Agora tome as condições de primeira ordem do consumo em 7:

$$a_t^{\rho-1} = \beta (1 - a_t)^{\rho-1} \widetilde{\mu}^{*\rho} \tag{8}$$

Combine as duas últimas equações acima para obter:

$$A(I_t) = a_t^{\frac{\rho-1}{\rho}} = \left(\frac{c_t^*}{W_t} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}.$$

Agora substitua a restrição orçamentária e a equação que acabamos de derivar na condição de primeira ordem 8:

$$\begin{aligned}
1 &= \beta \left(\frac{W_t - c_t}{c_t} \right)^{\rho-1} \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{A(I_{t+1}) w_t' r_t} | I_t \right) = \\
&= \beta \left(\frac{W_t - c_t}{c_t} \right)^{\rho-1} \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{\left(\frac{c_{t+1}}{W_{t+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} w_t' r_t} | I_t \right) = \\
&= \beta \left(\frac{W_t - c_t}{c_t} \right)^{\rho-1} \left(\frac{c_t}{W_{t+1}} \right)^{\rho-1} \widetilde{\mu}^{\rho} \left(p_{\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} w_t' r_t} | I_t \right) \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & \ \beta^{\frac{1}{\rho}} \widetilde{\mu} \left(p_{\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} R_t^{\frac{1}{\rho}}} | I_t \right) = 1,
\end{aligned}$$

em que $R_t = w_t' r_t$ é o retorno da carteira de mercado na escolha ótima.

Perceba como $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ e R_t formam uma média geométrica, cuja discussão mais aprofundada fica adiada para a próxima seção.

2.2 Apreçamento de Ativos

Vamos agora especializar nosso modelo para apreçamento de ativos. Defina $\widetilde{\mu}\left(p_{J(I_{t+1},(W_t-c_t)w_t' r_t)}|I_t\right)$ como $\left(E_t\left[J\left(W_{t+1}^{\alpha}\right)\right]\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Logo, queremos maximizar:

$$
\begin{aligned}
J(W_t, I_t) &= \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} \left[c_t^{\rho} + \beta\left(E_t\left[J\left(W_{t+1}, I_{t+1}\right)^{\alpha}\right]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \\
& \quad \text{sujeito a} \\
W_{t+1} &= (W_t - c_t) R_t.
\end{aligned}
$$

Utilizamos o mesmo procedimento que antes:

$$
\begin{aligned}
A(I_t) W_t &= \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} \left[c_t^{\rho} + \beta (W_t - c_t)^{\rho} \left(\underbrace{E_t\left[\left(A\left(I_{t+1}\right) R_t\right)^{\alpha}\right]}_{\equiv \phi}\right)^{\frac{\rho}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\rho}} = \\
&= \max_{c_t \geq 0, w_t \in S^K} \left[c_t^{\rho} + \beta (W_t - c_t)^{\rho} \left(\phi\left(A_{t+1} R_t\right)\right)^{\frac{\rho}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}
$$

Então, temos como condição de primeira ordem para w_{kt}, em que escrevemos $c_t^* = a_t W_t$ tal que $A^{\rho}(I_t) = a_t^{\rho} + \beta (1 - a_t)^{\rho} \phi^{\frac{\rho}{\alpha}}$:

$$
E_t\left[A_{t+1}^{\alpha} R_t^{\alpha-1} r_{kt}\right] = 0, k = 1, 2, \ldots, K,
$$

e para consumo, a condição de primeira ordem é:

$$a_t^{\rho-1} = \beta\left(1-a_t\right)^{\rho-1}\phi^{\frac{\rho}{\alpha}}. \tag{9}$$

Portanto:

$$E_t\left[A_{t+1}^{\alpha}R_t^{\alpha-1}\left(r_{kt}-r_{it}\right)\right] = 0, k = 1,2,\ldots,K-\{i\}.$$

Ou seja, tomamos o modelo em excesso de retorno com relação a um particular ativo i.

Sabemos que $A\left(I_{t+1}\right) = \left(\frac{c_{t+1}}{W_{t+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$. Substituindo na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= E_t\left[\left(\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\left(\frac{c_t}{W_{t+1}}R_t\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}R_t^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\alpha}\frac{1}{R_t}\left(r_{kt}-r_{it}\right)\right] = \\
&= E_t\left[\left(\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}R_t^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\alpha}\frac{1}{R_t}\left(r_{kt}-r_{it}\right)\right],
\end{aligned}$$

pois $\left(\frac{c_t}{W_{t+1}}R_t\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} = \left(\frac{c_t}{W_t-c_t}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$, que é um termo conhecido em t.

A outra equação de Euler é obtida manipulando-se 9:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a_t}{1-a_t}\right)^{\rho-1} &= \beta\left(E_t\left[\left(A\left(I_{t+1}\right)R_t\right)^{\alpha}\right]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \Longrightarrow \\
\left(\frac{c_t}{W_t-c_t}\right)^{\rho-1} &= \beta\left(E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{W_{t+1}}\right)^{\alpha\frac{\rho-1}{\rho}} R_t^{\alpha}\right]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \Longrightarrow \\
\left(\frac{c_t}{W_t-c_t}\right)^{\rho-1} &= \beta\left(E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{\rho-1}{\rho}}\left(\frac{c_t}{W_{t+1}}\right)^{\alpha\frac{\rho-1}{\rho}} R_t^{\alpha}\right]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \Longrightarrow \\
\left(\frac{c_t}{W_t-c_t}\right)^{\rho-1} &= \beta\left(E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{\rho-1}{\rho}}\left(\frac{c_t}{W_t-c_t}\right)^{\alpha\frac{\rho-1}{\rho}} R_t^{-\alpha\frac{\rho-1}{\rho}} R_t^{\alpha}\right]\right)^{\frac{\rho}{\alpha}} \Longrightarrow \\
1 &= \beta\left[E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha}{\rho}}\right]\right]^{\frac{\rho}{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, as duas equações de Euler são:

$$
\begin{aligned}
\beta\left[E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha}{\rho}}\right]\right]^{\frac{\rho}{\alpha}} &= 1; \text{ e} \\
E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}}\left(r_{kt}-r_{it}\right)\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

Observe, também que

$$
E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}} r_{kt}\right] = E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}} r_{it}\right].
$$

Assim, se multiplicarmos ambos os lados por w_i e somarmos em $i \neq k$[11],

[11] Observe que $\sum_{i\neq k} w_i r_k - \sum_{i\neq k} w_i r_i = (1-w_k)\,r_k - (R - w_k r_k) = r_k - R$.

obtemos:

$$\beta\left[E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}} r_{kt}\right]\right]^{\frac{\rho}{\alpha}} = 1, k = 1, 2, \ldots, K.$$

Considere $\frac{\alpha}{\rho} = \gamma$. Observe que podemos reescrever a fórmula anterior como $E_t\left[\left(\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{(\rho-1)}\right)^{\gamma}\left(R_t^{-1}\right)^{1-\gamma} r_{kt}\right] = 1$. Pode-se, então, claramente observar quer a taxa marginal de substituição intertemporal (IMRS) neste modelo é uma média geométrica entre a IMRS do modelo convencional de utilidade esperada e o modelo logarítmico de utilidade esperada.

Lembrando que $cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$. Temos, pois:

$$E_t\left[r_{kt} - r_{it}\right] = -\frac{Cov_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}}, (r_{kt} - r_{it})\right]}{E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}}\right]}.$$

Conseqüentemente, consumo e retorno de mercado entram na covariância que define o risco sistemático. Para obtermos o CAPM-consumo, basta que $\alpha = \rho$. Neste caso:

$$\begin{aligned} E_t\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{(\rho-1)} R_t\right] &= 1 \\ E_t\left[r_{kt} - r_{it}\right] &= -\frac{Cov_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\rho-1}, (r_{kt} - r_{it})\right]}{E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\rho-1}\right]}. \end{aligned}$$

Se restringimos $\alpha = 0$ (ou $\rho = 1$- elasticidade infinita de substituição), obtemos que a covariância do retorno de mercado apenas determina os riscos sistemáticos que é um resultado do CAPM estático:

$$E_t\left[r_{kt} - r_{it}\right] = -\frac{Cov_t\left[R_t^{-1}, (r_{kt} - r_{it})\right]}{E_t\left[R_t^{-1}\right]}$$

Podemos calcular o preço recursivamente agora, uma vez que

$$\beta^{\frac{\alpha}{\rho}} E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} R_t^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}}\left(P_{k,t+1} + q_{k,t+1}\right)\right] = P_{k,t},$$

em que $P_{k,t}$ é o preço do ativo k e $q_{k,t+1}$ é o "payoff" desse ativo.

A solução é facilmente calculada como:

$$P_{k,t} = E_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{\frac{\alpha}{\rho}j}\left(\frac{c_{t+j+1}}{c_t}\right)^{\alpha\frac{(\rho-1)}{\rho}} \prod_{i=1}^{j} R_{t+i-1}^{\frac{\alpha-\rho}{\rho}} q_{k,t+j}\right].$$

2.2.1 Alguns Resultados Empíricos

Em seu artigo empírico Epstein e Zin (1991) empregam dados mensais, divididos em 3 subperíodos, e várias definições para consumo, bem como tomam vários retornos de ativos agregados, estimando por GMM. Encontram que a elasticidade de substituição tipicamente é pequena, corroborando pesquisas similares. Porém o fator de desconto é sempre maior do que 1, o que significa que o modelo não consegue ainda resolver o "equity premium puzzle", não obstante dê passos largos nessa direção. Além disso, afirmam que muitos dos resultados são sensíveis à especificação da medida de consumo e à escolha das variáveis instrumentais.

Bansal e Yaron (2000) também aplicam o modelo anterior para tentar resolver o "equity premium puzzle". Eles modelam o crescimento do consumo e dos dividendos como um modelo ARMA $(1,1)$ e admitem, adicionalmente, um modelo GARCH $(1,1)$ para a variância condicional das inovações. Usando essas hipóteses mais a linearização logarítmica dos retornos os autores obtêm analiticamente o preço de equilíbrio dos retornos, e estimam os parâmetros de preferência e de crescimento. Com isso, conseguem explicar muito bem o prêmio de risco, a baixa taxa de juros livre de risco, a volatilidade dos retornos de mercado e o poder de previsão da razão entre preço e dividendos.

2.3 Utilidade Diferencial Estocástica

Muito da intuição sobre utilidade recursiva já foi dada anteriormente. Baseados em Duffie e Epstein (1992a e 1992b). Vamos aqui apenas dar umas pinceladas no modelo, sem o derivar formalmente. Nosso objetivo é apresentar as hipóteses principais.

Em primeiro lugar, o período de tempo está contido no intervalo $[0,T]$, sendo o espaço de probabilidade dado por $(\Omega, \Im, P)$, com a filtragem $\mathbb{F} = (\Im_t : t \in [0,T])$ de σ-álgebras de $\Im$ satisfazendo as condições usuais (contínua à direita, crescente, e aumentada).

Assuma que V denota o espaço de processos integráveis ao quadrado e previsíveis[12] tal que

$$V \equiv \left\{ \text{previsível } v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, E\left[\int_0^t v_s^2 ds\right] < \infty, t \in [0,T] \right\}.$$

[12]Se $T = \infty$, então a hipótese de integrabilidade ao quadrado pode ser substituída por $E\left[\int_0^\infty e^{\beta t} v_s^2 ds\right] < \infty$, em que β é a constante caracterizada no Apêndice C de Duffie e Epstein (1992).

em que Ω é o espaço de estado. Aqui *previsível* significa mensurável com respeito à σ-álgebra gerada pelo processo contínuo à esquerda adaptado à filtragem do agente; isto é, v_t depende apenas da informação disponível até o período t.

Os processos de consumo são avaliados num subconjunto convexo de algum espaço de Banach separável, integrável ao quadrado[13]. Assume-se que:

Propriedade 3 *(i)* $\widetilde{\mu}(\delta_x) = x$, $x \in X$, *em que* X *é um intervalo mensurável na linha real,* δ_x *denota medida de Dirac. (ii) (monotonicidade)* $\widetilde{\mu}(p') \geq \widetilde{\mu}(p)$ *se* p' *exibe dominância estocástica de primeira ordem sobre* p.

Um exemplo de funções assim é a especificação de utilidade esperada:

$$\widetilde{\mu}(J) = h^{-1}(E[h(J)]),$$

em que J é uma variável aleatória real integrável, e h é o índice de von Newmann-Morgenstern contínuo, estritamente crescente, satisfazendo as condições de crescimento (ver Duffie e Epstein, 1992a, p. 358).

Pelo teorema da função implícita em tempo discreto, podemos encontrar

$$\widetilde{\mu}(J_{t+1}|\Im_t) = G(c_t, J_t).$$

Esta versão discreta pode ser aproximada para o caso contínuo de tal sorte que

$$\frac{d}{ds}\widetilde{\mu}(J_{t+s}|\Im_t)|_{s=0} = -f(c_t, J_t),$$

[13]Ou seja $c \in \mathbb{R}^V$.

em que f é uma função $f : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Logo o par $(f, \widetilde{\mu})$ é chamado de *agregador*.

Assim, f determina o grau de substituição intertemporal de consumo e outros aspectos das preferências por certeza. Adicionalmente, é claro que f gera atitudes de risco em função da incerteza. Dado f, entretanto, as atitudes são fixada pelo equivalente certeza $\widetilde{\mu}$, que não exerce nenhum efeito sobre a substituição intertemporal. Logo, separam-se substitutabilidade intertemporal de aversão ao risco.

Dadas algumas hipóteses sobre o comportamento de $\widetilde{\mu}$, podemos derivar a equação diferencial estocástica para J. Para isso, é preciso definir a derivada de Gateaux. Essas condições são tratadas da seção 3.1 de Duffie e Epstein. Para nossos propósitos é suficiente dizer quer $M : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é representação do gradiente local de $\widetilde{\mu}$ e que a derivada dupla em relação ao primeiro argumento $M_{11} \equiv \kappa$, em que $\kappa \equiv \frac{h''(J)}{h'(J)} < 0$ é o multiplicador da variância. Com esse instrumental, Duffie e Epstein (1992a) demonstram formalmente que a utilidade diferencial estocástica é dada por:

$$U = E_t \int_{s \geq t} \left[f\left(c_s, J\left(x_s\right)\right) + \frac{1}{2} \kappa \left(J\left(x_s\right)\right) J'_{x_s} \Sigma J_{x_s} \right] ds$$

em que $dx_t = \mu\left(x_t\right) dt + \Lambda\left(x_t\right) dB_t$, $\{B_t : t \geq 0\}$ é um movimento browniano de dimensão n, tr é o operador traço, $\Lambda\left(x_t\right) \Lambda'\left(x_t\right) = \Sigma\left(x_t\right)$, sendo x_t e μ vetores $n \times 1$ e Λ uma matriz $n \times n$.

Os autores mencionados provam a existência da utilidade diferencial estocástica que satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 4 *(Continuidade) A utilidade diferencial estocástica* $U : V \rightarrow$

$\mathbb{R}$ *é contínua.*

Propriedade 5 *(Consistência Temporal) A família de ordens de preferência gerada por f é consistente.*

Propriedade 6 *(Monotonicidade no Consumo) Se f é (estritamente) crescente no consumo, então U é (estritamente) crescente.*

Propriedade 7 *(Concavidade) Suponha que f é uma função côncava. Então a utilidade diferencial estocástica gerada por f é côncava.*

Propriedade 8 *(Aversão ao Risco Comparada) Sejam U^* e U utilidades diferenciais estocásticas geradas pelos agregadores $(f, \widetilde{\mu}^*)$ e $(f, \widetilde{\mu})$, respectivamente, onde $\widetilde{\mu}^*$ e $\widetilde{\mu}$ têm multiplicadores contínuos de variância κ^* e κ. Então, U^* é mais avesso ao risco que U se $\kappa^* \leq \kappa$.*

Propriedade 9 *(Homoteticidade) Uma utilidade diferencial estocástica, cujo agregador é dado por $(f^*, \widetilde{\mu}^*)$ é homotética se, e somente se, existe um agregador ordinalmente equivalente $(f, \widetilde{\mu})$ satisfazendo (i) f é homogênea de grau 1; e (ii) O multiplicador da variância de $\widetilde{\mu}$ é homogêneo de grau -1.*

2.3.1 Apreçamento de Ativos

Nesta tese apresentamos um exemplo de aplicação das técnicas aqui. Entretanto, oferecemos o exemplo retirado de Duffie e Epstein (1992b).

Seja $dx_t = \mu(x_t)\,dt + \Lambda(x_t)\,dB_t$, como já definido anteriormente e J a equação de Bellman denotando a utilidade máxima no estado x com riqueza w. Denote $\lambda(x) \in \mathbb{R}^K$ o vetor dos excessos de retornos esperados nos K ativos em relação ao ativo livre de risco $r(x)$. Seja $\sigma(x)$ a matriz $K \times n$

denotando os coeficientes de difusão dos preços dos K ativos de risco. O processo de estado é dado por $\{(x_t, W_t)\}$, onde W representa a riqueza que satisfaz:

$$dW_t = [W_t z_t' \lambda(x_t) + W_t r(x_t) - c_t]\, dt + W_t z_t' \sigma(x_t)\, dB_t,$$

em que $\{(c_t, z_t)\}$ é a carteira consumo de controle, com $z_t \in \mathbb{R}^K$ representando as frações da renda investidas nos K ativos de risco.

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman é dada por:

$$\sup_{(c,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^K} \quad J_x\mu + J_w(wz'\lambda + wr - c) +$$
$$\frac{1}{2}tr\left(\begin{pmatrix} \Lambda' & w\sigma' z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xw} \\ J_{wx} & J_{ww} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda \\ wz'\sigma \end{pmatrix}\right) + f(c, J).$$

As condições de primeira ordem nos dão para o consumo e para a carteira z são, respectivamente:

$$\begin{aligned} f_c &= J_w; \\ -J_w w\lambda &= J_{ww}\sigma\sigma' z w^2 + \sigma\Lambda' J_{wx} w. \end{aligned}$$

Como

$$-\lambda = \frac{J_{ww}}{J_w}\sigma\sigma' z w + \sigma\Lambda' \frac{J_{wx}}{J_w}.$$

Da condição de primeira ordem do consumo, derivamos:

$$\begin{aligned} J_{ww} &= f_{cc}C_w + f_{cJ}J_w; \\ J_{wx} &= f_{cc}C_x + f_{cJ}J_x. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na equação para o excesso de retorno, temos:

$$-\lambda = \frac{f_{cc}}{J_w}\sigma\sigma'_c + f_{cJ}\sigma\sigma' zw + \frac{f_{cJ}}{J_w}\sigma\Lambda' J'_x,$$

em que $\sigma_c = C_x\Lambda + C_w wz'\sigma$.

O vetor $\Sigma_{RC} \equiv \sigma\sigma'_c$ é o vetor de covariância instantânea dos retornos dos ativos com incrementos no consumo. Podemos ver que $\Sigma_{RM} \equiv \sigma\sigma' z_t W_t$ é o vetor de covariâncias instantâneas dos retornos dos ativos com incrementos no valor da carteira de mercado. Se supusermos preferências homotéticas, onde J é homogêneo com relação à riqueza, por exemplo, $J(x,w) = j(x)\,w^{\gamma}$, então

$$f_{cc}C_x = \left(\gamma w^{-1} - f_{cJ}\right) J_x.$$

Neste caso temos que

$$\lambda = k_1\Sigma_{RC} + k_2\Sigma_{RM}.$$

Ou seja, o retorno de mercado é determinado pela combinação linear das covariâncias dos modelos de consumo-CAPM de Breeden (1979) e do retorno-CAPM de Merton (1973).

Os parâmetros k_1 e k_2 são determinados pelas elasticidade intertemporal de substituição e pelo parâmetro de aversão ao risco, γ e α, respectivamente, em que α é um parâmetro contido no agregador.

Discutiremos mais o significado do terceiro termo no próximo capítulo. Uma discussão mais profunda do modelo apresentado é encontrado no texto dos autores no qual se baseia o exemplo.

3 SEMIGRUPOS E APREÇAMENTO DE ATIVOS

Neste capítulo, apresentamos a teoria de semigrupos e a aplicamos para o apreçamento de ativos. A seção seguinte aplica a mesma técnica desenvolvida aqui para o caso específico de hedge dinâmico. Nossa abordagem será razoavelmente formal. Seguimos muito proximamente Ait-Sahalia, Hansen e Scheinkman (2002) e Hansen e Scheinkman (2002) .

3.1 Intuição

Apreçamento de ativos pode ser modelado como sendo a associação de preços na data presente com "payoffs" em datas futuras. Portanto, podemos pensar num operador mapeando um "payoff" futuro a um preço hoje. Para cada data de "payoff" existe um operador distinto. Assim, podemos construir uma família de operadores de apreçamento indexados pela data dos "payoffs". Essa família de operadores é chamada de *semigrupo*. O que nos interessa é a evolução desses operadores quando há variações no tempo.

A abordagem de integração estocástica é mais geral do que esta, que se baseia na estrutura de Markov. Contudo, aplicações práticas em geral costumam recair em uma estrutura de Markov. A principal vantagem de nossa abordagem, ainda que mais específica, é tornar os cálculos mais fáceis e diretos, aproveitando essa estrutura usada na grande maioria dos modelos.

Um semigrupo tipicamente é modelado em termos de um *gerador infinitesimal*, que é um operador que captura preços locais, ou seja, os preços dos "payoffs" que ocorrem numa pequena unidade de tempo. O gerador infinitesimal mede quão rápido o valor presente declina com o tempo; em um pequeno período de tempo, tal declínio será aproximadamente igual à taxa de juros instantânea multiplicada pelo intervalo de tempo no caso de ambiente sem incerteza (ver Garman, 1985)[14]. O semigrupo inteiro pode ser construído desse gerador por meio de uma fórmula exponencial. Em particular, esses operadores fornecem métodos para ligar o apreçamento local ao apreçamento de longo prazo de ativos. Ao passo que modelos em tempo contínuo são mais simples por apreçarem pequenos incrementos, os métodos aqui fornecidos permitem-nos enriquecer nosso entendimento de como os preços incrementais se transmitem aos preços dos ativos cujas datas de "payoff" são bem distantes. Assim, o objetivo deste capítulo é, principalmente, descrever os métodos de operadores e mostrar como adaptá-los e modificá-los para apreçar ativos.

3.2 Semigrupo e Gerador Infinitesimal

Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade, Ξ um espaço métrico compacto com uma base contável E, σ-álgebra de borelianos em Ξ, e I um intervalo na linha real. Para cada $t \in I$, seja X_t um processo estocástico tal que $X_t : (\Omega, \Im, P) \rightarrow (\Xi, E)$ é uma função mensurável, em que (Ξ, E) é um espaço de estado.

Definição 3 $Q : (\Xi, E) \rightarrow [0, \infty]$ *é uma probabilidade de transição se* $Q(x, \cdot)$ *é uma medida de probabilidade em* Ξ, *e* $Q(\cdot, B)$ *é mensurável para cada* $(x, B) \in (\Xi \times E)$.

[14]Este é um excelente texto introdutório à teoria de semigrupos.

Definição 4 *Uma função de transição é uma família $Q_{s,t}$, $(s,t) \in I^2, s < t$ que satisfaz para cada $s < t < u$ a equação de Chapman-Kolmogorov*

$$Q_{s,u}(x,B) = \int Q_{t,u}(y,B)\, Q_{s,t}(x,dy)\,.$$

Uma função de transição é homogênea se $Q_{s,t} = Q_{s',t'}$ quando $t - s = t' - s'$.

Definição 5 *Seja $\Im_t \in \Im$ uma família crescente de σ-álgebras, e X um processo estocástico que é adaptado a $\Im_t$. X é um processo de Markov com função de transição $Q_{s,t}$ se, para cada medida mensurável de Borel $\phi : \Xi \to \mathbb{R}$ não negativa e cada $(s,t) \in I^2, s < t$, temos:*

$$E\left[\phi(X_t)\,|\Im_s\right] = \int \phi(y)\, Q_{s,t}(X_s, dy)\,.$$

Assuma que Q_t é uma função de transição homogênea e que L é um espaço vetorial de funções reais tal que para cada função teste $\phi \in L$, $\int \phi(y)\, Q_t(x,dy) \in L$. Sendo assim, para cada t defina o operador de esperança condicional:

$$\mathcal{T}_t\phi(x) = E\left[\phi(y_t)\,|x_0 = x\right] = \int \phi(y)\, Q_t(x,dy)\,.$$

A equação de Chapman-Kolmogorov garante que os operadores lineares $\mathcal{T}_t$ satisfazem $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t\mathcal{T}_s$.

A seguir, podemos propor uma parametrização para os processos de Markov. Para isso, seja $(L, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach.

Definição 6 *Diz-se que L é uma espaço de Banach se é normado e completo.*

Definição 7 *Seja $\mathcal{T}_t : L \rightarrow L$, $t > 0$. Então $\mathcal{T}_t$ é limitado se, e somente se*

$$\| \mathcal{T}_t\phi \| \leq b \| \phi \| .$$

Se $b = 1$, dizemos que $\mathcal{T}_t$ é uma contração.

Definição 8 *Uma família de um parâmetro de operadores lineares em L, $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ é um semigrupo se*

a. $\mathcal{T}_0 = I$; *e*

b. $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t\mathcal{T}_s$ *para todo* $s, t \geq 0$.

O semigrupo é uma contração fortemente contínua se

c. $\lim_{t\rightarrow 0}\mathcal{T}_t\phi = \phi$; *e*

d. $\|\mathcal{T}_t\| \leq 1$.

Podemos pensar que o operador $\mathcal{T}$ aplicado ao "payoff" contingente ao estado $\phi(x)$ nos dá o preço desse "payoff" na data de hoje.

A propriedade *b.* captura a noção de que, com negociações intermediárias, um "payoff" em $t + s$ pode ser comprado na data zero ou, alternativamente, comprado na data t e depois apreçado à data de hoje. Assim, essa propriedade do semigrupo é uma propriedade de valor iterado que conecta preços em diferentes intervalos de preços, constituindo uma versão da *Lei do Preço Único* (ver Cochrane, 2001).

Forte continuidade é uma condição técnica que impõe uma estrutura extra sobre os preços. Em particular, ela implica um limite exponencial sobre o apreçamento via semigrupo, ou seja, $\|\mathcal{T}_t\| \leq M \exp(\delta t)$, para algum $M \geq 1$ e para algum δ positivo (veja Ethier and Kurtz, 1986, Prop. 1.1, página 7).

Definição 9 $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ *é positivo se $\mathcal{T}_t\phi \geq 0$, quando $\phi \geq 0$.*

A hipótese de positividade é mais fraca que a familiar restrição de não arbitragem de Finanças.

Em geral, o semigrupo de esperanças condicionais determina as distribuições de dimensão finita dos processos de Markov, como podemos inferir de Ethier e Kurtz (1986, Prop. 1.6 do capítulo 4).

A satisfação das propriedades enunciadas dá origem ao chamado semigrupo de contração positiva fortemente contínua (SCPC).

Exemplo 3 *Operadores de Transição para processos de Markov - Seja* $\{x_t\}$ *um processo de Markov. Usando* $\mathcal{T}_t\phi(x) = E[\phi(y_t)|x_0 = x]$, *temos:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_t c &= c; \\
\mathcal{T}_{t+s}\phi(x) &= E[\phi(y_{t+s})|x_0 = x] \overset{LIE}{=} E[E[\phi(y_{t+s})|y_t]|x_0 = x] = \\
&= E\left[\underbrace{\mathcal{T}_s\phi(y_t)}_{\equiv\psi(y_t)}|x_0 = x\right] = E[\psi(y_t)|x_0 = x] = \mathcal{T}_t\psi(x) = \\
&= \mathcal{T}_t\mathcal{T}_s\phi(x).
\end{aligned}$$

LIE significa Lei das Expectativas Iteradas, c é uma constante. Logo $\mathcal{T}_t$ *é um semigrupo.*

Exemplo 4 *Seja* ϕ *um direito sobre o consumo e* $\mathcal{T}_t\phi$ *o preço de* $\phi(x_t)$ *na data zero. Pela equação de preço de Lucas (1978)*

$$\mathcal{T}_t\phi(x) = E\left[\beta^t \frac{MU(y_t)}{MU(y_o)}\phi(y_t)|x_0 = x\right].$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0\phi &= \phi; \\
\mathcal{T}_{t+s}\phi(x) &= E\left[\beta^{t+s}\frac{MU(y_{t+s})}{MU(y_o)}\phi(y_{t+s})\,|x_0 = x\right] \stackrel{LIE}{=} \\
&= E\left[\beta^{t}\frac{MU(y_t)}{MU(y_o)}E\left[\beta^{s}\frac{MU(y_{t+s})}{MU(y_t)}\phi(y_{t+s})\,|y_t\right]|x_0 = x\right] = \\
&= E\left[\beta^{t}\frac{MU(y_t)}{MU(y_o)}\mathcal{T}_s\phi(y_t)\,|x_0 = x\right] = \mathcal{T}_t\mathcal{T}_s\phi(x).
\end{aligned}$$

MU representa utilidade marginal.

Logo, $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ é um semigrupo. Para apreçamento, não é o caso de $\mathcal{T}_t c = c$, isto é, $\mathcal{T}_t c \neq c$, porém esperamos que positividade seja satisfeita: $\mathcal{T}_t\phi \geq 0$, quando $\phi \geq 0$ (condição de não arbitragem), pois $\beta^t\frac{MU(y_t)}{MU(y_o)} > 0$.

Podemos a seguir definir os geradores infinitesimais. Um gerador descreve a evolução instantânea de um semigrupo. Heuristicamente, poderíamos pensar como sendo a derivada do operador $\mathcal{T}$ com relação ao tempo, quando este tende a zero.

Definição 10 *O gerador infinitesimal do semigrupo $\mathcal{T}_t$ em um espaço de Banach L é o operador linear (possivelmente ilimitado) $\mathcal{A}$, definido por*

$$\mathcal{A}\phi = \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathcal{T}_t\phi - \phi}{t}.$$

O domínio $D(\mathcal{A})$ é o subespaço de L para o qual o limite existe.

Se $\mathcal{T}_t$ é um semigrupo de contração fortemente contínua, podemos reconstruir $\mathcal{T}_t$ usando seu gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ (veja Ethier e Kurtz (1986), Prop. 2.7 do capítulo 1). Assim, o processo de Markov pode ser parametrizado usando $\mathcal{A}$[15].

O espaço $\mathcal{C}$ de funções contínuas em um espaço compacto dotado com sup norm é um domínio usual para o semigrupo. Por exemplo, o gerador $\mathcal{A}$ de um processo de difusão multivariado é uma extensão de operador diferencial de segunda ordem, como veremos explicitamente na próxima seção.

3.3 Difusão e Salto

Proposição 1 *Seja $dx_t = \mu(x_t)\,dt + \Lambda(x_t)\,dB_t$, em que $\{B_t : t \geq 0\}$ é um movimento browniano de dimensão n, tr é o operador traço, $\Lambda(x_t)\Lambda'(x_t) = \Sigma(x_t)$, e $\phi \in C^2$, sendo x_t e μ vetores $n \times 1$ e Λ uma matriz $n \times n$. Então:*

$$\mathcal{A}\phi(x) \equiv \frac{d}{dt}E_x[\phi(x_t)]_{|t=0+} = \mu \cdot \phi_x + \frac{1}{2}tr[\Sigma\phi_{xx}],$$

em que $\frac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \phi_x$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial x'} \equiv \phi_{xx}$.

Prova. *Primeiro, note que $x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s)\,ds + \int_0^t \Lambda(x_s)\,dB_s$. Logo*

[15] Observe apenas que, se $\mathcal{A}$ é o gerador de um semigrupo em L fortemente contínuo, então $D(\mathcal{A})$ é denso em L e $\mathcal{A}$ é um operador fechado (veja Ethier e Kurtz (1986), Cor. 1.6, pg. 10).

pelo Lema de Itô temos que:

$$\begin{aligned}
\phi(x_t) &= \phi(x_0) + \int_0^t \left[\mu \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}tr\left[\Sigma\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'}\right]\right] ds + \int_0^t \Lambda\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot dB_s \Longrightarrow \\
\frac{\mathcal{T}_t\phi(y)-\phi(y)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t E\left[\underbrace{\mu\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}tr\left[\Sigma\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'}\right]}_{\equiv\psi(x_s)}|y=x_0\right] ds = \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t E\left[\psi(x_s)\,|y=x_0\right] ds.
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha, aplicamos o operador esperança condicional e o Teorema de Fubini para colocar esse operador dentro da integral. Tomando os limites:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathcal{T}_t\phi(y)-\phi(y)}{t} &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t E\left[\psi(x_s)\,|y=x_0\right] ds \Longrightarrow \\
\mathcal{A}\phi(x) &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}_s\psi(y)\, ds = \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\mathcal{T}_0\psi(y) = \mu\cdot\phi_x + \frac{1}{2}tr\left[\Sigma\phi_{xx}\right].
\end{aligned}$$

■

Interpreta-se $\mathcal{A}\phi(x)$ como sendo a média local da seqüência $\{\phi(x_t)\}$. O segundo termo de $\mathcal{A}\phi(x)$ representa a correção de covariância em função das não linearidades da função $\phi(x)$.

O domínio deste operador diferencial de segunda ordem é restrito ao de espaço de funções contínuas duplamente diferenciávies com suporte compacto.

Processos de difusão são contínuos em todo lugar. Porém, não raro, queremos modelar uma variável econômica como um processo que dá saltos infreqüentes, mas discretos, como um processo de Markov de saltos. Podemos pensar num processo de saltos como uma especificação de uma cadeia de Markov temporalmente discreta com probabilidades de transição. Para isso denote $\lambda \geq 0$ como a freqüência de saltos, $\mathcal{S}$ como o operador de condicional às probabilidades de transição. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t \phi &\simeq \lambda t \mathcal{S} \phi + (1 - \lambda t) \phi + o(t), \\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{A}\phi = \lambda (\mathcal{S}\phi - \phi) = \lambda (\mathcal{S} - \mathcal{I}) \phi.$$

Note que $\mathcal{S}$ é um operador de transição de um período apenas. Para tornar isso mais claro, usamos um exemplo:

Exemplo 5 $\mathcal{A}\phi = \int \underbrace{[\phi(y) - \phi(x)]}_{\text{tamanho do salto}} \underbrace{\eta(dy|x)}_{\text{freqüência do salto}}$. *Defina agora* $\lambda \equiv \int \eta(dy|x)$, *logo temos que* $\mathcal{A}\phi = \lambda \int [\phi(y) - \phi(x)] \eta^* (dy|x)$, $\eta^*(dy|x) = \frac{\eta(dy|x)}{\lambda}$. *Este termo pode ser interpretado como uma probabilidade. Assim* $\int [\phi(y) - \phi(x)] \eta^* (dy|x)$ *pode ser interpretado como o salto médio. Finalmente o termo* λt *funciona como uma probabilidade para* t *bem pequeno.*

Generalizemos um pouco mais, para os processos SCPC, que têm um desenho conveniente de seus geradores. Assuma que o domínio do gerador contém C^{∞}. Associado com cada gerador estão quatro elementos cuja origem é provada em Revuz e Yor (1994):

1. Uma medida de Radon positiva $\eta(dy|x)$ que é finita sobre algum conjunto compacto que exclui x e associa medida zero ao elemento $\{x\}$ e

$$\int \frac{|y-x|^2}{1+|y-x|^2}\eta(dy|x) < \infty;$$

2. Uma função não negativa ρ;

3. Um vetor n-dimensional μ de funções;

4. Uma matriz positiva semidefinida Σ.

O gerador de um semigrupo SCPC é:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi(x) &= -\rho(x)\phi(x) + \mu(x)\cdot\phi_x(x) + \frac{1}{2}tr\left[\Sigma(x)\phi_{xx}(x)\right] + \\ &+ \int\left[\phi(y) - \phi(x) - \frac{y-x}{1+|y-x|^2}\cdot\phi_x(x)\right]\eta(dy|x). \end{aligned}$$

O ajustamento $\frac{y-x}{1+|y-x|^2}$ é necessário porque a medida pode não ser finita. Não fosse assim, poderíamos fundi-lo com o "drift". Naturalmente, essa formulação é uma generalização do processo com saltos.

No máximo $\phi_x = 0$. Sendo assim $\int(\phi(y)-\phi(x))\eta(dy|x) < 0$, pois $\phi(y) < \phi(x)$; $-\rho(x)\phi(x) < 0$; e, como $\Sigma(x)\phi_{xx}(x)$ é negativa semidefinida, o processo sataisfaz o princípio do máximo positivo (veja Revuz e Yor, prop. 2.2 do cap. 3).

3.4 Distribuição de Preços

Dados esses conceitos, vamos provar uma importante proposição a respeito dos geradores infinitesimais, pela qual sua esperança, definida para uma medida estacionária, é nula. Com essa propriedade, poderemos derivar as distribuições de preço, necessárias para simulações que se queiram fazer.

Proposição 2 *Suponha uma distribuição estacionária Q. Então, $\int \mathcal{A}\phi dQ = 0$.*

Prova. *Podemos escrever $E[\phi(x_t)] = \int \phi dQ$.*

Pela lei das expectativas iteradas:

$$E[\phi(x_t)] = E[E[\phi(x_t)|x_0]] = \int \mathcal{T}_t\phi dQ.$$

Por conseguinte:

$$\int \mathcal{T}_t\phi dQ = \int \phi dQ.$$

Assim:

$$\lim_{t\downarrow 0} \int \frac{\mathcal{T}_t\phi - \phi}{t} dQ = 0 \Longrightarrow \int \mathcal{A}\phi dQ = 0$$

■

Vamos usar essa proposição para descobrirmos a densidade da distribuição estacionária, no caso escalar.

Exemplo 6 $\mathcal{A}\phi(x) = \mu(x)\phi'(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2}\phi''(x)$, *em que assumimos que ϕ tem suporte compacto e é duplamente diferenciável. Pela proposição que* *acabamos de provar*

$$\int \mu\phi' q(x) + \int \frac{\sigma^2}{2}\phi'' q(x) = 0.$$

Integrando a segunda parcela por partes em x:

$$\int \phi' \left[\mu q - \frac{(\sigma^2 q)'}{2}\right] + \frac{\sigma^2}{2}\phi' q|_a^b = 0.$$

Como o suporte é compacto, $\phi'(a) = \phi'(b) = 0$. Então, considerando a liberdade de escolha das funções testes, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \mu q - \frac{(\sigma^2 q)'}{2} \Longrightarrow \mu q = \frac{\sigma^{2\prime} q}{2} + \frac{\sigma^2 q'}{2} \Longrightarrow \\
\frac{q'}{q} &= \frac{2\mu - \sigma^{2\prime}}{\sigma^2} \Longrightarrow \ln q = \int \frac{2\mu - \sigma^{2\prime}}{\sigma^2} \Longrightarrow \\
q(y) &\propto \exp\left[\int_a^y \frac{2\mu - \sigma^{2\prime}}{\sigma^2}\right].
\end{aligned}$$

Sendo assim, se conhecermos σ^2, por estimação não paramétrica, podemos recuperar a densidade q. Podemos, então, construir algumas distribuições freqüentemente encontrada na literatura:

1. Com σ^2 constante e μ linear com inclinação negativa, obtemos a densidade Normal, pela qual definimos o modelo de Vasicek (ou Ornstern-Unhlenbeck);

2. Com σ^2 linear, isto é $\sigma^2 \propto y$ e μ linear com inclinação negativa, obtemos o modelo CIR (ou processo raiz quadrada de Feller). Nesse caso, com $\mu(y) = \mu_0 + \mu_1 y$, temos $\int_0^x \frac{2\mu_0}{y} + \int_0^x 2\mu_1 - \int_0^x \frac{1}{y} = \ln q(x) + K$, onde K é a constante de integração;

3. Se tivermos μ constante com inclinação negativa, e σ^2 também positivo e constante, obtém-se um movimento browniano com tendência, resultando numa distribuição exponencial;

4. Se μ é uma polinomial de primeira ordem com inclinação negativa e $\sigma^2 \propto y^2$, então q será do tipo caudas algébricas, resultando no modelo GARCH (1,1) de Nelson (1990) em tempo contínuo.

3.5 Apreçamento de Ativos

Para ficar mais intuitiva a notação, substituiremos o operator $\mathcal{T}$ por $\mathcal{P}$ que agora significará claramente preço. O operador $\mathcal{P}$ possui todas as propriedades discutidas anteriormente, ou seja, é um semigrupo de um parâmetro de contração positiva fortemente contínua. Com isso, $\phi(x_t)$ é o "payoff" na data t, $\mathcal{P}\phi(x)$ é preço na data zero caso o estado corrente seja x.

Pode-se ver que $\|\mathcal{P}_t\| = \sup\limits_{\|\psi\|\leq 1} \|\mathcal{P}_t\psi\|$, em que $\|\psi\| = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \|\psi\|$, pois o espaço de funções é o de Banach. Continuidade forte implica que $\|\mathcal{P}_t\| \leq M \exp(\delta t)$, para algum δ e $M \geq 1$. Assumindo $M = 1$, temos a contração fraca:

$$\inf_{\delta} \left\|e^{-\delta t}\mathcal{P}_t\right\| \leq 1.$$

Proposição 3 *Definindo $\mathcal{Q}_t = e^{-\delta t}\mathcal{P}_t$, então $\{\mathcal{Q}_t : t \geq 0\}$ é um semigrupo.*

Prova. $\mathcal{Q}_{\bar{t}+s}\phi = e^{-\delta(t+s)}\mathcal{P}_{t+s}\phi = e^{-\delta t}\mathcal{P}_t e^{-\delta s}\mathcal{P}_s\phi = \mathcal{Q}_t\mathcal{Q}_s\phi$. ■

Supondo que $\mathcal{B}$ seja o gerador do semigrupo de apreçamento $\{\mathcal{P}_t : t \geq 0\}$, então $(\mathcal{B} - \delta\mathcal{I})$ é o gerador para $\{\mathcal{Q}_t : t \geq 0\}$. Um argumento heurístico para entender essa relação é imaginar a derivada de $\mathcal{Q}$ com relação ao tempo convergindo pela direita.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{Q}_t}{\partial t}|_{t=0}\phi &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathcal{Q}_t\phi-\phi}{t} = \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left[-\delta e^{-\delta t}\mathcal{P}_t + e^{-\delta t}\frac{\partial \mathcal{P}_t}{\partial t}\right]\phi = \\
&= \left(-\delta\mathcal{I}+\mathcal{B}\right)\phi.
\end{aligned}$$

Supondo que $\{\mathcal{Q}_t : t \geq 0\}$ é um SCPC, então:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{B}-\delta\mathcal{I}\right)\phi(x) &= -\rho(x)\phi(x)+\mu(x)\cdot\phi_x(x)+\frac{1}{2}tr\left[\Sigma(x)\phi_{xx}(x)\right]+ \\
&+\int\left[\phi(y)-\phi(x)-\frac{y-x}{1+|y-x|^2}\cdot\phi_x(x)\right]\eta(dy|x).
\end{aligned}$$

Assim:

$$\mathcal{B}\phi(x) = -\rho^*\phi(x)+\mathcal{A}\phi(x),$$

em que $\rho^* = \rho-\delta$ é limitado inferiormente e o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração é dado por$\mathcal{A}\phi(x)$.

Como heuristicamente $d(\mathcal{T}_t\phi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{\mathcal{T}_{t+\epsilon}\phi-\phi}{\epsilon} = \mathcal{A}(\mathcal{T}_t\phi)$, temos uma equação diferencial para $\mathcal{T}_t\phi$, com condição inicial, $\mathcal{T}_0\phi = \phi$. Isto sugere uma conjectura da forma $\mathcal{T}_t\phi = \exp(\mathcal{A}t)\phi$. Como $\mathcal{B}$ é o gerador de $\mathcal{P}$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_t\phi &= \exp(\mathcal{B}t)\phi = \exp\left(-\int_0^t\rho^*(x_s)\,ds+\mathcal{A}t\right)\phi = \\
&= \exp(\mathcal{A}t)\left(\exp\left(-\int_0^t\rho^*(x_s)\,ds\right)\phi\right) = \\
&= E\left[\exp\left(\int_0^t-\rho^*(x_s)\,ds\right)\phi(x_t)\,|x_0=x\right].
\end{aligned}$$

Observe que no caso determinístico com $P_t^{-1} = 1 + r_t$ temos que $-\ln P_t \cong r_t$. No nosso caso

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} -\frac{1}{t}\ln \mathcal{P}_t 1(x) &= \lim_{t\downarrow 0} -\frac{1}{t}\ln\left(E\left[\exp\left(\int_0^t -\rho^*(x_s)\,ds\right)\phi(x_t)\,|x_0 = x\right]\right) = \\ &= \rho^*(x)^{16}.\end{aligned}$$

Portanto apreçamento por semigrupos são versões descontadas de semigrupos positivos com contração.

3.5.1 Processos Construídos a Partir de Processos de Markov

Seja $\{X_t : t \geq 0\}$ um processo de Feller[17] e $\{\Im_t : t \geq 0\}$ é a filtragem desse processo. Assumimos que o espaço de estado é um conjunto aberto $D_0 \in \mathbb{R}^n$, e que o processo nunca alcança a fronteira desse espaço. Assumimos, ainda, que a medida de intesidade do salto η limita o número esperado de saltos em um intervalo finito: $\int \eta(dy|x) < \infty$, para todo x. Também assumimos que a matriz positiva semidefinida Σ tem posto constante $m \leq n$ sobre o espaço de estado D_0.

Com essa estrutura, podemos construir preços do processo de Markov

[17]Um processo de Feller é um processo SCPC conservativo. Um semigrupo $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ é conservativo se

$$\sup_{\varphi\in C_0,\phi\leq 1} \mathcal{T}_t\phi = 1,$$

em que

$$C_0 = \left\{\phi:\ D_0 \to \mathbb{R},\ \text{tal que } \phi \text{ é contínua e } \lim_{|x|\to\infty}\phi(x) = 0\right\}$$

usando a seguinte fórmula:

$$\mathcal{P}_t\phi(x) = E\left[S_t\phi(x_t)\,|x_0 = x\right],$$

para uma família de processo estritamente positivos $\{S_t : t \geq 0\}$.

O processo S é chamado de fator estocástico de desconto. Nosso maior interesse será por fatores de desconto estocásticos que podem ser representados por:

$$S_t = \exp(\delta_0 t)\, M_t,$$

em que $\{M_t : t \geq 0\}$ é um supermatingal, definido a seguir.

Definição 11 *$\{M_t : t \geq 0\}$ é um* supermartingal *se* $E\left[M_{t+u}|\Im_t\right] \leq M_t$.

A figura do supermatingal é usada de forma que a família:

$$\mathcal{Q}_t\phi(x_t) = E\left[M_t\phi(x_t)\,|x_0 = x\right]$$

é um semigrupo de contração. Assim, nossa discussão a seguir será principalmente sobre supermartingais que são funcionais multiplicativas, que, por sua vez, preservam a estrutura de Markov.

Definição 12 *Um processo real $\{A_t : t \geq 0\}$ é chamado de* funcional *se é adaptado - A_t é $\Im$-mensurável para todo t - e contínuo à direita.*

Seja θ_t um operador de deslocamento. Assim definimos $A_u = \psi_u(x_s : 0 \leq s \leq u)$ e $A_u(\theta_t) = \psi_u(x_s : t \leq s \leq t+u)$ de sorte que a correspondente função do processo X deslocada para frente t períodos de tempo.

Definição 13 *O processo* $\{A_t : t \geq 0\}$ *é chamado de* funcional aditiva *se* $A_0 = 0$, *se é adaptada e se* $A_{t+u} = A_u(\theta_t) + A_t$, *para cada* t *e* u *não negativos.*

Exemplo 7 *Seja* $A_{t+u} = \int_0^t \eta(x_s)\,ds + \int_0^t \gamma(x_s)\,dB_s$. *Então* $A_{t+u} = \int_0^{t+u} \eta(x_s)\,ds + \int_0^{t+u} \gamma(x_s)\,dB_s = \int_0^t \eta(x_s)\,ds + \int_0^t \gamma(x_s)\,dB_s + \int_t^{t+u} \eta(x_s)\,ds + \int_t^{t+u} \gamma(x_s)\,dB_s = A_t + A_u(\theta_t)$.

Exemplo 8 *Seja* ϕ *pertencente ao domínio do gerador. Então* $A_t = \phi(x_t) - \phi(x_0) + \int_0^t \mathcal{A}\phi(x_s)\,ds$ *é uma funcional aditiva e também um martingal.*

Definição 14 *Um processo não negativo* $\{M_t : t \geq 0\}$ *é uma* funcional multiplicativa *se* $M_0 = 1$, *se é adaptado e se* $M_{t+u} = M_t M_u(\theta_t)$.

Exemplo 9 $\exp(A_t)$, *em que* A_t *é uma funcional aditiva.* $M_{t+u} = \exp(A_t + A_u(\theta_t)) = M_t M_u(\theta_t)$.

Definição 15 *Um semigrupo de apreçamento* $\{\mathcal{P}_t : t \geq 0\}$ *é* absolutamente contínuo *com respeito ao semigrupo do processo de Markov* $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ *se para algum* $t \geq 0$ *e qualquer função não negativa* $\psi_t \in H_t$, $\mathcal{P}_t^*\psi_t = 0$ *quando* $\mathcal{T}_t^*\psi_t = 0$, *em que* $\mathcal{T}_t^*$ *e* $\mathcal{P}_t^*$ *são as respectivas extensões de* $\mathcal{T}_t$ *e* $\mathcal{P}_t$ *a* H_t.

Esta propriedade não necessita da associação de um preço estritamente positivo a um direito contingente em um evento de probabilidade zero.

Definição 16 *Um semigrupo de apreçamento* $\{\mathcal{P}_t : t \geq 0\}$ *é* equivalente *a um semigrupo processo de Markov* $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ *se para algum* $t \geq 0$ *e qualquer função não negativa* $\psi_t \in H_t$, $\mathcal{P}_t^*\psi_t = 0$ *se, e somente se,* $\mathcal{T}_t^*\psi_t = 0$.

Esta propriedade exclui a possibilidade de arbitragem no semigrupo de apreçamento.

Proposição 4 *Suponha que* $\{M_t : t \geq 0\}$ *é uma funcional multiplicativa (ou seja, positiva) e um supermartingal, então* $Q_t\phi(x) = E[M_t\phi(x_t)|x_0 = x]$ *é um semigrupo positivo no espaço de funções mensuráveis limitadas. Este semigrupo é absolutamente contínuo com respeito ao semigrupo de Markov. Além disso, ele é equivalente àquele semigrupo desde que a funcional multiplicativa* $\{M_t : t \geq 0\}$ *seja estritamente positiva com probabilidade um.*

Prova. *Ver Hansen e Scheinkman (2002).* ■

Podemos, então, enunciar o teorema de Itô e Watanabe (1965), necessário para nossas derivações posteriores.

Teorema 1 *Suponha que* $\{M_t : t \geq 0\}$ *seja um supermartingal positivo, então*

$$M_t = M_t^l M_t^d,$$

em que $\{M_t^l : t \geq 0\}$ *é um martingal local não negativo e* $\{M_t^d : t \geq 0\}$ *é um processo decrescente. Além disso, se* $\{M_t : t \geq 0\}$ *é um funcional multiplicativo, também são* $\{M_t^l : t \geq 0\}$ *e* $\{M_t^d : t \geq 0\}$.

Exemplo 10 *Seja* ρ *uma função negativa mensurável em* D_0 *e construa*

$$M_t^d = \int_0^t -\rho(x_s)\, ds,$$

então M_t^d *é um processo contínuo decrescente.*

Exemplo 11 *Considere um processo de Feller do tipo difusão e forme:*

$$A_t = \int_0^t \sigma(x_s) \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma(x_s)|^2\, ds,$$

em que $\int_0^t |\sigma(x_s)|^2 ds < \infty$ *com probabilidade 1 para cada t. Esse processo é uma funcional aditiva contínua. A funcional multiplicatica estritamente positiva*

$$M_t^l = \exp(A_t)$$

é um martingal local.

3.5.2 Decomposição do Fator Estocástico de Desconto

Estudemos o seguinte fator estocástico de desconto:

$$S_t = \exp(\delta_0 t)\, M_t^l M_t^d,$$

em quem M_t^l e M_t^d são definidos nos dois últimos exemplos. Ou seja, definimos a função $S_t = \exp(x_t - x_0)$, em que

$$x_t - x_0 = \delta_0 t - \int_0^t \rho(x_s)\, ds + \int_0^t \sigma(x_s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma(x_s)|^2 ds.$$

Portanto, pelo Lema de Itô:

$$dS_t = [\delta_0 - \rho(x_t)]\, S_t dt + \sigma(x_t)\, S_t dB_t.$$

Defina agora $\mu_S \equiv \delta_0 - \rho$, $\sigma_S \equiv \sigma$. Seja $\{x_t : t \geq 0\}$ gerado por $\mathcal{A}\phi(x) = \mu(x) \cdot \phi_x(x) + \frac{1}{2} tr[\Sigma(x)\, \phi_{xx}(x)]$.

Suponha agora o processo composto $x_t^a = \begin{pmatrix} S_t \\ x_t \end{pmatrix}$, $\mu^a(x_t, S_t) = \begin{pmatrix} \mu_S(x_t)\, S_t \\ \mu(x_t) \end{pmatrix}$,

$\Sigma^a = \begin{pmatrix} S_t\sigma_S \\ \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_t\sigma_S' & \Lambda' \end{pmatrix}$. Assim, o fator estocástico de desconto é $\psi(S,x) = S\phi(x)$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial S} &= \phi; \frac{\partial^2\psi}{\partial S^2} = 0; \frac{\partial^2\psi}{\partial S\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x}; \\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= S\frac{\partial\phi}{\partial x}; \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial x'} = S\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'}.
\end{aligned}$$

Com isso, o gerador infinitesimal é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^a\psi(x) &= \mu(x)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial(S,x)} + \frac{1}{2}tr\left[\Sigma^a\frac{\partial^2\psi}{\partial(S,x)\,\partial(S,x)'}\right] = \\
&= \begin{pmatrix} \phi & S\frac{\partial\phi'}{\partial x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_S(x_t)\,S_t \\ \mu(x_t) \end{pmatrix} + \\
&\quad +\frac{1}{2}tr\left[\begin{pmatrix} S^2\sigma_S\sigma_S' & S\sigma_S\Lambda' \\ S\Lambda\sigma_S' & \Lambda\Lambda' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial\phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & S\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'} \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Então:

$$\mathcal{A}^a\psi(x) = S\mu_S\phi + S\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\mu + S\sigma_S\Lambda'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} + S\frac{1}{2}tr\left[\Sigma\phi_{xx}\right]$$

Avaliando em $t = 0$, temos que o gerador infinitesimal de preços é dado por:

$$\mathcal{B}\phi = \mathcal{A}\phi + \mu_S\phi + \sigma_S\Lambda'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Na última parcela, interpretamos σ_S como o preço dos incrementos brownianos e Λ como risco dos fatores de preço dos incrementos brownianos. Além disso, $-\mu_S \equiv \rho - \delta_0$ é interpretada como a "yield" instantânea. Lembrando que $\phi(x_t) - \phi(x_0) - \int_0^t \mathcal{A}\phi(x_s)\, ds = \int_0^t \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dB_s$, podemos interpretar $\Lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}$ como sendo os pesos sobre o movimento browniando para $\phi(x_t)$.

Para obter as probabilidades neutras ao risco, usamos M_t^l no lugar de S_t. Assim aplicando $\mathcal{A}^a$ seria o mesmo que se obtivéssemos $\mathcal{B}\phi$, fazendo $\mu_S = 0$.

3.5.3 Processo de Valorização

No que segue, vamo-nos concentrar nos martingais locais. Vamos estudar em detalhe tais martingais decompondo-os apropriadamente.

Motivemos um pouco mais os martingais locais apresentando o seguinte exemplo, que será extensivamente usado no que se segue.

Exemplo 12 *Considere um processo de Feller do tipo de salto com medida de salto dada por $\eta(dy, x)$. Seja, então*

$$A_t \equiv \sum_{0 \le s \le t} \tau(x_s, x_{s^-}) - \int_0^t \int (\exp[\tau(y, x_s)] - 1)\, \eta(dy, x_s)\, ds,$$

em que $\tau(x, x) = 0$,

$$\int \exp[\tau(y, x_s)]\, \eta(dy, x_s) < \infty,$$

para todo x e

$$x_{s^-} \equiv \lim_{\epsilon \downarrow 0} x_{s-\epsilon}.$$

Assim, a funcional multiplicativa estritamente positiva

$$M_t = \exp(A_t)$$

é um martingal local[18].

Note que $\int (\exp[\tau(y, x_s)] - 1)$ funciona como um compensador para o "drift" de forma a tornar M_t um martingal local.

Consideramos a seguir funcionais multiplicativas estritamente positivas, parametrizadas em termos da tripla $(\mu_m, \sigma_m, \tau_m)$ que satisfaz:

$\mu_m : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\int_0^t \mu_m(x_s)\, ds < \infty$, para todo $t > 0$;

$\sigma_m : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\int_0^t |\sigma_m(x_s)|\, ds < \infty$, para todo $t > 0$;

---

[18] *Para entender a construção deste exemplo, utilizaremos um argumento heurístico. Defina*

$$M_t^* = \exp[\tau(x_t, x_{t^-})]\, M_{t^-}^*.$$

Observe inicialmente que

$$\frac{M_t^* - M_{t^-}^*}{M_{t^-}^*} = \exp[\tau(x_t, x_{t^-})] - 1.$$

A esperança disso na medida $\eta(dy, \cdot)$ é

$$E_\eta\left(\frac{M_t^* - M_{t^-}^*}{M_{t^-}^*}\right) = E_\eta\left(\frac{dM_t^*}{M_{t^-}^*}\right) = \int (\exp[\tau(y, x)] - 1)\, \eta(dy, x).$$

Além disso, tomando o logaritmo da definição e somando entre $0 \leq s \leq t$, dado $M_{0^-} = 1$ (por definição), temos que:

$$M_t^* = \exp\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \tau(x_s, x_{s^-})\right).$$

Donde se conclui que $\int \tau(y, x)\, \eta(dy, x) = \int (\exp[\tau(y, x)] - 1)\, \eta(dy, x)$.

$\tau_m : D_0 \times D_0 \to \mathbb{R}$, $\tau(x, x) = 0$, para todo $x \in D_0$.

O processo correspondente a essa tripla é dado por

$$M_t \equiv \exp\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \tau(x_s, x_{s^-})\, ds + \int_0^t \sigma_m(x_{s^-}) \cdot dB_s + \int_0^t \mu_m(x_s)\, ds\right).$$

Esse processo é um supermartingal quando $\int_0^t \int \exp[\tau(y, x_s)]\, \eta(dy, x_s)\, ds < \infty$, para todo $t > 0$ e $\mu_m + \frac{1}{2}|\sigma_m(x)|^2 + \int (\exp[\tau(y, x_s)] - 1)\, \eta(dy, \cdot) \leq 0$. A igualdade na última condição caracteriza um martingal local.

Se restringimos o processo a um martingal local, podemos decompor o processo da seguinte forma (ver Kunita e Watanabe, 1967):

$$M_t = M_t^c M_t^j,$$

em que o martingal local

$$M_t^c \equiv \exp\left[\int_0^t \sigma_m(x_{s^-}) \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_m(x_s)|^2\, ds\right]$$

é contínuo em t, e o martingal local

$$M_t^j \equiv \exp\left[\sum_{0 \leq s \leq t} \tau(x_s, x_{s^-})\, ds - \int_0^t \int (\exp[\tau(y, x_s)] - 1)\, \eta(dy, x_s)\, ds\right]$$

salta apenas quando o proceso $\{x_t : t \geq 0\}$ salta. Note que ambos os processos multiplicativos foram dados como exemplos anteriormente.

Considere agora o produto de duas funcionais multiplicativas tal que

$$M_t = V_t S_t$$

em que V_t é parametrizado pela tripla $(\mu_V, \sigma_V, \tau_V)$ e S_t é parametrizado pela tripla $(\mu_S, \sigma_S, \tau_S)$. Como ambos os processos são exponenciais de processos aditivos, seu produto é a exponentical de um processo aditivo em que:

$$\begin{aligned} \mu_m &= \mu_V + \mu_S; \\ \sigma_m &= \sigma_V + \sigma_S; \\ \tau_m &= \tau_V + \tau_S. \end{aligned}$$

No que segue, vamos considerar S_t como um fator de desconto estocástico para representar um apreçamento por semigrupo e V_t servirá para desenhar um processo de valorização.

Definição 17 *Um processo de desconto estocástico* $\{S_t : t \geq 0\}$ *é uma funcional multiplicativa estritamente positiva que é o produto da* $\exp(\delta t)$ *para algum número real* δ *e um supermartingal que satisfaz*

$$\mathcal{P}_t \phi(x) = E\left[S_t \phi(x_t) | x_0 = x\right].$$

Dado o semigrupo de apreçamento, o processo de desconto estocástico é único.

Definição 18 *O processo de valorização* $\{V_t : t \geq 0\}$ *é um processo multi-*

plicativo estritamente positivo tal que o produto $\{V_tS_t : t \geq 0\}$ é um martingal local.

Um processo de valorização pode ser interpretado como um processo de preços de um ativo cujos dividendos são reinvestidos nesse mesmo ativo. O retorno desses ativos num pequeno intervalo de tempo ε é dado por $\frac{V_{t+\varepsilon}}{V_t}$. Esta caracterização grosseira é precisa quando o processo $\{V_tS_t : t \geq 0\}$ é um martingal e não apenas um martingal local. Quando o produto é um martingal local, a caracterização requer o uso de paradas periódicas para se tornar formal.

Proposição 5 *Um processo de valorização parametrizado por $(\mu_V, \sigma_V, \tau_V)$ satisfaz a restrição de apreçamento:*

$$\mu_V + \mu_S = -\frac{|\sigma_V + \sigma_S|^2}{2} - \int \left(\exp\left[\tau_S(y,\cdot) + \tau_V(y,\cdot)\right] - 1\right)\eta(dy,\cdot).$$

Prova. *Trivial.* ∎

A taxa de juros livre de risco pode ser inferida da fórmula acima fazendo $\sigma_V = \tau_V = 0$. Neste caso

$$r_f \equiv -\mu_S - \frac{|\sigma_S|^2}{2} - \int \left(\exp\left[\tau_S(y,\cdot)\right] - 1\right)\eta(dy,\cdot).$$

Além disso, o "drift" de $\frac{dV_t}{V_t}$ é dado por

$$r_V \equiv \mu_V + \frac{|\sigma_V|^2}{2} + \int \left(\exp\left[\tau_V(y,\cdot)\right] - 1\right)\eta(dy,\cdot).$$

Podemos, assim, obter o excesso de retornos, que é dado por:

$$\begin{aligned}
r_V - r_f &= -\sigma_S \cdot \sigma_V \\
&\quad - \int \left(\exp\left[r_S(y,\cdot) + r_V(y,\cdot) \right] - \exp\left[r_V(y,\cdot) \right] - \exp\left[r_S(y,\cdot) \right] - 1 \right) \eta\left(dy,\cdot \right).
\end{aligned}$$

Em particular, ja definimos que σ_S como o preço dos incrementos brownianos ou vetor dos fatores de risco de preços.

Juntando toda a estrutura que construímos até o momento, podemos definir o gerador de preços como:

$$\mathcal{B}\phi(x) = -\rho^*(x)\phi(x) + \mathcal{B}_j\phi(x) + \mathcal{B}_b\phi(x) + \mathcal{A}\phi(x),$$

em que $-\rho^*(x)$ é a taxa livre de risco; $\mathcal{B}_j\phi(x) = \int (\phi(y) - \phi(x))\, \widetilde{\eta}(dy, x)$ é o gerador dos processos de salto, em que $\widetilde{\eta}(dy, x) = \exp\left[r(y, x_s) \right] \eta(dy, x)$; $\mathcal{B}_b\phi(x) = \sigma_S \Lambda' \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$ é o preço local do risco; e $\mathcal{A}\phi(x)$ caracteriza o processo de Markov.

4 HEDGE DINÂMICO

Neste capítulo formalizamos e derivamos o modelo de hedge dinâmico.

O capítulo é organizado como se segue: na seção 4.1, especificamos nosso modelo; na seção 4.2 derivamos as equações de Bellman para os vários tipos de utilidade usados na tese; na seção 4.3, derivamos a taxa ótima de hedge sob SDU; na seção 4.4, derivamos a taxa ótima de hedge maximizando apenas a utilidade terminal e examinamos alguns casos especiais comparando nossos resultados com os obtidos por DJ; na seção 4.5, derivamos a taxa ótima de hedge sob a transformação de utilidade proposta e comparamos os resultados obtidos.

4.1 O Modelo

Como já foi mencionado anteriormente, nosso modelo é similar ao de DJ, pois consideramos um agente que escolhe uma estratégia de negócios futuros de forma a maximizar a utilidade esperada do consumo de t a uma data futura $T \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$, segundo as seguintes hipóteses:

1. Denote $B = \left(B^1, B^2, \ldots, B^N\right)'$ um movimento browniano padrão no $\mathbb{R}^N$ que é uma martingal com respeito ao espaço de probabilidades filtrado do agente[19]. Assumimos ao longo do capítulo que todas as hipóteses probabilísticas estão no contexto desse espaço de probabilidades filtrado.

[19] "$'$" indica transposta, ou diferenciação quando há apenas um argumento na função.

2. V denota o espaço de processos integráveis ao quadrado e previsíveis[20] tal que

$$V \equiv \left\{ \text{previsível } v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \middle| E\left[\int_0^t v_s^2 ds\right] < \infty, t \in [0,T] \right\},$$

em que Ω é o espaço de estado. Aqui *previsível* significa mensurável com respeito à σ-álgebra gerada pelo processo contínuo à esquerda adaptado à filtragem do agente; isto é, v_t depende apenas da informação disponível até o período t.

3. Existem M ativos a serem protegidos, cujo valor é dado por um processo vetorial de Markov, S, de dimensão M, cuja representação diferencial estocástica é

$$dS_t = \mu_t(S_t)dt + \sigma_t(S_t)dB_t, \tag{10}$$

em que μ é um vetor de dimensão M, σ é uma matriz $(M \times N)$ e $\mu^m \in V$ e $\sigma^{mn} \in V$ para todo m e n (assim, o processo de Markov S é bem definido)[21].

4. Existem K contratos futuros disponíveis para negócio em cada instante de tempo, cujos preços são dados por um processo de Itô vetorial de

[20]Se $T = \infty$, então a hipótese de integrabilidade ao quadrado pode ser substituída por $E\left[\int_0^\infty e^{\beta t} v_s^2 ds\right] < \infty$, em que β é a constate caracterizada no Apêndice C de Duffie e Epstein (1992a).

[21]Daqui por diante, omitiremos a dependência dos parâmetros a S_t por simplicidade de notação.

dimensão K-dimensional, F, cuja representação estocástica diferencial é dada por

$$dF_t = m_t(F_t)dt + v_t(F_t)dB_t, \tag{11}$$

em que $m^k \in V$ e $v^{kn} \in V$ para todo k e n[22].

5. Uma posição em futuros é tomada marcando-se a mercado a conta de margem de acordo com um processo $\theta = \left(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^K\right)'$, em que tanto $\theta' m$ quanto cada elemento de $\theta' v$ pertence a V. O espaço Θ de tais estratégias futuras é dado por

$$\Theta = \{\theta \,|\theta' m \in V \text{ e } \theta' v^n \in V, \forall n\}.$$

6. Na período t a posição θ_t nos K contratos é creditada com os ganhos e perdas incorridos devido às flutuações de preço, e o consolidado é adicionado à conta de margem do agente. Assim, o valor corrente da conta de margem, denotado por X_t^θ, é creditado com juros a uma taxa constante contínua $r \geq 0$. Além disso, assumimos que quaisquer perdas que tornam a conta de margem negativa são cobertas por empréstimos à mesma taxa de juros, ignoramos custos de transação e quaisquer características institucionais. Em modelo de tempo contínuo, a conta de margem tem, então, a forma

$$X_t^\theta = \int_0^t e^{r(t-s)} \theta_s' dF_s, \tag{12}$$

[22]Idem com respeito a F_t.

indicando que o 'incremento' $\theta'_s dF_s$ à conta de margem no período s é reinvestido à taxa r, implicando um incremento correspondente de $e^{r(t-s)}\theta'_s dF_s$ à conta de margem no período t. Aplicando o lema de Itô, sua equação diferencial estocástica é

$$dX_t^\theta = \left(rX_t^\theta + \theta'_t m_t\right) dt + \theta'_t v_t dB_t. \tag{13}$$

7. Seja $\pi_t \in \mathbb{R}^M$ uma função limitada mensurável representando a posição presente do agente. Por simplicidade, também assumimos que ele nada investe em ativos de risco. Portanto, a riqueza total do agente no período t, dada uma estratégia em futuros θ, é W_t^θ, em que W^θ é o processo de Itô correspondente à representação estocástica diferencial

$$dW_t^\theta = \pi'_t dS_t + dX_t^\theta - c_t dt, \tag{14}$$

em que $c_t \in V$ é a taxa de consumo no período t.

8. As preferências de consumo do agente no período t são dadas pela utilidade estocástica diferencial $U : V \longrightarrow \mathbb{R}$, cujo agregador (f, κ) é definido com $f : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, e o multiplicador da variância, κ, como $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Assumimos que f seja regular, significando que f é contínua, Lipschitz na utilidade, e satisfaz a condição de crescimento no consumo[23]. Adicionalmente, assumimos que f é crescente e côncava no consumo. Considere o índice de von Newmann-Morgenstern, h, que

[23] Veja DJ e Duffie e Epstein (1992a, p. 366) para mais detalhes sobre o significado desses conceitos.

é contínuo, estritamente crescente e satisfaz a condição de crescimento; então h é em particular integrável, e é chamada de função de ajustamento de risco porque mede a aversão ao risco local. Como adotamos a hipótese 2 de Duffie e Epstein (1992a), obtemos $\kappa(J) = \frac{h''(J)}{h'(J)} < 0$. Portanto, nosso problema é

$$\max_{\theta \in \Theta, c \in V} E_t \int_{s \geq t}^{T} \left[f(c_s, J(z_s)) + \frac{1}{2} \kappa(J(z_s)) J_{z_s}' \Sigma J_{z_s} \right] ds, \qquad (15)$$

em que $\delta > 0$ é a taxa de desconto subjetiva implícita na função f[24].

Com esse modelo em mente, podemos definir a posição futura ótima.

Definição 19 *Uma estratégia futura θ é ótima se ela resolve 15.*

4.2 Equações de Hamilton-Jabobi-Bellman

Esta é uma seção técnica na qual derivamos as equações HJB que vamos usar ao longo deste capítulo.

4.2.1 Utilidade Aditiva Convencional

Apesar de não usarmos essa equação de Bellman em nosso trabalho, sua prova será útil em outras derivações.

Primeiro, considere o teorema de Hille-Yosida.

Teorema 2 *Seja T_t um semigrupo de contração fortemente contínua em L*

[24]Sem utilidade diferencial, $f(c_s, J(z_s)) = u(c_s) - \delta J(z_s)$, e $\kappa(J) = 0$.

com gerador $\mathcal{A}$. Então

$$(\delta\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}g=\int_0^\infty e^{-\delta t}\mathcal{T}_s g ds,$$

para todo $g\in V$ e $\delta>0$.

Prova. *Veja Ethier e Kurtz (1986), Proposição 2.1 do capítulo 1.* ■

Se aplicarmos esse teorema a função utilidade aditiva convencional, $J(z_t)=E_t\left[\int_{s\geq t}e^{-\delta(s-t)}u(c_s)\,ds\right], t\geq 0$, obteriamos a seguinte equação de HJB:

Proposição 6 *Assuma que $u\in V$ e $\delta>0$. Então, a equação HJB é dada por:*

$$u(c_t)-\delta J+\mathcal{A}J=0,$$

Prova. *(Pode-se simplesmente aplicar o teorema anterior) Defina função valor como*

$$J(z_t)=E_t\left[\int_{s\geq t}e^{-\delta(s-t)}u(c_s)\,ds\right], t\geq 0.$$

Temos então

$$J(z_{t+\varepsilon})=E_{t+\varepsilon}\left[\int_{s\geq t+\varepsilon}e^{-\delta(s-t-\varepsilon)}u(c_s)\,ds\right], t+\varepsilon\geq 0.$$

Tomando as esperanças condicionais em t

$$\mathcal{T}_\varepsilon J(z_t)=E_t\left[\int_{s\geq t+\varepsilon}e^{-\delta(s-t-\varepsilon)}u(c_s)\,ds\right].$$

Subtraindo a primeria equação da última

$$\mathcal{T}_\varepsilon J(z_t) - J(z_t) = E_t \left[\int_{s \geq t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t-\varepsilon)} u(c_s)\, ds - \int_{s \geq t} e^{-\delta(s-t)} u(c_s)\, ds \right].$$

Dividindo por ε *e tomando o limite quando* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{LHS}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_\varepsilon J(z_t) - J(z_t)}{\varepsilon} = \mathcal{A}J.$$

Em que LHS significa "lado esquerdo". Analisemos agora o RHS (lado direito)

$$\begin{aligned} RHS &= E_t \left[\int_{s \geq t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t-\varepsilon)} u(c_s)\, ds \right] - E_t \left[\int_{s \geq t} e^{-\delta(s-t)} u(c_s)\, ds \right] = \\ &= E_t \left[\int_{s \geq t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t)} \left(e^{\delta\varepsilon} u(c_s) - u(c_s) \right) ds - \int_t^{t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t)} u(c_s)\, ds \right]. \end{aligned}$$

Dividindo por ε *e tomando o limite quando* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{RHS}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_t \left[\int_{s \geq t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t)} \left(e^{\delta\varepsilon} u(c_s) - u(c_s) \right) ds - \int_t^{t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t)} u(c_s)\, ds \right]}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_t \left[\delta \int_{s \geq t+\varepsilon} e^{-\delta(s-t)} e^{\delta\varepsilon} u(c_s)\, ds - \left(u(c_{t+\varepsilon}) - e^{-\delta\varepsilon} u(c_{t+\varepsilon}) \right) \right] - u(c_t) = \\ &= \delta J(z_t) - u(c_t). \end{aligned}$$

(Note que usmamos a regra de L'Hôspital na segunda linha.)

Assim, o resultado se segue imediatamente. ■

A equação HJB pode ser interpretada da seguinte forma: $u(c_t)$ é o efeito instantâneo, δJ é o efeito futuro descontado, $\mathcal{A}J$ é o efeito médio local.

4.2.2 Utilidade Diferencial Estocástica

A mesma prova pode ser aplicada para o caso de utilidade diferencial estocástica.

$$E_t \int_{s \geq t} \left[f\left(c_s, J\left(z_s\right)\right) + \frac{1}{2} \kappa \left(J\left(z_s\right)\right) J'_{z_s} \Sigma J_{z_s} \right] ds.$$

Proposição 7 *Assuma que $f, k \in L$ e que $\delta > 0$. A equação HJB é então*

$$u(c_t) - \delta J + \mathcal{A}J + \frac{1}{2}\kappa(J) J'_{z_t} \Sigma J_{z_t} = 0,$$

Prova. *A idéia é a mesma que antes. Temos apenas que examinar o que acontece com*

$$E_t \int_{s \geq t+\varepsilon} \frac{1}{2} \kappa\left(J\right) J'_{z_s} \Sigma J_{z_s} ds - E_t \int_{s \geq t} \frac{1}{2} \kappa\left(J\right) J'_{z_s} \Sigma J_{z_s} ds =$$

$$= -E_t \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{2} \kappa\left(J\right) J'_{z_s} \Sigma J_{z_s} ds$$

Dividindo por ε e tomando o limite quando $\varepsilon \downarrow 0$

$$-\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{E_t \int_t^{t+\varepsilon} \frac{1}{2} \kappa\left(J\right) J'_{z_s} \Sigma J_{z_s} ds}{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \kappa\left(J\right) J'_{z_t} \Sigma J_{z_t}$$

■

O termo $\kappa(J) J'_{z_t} \Sigma J_{z_t}$ representa a variância local da continuação da função valor.

Veja Duffie e Epstein (1992a) para outra derivação. Para uma prova heurística

$$J(z_t) = \varepsilon u(c_t) + e^{-\delta\epsilon} h^{-1} \left(\mathcal{T}_\epsilon h\left(J\right)\right).$$

Então

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[u(c_t) + \frac{e^{-\delta\epsilon} h^{-1} \left(\mathcal{T}_\epsilon h\left(J\right)\right) - J}{\epsilon} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[u(c_t) + \frac{-\delta e^{-\delta\epsilon} h^{-1} \left[\mathcal{T}_\epsilon h\left(J\right)\right] + e^{-\delta\epsilon} \frac{\mathcal{A}h(J)}{h'(J)}}{1} \right] = \\
&= u(c_t) - \delta J(z_t) + \frac{\mathcal{A}h(J)}{h'(J)}.
\end{aligned}$$

A prova segue agora pelas mesmas linhas da prova na proposição 10.

4.2.3 Utilidade Aditiva Degenerada

Outra vez, usamos a mesma lógica que antes, para gerarmos a equação de Bellman no caso de utilidade aditiva degenerada[25].

Proposição 8 *A equação HJB relevante que maximiza $J\left(z_t\right) = E_t\left[U\left(W_T^{\theta t}\right)\right]$ é dada por*

$$\mathcal{A}J = 0.$$

Prova. *Isto é trivial. Note apenas que $J\left(z_t\right) = E_t\left[U\left(W_T^{\theta t}\right)\right]$, implicando*

---

[25] O termo degenerada é justificado porque estamos apenas preocupados com o valor final da utilidade.

que

$$J\left(z_{t+\epsilon}\right)=E_{t+\epsilon}\left[U\left(W_T^{\theta t+\epsilon}\right)\right].$$

Assim

$$\mathcal{T}_\epsilon J\left(z_t\right)-J\left(z_t\right)=0.$$

E a prova segue as mesmas linhas da prova para o LHS da segunda proposição apresentada na próxima seção. ■

Veja Krylov (1980, capítulo 5) para outra derivação.

4.2.4 Utilidade Aditiva Degenerada Transformada

Aqui, aplicamos uma das duas definições equivalentes seguintes.

Proposição 9 *Seja a seguinte função valor*

$$J\left(z_t\right)=E_t\left[U\left(W_T^{\theta t}\right)\right]+\frac{1}{2}E_t\int_{s\geq t}^{T}\kappa\left(J\left(z_s\right)\right)J_{z_s}^{\prime}\Sigma J_{z_s}ds.$$

com condição de contorno $J(z_T)=U(w)$.

A equação HJB relevante é

$$\mathcal{A}J+\frac{1}{2}\kappa(J)J_{z_t}^{\prime}\Sigma J_{z_t}=0.$$

Prova. *Veja provas anteriores.* ■

Alternativamente, poderíamos especificar o seguinte:

Proposição 10 *Considere agora a função valor*

$$J(z_t) = h^{-1}\left(E_t\left[h\left(U\left(W_T^{\theta t}\right)\right)\right]\right),$$

$J(z_T) = U(w)$.

A equação HJB relevante é então

$$\mathcal{A}J + \frac{1}{2}\kappa(J)J'_{z_t}\Sigma J_{z_t} = 0.$$

Prova. *Observe que*

$$h(J(z_t)) = E_t\left[h\left(U\left(W_T^{\theta t}\right)\right)\right]$$

Seguimos agora o mesmo procedimento que antes

$$h(J(z_{t+\varepsilon})) = E_{t+\varepsilon}\left[h\left(U\left(W_T^{\theta t+\varepsilon}\right)\right)\right].$$

Tomando a esperança condicional em t e subtraindo a primeira equação

$$\mathcal{T}_\varepsilon h(J(z_t)) - h(J(z_t)) = 0.$$

Assim

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{LHS}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_\varepsilon h(J(z_t)) - h(J(z_t))}{\varepsilon} = \mathcal{A}h(J(z_t)) = 0$$

Como $\frac{\partial h(J)}{\partial z} = h'(J)J_z$ *e* $\frac{\partial^2 h(J)}{\partial z \partial z'} = h''(J)J_z J_z' + h'(J)J_{zz}$, *então temos*

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathcal{A}h(J)}{h'(J)} = \frac{1}{h'(J)}\left[\mu \cdot \frac{\partial h}{\partial z_t} + \frac{1}{2}tr\left(\Sigma \frac{\partial^2 h(J)}{\partial z_t \partial z_t'}\right)\right] = \\
&= \mu \cdot J_{z_t} + \frac{1}{2}tr\left(\Sigma J_{z_t z_t}\right) + \frac{h''(J)}{2h'(J)}\left[J_{z_t}' \Sigma J_{z_t}\right] = \\
&= \mathcal{A}J + \frac{1}{2}\kappa(J) J_{z_t}' \Sigma J_{z_t}.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$0 = \frac{\mathcal{A}h(J)}{h'(J)} = \mathcal{A}J(z_t) + \frac{1}{2}\kappa(J)J_{z_t}'\Sigma J_{z_t}.$$

■

4.3 Utilidade Diferencial Estocástica

Nesta seção derivaremos a fórmula de hedge sob preços markovianos e utilidade diferencial estocástica.

Proposição 11 *A estratégia futura ótima é* θ^{SDU}, *em que*

$$\begin{aligned}
\theta_t^{SDU} &= -\frac{(J_{ww} + J_{wx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + J_w J_x\right)}{(J_{ww} + 2J_{wx} + J_{xx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + 2J_w J_x + J_x^2\right)} \times \\
&\quad (v_t v_t')^{-1}\left[v_t \sigma_t' \pi_t + \frac{J_w + J_x}{(J_{ww} + J_{wx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + J_w J_x\right)} m_t\right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Prova. *Defina* $W^{\theta t}$ *como sendo o processo riqueza obtido a partir do período* t *com a estratégia futura* θ *de forma a transladar os parâmetros* *temporais t unidades de volta ao período* 0, *ou*

$$dW_s^{\theta t} = a_{t+s}ds + b'_{t+s}dB_s,$$

em que $a_{t+s} = rX_s^{\theta t} + \pi'_t\mu_{t+s} + \theta'_{t+s}m_{t+s} - c_{t+s}$, *e* $b_{t+s} = \sigma'_{t+s}\pi_t + v'_{t+s}\theta_{t+s}$. *Similarmente, seja* $X^{\theta t}$ *definido por*

$$dX_s^{\theta t} = \alpha_{t+s}ds + \beta'_{t+s}dB_s,$$

em que $\alpha_{t+s} = rX_s^{\theta t} + \theta'_{t+s}m_{t+s}$, *e* $\beta_{t+s} = v'_{t+s}\theta_{t+s}$.

Defina a função valor $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *como*

$$J(z_t) = \max_{\theta\in\Theta, c\in V} E_t \int_{s\geq t}^{T} \left[f(c_s, J(z_s)) + \frac{1}{2}\kappa(J(z_s)) J'_{z_s}\Sigma J_{z_s} \right] ds,$$

e defina $\widehat{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *com* $\widehat{J}(z_t) = E_t[U(c)]$, *em que* $z = (w, x)$, $Z_0^{\theta^{SDU}t} \equiv \left(W_0^{\theta^{SDU}t}, X_0^{\theta^{SDU}t}\right) = (w, x)$, *com a condição de contorno* $\widehat{J}(z_T) = 0$[26].

Note que

$$dZ_t = \mu_{z_t}dt + \Lambda_{z_t}dB_t,$$

em que $\mu_{z_t} = (a_t, \alpha_t)'$ *e* $\Lambda_{z_t} = (b_t, \beta_t)'$.

[26] *Em situações especiais, não precisamos assumir que a utilidade terminal é zero. (Veja Duffie e Epstein, 1992a).*

Agora usando a equação HJB. obtemos

$$\begin{aligned}\delta J &= \sup_{\theta\in\mathbb{R}^k, c\in V} \{u(c_t) + J_w a_t + J_x\alpha_t + \\ &\quad +\frac{1}{2}tr\left[J_{ww}b_t b_t' + 2J_{wx}\beta_t b_t' + J_{xx}\beta_t\beta_t' + \kappa(J)\Sigma J_{z_t}J_{z_t}'\right]\right\}.\end{aligned}$$

Duas observações devem ser feitas agora. Primeiro, este programa pode ser separado em duas decisões independentes uma vez que a derivada da função valor é conhecida

$$\sup_{c\in V}\left(u(c_t) - J_w c_t\right),\ e$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\theta\in\mathbb{R}^k}\left\{J_w\left(rX_s^{\theta t} + \pi_t'\mu_{t+s} + \theta_{t+s}'m_{t+s}\right) + J_x\alpha_t + \right.\\ &\left. +\frac{1}{2}tr\left[J_{ww}b_t b_t' + 2J_{wx}\beta_t b_t' + J_{xx}\beta_t\beta_t' + \kappa(J)\Sigma J_{z_t}J_{z_t}'\right]\right\}.\end{aligned}$$

Segundo, note que

a. $b_t'b_t = (\sigma_t'\pi_t + v_t'\theta_t)'(\sigma_t'\pi_t + v_t'\theta_t) = \pi_t'\sigma_t\sigma_t'\pi_t + 2\pi_t'\sigma_t v_t'\theta_t + \theta_t' v_t v_t'\theta_t \Rightarrow \frac{\partial b_t'b_t}{\partial\theta_t} = 2v_t\sigma_t'\pi_t + 2v_t v_t'\theta_t$;

b. $b_t'\beta_t = (\sigma_t'\pi + v_t'\theta_t)' v_t'\theta_t = \pi_t'\sigma_t v_t'\theta_t + \theta_t' v_t v_t'\theta_t \Rightarrow \frac{\partial b_t'\beta_t}{\partial\theta_t} = v_t\sigma_t'\pi_t + 2v_t v_t'\theta_t$;

c. $\beta_t'\beta_t = \theta_t' v_t v_t'\theta_t \Rightarrow \frac{\partial\beta_t'\beta_t}{\partial\theta_t} = 2v_t v_t'\theta_t$.

Segue-se, então que as condições de primeira ordem para θ resultam

$$\begin{aligned}0 &= (J_w + J_x)m_t + \left(J_{ww} + \kappa(J)J_w^2\right)(v_t\sigma_t'\pi_t + v_t v_t'\theta_t) + \\ &\quad (J_{wx} + \kappa(J)J_xJ_w)(v_t\sigma_t'\pi_t + 2v_t v_t'\theta_t) + \left(J_{xx} + \kappa(J)J_x^2\right)v_t v_t'\theta_t.\end{aligned}$$

Agrupando os termos dá o resultado requerido. ∎

A estratégia ótima é caracterizada em termos das derivadas da função valor como em Breeden (1984), Ho (1984), e Adler e DeTemple (1988); por isso podemos ter que resolver essa equação usando métodos numéricos. Pode-se ver que o consumo ótimo é determinado independentemente da decisão de hedge; este resultado é similar àquele obtido por Ho (1984). Uma possível explicação para esta independência é a possibilidade de emprestar e tomar emprestado de forma a ajustar a conta de margem, deixando a decisão de consumo completamente livre.

Observe que o "drift" dos preços à vista não afeta explicitamente o hedge ótimo. Afeta, contudo, indiretamente por meio das derivadas da equação de Bellman. Os parâmetros da utilidade, a volatilidade dos preços, e o "drift" dos preços futuros afetam a estratégia ótima de uma forma evidente. É fácil ver que, se $\kappa(J) = 0$, então obtemos a fórmula ótima de hedge convencional da utilidade aditiva padrão[27].

[27] Isto ocorre por causa da independência das decisões de consumo e de hedge. Veja também a fórmula de hedge na seção 4.4.

Sob nossas hipóteses sobre a utilidade e o agregador, o primeiro coeficiente é positivo no ponto de ótimo[28]

$$A_t \equiv \frac{\left(\overbrace{J_{ww} + J_{wx}}^{-}\right) + \overbrace{\kappa(J)}^{-}\left(\overbrace{J_w^2 + J_w J_x}^{+}\right)}{\left(\underbrace{J_{ww} + 2J_{wx} + J_{xx}}_{-}\right) + \kappa(J)\left(\underbrace{J_w^2 + 2J_w J_x + J_x^2}_{+}\right)} > 0.$$

Como não sabemos a forma funcional da função valor, é difícil determinar se A é maior ou menor do que seria sob a utilidade aditiva convencional. Todavia, sabemos que o sinal não muda sob SDU.

Adicionalmente, o termo que multiplica m_t é negativo

$$-R_t^{-1} \equiv \frac{\overbrace{J_w + J_x}^{+}}{\left(\underbrace{J_{ww} + J_{wx}}_{-}\right) + \underbrace{\kappa(J)}_{-}\left(\underbrace{J_w^2 + J_w J_x}_{+}\right)} < 0.$$

Interpretamos R como sendo uma versão estendida do coeficiente de aversão ao risco, porque ele inclui termos como J_x e J_{wx}. O numerador é uma medida de concavidade global da função valor ao somar suas derivadas com o termo gerado por usar SDU; o denominador representa a curvatura global da função valor[29]. Se a função valor fica mais côncava, seja devido

[28] As condições de primeira ordem implicam que $0 < J_w = u'(c)$, e, porque c é um bem normal, temos $\frac{\partial c}{\partial w}, \frac{\partial c}{\partial x} > 0$.

[29] Com utilidade terminal, como veremos mais tarde, esse termo se torna o coeficiente de aversão ao risco convencional $-\frac{J_{ww}}{J_w}$.

a um aumento da riqueza ou da conta de margem, então R aumenta como no caso convencional. Além disso, note que a utilidade SDU adiciona uma "penalidade" que corresponde ao termo adicional no numerador. Se a curvatura da função valor aumenta, então numerador e denominador aumentam, de forma que o efeito líquido é ambíguo (no caso padrão, a aversão ao risco decresceria). O sinal de R não muda sob SDU. Portanto, o efeito global é um aumento da aversão ao risco devido à presença do termo adicional no numerador. Isto é, naturalmente, uma conseqüência da propriedade 8.

Com isso em mente, Duffie (1989) chama o primeiro termo entre colchetes na equação 16 como *demanda pura por hedge*, e o segundo termo como *demanda especulativa pura*[30]. O termo *demanda pura por hedge* vem do modelo uniperíodo em que a preocupação é apenas com a minimização de risco, isto é, com a minimização da variância da posição, desconsiderando os retornos. Neste caso, $\theta_t = (\upsilon_t \upsilon_t')^{-1} \upsilon_t \sigma_t' \pi_t$ (veja seção 4.4.1 para maiores discussões).

Mesmo se a posição à vista é zero no período t, o "hedger" ainda pode estar desejando comprar futuros devido à demanda especulativa pura. Isto poderia também acontecer se a covariância entre preços futuros e à vista é nula - υ_t é ortogonal à σ_t -, significando que contratos futuros não fornecem nenhuma proteção contra flutuações dos preços à vista[31]. Também, se a covariância entre preços futuros e à vista aumenta em valor absoluto, então pode-se querer aumentar a posição sob hedge, pois torna-se mais urgente proteger-se contra flutuações indesejadas de preço.

[30] Adler e Detemple (1988) os chamam, respectivamante de componente baseado na informação de Merton/Breeden e componente de média-variância.

[31] Aqui, apenas consideramos o equilíbrio parcial na análise.

Olhando no segundo termo entre colchetes, a fórmula mostra que o coeficiente de m_t aumenta como termo extra no denominador, pois, como já discutimos, a expressão inteira é negativa. Por isso, a contribuição da demanda especulativa pura à estratégia ótima de hedge decresce com utilidade recursiva. Se $m_t = 0$, contudo, a solução não depende explicitamente do "drift" dos preços futuros, mas, em vez disso - e diferentemente do que ocorre em DJ – depende dos parâmetros da utilidade recursiva via $\kappa(J)$ e das outras derivadas.

4.4 Riqueza Terminal

O modelo que consideramos nesta seção é muito similar ao modelo discutido na seção anterior. Porém, introduzimos uma modificação fundamental, pois estaremos maximizando a utilidade da riqueza terminal em vez do consumo ao longo do tempo. Consideramos, portanto, um tempo finito T. Assumimos uma hipótese simplificadora de sorte a manter a posição à vista constante ao longo do tempo. Com essas mudanças, temos um modelo idêntico ao de DJ, exceto que nossos preços são markovianos. Esta hipótese sobre os preços não é nova; Adler e Detemple (1988) usaram-na num modelo similar. Formalmente, então, temos:

1. O agente se compromete a receber o valor no tempo T de uma posição de ativos representada por uma carteira fixada $\pi \in \mathbb{R}^M$, cujo valor terminal é $\pi' S_T$. Portanto, a riqueza total do agente no período T, dada uma estratégia em futuros θ, é W_T^θ, em que W^θ é o processo de

Itô com representação estocástica diferencial

$$dW_t^\theta = \pi' dS_t + dX_t^\theta. \tag{17}$$

2. As preferências do agente sobre a riqueza no período T são dada por uma função utilidade do tipo von Newman-Morgenstern $U : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que é monotônica, duplamente continuamente diferenciável, e estritamente côncava, com U' e U'' cada um satisfazendo a condição de cresimento linear. Isto nos dá o programa

$$\max_{\theta \in \Theta} E_t \left[U \left(W_T^\theta \right) \right]. \tag{18}$$

Naturalmente, a posição ótima neste caso é aquela que maximiza a expressão 18. Podemos, agora, escrever

Proposição 12 *A estratégia ótima futura que maximiza a utilidade terminal é θ^{TV}, em que*

$$\theta_t^{TV} = -\frac{(J_{ww} + J_{wx})}{(J_{ww} + 2J_{wx} + J_{xx})} (v_t v_t')^{-1} \left[v_t \sigma_t' \pi_t + \frac{J_w + J_x}{(J_{ww} + J_{wx})} m_t \right] \tag{19}$$

Prova. *A prova é a mesma que aquela apresentada na seção anterior, exceto que $\pi_{t+s} = \pi$, $c_{t+s} = 0, \forall s, t \geq 0$, e que aqui nós definimos a função valor $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$J(z_t) = \max_{\theta \in \Theta} E \left[U \left(W_{T-t}^{\theta t} \right) \right].$$

Como estamos maximizando a utilidade esperada numa data futura T, a *equação HJB neste caso é um pouco diferente, e é dada por* $AJ = 0$.

A condição de contorno é dada por $\widehat{J}(z_T) = U(w)$. ∎

Note que estamos apenas preocupados com o efeito médio local, por causa do nosso interesse no valor terminal da riqueza na maturidade do contrato. Observe a similaridade dessa expressão com a obtida sob SDU, caso tivéssemos assumido $\kappa(J) = 0$.

A análise qualitativa feita na seção anterior é idêntica e não a repetiremos aqui.

Surpreendentemente, esta fórmula pode ser compactada ainda mais. Para isso, vamos provar uma importante propriedade do modelo.

Proposição 13 *Dada uma variação na riqueza inicial, o retorno líquido da variação da riqueza final é igual a variação da riqueza final dada um variação inicial na conta de margem. Formalmente*

$$\{\exp[r(T-t)] - 1\} \frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w} = \frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x}.$$

Prova. *O lema de Itô aplicado à equação 13 nos dá*

$$X_t^\theta = X_0^\theta + \int_0^t \left(rX_s^\theta + \theta_s' m_s\right) ds + \int_0^t \theta_s' v_s dB_s.$$

Diferenciando X_t^θ *com respeito a* X_0^θ

$$\frac{\partial X_t^\theta}{\partial X_0^\theta} = 1 + r\int_0^t \frac{\partial X_s^\theta}{\partial X_0^\theta} ds.$$

Defina $y_s \equiv \frac{\partial X_s^\theta}{\partial X_0^\theta}$. *Então, a expressão se torna uma equação diferencial* *ordinária cuja solução é dada por*

$$y_t = y_0 e^{rt}, y_0 = 1.$$

Portanto

$$\frac{\partial X_{T-t}^{\theta}}{\partial X_0^{\theta}} = e^{r(T-t)}.$$

De novo, pelo lema de Itô, aplicado à equação 17

$$\begin{aligned} W_{T-t}^{\theta t} &= W_0^{\theta t} + \int_0^{T-t} a_{t+s} ds + \int_0^{T-t} b'_{t+s} dB_s = \\ &= W_0^{\theta t} + \int_0^{T-t} \pi' \mu_{t+s} ds + \int_0^{T-t} \left(\sigma'_{t+s}\pi\right)' dB_s + X_{T-t}^{\theta t} - X_0^{\theta t} = \\ &= W_0^{\theta t} + \pi' \left(S_{T-t} - S_0\right) + X_{T-t}^{\theta t} - X_0^{\theta t}. \end{aligned}$$

Então resultado se segue. ■

A proposição 13 nos diz que uma variação positiva da riqueza inicial implica uma variação positiva na riqueza final, e, portanto, na função valor, como veremos daqui a pouco. Um argumento similar pode ser feito com relação à posição inicial na conta de margem. Note que, na prova, um aumento inicial na conta de margem equivale a um crescimento do retorno bruto da margem final durante o período considerado.

Este resultado não se baseia nas hipóteses sobre a utilidade, mas apenas sobre a restrição orçamentária. Conseqüentemente ele se mantém estejamos no ponto ótimo ou não.

O próximo resultado é uma conseqüência direta desta proposição. Ele mostra a conexão entre a derivadas da função valor.

Corolário 1 *Dadas as hipóteses sobre a utilidade e sobre a restrição orçamentária, a seguinte igualdade é válida:*

$$\{\exp[r(T-t)]-1\}\,J_w = J_x.$$

Prova. *Primeiro, observe que*

$$J(z_t) = E\left[U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]$$

Diferenciando dentro da esperança, obtemos[32]

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\partial J}{\partial w} = E\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w}\right]; \\ 0 &< \frac{\partial J}{\partial x} = E\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x}\right]. \end{aligned}$$

Aplique agora a proposição 13 e o resultado se segue. ■

Do corolário 1 obtemos a seguinte interessante conseqüência:

Corolário 2 *A seguinte igualdade vale*

$$\{\exp[r(T-t)]-1\}^2 J_{ww} = \{\exp[r(T-t)]-1\}\,J_{wx} = J_{xx}.$$

---

[32] *Veja o apêndice em DJ, onde se encontram as condições suficientes para diferenciação dentro da esperança. Essas condições estão presentes aqui, por causa de nossas hipóteses sobre a função utilidade.*

Prova. *Outra vez, diferenciando dentro da esperança, obtemos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 J}{\partial w^2} &= E\left[U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\left(\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w}\right)^2 + U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial^2 W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w^2}\right]; \\
\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} &= E\left[U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\left(\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x}\right)^2 + U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial^2 W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x^2}\right]; \\
\frac{\partial^2 J}{\partial w \partial x} &= E\left[U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w}\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x} + U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial^2 W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w \partial x}\right].
\end{aligned}$$

Como todos os termos que multiplicam $U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)$ são nulos, o resultado se segue da proposição 13. ■

Observe que todas as segundas derivadas são negativas, pois assumimos que $U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)$ é côncavo.

Agora, substituindo nas relações que obtivemos na equação de hedge ótimo, encontramos a seguinte fórmula mais compacta de hedge:

Proposição 14 *Dadas nossas hipóteses sobre a restrição orçamentária e sobre a utilidade, a taxa ótima de hedge é dada por*

$$\theta_t^{TV} = -\exp\left[-r\left(T-t\right)\right]\left(v_t v_t'\right)^{-1}\left[v_t \sigma_t' \pi + \frac{J_w}{J_{ww}} m_t\right]. \tag{20}$$

Prova. *Substitua os termos.* ■

A principal novidade aqui é que o primeiro termo fora dos parênteses se reduz a uma expressão determinística, que não depedende da função valor.

Para que possamos aprofundar nossa análise, nas próximas seções introduzimos hipóteses simplificadoras e mostramos como nossos resultados estão relacionado aos de DJ.

4.4.1 Preços Futuros Martingais - $m_t = 0$

Nosso primeiro caso especial ocorre quando o "drift" dos preços futuros é identicamente igual a zero. Isso se sucede em 4 dos 5 casos estudados em DJ.

Proposição 15 *Sob as hipóteses anteriores, juntamente com $m_t = 0$, a estratégia futura ótima é dada por θ^{TV}, onde*

$$\theta_t^{TV} = -e^{-r(T-t)} \left(v_t v_t'\right)^{-1} v_t \sigma_t' \pi. \tag{21}$$

Este resultado é similar aos casos 1, 3 e 4 de DJ, os quais assumem preços martingais. No caso 1, eles assumem preços gaussianos; no caso 3, as preferências são do tipo média-variância; e no caso 4 os preços à vista são log-normais e a utilidade é do tipo média-variância. Aqui, obtemos seus resultados sob hipóteses mais gerais. A má notícia é que, se $m_t = 0$, então os parâmetros da utilidade não influenciam a taxa ótima de hedge. A explicação dada por DJ é que a demanda por futuros é baseada apenas no hedge que eles produzem, tal que os futuros são apenas usados para controlar o 'ruído' no processo. Nas palavras de DJ, "*the optimal manner of doing so depends solely on the structure of the 'noise' in the price process, not on the structure of the utility, nor on the drift of the assets' price processes.*"

Em particular, vejamos o que acontece se especificamos preços futuros martingais e preços à vista log-normalmente distribuídos. Este é um caso muito especial, e para torná-lo tratável, assuma a seguinte condição para o m-ésimo preço à vista:

$$dS_t^m = g_t^m S_t^m dt + S_t^m h_t^{m'} dB_t.$$

Adicionalmente, de modo a fazer o processo distribuído log-normalmente, assumimos que g_t^m e h_t^m são determinísticos, em que $g_t^m : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_t^m : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ são funções mensuráveis limitadas.

Proposição 16 *Assumindo preços futuros martingais e preços à vista distribuídos log-normalmente, a taxa ótima de hedge é dada por*

$$\theta_t^{TV} = -e^{-r(T-t)} \left(v_t v_t'\right)^{-1} v_t H_t' \pi, \tag{22}$$

em que H_t é a matriz $M \times N$ cuja m-ésima linha é $S_t^m \exp\left[\int_t^T \left(g_s^m - \frac{1}{2} h_s^{m\prime} h_s^m\right) ds\right] h_t^{m\prime}$.

Prova. *Veja DJ.* ∎

4.4.2 Utilidade Exponencial - $m_t \neq 0$

Utilidade exponencial consiste em assumir $u(w) = -e^{-\gamma w}$, em que $\gamma > 0$ é o coeficiente de aversão ao risco. Este tipo de utilidade é freqüentemente usado em estudos em tempo contínuo.

Proposição 17 *Sob utilidade exponencial, a estratégia futura ótima é dada por θ^*, em que*

$$\theta_t^* = -e^{-r(T-t)} \left(v_t v_t'\right)^{-1} \left[v_t \sigma_t' \pi - \frac{1}{\gamma} m_t\right]. \tag{23}$$

Prova. *Observe que*

$$
\begin{aligned}
J_w &= -\gamma E_t \left[U\left(W_{T-t}^{\theta^* t}\right) \frac{\partial W_{T-t}^{\theta^* t}}{\partial w} \right]; \text{ e} \\
J_{ww} &= \gamma E_t \left[\gamma U\left(W_{T-t}^{\theta^* t}\right) \left(\frac{\partial W_{T-t}^{\theta^* t}}{\partial w} \right)^2 - U\left(W_{T-t}^{\theta^* t}\right) \frac{\partial^2 W_{T-t}^{\theta^* t}}{\partial w^2} \right].
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\partial W_{T-t}^{\theta^* t}}{\partial w} = 1$, *o resultado é imediato.* ■

Este é o caso 2 em DJ, como esperado. Aqui é fácil ver que, se o coeficiente de aversão ao risco aumenta, então a demanda especulativa pura decresce a taxa ótima de hedge.

Poderíamos considerar outras utilidades comumente usadas, como potência ou quadráticas. Entretanto, teríamos que enfrentar dois problemas: Primeiro, as funções potência, por exemplo, não admitem valores negativos da riqueza. Uma segunda razão de ordem mais prática é que em tais casos, teríamos que que usar métodos numéricos para achar a taxa ótima de hegde, pois a riqueza esperada que apareceria do lado direito depende da estratégia ótima.

Concluímos esta seção lembrando que poderíamos combinar as hipóteses que nós derivamos individualmente para obtermos uma estratégia de hedge mais abrangente.

4.4.3 Equilíbrio no Mercado Futuro

Nesta seção derivamos uma condição necessária para o equilíbrio no mercado futuro[33]. Para isso, assuma utilidade exponencial, tal que $u_i(w) = -e^{-\gamma_i w}$

[33]Esta seção é muito parecida com a seção 4 em DJ.

representa a utilidade Von Newmann-Morgenstern do agente para a riqueza final. Então, obteríamos:

$$\theta_{it}^{*} = -e^{-r(T_i-t)}\left(v_t v_t'\right)^{-1}\left[v_t\sigma_t'\pi_{it} - \frac{1}{\gamma_i}m_t\right],$$

em que T_i denota a data final para agente i.

Observa-se que os agentes são heterogêneos com relação à data de maturidade, à posição à vista e ao coeficiente de aversão ao risco.

A condição de equilíbrio de mercado, $\sum_{i=1}^{I}\theta_{it} = 0$, implica que

$$m_t = v_t\sigma_t'\frac{\sum_{i=1}^{I} e^{-r(T_i-t)}\pi_{it}}{\sum_{i=1}^{I}\frac{e^{-r(T_i-t)}}{\gamma_i}} = v_t\sigma_t'\frac{\sum_{i=1}^{I}\omega_{it}\pi_{it}}{\sum_{i=1}^{I}\frac{\omega_{it}}{\gamma_i}}, \tag{24}$$

em que $\omega_{it} \equiv \frac{e^{-r(T_i-t)}}{\sum_{i=1}^{I} e^{-r(T_i-t)}}$.

A condição acima deve ser satisfeita para a existência de equilíbrio. Condições suficientes são deixadas para futura pesquisa[34]. Assumindo que o equilíbrio existe, os preços futuros suportam a alocação nesse mercado. Como não se pode dizer se o mercado é completo ou não, a alocação é Pareto Ótimo Restrito.

Note que m_t é proporcional a cada posição à vista individual, cujos pesos são dados por ω_i. Se a covariância é alta, então os contratos futuros fornecem um bom hedge, de forma que a demanda por hedge aumenta. Além disso, m_t é proporcional à aversão ao risco dos investidores. Altos níveis de aversão ao risco correspondem a um m_t mais alto em valor absoluto.

Condições suficientes para termos $m_t = 0$ são (a) $\sum_{i=1}^{I}\omega_{it}\pi_{it} = 0$, isto

[34] Em DJ, "drift" e covariância dependem unicamente do tempo.

é, não existe excesso de demanda por hedge; (b) $v_t\sigma'_t = 0$, caso em que os futuros não fornecem qualquer hedge; ou (c) $\gamma_i = 0$ para algum agente i. No caso (a) os agentes podem, sem qualquer custo, assegurarem-se, pois haverá sempre alguém que deseja tomar uma posição contrária, tal que os especuladores não são necessários para o mercado. Note que o caso (b) implica que não haveria razão alguma para assumir uma posição em futuros.

Substituindo essa expressão na taxa de hedge, obtemos:

$$\theta^*_{jt} = -e^{-r(T_j-t)}\left(v_t v'_t\right)^{-1} v_t\sigma'_t\left[\pi_{jt} - \frac{\sum_{i=1}^{I}\omega_{it}\pi_{it}}{\gamma_j\sum_{i=1}^{I}\frac{\omega_{it}}{\gamma_i}}\right].$$

No caso (c) em que $\gamma_j = 0$, temos

$$\theta^*_{jt} = e^{-r(T_j-t)}\left(v_t v'_t\right)^{-1} v_t\sigma'_t\frac{\sum_{i\neq j}^{I}\omega_{it}\pi_{it}}{\omega_j}.$$

4.5 Conectando SDU e Utilidade Terminal

Gostaríamos de ligar as duas abordagens vistas anteriormente. Podemos fazer isso transformando apropriadamente a utilidade terminal. Uma vez que façamos isso, podemos usar as fórmulas compactas geradas para o segundo tipo de utilidade de forma a determinar explicitamente os efeitos de SDU na fórmula ótima de hedge[35]. A abordade de SDU nos motiva a adicionar o equivalente certeza à abordagem de riqueza terminal. Uma razão prática para isso é aumentar a flexibilidade do modelo, e portanto aumentar a eficiência do hedge. Para isso, considere a seguinte transformação sobre a utilidade

[35]Não há fluxo de consumo, então não faz entido falar de substituição intertemporal neste estágio.

terminal

1. As preferências do agente sobre a riqueza no período t são dadas pela utilidade $U : V \to \mathbb{R}$ definida por[36]

$$\max_{\theta \in \Theta} h^{-1}\left(E_t\left[h\left(U\left(W_T^{\theta t}\right)\right)\right]\right).$$

A vantagem prática aqui é obter fórmulas simples para o nosso problema. Do ponto de vista teórico, estamos assumindo que podemos adicionar o certeza equivalente na equação HJB, quando estamos maximizando a utilidade da riqueza final. Nosso procedimento se baseia na conseqüência importante da natureza de olhar para frente da equação de Bellman, o que torna as variáveis refletindo decisões passadas desnecessárias (veja Duffie e Epstein, p. 416, 1992b).

Podemos agora obter a taxa ótima de hedge.

Proposição 18 *A estratégia ótima futura é dada por θ^{TWSDU}, em que*

$$\begin{aligned}\theta_t^{TWSDU} &= -\frac{(J_{ww} + J_{wx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + J_w J_x\right)}{(J_{ww} + 2J_{wx} + J_{xx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + 2J_w J_x + J_x^2\right)} \times \\ &\quad (\upsilon_t \upsilon_t')^{-1}\left[\upsilon_t \sigma_t' \pi_t + \frac{J_w + J_x}{(J_{ww} + J_{wx}) + \kappa(J)\left(J_w^2 + J_w J_x\right)} m_t\right].\end{aligned}$$

[36]Uma caracterização equivalente alternativa, seria maximizar $J(z_t) = E_t\left[U\left(W_T^{\theta t}\right)\right] + \frac{1}{2} E_t \int_{s \geq t}^{T} \kappa\left(J\left(z_s\right)\right) J_{z_s}' \Sigma J_{z_s} ds.$
Isto geraria a mesma equação HJB, e portanto a mesma evolução da função valor. Entretanto, análises subseqüentes mais profundas ficariam prejudicadas. Esta é a razão por que escolhemos a definição dada no texto principal.

Prova. *Neste caso, a equação HJB relevante e*

$$\mathcal{A}J + \frac{1}{2}\kappa(J)\left(J'_{z_t}\Sigma J_{z_t}\right) = 0.$$

A prova segue as mesmas linhas da derivação da equação 16. ■

Esta expressao é similar à fórmula encontrada na seção 4.3. Adicionalmente, por causa da transformação que fizemos, os lemas provados na seção 4.4 permanecem válidos.

Lema 1 *Dadas as hipóteses sobre a utilidade e a riqueza nesta seção, então*

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{J_w}{J_{ww} + \kappa(J)J_w^2} = \\ &= \frac{E_t\left[h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{E_t\left[h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}. \end{aligned}$$

Prova. Como $J(z_t) = h^{-1}\left(E_t\left[h\left(U\left(W_T^{\theta t}\right)\right)\right]\right)$, segue-se que $h(J(z_t)) = E\left[h\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\right]$. Derivando ambos os lados[37]

$$h'(J)J_w = E\left[h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w}\right];$$

$$h'(J)J_x = E\left[h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x}\right].$$

[37] Outra vez, podemos diferenciar dentro das esperanças por causa das hipóteses sobre h. Veja DJ (1990, apêndice).

A segunda derivada J_{wx} é então

$$\begin{aligned}
h''(J)\, J_w J_x + h'(J)\, J_{wx} &= E\left[\left(h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + \right.\right. \\
&\quad h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right) \frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w} \frac{\partial W_{T-t}^{\theta t}}{\partial x} + \\
&\quad \left. h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right) \frac{\partial^2 W_{T-t}^{\theta t}}{\partial w \partial x}\right].
\end{aligned}$$

Aplicando proposição 13 temos

$$0 < J_w = \frac{E\left[h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{h'(J)};$$

$$\begin{aligned}
0 &< J_x = \left(e^{r(T-t)} - 1\right) \frac{E\left[h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{h'(J)} = \\
&= \left(e^{r(T-t)} - 1\right) J_w;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &> h''(J)\, J_w^2 + h'(J)\, J_{ww} = \\
&= E\left[h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right] \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\; & J_{ww} + \kappa(J) J_w^2 = \frac{E\left[h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right) U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{h'(J)};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &> h''(J)\,J_x^2 + h'(J)\,J_{xx} = \left(e^{r(T-t)}-1\right)^2 \times \\
&= E\left[h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right] \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \kappa(J)J_w^2 + \frac{J_{xx}}{\left(e^{r(T-t)}-1\right)^2} = J_{ww} + \kappa(J)J_w^2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow J_{xx} = \left(e^{r(T-t)}-1\right)^2 J_{ww};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &> h''(J)\,J_wJ_x + h'(J)\,J_{wx} = \left(e^{r(T-t)}-1\right) \times \\
&= E\left[h''\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)\left[U'\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]^2 + h'\left(U\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right)U''\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)\right] \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \kappa(J)\,J_w^2 + \frac{h'(J)\,J_{wx}}{\left(e^{r(T-t)}-1\right)} = J_{ww} + \kappa(J)J_w^2 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow J_{xw} = \left(e^{r(T-t)}-1\right) J_{ww}.
\end{aligned}
$$

■

Conseqüentemente a expressão para o hedge se torna bem mais simples.

Proposição 19 *Dadas as hipóteses sobre a restrição orçamentária e sobre a utilidade, a taxa ótima de hedge é dada por*

$$
\theta_t^{TWSDU} = -\exp\left[-r\left(T-t\right)\right]\left(v_tv_t'\right)^{-1}\left[v_t\sigma_t'\pi + \frac{J_w}{J_{ww}+\kappa(J)J_w^2}m_t\right]. \quad (25)
$$

Prova. *Aplique os corolários da seção 4.4.* ■

Esta fórmula mostra que adicionar o equivalente certeza não afeta a demanda pura por hedge, como acontecia no caso de riqueza terminal. Se

$\kappa(J) = 0$, então retornamos ao caso convencional. Note que $J_{ww} + \kappa(J) J_w^2 < 0$ como esperado. Mas como não sabemos o sinal de J_{ww}, e como não se trata de SDU, não é evidente que a aversão ao risco aumenta. Além disso, se $m_t = 0$, então o certeza equivalente não tem nenhum efeito sobre a taxa ótima de hedge, e a conclusão de DJ que a demanda por futuros depende apenas de t continua válida.

4.5.1 Ajustamento Exponencial de Risco CARA e CRRA

Nesta seção, apresentamos dois exemplos simples em que especificamos $h(u) = -e^{-\rho u}$, com $\rho > 0$. Em ambos os exemplos, mostramos que a avesão ao risco aumenta, de modo que a demanda especulativa pura decresce.

Assuma primeiro que $u(w) = -e^{-\gamma w}$, em que $\gamma > 0$. Então[38]

$$\begin{aligned} R &= -\left(\frac{J_{ww}}{J_w} + \kappa(J) J_w\right) = \\ &= \gamma\left(1 + \rho \frac{E_t\left[\exp\left(-\rho U - 2\gamma W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{E_t\left[\exp\left(-\rho U - \gamma W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}\right) \end{aligned}$$

Podemos interpretar R como o parâmetro global de aversão ao risco, assim como fizemos na seção 4.3. Inspecionando esta expressão, claramente se vê que a introdução do certeza equivalente implica no uso de métodos numéricos se queremos encontrar a taxa ótima de hegde. Pode-se também ver que a aversão ao risco aumenta pelo fator $\rho \frac{E_t\left[\exp\left(-\rho U - 2\gamma W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]}{E_t\left[\exp\left(-\rho U - \gamma W_{T-t}^{\theta t}\right)\right]} > 0$. Conseqüentemente, a demanda especulativa pura decresce[39]. Além disso, se $\rho = 0$, então

[38] Suprimimos a notação TWSDU de θ por simplicidade.

[39] Novamente, estamos apenas considerando efeitos de equilíbrio parcial.

voltamos ao exemplo de utilidade terminal discutido na seção passada.

Para o segundo exemplo, suponha $u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma > 0$. Então:

$$\begin{aligned} R &= -\left(\frac{J_{ww}}{J_w} + \kappa(J)J_w\right) = \\ &= \gamma\frac{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-1-\gamma}\right]}{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-\gamma}\right]}\left(1 + \frac{\rho}{\gamma}\frac{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-2\gamma}\right]}{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-1-\gamma}\right]}\right). \end{aligned}$$

A aversão ao risco cresce porque $\frac{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-1-\gamma}\right]}{E_t\left[e^{-\rho U}\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-\gamma}\right]} > \frac{E_t\left[\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-1-\gamma}\right]}{E_t\left[\left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-\gamma}\right]}$[40], e também por causa o termo adicional entre parênteses. Em particular, com utilidade logarítmica, $\gamma = 1$, o coeficiente de aversão ao risco aumenta por um fator um pouco maior do que ρ.

---

[40]Para ver isso, note que $cov(e^{-\rho U}, \left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-a-\gamma}), a = 0, 1$, é positiva, pois $\frac{d}{dW}\exp\left[-\rho\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] < 0$, e $\frac{d}{dW}W^{-a-\gamma} < 0$. Agora, para simplificar a notação, seja $q \equiv e^{-\rho U}$, $p \equiv \left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-1-\gamma}$, e $g \equiv \left(W_{T-t}^{\theta t}\right)^{-\gamma}$. Queremos provar que

$$\frac{E(pq)}{E(gq)} \geq \frac{E(p)}{E(g)}.$$

Como

$$Cov(p,q) \geq 0 \Longrightarrow E(pq) \geq E(p)E(q).$$

O mesmo vale para $E(gq)$. Porque cada esperança é positiva

$$\begin{aligned} E(g)E(pq) &\geq E(p)E(q)E(g); \\ E(p)E(gq) &\geq E(p)E(q)E(g). \end{aligned}$$

Subtraia uma da outra, e provamos.

4.5.2 Equilíbrio

Apenas para completar a análise, considere uma economia com um número finito de agentes, I. Obtemos,

$$\theta_{it} = -e^{-r(T_i - t)} \left(\upsilon_t \upsilon_t'\right)^{-1} \left[\upsilon_t \sigma_t' \pi_{it} - R_{it}^{-1} m_t\right],$$

em que $-R_{it}^{-1} = \frac{J_w^i}{J_{ww}^i + k^i(J^i) J_w^{i2}}$.

A condição de equilíbrio de mercado, $\sum_{i=1}^{I} \theta_{it} = 0$, implica que

$$m_t = \upsilon_t \sigma_t' \frac{\sum_{i=1}^{I} \omega_{it} \pi_{it}}{\sum_{i=1}^{I} \omega_{it} R_{it}^{-1}}. \tag{26}$$

A mesma análise da seção 4.4 se aplica aqui e não a repetiremos.

Naturalmente, substituindo a equação 26 na equação 25 temos:

$$\theta_{jt} = -e^{-r(T_j - t)} \left(\upsilon_t \upsilon_t'\right)^{-1} \upsilon_t \sigma_t' \left[\pi_{jt} - R_{jt}^{-1} \frac{\sum_{i=1}^{I} \omega_{it} \pi_{it}}{\sum_{i=1}^{I} \omega_{it} R_{it}^{-1}}\right].$$

5 CONCLUSÕES

Nesta tese estudamos o problema de hedge dinâmico usando três diferentes especificações de utilidade: utilidade diferencial estocástica, utilidade da riqueza terminal, e apresentamos uma transformação do último caso de forma a incorporar o certeza equivalente da primeira utilidade. Assumimos preços markovianos como em Adler e Detemple (1988), nos três casos estudados. Essa hipótese é importante para evitar o problema de hedge míope a cada período. Nosso modelo, diferentemente do que ocorre com Duffie e Jackson (1990), produz fórmulas de hedge que são válidas para um infinidades de distribuições de preços.

A hipóteses de utilidade diferencial estocástica - SDU -, pela qual o agente maximiza o consumo ao longo do tempo, como em Ho (1984), afeta a demanda pura por hedge ambiguamente, pois os parâmetros da SDU somam-se simultaneamente ao numerador e ao denominador da taxa ótima de hedge. Entretanto, SDU decresce a demanda especulativa pura, porque a aversão ao risco aumenta. Também mostramos que a decisão de consumo é independente da decisão de hedge, no sentido que podemos separar a maximização em dois programas distintos, um para consumo e outro para a estratégia ótima de hedge. Neste último caso, se o "drift" dos preços futuros é zero, não existe um impacto claro sobre a taxa de hedge.

No segundo caso que estudamos, derivamos uma fórmula de hedge geral e compacta, que incorpora todos os casos estudados em Duffie e Jackson (1990). Essa fórmula pode ser especializada para incluir preços gaussianos, utilidade média-variância e preços log-normalmente distribuídos.

Além disso, derivamos uma condição necessária para a existência de equilíbrio em mercados futuros e analisamos as propriedades do modelo num contexto de equilíbrio geral, com agentes heterogêneos, assumindo que o equilíbrio existe.

Em nosso terceiro caso, modificamos a utilidade terminal, e encontramos uma fórmula compacta para hedge, que torna a abordagem de utilidade terminal um caso específico. Mostramos, então, que a demanda pura por hedge não é afetada por essa especificação. Com utilidades do tipo CRRA e CARA, Vimos que a aversão ao risco aumenta e, conseqüentemente, a demanda especulativa pura decresce. Se os preços futuros são martingais, então essa modificação não exerce nenhuma função sobre o modelo para determinar a alocação ótima, pois obtemos os mesmos resultados do que com Utilidade Terminal.

As outras contribuições da tese são as seguintes. No capítulo 2, apresentamos um panorama do estado da arte em termos de especificação de função utilidade para resolvermos problemas intertemporais. Essas utilidades vêm sendo paulatinamente incorporadas aos modelos econômicos e ajudando a desobstruir alguns problemas teóricos que os economistas geralmente encontram. Discutimos um pouco desse problema naquele capítulo.

No capítulo 3 apresentamos algumas noções de semigrupo e geradores infinitesimais posteriormente usados para produzirem as equações de Hamilton-Jacobi-Bellman relevantes para resolvermos nosso problema de alocação. Essas equações foram derivadas no capítulo 4 de uma forma muito simples, satisfeitas as hipóteses requeridas para utilizarmos o instrumental apresentado. Ainda no capítulo 3, desenvolvemos algumas formas de apreçar ativos como exemplos da aplicabilidade desse instrumental.

Embora este trabalho seja essencialmente teórico, existem algumas possíveis aplicação do modelo aqui desenvolvido. Por exemplo, pode-se tentar simular a taxa ótima de hedge e comparar os resultados com algum modelo referencial, em geral mais simples do que o nosso como o de Duffie e Jackson (1990), sem utilidade diferencial estocástica. Neste caso, devemos variar os parâmetros de nosso modelo, desde que algumas condições de estacionaridade estejam presentes. Uma outra possibilidade é comparar o modelo desenvolvido com algum outro alternativo (ver, por exemplo, o modelo de Ceccheti, *et alli*, 1988, e Kroner e Sultan, 1993, além dos outros autores já mencionados ao longo do texto) e medir a eficiência dos mesmos, segundo algum critério pré-estabelecido. Em qualquer caso, poderíamos estudar os resultados de ter um "hedger" seguindo a estratégia ótima sugerida pelas simulações e testar sua eficiência empírica.

Como em Duffie e Jackson (1990), não implementamos nosso modelo. Porém, dado o presente estágio computacional, bem como os ganhos potenciais de eficiência de hedge que poderiam ser alcançados, cremos que futuros trabalhos possam direcionar seus esforços à implementação do modelo aqui sugerido.

Referências

[1] ADLER, Michael & DETEMPLE, Jerome B. On the Optimal Hedge of a Nontraded Cash Position. *The Journal of Finance*, vol. 43, n.º1, p.p. 143-153, 1988.

[2] AIT-SAHALIA, Yacine, HANSEN, Lars P. & SCHEINKMAN, José A. Operator Methods for Continuous-Time Markov Models. Manuscript, University of Chicago, 2002.

[3] ANDERSON, Evan W., HANSEN, Lars P. & SARGENT, Thomas J. Robustness, Detection and the Price of Risk. Manuscript, University of North Carolina, University of Chicago and Stanford University, 2000.

[4] ANDERSON, Ronald W. & DANTHINE, Jean-P. Cross-Hedging. *Journal of Political Economy*, vol. 89, p.p. 1182-1196, 1981.

[5] ANDERSON, Ronald W. & DANTHINE, Jean-P. The Time Pattern of Hedging and the Volatility of Futures Prices. *Review of Economic Studies*, vol. 50, p.p. 249-266, 1983.

[6] BANSAL, Ravi & YARON, Amir. Risks for the Long Run: A potential resolution of asset pricing puzzles. Working Paper, The Wharton School, 2000.

[7] BARBERIS, Nicholas, HUANG, Ming & SANTOS, Tano. Prospect Theory and Asset Prices. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 116, p.p. 1-53, 2001.

[8] BREEDEN, Douglas T. An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investments Opportunities. *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p.p. 265-296, 1979.

[9] BREEDEN, D. Futures Markets and Commodity Options: Hedging and optimality in incomplete markets. *Journal of Economic Theory*, vol. 32, p.p. 275-300, 1984.

[10] BUENO, Rodrigo D. L. S. Conceitos de "Hedge" em Mercados Futuros. *Revista de Administração*, vol. 37, n.º4, p.p. 83-90, 2002.

[11] CAMPBELL, John Y. & COCHRANE, John H. By Force of Habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of Political Economy*, vol. 107, p.p. 205-251, 1999.

[12] CECCHETTI, Stephen G., CUMBY, Robert E. & FIGLEWSKI, Stephen. Estimation of the Optimal Futures Hedge. *The Review of Economics and Statistics*, p. 623-630, 1988.

[13] COCHRANE, John H. *Asset Pricing*. Princeton: Princeton, 2001.

[14] CONSTANTINIDES, George M. & DUFFIE, Darrel. Asset Pricing with Heterogeneous Consumers. *Journal of Political Economy*, vol. 104, p.p. 219-240, 1996.

[15] DUFFIE, Darrell. *Futures Markets*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

[16] DUFFIE, Darrell & EPSTEIN, Larry G. Stochastic Differential Utility. *Econometrica*, vol. 60, n.º2, p.p. 353-394, 1992.

[17] DUFFIE, Darrell & EPSTEIN, Larry G. Asset Pricing with Stochastic Differential Utility. *Review of Financial Studies*, vol. 5, n.º3, p.p. 411-436, 1992.

[18] DUFFIE, Darrell & JACKSON, Matthew O. Optimal Hedging and Equilibrium in a Dynamic Futures Market. *Journal of Economics Dynamics and Control*, vol. 14, p.p. 21-33, 1990.

[19] EDERINGTON, Louis H. The Hedging Performance of the New Futures Markets. *The Journal of Finance*, vol. 34, n.º1, p. 157-170, 1979.

[20] EPSTEIN, Larry G. & ZIN, Stanley E. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A theoretical framework. *Econometrica*, vol. 57, n.º4, p.p. 937-969, 1989.

[21] EPSTEIN, Larry G. & ZIN, Stanley E. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An empirical analysis. *Journal of Political Economy*, vol. 99, n.º2, p.p. 263-286, 1991.

[22] ETHIER, Stwart N. & KURTZ, Thomas G. *Markov Processes: Characterization and convergence*. New York: Wiley, 1986.

[23] GARMAN, Mark B. Towards a Semigroup Pricing Theory. *The Journal of Finance*, vol. 40, n.º3, p.p. 847-861, 1985.

[24] HANSEN, Lars P. & SCHEINKMAN, José A. Semigroup Pricing. Manuscript, University of Chicago, 2002.

[25] HANSEN, Lars P. & SINGLETON, Kenneth J. Stochastic Consumption, Risk Aversion and Temporal Behavior of Asset Returns. *Journal of Political Economy*, vol. 91, p.p. 249-265, 1983.

[26] HANSEN, Lars P., SARGENT, Thomas J., TURMUHAMBETOVA, Gauhar A. & WILLIAMS, Noah. Robustness and Uncertainty Aversion. Manuscript, University of Chicago and Stanford University, 2001.

[27] HEATON, John & LUCAS, Deborah J. The Effects of Incomplete Insurance Markets and Trading Costs in a Consumption-Based Asset Pricing Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 16, p.p. 601-620, 1992.

[28] HO, Thomas S. Y. Intertemporal Commodity Futures Hedging and Production Decision. *The Journal of Finance*, vol. 39, n.º2, p.p. 351-376, 1984.

[29] ITO, K. & WATANABE. Transformative of markov process by multiplicative functional. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 15, p.p. 13-30, 1965.

[30] JOHNSON, Leland L. The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures. *Review of Economic Studies*, vol. 27, p.p. 139-51, 1960.

[31] ISSLER, João V. & PIQUEIRA, Natália S. Estimating Relative Risk Aversion, the Discount Rate, and the Intertemporal Elastiticity of Substitution in Consumptin for Brazil Using Three Types of Utility Function. *Brazilian Review of Econometrics*, vol. 20, p.p. 201-239, 2000.

[32] KREPS, D. M. & PORTEUS, E. L. Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory. *Econometrica*, vol. 46, p.p. 185-200, 1978.

[33] KRONER, Kenneth F. & SULTAN, Jahangir. Time-Varying Distributions and Dynamic Hedging with Foreign Currency Futures. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 28, n.º4, p. 535-551, 1993.

[34] KRYLOV, Nicolai V. *Controlled Diffusion Processes*. New York: Springer-Verlag, 1980.

[35] KUNITA, H. & WATANABE, S. On square integrable martingales. *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 30, p.p. 209 - 245, 1967.

[36] LINTNER, John. The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, p.p. 13-37, 1965.

[37] LUCAS, Robert E., Jr. Asset Pricing in an Exchange Economy. *Econometrica*, vol. 46, p.p. 1429-45, 1978.

[38] MANKIW, N. Gregory & ZELDES, Stephen P. The Consumption of Stockholders and Nonstockholders. *Journal of Financial Economics*, vol. 29, p.p. 97-112, 1991.

[39] MARKOWITZ, Harry M. *Portfolio Selection*, vol. 2. Malden: Blackwell, 1959.

[40] MEHRA, Rajnish & PRESCOTT, Edward. The Equity Premium Puzzle. *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, p.p. 145-161, 1985.

[41] MERTON, Robert. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, vol. 41, p.p. 867-888, 1973.

[42] NELSON, Daniel B. ARCH Models as Diffusion Approximations. *Journal of Econometrics*, vol. 45, 1990. In: ROSSI Peter E. *Modelling Stock Market Volatility: Bridging the gap to continuous time.* San Diego: Academic Press, 1996. c.

[43] OKSENDAL, Berndt. *Stochastic Differential Equations*, 4.th ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

[44] REVUZ, D. & YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion* (Second ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[45] SHARPE, William. Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, vol. 19, p.p. 425-442, 1964.

[46] STEIN, Jerome L. The Simultaneous Determination of Spot and Futures Prices. *The American Economic Review*, vol. 51, n.º5, p.p. 1013-1025, 1961.

[47] WORKING, Holbrook. Futures Trading and Hedging. *The American Economic Review*, vol. 43, p.p. 314-43, 1953.

[48] WORKING, Holbrook. New Concepts Concerning Futures Markets and Prices. *The American Economic Review*, vol. 52, p.p.