

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Um Modelo de Opções Reais com Estratégias de
Entrada e Saída e com Investimento Incerto,
Sequencial e com Tempo de Construção

Guilherme Batistella Martins

Orientador: Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva

SÃO PAULO
2003

Reitor da Universidade de São Paulo
Prof. Dr. Adolpho José Melfi

Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Prof^a Dr^a. Maria Tereza Leme Fleury

Chefe do Departamento de Economia
Prof^a. Dr^a. Elizabeth Maria Mercier Querido Farina

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Um Modelo de Opções Reais com Estratégias de
Entrada e Saída e com Investimento Incerto,
Sequencial e com Tempo de Construção

Guilherme Batistella Martins

Orientador: Prof. Dr. Marcos Eugênio da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia,
Administração e Contabilidade da Universidade de São
Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Economia

SÃO PAULO
2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Martins, Guilherme Batistella

Um modelo de opções reais com estratégias de entrada e saída e investimento incerto, sequencial e com tempo de construção / Guilherme Batistella Martins. -- São Paulo : FEA/USP, 2003.

45 p.

Dissertação - Mestrado
Bibliografia

1. Finanças 2. Opções reais 3. Investimentos
(Avaliação) I. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP.

CDD – 332

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Marcos Eugênio da Silva, pelos comentários e sugestões e pela paciência em atender aos meus prazos apertados, aos professores Antônio Gledson de Carvalho e Pedro Paulo Schirmer pelos seus comentários na qualificação, e, principalmente, aos meus familiares e amigos que me apoiaram e incentivaram durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Esta dissertação desenvolve um modelo de opções reais com investimento incerto, sequencial e com tempo de construção. Incorpora-se no modelo as opções reais de investir e abandonar a atividade. O modelo aborda o problema de maximização de uma empresa diante de um investimento com as características citadas. A equação diferencial do ativo é obtida utilizando programação dinâmica e avaliação neutra ao risco. Em particular, para o período da construção, a equação diferencial é parcial e elíptica, o que demandou a utilização de métodos numéricos. Os principais resultados da dissertação são que, ao contrário do que boa parte da literatura sobre opções reais afirma, com investimento sequencial e tempo de construção, a regra do NPV pode não gerar equívocos significativos e o aumento da incerteza pode aumentar o investimento.

Abstract

This dissertation solves a real option model with uncertain and sequential investment, which takes time to build. The firm has an option to invest and an option to abandon the activity. Using dynamic programming and equivalent risk neutral valuation, we obtain the differential equation of the asset. The differential equation for the asset during the construction period is partial and elliptical, which required the use of numerical methods. The numerical simulation shows two important results: first, the naive NPV rule may not be misleading as the real option theory suggests; and, second, more uncertainty can reduce the price that triggers the investment.

1. Introdução	5
2. Modelo Básico de Opções Reais	7
2.1 Descrição do Modelo	7
2.2 Solução do Modelo	8
2.3 Análise dos Resultados	14
3. Investimento Sequencial e Incerto	17
3.1 Descrição do Modelo	18
3.2 Solução do Modelo	19
3.3 Resolução Numérica e Análise dos Resultados	26
4. Conclusão	30
5. Apêndice	32
5.1 Apêndice 1	32
5.2 Apêndice 2	37
5.3 Apêndice 3	38
6. Bibliografia	40

1. Introdução

Esta dissertação elabora um modelo com opções reais múltiplas, que combina estratégias de entrada e saída com investimento incerto, sequencial e com tempo de construção. O objetivo é abordar as consequências de quatro características importantes de um investimento em ativo real. Assim, assume-se que uma empresa toma a sua decisão de investir considerando que (i) valor do ativo é incerto, (ii) o custo total do investimento também é incerto, (iii) há tempo de construção e (iv) o investimento ocorre em etapas.

A incerteza sobre o valor do ativo não necessita de maiores explicações. Oscilações da demanda, dos preços e dos custos de produção afetam o fluxo de caixa gerado pelo ativo e, conseqüentemente, o seu valor.

Além da incerteza sobre o valor do ativo, o custo do investimento para desenvolver o projeto também é incerto. Como exemplo, basta notar que diversos bens de capital são cotados em dólar; assim uma empresa no Brasil deve levar em consideração o risco cambial no valor necessário para construir uma fábrica.

A possibilidade de realizar os investimentos em etapas também é uma característica comum de diversos tipos de investimentos. Alguns exemplos tradicionais são o lançamento de novos produtos, a pesquisa e desenvolvimento de novos medicamentos, exploração de recursos naturais como o petróleo, a expansão de uma planta industrial e empreendimentos imobiliários. A característica essencial do investimento sequencial é a possibilidade de se suspender ou abandonar o investimento se o valor esperado do projeto completo cai ou se o custo para completar o investimento cresce.

Outra característica importante do modelo é a inclusão de tempo de construção (*time to build*), que está presente em praticamente todos os investimentos em ativos reais. Curiosamente, o tempo de construção é incorporado em boa parte da literatura econômica teórica sobre opções reais, mas é ignorado em uma série de artigos com aplicações de opções reais.

Determinada às características do investimento, o modelo aborda a decisão de uma empresa com opção de investir em um projeto com as características acima. Adicionalmente, a empresa possui as opções reais de (i), como o investimento é sequencial, abandonar o projeto na construção e (ii) quando o ativo estiver operando, abandonar a atividade.

O objetivo principal do modelo é avaliar a decisão de investimento da empresa e como as hipóteses sobre o investimento e as diferentes opções reais do modelo afetam essa decisão.

Apesar de o mundo real geralmente apresentar conjuntamente os aspectos e as opções reais citadas acima, a literatura de opções reais geralmente considera apenas um ou outro aspecto e avaliam somente uma ou outra opção. O quadro a seguir resume as hipóteses de alguns modelos.

Tabela 1 – Resumo das Hipóteses de Artigos Seleccionados

	Volatilidade do Ativo	Volatilidade do Investimento	Investimento		Opções		
			Sequencial	Time to Build	Investir	Abandonar ou Suspender Investimento	Abandonar ou Suspender Atividade
Dixit & Pindyck 1 (1994)- Cap 6	x				x		x
Dixit & Pindyck 2 (1994)- Cap 6	x	x			x		
Dixit & Pindyck 3 (1994)- Cap 7	x				x		x
Dixit & Pindyck 4 (1994)- Cap 10	x		x	x	x	x	
Dixit & Pindyck 5 (1994)- Cap 10		x	x	x	x	x	
Medeiros (2001)	x	x		x	x		
Brach & Paxon (2001)	x		x		x	x	
Ilan & Strange (1996)	x			x	x		x
Majd & Pindyck (1987)	x		x	x	x	x	
Milne e Whalley (2000)	x		x	x	x	x	
Ilan & Strange (1998)	x		x	x	x	x	
Kellogg e Charnes (2000)	x		x		x	x	

Todos esses modelos salientam algum ponto e resultado, mas nenhum verifica a interação dos diversos aspectos e opções reais aqui levantados. No modelo desenvolvido no Capítulo 3 da dissertação todos os aspectos acima são incorporados. Portanto, enquanto a literatura trata de forma isolada os aspectos acima, o principal mérito da dissertação é desenvolver um modelo único que incorpora, além da incerteza sobre o valor do ativo e da opção de investir, investimento incerto e sequencial, tempo de construção, e as opções reais de abandonar durante a construção ou na fase operacional. Desta forma, a análise de opções reais se aproxima da realidade dos investimentos em ativos reais, que quase sempre apresentam maior complexidade e múltiplas opções.

O restante da dissertação está organizado da seguinte forma: (i) o Capítulo 2 apresenta um modelo padrão de opções reais com estratégia de entrada e saída, mas com investimento imediato, não sequencial e com custo total certo e conhecido, com o qual pretende-se apresentar a estrutura básica de modelos de opções reais, a forma de resolução e alguns fatos estilizados da literatura; (iii) o Capítulo 3 apresenta o modelo de fato da dissertação (com todas as características comentadas acima), a sua resolução, as implicações para os fatos estilizados apresentados no Capítulo 2 e as semelhanças e diferenças com a literatura; (iv) o Capítulo 4 contém as conclusões e; (v) o apêndice detalha alguns métodos utilizados nas resoluções dos modelos.

2. Modelo Básico de Opções Reais

O modelo básico considera uma empresa que possui uma opção de investir em um ativo real e a opção, uma vez operando, abandonar a atividade. O investimento é imediato, não sequencial e com custo total conhecido e certo. Caso abandone a atividade, a empresa deixa de possuir a opção de investir.

O principal objetivo de desenvolver um modelo básico é apresentar dois fatos estilizados da literatura: (i) a regra de investimento tradicional baseada no valor presente líquido (“NPV”) igual ou maior que zero é errada; (ii) e o aumento da incerteza adia o investimento. Esses dois fatos, servirão de base de comparação para os resultados do modelo desenvolvido no Capítulo 3.

2.1 Descrição do Modelo

Considere uma empresa com uma oportunidade de investimento, sem tempo de vida determinado, em um projeto para produzir um produto cuja demanda é incerta.

A firma pode optar por investir a qualquer momento e, se decidir investir, gasta um valor conhecido K na construção de um ativo que, quando estiver pronto, produz uma unidade de produto por período, perpetuamente ou até que o projeto seja abandonado, vendida pelo preço P_t . Para produzir, a empresa incorre no custo operacional C , constante no tempo, por período. Caso decida sair da atividade, incorrerá em fluxo de caixa conhecido E , também constante no tempo, que pode ser positivo, no caso do capital fixo poder ser utilizado em alguma outra atividade, ou negativo, caso haja custo de desativação, como trabalhistas ou de “sucateamento”. Uma vez que investiu e depois abandonou o projeto, considera-se que a empresa está fora do mercado e não possui mais a oportunidade de investir.

A Figura 2.1 abaixo ilustra as alternativas da empresa e o fluxo de caixa correspondente a cada alternativa

Como as vendas estão fixas em uma unidade por período, modela-se a incerteza da receita assumindo que o preço do produto segue um movimento browniano geométrico (MBG),

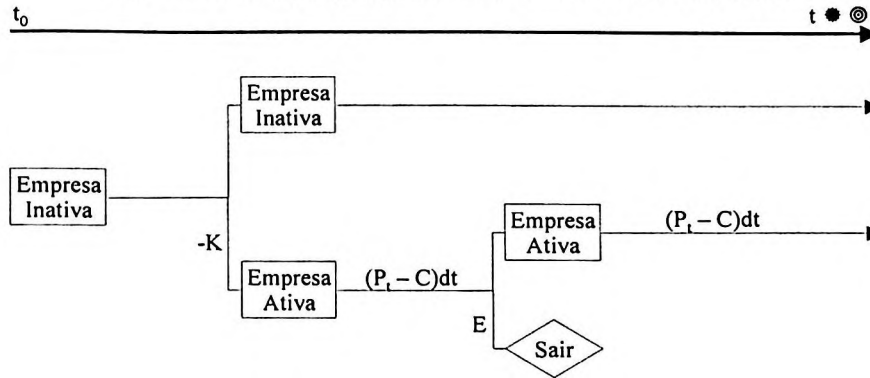
$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad (2.1)$$

no qual dW_t é o incremento de um processo de Weiner.

Em determinado momento no tempo, a firma está em um de três estágios: inativa, ativa ou fora do mercado. No primeiro estágio a empresa possui a opção de realizar o investimento imediatamente ou de esperar, e quando ativa, a opção de abandonar o projeto.

Figura 2.1 – Ilustração do Problema da Empresa

O problema é contínuo e as decisões de investir e sair ocorrem em todo t . Para efeito apenas ilustrativo escolheu-se um t qualquer para marcar os momentos das decisões.



2.2 Solução do Modelo

Antes de resolver o modelo é importante especificar os diferentes valores presentes no mesmo. Primeiro há o valor da empresa, denominado V . Como a análise a seguir mostra, V segue dinâmica diferente se a empresa se encontra inativa ou ativa. Por isso V_0 e V_1 representam, respectivamente, o valor da empresa inativa e o da empresa ativa. Vale ressaltar ainda que, após abandonar a atividade, a empresa vale o fluxo de caixa decorrente do abandono, isto é, E .

Quando inativa, a empresa não possui nenhuma atividade, somente uma oportunidade de investir. O valor da empresa neste estado é o valor da opção de investir que é composto de dois valores: o valor intrínseco do ativo que a empresa adquire ao investir, que é o valor da empresa ativa, e o valor da opção de esperar, denominada F_0 .

Quando ativa a empresa possui um ativo que gera um fluxo de caixa $P_t - C$ por período, cujo valor intrínseco é denominado X_t , e uma opção de abandonar a atividade. A opção de abandonar é denominada F_1 .

As equações a seguir explicitam as relações entre esses valores¹:

$$V_0 = V_1 + F_0 \quad (2.2)$$

$$V_1 = X_t + F_1 \quad (2.3)$$

¹ Por enquanto, omite-se os argumentos das funções V_0 , V_1 , F_0 e F_1 por comodidade. A seguir, ficará claro que estas dependem diretamente de P_t , e indiretamente do tempo, via P_t .

Na analogia com opções financeiras, V_0 pode ser visto como uma opção de compra americana, com *payoff* igual a $\max(V_1 - K, 0)$. A opção de esperar F_0 não possui uma analogia direta com opções financeiras e, como ver-se-á na análise dos resultados, deve ser encarada como o valor de diferir o investimento. Por último, a opção F_1 é análoga a uma opção de venda americana com *payoff* $\max(E - X_t, 0)$.

A resolução do modelo consiste em encontrar os valores X_t , F_0 , F_1 , V_0 e V_1 . Para tanto existem duas estratégias. Na primeira, calcula-se X_t como função de P_t , identifica-se o processo estocástico de X_t , obtém-se F_0 e F_1 em função de X_t e, por último, soma-se as partes para obter V_0 e V_1 . Outra alternativa é calcular diretamente V_0 e V_1 como funções de P_t e identificar nestas funções os valores de X_t , F_0 e F_1 .

Na primeira alternativa a analogia com opções financeiras é mais explícita, porém a segunda é mais direta e necessita de menos álgebra. Portanto, neste trabalho, opta-se por esse caminho.

Além de resolver o problema para V_0 e V_1 , é necessário também encontrar os valores de P_t onde é ótimo exercer as opções; isto é, P_H , acima do qual é ótimo investir no projeto, e P_L , abaixo do qual é ótimo abandonar o projeto.

Empresa Inativa: $V_0(P_t)$

Para obter $V_0(P_t)$ segue-se uma estratégia de avaliação neutra ao risco: primeiro altera-se a medida de probabilidade do processo estocástico (2.1) para uma medida de probabilidade equivalente neutra ao risco e depois assume-se que as decisões de investir são tomadas por uma firma neutra ao risco.

O processo (2.1) com medida de probabilidade equivalente neutra ao risco é

$$dP_t = (\alpha - \phi \sigma) P_t dt + \sigma P_t dW_t^* \quad (2.4)$$

no qual dW_t^* indica que o processo é neutro ao risco e ϕ é o preço do risco - excesso de retorno médio por unidade de desvio padrão - de P_t ou de uma carteira de ativos que replica exatamente o fator de risco de P_t .

Vale destacar ainda que se P_t não é um ativo transacionado nada garante que a sua taxa de retorno esperada (α em (2.1)) seja igual à taxa de equilíbrio de mercado (ver McDolnad e Sigel (1984 e 1985) e Trigeorgis (1999 – Capítulo3)). Assim, define-se δ como uma espécie de dividendo contínuo, ou *convenience yield*, que mede a diferença entre os retornos esperados de P_t e o seu retorno de equilíbrio de mercado, dado por

$$\mu = r + \phi \sigma \quad (2.5)$$

Assim,

$$\delta = \mu - \alpha \quad (2.6)$$

Aqui, assume-se que δ é positivo. Note ainda que de (2.5) e (2.6), $\alpha - \phi \sigma = r - \delta$, que substituído em (2.4), gera a forma mais usual de se apresentar processos na medida neutra ao risco

$$dP_t = (r - \delta) P_t dt + \sigma P_t dW_t^* \quad (2.7)$$

Feita a transformação do processo estocástico, pode-se assumir que V_0 é definido pela decisão ótima de uma empresa neutra ao risco, que deve decidir se continua inativa ou se realiza o investimento K e passa a ser uma empresa ativa. Esse problema é formalizado por

$$V_0(P_t) = \text{Max } E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P_t + dP_t); V_1(P_t) - K \} \quad (2.8)$$

O primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de permanecer inativa; como não há fluxo imediato associado a essa decisão o retorno é a variação esperada do valor da empresa. O segundo termo é o valor da empresa ativa menos o investimento necessário.

Para o intervalo de preços $P_t < P_H$, no qual a firma permanece inativa

$$V_0(P) = E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P_t + dP_t) \} \quad (2.9)$$

Expandindo o lado direito de (2.9) através do Lema de Itô, substituindo dP_t por (2.4), e aplicando o operador esperança²

$$V_0(P) = (1 - rdt) E_0 \left\{ V_0(P) + \frac{\partial V_0}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2} (dP)^2 \right\}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial P^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_0}{\partial P} - r V_0(P) = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) é a equação diferencial que $V_0(P)$ deve obedecer enquanto $P < P_H$. A sua solução geral é dada por

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (2.11)$$

² Para simplificar, sempre que o contexto for claro, omitti-se os argumentos das funções e a dependência das variáveis estados no tempo.

na qual A_1 e A_2 são coeficientes a determinar e $\beta_2 < 0 < 1 < \beta_1$ são as raízes da forma quadrática

$$1/2 \sigma^2 \beta(\beta-1) + (r - \delta) \beta - r = 0 \quad (2.12)$$

dadas por

$$\beta = 1/2 - (\alpha_p - \phi \sigma) / \sigma^2 \pm \sqrt{((\alpha - \phi \sigma) / \sigma^2 - 1/2)^2 + 2 r \sigma^2} \quad (2.13)$$

Denomine (2.12) como uma função de β , $\varphi(\beta)$. Como, $\varphi''(\beta) = \sigma^2/2 > 0$, φ é uma função convexa de β que, por ser de segundo grau, possui as duas raízes dadas por (2.13). Note que $\varphi(0) = -r < 0$ e $\varphi(1) = (\alpha - \phi \sigma) - r = -\delta < 0$ (onde $\delta = \mu - \alpha > 0$). Assim, φ possui uma raiz negativa e outra maior do que 1. Denomine β_1 a raiz positiva e β_2 a negativa.

A equação (2.10) obedece as seguintes condições de fronteira

$$P \rightarrow 0 \Rightarrow V_0(P) \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

$$V_0(P_H) = V_1(P_H) - K \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial V_0(P_H)}{\partial P} = \frac{\partial V_1(P_H)}{\partial P} \quad (2.16)$$

A condição (2.14) afirma que quando P se aproxima de zero a probabilidade de no futuro superar P_H é cada vez menor. Consequentemente, a empresa nunca realizaria o investimento e o valor da oportunidade de investir é zero.

As equações (2.15) e (2.16) são, respectivamente, as condições de *value matching* e *smooth pasting* adequadas para o problema. Essas condições aparecem em todos os modelos de opções reais. Ambas podem ser justificadas através de argumentos econômicos. O Apêndice 3 apresenta uma demonstração não rigorosa para ambas as condições.

Como $\beta_2 < 0$, a única forma de garantir que (2.11) tenda a zero é fazendo $A_2 = 0$. Assim a solução passa a ser

$$V_0(P) = A_1 P^{\beta_1} \quad (2.17)$$

As condições (2.15) e (2.16) implicam que A_1 e P_H são obtidos em conjunto com a solução de $V_1(P)$. Os parágrafos seguintes tratam desse problema.

Empresa Ativa: $V_1(P)$

A solução de $V_1(P)$ segue o roteiro realizado acima. Primeiro define-se o processo neutro ao risco e depois se considera a decisão ótima de uma empresa neutra ao risco.

O problema da empresa ativa é decidir entre permanecer operando ou abandonar a atividade.

$$V_1(P) = \text{Max } E_0\{ (P-C)dt + e^{-r dt} V_1 (P + dP); E\} \quad (2.18)$$

O primeiro termo representa a alternativa de permanecer ativa: além da variação do esperada do valor da empresa, $e^{-r dt} V_1(P + dP)$, agora também há o fluxo $P - C$ por período. E é o valor da empresa caso abandone a atividade.

Para o intervalo de preços $P > P_L$, no qual a firma permanece ativa

$$V_1(P) = E_0\{(P-C)dt + e^{-r dt} V_0 (P + dP)\} \quad (2.19)$$

Como no caso da empresa inativa, a expansão de (2.19) gera a equação diferencial que a empresa deve atender enquanto permanecer ativa.

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial P^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_1}{\partial P} - r V_1 + P - C = 0 \quad (2.20)$$

Ao contrário de (2.10), (2.20) é uma equação diferencial não homogênea. A solução da parte homogênea possui a mesma forma de (2.11) mas com coeficientes distintos de A_1 e A_2 .

A solução particular é $P/\delta - C/r$, que possui uma interpretação econômica imediata: é o valor da empresa supondo que a mesma nunca exercerá a sua opção de abandonar o projeto. Basta notar que $P/\delta - C/r$ é a solução de $\int_0^{\infty} (P e^{(\alpha-\phi\sigma)t} - C) e^{-rt} dt$

Assim a solução geral de (2.20) é

$$V_1(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad (2.21)$$

na qual B_1 e B_2 são coeficientes a determinar e $\beta_2 < 0 < 1 < \beta_1$ são dados por (2.13).

A solução está sujeita a

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow F_1(P) \rightarrow 0 \Rightarrow V_1(P) \rightarrow X \quad (2.22)$$

$$V_1(P_L) = E \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial V_1(P_L)}{\partial P} = 0 \quad (2.24)$$

A condição (2.22) afirma que quanto maior P menor a chance da empresa abandonar a atividade. Neste caso, a opção de abandonar tende a zero e o valor da empresa tende ao valor do intrínseco do ativo ($X = P/\delta - C/r$). As equações (2.22) e (2.23) são as condições de *value matching* e *smooth pasting* adequadas para a fronteira P_L onde a empresa é indiferente entre permanecer ativa e abandonar a atividade.

Como $\beta_1 > 0$, (2.22) implica que $B_1 = 0$. Assim

$$V_1(P) = B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad (2.25)$$

Neste ponto, é importante identificar os componentes de (2.25) com os da equação (2.3). O valor da empresa ativa é composto do valor da opção de abandonar a atividade e do valor intrínseco do ativo que gera o fluxo de caixa $P - C$ a cada unidade de tempo. Como visto anteriormente $P/\delta - C/r$ é o valor da empresa caso esta operasse para sempre. Segue que esse só pode ser o valor do ativo em si, isto é

$$X = P/\delta - C/r \quad (2.26)$$

e portanto

$$F_1(P) = B_2 P^{\beta_2} \quad (2.27)$$

Solução

Substituindo (2.17) e (2.25) nas equações (2.15), (2.16), (2.23) e (2.24),

$$-A_1 P_H^{\beta_1} + B_2 P_H^{\beta_2} + P_H / \delta - C / r = K \quad (2.28)$$

$$-A_1 \beta_1 P_H^{\beta_1 - 1} + B_2 \beta_2 P_H^{\beta_2 - 1} + 1 / \delta = 0 \quad (2.29)$$

$$B_2 P_L^{\beta_2} + P_L / \delta - C / r = E \quad (2.30)$$

$$B_2 \beta_2 P_L^{\beta_2 - 1} + 1 / \delta = 0 \quad (2.31)$$

Essas quatro equações formam um sistema não linear que determina os valores dos coeficientes A_1 , B_2 , P_H e P_L . Alguns resultados podem ser obtidos analiticamente, mas a solução completa e os resultados mais interessantes necessitam de simulação numérica.

2.3 Análise dos Resultados

O principal fato estilizado da teoria de opções reais envolve a tradicional regra de investimento do NPV: realiza-se o investimento se o valor presente do fluxo de caixa futuro, descontando a uma taxa apropriada, for igual ou superior a zero.

Quando se considera as opções reais, a regra de decisão da empresa muda. Na presença de incerteza, ao investir, a empresa abdica da oportunidade de aguardar novas informações sobre o projeto. Mais ainda, a empresa deixa de ter um ativo: a opção de investir. Este custo de oportunidade deve ser mensurado e incorporado na avaliação do custo do investimento.

Na linguagem e nomenclatura desenvolvida acima, o NPV do projeto é $V_1 - K$ e o valor da opção de investir é V_0 . Assim, a nova regra de investimento seria dada por,

$$NPV - V_0 = 0 \quad (2.32)$$

Analogamente, a regra pode ser apresentada em função do valor de se esperar por novas informações, que é dado por F_0 . Desta forma, a empresa somente investe quando o valor de esperar novas informações é zero, ou seja,

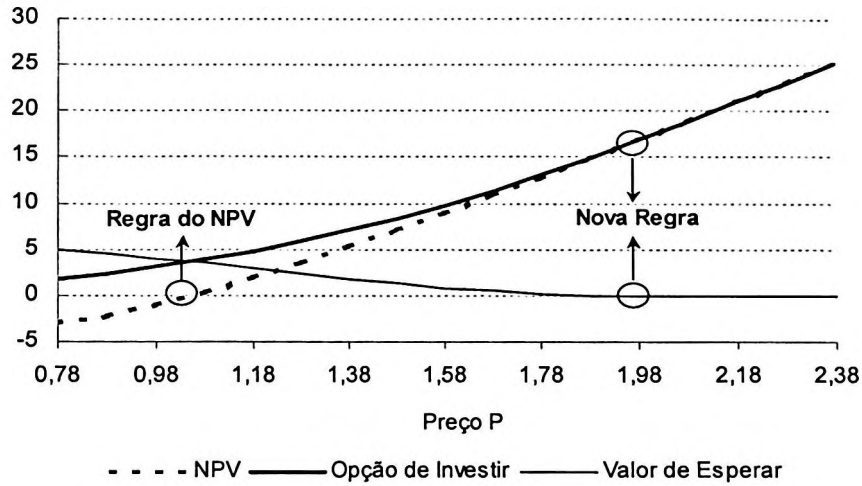
$$F_0 = 0 \quad (2.33)$$

A Figura 2.2 abaixo contém o valor do projeto calculado pelo NPV e o valor da empresa inativa. Pela regra tradicional do NPV, o investimento seria feito com P igual a 1,05. No novo modelo, o investimento ocorre apenas em $P_H = 1,98$. É importante ressaltar que a simulação foi feita com $\sigma = 0,2$, o que mostra que mesmo níveis médios de incerteza, o valor de esperar e o aumento no NPV mínimo são significativos.

A racionalidade econômica que suporta o resultado é simples. O investimento que a empresa faz é irreversível. Com incerteza, o retorno futuro sobre esse investimento pode não ser o desejado. Assim, vale a pena adiar a decisão de investir para evitar possuir o ativo em um cenário de preço ruim. Portanto, a empresa exige uma “folga” no preço do produto, que lhe proporcione um lucro inicial extraordinário, para compensar a possibilidade de prejuízos no futuro.

Figura 2.2

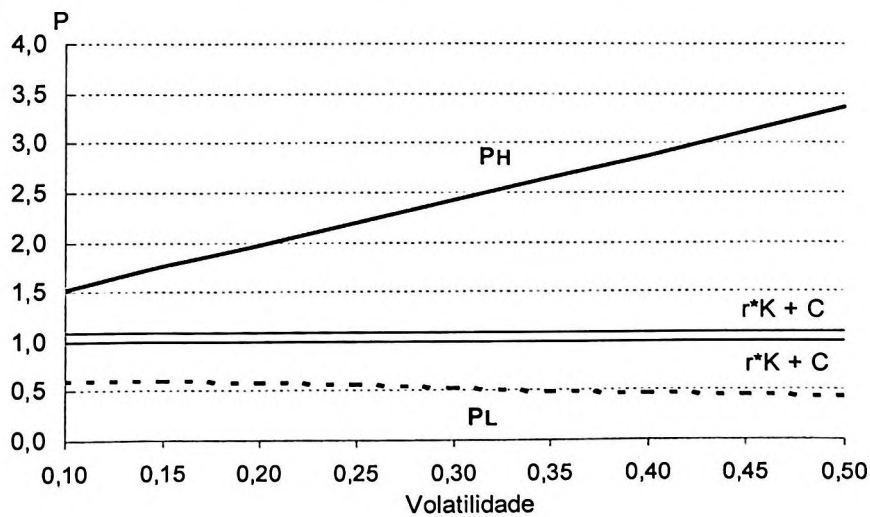
Parâmetros: $\sigma = 0,2$; $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$; $C = 1$; $E = 0$.



Outra forma de verificar o efeito da incerteza e das opções reais é comparar o preço que aciona a decisão de investir no modelo com a clássica regra para investimentos de Marshall, que afirma que a empresa deve investir quando $P \geq rK + C$. Analogamente, por essa regra, a empresa deveria abandonar a atividade quando $P \leq rE + C$. No modelo, os níveis de preço que levam a empresa a investir ou abandonar a atividade são dados respectivamente por P_H e P_L . A Figura 2.3 mostra esses valores e os da regra de Marshall.

Figura 2.3

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$; $C = 1$; $E = 0$.



A Figura 2.3 também ilustra outro fato estilizado da literatura de opções reais: o aumento da volatilidade aumenta o efeito das opções reais. Isto pode ser visto principalmente pela diferença entre o P_H e o preço da regra de Marshall: quanto maior a volatilidade maior é o primeiro em relação ao segundo. Note que este fato também implica que aumento da incerteza adia o investimento. A lógica econômica novamente é simples: maior incerteza torna mais valiosa a opção de esperar novas informações para evitar cenários desfavoráveis e, portanto, posterga-se o investimento.

Para o preço limite da decisão de saída, o efeito da incerteza não é tão acentuado, mas, novamente, o aumento da incerteza acentua o efeito das opções reais.

3. Investimento Sequencial e Incerto

No modelo do capítulo anterior o investimento possui três características importantes: o valor total do investimento é conhecido e constante, a construção do ativo é imediata e o desembolso de caixa ocorre uma única vez. Neste capítulo, estas três hipóteses são alteradas.

Na literatura, alguns artigos incorporam incerteza dos investimentos junto com a incerteza do valor do projeto. Dixit e Pindyck (1994 – capítulo 6) constroem um modelo no qual o investimento segue um movimento browniano geométrico (MBG) e estudam a decisão de entrada de uma empresa. Medeiros (2001) aplica um modelo de opções reais ao mercado imobiliário residencial no qual o custo do investimento também segue um MBG. Brach e Paxson (2001), em um modelo de opções reais para estimar o valor de um projeto de P&D de um novo medicamento, consideram que o gasto total com a pesquisa é conhecido, mas apontam que isso é uma abstração muito forte da realidade.

Brach e Paxson (2001) argumentam ainda sobre importância de se distinguir as incertezas do custo do investimento em exógenas e técnicas. No primeiro grupo incluem-se as variações nos custos do trabalho, dos equipamentos e de outros insumos envolvidos em um projeto; no segundo, entram as dificuldades para a realização de um projeto que somente são descobertas à medida que o investimento ocorre. Por exemplo, o tempo total de construção pode prolongar-se além do esperado, o cumprimento de regulação governamental pode ser maior do que as previamente conhecidas e o investimento pode revelar dificuldades inesperadas em um programa de P&D.

A segunda alteração no modelo envolve o que na literatura é conhecido como *time to build*, ou simplesmente tempo de construção, que incorpora nos modelos o intervalo de tempo que sempre existe entre a decisão de realizar um projeto e o momento em que esse começa a gerar um fluxo de caixa. Em alguns casos o tempo de construção de uma nova planta industrial pode ser muito significativo, como nas indústrias de papel e celulose, na siderurgia e em hidroelétricas. O desenvolvimento de novos produtos também pode ser um processo demorado. Investimentos de *venture capital* são um processo demorado, com diversas etapas, onde o momento dos primeiros desembolsos difere significativamente do início da geração de caixa. Em todos esses casos, o *time to build* é importante e deve ser considerado.

A terceira alteração reconhece que além de tomar tempo, em muitos casos, as decisões de investimentos são tomadas em diversas etapas. Por exemplo, decidir investir em um programa de P&D e investir em uma planta industrial para produzir o produto desenvolvido são decisões distintas e tomadas em momentos diferentes. O exercício de uma opção que dá direito a um programa de P&D tem como contrapartida não um ativo, mas sim uma outra opção que dá direito a construção da fábrica.

Em especial, investimentos de *venture capital* são essencialmente sequenciais. Como envolvem empresas novas, com produtos novos, que precisam ainda ser desenvolvidos e

testados no mercado, os investimentos ocorrem de forma gradativa e apenas à medida que o desenvolvimento do produto e os testes de mercado se mostrem favoráveis.

Brach e Paxson (2001), Kellogg e Charnes (2000), Milne e Whalley e Ilan e Strange (1998) desenvolvem modelos nos quais os investimentos ocorrem em várias etapas. Porém, em nenhum deles há incerteza quanto ao custo do investimento. O modelo de Dixit e Pindyck (1994 – capítulo 10) incorpora o investimento sequencial e incerto, em uma modelagem de investimento contínuo da mesma forma adotada aqui.

Por último, vale ressaltar mais uma vez que o principal mérito do modelo desenvolvido neste capítulo é incorporar investimento incerto e sequencial, tempo de construção, e as opções reais de abandonar durante a construção ou na fase operacional, que são tratados isoladamente em diversos trabalhos, em um mesmo modelo.

3.1 Descrição do Modelo

Considere uma empresa com uma oportunidade específica de investimento, sem tempo de vida determinado, em um projeto para produzir uma unidade de um produto com preço de venda incerto. A seguir, por facilidade, reescreve-se o processo do preço

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad (3.1)$$

A qualquer momento, a firma pode iniciar a investir na “construção”³ do ativo. O custo inicialmente estimado da construção é dado por K_0 . O investimento não ocorre de uma única vez, mas seqüencialmente, através de um gasto de I unidades monetárias, constante no tempo, por período.

Ao longo da construção, o montante total do investimento necessário para concluir a obra é desconhecido e segue um processo estocástico dado pela equação

$$dK_t = -I dt + v (I K_t)^{1/2} dZ_t \quad (3.2)$$

na qual, K_t é o valor do investimento que falta para acabar a construção do ativo, I é o investimento por unidade de tempo e dZ_t é um processo de Wiener independente do processo dW_t . Note que dZ_t captura a incerteza técnica do investimento porque I pertence ao seu coeficiente. Assim suas realizações só afetam K_t enquanto a empresa investir.

Para incorporar tempo de construção no modelo, assume-se que o valor inicial esperado do da construção é maior do que o investimento por período, isto é, $K_0 > I$.

Uma vez tomada a decisão de iniciar o projeto, a firma pode, a qualquer momento, abandonar a construção em troca de um fluxo de caixa conhecido E_1 , que pode ser positivo ou negativo.

³ A “construção” pode significar efetivamente um gasto com obras, ou gastos com P&D, pesquisas de mercado, etc.

Nos modelos de investimento sequencial da literatura, há um número específico de etapas onde a firma decide se continua ou não com o projeto. Aqui, essa decisão ocorre continuamente. Assim, pode-se interpretar que cada Real investido no projeto dá direito, ou a opção, da empresa investir outro Real no instante seguinte.

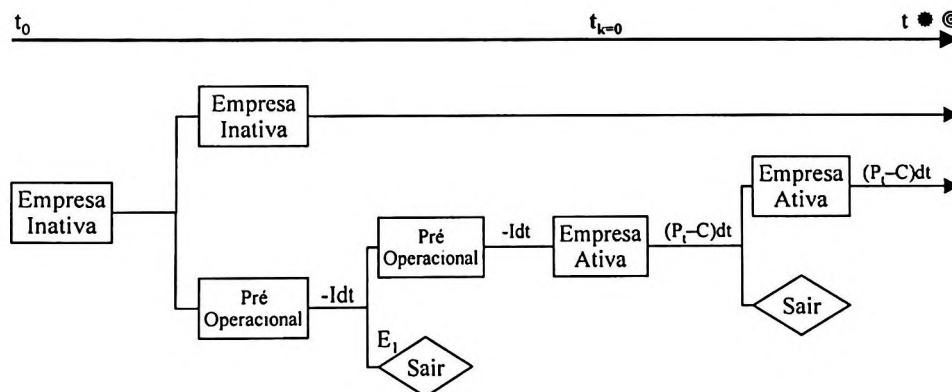
Quando $K_t = 0$, a construção terminou e a empresa possui um ativo que produz uma unidade do produto por período, vendida ao preço P_t . Para tanto, a empresa incorre no custo C , constante no tempo, por período. Caso decida abandonar a atividade, incorrerá em fluxo de caixa conhecido E_2 , que, como E_1 , pode ser positivo ou negativo.

Uma vez que investiu, completou a construção do ativo e depois o abandonou, considera-se que a empresa está fora do mercado e não possui mais a oportunidade de investir. O mesmo vale se a firma abandonar o projeto durante a fase de construção.

A Figura 3.1 abaixo ilustra as alternativas da empresa e o fluxo de caixa correspondente à cada alternativa

Figura 3.1 – Ilustração do Problema da Empresa

O problema é contínuo e as decisões de investir e sair ocorrem em todo t . Para efeito apenas ilustrativo escolheu-se um t qualquer para marcar os momentos das decisões.



3.2 Solução do Modelo

No modelo descrito acima, há quatro estados possíveis para a empresa: inativa, pré-operacional, ativa ou fora do mercado. Os valores da empresa nas três primeiras fases são denominados, respectivamente, V_0 , V_1 e V_2 . Caso abandone durante a construção, a empresa vale E_1 e, após a construção, E_2 .

Esses valores são compostos do valor do ativo propriamente dito e das diferentes opções que a empresa possui. As opções de diferir o investimento, abandonar o projeto durante a fase de investimento e de abandonar o projeto quando este estiver operando estão embutidas, respectivamente, em V_0 , V_1 e V_2 . Os valores destas opções são calculados em

um momento posterior. Primeiro, calcula-se os valores V_0 , V_1 e V_2 como funções das variáveis estados P e K .

Novamente, além de obter esses valores, é necessário encontrar os valores de P onde é ótimo exercer as opções; isto é, P_H , acima do qual é ótimo investir no projeto, P_M , abaixo do qual é ótimo abandonar o projeto durante o período de investimento e P_L , abaixo do qual é ótimo abandonar o projeto em operação.

A estratégia de resolução segue a avaliação neutra ao risco do Capítulo 2: primeiro transforma-se os processos estocásticos (3.1) e (3.2) em processos com medidas de probabilidades equivalentes neutras ao risco e depois se assume que as decisões de investir são tomadas por uma firma neutra ao risco.

Os processos (3.1) e (3.2) com medida de probabilidade equivalente neutra ao risco são dados por

$$dP = (\alpha - \phi \sigma) P dt + \sigma_1 P dW^* \quad (3.3)$$

$$dK = -I dt + v (I K)^{1/2} dZ \quad (3.4)$$

onde, $\phi \sigma$ é o prêmio de risco associado a dW . Note que, no caso de dK , assume-se que a incerteza técnica dZ não é correlacionada com a carteira de mercado e, portanto, não possui risco sistêmico. Assim, não há prêmio associado a dZ e o processo estocástico de dK permanece exatamente o mesmo.

Vale destacar novamente que, se P não é um preço observado, nada garante que a sua taxa de retorno esperado seja igual à de equilíbrio de mercado. Assim, define-se δ_p como uma espécie de dividendo contínuo que mede a diferenças entre o retorno esperado de P e o seu retorno de equilíbrio de mercado, dado por, $\mu_p = r + \phi \sigma$. Portanto, $\delta_p = \mu_p - \alpha$. Aqui se assume que δ_p é positivo. Segue que (3.3) pode ser substituído por

$$dP = (r - \delta_p) P dt + \sigma P dW^* \quad (3.5)$$

Uma vez definidos os processos estocásticos em medida equivalente neutra ao risco, os valores V_0 , V_1 e V_2 são definidos pelas decisões ótimas de uma empresa neutra ao risco.

Empresa Inativa: $V_0(P, K)$

V_0 é definido pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre permanecer inativa ou iniciar o investimento.

$$V_0(P, K) = \text{Max } E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P + dP, K + dK); V_1(P, K) \} \quad (3.6)$$

O primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de permanecer inativa; como não há fluxo imediato associado a essa decisão o único ganho é a variação esperada do valor de empresa.

Para o intervalo de preços $P < P_H$, a firma permanece inativa e

$$V_0(P,K) = E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P + dP, K + dK) \} \quad (3.7)$$

Expandido a expressão entre as chaves através do uso do Lema de Itô, substituindo as equações (3.3) e (3.4), com $I = 0$ pois a empresa está inativa, e omitindo os argumentos das funções e a dependência das variáveis estado no tempo por comodidade

$$V_0 = E_0 \left\{ (1 - r dt) \left[V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} (dP)^2 + \frac{\partial V_0}{\partial K} dK + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial K)^2} (dK)^2 \right] \right\}$$

$$V_0 = (1 - r dt) \left\{ V_0 + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_0}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} \right\}$$

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} + (\alpha - \theta \sigma) P \frac{\partial V_0}{\partial P} - r V_0 \quad (3.8)$$

V_0 atende (3.8) sujeita as seguintes condições de contorno

$$V_0(0,K) = 0 \quad (3.9)$$

$$V_0(P_H, K) = V_1(P_H, K) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial V_0(P_H, K)}{\partial P} = \frac{\partial V_1(P_H, K)}{\partial P} \quad (3.11)$$

A condição (3.9) afirma que para P igual 0, o valor da oportunidade de investir, V_0 , é zero. (3.10) e (3.11) são as condições de *value matching* e *smooth pasting*.

A equação (3.8) é uma equação diferencial ordinária idêntica a equação (2.10) e com solução geral dado por

$$V_0(P,K) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (3.12)$$

na qual A_1 e A_2 são coeficientes a se determinar e β_1 e β_2 são as raízes da forma quadrática

$$1/2 \sigma^2 \beta(\beta-1) + (\alpha - \phi \sigma) \beta - r = 0 \quad (3.13)$$

dadas por

$$\beta = 1/2 - (\alpha - \phi \sigma) / \sigma^2 \pm \sqrt{((\alpha - \phi \sigma) / \sigma^2 - 1/2)^2 + 2r / \sigma^2} \quad (3.14)$$

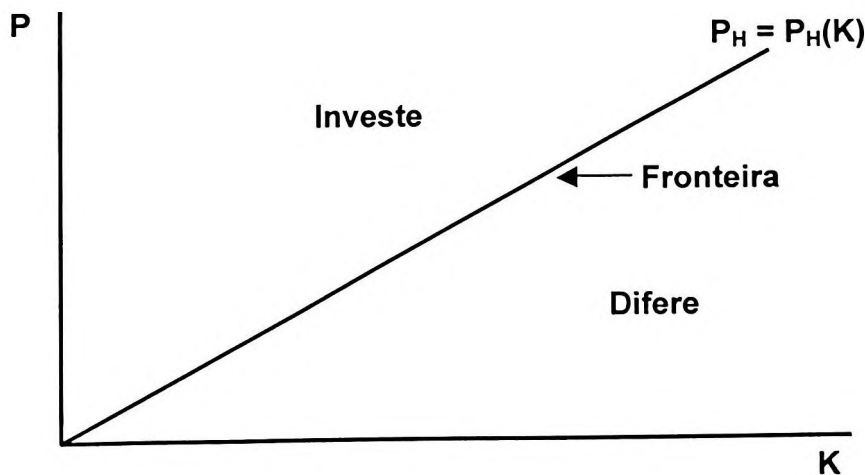
A equação (3.14) é idêntica a equação (2.13). Assim, como naquele caso, $\beta_2 < 0 < 1 < \beta_1$. Com $\beta_2 < 0$, (3.9) implica que $A_2 = 0$. Portanto $V_0(P,K)$ é dado por

$$V_0(P,K) = A_1 P^{\beta_1} \quad (3.15)$$

À primeira vista, a função (3.15) surpreende pois não possui K como argumento. Mas a constante A_1 , determinada pelas condições *value matching* e *smooth pasting*, depende de K . Adicionalmente, como será visto na resolução completa do modelo, P_H também depende de K .

Intuitivamente, espera-se que o investimento será diferido com P baixo ou K alto. Essa intuição levada ao extremo origina a condição (3.9) e a dependência de P_H em K . A Figura 3.2 ilustra esse fato.

Figura 3.2
Investimento com Incerteza de Preço e Custo do Investimento



Empresa Pré Operacional: $V_1(P,K)$

V_1 é definido pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre continuar a investir na construção do ativo ou abandonar o investimento:

$$V_1(P,K) = \text{Max } E_0 \{ -I dt + e^{-r dt} V_1(P + dP, K + dK); E_1 \} \quad (3.16)$$

O primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de continuar o investimento. O retorno da empresa é dado pelo fluxo de caixa imediato para continuar a construção, $-I dt$, e a valorização instantânea do valor da empresa. O segundo termo é o valor da empresa caso abandone o projeto.

Para o intervalo de preços $P > P_M$ a empresa continua investindo. Neste intervalo,

$$V_1(P,K) = E_0 \{ -I dt + e^{-r dt} V_1(P + dP, K + dK) \} \quad (3.17)$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, com a diferença que agora $I \neq 0$,

$$\begin{aligned} V_1 &= E_0 \left\{ -I dt + (1-r dt) \left[V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} (dP)^2 + \frac{\partial V_1}{\partial K} dK \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} (dK)^2 \right] \right\} \\ V_1 &= -I dt + (1-r dt) \left\{ V_1 + [(\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_1}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v^2 I K \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} \right] dt \right\} \\ 0 &= \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} + \frac{1}{2} v^2 I K \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_1}{\partial P} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} - r V_1 - I \end{aligned} \quad (3.18)$$

V_1 é a solução da equação diferencial parcial (3.18) sujeito à

$$V_1(P,0) = V_2(P) \quad (3.19)$$

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(P, K) = V_2(P) e^{-rK/I} - \int_0^{K/I} I e^{-rt} dt \quad (3.20)$$

$$V_1(P_M, K) = E_1 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial P} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial K} = 0 \quad (3.23)$$

A condição (3.19) afirma que quando a construção estiver concluída ($K=0$), a empresa operacional possui o mesmo valor que a empresa ativa. (3.20) estabelece que, com P alto, dificilmente a construção será abandonada e, conseqüentemente, o valor da empresa pré-operacional é o valor presente da empresa ativa menos o montante que falta investir.

As condições (3.21), (3.22) e (3.23) são as condições de *value matching* e *smooth pasting*. Vale ressaltar também que, como P_H , P_M depende de K .

Por último, a equação (3,18) é uma equação diferencial parcial com fronteira livre, mais precisamente uma equação elíptica ($0 < 1/4 \sigma^2 P^2 v^2 IK$), que demanda a utilização de métodos numéricos.

Empresa Ativa: $V_2(P)$

O valor da empresa ativa é definido pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre continuar a operar ou abandonar a atividade. A empresa ativa não necessita realizar mais investimentos, assim o seu valor depende apenas de P :

$$V_2(P) = \text{Max } E_0\{ (P - C) dt + e^{-r dt} V_2(P + dP); E_2\} \quad (3.24)$$

Na equação acima, o primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de continuar a operar, o que gera um fluxo de caixa imediato, $P-C$, e a variação instantânea do valor da empresa. O segundo termo é o fluxo da caixa associado ao abandono da atividade.

Existe um preço P_L , que é parte da solução do modelo, abaixo do qual a empresa prefere se retirar da atividade. Portanto, no intervalo de preços $P_L < P$ a empresa permanece ativa e seu valor é o dado pelo primeiro termo da equação (3.24)

$$V_2(P) = E_0\{ (P - C) dt + e^{-r dt} V_2(P + dP)\} \quad (3.25)$$

Expandindo a expressão $V_2(P_t + dP_t)$ através do uso do Lema de Itô e do processo (3.3), aplicando o operador esperança, e omitindo os argumentos das funções

$$V_2 = E_0 \left\{ (P - C) dt + (1 - r dt) \left[V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} (dP)^2 \right] \right\}$$

$$V_2 = (P - C) dt + (1 - r dt) \left[V_2 + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_2}{\partial P} dt + \sigma^2 P^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} dt \right]$$

$$\sigma^2 P^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_2}{\partial P} - r V_2 + P - C = 0 \quad (3.26)$$

A equação (3.26) está sujeita à

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_2(P) \rightarrow X \quad (3.27)$$

$$V_2(P_L) = E_2 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial V_2(P_L)}{\partial P} = 0 \quad (3.29)$$

As equações (3.26) até (3.29) geram um problema idêntico ao formado pelas equações (2.21) até (2.24) do Capítulo 2 e possuem a mesma solução, isto é,

$$V_2(P) = B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad (3.30)$$

O valor da empresa divide-se no valor do ativo propriamente dito, X, e no valor da opção de abandonar, F₂; sendo que,

$$X = P/\delta - C/r \quad (3.31)$$

$$F_2(P) = B_2 P^{\beta_2} \quad (3.32)$$

Substituindo (3.30) em (3.28) e (3.29) obtêm-se um sistema de duas equações cuja resolução fornece as expressões para as incógnitas B₂ e P_L

$$B_2 P_L^{\beta_2} + P/\delta - C/r = E_2 \quad (3.33)$$

$$\beta_2 B_2 P_L^{\beta_2 - 1} + 1/\delta = 0 \quad (3.34)$$

De (3.33) e (3.34) resultam que

$$P_L = \beta_2 / (\beta_2 - 1) * \delta / r * (C + E_2 r) \quad (3.35)$$

$$B_2 P^{\beta_2} = (P / P_L)^{\beta_2} (C + E_2 r) / ((1-\beta_2) r) \quad (3.36)$$

3.3 Resolução Numérica e Análise dos Resultados

A solução completa do modelo é obtida em ordem inversa: primeiro resolve-se o problema da empresa ativa, depois da pré-operacional e, por último, o da inativa.

As equações (3.35), (3.36) e (3.30) são a solução analítica do problema da empresa ativa. A solução para o problema da empresa pré-operacional resume-se a resolver numericamente a equação diferencial (3.18) através de um método de diferenças finitas. Por último, (3.15) é a solução analítica da empresa inativa e as condições (3.10) e (3.11) determinam A_1 e P_H . O Apêndice descreve em detalhes as resoluções das equações (3.18) e (3.15).

A primeira pergunta a se responder é qual o efeito das hipóteses do modelo sobre as conclusões do Capítulo 2. Há duas conclusões importantes naquele capítulo: (i) opções reais mudam a regra de decisão de investimento e (ii) quanto maior a incerteza maior a distância entre a regra do NPV e a nova regra. Como a Figura 3.3 abaixo mostra, as novas hipóteses revertem parte destes resultados.

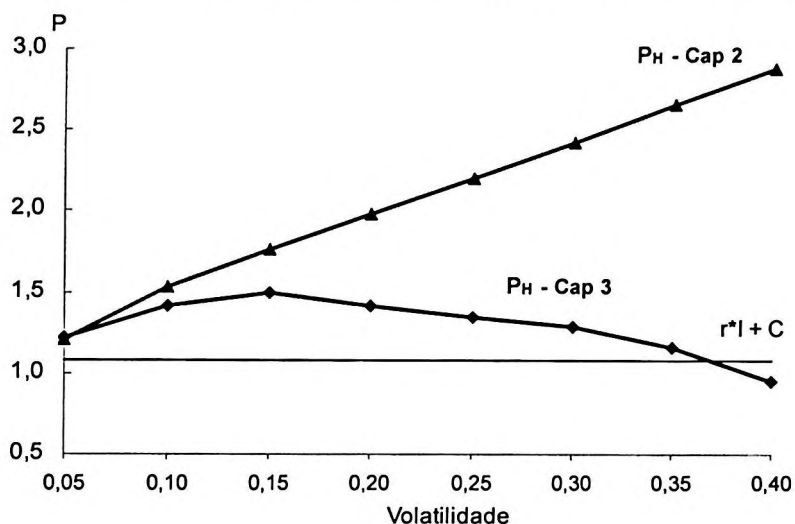
Com as mesmas premissas do Capítulo 2, isto é, que $\sigma = 0,2$, $r = 0,02$, $\phi = 0,2$, $\alpha = 0,02$, $C=1$, $K= 4$ e $v = 0,2$, mas com a empresa investindo $I=1$ por ano, o resultado muda consideravelmente.

Em primeiro lugar, a diferença entre a regra do NPV e a regra de investimento com opções reais diminuiu e, para volatilidade alta, inverte-se. Como visto antes, as duas regras podem ser comparadas pela distância entre o P_H e o preço da regra de Marshall. Na Figura 3.3 nota-se que o P_H ainda permanece acima do preço da regra de Marshall para quase todo o intervalo de volatilidade, mas é menor do que os valores calculados no Capítulo 2.

Entretanto, a reversão de resultado é maior para a relação incerteza versus investimento. Agora, para o intervalo de volatilidade acima de 15%, um aumento de volatilidade implica em um P_H menor, sinal completamente inverso ao obtido no modelo clássico de opções reais do Capítulo 2. Em outras palavras, um aumento de incerteza pode levar a firma a investir mais.

Figura 3.3

Parâmetros: $\sigma = 0,2$; $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $I = 4$; $C = 1$; $\nu = 0,2$; $K = 4$; $I = 1$; $E1 = E2 = 0$.



No modelo tradicional de opções reais, o incentivo a diferir o investimento surge porque a incerteza afeta de maneira assimétrica o benefício e o custo de adiar o investimento. Ao esperar, a empresa evita cenários futuros adversos. Como quanto maior a incerteza maior é a probabilidade de ocorrer preços baixos, o benefício de se esperar cresce com a incerteza. Por outro lado, o custo de oportunidade é a não apropriação do fluxo de caixa instantâneo gerado pelo ativo. Na ausência de tempo de construção, se ocorrer uma alta de preço, a empresa entra imediatamente no mercado e usufrui o cenário favorável. Desta forma, o custo de oportunidade de esperar é independente da incerteza.

Com tempo de construção a situação muda. Agora, a empresa não pode mais aproveitar imediatamente os cenários favoráveis. Se não investir já, a empresa corre o risco de perder um mercado bom no futuro. Assim, o custo de oportunidade de diferir passa a depender dos preços no futuro. Quanto maior a incerteza, maior a chance de ocorrer eventos extremos. A possibilidade de abandonar a construção limita o efeito dos cenários desfavoráveis. Consequentemente, a incerteza aumenta o custo de oportunidade de diferir o investimento. Se o benefício e o custo de diferir são positivamente afetados pela volatilidade, o efeito final passa a ser ambíguo. Pela Figura 3.3, nota-se que o segundo efeito predomina e o aumento da incerteza leva a firma a antecipar o investimento.

Ilan e Strange (1996) apresentam resultado semelhante ao descrito acima. Os autores desenvolvem um modelo apenas com tempo de construção e possibilidade de abandono. Os resultados obtidos mostram uma queda em P_H . Para níveis intermediários de volatilidade, o aumento da incerteza também acelera o investimento. A explicação dos autores assemelha-se a argumentação do parágrafo anterior.

Entretanto, para valores altos de volatilidade, o resultado de Ilan e Strange volta ao tradicional: quanto maior incerteza, maior o P_H . O mesmo não ocorre aqui. Como a Figura 3.3 mostra, mesmo com volatilidade bastante alta, um aumento da incerteza continua incentivando o investimento.

A diferença entre ambos os modelos decorre da inclusão do investimento sequencial. A possibilidade de fazer o investimento em etapas diminui o benefício de se diferir porque, dada possibilidade de abandono, reverte-se em parte a irreversibilidade do investimento, fundamental para os resultados da teoria de opções reais.

A Tabela 3.1 procura medir esse efeito. Em todos os cenários, o investimento total inicialmente estimado é 4 unidades monetárias e o tempo de construção de 4 anos. Porém, agora se assume que há um valor de investimento imediato, denominado I_0 , que ocorre no momento em que a empresa decide investir. Quanto maior esse valor inicial, menos sequencial é o investimento.

Tabela 3.1

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K/I = 4$; $C = 1$; $\nu = 0,2$; $E1 = E2 = 0$.

Premissas sobre Investimento				P_H			
K total	Investimento Inicial	K restante	I	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,3$	$\sigma = 0,4$
4	0,0	4,0	1,00	1,419	1,419	1,284	0,951
4	1,0	3,0	0,75	1,492	1,492	1,350	1,000
4	2,0	2,0	0,50	1,492	1,492	1,420	1,051
4	3,0	1,0	0,25	1,492	1,568	1,492	1,221
4	3,5	0,5	0,13	1,492	1,733	1,822	1,649

A simulação mostra que, quanto menor o investimento inicial, menor o P_H . No caso base ($\sigma = 0,2$), se o investimento é totalmente sequencial ($I_0 = 0$), P_H é igual a 1,419 e se $I_0 = 3,5$ (87% do investimento total), $P_H = 1,733$: um diferencial de 22%.

Outro fato extremamente importante, é que a volatilidade fortalece esse resultado: para $\sigma = 0,1$, a diferença dos preços é de apenas 5%; e, para $\sigma = 0,4$, é de 73%!

Esse resultado indica que o investimento sequencial reforça o efeito do tempo de construção, principalmente, para volatilidade alta. Este aspecto, é o principal resultado da dissertação.

Neste ponto, é importante comparar os resultados obtidos com os apresentados por Milne e Whalley (2000), Majda e Pindyck (1987) e Dixit e Pindyck (1994). Todos esses trabalhos modelam o investimento como sendo sequencial, com tempo de construção e opção de abandonar, mas apresentam resultados diversos desta dissertação. Majda e Pindyck (1987) e Dixit e Pindyck (1994) apontam que essas hipóteses acentuam o resultado básico da teoria de opções reais, ou seja, maior é o equívoco da regra do NPV. Milne e Whalley (2000)

mostram resultados semelhantes ao desta dissertação quanto a regra do NPV, mas encontram uma correlação positiva entre incerteza e o P_H .

A forma de modelar a incerteza do ativo é a principal diferença entre aqueles artigos e a dissertação. Enquanto aqui, a incerteza ocorre no preço de venda P , naqueles, é o ativo V que segue um processo estocástico. Desta forma, o custo de diferir o investimento é dado pelo *convenience yield* δ , que é constante. Assim, o aumento da volatilidade não afeta o custo de esperar e todo o efeito discutido acima não ocorre.

Quanto à incerteza do custo total dos investimentos, dado pelo v , a Tabela 3.2 abaixo mostra que o efeito não é significativo. O resultado para o caso base está na primeira coluna. A segunda, apresenta uma simulação para o caso onde $v=0$. Não há diferenças significativas entre os resultados em ambas as colunas

Tabela 3.2

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$ $\sigma = 0,;$ $I = 1$; $C = 1$; $E1 = E2 = 0$.

σ	P_H	
	vega = 0,2	vega = 0
0,05	1,22	1,22
0,10	1,42	1,42
0,15	1,49	1,49
0,20	1,42	1,49
0,25	1,35	1,49
0,30	1,28	1,28
0,35	1,16	1,11
0,40	0,95	0,90

A forma como se modelou a incerteza do investimento gera dois efeitos: (i) maior incerteza quanto viabilidade de se terminar a construção, o que tende a deprimir o investimento e (ii) há uma espécie de *learning by doing*, somente investindo aprende-se sobre o custo do investimento, o que incentivaria começar a investir logo.

Nas simulações realizadas, esses dois efeitos parecem se anular ou, caso um dos dois prevaleça, possuem impactos reduzidos, quando comparado ao tempo de construção e a possibilidade de realizar o investimento em etapas. Este resultado, é outra contribuição da dissertação.

4. Conclusão

No modelo padrão de opções reais, o investimento é conhecido, imediato e realizado de uma única vez. Esta dissertação alterou essas hipóteses e considerou que o investimento é incerto, sequencial e necessita de tempo de construção.

Com o uso programação dinâmica e avaliação neutra ao risco, obteve-se a equação diferencial para o valor da empresa, nos estágios inativa, pré-operacional e ativa. Em particular, a equação da empresa pré-operacional, é uma equação diferencial parcial elíptica que demanda a utilização de métodos numéricos.

Os principais resultados da simulação numérica foram:

- > a regra do NPV não é tão equivocada quanto os modelos padrões de opções reais sugerem
- > com tempo de construção, o aumento da incerteza pode aumentar o investimento
- > o investimento sequencial reforça o efeito do tempo de construção
- > a incerteza técnica do custo do investimento não afeta significativamente a decisão da empresa.

Ilan e Strange (1996) associam esses resultados com as indústrias que possuem longo período de construção. Desta forma, destacam que as empresas de setores como o de construção comercial, geração de energia, papel e celulose, e siderurgia podem ter maior incentivo a investir. Eles procuram então associar essas características a situações onde ocorre um excesso de capacidade crônica.

Nesta linha de raciocínio, o modelo sugere também uma explicação para um outro fenômeno econômico recente. Na segunda metade da década de 90, empresas de setores ligados a tecnologia da informação, a Internet e a telecomunicações passaram por dois eventos importantes: (i) suas ações alcançaram alta valorização nas bolsas de valores e; (ii) realizaram investimentos em excesso o que gerou excesso de capacidade em muitos setores. Alguns autores usaram a teoria de opções para explicar o valor das ações destas empresas. Os resultados aqui obtidos sugerem que um modelo de opções reais também pode fornecer uma explicação para o fenômeno do excesso de investimentos.

A acelerada evolução de novas tecnologias, como, por exemplo, a Internet e a telefonia celular, criou enorme incerteza quanto ao retorno futuro dos empreendimentos nestes setores. Adicionalmente, os investidores mostraram-se muito menos exigentes quanto a lucratividade imediata dos empreendimentos, o que pode ser interpretado como um aumento no tempo de construção. Consequentemente, como visto no modelo, essa combinação de maior tempo de construção e aumento da incerteza pode ter acelerado os investimentos e criado os excessos de capacidade.

Por último, vale ressaltar novamente, as duas principais contribuições da dissertação: (i) o investimento sequencial reforça o efeito do tempo de construção, principalmente, quando a

volatilidade é alta e; (ii) diante das demais hipóteses, a incerteza técnica do investimento possui pouca influência na decisão de investir de empresa.

5. Apêndice

5.1 Apêndice 1

Este apêndice apresenta a resolução numérica da equação diferencial parcial 3.18, que reescrevemos abaixo junto com as condições de contorno, através de um método de diferenças finitas denominado *projected successive overrelaxation* (Psor).

$$0 = \frac{1}{2} v^2 I K \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_1}{\partial P} - r V_1 - I \quad (A1)$$

$$V_1(P, 0) = V_2(P) \quad (A2)$$

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(P, K) = V_2(P) e^{-rK/I} - \int_0^{K/I} I e^{-nt} dt \quad (A3)$$

$$V_1(P_M, K) = E_1 \quad (A4)$$

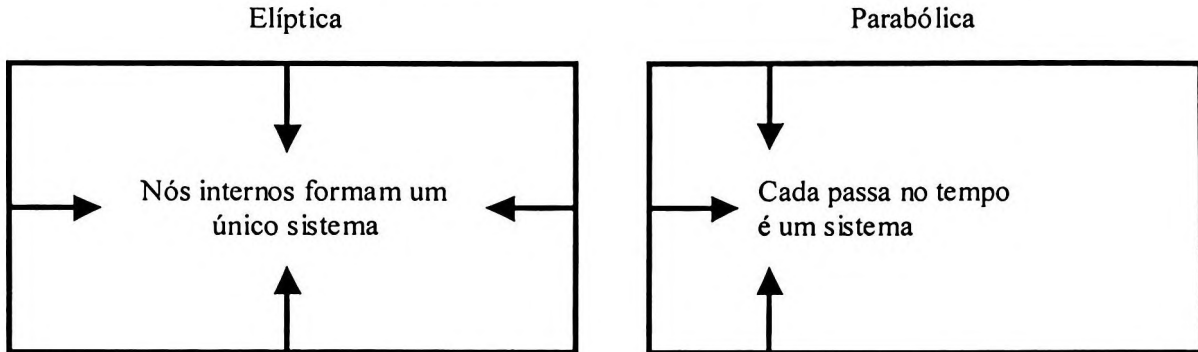
$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial P} = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial K} = 0 \quad (A6)$$

A equação (A1) é uma equação parcial elíptica com fronteira livre. Em finanças, as equações diferenciais mais freqüentes são do tipo parabólica. Na literatura sobre opções reais geralmente as equações diferenciais são parabólicas e quando são elípticas, uma transformação para uma equação ordinária é possível.

A grande diferença da resolução numérica de uma PDE elíptica é que, uma vez que se define uma grade de valores para as variáveis, todos os pontos internos devem ser resolvidos de uma só vez e não, como no caso das parabólicas, os pontos de um passo no tempo por vez. O problema também exige que seja fornecido quatro condições de fronteira, e não apenas duas e uma de valor inicial como no caso das parabólicas.

Figura A1
Visualização da Solução Numérica de PDEs Elípticas e Parabólicas



O método de diferenças finitas consiste em aproximar o problema contínuo (A1) – (A6) por uma solução discreta. Em primeiro lugar, define-se as seguintes variáveis: $y \equiv \ln P$; $x \equiv 2\sqrt{K}$ e $F(y,x) \equiv V_1(P,K)$. Assim,

$$\frac{\partial V_1}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{P} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{1}{P^2} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{P^2} \quad (A7)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{K}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{1}{K} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{K\sqrt{K}} \quad (A8)$$

Substituindo as novas variáveis e as equações (A7) e (A8) no problema (A1) – (A6), e definindo que, $d(x) \equiv (-1 - \frac{v}{4}) \frac{1}{x}$, $e \equiv (\alpha - \phi \sigma - \frac{1}{2} \sigma^2)$:

$$\frac{1}{2} v^2 I \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + d(x) \frac{\partial F}{\partial x} + e \frac{\partial F}{\partial y} - r F - I = 0 \quad (A9)$$

$$F(y,0) = V_2(e^y) \quad (A10)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow F(y,x) \rightarrow V_2(e^y) e^{-r \frac{K}{I}} - \int_1^{\frac{K}{I}} I e^{-rt} dt \quad (A11)$$

$$I F(y^*, x) = E_1 \quad (A12)$$

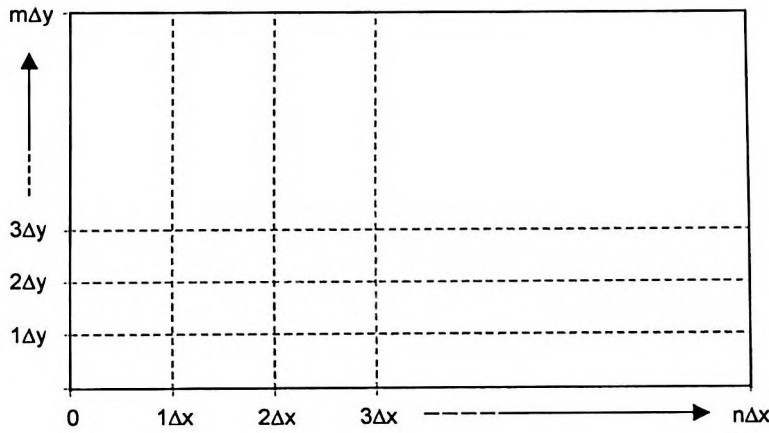
$$\frac{\partial F(Y^*, X)}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A13})$$

$$\frac{\partial F(y^*, x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A14})$$

nas quais y^* representa a fronteira livre.

O próximo passo é discretizar o espaço das variáveis e introduzir uma grade de valores no domínio das variáveis y e x . Por conveniência utiliza-se uma grade uniforme na qual $\Delta y = y_{\max}/m$ e $\Delta x = x_{\max}/n$, conforme mostra a Figura A1 abaixo.

Figura A1



Em seguida aproxima-se o problema (A9) – (A14) na grade acima. Para tanto, utiliza-se a diferença central tanto para as derivadas de segunda ordem como para as de primeira.

$$\partial^2 F / \partial y^2 = (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) / \Delta y^2 \quad (\text{A15})$$

$$\partial^2 F / \partial x^2 = (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) / \Delta x^2 \quad (\text{A16})$$

$$\partial F / \partial y = (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) / 2\Delta y \quad (\text{A17})$$

$$\partial F / \partial x = (U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) / 2\Delta x \quad (\text{A18})$$

Substituindo (A15) – (A18) em (A9) – (A14) e definindo $s = \Delta y / \Delta x$

$$U_i^j = \frac{1}{\beta_0} (\Delta y^2 I - \beta_1 U_i^{j+1} - \beta_2 U_i^{j-1} - \beta_3 U_{i+1}^j - \beta_4 U_{i-1}^j) \quad (\text{A19})$$

na qual

$$\beta_0 = -(\sigma^2 + s^2 v^2 I + r \Delta y^2) \quad (\text{A20})$$

$$\beta_1 = s^2 \left(\frac{1}{2} v^2 I + \frac{d(x)}{2} \Delta x \right) \quad (\text{A21})$$

$$\beta_2 = s^2 \left(\frac{1}{2} v^2 I - \frac{d(x)}{2} \Delta x \right) \quad (\text{A22})$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{e}{2} \Delta y \quad (\text{A23})$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{e}{2} \Delta y \quad (\text{A24})$$

As condições de contorno tornam-se

$$U_i^0 = V_2 (e^{i \Delta y}) \quad (\text{A25})$$

$$U_m^j = V_2 (e^{m \Delta y}) e^{-\frac{(j \Delta x)^2 / 4}{I}} - \int_0^{\frac{(j \Delta x)^2 / 4}{I}} I e^{-t} dt \quad (\text{A26})$$

$$U_{i^*}^j = E_1 \quad (\text{A27})$$

$$\frac{U_{i^*}^j - U_{i^*-1}^j}{\Delta y} = 0 \quad (\text{A28})$$

$$\frac{U_{i^*}^{j+1} - U_{i^*}^j}{\Delta x} = 0 \quad (\text{A29})$$

Note que as equações (A27) – (A29) estabelecem a fronteira livre e podem ser atendidas seguindo a metodologia adotada na literatura de finanças para resolver problemas de opções americanas financeiras, isto é, utilizando o *Projected SOR* (ver, por exemplo, Wilmott, 1995 e 1998).

Inicia-se a resolução do problema adotando-se valores iniciais para todos os pontos U_i^j do interior da grade de valores e calculando os valores de U_i^j para $j = 0$ ($\forall i$) e para $i = m$ ($\forall j$) através, respectivamente, de (A25) e (A26), isto é, calcula-se as condições de contorno para $V_1(P,0)$ e $V_1(P, K)$ com $P \rightarrow \infty$. Em seguida, a partir do ponto U_m^0 , “caminha-se” na direção de j e depois na direção de i (ordenação lexicográfica) e calcula-se cada U_i^j usando (A19). A cada passo, testa-se as condições (A27) – (A29) para verificar se se atingiu a fronteira livre. O procedimento é repetido até que os valores de U_i^j convirjam para a solução.

A figura abaixo apresenta um pseudo-código da rotina implementada no Matlab para a solução do problema.

Figura A3
Pseudo-Código para a solução do problema (A1) – (A6)

U' indica valor “novo” (calculado na iteração atual)
U indica valor “antigo” (calculado na iteração anterior)

Inicializa variáveis e define constantes

While error > epsilon

For i= 1 to My-1

For j=1 to Mx-1

$$\hat{U}_i^j = \frac{1}{\beta_{ij}^0} (\Delta y^2 I - \beta_{ij}^1 U_i^{j+1} - \beta_{ij}^2 U_i^{j-1} - \beta_{ij}^3 U_{i+1}^j - \beta_{ij}^4 U_{i-1}^j)$$

$$U_i^j = \text{Max} (U_i^j + w(\hat{U}_i^j - U_i^j), EI)$$

end

end

error = ||U' - U||

end

5.2 Apêndice 2

Este apêndice apresenta a solução da equação (3.15). O método envolve uma aproximação discreta das condições de *value matching* e *smooth pasting* (3.10) e (3.11) para determinar A_1 e P_H . Para uma descrição de uma aplicação em um contexto semelhante ao da dissertação, ver Dixit e Pindyck (1994).

Em primeiro lugar, substitui-se (3.15) nas condições e dividi-se (3.10) por (3.11)

$$V_1(P_H, K) = \frac{P_H}{\beta_1} \frac{\partial V_1(P_H, K)}{\partial P} \quad (\text{A30})$$

e realiza-se a transformação de variáveis $y = \ln P$; $x = 2\sqrt{K}$ e $F(y, x) \equiv V_1(P, K)$. Assim

$$F(y^*, x) = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial F_1(y^*, x)}{\partial y} \quad (\text{A31})$$

Em seguida, define-se uma aproximação discreta para a derivada na mesma grade utilizada no Apêndice 1,

$$\frac{\partial F(y^*, x)}{\partial y} = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta y} \quad (\text{A32})$$

e discretiza-se (A31) usando (A32)

$$U_i^j = \frac{U_{i+1}^j}{1 + \beta_1 \Delta y} \quad (\text{A33})$$

Com os valores $V_1(P, K)$ obtidos na resolução da equação (3.18), parte-se do ponto U_m^0 e “caminha-se para baixo” na grade, testando a cada ponto a validade de (A33). Em um ambiente, discreto aceita-se que (A33) vale dentro de uma margem de erro, isto é,

$$U_i^j - \frac{U_{i+1}^j}{1 + \beta_1 \Delta y} < \text{eps} \quad (\text{A34})$$

A partir do ponto onde (A34) ocorre, usa-se (3.10) para determinar A_1 e (3.15) para calcular o valor de $V_0(P, K)$ para o intervalo $P < P_H$.

5.3 Apêndice 3

Este apêndice apresenta, com base em Dixit e Pindyck (1994), a intuição econômica das condições de *value matching e smooth pasting*. A demonstração é feita para a equação (2.10) mas pode ser estendida para os demais problemas da dissertação. Vale ressaltar que as demonstrações a seguir não são provas matemáticas rigorosas, mas apenas fornecem a intuição econômica das condições.

Value Matching

A demonstração é feita por absurdo. No problema da empresa inativa, dado pela equação de Bellman (2.8), a empresa maximiza o seu valor escolhendo entre permanecer ativa ou inativa. Na solução deste problema, existe uma fronteira P_H que determina o preço acima do qual o valor da empresa ativa, descontado o investimento K , é maior do que o da empresa inativa, e abaixo do qual o inverso ocorre. Assim, para maximizar o seu valor a empresa necessita determinar esse P_H . Para deixar mais claro ainda, P_H deve ser tal que, para $P < P_H$, $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$ e para $P > P_H$, $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$.

A condição de *value matching* afirma que, em P_H , $V_0 = V_1 - K$. Primeiro, assumamos que isso não ocorra e $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$. Pela continuidade⁴ das funções V_0 e V_1 , para P ligeiramente inferior à P_H e com dt suficientemente pequeno, continua valendo que $V_0(P) < V_1(P) - K$ o que contradiz o fato de $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$ ocorrer quando $P < P_H$. Por outro lado, se $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$, para P ligeiramente superior à P_H , continua valendo que $V_0(P) > V_1(P) - K$, o que contradiz o fato de $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$ quando $P > P_H$. Portanto, por absurdo, se P_H é a fronteira do problema, então $V_0(P_H) = V_1(P_H) - K$.

Smooth Pasting

Novamente, a demonstração é feita por absurdo. A Figura A4 abaixo auxilia na demonstração.

Primeiro considere que $\partial V_0/\partial P > \partial V_1/\partial P$, como na parte (a) da Figura A4. Caso isso ocorra, para a empresa é melhor continuar inativa em P_H , porque se $P > P_H$, ainda ocorrerá que $V_0(P) > V_1(P) - K$, o que contradiz o fato de P_H ser a fronteira.

Se $\partial V_0/\partial P < \partial V_1/\partial P$, como na parte (b) da Figura A4, deve-se recorrer às propriedades do movimento de Wiener. Primeiro, considere que, ao invés de exercer a opção de investir como deveria ocorrer em P_H , a empresa adote a seguinte estratégia: não exerce a opção agora e se, no instante dt imediatamente seguinte, ocorrer $dP > 0$, exerce a opção e torna-se uma empresa ativa; e se $dP < 0$, continua inativa. O valor presente esperado desta estratégia, considerando por simplicidade que $K=0$, é dado por

⁴ Apesar de não se mencionar explicitamente hipóteses de continuidade na dissertação, a mesma é considerada ao longo de todo o trabalho.

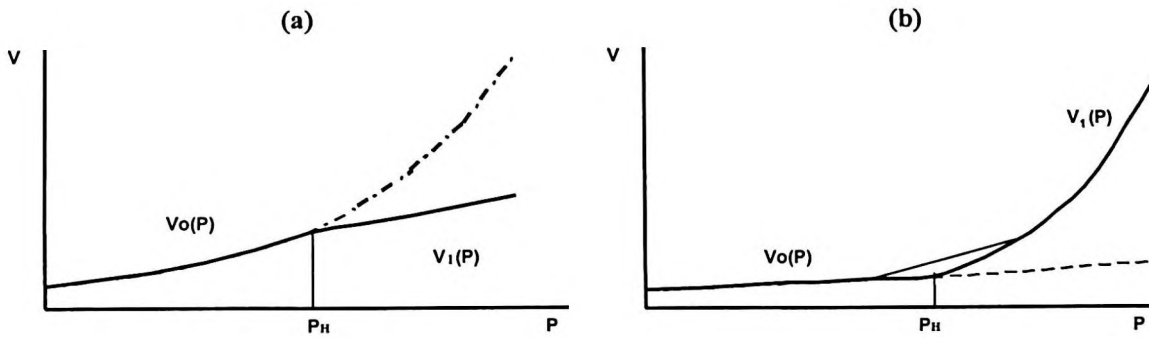
$$(1-rdt) [\varphi(dP<0) V_0(P+dP) + \varphi(dP>0) V_1(P+dP)] \quad (A35)$$

onde $\varphi(dP<0)$ é a probabilidade de dP ser menor que zero e $\varphi(dP>0)$ a de ser maior.

Note que, se se desconsidera que se deve descontar o valor futuro da estratégia para o presente (dado pelo fator $1-rdt$ na equação A35), a estratégia alternativa é superior pois $\partial V_0/\partial P < \partial V_1/\partial P$ (vide a parte (b) da figura). O que garante que a estratégia alternativa é superior mesmo descontando para o presente é o fato de que, para dt suficientemente pequeno, dP é da ordem de \sqrt{dt} , pois o movimento de Wiener é da ordem \sqrt{dt} , enquanto o fator de desconto $(1-rdt)$ é da ordem $dt < \sqrt{dt}$. Portanto, a estratégia de não exercer imediatamente a opção de investir é superior a estratégia de exercer, o que contradiz o fato de P_H ser a fronteira.

Figura A4

Note que a condição de value matching é válida e para facilitar o entendimento assumiu-se que $K=0$



6. Bibliografia

1. Anes, Willian F. 1977. Numerical Methods for Partial Differential Equations.
2. Bjerksund, Petter e Ekern Steiner. 1995. Contingent Claims Evaluation of Mean-Reverting Cash Flows in Shipping. Em Real Options in Capital Investment, ed. Trigeorgis.
3. Barkshi, Charles Cao Gurdip e Chen, Zhiwu. 1997. Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *The Journal of Finance*, 2003 – 2049.
4. Brach, Marion e Paxson, Dean. 2001. A Gene to Drug Venture: Poisson Options Analysis. *R&D Management* 31, 203 – 214.
5. Constandinides, George. 1978. Market Risk Adjustment in Project Valuation. *The Journal of Finance*, Vol. 33, 603 – 616.
6. Kellogg, David e Charnes, John. 2000. Real Options Valuation for a Biotechnology Company. *Financial Analysts Journal*, Maio/Junho, 76 – 84.
7. Dixit, Avinash. 1989. Entry and Exit Decisions Under Uncertainty. *Journal of Political Economy*, Vol. 97, 620 – 638.
8. Dixit, Avinash e Pindyck, Robert. 1994. Investment Under Uncertainty.
9. Ilan, Avner e Strange, William. 1996. Investment Lags. *The American Economic Review*, Vol. 86, 610 – 622.
10. Ilan, Avner e Strange, William. 1998. A Model of Sequential Investment. *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 22, 437 – 463.
11. Lindfield, George e Penny John. 1999. Numerical Methods Using Matlab.
12. Majd, Saman e Pindyck, Robert. 1987. Time to Build, Option Value and Investment Decisions. *Journal of Financial Economics*, Vol 18, 7-27.
13. McDolnad, Robert e Sigel, Daniel. 1984. Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below the Equilibrium Rate of Return: A Note. *The Journal of Finance*, pg 261 – 265.
14. McDolnad, Robert e Sigel, Daniel. 1985. Investment and Valuation of Firms When There Is an Option to Shut Down. *International Economic Review*, pg 331 – 349.
15. Medeiros, Priscilla. 2001. Aplicação de Opções Reais no Imobiliário Residencial com Enfoque na Cidade do Rio de Janeiro. *Anais do Primeiro Encontro Brasileiro de Finanças*.
16. Morton, K.W. e Mayers, D.F. 1994. Numerical Solution of Partial Differential Equations.
17. Milne, Alistair e Whalley, Elizabeth. 2000. Time to Build, Option Value and Investment Decisions: a Comment. *Journal of Financial Economics*, Vol 56, 325-332.

18. Sarkar, Sudipto. 2000. On the Investment-Uncertainty Relationship in a Real Options Model. *Journal of Economic Dynamics & Control* , Vol. 24, 219 –225.
19. Sykes, Hollister. 2002. Real Options for Real Ventures. Working Paper - Technology Venture Management.
20. Thomas, James William. 1995. *Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations*.
21. Trigeorgis, Lenos.1999. *Real Options*.
22. Willner, Ram. 1995. Valuing Start-up Venture Growth Option. Em *Real Options in Capital Investment*, ed. Trigeorgis.
23. Wilmott, Paul. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*.
24. Wilmott, Paul. 1998. *Derivatives*.