UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Imposto Inflacionário Ótimo em Modelos com Custos de Transação Pecuniários

MARCIO ALVES DINIZ

ORIENTADOR: PROF. DR. NAÉRCIO AQUINO DE MENEZES FILHO

SÃO PAULO
2003

Reitor da Universidade de São Paulo
Prof. Dr. Adolpho José Melfi

Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Prof. Dra. Maria Teresa Leme Fleury

Chefe do Departamento de Economia
Prof. Dra. Elisabeth Maria Mercier Querido Farina

Imposto Inflacionário Ótimo em Modelos com Custos de Transação Pecuniários

MARCIO ALVES DINIZ

ORIENTADOR: PROF. DR. NAÉRCIO AQUINO DE MENEZES FILHO

Dissertação apresentada ao
Departamento de Economia da
Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Mestre em
Economia.

SÃO PAULO
2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Publicações e Divulgação do SBD/FEA/USP

Diniz, Marcio Alves
Imposto inflacionário ótimo em modelos com custos de transa-
ção pecuniários / Marcio Alves Diniz. -- São Paulo : FEA/USP,
2003.
71 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2003
Bibliografia.

1. Macroeconomia 2. Política monetária 3. Custo de transação
I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
da USP II. Título.

CDD – 339

"Não há limites para a produção de livros, e estudar demais deixa exausto o corpo.
Agora que já se ouviu tudo,
aqui está a conclusão:
Tema a Deus
e obedeça aos seus mandamentos,
porque isso é essencial para o homem.
Pois Deus trará a julgamento
tudo o que foi feito,
inclusive tudo o que está escondido,
seja bom, seja mau."

Eclesiastes XII.12-14

Resumo

Desde que Friedman (1969) afirmou que a regra ótima de condução de política monetária seria manter a taxa de juros nominal igual a zero, muitos pequisadores têm se dedicado a investigar a otimalidade dessa "regra", que levou o nome de seu formulador. Esses autores tem se empenhado em analisar a otimalidade da regra de Friedman em diferentes modelos monetários mas, aparentemente, não há trabalhos nesse sentido que utilizam a abordagem proposta por Feenstra (1986). Este supõe que as transações têm um custo pecuniário e, dessa forma, não afetam a oferta de trabalho, como ocorre nos modelos de *shopping* $-$ *time*.

O presente trabalho investiga portanto a otimalidade da regra de Friedman em modelos monetários em que as transações têm um custo pecuniário e o governo tem a seu dispor impostos distorsivos para arrecadar recursos. Para tanto, fazemos uso da abordagem de Ramsey (1927), que consiste em encontrar as alíquotas ótimas que o governo deve cobrar para arrecadar determinado nível de recursos, pressupondo que as famílias maximizam suas preferências sujeitas à restrição orçamentária.

Os resultados encontrados sugerem que, se a função de tecnologia de transação for homogênea de grau um, a regra sempre é ótima para os modelos aqui propostos. A interpretação dessas condições demonstram que, nesses modelos, a otimalidade da regra é uma extensão dos resultados obtidos por Diamond e Mirrless (1971). Eles demonstram que bens intermediários não devem ser taxados quando a tecnologia de produção apresenta retornos constantes de escala.

Ainda estabelecemos a equivalência funcional entre o modelo com custos de transação pecuniários e o modelo com suposição de *shopping* $-$ *time* e entre aquele e o modelo com lazer e moeda na função utilidade.

Abstract

Since Friedman (1969) stated that the optimal monetary rule would be to mantain the nominal interest rate equal to zero, a great number of researchers have dedicated to investigate the optimatility of this "rule", that was named of its creator. These authors have investigated the optimatility of the Friedman rule in different monetary models but, apparently, there are no studies using the Feenstra (1986) approach. Feenstra supposes that transactions have a pecuniary cost and, therefor, do not affect the labor supply, as it occurs in the $shopping - time$ models.

The present work, therefore, investigates the optimatility of the Friedman rule in monetary models in which the transactions have a pecuniary cost and the government has access to distortionary taxes to raise resources. We use the Ramsey (1927) approach that consists in finding the optimal tax rates that the government should charge to raise a given level of resources, supposing that the families maximize their preferences subject to the budget constraint.

The results found suggest that, if the transaction technology function is homogeneous of degree one, the Friedman rule is always optimal in the models here proposed. The interpretation of this conditions shows that, in these models, the rule optimatility is an extension of Diamond and Mirrless (1971) results. They demonstrate that intermediate goods should not be taxed when the technology has constant returns to scale.

We also establish the functional equivalence between the pecuniary transaction costs model and the $shopping - time$ model and between that and the model with leisure and money in the utility function.

Sumário

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Desde a década de 70, a macroeconomia moderna tem usado amplamente os modelos de equilíbrio geral para examinar os mais diversos assuntos. Dentre estes, destacam-se os referentes ao crescimento econômico e às finanças públicas.

Muitos problemas, abordados até o final dos anos 60 somente pela ótica de equilíbrio parcial, passaram então a ser discutidos também do ponto de vista dos modelos de equilíbrio geral. Um desses problemas é a otimalidade de políticas tributárias e monetárias. Vários artigos têm sido escritos tentando determinar o imposto inflacionário ótimo em modelos monetários de equilíbrio geral, principalmente depois do trabalho de Friedman (1969). Ele propôs, como política monetária ótima, uma regra gere uma taxa de juros nominal nula, correspondendo a um imposto inflacionário igualmente nulo. Isso equivale a propor uma taxa de inflação negativa, mas sua abordagem é de equilíbrio parcial.

Phelps (1973) argumenta que a regra de Friedman provavelmente não será ótima em economias sem impostos *lump-sum*, em que o governo tem de financiar seus gastos usando impostos distorsivos. Seu argumento é que a taxação ótima geralmente requer o uso de todos os impostos disponíveis, incluindo o inflacionário.

Phelps diz, portanto, que o imposto inflacionário ótimo é maior do que a regra de Friedman indica. Tal conclusão também usa o princípio de equilíbrio parcial que afirma que bens com baixas elasticidades-preços de demanda devem ser mais taxados que bens com elevadas elasticidades-preços. Portanto, a moeda deveria ser taxada com um imposto estritamente positivo.

A literatura recente tem revisado o argumento de Phelps. Em particular, Kimbrough (1986) critica a conclusão deste último dizendo que a moeda não deve ser modelada como um bem final, mas antes como um bem intermediário na produção de transações. Ele assume uma função de tecnologia de transações em que o tempo de transações é uma função dos gastos de consumo brutos dos impostos e dos encaixes reais. Para uma tecnologia que fosse homogênea de grau um, ele demonstra a otimalidade da regra de Friedman num ambiente de *second best*. Esse resultado é consistente com o derivado por Diamond e Mirrlees (1971).

Duas grandes correntes de regras ótimas de taxação têm sido usadas para justificar os resultados de imposto inflacionário ótimo: a regra ótima de taxação de bens intermediários de Diamond e Mirrlees e as regras de taxação de bens finais de Ramsey (1927), posteriormente desenvolvidas por Atkinson e Stiglitz (1972). A primeira, derivada para o caso de funções de produção com retornos constantes de escala, é a base da literatura dos modelos monetários com tecnologias de transação. De acordo com tal regra, se a tecnologia apresenta retornos constantes de escala e se os impostos sobre bens finais estão disponíveis, os bens intermediários não devem ser taxados. A moeda poderia portanto ser interpretada como um bem intermediário na produção de bens finais e, como tal, não deveria ser taxada.

Já Atkinson e Stiglitz estabeleceram que é ótimo não distorcer os preços relativos entre o consumo de diferentes bens quando as preferências são separáveis no lazer e homotéticas nos bens de consumo. Este último tipo de regra foi aplicado a economias com bens *cash* e bens *credit* desenvolvidas por Lucas e Stokey (1983) e Chari, Christiano e Kehoe (1996). Nelas, o imposto inflacionário se traduz em impostos efetivos e discriminados sobre os bens *cash*. A regra de Friedman é ótima sob as condições dadas por Atkinson e Stiglitz para taxação uniforme.

As regras de Ramsey também foram usadas para explicar os resultados de modelos com moeda na função utilidade. Nessa classe de modelos, a impressão geral é que, como apontado por Woodford (1990), "(...) either the Phelps or the anti Phelps result is possible depending upon details of specification". Em seu trabalho, Phelps (1973) usa um modelo com moeda na função utilidade com preços dos fatores exógenos e conclui que o imposto inflacionário ótimo é positivo. Chamley (1985) pretende generalizar esse resultado para um modelo de equilíbrio geral e conclui que a regra de Friedman é ótima apenas no caso de *first best*. Siegel (1978) explora a natureza dos serviços de liquidez serem produzidos sem custo, mas conclui que essa característica não afetaria o resultado de que o imposto sobre esses serviços deve ser estritamente positivo. Drazen (1979) afirma que a distinção entre a natureza dos bens, ou seja, se eles são produzidos sem custos ou a custos positivos, é importante na determinação da solução de *second best*. Mesmo assim, ele conclui que é difícil afirmar com certeza se o imposto inflacionário ótimo é positivo ou negativo. Esses resultados são intrigantes porque não são consistentes com o resultado geral de otimalidade da regra de Friedman obtido nos modelos com tecnologias de transação.

O uso generalizado das regras de Ramsey para justificar o resultado de Phelps é errôneo e explica a ambigüidade e a aparente inconsistência dos resultados em diferentes arcabouços de modelos monetários. As regras ótimas de taxação de bens finais se aplicam para impostos ad-valorem sobre bens produzidos a um custo positivo. Em geral, os impostos ad-valorem ótimos sobre o consumo são positivos. Uma vez que os bens têm um custo positivo, os impostos unitários correspondentes também são estritamente positivos. Mas comumente se assume que a moeda tenha um custo de produção ínfimo. Se esse é o caso, então o único imposto que pode gerar uma receita positiva é um imposto unitário e, em qualquer dos casos, a taxa de juros nominal é, por construção, um imposto unitário. O resultado geral de que a alíquota do imposto ad-valorem sobre os encaixes reais deve ser positiva, pode se traduzir, no limite, quando os custos de produzir moeda são assumidos como arbitrariamente muito pequenos, em uma taxa de juros nominal ótima nula. Essa é a intuição básica sobre a generalidade da regra de Friedman.

Outra razão da aparente inconsistência dos resultados sobre imposto inflacionário ótimo é a não uniformidade das abordagens de *second best* utilizadas. Alguns autores impõem condições de estacionariedade sobre o problema de *second best*. Nesse mundo *third best*[1], a regra de Friedman nunca é a solução ótima.

1.1 A abordagem de Ramsey

A abordagem utilizada por este trabalho será a mesma desenvolvida em Chari e Kehoe (1998) e conhecida como abordagem de Ramsey. Este estudou o problema de escolher uma estrutura ótima de taxação em uma economia com um agente representativo quando somente impostos distorsivos estão disponíveis. Em seu trabalho, Chari e Kehoe procuram combinar os arcabouços de finanças públicas e de equilíbrio geral usados em macroeconomia e é exatamente essa tradição de

[1]Quando se supõe, além das restrições usuais, que o problema deve respeitar condições de estacionariedade.

finanças públicas que se desenvolveu a partir do trabalho de Ramsey de 1927. Já o arcabouço de equilíbrio geral aplicado à macroeconomia desenvolveu-se com Cass (1965), Koopmans (1965), Kydland e Prescott (1982) e Lucas e Stokey (1983).

Os autores denominam esse arcabouço de "abordagem primária". Ela consistiria em caracterizar o conjunto de alocações que podem ser implementadas como equilíbrios competitivos com impostos distorsivos supondo duas restrições: uma restrição de recursos e outra denominada restrição de implementabilidade. Essa restrição é equivalente à restrição orçamentária do consumidor em que as condições de primeira ordem das firmas e do consumidor são usadas para substituir os preços. Dessa forma, ambas as restrições ficam dependendo só das alocações. Essa caracterização implica que alocações ótimas são soluções de um simples problema de programação dinâmica.

As alocações acima citadas são conjuntos ou vetores que contêm como elementos as quantidades de bens de consumo, a produção total desses bens, a quantidade de horas de trabalho ofertadas pelas famílias e um sistema de preços com os preços de todos os bens de consumo (supondo o salário normalizado para 1). Uma alocação que pode ser implementada como equilíbrio competitivo é uma alocação como a definida acima que, juntamente com uma política fiscal $\pi{=}(\tau_i)_{i=1}^{n}$ [2], resolve, simultaneamente, o problema do consumidor e da firma e respeita a restrição orçamentária do governo e a condição de *market clearing*.

Formalmente, supomos que há n bens de consumo, que podem ser consumidos pelas famílias $(c_1, c_2, ..., c_n)$ ou pelo governo $(g_1, g_2, ..., g_n)$, e que são produzidos com trabalho (l) sob uma restrição de recursos dada por uma função: $F(c_1 + g_1, ..., c_n + g_n, l){=}0$, sendo F um processo de produção com retornos constantes de

[2] Como Chari e Kehoe definem, uma política fiscal é uma seqüência de impostos lineares $\pi{=}(\tau_i)_{i=1}^{n}$ sobre os n bens da economia.

escala. Nesse caso, o problema do consumidor seria:

$$max\ U(c_1, c_2, ..., c_n, l) \tag{1.1}$$

$$s.a. \sum_i p_i(1+\tau_i)c_i = l \tag{1.2}$$

O problema da firma seria, sendo x_i a produção do bem i:

$$max \sum_i p_i x_i - l \tag{1.3}$$

$$s.a. F(x_1, x_2, ..., x_n, l) = 0 \tag{1.4}$$

Finalmente, a restrição orçamentária do governo e a condição de "market clearing", respectivamente:

$$\sum_i p_i g_i = \sum_i p_i \tau_i c_i \tag{1.5}$$

$$c_i + g_i = x_i \ \forall i = 1, ..., n \tag{1.6}$$

Chari e Kehoe afirmam então que as alocações que são equilíbrios competitivos satisfazem a restrição de recursos, a saber, $F(c_1+g_1, ..., c_n+g_n, l)$=0, e a restrição de implementabilidade, nesse caso dada por:

$$\sum_i U_i c_i + U_l l = 0 \tag{1.7}$$

que nada mais é que a restrição orçamentária do consumidor com os preços e salário substituídos pelas utilidades marginais.

Quando o planejador central busca então maximizar a função utilidade do consumidor sujeito à restrição de recursos e à restrição de implementabilidade os autores se referem a tal problema como problema de Ramsey. Essa abordagem soluciona o problema do governo ter de prever o comportamento dos agentes privados porque, nesse caso, ele pode maximizar a função de utilidade do consumidor sujeito às restrições de recursos e de implementabilidade como se fosse um planejador central e resolver o problema de Ramsey. Isso porque, antes de escolher uma determinada política fiscal, o governo requer otimalidade dos consumidores e das firmas e tal premissa está implícita na restrição de implementabilidade.

Tal abordagem é utilizada não apenas por Chari e Kehoe para analisar a otimalidade de políticas monetárias e fiscais em modelos monetários, mas também por vários outros autores. Correia e Teles (1996, 1999) também utilizam o mesmo arcabouço para investigar a otimalidade da regra de Friedman considerando diferentes especificações desses modelos.

O presente trabalho também utilizará a abordagem de Ramsey para investigar a otimalidade de políticas monetárias e traçar considerações de política econômica tendo em vista os dados observados nas economias nacional e internacional.

O capítulo seguinte apresentará uma breve discussão sobre critérios de otimalidade e suas definições. A seguir, apresentaremos no capítulo três um breve sumário dos principais resultados encontrados pela literatura sobre modelos monetários que investigam políticas ótimas, especificamente a monetária. No quarto capítulo apresentaremos nosso modelo e discorreremos sobre suas semelhanças e diferenças em relação aos já investigados pela literatura supracitada. No capítulo quinto falaremos sobre a equivalência funcional entre o modelo proposto por este trabalho e o modelo de *shopping-time*. Finalmente, apresentaremos as conclusões e sugestões para novas pesquisas no sexto e último capítulo.

Capítulo 2

Alguns Resultados Preliminares

Antes de discutir a lógica por trás da regra de Friedman e os argumentos contrários e favoráveis a ela, achamos que a apresentação de alguns resultados preliminares podem ser úteis na compreensão daqueles. Um deles é o apresentado por Diamond e Mirrlees (1971), que não está diretamente relacionado aos modelos monetários mas que é utilizado pelos autores que seguiram investigando o problema do imposto inflacionário ótimo. Outro resultado é o desenvolvido por Atkinson e Stiglitz (1972) a partir do trabalho de Ramsey e que estabelece regras para taxação de bens finais.

2.1 O Teorema de Diamond e Mirrlees

Diamond e Mirrlees (1971) pretendiam examinar a maximização do bem-estar social usando impostos e a produção de bens efetuada pelo governo como variáveis de controle. Ao fazer isso, pretendiam conciliar as teorias de taxação, investimento público e economia de bem-estar social.

No artigo demonstram a desejabilidade da eficiência agregada da produção[1] em

[1] A eficiência produtiva agregada se faz presente se as taxas marginais de transformação são

uma ampla variedade de circunstâncias, supondo que os impostos são estabelecidos em seu nível ótimo e examinam a estrutura tributária ótima.

É de amplo conhecimento que a eficiência agregada da produção é desejada como uma parte da obtenção do ótimo de Pareto. Também é amplamente sabido que quando o ótimo de Pareto desejado não pode ser obtido, a eficiência agregada da produção pode ser indesejável. A conclusão dos autores difere desses resultados pois afirmam que a eficiência produtiva é desejável apesar do ótimo de Pareto pleno não ser possível. Na posição de ótimo, a presença de impostos sobre bens implica que as taxas marginais de substituição não são iguais às taxas marginais de transformação. Além disso, a ausência de taxação *lump-sum* implica que a distribuição de renda não é o melhor que pode ser feito. Apesar disso, eles demonstram que a presença de impostos ótimos sobre bens implica a desejabilidade da eficiência agregada da produção.

Para ilustrar os principais resultados obtidos no artigo, lançaremos mão do arcabouço usado pelos próprios autores no problema de maximização do bem-estar. Consideramos então uma economia com vários produtores públicos e privados e apenas um consumidor. A situação geral que desejavam discutir é a de uma economia com vários consumidores, mas os resultados aqui demonstrados podem ser facilmente extendidos para esse caso.

Assume-se que há competição perfeita e portanto, não há lucros. Além disso, o único instrumento tributário usado pelo governo são os impostos sobre os bens. O vetor $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ dá os preços ao consumidor e, portanto, determina as escolhas disponíveis ao consumidor. Em vista disso, a função de bem-estar ou função de utilidade indireta pode ser escrita como $v(q)$. Essa estrutura engloba o caso em que a determinação do bem-estar pelo governo não coincide com a

as mesmas nos setores de produção público ou privado.

utilidade do consumidor, embora dependa do que ele consome. No caso especial em que as preferências sociais coincidem com as do consumidor individual, sua utilidade pode ser usada para medir o bem-estar, e então temos: $v(q) = u(x(q))$, sendo o vetor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ o que fornece as demandas do consumidor por todos os n bens da economia.

Denotamos por $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ o vetor de preços que os produtores privados encontram no mercado. Devido à presença de impostos, esses preços podem ser diferentes daqueles encontrados pelos consumidores, dados por q. Os vetores $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ denotam os vetores de oferta do governo e dos produtores privados respectivamente. A restrição tecnológica do governo pode ser escrita como $G(z) \leq 0$, ou equivalentemente, $z_1 \leq g(z_2, z_3, ..., z_n)$. Para simplificar os cálculos, é possível supor que tal restrição é satisfeita com igualdade.

Além de escolher a função objetivo e expressar a restrição de produção do governo, resta supor que a economia esteja em equilíbrio. A condição de *market clearing* é dada por $x(q) = z + y$. Os dois conjuntos de preços, p e q, são usados como variáveis de controle. Uma abordagem mais natural seria usar os impostos, que o governo realmente controla, como variáveis de decisão. Entretanto, uma vez que determinamos os vetores p e q ótimos, determinamos os impostos ótimos.

O problema é, então, escolher:

$$q_2, ..., q_n, p_2, ..., p_n, z_1, ..., z_n \tag{2.1}$$

para maximizar $v(q)$ sujeito a:

$$x_i(q) - y_i - z_i = 0 \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.2}$$

em que y maximiza $\sum p_i y_i$ sujeito a:

$$y_1 = f(y_2, ..., y_n) \tag{2.3}$$

e

$$z_1 = g(z_2, ..., z_n) \tag{2.4}$$

Uma vez que a escolha dos preços ao produtor (p) pode ser usada para obter qualquer comportamento desejado da parte dos produtores privados, podemos usar qualquer vetor y consistente com a restrição $y_1 = f(y_2, ..., y_n)$ - observe que a igualdade na restrição de produção implica que ela é eficiente no setor privado. Os preços que o consumidor encontra são então determinados por

$$p_i = -p_1 f_i(y_2, ..., y_n), \ (i = 2, ..., n) \tag{2.5}$$

que é a expressão implícita pela maximização de lucros pelos produtores privados. Usando as equações:

$$y_2 = x_2 - z_2, ..., y_n = x_n - z_n \tag{2.6}$$

reduzimos as restrições do problema acima para uma única restrição:

$$x_1(q) = y_1 + z_1 = f(x_2 - z_2, ..., x_n - z_n) + g(z_2, ..., z_n) \tag{2.7}$$

Assim simplificamos o problema para: escolher $q_2, ..., q_n, z_2, ..., z_n$ para maximizar $v(q)$ sujeito a

$$x_1(q) - f(x_2(q) - z_2, ..., x_n(q) - z_n) - g(z_2, ..., z_n) = 0 \tag{2.8}$$

Montando o lagrangeano com λ como multiplicador:

$$L = v(q) - \lambda[x_1(q) - f(x_2 - z_2, ..., x_n - z_n) - g(z_2, ..., z_n)] \quad (2.9)$$

podemos diferenciar com relação a q_k:

$$v_k - \lambda\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k} - \sum_{i=2}^{n} f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = 0 \quad k = 2, 3, ..., n \quad (2.10)$$

Fazendo uso das equações de maximização de lucro do produtor privado, isso pode ser escrito como:

$$v_k - \lambda \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad k = 2, 3, ..., n \quad (2.11)$$

Diferenciando L com relação a z_k temos:

$$\lambda(f_k - g_k) = 0 \quad k = 2, 3, ..., n \quad (2.12)$$

uma vez que $\lambda \neq 0$ (i.e., há um certo custo social para recursos marginais adicionados), essa última equação implica taxas marginais de transformação iguais nas produções pública e privada e, portanto, eficiência produtiva agregada.

As relações (2.11) determinam a estrutura tributária ótima, uma vez que mostram como os preços de consumidores e produtores se relacionam. Elas mostram que os preços ao consumidor devem estar num nível tal que maiores aumentos em quaisquer preços resultam num aumento do bem-estar social, v_k, que é a mesma taxa, λ, do custo de satisfazer a mudança da demanda devida ao aumento do preço. Introduzindo os impostos explicitamente, temos que: $q_i = p_i + t_i$. Então, como x_i é função de $p + t$ temos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial t_k} \quad (2.13)$$

se considerarmos p constante. Conseqüentemente, (2.11) pode ser reescrito:

$$v_k = \lambda \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_k} = \lambda \frac{\partial(\sum p_i x_i)}{\partial t_k} \tag{2.14}$$

Uma vez que $\sum p_i x_i = \sum q_i x_i - \sum t_i x_i = -\sum t_i x_i$ - pois a restrição orçamentária implica que $\sum q_i x_i = 0$ - temos que:

$$v_k = -\lambda \frac{\partial(\sum t_i x_i)}{\partial t_k} \tag{2.15}$$

Esse último conjunto de equações diz que a utilidade marginal obtida pela mudança no preço de um bem dividida pela mudança da receita tributária resultante da alteração na alíquota correspondente é constante, supondo que os preços ao produtor se mantenham constantes. Em outras palavras, o acréscimo marginal à utilidade é diretamente proporcional à mudança da receita tributária devida à elevação ou diminuição da alíquota do imposto sobre determinado bem.

Se, agora, fizermos a suposição adicional de que a função de bem-estar é individualista, as condições de primeira ordem do problema inicial podem ser assim reescritas:

$$x_k = \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial(\sum t_i x_i)}{\partial t_k} \tag{2.16}$$

Portanto, para todos os bens, a razão entre a receita tributária marginal proveniente de um aumento do imposto sobre aquele bem e a quantidade demandada deste bem, é constante. Essa forma das condições de primeira ordem tem a vantagem de mostrar a informação necessária para testar se a estrutura tributária é ótima ou não.

Neste modelo, vamos agora considerar que há dois setores de produção. Assim, introduzimos a possibilidade de taxar as transações entre firmas. Podemos considerar um consumidor e dois setores de produção privada com retornos constantes de escala. Pelas observações acima delineadas, concluímos que a eficiência é desejável para essas possibilidades de produção tomadas conjuntamente. Portanto, a estrutura tributária ótima não inclui a taxação de bens intermediários, uma vez que isso não permitiria eficiência. Similarmente, concluímos que as vendas do governo para as firmas não devem ser taxadas enquanto aquelas para os consumidores são taxadas.

Na inexistência de lucros, a taxação de bens intermediários deve refletir em mudanças nos preços dos bens finais. Portanto, a receita pode ser coletada pela taxação de bens finais, não causando maiores alterações nos preços de bens finais e evitando a ineficiência produtiva. Essa interpretação destaca a necessidade da hipótese de retornos constantes de escala na produção privada.

2.2 Resultados de Atkinson e Stiglitz

O artigo de Atkinson e Stiglitz (1972) se preocupa primordialmente com a eficiência da carga tributária e nesse sentido seus resultados dialogam com os de Diamond e Mirrless (1971). Conforme os primeiros argumentam, a análise convencional sobre eficiência tributária se baseava em modelos de equilíbrio parcial de um único mercado. A partir daí, desenvolveram-se "máximas" sobre tributação ótima que diziam que, para minimizar a perda de peso-morto, dever-se-ia taxar os bens que: (i) têm uma baixa elasticidade-preço da demanda; (ii) têm baixa elasticidade-preço da oferta; e (iii) compõem uma importante parte do orçamento das pessoas.

Esse tipo de análise oferece resultados algo similares aos obtidos por Ramsey (1927) em um dos casos especiais que ele considerou. A relação entre eles, no entanto, tem sido obscurecida pela confusão que Atikinson e Stigkitz afirmam ter ocorrido na literatura até então sobre duas questões: a) se apenas um bem - ou conjunto deles - pode suportar taxação, qual deveria ser ele?; e b) se há mais de um bem capaz de ser taxado, qual deveria ser o imposto relativo sobre os diferentes bens?

No primeiro caso, deseja-se taxar o bem que implique a menor perda de peso-morto para uma dada receita, e aqui valem então as "máximas" (i)-(iii). No caso de Ramsey, desejamos minimizar a perda de peso-morto total considerando todos os bens taxados tal que, para cada bem, o peso-morto marginal associado ao aumento de uma unidade da receita tributária seja o mesmo. Os autores afirmam então que se concentram no problema de Ramsey.

2.2.1 O Modelo

Assume-se uma produção com retornos constantes de escala. Os preços dos fatores - preços ao produtor (p_i) - são fixos para todos os bens e para o trabalho. Os preços ao consumidor (q_i) são dados por: $q_i{=}p_i{+}t_i$ sendo t_i a alíquota sobre o bem i. Sem perda de generalidade, assume-se também que um bem (lazer) não é taxado e que o salário é uniformizado em 1.

O consumidor deve maximizar a função $U(x, L)$ sujeito à restrição:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i = L \tag{2.17}$$

em que L é a oferta de trabalho e x_i a quantidade de bem de consumo adquirida. Sendo α a utilidade marginal da renda, as condições de primeira ordem são:

$$U_i = \alpha q_i \quad i = 1, \ldots n \tag{2.18}$$

$$-U_L = \alpha \tag{2.19}$$

A função de bem-estar social é individualista e impessoal e para que seja possível se concentrar em aspectos de eficiência, assume-se que todos os consumidores sejam idênticos. Assume-se também que o propósito da taxação dos bens seja levantar uma receita R:

$$R = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) x_i = L - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.20}$$

O problema que o governo enfrenta é escolher t_i $(i = 1 \dots n)$ para maximizar $U(x, L)$ sujeito a (2.20) e às condições (2.18) e (2.19). É possível escrever a restrição de implementabilidade:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i x_i}{\alpha} - L = 0 \tag{2.21}$$

O problema é portanto apenas maximizar o lagrangeano:

$$U(x, L) + \mu \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i x_i}{\alpha} - L \right] - \lambda \left[R + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - L \right]$$

Essa formulação do problema difere da utilizada por Diamond e Mirrless (1971), que trabalharam com a função de utilidade indireta e as alíquotas como variáveis de controle. Se definimos $(-L)$ como o bem zero, podemos escrever o lagrangeano em notação matricial:

$$U + \frac{\mu}{\alpha} U' x - \lambda (R + px)$$

em que U' denota o vetor U_i $(i = 0, \dots, n)$. As condições de primeira ordem são:

$$\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right) U' + \frac{\mu}{\alpha} U'' x = \lambda p \tag{2.22}$$

em que U'' denota a matriz U_{ij} $(i,j=0,\ldots,n)$. Define-se então:

$$H^k = \sum_{i=0}^{n} \frac{-U_{ik}x_i}{U_k}$$

ou seja, H^k é a soma das elasticidades da utilidade marginal de x_k em relação a cada um dos bens. Então a condição de primeira ordem pode ser escrita como:

$$q_k[\alpha + \mu(1 - H^k)] = \lambda p_k \quad k = 0,\ldots,n \tag{2.23}$$

Mas, como pelas suposições feitas acima t_0=0, então:

$$\mu = \frac{\lambda - \alpha}{1 - H^0} \tag{2.24}$$

tal que as alíquotas ótimas t_k^* como percentual de q_k são caracterizadas por:

$$\frac{t_k^*}{p_k + t_k^*} = \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{H^k - H^0}{1 - H^0}\right) \tag{2.25}$$

Embora essa expressão não forneça uma fórmula explícita para as alíquotas ótimas - uma vez que H^k também dependem das alíquotas - ela permite traçar algumas conclusões sobre a estrutura tributária ótima.

A partir da equação (2.25) é possível determinar as condições sob as quais a eficiência produtiva agregada requer taxação uniforme. De imediato é possível observar que uma condição suficiente para que t_k^*=t_j^* para todo $k, j \geq 1$ é que as preferências sejam homotéticas. Nessa situação, há uma representação do mapa de indiferença que é homogênea de grau um em todos os argumentos. Portanto, U_i seria homogênea de grau zero nesse caso e, logo, H^k=0 para todo k. A homoteticidade de todo o mapa de indiferença não é, entretanto, necessária para que a taxação ótima seja uniforme. O primeiro caso considerado é aquele em que a utilidade marginal do lazer é independente do consumo de qualquer bem. Então $t_k^*=t_j^*$ implica que $-H^0 = \infty$ ou que $H^k=H^j$.

A primeira condição implica que a elasticidade da utilidade marginal do trabalho é infinita, o que significa uma oferta de trabalho completamente inelástica. A segunda significa que se requer elasticidades-gastos iguais, e, portanto, unitárias para todos os bens. Se $U_{i0} \neq 0$ para algum i, então t_i pode ser igual a t_j mesmo se as referidas elasticidades não forem unitárias.

Essas condições, sob as quais a estrutura ótima seria uniforme, não têm perspectiva de serem preenchidas, conforme os próprios autores assinalam. Exatamente por isso eles passam a analisar como os impostos ótimos dependem das características dos diferentes bens. Com esse pensamento, afirmam que (2.25) pode ser vista como uma média ponderada. Haveria portanto dois sistemas tributários ótimos "extremos": o de taxação uniforme e o de taxação proporcional a H^k. Em que ponto entre esses extremos o sistema tributário ótimo deveria estar dependerá de ($-H^0$).

Finalmente afirmam que a formulação de (2.25) sugere um caso especial que permite resultados que facilmente são interpretados: aditividade direta da função utilidade. Isso implica que há alguma transformação monotônica da função utilidade tal que $U_{ij}=0$ para $i \neq j$, ou seja, H^k pode ser escrito:

$$H^k = \left(\frac{-U_{kk}x_k}{U_k}\right)$$

Diferenciando (2.18) e (2.19), pode-se ver que a expressão acima é inversamente proporcional à elasticidade-renda da demanda pelo bem k. Além disso, se supusermos que $U_{ii}<0$ para todo $i = 0, \ldots, n$, segue que $\lambda > \alpha$ se uma receita positiva for levantada. Temos portanto o seguinte resultado: quando a função utilidade é diretamente aditiva, o sistema tributário ótimo depende inversamente da elasticidade-renda da demanda. Eles assinalam que a aditividade direta é uma suposição restritiva mas que é consideravelmente menos restritiva que as suposições necessárias para que a análise de equilíbrio parcial fosse válida (para $H^0 \neq 0$, aditividade direta não implica efeitos-preço cruzados nulos).

Segundo Atkinson e Stiglitz, a principal conclusão do artigo é que se aditividade direta é uma suposição razoável para um grande número de bens, então a estrutura ótima de taxação do ponto de vista de eficiência é aquela que taxa mais pesadamente bens com pequena elasticidade-renda da demanda. Esse resultado generaliza a análise convencional, baseada em modelos de equilíbrio parcial, pois ela passa a ser um caso especial em que a oferta de trabalho é perfeitamente elástica. Além disso, com relação ao debate sobre a adoção de um sistema de impostos indiretos uniformes, demonstraram que não há argumentos a favor da taxação uniforme baseando-se na eficiência alocativa.

Capítulo 3

Uma Revisão da Literatura

Uma vez apresentados os principais resultados e abordagens necessários para compreender os modelos monetários, apresentaremos agora as conclusões alcançadas sobre a otimalidade da política monetária. Essa discussão tem se restringido à otimalidade da regra de Friedman e os resultados variam dependendo do arcabouço e da metodologia aplicados.

Para tentar uniformizar nossas observações, restringiremos essa revisão apenas aos modelos com moeda na função utilidade, aos modelos *cash-credit* e aos modelos de *shopping time*. Os autores que trabalharam com os referidos modelos basearam suas observações na abordagem de Ramsey, a mesma que este trabalho usará em modelo delineado no próximo capítulo. Vale dizer ainda que nos basearemos principalmente nos trabalhos de Chari e Kehoe (1998) e Correia e Teles (1996, 1998).

3.1 Modelos com Moeda na Função Utilidade

Assim como Correia e Teles (1998), usaremos aqui o mesmo modelo monetário de equilíbrio geral desenvolvido por Sidrausky (1967) e posteriormente usado por Brock (1975) e Chari e Kehoe (1996) para discutir a otimalidade da regra de Friedman em situações de *first* e de *second best*. A economia é composta por um grande número de agentes idênticos que vivem infinitamente com preferências dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(c_t, \frac{M_t}{p_t}, h_t\right) \tag{3.1}$$

em que c_t, M_t,p_t e h_t representam respectivamente o consumo em t, encaixes monetários mantidos de t para $t+1$, o preço dos bens de consumo em unidades monetárias em t, e o lazer em t. A função utilidade tem as mesmas características usuais no referente à concavidade e diferenciabilidade. Ela é crescente em M_t/p_t enquanto $M_t/p_t < m^*(c_t, h_t)$ e não é crescente para $M_t/p_t \geq m^*(c_t, h_t)$. $m^*(c_t, h_t)$ é a função de saciedade que representa o "nível de saciedade", que é o ponto até o qual as pessoas mantêm encaixes reais, de modo que o retorno real de uma unidade monetária extra, a partir daí, é nulo. A caracterização dessa função é crucial para a determinação da quantidade ótima de moeda. A tecnologia de produção dos bens de consumo é linear com coeficientes unitários.

O consumidor representativo (que implicitamente resolve o problema da firma) escolhe uma seqüência $\{c_t, h_t, M_t, B_t\}_{t=0}^{\infty}$ dada uma seqüência de preços e impostos sobre a renda, $\{p_t, i_t, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ e a condição inicial para $W_0 \equiv M_{-1} + (1 + i_{-1})B_{-1}$, para satisfazer a seqüência de restrições orçamentárias:

$$p_t c_t + M_{t+1} + B_{t+1} \leq (1 - \tau_t) p_t (1 - h_t) + M_t + (1 + i_t) B_t, \; t > 0 \tag{3.2}$$

juntamente com uma condição de jogo não-Ponzi. B_t é o número de títulos mantidos de t para $t+1$, e i_t é a taxa de juros nominal sobre esses títulos. $1-h_t$ é a oferta de trabalho. O conjunto das restrições orçamentárias pode ser escrito como uma única restrição intertemporal:

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q_t p_t [c_t + i_t M_t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} Q_t p_t (1-\tau_t) + W_0 \tag{3.3}$$

em que W_0 foi definido acima e $Q_t = \frac{1}{(1+i_0)\ldots(1+i_t)}$.

No equilíbrio competitivo as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\frac{U_c(t)}{\beta U_c(t+1)} = (1+i_{t+1}) \left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right), \ t \geq 0 \tag{3.4}$$

$$(1-\tau_t) U_c(t) = U_h(t), \ t \geq 0 \tag{3.5}$$

$$U_m(t) = i_t U_c(t), \ t \geq 0 \tag{3.6}$$

e a restrição de recursos é:

$$c_t + g_t = 1 - h_t, \ t \geq 0 \tag{3.7}$$

em que g_t é o nível de gastos do governo em t. Assumimos que g_t é constante e igual a g.

A política de *first best* nessa economia é dada pela maximização de (3.1) sujeito à restrição de recursos (3.7). Nessa solução, $U_c(t) = U_h(t)$, e $U_m(t)$=0, t $\geq$0. Se o governo pudesse arrecadar impostos $lump-sum$, seria possível descentralizar essa solução estabelecendo uma taxa de juros nominal constante e igual a zero, que é a regra de Friedman.

O problema para encontrar a política ótima fica mais interessante quando o governo não pode arrecadar impostos $lump - sum$. Para determinar a solução de *second best*, que é a solução do problema de Ramsey, constrói-se a restrição de implementabilidade substituindo (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.3):

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(U_c(t)c_t - U_h(t)(1-h_t)) + U_m(t)m_t] = (U_c(0) + U_m(0))\frac{W_0}{p_0} \quad (3.8)$$

As condições de primeira ordem para $\{c_t, h_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}$ do problema de maximizar (3.1) sujeito a (3.8) e (3.7) seguem abaixo:

$$\beta^t\{U_c(t) + \psi[U_c(t) + U_{cc}(t)c_t - U_{hc}(t)(1-h_t) + U_{mc}m_t]\} = \lambda_t,\ t \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\beta^t\{U_h(t) + \psi[U_h(t) + U_{ch}(t)c_t - U_{hh}(t)(1-h_t) + U_{mh}(t)m_t] = \lambda_t,\ t \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\beta^t\{U_m(t) + \psi[U_m(t) + U_{cm}(t)c_t - U_{hm}(t)(1-h_t) + U_{mm}(t)]\} = 0,\ t \geq 0 \quad (3.11)$$

em que ψ é o preço-sombra da restrição de implementabilidade, ou seja, mede o excesso marginal do encargo dos déficits do governo no mundo *second best.* λ_t mede o preço-sombra dos recursos.

Pela observação da expressão (3.6), a discussão sobre a otimalidade da regra de Friedman nesse ambiente é equivalente à discussão se $U_m(t)$ é zero para $t \geq 0$. Da condição de equilíbrio competitivo, $U_m(t) = i_t U_c(t)$, a solução para a taxa de juros nominal é estacionária. Se a regra de Friedman vale, vale para todo t. Então a questão é se, para $t \geq 0$, $U_m(t) \equiv U_m = 0$ é uma solução do sistema de equações.

Devido ao fato da moeda ser um bem livre, como fica claro pela restrição (3.7), o multiplicador da restrição de recursos não aparece na condição (3.11). Nessa solução de *second best*, o benefício social marginal por usar moeda, para as famílias, é igual ao encargo tributário marginal, ou seja, o custo marginal devido ao fato de que uma mudança em m afeta a restrição orçamentária do governo [1]. Isso pode ser visto se reescrevermos (3.11) como:

$$U_m(t) = -\psi[U_m(t) + U_{cm}(t)c_t - U_{hm}(t)(1-h_t) + U_{mm}(t)m_t] \tag{3.12}$$

Dado que no ótimo $\psi>0$, torna-se relevante determinar o sinal do termo entre chaves, ou seja, o impacto de um aumento em m sobre a receita do governo, mantendo as quantidades dos outros bens constantes. Um aumento de m corresponde a uma diminuição da taxa nominal de juros e tem um impacto negativo sobre a receita de senhoriagem, $U_m(t)m_t$. Então $U_m(t) + U_{mm}m_t \leq 0$. O sinal da expressão depende então das derivadas cruzadas.

Correia e Teles (1999) afirmam que se $U_{cm}<0$ e se $U_{hm}>0$, a expressão seria negativa, significando que um aumento de m tem um efeito negativo sobre a receita total do governo. Conseqüentemente a regra de Friedman não seria ótima. Esse é um exemplo de tipo de propriedades que são tipicamente discutidas na literatura.

Eles assinalam ainda que é possível que o encargo tributário marginal dos encaixes reais seja zero no ótimo. Uma vez que o lazer não é um bem *cash*, assumimos que o ponto de saciedade dos encaixes reais é uma função apenas do

[1] A restrição de implementabilidade foi construída usando a restrição orçamentária das famílias, mas uma restrição equivalente pode ser obtida usando a restrição orçamentária do governo. O efeito marginal sobre a condição de implementabilidade corresponde a um efeito marginal simétrico sobre a condição expressa em termos da restrição orçamentária do governo.

consumo, $m^*(c)$. Nesse caso, afirmam que a regra de Friedman será ótima nesse tipo de modelo quando o ponto de saciedade é tal que $m^* = \infty$ ou que $m^* = \overline{k}c$, em que $\overline{k}$ é uma constante positiva.

Para provar essa proposição, eles afirmam que (3.12) é satisfeita quando U_m=0. Como se assumiu que m^* é função apenas de c, então, no ponto de saciedade U_{hm}=0. Quando $m^* = \infty$, deve-se ter $U_{mm}(c,m^*)$=0 e $U_{mc}(c,m^*)$=0. Logo, assume-se que, quando U_m=0, a receita do imposto inflacionário, $U_m m$, é nula. Portanto, $\lim_{m\to\infty} \frac{\partial(U_m m)}{\partial m}$=0, ou $\lim_{m\to\infty}(U_m + mU_{mm})$=0. Então $m^* = \infty$ verifica (3.12).

Além disso, quando o ponto de saciedade dos encaixes reais é finito, define-se, a partir de $U_m(c,m^*)$=0, que:

$$\frac{U_{cm}(c,m^*)}{U_{mm}(c,m^*)} = -\frac{dm^*}{dc}$$

Dessa forma, a expressão (3.12) avaliada no ponto de saciedade de encaixes reais pode ser escrita como:

$$U_m(c,m^*)[1+\psi] = -\psi U_{mm}(c,m^*)m^*\left[1 - \frac{dm*}{dc}\frac{c}{m^*}\right]$$

quando $U_m(c,m^*)$=0. Desse modo, se $m^* = \overline{k}c$, tem-se que $\frac{dm^*}{dc}\frac{c}{m^*}$=1 e também $U_{cm}(c,m^*) + U_{mm}(c,m^*)m^*$=0. Logo, $m = \overline{k}c$ também satisfaz a condição de primeira ordem do problema de Ramsey, (3.12).

Dentro do mesmo arcabouço de moeda na função utilidade, Chari e Kehoe (1998) também analisam a otimalidade da regra de Friedman e afirmam que, nesse caso, ela é válida apenas sob certas condições de homoteticidade e separabilidade da função utilidade. O modelo usado por estes autores é muito semelhante ao exposto acima. Eles afirmam que a regra seria ótima apenas se $U_m(t)$=0. Isso implica, intuitivamente, fornecer à economia encaixes reais até o ponto de saciedade.

No entanto, eles dizem estar interessados por economias em que as preferências não são saciadas por qualquer quantidade finita de encaixes reais e para as quais a utilidade marginal dos mesmos converge para zero conforme m converge para o infinito. Isto é, para cada c e h, $\lim_{m\to\infty} U_m(c_t, m_t, h_t)=0$ e $\lim_{m\to\infty} U_c(c_t, m_t, h_t)>0$. Intuitivamente, em tais economias a regra de Friedman vale exatamente apenas se o valor dos encaixes reais é infinito, e, nesses casos, o problema de alocação de Ramsey não tem solução. Para superar esse problema, consideram que o nível de encaixes reais é exogenamente limitado por uma constante. Dessa forma, a regra será ótima se, conforme esse limite sobre os encaixes reais aumenta, a taxa de juros nominal associada a ele no equilíbrio de Ramsey converge para um.

Tendo isso em mente, modifica-se o problema de Ramsey incluindo a restrição

$$m_t \leq \overline{m} \tag{3.13}$$

em que $\overline{m}$ é um limite finito. Considerando agora as preferências da forma:

$$U(c, m, h) = V(w(c, m), h) \tag{3.14}$$

em que w é homotética. Eles finalmente afirmam que, se a função utilidade é da forma (3.14), a regra de Friedman é ótima.

Pelos resultados de Correia e Teles (1999) expostos acima, é possível observar que, caso a elasticidade da função de saciedade - $m^*(c)$ - seja unitária, a regra de Friedman é sempre ótima. Nesse caso, então, não seria necessário fazer nenhuma hipótese sobre a forma funcional da função utilidade como fazem Chari e Kehoe (1998). Correia e Teles argumentam que a regra é ótima tanto quando a elasticidade de m^* é unitária como quando o ponto de saciedade de encaixes reais é infinito porque, nesses casos, o aumento dos encaixes tem efeito nulo sobre as receitas do governo quando se está no ponto de saciedade. Conseqüentemente, os custos marginais são iguais a zero tanto no problema de *first best* quanto no de *second best*.

3.2 Modelos com bens *cash* e bens *credit*

Para discutir essa classe de modelos, partiremos da abordagem de Chari e Kehoe (1998) e então falaremos sobre o que Correia e Teles (1999) observam sobre o mesmo tipo de modelo.

Consideramos agora uma economia com três bens: trabalho - l - e duas espécies de bens de consumo. Uma espécie é a de bens *cash* - c_{1t} - ou bens que podem ser adquiridos apenas com moeda manual. A outra é a de bens *credit* - c_{2t} - adquiridos apenas por meio de crédito. A tecnologia que transforma trabalho em produto apresenta retornos constantes de escala. Esse produto pode ser composto por bens *cash*, *credit* ou consumo do governo, g.

A restrição de recursos nessa economia é:

$$c_{1t} + c_{2t} + g_t = l_t \tag{3.15}$$

As preferências são dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{1t}, c_{2t}, l_t) \tag{3.16}$$

e a restrição orçamentária por:

$$M_t + B_t = (1 + i_{t-1})B_{t-1} + M_{t-1} - p_{t-1}c_{1t-1} - p_{t-1}c_{2t-1} + p_{t-1}(1 - \tau_{t-1})l_{t-1} \tag{3.17}$$

sendo τ a alíquota do imposto sobre a renda do trabalho, M_t e B_t os encaixes nominais de moeda e de títulos ao final da operação do mercado de títulos. $(1+i_t)$ é o retorno nominal bruto sobre esses títulos pagável em $t+1$ e p é o preço dos bens de consumo.

A posição dos encaixes reais de títulos, B_t/p_t, é limitada superior e inferiormente por constantes arbitrariamente grandes. As compras de bens *cash* satisfazem uma restrição do tipo *cash − in − advance*:

$$p_t c_{1t} \leq M_t \tag{3.18}$$

que os autores assumem valer com igualdade. A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$M_t - M_{t-1} + B_t = (1+i_{t-1})B_{t-1} + p_{t-1}g_{t-1} - p_{t-1}\tau_{t-1}l_{t-1} \tag{3.19}$$

Nota-se que o governo adquire bens de consumo com crédito. Seja $\pi = (\tau_t)$ uma política[2] para todo t. Um equilíbrio competitivo é uma política π, uma alocação $x(t) = (c_{1t}, c_{2t}, l_t, M_t, B_t)$ e um sistema de preços $q = (p_t, 1+i_t)$ tais que, dados a política e o sistema de preços, a alocação resultante maximiza a utilidade do consumidor representativo e satisfaz a restrição orçamentária do governo.

Nesse equilíbrio o governo maximiza (3.16) sujeito a (3.17), (3.18) e aos limites sobre b_t. A moeda tem retorno nominal unitário. Se os títulos tiverem um retorno menor do que esse, o consumidor obterá lucro adquirindo moeda e vendendo títulos. Portanto, em qualquer equilíbrio, $1+i_t \geq 1$. As condições de primeira ordem do consumidor implicam que $U_{c_{1t}}/U_{c_{2t}} = 1+i_t$ e, logo, em qualquer equilíbrio a

[2] A definição de política aqui usada é a mesma da seção 1.1.

seguinte restrição deve valer:

$$U_{c_{1t}} \geq U_{c_{2t}} \tag{3.20}$$

Essa característica do equilíbrio competitivo restringe o conjunto das alocações de Ramsey. Considerando o problema do governo, assume-se que há uma instituição ou tecnologia de comprometimento por meio da qual o governo se compromete a uma seqüência particular de políticas no período inicial. Ela é modelada supondo que o governo escolhe uma política π no ínicio do período e apenas então os consumidores escolhem suas alocações. Uma vez que o governo precisa prever como suas políticas afetarão as alocações dos consumidores e os preços, estes são descritos por regras que associam alocações a políticas. Formalmente, são seqüências de funções $x(\pi) = (x(t|\pi))$ e $q(\pi) = (p(t|\pi), 1 + i(t|\pi))$ que mapeiam as políticas em alocações e preços. O equilíbrio de Ramsey é então definido como uma política π, uma regra de alocação $x(\cdot)$ e um sistema de preços $q(\cdot)$ que: (i) maximizam $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_1(t|\pi), c_2(t|\pi), l(t|\pi))$ sujeito a (3.19), com alocações dadas por $x(\pi)$ e; (ii) para quaisquer π', a alocação $x(\pi')$, o sistema de preços $q(\pi')$ e a política π' constituem um equilíbrio competitivo.

Usando as condições de primeira ordem do problema do consumidor, podemos estabelecer a restrição de implementabilidade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [c_{1t} U_{c_{1t}} + c_{2t} U_{c_{2t}} + l_t U_{l_t}] = 0 \tag{3.21}$$

Todas as alocações de consumo e trabalho de um equilíbrio competitivo satisfazem (3.15), (3.20) e (3.21). Além disso, as alocações que satisfazem tais restrições podem ser descentralizadas como um equilíbrio competitivo. O problema de

Ramsey é maximizar a utilidade do consumidor sujeito a essas mesmas restrições. Considere as funções utilidade da forma:

$$U(c_{1t}, c_{2t}, l_t) = V(w(c_{1t}, c_{2t}), l_t) \qquad (3.22)$$

sendo w homotética. Chari e Kehoe afirmam então que, para funções da forma (3.22), o equilíbrio de Ramsey sempre vale com $1+i_t=1$ e, logo, a regra de Friedman é ótima, pois isso implica que $i_t=0$.

Phelps (1973) argumenta que taxar serviços de alta liquidez é ótimo porque, se a demanda por moeda é altamente juros-inelástica, como geralmente se mantém, a moeda é uma candidata atraente para taxação elevada, pelo menos do ponto de vista da eficiência das políticas fiscal e monetária. Os resultados de Chari e Kehoe (1998) mostram que a relação entre a elasticidade-juro da demanda por moeda e a desejabilidade de taxar serviços de liquidez é, no máximo, tênue. Uma função utilidade pode implicar uma elasticidade-juro da demanda por moeda que varia entre zero e infinito e, ainda assim, satisfazer as condições de homoteticidade e separabilidade necessárias para que a regra de Friedman seja ótima. Essas condições são equivalentes à condição de que a elasticidade-consumo da demanda por moeda seja unitária.

Correia e Teles (1999) comparam os resultados do modelo com moeda na função utilidade com os resultados de um modelo com bens *cash* e *credit* e explicam os resultados de Chari e Kehoe (1998). No arcabouço destes últimos, eles dizem que um imposto positivo sobre a moeda não distorceria a produção dos bens de consumo mas distorceria o consumo relativo das duas categorias de bens (*cash* e *credit*).

Isso porque Chari e Kehoe supõem que os encaixes reais exigem recursos para serem produzidos e que o consumo dos bens *cash* exige tempo e encaixes reais em proporções fixas. Quando a função utilidade é homotética no consumo dos dois tipos de bens e separável no lazer, claramente é ótimo que o imposto sobre os encaixes reais seja nulo. Se a função utilidade não é homotética nos dois bens, então o imposto inflacionário poderia ser usado como meio para obter a distorção ótima entre os dois bens [3].

A separabilidade e a homoteticidade no modelo com bens *cash* e *credit* implica, em um modelo com moeda na função utilidade - como o exposto na seção 3.2 - separabilidade no lazer e homoteticidade para os encaixes reais e consumo total.

Outros autores utilizaram modelos monetários com bens *cash* e *credit* e incluem serviços de liquidez de maneira interessante[4]. Entretanto, não discutiremos seus resultados aqui pois a preocupação desses autores não se refere, na maioria das vezes, à otimalidade da regra de Friedman.

3.3 Modelo com Tecnologia de Transação

Os modelos monetários com tecnologia de transação, também conhecidos como modelos de *shopping−time*, ganharam maior espaço após o trabalho de Kimbrough (1986). Nesta seção, usaremos a abordagem que Correia e Teles (1996) utilizam

[3] Correia e Teles (1999) alertam para o fato de que, se a tecnologia de transações permitir a substiuição entre encaixes reais e tempo, então a distorção do consumo dos dois bens implicaria também a distorção da produção. Nesse caso, seria preferível discriminar entre os impostos sobre os dois tipos de bens de consumo.

[4] Aiyagari, Braun e Eckstein (1998) utilizam um modelo com bens *cash* e bens *credit* para discutir relações entre serviços de liquidez e custos da inflação. Mais adiante incluiremos em nosso modelo um setor que presta serviços de liquidez e faremos isso de maneira semelhante à proposta por eles.

para esse tipo de modelo.

A economia é habitada por vários agentes idênticos dotados de uma unidade de tempo. Esta pode ser alocada para realizar transações, em lazer ou na produção do único bem existente no modelo. A tecnologia para produzir tal bem é linear com coeficiente unitário. O custo das transações é medido pelo tempo gasto para realizá-las e a posse de moeda reduz esse custo. As famílias têm preferências sobre consumo e lazer. Supõe-se ainda que há dois ativos: moeda e títulos. Há um governo benevolente que deve financiar um dado nível constante de gastos com impostos sobre a renda do trabalho ou com imposto inflacionário.

O problema das famílias é maximizar:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, h_t) \tag{3.23}$$

sendo U uma função côncava crescente, c_t os bens de consumo e h_t o lazer em t. A oferta de trabalho das famílias é $1 - h_t - s_t$, em que s_t é o tempo gasto com transações. As famílias escolhem os encaixes nominais de moeda (M_t) e títulos (B_t), sendo que os últimos rendem $(1 + i_t)B_t$ unidades de moeda em $t + 1$. A restrição orçamentária da família é:

$$p_t c_t + M_{t+1} + B_{t+1} \leq M_t + (1 + i_t)B_t + p_t(1 - \tau_t)(1 - h_t - s_t) \tag{3.24}$$

e a tecnologia de transações,

$$s_t \geq l(c_t, m_t) \tag{3.25}$$

sendo τ_t a alíquota do imposto sobre a renda do trabalho e $m_t \equiv M_t/p_t$.

Assume-se que l é homogênea de grau k de modo que pode ser escrita como $l(c, m) = L(m/c)c^k$. L é caracterizada como $L' \leq 0$ e $L'' \geq 0$. O ponto de saciedade dos ecaixes reais é $\overline{m/c}$ definido como $L(\overline{m/c}) \equiv l_m(\overline{m/c})=0$, ou seja, não vale a pena aumentar a posse de m além desse ponto uma vez que a partir daí não é mais possível economizar recursos.

A otimalidade da escolha do setor privado requer que o benefício marginal do uso de uma unidade de encaixe real, em termos de temporais, seja igual ao seu custo de oportunidade, o imposto inflacionário, I, descrito pela seguinte condição para $t \geq 0$,

$$-l_m(t) = \frac{1}{1-\tau_t} I_t \tag{3.26}$$

em que $I_t = i_t/(1+i_t)$, $0 \leq I_t \leq 1$. A implementação da regra de Friedman, $I_t=0$, implica que $l_m=0$, o que significa que os agentes escolhem o ponto de saciedade de encaixes reais.

A solução do problema de Ramsey, como dito anteriormente, é uma alocação e um conjunto de preços e de variáveis de política que permite que o bem-estar seja maximizado e que a alocação possa ser descentralizada como um equilíbrio competitivo. Para chegarmos a ela, precisamos da restrição de implementabilidade, construída a partir das condições de primeira ordem e da restrição orçamentária das famílias,

$$\sum_{t=0}^{\infty}[U_c(t)c_t - U_h(t)(1-h_t) + U_h(t)(1-k)l(t)] = 0 \tag{3.27}$$

O problema de Ramsey é escolher $\{c_t, h_t, m_t\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar as preferências sujeito à restrição de implementabilidade e à restrição de recursos dada por:

$$c_t + g_t \geq 1 - h_t - l(t) \tag{3.28}$$

sendo g_t os gastos do governo em t.

A condição de primeira ordem para m_t desse problema de *second best* é:

$$[\beta^t \psi U_h(t)(1-k) - \lambda_t] l_m(t) = 0 \tag{3.29}$$

Os multiplicadores das restrições de implementabilidade e de recursos ψ e λ_t, $t \geq 0$, respectivamente, são estritamente positivos no ótimo, uma vez que medem, também respectivamente, o encargo tributário excessivo e o preço-sombra dos recursos.

Em posse da expressão acima, Correia e Teles afirmam que a solução de Ramsey é tal que a regra de Friedman é ótima (I_t=0) para qualquer grau de homogeneidade da função de custos de transação (l)[5].

Chari e Kehoe (1998) também provam a otimalidade da regra de Friedman em um modelo de tecnologia de transação, mas fazem isso supondo, novamente, homoteticidade e separabilidade da função utilidade. Eles concluem que, sob essas hipóteses e supondo que l é homogênea de grau $k \geq 1$, a regra será ótima em um modelo desse tipo.

Ao contrário do que demonstram Chari e Kehoe, Correia e Teles (1996) mostram que a otimalidade da regra de Friedman não é uma extensão direta do resultado de Diamond e Mirrless (1971) de não taxação de bens intermediários. Correia e Teles atribuem a validade da regra ao caráter da moeda, que seria um bem produzido sem custos. Mesmo quando a moeda requer recursos para ser produzida - como Correia e Teles (1996) também mostram - o teorema de Diamond e Mirrless não implica a validade da regra pelo fato de a economia monetária ser caracterizada nesse caso por uma estrutura particular de produção e por um regulamento específico de taxação (as transações não podem ser taxadas porque ocorrem dentro

[5]A prova é conduzida no apêndice do artigo de Correia e Teles (1996).

das famílias). Então, o imposto ótimo sobre os encaixes reais dependeria do grau de homogeneidade da função de custo de transação.

Neste capítulo, portanto, verificamos que a literatura de modelos monetários constatou a validade da regra de Friedman para diferentes abordagens desses modelos seguindo a abordagem de Ramsey (solução de *second best*). O capítulo que segue irá propor o uso de modelos monetários com custos de transação pecuniários, como sugerido por Feenstra (1986). Aparentemente, o problema da otimalidade de regra de Friedman ainda não foi abordado nesse contexto.

Capítulo 4

Modelos com Custos de Transação Pecuniários

Uma vez apresentados os principais modelos monetários e como eles são abordados na literatura, propomos agora estudar a questão da otimalidade da regra de Friedman em um modelo em que os custos de transação têm um caráter pecuniário, à semelhança de Feenstra (1986), que os inclui na restrição orçamentária. Aparentemente este problema ainda não foi abordado na literatura dessa maneira.

Iniciaremos o capítulo apresentando um modelo simples, com lazer na função utilidade e com apenas um imposto sobre a renda do trabalho. No segundo modelo incluímos um imposto sobre os bens de consumo. Na seção 4.3 supomos que a moeda requer recursos para ser produzida, mas não há impostos sobre os bens de consumo e na última seção temos o modelo mais completo, em que supomos impostos sobre o consumo e que a moeda necessita de recursos para ser produzida.

4.1 Modelo Inicial

Inicialmente consideramos um modelo em que há escolha entre lazer (h_t) e trabalho ($1 - h_t$) e o governo arrecada suas receitas por meio de um imposto sobre a renda do trabalho designado por τ_t. O salário real é normalizado para 1 uma vez que assumimos uma tecnologia linear do tipo $y_t = n_t$ sendo n_t a oferta de trabalho. Assumimos uma função utilidade padrão[1] e que o indivíduo possui uma dotação de tempo unitária. O problema do consumidor representativo é, portanto, maximizar:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, h_t) \tag{4.1}$$

sujeito a:

$$p_t c_t + p_t \phi(c_t, m_t) + B_{t+1} + M_{t+1} \leq p_t(1 - \tau_t)(1 - h_t) + (1 + i_t)B_t + M_t \tag{4.2}$$

em que B são títulos que rendem juros à taxa i, M são os encaixes nominais e p o nível de preços. A função $\phi(c_t, m_t)$ representa os custos pecuniários[2] que a família tem para consumir c_t quando dispõe dos encaixes reais m_t, e assumimos que ela possui as seguintes propriedades gerais:

Suposição I: Para todo $c_t \geq 0$ e $m_t > 0$, $\phi(c_t, m_t)$ é duas vezes diferenciável e contínua em ambas as vezes e satisfaz:

(a) homogeneidade de grau k;

(b) $\phi \geq 0$, $\phi(0, m_t) = 0$;

[1] Supõe-se que U seja duas vezes diferenciável e contínua em ambas as vezes de modo que $U_c \geq 0$, $U_h \geq 0$ e $U_{cc} \leq 0$ e $U_{hh} \leq 0$.

[2] Feenstra justificou a inclusão desses custos na restrição orçamentária utilizando três modelos de demanda por moeda que originariam esses custos.

(c) $\phi_c \geq 0$, $\phi_m \leq 0$;

(d) $\phi_{cc} \geq 0$, $\phi_{mm} \geq 0$.

Sendo $a_t = b_t + m_t$, (4.2) fica:

$$a_{t+1} \leq [a_t(1+i_t) + (1-h_t)(1-\tau_t) - i_t m_t - c_t - \phi(c_t, m_t)](p_t/p_{t+1}) \quad (4.3)$$

A equação de Bellman é:

$$V(a_t) = max\{U(c_t, h_t) + \beta V(a_{t+1})\} \quad (4.4)$$

e as condições de primeira ordem são[3]:

$$c_t : U_c(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-1 - \phi_c(t)] = 0 \quad (4.5)$$

$$h_t : U_h(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1-\tau_t)] = 0 \quad (4.6)$$

$$m_t : \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-i_t - \phi_m(t)] = 0 \quad (4.7)$$

A condição de Benveniste-Scheinkman é:

$$V'(a_t) = \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})(1+i_t) \quad (4.8)$$

Conforme observamos diretamente de (4.7), a regra de Friedman aqui aplicada implicaria que ϕ_m=0. No mundo *first best*, em que o governo pode arrecadar

[3]Para efeito de simplicidade denotamos as derivadas da função ϕ em relação a c e a m por $\phi_c(t)$ e $\phi_m(t)$ respectivamente quando elas forem avaliadas no período t. Da mesma forma, quando a função ϕ for avaliada em t, denotamos a mesma apenas por $\phi(t)$, subentendendo $\phi(c_t, m_t)$.

impostos *lump – sum*, seria possível descentralizar a solução igualando a taxa de juros nominal a zero. O problema torna-se mais interessante quando o governo não pode usar impostos *lump – sum*. Para determinar a solução de *second best* ou, do problema de Ramsey, construímos a restrição de implementabilidade.

Para derivar a restrição orçamentária intertemporal é preciso usar um fator de desconto. Seja portanto $Q_t = \frac{1}{(1+i_1)...(1+i_t)}$ para $t \geq 1$ e $Q_0=1$.

Da condição de primeira ordem para h_t temos:

$$U_h(t) = \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})(1-\tau_t) = \frac{(1-\tau_t)V'(a_t)}{1+i_t} \tag{4.9}$$

e portanto:

$$1 + i_t = \frac{p_t(1-\tau_t)U_h(t-1)}{p_{t-1}\beta(1-\tau_{t-1})U_h(t)} \tag{4.10}$$

Daí vem que:

$$\frac{Q_t p_t}{p_0} = \frac{\beta^t U_h(t)(1-\tau_0)}{U_h(0)(1-\tau_t)} \tag{4.11}$$

De (4.5) sabe-se que: $\frac{U_c(t)}{1+\phi_c(t)} = \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})$. Substituindo esta expressão em (4.6) temos que:

$$1 - \tau_t = \frac{U_h(t)(1+\phi_c(t))}{U_c(t)} \tag{4.12}$$

e usando (4.12) em Q_t temos o fator de desconto:

$$\frac{Q_t p_t}{p_0} = \frac{\beta^t U_c(t)(1-\tau_0)}{U_h(0)(1+\phi_c(t))} \tag{4.13}$$

A restrição orçamentária intertemporal é:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{Q_t p_t}{p_0}[(1-h_t)(1-\tau_t) - i_t m_t] = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Q_t p_t}{p_0}[c_t + \phi(c_t, m_t)]$$

em que se supõe que $M_0{=}B_0{=}0$[4]. Usando (4.13) na restrição orçamentária intertemporal fica:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t U_c(t)}{1+\phi_c(t)}[c_t + \phi(c_t, m_t) + i_t m_t - (1-h_t)(1-\tau_t)] = 0 \qquad (4.14)$$

e usando as CPO's temos a restrição de implementabilidade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t U'(c_t)}{1+\phi_c(t)}[c_t + \phi(c_t, m_t) - (1-h_t)(1-\tau_t) - \phi_m(t) m_t] = 0 \qquad (4.15)$$

Usando (4.7) e (4.12) temos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_c(t) \left[\frac{c_t + \phi(c_t, m_t) - \phi_m(t) m_t}{1+\phi_c(t)} - \frac{(1-h_t)U_h(t)}{U_c(t)}\right] = 0 \qquad (4.16)$$

Da homogeneidade da função ϕ, temos $k\phi(t) = c_t\phi_c(t) + m_t\phi_m(t)$. Dessa forma, tem-se:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_c(t) \left[c_t + \frac{(1-k)\phi(t)}{1+\phi_c(t)} - \frac{(1-h_t)U_h(t)}{U_c(t)}\right] = 0 \qquad (4.17)$$

sendo esta a restrição de implementabilidade. A restrição de recursos é:

$$c_t + \phi(c_t, m_t) \leq 1 - h_t \qquad (4.18)$$

[4] Como assinalam Chari e Kehoe (1998) essa hipótese é importante pois caso o estoque de ativos em mãos do setor privado seja positivo no período inicial, o bem-estar seria maximizado no problema de Ramsey levando o nível de preços ao inifinito nesse período inicial.

O problema de Ramsey portanto é maximizar (4.1) sujeito à restrição de implementabilidade (4.17) e à restrição de recursos (4.18). A condição de primeira ordem para os encaixes reais do problema de Ramsey é:

$$\left[\lambda_t + \frac{\psi U_c(t)(k-1)}{1+\phi_c(t)}\right]\phi_m(t) = \frac{-\psi U_c(t)(1-k)\phi(c_t, m_t)\phi_{cm}(t)}{(1+\phi_c(t))^2} \tag{4.19}$$

em que $\lambda_t\beta$ e ψ são os multiplicadores de Lagrange das restrições de recursos e de implementabilidade respectivamente.

Para deduzir o sinal dessa expressão precisamos deduzir o sinal de $\phi_{cm}(t)$. Como $\phi(t)$ é homogênea de grau k, então, $\phi_m(t)$ é homogênea de grau $k-1$. Logo:

$$(k-1)\phi_m(c_t, m_t) = m_t\phi_{mm}(t) + c_t\phi_{cm}(t) \tag{4.20}$$

Portanto, dada a suposição I, para $k \geq 1$, temos $\phi_{cm}(t) \leq 0$. Como ψ e λ_t são estritamente positivos[5], o termo à direita da expressão (4.19) é menor ou igual a zero[6] e o termo à esquerda que multiplica $\phi_m(t)$ é estritamente maior que zero, quando $k \geq 1$. Verifica-se a otimalidade da regra de Friedman quando $\phi_m(t)=0$ for a única solução admissível para $\phi_m(t)$ em (4.19). Esta condição é observada em três situações: a) quando $k=1$; ou b) quando $\phi(c_t, m_t)=0$ no ponto de saciedade de encaixes reais; ou c) quando $\phi_{cm}(t)=0$ no ponto de saciedade de encaixes reais.

O ponto de saciedade de encaixes reais é aquele em que as famílias não têm mais nenhum retorno marginal caso retenham mais encaixes reais. Dessa forma, tem-se que $\phi_m(t)=0$ neste ponto, para qualquer c_t, ou seja, para qualquer quantidade

[5] Como ψ e λ_t são os multiplicadores de Lagrange das restrições de implementabilidade e de recursos eles serão estritamente positivos no ótimo uma vez que medem o excesso de encargos tributários e o preço-sombra dos recursos.

[6] De acordo com o que foi deduzido sobre o sinal de $\phi_{cm}(t)$.

consumida, a família tem o nível suficiente de encaixes reais para realizar sua transações.

4.2 Modelo com Imposto sobre Consumo

Supomos agora que o governo faça uso de um imposto sobre o consumo denotado por θ_t, além do imposto sobre a renda do trabalho. Nesse caso a restrição orçamentária fica:

$$(1+\theta_t)p_t c_t + p_t\phi(c_t(1+\theta_t), m_t) + B_{t+1} + M_{t+1} \leq (1+i_t)B_t + M_t + p_t(1-\tau_t)(1-h_t) \tag{4.21}$$

É importante notar que, nesta formulação, os custos de transação dependem do consumo bruto, $c_t(1+\theta_t)$, pois a família consome c_t e paga $\theta_t c_t$ ao governo. Esta formulação é proposta por De Fiore e Teles (2003) e Mulligan e Sala-i-Martin (1997). Conforme estes últimos destacam, quando supomos que o governo arrecada um imposto sobre o consumo, supõe-se implicitamente que esse imposto é pago com moeda. Já quando incluímos apenas um imposto sobre a renda do trabalho, supomos implicitamente que os impostos não são pagos com moeda, pois a função de custos de transação dependerá apenas do consumo e dos encaixes reais. De Fiore e Teles (2003) definem $m_t \equiv M_t/p_t(1+\theta_t)$ para facilitar a análise quando o imposto sobre o consumo é pago com moeda, mas para mantermos a continuidade com a seção anterior, definimos $m_t \equiv M_t/p_t$.

Escrevendo como antes: $a_t = b_t + m_t$ temos que:

$$a_{t+1} \leq [a_t(1+i_t) - i_t m_t - c_t(1+\theta_t) - \phi(c_t(1+\theta_t), m_t) + (1-\tau_t)(1-h_t)](p_t/p_{t+1}) \tag{4.22}$$

De modo que o problema é maximizar (4.1) sujeito a (4.22) e as condições de primeira ordem seguem[7]:

$$c_t : U_c(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1+\theta_t) - \phi_x(t)(1+\theta_t)] = 0 \tag{4.23}$$

$$h_t : U_h(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1-\tau_t)] = 0 \tag{4.24}$$

$$m_t : \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-i_t - \phi_m(t)] = 0 \tag{4.25}$$

e a condição de Benveniste-Scheinkman é a mesma dada anteriormente.

O fator de desconto é dado por:

$$\frac{Q_t p_t}{p_0} = \frac{\beta^t U_c(t)(1-\tau_0)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))U_h(0)}$$

Para escrever a restrição de implementabilidade utilizamos a homogeneidade de grau k da função ϕ[8] e escolhemos não substituir θ_t pois, dadas as condições de primeira ordem, não seria possível substituir todos os preços da restrição orçamentária. Assim temos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_c(t) \left[c_t - \frac{(1-h_t)U_h(t)}{U_c(t)} + \frac{(1-k)\phi(c_t(1+\theta_t), m_t)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))} \right] = 0 \tag{4.26}$$

e a restrição de recursos é:

$$c_t + \phi(c_t(1+\theta_t), m_t) \leq 1 - h_t \tag{4.27}$$

[7]Definimos como o consumo bruto $x_t \equiv c_t(1+\theta_t)$.

[8]Nesse caso a homogeneidade de grau k implica que $k\phi(c_t(1+\theta_t), m_t) = m_t\phi_m(t) + c_t(1+\theta_t)\phi_x(t)$.

O problema de Ramsey é maximizar (4.1) sujeito a (4.26) e (4.27). A condição de primeira ordem para os encaixes reais é:

$$\left[\lambda_t + \frac{\psi U_c(t)(k-1)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))}\right]\phi_m(t) = -\frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t)}{[(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))]^2} \tag{4.28}$$

e como se viu na seção 4.1, $\phi_{cm}(t) \leq 0$. Desse modo, $\phi_m(t)=0$ é a solução possível e vale a regra de Friedman apenas nas mesmas condições observadas na seção 4.1, a saber: a) quando $k=1$; ou b) quando $\phi(x_t, m_t)=0$ no ponto de saciedade dos encaixes reais; ou c) quando $\phi_{cm}(t)=0$[9] no ponto de saciedade dos encaies reais.

4.3 Modelos com Recursos para Produzir Moeda

Em seus trabalhos, Correia e Teles (1996, 1999) argumentam que a hipótese crucial para determinar a otimalidade da regra de Friedman é a que afirma que a moeda não necessita de recursos para ser produzida. Face a esse argumento, propomos agora um modelo em que a moeda necessita de recursos para ser produzida não apenas para testar a hipótese dos supracitados autores, mas também para verificar se os resultados de taxação de bens intermediários de Diamond e Mirrless (1971) valem nesse arcabouço dos modelos monetários. Não questionamos, portanto, a validade da hipótese de que a moeda necessite de recursos para ser produzida.

Supomos agora que não há imposto sobre o consumo e que a moeda exija recursos para ser produzida de acordo com a seguinte tecnologia $n_{2t} = \alpha m_t$ sendo n_{2t} a oferta de trabalho destinada à produção de moeda. A restrição de recursos agora é:

[9] Pela definição de x_t, sabe-se que $\phi_{cm}(t) = \phi_{xm}(t)(1+\theta_t)$

$$c_t + \phi(c_t, m_t) + \alpha m_t \leq 1 - h_t \qquad (4.29)$$

Há dois impostos cobrados pelo governo. Um sobre a renda do trabalho usado para produzir bens de consumo (τ_{1t}), outro sobre a renda do trabalho usado para produzir moeda (τ_{2t}) - como supõem Correia e Teles (1996).

O problema do consumidor passa a ser então, maximizar (4.20) sujeito a:

$$p_t c_t + p_t \phi(c_t, m_t) + B_{t+1} + M_{t+1} \leq p_t(1 - \tau_{1t}) n_{1t} + (1 + i_t) B_t + M_t + p_t(1 - \tau_{2t}) w_{2t} n_{2t} \qquad (4.30)$$

Temos que n_{1t} e n_{2t} são respectivamente o tempo de trabalho dedicados à produção de bens de consumo e à produção de moeda, de modo que: $1 - h_t = n_{1t} + n_{2t}$ e w_{2t} é o salário que o setor produtor de moeda paga. A condição de livre mobilidade do trabalho exige que:

$$w_{2t} = \frac{1 - \tau_{1t}}{1 - \tau_{2t}} \qquad (4.31)$$

Assumindo (4.31) e que $a_t = b_t + m_t$, é possível rescrever (4.30) como:

$$a_{t+1} \leq [(1 - h_t)(1 - \tau_{1t}) + a_t(1 + i_t) - i_t m_t - c_t - \phi(c_t, m_t)](p_t/p_{t+1}) \qquad (4.32)$$

As condições de primeira ordem do problema de maximizar (4.1) sujeito a (4.32) seguem:

$$c_t : U_c(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})(-1 - \phi_c(t)) = 0 \qquad (4.33)$$

$$h_t : U_h(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1 - \tau_{1t})] = 0 \qquad (4.34)$$

$$m_t : \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-i_t - \phi_m(t)] = 0 \tag{4.35}$$

A expressão para Q_t é agora dada por:

$$\frac{Q_t p_t}{p_0} = \frac{\beta^t U_c(t)(1-\tau_{10})}{U_h(0)(1+\phi_c(t))}$$

Substituindo i_t e τ_{1t} pelas condições de primeira ordem na restrição orçamentária intertemporal, temos a seguinte restrição de implementabiliadade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_c(t) \left[c_t + \frac{(1-k)\phi(c_t, m_t)}{(1+\phi_c(t))} - \frac{(1-h_t)U_h(t)}{U_c(t)} \right] = 0 \tag{4.36}$$

O problema de Ramsey é maximizar (4.1) sujeito a (4.29) e (4.36). A condição de primeira ordem para m_t é dada por:

$$\left[\lambda_t + \frac{\psi U_c(t)(k-1)}{(1+\phi_c(t))} \right] \phi_m(t) = - \left[\frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t)}{(1+\phi_c(t))^2} + \alpha \lambda_t \right] \tag{4.37}$$

O lado esquerdo da equação, que multiplica $\phi_m(t)$, é estritamente positivo para $k \geq 1$ e o lado direito é menor ou igual a zero para $k \geq 1$. Logo, novamente temos que a regra de Friedman não valerá quando $k > 1$. Também é interessante notar que se $k=1$, temos a seguinte regra de taxação ótima:

$$i_t = \alpha \tag{4.38}$$

Essa regra é a mesma obtida pela solução *first best*, ou seja, quando o governo maximiza as preferências sujeito apenas à restrição de recursos. De acordo com tal regra, no ótimo, o custo de oportunidade de retenção de moeda é igual ao seu custo de produção. Esta é a versão da regra de Friedman em uma economia que requer recursos para produzir moeda. Tal regra não é obtida quando $k \neq 1$ e $\phi(c_t, m_t)=0$ ou se $\phi_{cm}(t)=0$ no ponto de saciedade de encaixes reais.

4.4 Modelo Completo

Além dos impostos já estabelecidos anteriormente voltamos a considerar o imposto sobre os bens de consumo de modo que este é o modelo mais geral de todos os apresentados. Dessa forma, a restrição orçamentária fica:

$$\begin{aligned} p_t(1+\theta_t)c_t + p_t\phi(c_t(1+\theta_t), m_t) + B_{t+1} + M_{t+1} &\leq \\ (1+i_t)B_t + M_t + p_t(1-\tau_{1t})n_{1t} + p_t(1-\tau_{2t})w_{2t}n_{2t} & \end{aligned} \tag{4.39}$$

em que θ_t é o imposto sobre os bens de consumo. Supondo, como anteriormente, que $a_t = b_t + m_t$, temos que:

$$a_{t+1} \leq [a_t(1+i_t) - i_t m_t - c_t(1+\theta_t) - \phi(c_t(1+\theta_t), m_t) + (1-\tau_{1t})(1-h_t)](p_t/p_{t+1}) \tag{4.40}$$

de modo que o problema agora é maximizar (4.1) sujeito a (4.40). As condições de primeira ordem seguem:

$$c_t : U_c(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1+\theta_t) - \phi_x(t)(1+\theta_t)] = 0 \tag{4.41}$$

$$h_t : U_h(t) + \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-(1-\tau_{1t})] = 0 \tag{4.42}$$

$$m_t : \beta V'(a_{t+1})(p_t/p_{t+1})[-i_t - \phi_m(t)] = 0 \tag{4.43}$$

sendo a condição de Benveniste-Scheinkman a mesma do problema anterior.

A restrição orçamentária intertemporal é dada por :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{Q_t p_t}{p_0}[(1+\theta_t)c_t + \phi(c_t(1+\theta_t), m_t) - (1-h_t)(1-\tau_{1t}) + i_t m_t] = 0 \qquad (4.44)$$

Usando as condições de primeira ordem para h_t e c_t podemos obter o fator de desconto:

$$\frac{Q_t p_t}{p_0} = \frac{\beta^t U_c(t)(1-\tau_{10})}{U_h(0)(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))} \qquad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.44) obtemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t U_c(t)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))}[c_t(1+\theta_t) + i_t m_t + \phi(t) - (1-h_t)(1-\tau_{1t})] = 0 \qquad (4.46)$$

Utilizando as condições de primeira ordem e a propriedade de homogeneidade de $\phi(t)$ obtemos a restrição de implementabilidade:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_c(t) \left[c_t + \frac{(1-k)\phi(t)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))} - \frac{(1-h_t)U_h(t)}{U_c(t)}\right] = 0 \qquad (4.47)$$

A restrição de recursos é muito semelhante à (4.29):

$$c_t + \phi(c_t(1+\theta_t), m_t) + \alpha m_t \leq 1 - h_t \qquad (4.48)$$

de modo que agora o problema de Ramsey é maximizar (4.1) sujeito a (4.47) e a (4.48). Supondo como sempre que $\lambda_t \beta^t$ e ψ são os multiplicadores de Lagrange para as restrições de recursos e de implementabilidade respectivamente, a condição de primeira ordem para os encaixes reais é:

$$\left[\lambda_t + \frac{\psi U_c(t)(k-1)}{(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))}\right]\phi_m(t) = -\left[\frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t)}{[(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))]^2} + \alpha\lambda_t\right] \qquad (4.49)$$

Mais uma vez observamos que, para $k>1$, qualquer $\phi_m(t) \leq 0$ é solução, e logo não vale a regra de Friedman. Esta seria ótima apenas quando $k=1$. Nesse caso, valeria novamente a relação: $i_t=\alpha$.

4.5 Calibragem Numérica

As seções anteriores demonstraram que a regra de Friedman é válida em modelos com custos de transação pecuniários apenas quando a função que reflete esses custos é homogênea de grau um[10]. Quando isso não ocorre a regra não é ótima. Dada a abrangência restrita desses resultados, tentaremos realizar exercícios numéricos de simulação para verificar a distância da taxa de juros em relação à regra quando $k \neq 1$. Para tanto, usaremos as mesmas formas funcionais supostas por Mulligan e Sala-i-Martin (1997).

Conforme delineado ao longo deste capítulo, os modelos das seções 4.1 e 4.3 diferem apenas pelo fato de que no último, a moeda requer recursos para ser produzida. Em ambos os modelos, a condição de primeira ordem para h_t é idêntica e dada por:

$$\beta^t U_h(t) - \lambda_t \beta^t + \psi \beta^t \left[c_t U_{ch}(t) + \frac{(1-k)\phi(t) U_{ch}(t)}{1+\phi_c(t)} + U_h(t) - (1-h_t) U_{hh}(t) \right] = 0 \tag{4.50}$$

Usando tal expressão, podemos derivar a expressão para λ_t para os modelos das seções 4.1 e 4.3.

[10]Ela também vale quando $k \neq 1$ e $\phi(c_t, m_t)=0$ ou $\phi_{cm}(t)=0$ no ponto de saciedade de encaixes reais nos modelos em que não há custos para produzir moeda.

$$\lambda_t = U_h(t) + \psi \left[c_t U_{ch}(t) + \frac{(1-k)\phi(t)U_{ch}(t)}{1+\phi_c(t)} + U_h(t) - (1-h_t)U_{hh}(t) \right] \quad (4.51)$$

Tal expressão pode ser usada nas equações que denotam a taxa de juros i_t nos modelos 4.1 e 4.3 respectivamente, a saber:

$$i_t = \frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t)}{\{\lambda_t(1+\phi_c(t)) + [\psi U_c(t)(k-1)]\}(1+\phi_c(t))} \quad (4.52)$$

$$i_t = \frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t) + \alpha\lambda_t(1+\phi_c(t))^2}{[\lambda_t(1+\phi_c(t)) + \psi U_c(t)(k-1)](1+\phi_c(t))} \quad (4.53)$$

Da mesma forma, os modelos das seções 4.2 e 4.4 são semelhantes e incluem impostos sobre consumo. Nesse caso, a condição de primeira ordem do problema de Ramsey para h_t é dada, em ambos os modelos, por:

$$\beta^t U_h(t) - \lambda_t \beta^t + \psi\beta^t \left[c_t U_{ch}(t) + \frac{(1-k)\phi(t)U_{ch}(t)}{(1+\phi_x(t))(1+\theta_t)} + U_h(t) - (1-h_t)U_{hh}(t) \right] = 0 \quad (4.54)$$

e nesse caso, temos:

$$\lambda_t = U_h(t) + \psi \left[c_t U_{ch}(t) + \frac{(1-k)\phi(t)U_{ch}(t)}{(1+\phi_x(t))(1+\theta_t)} + U_h(t) - (1-h_t)U_{hh}(t) \right] \quad (4.55)$$

E essa expressão é usada para substituir λ_t nas equações de i_t dos modelos 4.2 e 4.4 respectivamente:

$$i_t = \frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t))}{[\lambda_t(1+\theta_t)(1+\phi_x(t)) + (\psi U_c(t)(k-1))](1+\theta_t)(1+\phi_x(t))} \quad (4.56)$$

$$i_t = \frac{\psi U_c(t)(1-k)\phi(t)\phi_{cm}(t) + \alpha\lambda_t[(1+\theta_t)(1+\phi_x(t))]^2}{[\lambda_t(1+\theta_t)(1+\phi_x(t)) + \psi U_c(t)(k-1)](1+\theta_t)(1+\phi_x(t))} \tag{4.57}$$

Para calcular a taxa de juros ótima nesse mundo *second best*, precisamos supor quais formas funcionais as funções U e ϕ assumem. Este trabalho assume as mesmas formas funcionais sugeridas por Mulligan e Sala-i-Martin (1997), a saber:

$$U(c_t, h_t) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}[c_t^{(\sigma-1)/\sigma} + \delta h_t^{(\sigma-1)/\sigma}] \tag{4.58}$$

para a função utilidade e por essa razão consideramos $U_{ch}(t)$=0. A função de custo de transação é da forma:

$$\phi(c_t, m_t) = c_t^k L(c_t/m_t) \tag{4.59}$$

sendo $L(z) = A(z - \overline{z})^2/z$.

Assim, temos que:

$$\phi_c(t) = kc_t^{k-1}L(c_t/m_t) + \frac{c_t^k}{m_t}L'(c_t/m_t) \tag{4.60}$$

$$\phi_{cm}(t) = -(k+1)c_t^{k-2}\left(\frac{c_t}{m_t}\right)^2 L'(c_t/m_t) - c_t^{k-2}\left(\frac{c_t}{m_t}\right)^3 L''(c_t/m_t) \tag{4.61}$$

Sendo:

$$L'(z) = \frac{A(z-\overline{z})(2z-1)}{z^2}$$

$$L''(z) = \frac{A[z(2z-1) - 2z(z-\overline{z}) - 2(z-\overline{z})(2\overline{z}-1)]}{z^3}$$

Quando supomos que há imposto sobre o consumo, denotamos por x_t o equivalente ao consumo bruto, isto é, $x_t \equiv (1+\theta_t)c_t$. Nesse caso a função ϕ tem como argumentos x_t e m_t e as derivadas são:

$$\phi_x(t) = kx_t^{k-1}L(x_t/m_t) + \frac{x_t^k}{m_t}L'(x_t/m_t) \tag{4.62}$$

$$\phi_{xm}(t) = -(k+1)\frac{x_t^k}{m_t^2}L'(x_t/m_t) - \frac{x_t^{k+1}}{m_t^3}L''(x_t/m_t) \tag{4.63}$$

Para realizar os cálculos, supusemos que A=0.0035, $\bar{z}$=1, ψ=1, δ=1, σ=1.5, h_t=2/3 e c_t/m_t=3 e c_t=0.78. Todos esses valores, à exceção de h_t=2/3 e c_t=0.78, foram propostos por Mulligan e Sala-i-Matin.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores Ótimos para i_t

		k=0	k=0.5	k=1	k=2	k=5
Modelo 1	α=0, θ_t=0	1.14 10^{-4}	9.70 10^{-6}	0	3.50 10^{-5}	5.74 10^{-5}
Modelo 2	α=0, θ_t=0.25	1.43 10^{-4}	1.80 10^{-5}	0	7.84 10^{-5}	3.45 10^{-4}
Modelo 3	α=0.5, θ_t=0	0.807	0.617	0.50	0.362	0.198
Modelo 4	α=0.5, θ_t=0.25	0.741	0.597	0.50	0.378	0.220

Os resultados mostram, portanto, que o desvio em relação à regra de Friedman é insignificante nos dois primeiros modelos quando o grau de homogeneidade de ϕ é diferente de 1. Já para os modelos em que a moeda requer recursos para ser produzida, podemos formular as mesmas "regras" de taxação que Correia e Teles (1996) já delinearam em seu trabalho, ou seja, $i_t > \alpha$ para $0 \leq k < 1$, $i_t < \alpha$ para $k > 1$ e $i_t = \alpha$ para $k=1$.

4.6 Interpretação dos Resultados

Uma vez apresentados os resultados de nossos modelos, procuramos agora analisar os mesmos à luz dos resultados de finanças públicas apresentados no capítulo 2, a saber, o teorema de Diamond e Mirrless (1971) e o resultado de Atkinson e Stiglitz (1973), que estendem o trabalho de Ramsey (1927).

Para tal análise procuramos interpretar a economia monetária deste trabalho como uma economia "real", ou seja, em que há produção e não há moeda. Tal procedimento também é usado por Kimbrough (1986), Chari e Kehoe (1998) e Correia e Teles (1996,1999) para justificar seus resultados. Kimbrough foi o primeiro a argumentar que, se a moeda for classificada como um bem intermediário e a função de transação (ou $shopping - time$) for homogênea de grau um, a regra de Friedman valeria pois seria uma extensão do resultado de não taxação de bens intermediários quando a tecnologia apresenta retornos constantes de escala.

Já Chari e Kehoe (1998) afirmam que se as condições de homoteticidade e separabilidade sobre as preferências valem, então a otimalidade da regra seria uma extensão do mesmo resultado de Diamond e Mirrless (1971). Caso não valessem essas condições, a otimalidade da regra e o resultado de não taxação de bens intermediários não teriam correlação. Para chegar a tais conclusões, mostram que é possível reinterpretar os modelos monetários de $cash - credit$ e com moeda na função utilidade como economias reais com bens intermediários quando valem as condições de separabilidade e homoteticidade. Estabelecem um resultado similar para o modelo de $shopping - time$.

Correia e Teles (1996) argumentam, por sua vez, que a validade da regra de Friedman seria conseqüência do fato de que a moeda não exige recursos para ser produzida e não do resultado de Diamond e Mirrless (1971). Eles dizem que os autores supracitados classificaram a moeda como bem intermediário apenas com o propósito de distingui-la de um bem final. No entanto, pelo fato de se assumir que a moeda não requer recursos para ser produzida, ela deveria ser considerada antes como um insumo primário livre e não como bem intermediário. Essa distinção, segundo eles, é importante e levaria a conclusões distintas com relação ao teorema de Diamond e Mirrless.

Para provar sua afirmação, Correia e Teles (1996) assumem que a moeda exige recursos para ser produzida e, desse modo, pode ser considerada claramente um bem intermediário. Nesse caso, mostram que a validade da regra de Friedman não é uma mera extensão do resultado de Diamond e Mirrless, pois mesmo que a função de tecnologia de transação seja homogênea de grau um, é possível que o bem intermediário (a moeda) seja subsidiado, dada a regra de taxação ótima.

O modelo aqui proposto é bastante semelhante ao de Correia e Teles (1996). Além do imposto sobre a renda do trabalho, também disponibiliza imposto sobre os bens de consumo como se viu nas seções 4.2 e 4.4. As conclusões mostraram que, quando a função de custos pecuniários é homogênea de grau um, a regra de Friedman vale. Isso porque, quando a moeda requer recursos para ser produzida, a taxa de juros de *second best* é igual ao custo marginal de produzi-la, que é o mesmo resultado de *first best*.

De Fiore e Teles (2003) mostram que, se utilizamos a tecnologia padrão como a proposta por Kimbrough (1986)[11], sempre é ótimo taxar os encaixes reais, mesmo quando a tecnologia apresenta retornos constantes de escala. Nesse caso não vale a regra de finanças públicas de Diamond e Mirrless. O modelo proposto neste

[11] Kimbrough (1986) propõe uma função de tecnologia de transações amplamente utilizada na literatura e dada por $s_t \geq l\left((1+\theta_t)c_t, \frac{M_t}{p_t}\right)$ com $\theta_t \geq$-1. Tal função é homogênea de grau k e suas derivadas tem os mesmos sinais dos apresentados na proposição I.

capítulo também utiliza uma função de tecnologia de transações com as mesmas características da proposta por Kimbrough (1986) e, da mesma forma como assinalado por De Fiore e Teles (2003), os encaixes reais são taxados quando supõe-se que eles requerem recursos para serem produzidos mesmo quando k=1. Em uma economia em que a moeda exige recursos para ser produzida, a solução de *first best* é caracterizada por -$\phi_m(t) = \alpha$. A taxa marginal de substiuição técnica na produção de transações, -$\phi_m(t)$, tem que ser igual ao seu custo social, α. Quando k é igual a um, é ótimo não distorcer a produção, igualando o imposto proporcional sobre a moeda a zero. Conclui-se portanto que a otimalidade da regra de Friedman nos modelos aqui propostos deve-se à extensão dos resultados de Diamond e Mirrless (1971).

Mulligan e Sala-i-Martin (1997) procuram mostrar todas as propriedades dos modelos desenvolvidos até então e resumem de maneira muito interessante seus resultados, ao unificarem o arcabouço em que eles são discutidos. Com relação aos modelos de *shopping – time*, observam que aqueles que incluem apenas imposto sobre o consumo, supõem que tal imposto é pago com moeda. Já aqueles que incluem apenas um imposto sobre a renda implicam que ele não é pago com moeda. Segundo os autores, isso influencia a validade ou não da regra de Friedman dependendo do arcabouço proposto em cada modelo.

De acordo com Mulligan e Sala-i-Martin, para o modelo proposto por Kimbrough (1986), a proporção de impostos pagos com moeda é irrelevante e a validade da regra de Friedman se baseia na homogeneidade de grau um da função de tecnologia de transação. Chari, Christiano e Kehoe (1996) e Correia e Teles (1996) propõem modelos de *shopping – time* com função de tecnologia de transação homogênea de grau k e em que os impostos não são pagos com moeda - o governo só tem à sua disposição um imposto sobre a renda. Nesse caso, Mulligan e Sala-i-Martin relacionam a validade da regra à hipótese de que os impostos não são pagos com moeda. Sob essa suposição, observam ainda, a regra de Friedman satisfaz as condições de primeira ordem do problema de Ramsey qualquer que seja o grau de homogeneidade k.

Finalmente, assinalam que, em modelos *shopping – time* em que a função de transação é homogênea de grau k e alguns impostos são pagos com moeda, a política de Ramsey ótima é taxar a moeda. Dessa forma, Mulligan e Sala-i-Martin procuram demonstrar que os resultados de Chari, Christiano e Kehoe (1996) dependem crucialmente da hipótese que nenhum imposto é pago com moeda, de modo que, se alguns dos impostos são pagos com moeda, - i.e. o governo dispõe de impostos sobre a renda e sobre o consumo - a regra de Friedman não é ótima mesmo se o resto das suposições propostas pelos autores citados forem satisfeitas.

Também é importante notar a semelhança entre os resultados derivados dos modelos de *shopping – time* e o modelo com custos de transação pecuniários. Quando não há impostos, os modelos são inteiramente equivalentes, o que pode ser observado pela comparação direta das restrições orçamentárias do problema do consumidor nos dois modelos. Isso também ocorre quando o governo dispõe apenas de impostos sobre o consumo.

Caso o governo possa cobrar um imposto sobre a renda do trabalho, isso não mais ocorre. Isso porque no modelo *shopping–time*, a oferta de trabalho é afetada pelo tempo gasto com transações e, por essa razão, o imposto recai também sobre as transações. Já no modelo com custos de transação pecuniários, as transações não são taxadas exatamente pela hipótese de que as transações demandam recursos pecuniários - e não tempo - para serem efetuadas. Comparando as restrições orçamentárias isso pode ser claramente deduzido:

$$p_t c_t + B_{t+1} + M_{t+1} \leq p_t(1 - h_t - l(c_t, m_t))(1 - \tau_t) + (1 + i_t)B_t + M_t \qquad (4.64)$$

$$p_t c_t + p_t \phi(c_t, m_t) + B_{t+1} + M_{t+1} \leq p_t(1 - h_t)(1 - \tau_t) + (1 + i_t)B_t + M_t \qquad (4.65)$$

sendo (4.64) a restrição do modelo $shopping - time$ e (4.65) a do modelo com custos de transação pecuniários. Essa diferença explica a não validade dos resultados deduzidos por Mulligan e Sala-i-Martin (1997) para o modelo utilizado neste trabalho. Isso porque, pelos resultados demonstrados por tais autores, em modelos de $shopping - time$ em que o governo utiliza impostos sobre a renda e sobre o consumo e a função de tecnologia de transação é homogênea de grau k, a regra de Friedman não vale.

4.7 Sumário de resultados

O propósito deste capítulo foi investigar a otimalidade da regra diferente supondo que as transações tenham um custo pecuniário. Traçamos agora, um breve sumário dos resultados obtidos.

Inicialmente verificou-se que, nos modelos em que a moeda não requer recursos para ser produzida, a regra de Friedman é ótima quando a função de tecnologia de transação é homogênea de grau um. Isso também ocorria quando seu grau de homogeneidade era diferente de um mas ela assumia valor zero no ponto de saciedade dos encaixes reais ou quando, nesse mesmo ponto, sua derivada cruzada com relação a c_t e a m_t era nula.

Nos modelos em que supusemos que a moeda exige recursos para ser produzida, a regra é ótima apenas quando a função referida é homogênea de grau um. Quando essa condição não é satisfeita então ê ótimo taxar a moeda nesses modelos.

Os exercícios de calibragem numérica usando as formas funcionais propostas por Mulligan e Sala-i-Martin (1997) mostram que o desvio da taxa ótima em relação à taxa proposta pela regra de Friedman em cada modelo é muito pequeno, quando supomos que o grau de homogeneidade da função ϕ é diferente de um.

Finalmente, na seção de interpretação dos resultados, demonstrou-se que, se a função de tecnologia de transação é homogênea de grau um, a otimalidade da regra de Friedman é uma extensão dos resultados de Diamond e Mirrless (1971), de não taxação de bens intermediários quando a tecnologia apresenta retornos constantes de escala. Isso porque, quando supomos que a moeda exige recursos para ser produzida, estamos supondo que ela seja um bem intermediário típico. Sob essa hipótese, o imposto proporcional sobre a moeda é nulo quando ϕ é homogênea de grau um.

Capítulo 5

Equivalência Funcional

Em seu artigo, Feenstra(1986) demonstra a equivalência funcional entre os modelos monetários com custos de transação pecuniários e o modelo com moeda na função utilidade. Entretanto, seu modelo não incluía lazer na função utilidade, como fazem Correia e Teles (1999). Estes, por sua vez, mostraram que se os modelos com moeda na função utilidade são vistos como formas reduzidas dos modelos com tecnologia de transação (ou de *shopping – time*), então as hipóteses sobre as preferências devem ser tais que a regra de Friedman seja ótima sob condições gerais.

O modelo proposto neste trabalho inclui lazer na função utilidade e também possui custos de transação pecuniários. O que se fará neste capítulo será portanto a demonstração da equivalência funcional entre este modelo e um modelo com tecnologia de transação. Também demonstraremos a equivalência entre o modelo aqui proposto e um modelo com moeda e lazer na função utilidade. Não consideramos aqui os impostos sobre bens de consumo (θ_t) pois, de acordo com Mulligan e Sala-i-Martin (1997), não é possível estabelecer a equivalência funcional na presença de tais impostos, a não ser no caso em que eles são incluídos na função utilidade (o que carece de sentido econômico).

5.1 Equivalência com o Modelo com Tecnologia de Transação

no modelo com tecnologia de trabsaçõaAs preferências das famílias como:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, h_t^u) \tag{5.1}$$

em que x_t é o consumo bruto, definido como, $x_t \equiv c_t + \phi(c_t, m_t)$ e h_t^u é o lazer líquido do tempo gasto com transações, ou seja, $h_t^u \equiv h_t - l(x_t, m_t)$. A restrição orçamentária é:

$$p_t x_t + B_{t+1} + M_{t+1} \leq (1 + i_t)B_t + M_t + p_t(1 - \tau_t)(1 - h_t^u) \tag{5.2}$$

sendo todas as variáveis definidas como na seção 4.5.

O problema do consumidor é, portanto, maximizar (5.1) sujeito a (5.2), que pode ser reescrita como:

$$a_{t+1} \leq [a_t(1 + i_t) - i_t m_t - x_t + (1 - \tau_t)(1 - h_t^u - l(x_t, m_t))](p_t/p_{t+1}) \tag{5.3}$$

A equação de Bellman (Q nesse caso) é:

$$Q(a_t) = V(x_t, h_t^u) + \beta Q(a_{t+1})$$

e as condições de primeira ordem:

$$x_t : V_x + \beta Q'(a_{t+1})[-1 - (1 - \tau_t)l_x](p_t/p_{t+1}) = 0 \tag{5.4}$$

$$m_t : \beta Q'(a_{t+1})[-i_t - l_m(1-\tau_t)](p_t/p_{t+1}) = 0 \quad (5.5)$$

$$h_t^u : V_{h^u} - \beta Q'(a_{t+1})(1-\tau_t)(p_t/p_{t+1}) = 0 \quad (5.6)$$

A condição de Benveniste-Scheinkman é:

$$Q'(a_t) = \beta Q'(a_{t+1})(1+i_t) \quad (5.7)$$

É evidente que (4.1) equivale a (5.1) se, para cada c_t,m_t,h_t^u e x_t,

$$U(c_t, h_t) \equiv V(x_t, h_t^u) \quad (5.8)$$

sendo $h_t \equiv h_t^u + l(x_t, m_t)$. As restrições orçamentárias (4.2) e (5.2) são equivalentes quando valem as supracitadas relações entre x_t e c_t e entre h_t^u e h_t. Para formularmos a equivalência funcional formalmente é necessário definir a função implícita dada por $c_t = \psi(x_t, m_t)$ e rescrever (5.8) como:

$$U[\psi(x_t, m_t), h_t] = V[x_t, h_t - l(x_t, m_t)] \quad (5.9)$$

Dessa forma podemos formular as seguintes suposições sobre l a fim de enunciar a equivalência entre os modelos.

Suposição II: Seja a função $l(x_t, m_t)$, que denota o tempo gasto para a realização de transações pelo agente representativo. Assume-se que ela possui as seguintes propriedades:

(a)$l_x \geq 0$, $l_m \leq 0$;

(b)$l_{xx} \geq 0$, $l_{mm} \geq 0$.

Suposição III: Seja a função de utilidade $U(c_t, h_t)$, assume-se que ela possui as seguintes propriedades:

(a)$U_c \geq 0$, $U_h \geq 0$; e

(b)U é côncava.

É importante notar, antes de enunciar formalmente a equivalência, que denotaremos por $\overline{m}$ o nível de encaixes reais que sacia plenamente as famílias no modelo proposto em 4.1, e por m^* o nível de encaixes reais que sacia plenamente as famílias no contexto do modelo de *shopping−time* proposto neste capítulo. Podemos obter tais níveis de encaixes reais nas soluções de *first best* dos respectivos modelos[1].

Consideradas, portanto, as suposições I, II e III, é possível formular a seguinte proposição.

Proposição II: Dado um modelo monetário com custos de transação pecuniários, é possível construir um modelo equivalente com uma função explícita de custos de transação em que $x_t \equiv c_t + \phi(c_t, m_t)$, $h_t^u \equiv h_t - l(x_t, m_t)$ e $U[\psi(x_t, m_t), h_t] = V(x_t, h_t^u)$. Se as suposições I, II e III são satisfeitas, então os modelos são equivalentes e:

(i)$V_x(t) \geq 0$, $V_{h^u}(t) \geq 0$;

(ii)V é côncava; e

(iii)$\overline{m} = m^*$.

[1] Veja equações (4.7) e (5.5) para as soluções de *first best* dos respectivos modelos.

Prova

Como relações inicias temos $x_t = c_t + \phi(c_t, m_t)$ e $h_t \equiv h_t^u + l(x_t, m_t)$. A partir da primeira é possível definir a função ímplicita: $\psi(x_t, m_t) = c_t$. Dessa forma:

. derivando para c_t, temos:(A) $1 = \psi_x(1 + \phi_c(t)) \Rightarrow \psi_x(t) = 1/(1 + \phi_c(t)) \geq 0$

. derivando para m_t: (B) $\psi_x(t)\phi_m(t) + \psi_m(t) = 0 \Rightarrow \psi_m(t) = -\phi_m(t)/(1 + \phi_c(t) \geq 0$

Para obter a derivada segunda de x_t, derivamos (A) para c_t novamente:

$$\psi_{xx}(t)(1 + \phi_c(t))^2 + \psi_x(t)\phi_{cc}(t) = 0 \Rightarrow \psi_{xx}(t) = -\frac{\psi_x(t)\phi_{cc}(t)}{(1 + \phi_c(t))^2} \leq 0$$

E para obter a derivada segunda de m_t, derivamos (B) para m_t:

$$\psi_{mm}(t) = -\psi_{xx}(t)\phi_m^2(t) - \psi_x(t)\phi_{mm}(t) - 2\psi_{xm}(t)\phi_m(t)$$

Também é possível escrever:

$$\psi_{mm}(t) = \frac{1}{(1 + \phi_c(t))^2}\left[-(1 + \phi_c(t))\phi_{mm}(t) + 2\phi_m(t)\phi_{cm}(t) - \frac{\phi_{cc}(t)\phi_m^2(t)}{1 + \phi_c(t)}\right]$$

Para definir o sinal dessa expressão, usamos o fato de que a matriz

$$\begin{bmatrix} \phi_{cc}(t) & \phi_{cm}(t) \\ \phi_{mc}(t) & \phi_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

é semi-definida positiva e, portanto, a forma quadrática

$$-\frac{1}{(1+\phi_c(t))^3}\begin{bmatrix} -\phi_m(t) & 1+\phi_c(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{cc}(t) & \phi_{cm}(t) \\ \phi_{mc}(t) & \phi_{mm}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\phi_m(t)) \\ 1+\phi_c(t) \end{bmatrix}$$

é menor ou igual a zero e equivale a:

$$\psi_{mm}(t) = -\frac{1}{(1+\phi_c(t))^3}[(1+\phi_c(t))^2\phi_{mm}(t) - 2\phi_m(t)\phi_{mc}(t) + \phi_{cc}(t)\phi_m^2(t)]$$

Daí conclui-se que $\psi_{mm}(t) \leq 0$ e que $\psi_{xm}(t) \geq 0$.

Para a equivalência funcional entre o modelo com custos pecuniários e o modelo de *shopping − time*, supõe-se que: $U(c_t, h_t) = V(x_t, h_t^u)$.

$$U[\psi(x_t, m_t), h_t] = V[x_t, h_t - l(x_t, m_t)]$$

Derivando totalmente com relação a x_t, podemos obter V_x:

$$U_c(t)\psi_x(t) = V_x(t) - V_{h^u}l_x(t) \tag{5.10}$$

Tomando o fato que $U_h = V_{h^u}$, tem-se

$$U_c(t)\psi_x(t) + U_h(t)l_x(t) = V_x(t)$$

Pela suposição I a III, tem-se que e pela hipótese de concavidade de U, tem-se que $V_x \geq 0$. Fazendo a segunda derivada, a partir de (5.10):

$$U_{cc}(t)\psi_x^2(t) + U_c(t)\psi_{xx}(t) = V_{xx}(t) - 2V_{xh^u}(t)l_x(t) + V_{h^uh^u}l_x^2(t)$$

Como se demonstrou acima, $\psi_{xx}(t) \leq 0$. Tal resultado, e a suposta concavidade de U, nos leva à conclusão de que a expressão à esquerda da equação acima é menor ou igual a zero. Isso garante que o hessiano dado pelas segundas derivadas de V é semi-definido negativo e, dessa forma, $V_{xx}(t) \leq 0$ e $V_{h^u h^u}(t) \leq 0$. A partir desses resultados também é possível concluir que V é côncava[2].

É interessante notar ainda que, tomando as derivadas com relação a m para as duas funções de utilidade, temos:

$$U_c(t)\psi_m(t) = -V_{h^u}(t)l_m(t)$$

e substituindo a expressão de $\psi_m(t)$ na derivada acima e sabendo que $U_h(t) = V_{h^u}(t)$, vem:

$$U_c(t)\left[\frac{-\phi_m(t)}{1+\phi_c(t)}\right] = -U_h(t)l_m$$

Pelas CPO do consumidor, sabe-se que $U_h(t) = \frac{U_c(t)(1-\tau_t)}{1+\phi_c(t)}$ e portanto:

$$U_c(t)\left[\frac{-\phi_m(t)}{1+\phi_c(t)}\right] = -\frac{U_c(t)(1-\tau_t)l_m(t)}{1+\phi_c(t)} \Rightarrow \phi_m(t) = (1-\tau_t)l_m(t)$$

Essa relação é conseqüência imediata da comparação das equações (4.7) e (5.5) e demonstra que $\overline{m} = m^*$, ou seja, que o ponto de saciedade de encaixes reais é o mesmo nos dois modelos. Tal correspondência, no entanto, é obtida apenas pelas propriedades das funções de utilidade derivadas acima.

5.2 Equivalência com o Modelo com Moeda na Função Utilidade

Agora procuramos demonstrar a equivalência funcional entre o modelo com custos de transação pecuniários e o modelo proposto inicialmente por Sidrauski (1967).

[2] Os resultados seguem dos teoremas 2.18 (p.260) e A.4 (p.269) demonstrados em Fuente (2000).

Incluiremos aqui o lazer na função utilidade, além de encaixes monetários e consumo. A equivalência portanto vale desde que:

$$U[\psi(x_t, m_t), h_t] \equiv V[x_t, m_t, h_t] \tag{5.11}$$

Dessa forma é possível enunciar a seguinte proposição:

Proposição II: Dado um modelo monetário com custos de transação pecuniários, é possível construir um modelo equivalente com moeda na função utilidade em que $x_t \equiv c_t + \phi(c_t, m_t)$. Se a suposição I é satisfeita e U é côncava, os modelos são equivalentes.

Prova:

De (5.11) podemos obter as derivadas da função V, que seguem:

$$V_m(t) = U_c(t)\psi_m(t) \geq 0$$

$$V_{mm}(t) = U_{cc}(t)\psi_m^2(t) + U_c(t)\psi_{mm}(t)$$

Como U é côncava e $\psi_{mm}(t) \leq 0$, então $V_{mm}(t) \leq 0$. As derivadas de V com relação a x são:

$$V_x(t) = U_c(t)\psi_x(t)$$

$$V_{xx}(t) = U_{cc}(t)\psi_x^2(t) + U_c(t)\psi_{xx}(t)$$

Se as suposições são satisfeitas, temos que $V_x(t) \geq 0$ e $V_{xx}(t) \leq 0$.

Os resultados obtidos neste capítulo estendem portanto os existentes na literatura que o modelo com custos de transação pecuniários é funcional-equivalente aos modelos com custos de transação e com moeda (e lazer) na função utilidade.

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho procurou investigar a otimalidade da chamada regra de Friedman em modelos monetários supondo que os custos de transação são pecuniários, como proposto inicialmente por Feenstra (1986), e analisamos tais resultados à luz dos obtidos pela literatura, apresentada nos capítulos dois e três. Além disso, supomos também que o governo tem à sua disposição impostos distorsivos para arrecadar recursos. Inicialmente consideramos apenas um imposto sobre a renda do trabalho e posteriormente incluímos também um imposto sobre o consumo. Finalmente, consideramos ainda que a moeda requer recursos para ser produzida. Os resultados obtidos pelos modelos descritos foram apresentados no capítulo quatro. Todos eles apresentaram conclusões semelhantes independentemente dos instrumentos usados pelo governo com a finalidade de obter recursos e da circunstância em que a moeda é produzida.

A regra de Friedman sempre foi a alternativa ótima quando a função de custos de transação apresentava retornos constantes de escala, ou seja, tinha grau de homogeneidade unitário. Caso essa condição não fosse preenchida pela função ϕ, a regra era ótima em circunstâncias específicas, quais sejam: caso o valor dessa mesma função fosse nulo ou caso a derivada cruzada de ϕ com relação ao consumo e à moeda fosse igualmente nula, ambos os casos, no ponto de saciedade plena dos encaixes reais.

Quando supusemos que a moeda requer recursos para ser produzida, incluímos a mesma não como um bem livre, mas como um bem intermediário típico. Tal hipótese foi construída a fim de verificarmos a validade ou não dos resultados de Diamond e Mirrless (1971) no nosso modelo e não por considerá-la plausível face à realidade. Mesmo quando essa hipótese foi considerada, os resultados acima delineados continuaram valendo. A robustez dos resultados comprovou que, no arcabouço de custos de transação pecuniários, a validade da regra de Friedman deve-se à extensão dos resultados de Diamond e Mirrless.

Tais conclusões parecem contrárias às observadas na literatura, principalmente por Correia e Teles (1996), De Fiore e Teles (2003) e Mulligan e Sala-i-Martin (1997). Procuramos então, demonstrar na seção 4.6 que nossas conclusões são amparadas pelo teorema de Diamond e Mirrless e pelas diferenças básicas entre o modelo de $shopping-time$ e o modelo com custos de transação pecuniários. Neste último, quando supomos que o governo tem a seu dispor um imposto sobre a renda do trabalho, as conclusões dele derivadas são distintas das obtidas do modelo com especificação de $shopping - time$.

O capítulo cinco demonstrou a equivalência funcional entre esses dois tipos de especificação para os custos de transação quando não consideramos impostos sobre o consumo (θ) no modelo. Além disso, demonstrou-se a equivalência funcional entre o modelo de Sidrauski (1967) com lazer na função utilidade e o modelo com custos de transação pecuniários.

Como possíveis extensões dessa linha de pesquisa, caberia investigar a otimalidade da regra de Friedman em modelos monetários que incluíssem intermediários financeiros, capital - como outro ativo a ser mantido pelas famílias - e produção. Embora alguns modelos já tenham lançado algumas dessas hipóteses (vide Bassoli e Pessoa (2000)), nenhum deles têm se preocupado exclusivamente com a otimalidade da citada regra.

Referências Bibliográficas

[1] Atkinson, A.B. e J. E. Stiglitz, 1972, "The Structure of Indirect Taxation and Economic Efficiency", *Journal of Public Economics*, n°1, p.97-119.

[2] Aiyagari, S.; R.Braun e Z. Eckstein,1998, "Transaction Services, Inflation an Welfare", *Journal of Political Economy*, n° 106, p.1274-1301.

[3] Bassoli, Alexandre e Samuel Pessoa, 2000, *Inflation and Overbanking*, mimeo.

[4] Brock, William, 1975, "A Simple Perfect Foresight Monetary Model", *Journal of Monetary Economics*, n°1, p.17-25.

[5] Cass, D.,1965, "Optimum growth in an aggregative model of accumulation"', *Review of Economic Studies*, n°32, p.233-40.

[6] Chamley, Christopher, 1985. "On a Simple Rule for the Optimal Inflation Rate in Second Best Taxation", *Jounal of Public Economics*, n°26, p.35-50.

[7] Chari V. e Patrick Kehoe, 1998, *Optimal Fiscal and Monetary Policy*, Research Department Staff Report, n° 251, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

[8] Chari, V., Lawrence J. Christiano e Patrick Kehoe, 1996, "Optimality of the Friedman Rule in Economies with Distorting Taxes", *Journal of Monetary Economics*, n°37, p.203-223.

[9] Correia, Isabel e Pedro Teles, 1996, "Is the Friedman Rule Optimal when Money is an Intermediate Good?", *Journal of Monetary Economics*, nº38, p.223-244.

[10] Correia, Isabel e Pedro Teles, 1999, "The Optimal Inflation Tax", Discussion Paper nº123, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

[11] De Fiore, Fiorella, e Pedro Teles, 2003, "The Optimal Mix of Taxes on Money, Consumption and Income", *Journal of Monetary Economics* nº50, p.871-887.

[12] Diamond, Peter A. e James A. Mirrlees, 1971, "Optimal Taxation and Public Production I: Production Efficiency". *The American Economic Review* nº 61, p.8-27.

[13] Drazen, Allen, 1979, "The Optimal Rate of Inflation Revisited", *Journal of Monetary Economics*, nº5, p.231-248.

[14] Feenstra, Robert C.,1986, "Functional Equivalence between Liquidity Costs and the Utility of Money", *Journal of Monetary Economics*, nº17, p.271-291.

[15] Friedman, Milton, 1969, "The Optimum Quantity of Money", in M.Friedman, ed., *The Optimum Quantity of Money and other Essays*, Aldine, Chicago, 2ª edição.

[16] Fuente, Angel de la, (2000), *Mathematical Methods and Models for Economists*, Cambridge University Press, 1ª edição.

[17] Kimbrough, Kent P.,1986, "The Optimum Quantity of Money Rule in the Theory of Public Finance", *Journal of Monetary Economics*, nº18, p.277-284.

[18] Koopmans, T.C., 1965, "On the Concept of Optimal Growth", *The Econometric Approach to Development Planing*, ed. Randy MacNally, Chicago.

[19] Lucas, Robert E. Jr. e Nancy L. Stokey, 1983, "Optimal Fiscal and Monetary Theory in an Economy without Capital", *Journal of Monetary Economics*, nº12, p.55-93.

[20] Mulligan, Casey B. e Xavier Sala-i-Martin, 1997, "The Optimum of Money: Theory and Evidence", *Journal of Money, Credit, and Banking*, nº29, p.687-715.

[21] Phelps, Edmund S., 1973, "Inflation in the Theory of Public Finance, *Swedish Journal of Economics*, nº75, p.37-54.

[22] Ramsey, Frank P.,1927, "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal* nº37, p.47-61.

[23] Sidrauski, Miguel, 1967, "Inflation and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, nº75, p.796-810.

[24] Siegel, Jeremy, 1978, "Notes on Optimal Taxation and the Optimal Rate of Inflation", *Journal of Monetary Economics*, nº4, p.297-305.

[25] Woodford, Michael, 1990, "The Optimum Quantity of Money", em *Handbook of Monetary Economics*, B. Friedman e F. Hahn, eds., North-Holland, p.1067-1152.