

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE CONTABILIDADE E ATUÁRIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS

**AVALIAÇÃO EMPÍRICA DO MODELO CAPM NO MERCADO DE CAPITAIS
BRASILEIRO VIA MÉTODO DOS MOMENTOS GENERALIZADOS**

Daniel Reed Bergmann
Orientador: Prof. Dr. Luiz João Corrar

SÃO PAULO
2006

Prof. Dr. Adolpho José Melfi
Reitor da Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Maria Thereza de Leme Fleury
Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Reinaldo Guerreiro
Chefe do Departamento de Contabilidade e Atuária

Prof. Dr. Fábio Frezatti
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis

DANIEL REED BERGMANN

**AVALIAÇÃO EMPÍRICA DO MODELO CAPM NO MERCADO DE CAPITAIS
BRASILEIRO VIA MÉTODO DOS MOMENTOS GENERALIZADOS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Contabilidade e Atuária da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências Contábeis.

Orientador: Prof. Dr. Luiz João Corrar

SÃO PAULO

2006

Resumo

Um dos maiores desafios dos pesquisadores em finanças é estudar o *trade-off* entre risco e o retorno dos ativos de mercado. O bom senso nos levaria a afirmar que, quanto maior o risco de um ativo, maior o retorno a ele associado. Markowitz (1959) desenvolveu a base da pesquisa que relaciona risco e retorno, culminando com o modelo CAPM. Há praticamente dois métodos existentes a fim de validar o modelo CAPM não-condicional: o método por verossimilhança (MV) ao qual supõe que os retornos dos ativos (ou portfólios) sejam IID e possam ser representados por uma distribuição normal multivariada; e o método dos momentos generalizados (GMM) ao qual não pressupõe que os retornos de ativos (ou portfólios) sejam IID e, além do mais, que tenham alguma distribuição específica. Esta dissertação será pioneira em testar a validade do modelo CAPM zero-beta via GMM. Primeiramente, derivamos economicamente o modelo CAPM não-condicional, tanto para a versão Sharpe-Lintner como para a versão zero-beta, supondo que o par de retornos (R_i, R_m) tenha uma distribuição elíptica bivariada e que a função de utilidade do investidor seja crescente e côncava. Escolheu-se o método GMM a fim de testar o modelo CAPM não-condicional no mercado de capitais brasileiro, pois as séries dos log-retornos diários de ações analisadas não se mostraram normais e IID. Constatamos que o modelo CAPM de SL, tanto em termos da SELIC como do CDI (ativos livres de risco), não pode ser rejeitado ao nível de 5% para o período de 2/1/00 até 31/12/04. Já para os períodos de 2/1/95 até 31/12/99 e de 2/1/95 até 31/12/04, tal modelo foi rejeitado ao nível de 5%. Dessa forma, para o modelo CAPM de SL, tanto em termos da SELIC como do CDI, o índice BOVESPA se comportou como um portfólio eficiente somente no período de 2/1/00 até 31/12/04. Já para o modelo CAPM zero-beta, verifica-se que não podemos rejeitá-lo ao nível de 5% em nenhum dos três períodos analisados acima.

Abstract

One of the greatest challenges of Finance researchers is to study the trade-off between risk and return of market assets. Common sense would lead us to affirm that as higher an assets' risk, the greater its associated return. Markowitz (1959) has developed the research basis that links risk and return, achieving the CAPM model (Capital Asset Pricing Model). There are practically two existing methods in order to validate the non-conditional CAPM model: The Maximum Likelihood Method (ML), which supposes that assets (or portfolios) returns are IID and could be represented by a multivariate normal (gaussian) distribution; and the Generalized Moments Method (GMM), which do not supposes that the assets returns (or portfolios returns) are IID and, furthermore, that might have any specific distribution. This dissertation will be pioneer in testing the validity of the CAPM zero-beta model by GMM. First, we economically derive the non-conditional CAPM model, either to the Sharpe-Lintner version as to the zero-beta version, supposing that the return pairs (R_i, R_m) have a bivariate elliptical distribution and that the investors' utility function be increaesing and concave. The GMM method have been choosen in order to test non-conditional CAPM model in Brazilian capital markets, because the daily log-returns series of the analised shares did not showed itselfes as normal and IID. We have realised that the SL CAPM model, either in terms of SELIC rate as of CDI rate (risk-free assets), can not be rejected at 5% level for the period from 2/1/00 until 31/12/04. For the periods from 2/1/95 until 31/12/99 and from 2/1/95 until 31/12/04, the given model was rejected at the 5% level. This way, for the SL CAPM model, either in terms of SELIC rate as of CDI rate, the BOVESPA index have behaved as an efficient portfolio only on the period from 2/1/00 until 31/12/04. For the zero-beta CAPM model, it can be verified that we cannot reject it at the 5% level in none of the three periods analysed above.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Lista de Tabelas | 2 |
| Lista de Figuras | 3 |
| 1 Introdução | 5 |
| 1.1 Justificativa do tema | 7 |
| 1.2 Questão de pesquisa | 8 |
| 1.3 Objetivos | 9 |
| 1.4 Metodologia da pesquisa | 9 |
| 2 Fundamentos teóricos | 11 |
| 2.1 Conjunto eficiente | 13 |
| 2.1.1 Propriedades matemáticas do conjunto eficiente | 17 |
| 2.2 Derivação econômica do modelo CAPM não-condicional | 24 |
| 2.2.1 Pré-requisitos conceituais | 28 |
| 2.3 CAPM e Informação Contábil | 37 |
| 3 Métodos econométricos | 41 |
| 3.1 Abordagem por máxima verossimilhança (MV) | 41 |
| 3.1.1 Versão Sharpe-Lintner | 41 |
| 3.1.2 Versão zero-beta | 46 |
| 3.2 Abordagem pelo método dos momentos generalizados (GMM) | 50 |
| 3.2.1 Versão Sharpe-Lintner | 53 |
| 3.2.2 Versão zero-beta | 56 |
| 3.3 Escolha do método econométrico | 57 |
| 3.4 Verificação da hipótese de IID | 58 |
| 3.5 Verificação da normalidade multivariada | 60 |
| 4 Resultados Obtidos | 65 |
| 4.1 Conclusão | 72 |
| A Programas | 77 |
| Referências Bibliográficas | 81 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-------------|--|----|
| Tabela 1.1 | Coefficientes de correlação entre nove indicadores do mercado de ações (EUA) | 6 |
| Tabela 3.2 | Resultados obtidos pelo teste BDS nas respectivas dimensões | 60 |
| Tabela 3.3 | Teste de normalidade univariada - Bai e Ng (2005) | 62 |
| Tabela 4.4 | CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/95 até 31/12/99 | 68 |
| Tabela 4.5 | CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/00 até 31/12/04 | 68 |
| Tabela 4.6 | CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/95 até 31/12/04 | 68 |
| Tabela 4.7 | CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/95 até 31/12/99 | 69 |
| Tabela 4.8 | CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/00 até 31/12/04 | 69 |
| Tabela 4.9 | CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/95 até 31/12/04 | 70 |
| Tabela 4.10 | CAPM zero-beta - 2/1/95 até 31/12/99 | 70 |
| Tabela 4.11 | CAPM zero-beta - 2/1/00 até 31/12/04 | 70 |
| Tabela 4.12 | CAPM zero-beta - 2/1/95 até 31/12/04 | 71 |
| Tabela 4.13 | Teste GMM para o CAPM de SL (taxa SELIC) | 71 |
| Tabela 4.14 | Teste GMM para o CAPM de SL (taxa CDI) | 71 |
| Tabela 4.15 | Teste GMM para o modelo CAPM zero-beta | 72 |

Lista de Figuras

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 2.1 | Curvas de Indiferença | 12 |
| Figura 2.2 | Fronteira eficiente construída no MATLAB para três portfólios hipotéticos | 14 |
| Figura 2.3 | Introdução de R_f na fronteira eficiente | 17 |
| Figura 2.4 | Portfólios de fronteira sem a taxa livre de risco | 20 |
| Figura 2.5 | Fronteira eficiente gerada a partir dos portfólios hipotéticos A, B e C | 21 |
| Figura 2.6 | Portfólios de fronteira com ativo livre de risco | 23 |

Capítulo 1

Introdução

Segundo Nakamura (1998, p. 1), a utilização de *proxies* do portfólio de mercado é uma prática usual no campo das finanças. Alguns estudos científicos abordando os fundamentos da teoria de mercado de capitais dependem da consideração do portfólio de mercado, que é tratado como portfólio de referência (*benchmark*) para todo o mercado de capitais, especialmente quando se utilizam teorias emanadas da chamada teoria de portfólios, cujo precursor foi Markowitz (1952, 1959), o qual criou as bases de quase tudo o que se estuda em relação a decisões de investimento em condições de incerteza. Este autor fez uma contribuição muito importante no campo do estudo das relações entre risco e retorno, definindo conceitos fundamentais, tais como, efeito diversificação, conjunto eficiente, portfólio de tangência etc.

Apesar do fato de que a teoria de mercado de capitais define e utiliza o portfólio de mercado, especialmente quando se trata do modelo de equilíbrio de preços de títulos, denominado *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), é impossível observar o verdadeiro portfólio de mercado.

O que inevitavelmente acaba sendo feito é justamente criar *proxies*, i.e., representações aproximadas do portfólio real de mercado, especialmente quando se estudam empiricamente ou se testam na prática as teorias relativas ao mercado de capitais.

Roll (1977 *apud* NAKAMURA, 1998, p. 3), em sua famosa crítica aos testes empíricos do CAPM, argumenta ser impossível observar o portfólio de mercado, o que, conseqüentemente, implica na falta de objetividade para se concluir acerca da validade do modelo citado. Os testes empíricos do CAPM acabam sendo, segundo Roll, testes de eficiência do portfólio de mercado, pois o CAPM requer que o portfólio de mercado, a qual todos os títulos estão referenciados, seja eficiente em termos do retorno esperado e da variância.

Stambaugh (1982 *apud* BONOMO *et al.*, 2004, p. 31) mostrou, através da utilização de vários portfólios do mercado norte-americano que serviram como *proxy* de mercado, que, de fato, as inferências são similares entre as diversas *proxies*. E Shanken (1987 *apud* BONOMO

et al., 2004, p. 31) mostrou que, se tivermos uma correlação entre a *proxy* de mercado e o "verdadeiro portfólio de mercado" maior que 0.7, então a rejeição do modelo com a *proxy* de mercado também implicará sua rejeição com o "verdadeiro portfólio de mercado". Bonomo *et al.* (2004) e Nakamura (1998) utilizaram-se do IBOVESPA como *proxy* de mercado, remetendo-se ao fato de que sua utilização não leva a perdas significativas no teste do modelo CAPM. A Tabela abaixo nos mostra as correlações calculadas para nove indicadores do mercado de ações norte-americano¹. Todos os valores são maiores ou bem próximos de 0.7, e portanto, qualquer um destes indicadores poderá ser utilizado como *proxy* do portfólio de mercado nos EUA.

Tabela 1.1 - Coeficientes de correlação entre nove indicadores do mercado de ações (EUA)

| | DJIA | SP400 | SP500 | NYSE | ASE | OTCIND | OTCCOMP | CRSPEQ | CRSPVW |
|--------|------|-------|-------|------|------|--------|---------|--------|--------|
| DJIA | 1.0 | | | | | | | | |
| SP400 | 0.96 | 1.0 | | | | | | | |
| SP500 | 0.96 | 0.99 | 1.0 | | | | | | |
| NYSE | 0.95 | 0.99 | 0.98 | 1.0 | | | | | |
| ASE | 0.68 | 0.80 | 0.80 | 0.84 | 1.0 | | | | |
| OTCIND | 0.77 | 0.80 | 0.82 | 0.84 | 0.70 | 1.0 | | | |
| TCCOMP | 0.80 | 0.83 | 0.86 | 0.85 | 0.76 | 0.82 | 1.0 | | |
| CRSPEQ | 0.93 | 0.95 | 0.96 | 0.95 | 0.85 | 0.74 | 0.81 | 1.0 | |
| CRSPVW | 0.95 | 0.95 | 0.96 | 0.95 | 0.86 | 0.76 | 0.82 | 0.92 | 1.0 |

FONTE: FRANCIS & TAYLOR; 2000, p. 107

Há praticamente dois métodos existentes a fim de validar o modelo CAPM não-condicional² uniperiódico³ (ou estático):

- ▶ O método por verossimilhança⁴ foi pioneiramente tratado no Brasil por Nakamura (1998). Este método supõe que os retornos dos ativos (ou portfólios) sejam IID⁵ e possam ser representados por uma distribuição normal multivariada.

¹Os indicadores são: *Dow Jones Industrial Average* (DJIA), *Standard & Poor's 400 Industrial Stocks Average* (SP400), *Standard & Poor's 500 Industrial Stocks Average* (SP500), *New York Stock Exchange Average* (NYSE), *American Stock Exchange Average* (ASE), *Over-the-Counter (OTCIND) Industrial Stocks Average*, *OTC Composite Stocks Average* (TCCOMP), *CRSP Equally Weighted Stocks Index* (CRSPEQ), *CRSP Value Weighted Stocks Index* (CRSPVW),

²A variância e a covariância do retorno dos portfólios são consideradas constantes ao longo do tempo.

³Os investidores consomem toda a sua dotação no próximo período.

⁴Esta abordagem está detalhada em Campbell *et al.* (1997, p. 188-203)

⁵Considerando n variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i=1}^n$ com uma f.d.p. conjunta $f_X(x)$, e com idênticas f.d.p. marginais $f_{X_1}(x_1), \dots, f_{X_n}(x_n)$. Então, $\{X_i\}_{i=1}^n$ são ditas IID (independentes e identicamente distribuídas) se, e somente se, $f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$.

- O método conhecido por GMM (método dos momentos generalizados) foi pioneiramente tratado no Brasil por Bonomo *et al.* (2004) somente para a versão Sharpe-Lintner. Este método não pressupõe que os retornos de ativos (ou portfólios) sejam IID e, além do mais, que tenham alguma distribuição específica. Esta dissertação será pioneira em testar a validade do modelo CAPM zero-beta via GMM⁶.

1.1 Justificativa do tema

Conforme Bonomo *et al.* (2004, p. 17), um dos maiores desafios dos pesquisadores em finanças é estudar o *trade-off* entre risco e o retorno dos ativos de mercado. O bom senso nos levaria a afirmar que, quanto maior o risco de um ativo, maior o retorno a ele associado. Markowitz (1959) desenvolveu a base da pesquisa que relaciona risco e retorno, culminando com o CAPM. Seu artigo tentava relacionar a escolha ótima dos agentes ao *trade-off* retorno esperado-variância. Os agentes estariam interessados em guardar ativos ou portfólios de ativos que pudessem garantir-lhes, dado o retorno esperado, a menor variância, ou risco, possível.

Segundo Iudícibus *et al.* (2004, p. 71), o CAPM é extremamente relevante para a Teoria Positiva da Contabilidade por ser um modelo teórico que possibilita testes empíricos sobre o relacionamento de preços de ativos e informações contábeis através do retorno esperado e da variância. Esse aspecto prático é o que o tornou muito difundido, pois como os preços reagem a inúmeros fatores, um modelo de precificação que contivesse muitas variáveis poderia tornar-se tão complexo que prejudicaria sua interpretação e a respectiva aplicação prática.

Segundo Bonomo *et al.* (2004, p. 17), os resultados empíricos do modelo CAPM não-condicional com os dados da economia americana nos permitem vislumbrar um campo para testes similares com séries de dados de ações brasileiras.

Analisando o CAPM de forma pragmática, a maioria dos artigos concorda que o modelo não é "literalmente" verdadeiro. A especificação do modelo é obtida num cenário estático

⁶Este teste foi desenvolvido por Chou (2000)

e só valeria intertemporalmente admitindo-se fortes premissas. O CAPM intertemporal só valeria intertemporalmente sob uma das três condições: a) os investidores têm funções de utilidade logarítmicas; b) o retorno do portfólio de mercado e o retorno do ativo sem risco são observáveis e condicionalmente eficientes; e c) o retorno do portfólio de mercado deve ser igual a $m/(E[m^2|I])$, onde m é a taxa marginal de substituição intertemporal, e I , o conjunto de informações (BONOMO *et al.*, 2004, p. 27). Entretanto, como nenhuma teoria representa exatamente a realidade, o CAPM não-condicional continua sendo válido como *benchmark* se for validado empiricamente.

1.2 Questão de pesquisa

A questão de pesquisa a ser tratada nesta dissertação é:

Pode-se considerar que o modelo CAPM não-condicional, tanto na versão Sharpe-Lintner quanto na versão zero-beta, é eficiente em termos do retorno esperado e da variância no mercado de capitais brasileiro ?

A resposta desta questão incidirá no seguinte fato econométrico:

- ▶ Como se verá em capítulo oportuno, não há evidências significativas de que os retornos de ações e a *proxy* de mercado (IBOVESPA) sejam IID e distribuídos normalmente. Portanto, é essencial a utilização do método dos momentos generalizados em relação ao método de máxima verossimilhança a fim de avaliar a aderência estatística do modelo CAPM.

Igualmente ao que foi feito por Bonomo *et al.* (2004), os portfólios serão construídos a partir de ações da carteira do IBOVESPA, respeitando o critério de juntar ações do mesmo setor da economia. Os setores em questão serão: Siderurgia, Bancos, Papel e Celulose, Elétrico, Petroquímico e Telecomunicações. Estes setores agrupam o conjunto de ações de maior liquidez no período de janeiro de 1995 até dezembro de 2004⁷. Utilizaremos o IBOVESPA como *proxy* do portfólio de mercado; a taxa de juros efetiva mensal do SELIC e a taxa

⁷Esta relação de ações poderá ser encontrada no site www.risktech.com.br

efetiva mensal do CDI serão utilizadas como ativos livres de risco nos testes econométricos do CAPM.

1.3 Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é:

- ▶ Verificar se o modelo CAPM não-condicional, tanto na versão Sharpe-Lintner quanto na versão zero-beta, é eficiente em termos do retorno esperado e da variância no mercado de capitais brasileiro.

Os objetivos secundários são:

- ▶ Verificar qual é o método, por máxima verossimilhança ou por GMM, mais adequado a fim de testar a validade do modelo CAPM não-condicional.
- ▶ Derivar economicamente o modelo CAPM não-condicional, tanto da versão Sharpe-Lintner como da versão zero-beta, sob a hipótese de que os retornos do portfólio e do portfólio de mercado tenham uma distribuição elíptica multivariada.
- ▶ Testar se uma amostra significativa de log-retornos diários de ações com alta liquidez são normais.
- ▶ Testar se uma amostra significativa de log-retornos diários de ações com alta liquidez são IID.

1.4 Metodologia da pesquisa

Primeiramente, em relação às linhas de pesquisa existentes no Departamento de Contabilidade e Atuária da FEA-USP, este trabalho se insere na linha de **Mercados Financeiro, de Crédito e de Capitais** com foco na área de **gestão de riscos**.

Como a nossa questão de pesquisa está preocupada em testar a plausibilidade estatística do modelo CAPM no Brasil, pode-se dizer que se trata de um método de procedimento estatístico. Segundo Andrade (1999, p. 26), o método de procedimento estatístico fundamenta-

se na utilização da teoria estatística das probabilidades. Suas conclusões apresentam grande probabilidade de serem verdadeiras, embora admitam certa margem de erro. A manipulação estatística permite comprovar as relações dos fenômenos entre si, e obter generalizações sobre sua natureza, ocorrência ou significado.

Segundo Martins (2002, p. 34-39), este trabalho poderá ser classificado conforme as seguintes modalidades de pesquisa:

- ▶ Empírico-analíticas: são abordagens que apresentam em comum a utilização de técnicas de coleta, tratamento e análise de dados marcadamente quantitativas. Privilégiam estudos práticos. Suas propostas têm caráter técnico, restaurador e incrementalista. Têm forte preocupação com a relação causal entre variáveis. A validação da prova científica é buscada através de testes dos instrumentos, graus de significância e sistematização das definições operacionais.
- ▶ Ex post facto: tipo de investigação empírica na qual o pesquisador não tem controle direto sobre a(s) variável(eis) independente(s), porque suas manifestações já ocorreram, ou porque ela(s) é (são), por sua natureza, não manipulável(eis).

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

A teoria de investimentos teve um marco significativo com o trabalho de Markowitz publicado em 1952, que abordou, através de um modelo uniperiódico, o problema de seleção do portfólio ótimo, visando máximo retorno esperado e mínimo risco. Markowitz (1959) deu base para o surgimento de importantes modelos abordando o risco como o principal fator de formação de preços de ativos financeiros. Merece especial menção o CAPM, desenvolvido nos anos 60, que foi construído a partir dos fundamentos da teoria de portfólios criada por Markowitz, e que representa, até os dias de hoje, um dos principais modelos utilizados para o estudo do comportamento de preços de ativos com risco negociados no mercado de capitais.

Consideraremos que, dentro de um contexto uniperiódico, o retorno seja calculado da seguinte forma:

$$R_t = \frac{W_f - W_i}{W_i} \quad (2.1)$$

sendo que

W_f = Riqueza no final do período.

W_i = Riqueza de início de período.

Raciocinando em termos de um investimento em um único ativo, o retorno é dado por:

$$R_t = \frac{P_f - P_i}{P_i} \quad (2.2)$$

sendo que

P_f = Preço do ativo no fim do período.

P_i = Preço do ativo no início do período.

Dado o comportamento incerto dos preços dos ativos com risco, os retornos são tratados como variáveis aleatórias (*v.a.*), descritas por seus momentos. Os dois primeiros momentos de uma *v.a.* são a média e a variância que, do ponto de vista dos investimentos em ativos

financeiros, correspondem à expressão de seu retorno esperado μ e risco σ , respectivamente.

As preferências individuais quanto a risco e retorno são representadas graficamente através de curvas de indiferença, cujos pontos compreendem um mesmo nível de satisfação de um dado indivíduo. As curvas são desenhadas em um plano (μ, σ) de retornos de ativos com risco.

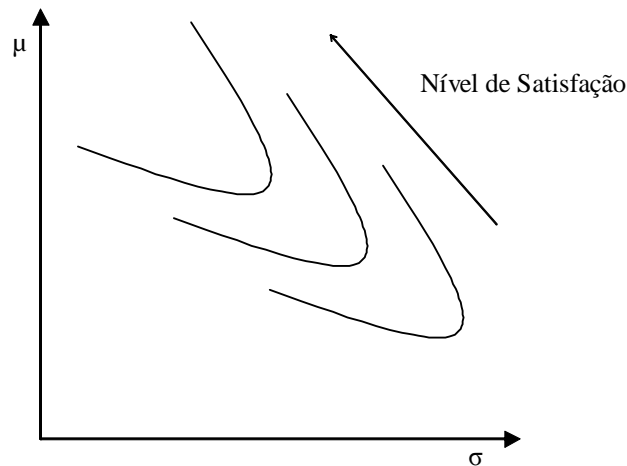


Figura 2.1 - Curvas de Indiferença

As várias curvas de indiferença de um dado indivíduo não se interceptam, cada uma delas representando um nível de satisfação. O conjunto de curvas de indiferença de um dado indivíduo forma o chamado mapa de indiferença, sendo que, quanto mais a noroeste estiver a curva de indiferença, mais satisfeitos estarão os investidores.

Deve-se ter em mente as suposições de insaciedade, i.e., os indivíduos sempre desejam mais riqueza do que menos, sem limites e de aversão ao risco na qual explica o fato das curvas de indiferença serem convexas e positivamente inclinadas, significando que os investidores avessos ao risco aumentam a sua exigência de retorno quanto mais alto o risco envolvido em um dado investimento.

Já os indivíduos arrojadados (não-avessos) ao risco apresentam curvas de indiferença com formato côncavo e com declividade negativa no plano (μ, σ) . Quanto aos investidores neutros em relação ao risco, suas preferências são representadas por linhas horizontais no plano (μ, σ) ,

significando que, para qualquer nível de risco, ficam satisfeitos em receber o mesmo retorno esperado. Ou seja, não importando quanto risco esteja sendo assumido, o investidor neutro ao risco buscará sempre as alternativas de investimento com maior retorno esperado.

2.1 Conjunto eficiente

Há um número infinito de portfólios passíveis de escolha para investimento, na medida em que os investidores podem combinar vários títulos em quaisquer proporções num mesmo portfólio.

Diante da questão de escolha do melhor portfólio dentre as várias alternativas que podem ser consideradas, um investidor escolherá seu portfólio ótimo no conjunto de portfólios que oferecer:

- ▶ mínimo risco a cada nível de retorno esperado, e
- ▶ máximo retorno esperado a cada nível de risco.

Denomina-se conjunto eficiente o conjunto de portfólios que satisfaz essas condições simultaneamente.

O conjunto eficiente faz parte do chamado conjunto viável (ou conjunto de oportunidades), que é composto por todos os portfólios que podem ser formadas a partir de um grupo de N ativos. Posteriormente, verificaremos que o conjunto viável sempre será uma região hiperbólica. Este conjunto viável também poderá ser chamado de fronteira média-variância (ou fronteira eficiente).

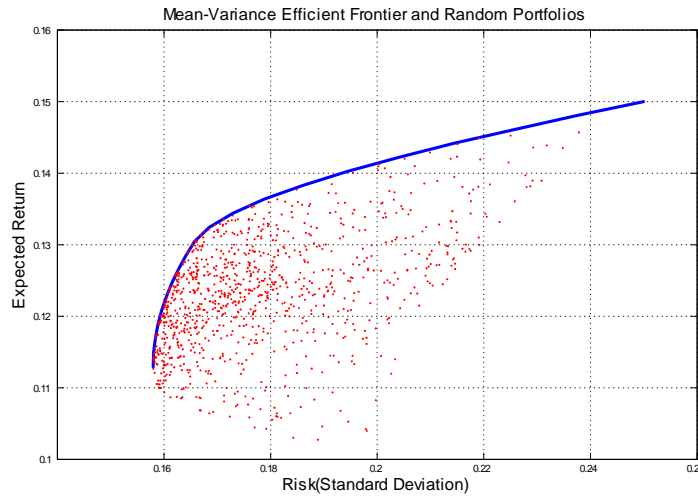


Figura 2.2 - Fronteira eficiente construída no MATLAB para três portfólios hipotéticos

Os melhores portfólios em termos de retorno esperado e de desvio-padrão estão situados na borda superior do conjunto viável, que corresponde aos portfólios com máximo retorno dado um nível de risco, e os portfólios com menor risco dado um nível de retorno.

A seleção do portfólio ótimo, para um dado investidor, será dada pelo ponto de tangência entre uma das curvas de seu mapa de indiferença com o conjunto eficiente.

A concavidade do conjunto eficiente é explicada pelo fato de que o desvio-padrão de um portfólio geralmente será menor que a média ponderada dos desvios-padrão dos ativos no portfólio, o que veio a ser chamado de efeito diversificação.

A fim de explicar melhor o chamado efeito diversificação, convém definir o chamado modelo de mercado, que pressupõe a existência de uma relação linear entre o retorno de um índice de mercado R_m (e.g. IBOVESPA) e o retorno de um dado portfólio R_i . Tal relação pode ser expressada da seguinte forma:

$$R_i = \alpha_{im} + \beta_{im}R_m + \epsilon_{im} \quad (2.3)$$

sendo que $\epsilon_{im} \sim N(0, \sigma_{\epsilon_{im}}^2)$.

A inclinação do modelo de mercado mede a sensibilidade dos retornos do portfólio aos retornos do portfólio de mercado, e é conhecido como beta β_{im} . O beta de um portfólio pode ser

estimado por:

$$\beta_{im} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{Var[R_m]} \quad (2.4)$$

Aplicando o operador variância⁸ nos dois membros de (2.3), obtemos a seguinte equação:

$$Var[R_i] = \beta_{im}^2 Var[R_m] + Var[\epsilon_{im}] \quad (2.5)$$

Ou seja, o risco total de um portfólio, medido por $Var[R_i]$, pode ser decomposto em duas partes, uma que corresponde ao risco de mercado (ou sistemático⁹), dado por $\beta_{im}^2 Var[R_m]$, e outra que diz respeito ao risco idiossincrático (ou não-sistemático), dado por $Var[\epsilon_{im}]$.

O risco total de um portfólio R_p que contenha N ativos¹⁰ pode ser igualmente definido pelos seus componentes de risco sistemático e de risco idiossincrático:

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i R_i \quad (2.6)$$

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i (\alpha_{im} + \beta_{im} R_m + \epsilon_{im}) \quad (2.7)$$

$$R_p = \sum_{i=1}^N w_i \alpha_{im} + \sum_{i=1}^N w_i (\beta_{im} R_m) + \sum_{i=1}^N w_i \epsilon_{im} \quad (2.8)$$

$$R_p = \alpha_{pm} + \beta_{pm} R_m + \epsilon_{pm} \quad (2.9)$$

Portanto,

$$Var[R_p] = \beta_{pm}^2 Var[R_m] + Var[\epsilon_{pm}] \quad (2.10)$$

Conforme (2.10), através do processo de diversificação, pode-se reduzir o risco total do portfólio p através da redução de seu componente de risco idiossincrático $Var[\epsilon_{pm}]$.

⁸Conforme Rose e Smith (2002), se X é variável aleatória de domínio igual a $D_X \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ é uma f.d.p. contínua qualquer avaliada no ponto x , tal que $\int_D f(x) dx = 1$, então os operadores $E[\cdot]$, $Var[\cdot]$ e $Cov[\cdot]$ são definidos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_D x f(x) dx \\ Var[X] &= \int_D (x - E[X])^2 f(x) dx \\ Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

⁹Um risco sistemático é qualquer risco que afeta um grande número de ativos, e cada um deles com maior ou menor intensidade.

¹⁰Os ativos i não devem estar mutualmente correlacionados (LUENBERGER, 1998, p. 151).

Esta redução do risco idiossincrático de um portfólio diversificado pode ser facilmente obtida, supondo que todos os ativos de um portfólio têm a mesma participação:

$$\epsilon_{pm} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N} \right] \epsilon_{im} \quad (2.11)$$

Aplicando o operador $Var[\cdot]$ em (2.11), temos:

$$Var[\epsilon_{pm}] = \left[\frac{1}{N} \right]^2 \sum_{i=1}^N Var[\epsilon_{im}] \quad (2.12)$$

Conforme (2.12), quanto maior o número de ativos, menor tende a ser o valor de $Var[\epsilon_{pm}]$, o que economicamente é explicado pela compensação entre os riscos exclusivos dos ativos sujeitos a diferentes efeitos diante da ocorrência dos mesmos eventos econômicos (LUENBERGER, 1998, p. 151).

A identificação dos portfólios ótimos, ou seja, os que fazem parte do conjunto eficiente, pode ser feita através da aplicação do método de programação quadrática, tal como proposto por Markowitz (1959) no livro *Portfolio Selection*, em seu Capítulo VIII e Apêndice A.

A abordagem de Markowitz, definindo a existência do conjunto eficiente, pode ser expandida mediante a introdução da possibilidade de se negociar um ativo livre de risco. Segundo Nakamura (1998, p. 22), entende-se por ativo livre de risco aquele cujos retornos têm desvio-padrão igual a zero. Além disso, a covariância entre um ativo livre de risco com qualquer outro ativo de risco é também igual a zero.

A possibilidade de se poder investir (comprar) em um ativo livre de risco R_f expande as oportunidades de conjunto viável, mudando a localização de uma parte substancial do conjunto eficiente de Markowitz, conforme se pode notar logo a seguir.

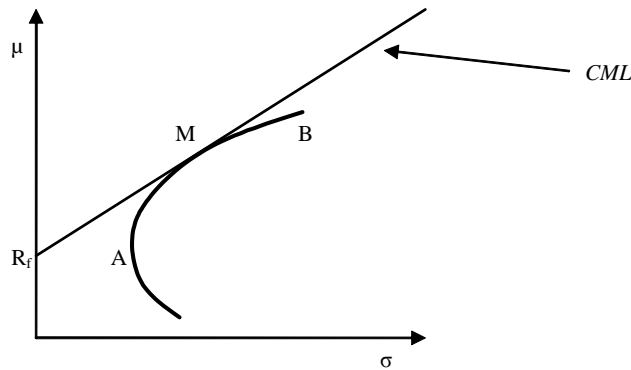


Figura 2.3 - Introdução de R_f na fronteira eficiente

Segundo Iudícibus *et al.* (2004, p. 88), a reta exposta na Figura 2.3 representa todas as possibilidades de um investidor formar seus portfólios com ativos de risco e ativos livres de risco. Ressalta-se que com a adição do ativo livre de risco os portfólios ótimos não se situam mais na fronteira eficiente, mas sim na reta CML (*Capital Market Line*). O ponto M, por exemplo, quando a CML é tangente à fronteira eficiente, significa o retorno ótimo do mercado, composto por ativos de risco e ativos livres de risco. À medida que a aversão ao risco aumenta (ou diminui), os portfólios percorrem sobre a reta CML para a esquerda (ou para a direita). Como exemplo, o ponto B não é uma carteira ótima, pois é possível se formar um portfólio (com ativos de risco e ativos livres de risco) que possua o mesmo retorno esperado com menor nível de risco (dado pelo desvio-padrão da carteira). O contrário ocorre com o ponto A.

Os portfólios dos investidores são formados conforme a aversão de risco individual, i.e., conforme as curvas de indiferença de cada investidor. Os portfólios a serem escolhidos pelos investidores são aqueles em que a reta CML é tangente a curva de indiferença mais elevada do investidor, ou seja, aquela que promove um maior nível de satisfação para o investidor. Dessa forma, o portfólio assim composto oferecerá ao investidor o maior retorno possível conforme seu nível de aceitação (aversão) de risco (*Ibid.*, p. 88).

2.1.1 Propriedades matemáticas do conjunto eficiente

As propriedades matemáticas serão mostradas conforme Campbell *et al.* (1997, p. 184-188) e Cochrane (2001, p. 84-86). Primeiramente, começaremos com a seguinte notação

matemática: Tomemos N ativos com risco com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$. Assume-se que os retornos esperados de pelo menos dois ativos diferem e a matriz de covariâncias é de posto completo¹¹. Define-se \mathbf{w}_a como um vetor de pesos para um portfólio arbitrário a com pesos somando 1. O portfólio a tem retorno médio $\mu_a = \mathbf{w}_a^T \boldsymbol{\mu}$ e variância $\sigma_a^2 = \mathbf{w}_a^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w}_a$. A covariância entre dois portfólios a e b é dada por $\mathbf{w}_a^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w}_b$. Primeiramente, não consideraremos o ativo livre de risco.

Uma condição suficiente para a existência da fronteira eficiente é que haja pelo menos dois ativos cujos retornos esperados diferem e que a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$ seja de posto completo (COCHRANE, 2001, p. 84).

Definição Portfólio p é de variância mínima dentre todos com retorno médio μ_p se o vetor de pesos do portfólio \mathbf{w}_p é a solução para o seguinte programa matemático:

$$\min_{\{\mathbf{w}\}} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} \quad (2.13)$$

sujeito a

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \mu_p \quad (2.14)$$

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota} = 1 \quad (2.15)$$

sendo que $w_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ e $\boldsymbol{\iota}_{(1 \times N)} = [1, \dots, 1]$.

Para resolver este problema, formamos o lagrangiano L :

$$L = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} + \delta_1 (\mu_p - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}) + \delta_2 (\mathbf{1} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota}) \quad (2.16)$$

Calculando a derivada de L em relação a \mathbf{w} e igualando a zero, obtemos:

$$2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} - \delta_1 \boldsymbol{\mu} - \delta_2 \boldsymbol{\iota} = 0 \quad (2.17)$$

Substituindo (2.14) e (2.15) em (2.17):

¹¹Posto ou *rank* de uma matriz é o número de linhas ou colunas linearmente independentes (LI). Posto completo significa que todas as linhas ou colunas da matriz são LI. Ou seja, os valores de uma linha da matriz não podem ser determinados através de uma combinação linear dos valores de outra linha da matriz.

$$\mathbf{w}_p^* = \mathbf{g} + \mathbf{h}\mu_p \quad (2.18)$$

e

$$\sigma_p^{2*} = \frac{C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B}{D} \quad (2.19)$$

sendo que

$$\mathbf{g}_{N \times 1} = \frac{1}{D} [B(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\iota}) - A(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})] \quad (2.20)$$

$$\mathbf{h}_{N \times 1} = \frac{1}{D} [C(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}) - A(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\iota})] \quad (2.21)$$

com $A = \boldsymbol{\iota}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $B = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $C = \boldsymbol{\iota}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\iota}$, e $D = BC - A^2$.

Os principais resultados advindos da (2.18) serão mencionados a seguir:

- ▶ Como mostrado em (2.19), σ_p^{2*} é uma função quadrática de μ_p . Como a raiz quadrada de uma parábola é uma hipérbole, o espaço formado pela média e pelo desvio-padrão dos ativos de um portfólio de fronteira será uma região hiperbólica.
- ▶ Qualquer portfólio que seja uma combinação linear de pelo menos dois portfólios de mínima variância (ou portfólio de fronteira) é igualmente de mínima variância (ou de fronteira). Este resultado vem do fato que \mathbf{w}_p^* é uma função linear de μ_p . Dessa forma, se $\mu_3 = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$, então $w_3 = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2$ (COCHRANE, 2001, p. 85).
- ▶ Sejam p e r dois portfólios de fronteira. A covariância do portfólio p com o portfólio r é dada por

$$Cov(R_p, R_r) = \frac{C}{D} \left(\mu_p - \frac{A}{C} \right) \left(\mu_r - \frac{A}{C} \right) + \frac{1}{C} \quad (2.22)$$

- ▶ Definindo o portfólio g como o portfólio de fronteira global, temos

$$\mathbf{w}_g = \frac{1}{C} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\iota} \quad (2.23)$$

$$\mu_g = \frac{A}{C} \quad (2.24)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{C} \quad (2.25)$$

- Para cada portfólio de fronteira p , exceto o portfólio de fronteira global g , existe um único portfólio de fronteira que tem covariância zero com p , que é denominado de portfólio com beta zero em relação a p . A covariância do portfólio g com qualquer outro ativo ou portfólio de ativos a é

$$Cov(R_g, R_a) = \frac{1}{C} \quad (2.26)$$

Os portfólios de fronteira que possuem retorno esperado maior ou igual ao retorno esperado do portfólio de fronteira global g são ditos portfólios eficientes. Estes portfólios têm o maior retorno esperado de todos os portfólios com menor ou igual variância. Graficamente, temos:

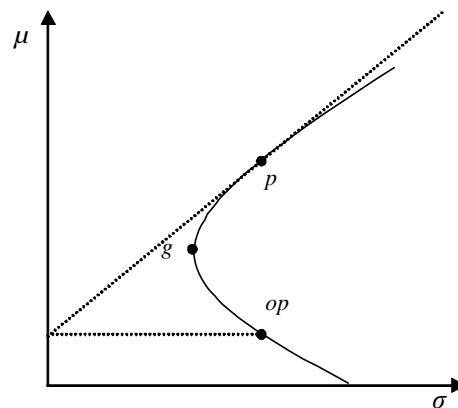


Figura 2.4 - Portfólios de fronteira sem a taxa livre de risco

Pela Figura 2.4, o portfólio de fronteira global é o g ; o portfólio p pode ser considerado eficiente e o portfólio op pode ser considerado um portfólio zero-beta em relação ao p .

- Considere uma regressão múltipla do retorno de qualquer portfólio R_a sobre o retorno de qualquer portfólio de fronteira R_p (exceto para o portfólio de fronteira global) e o retorno de seu associado portfólio zero-beta R_{op} .

$$R_a = \beta_o + \beta_1 R_{op} + \beta_2 R_p + \varepsilon_p \quad (2.27)$$

$$E(\varepsilon_p | R_p, R_{op}) = 0 \quad (2.28)$$

Os coeficientes de regressão são:

$$\beta_2 = \frac{Cov(R_a, R_p)}{\sigma_p^2} = \beta_{ap} \quad (2.29)$$

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}(R_a, R_{op})}{\sigma_{op}^2} = 1 - \beta_{ap} \quad (2.30)$$

$$\beta_o = 0 \quad (2.31)$$

sendo que β_{ap} é o beta do ativo a em relação ao portfólio p .

► O retorno esperado do ativo a será

$$\mu_a = (1 - \beta_{ap})\mu_{op} + \beta_{ap}\mu_p \quad (2.32)$$

Exemplo Sejam três portfólios hipotéticos A , B e C com retornos esperados distintos $\mu = [0.1 \ 0.2 \ 0.15]$ e matriz de covariâncias¹² $\Omega = \begin{bmatrix} 0.0100 & -0.0061 & 0.0042 \\ -0.0061 & 0.0400 & -0.0252 \\ 0.0042 & -0.0252 & 0.0255 \end{bmatrix}$. Utilizaremos a função *frontcon*¹³ do software MATLAB 7.0.4 a fim de gerar 500 portfólios eficientes. Dessa forma, temos:

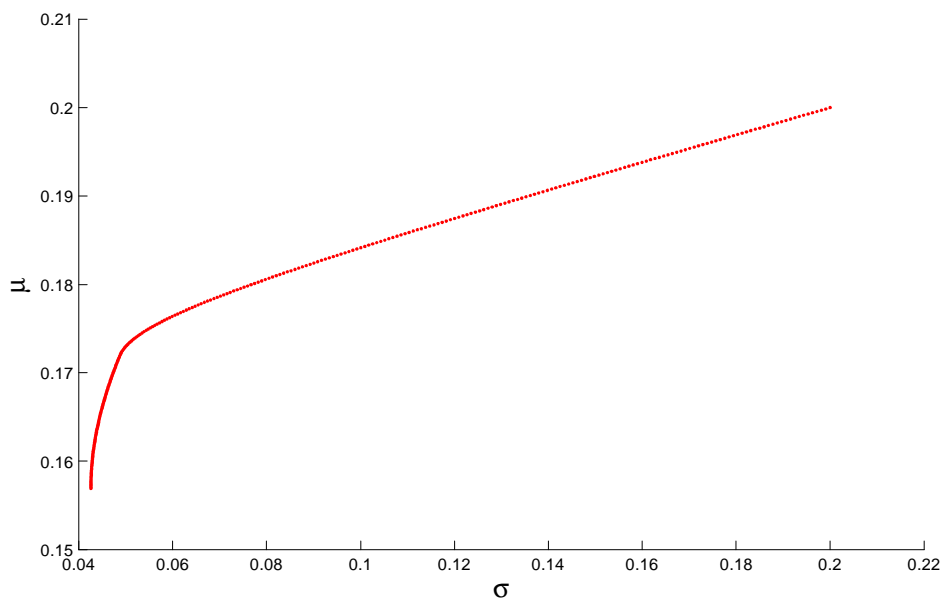


Figura 2.5 - Fronteira eficiente gerada a partir dos portfólios hipotéticos A, B e C

A seguir, iremos considerar a possibilidade de formar portfólios compostos de N ativos com

¹²Esta matriz é de posto completo.

¹³As entradas da função *frontcon* são o vetor de médias μ , a matriz de covariâncias Ω e o número de portfólios eficientes a serem gerados.

risco e um ativo livre de risco. Introduzindo um ativo livre de risco no modelo de construção de portfólios, os pesos dos ativos com risco no portfólio deixam de estar restritos a totalizar um, uma vez que $(1 - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota})$ pode ser investido no ativo livre de risco.

Considerando um ativo livre de risco com retorno R_f , o portfólio de fronteira com retorno esperado μ_p será a solução para a otimização restrita:

$$\min_{\{\mathbf{w}\}} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} \quad (2.33)$$

sujeito a $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + (1 - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota}) R_f = \mu_p$.

Para resolver este problema, formamos o lagrangiano L , derivamos com respeito a w e igualamos a zero. Dessa forma, obtemos:

$$2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{w} - \delta(\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota}) = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

e então,

$$\mathbf{w}_p^* = \frac{(\mu_p - R_f)}{(\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota})} \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota}) \quad (2.35)$$

Podemos expressar \mathbf{w}_p^* como um escalar que depende da média de p , denotada por c_p , multiplicada por um vetor de pesos do portfólio, que não depende de p

$$\mathbf{w}_p^* = c_p \bar{\mathbf{w}} \quad (2.36)$$

sendo que

$$c_p = \frac{(\mu_p - R_f)}{(\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota})} \quad (2.37)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota}) \quad (2.38)$$

Dessa forma, com um ativo livre de risco R_f , todos os portfólios de fronteira são uma combinação de um dado portfólio de ativos com risco, com pesos proporcionais a $\bar{\mathbf{w}}$, com o ativo sem risco. Este portfólio de ativos com risco é chamado de portfólio de tangência q (é o portfólio que pertence a fronteira eficiente tangenciando a reta CML) com vetor de pesos \mathbf{w}_q^*

$$\mathbf{w}_q^* = \frac{1}{\boldsymbol{\iota}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota})} \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - R_f \boldsymbol{\iota}) \quad (2.39)$$

É útil proceder-se aos testes do CAPM com base no retorno em excesso esperado por unidade de risco. O índice de Sharpe oferece esta medida. Tal medida foi criada por Sharpe (1966), propondo o termo *reward-to-variability ratio*, e desde então popularizou-se como a principal medida de desempenho de fundos de investimento. Para qualquer ativo ou portfólio, o índice de Sharpe é definido como a média do retorno em excesso dividida pelo desvio-padrão do retorno,

$$sr_a = \frac{\mu_a - R_f}{\sigma_a} \quad (2.40)$$

Na Figura abaixo, o índice de Sharpe é a inclinação da linha que vai do ativo sem risco ($R_f, 0$) ao portfólio (μ_a, σ_a) ¹⁴. O portfólio q pode ser caracterizado como o portfólio com máximo índice de Sharpe dentre todos os portfólios de ativos com risco. Fazer o teste de validade do CAPM para um dado portfólio de mercado equivale a testar se o índice de Sharpe deste portfólio de mercado é o maior dentre o conjunto de índices de Sharpe considerando todos os portfólios possíveis.

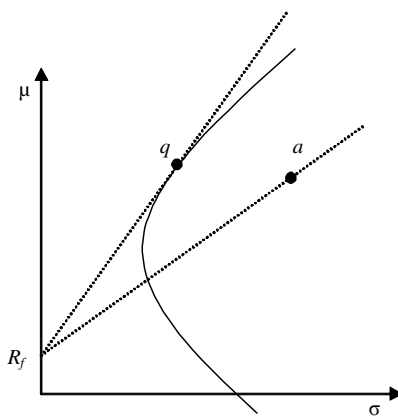


Figura 2.6 - Portfólios de fronteira com ativo livre de risco

A abordagem topológica proposta por Hansen e Richard (1987)¹⁵ permite a incorporação de informações condicionais na fronteira eficiente. Dessa forma, estudos relacionados ao CAPM condicional dependem deste resultado.

¹⁴Este índice será sempre positivo, pois a reta formada pelos pontos $(R_f, 0)$ e (μ_a, σ_a) é crescente.

¹⁵Ver detalhes em Cochrane (2001, p. 86-100).

2.2 Derivação econômica do modelo CAPM não-condicional

Segundo Bonomo *et al.* (2004, p. 18), o modelo CAPM é obtido das condições de primeira ordem para que um portfólio seja de fronteira e das condições de *market clearing*. Este resultado é obtido, conforme já foi mencionado nas propriedades matemáticas do conjunto eficiente, a partir do fato de que qualquer portfólio que seja uma combinação linear de portfólios de fronteira (PF) é igualmente de fronteira, e também a partir das condições necessárias e suficientes para que a escolha ótima de um indivíduo seja um PF. Nesse caso, a condição de *market clearing* implica que o portfólio de mercado seja uma combinação convexa dos portfólios ótimos escolhidos na alocação ótima dos indivíduos e que, conseqüentemente, seja também um PF. O CAPM é obtido a partir deste resultado, uma vez que o portfólio de mercado é identificado como um PF.

Para se chegar a esse resultado é preciso, em primeiro lugar, definir o conceito de separação em dois fundos. Tem-se separação em dois fundos quando, dado um portfólio factível, existe um portfólio formado por dois fundos mútuos de tal modo que um indivíduo o prefira fracamente em relação ao portfólio original. Podemos identificar estes dois fundos mútuos como PF. O fato de esses dois portfólios serem de fronteira garante que qualquer combinação linear deles também o seja. Como o vetor de pesos de qualquer PF é unicamente determinado e quaisquer dois PF geram toda a fronteira, quaisquer dois PF podem ser fundos mútuos, o que implica que cada indivíduo detém um PF. O mercado em equilíbrio implica que o portfólio de mercado é uma combinação convexa de PF e que, portanto, também será de fronteira.

O CAPM, sendo um modelo, foi construído em cima de certas hipóteses simplificadoras da realidade. Ao se proceder a essas simplificações, não interessa discutir a razoabilidade das hipóteses, mas sim, testar um modelo do ponto de vista de sua capacidade para ajudar a entender e prever o processo modelado. Segundo Nakamura (1998, p. 25) e Iudícibus *et al.* (2004, p. 89-90), são elas:

- Os investidores buscam maximizar a utilidade esperada de suas riquezas através de escolhas de carteiras de títulos com base em seus retornos e desvios-padrão, sobre o horizonte de um período, pois no modelo CAPM não-condicional uniperiódico se pressupõe que o investidor consome toda a sua riqueza no próximo período;

- ▶ Os investidores nunca estão satisfeitos, buscando sempre o portfólio com maior retorno esperado, dentre os portfólios com mesmo risco;
- ▶ Os investidores são avessos ao risco, de modo que diante de dois portfólios alternativos com igual retorno esperado, escolherão o que tiver menor desvio-padrão;
- ▶ Todos os títulos são perfeitamente divisíveis e perfeitamente líquidos, i.e., são negociados por inteiro ou por suas frações ao preço corrente;
- ▶ Há uma taxa livre de risco à qual o investidor pode emprestar ou tomar emprestado qualquer quantia, e não há restrições para vendas a descoberto;
- ▶ Impostos ou custos de transação são irrelevantes;
- ▶ Todos os investidores têm o horizonte de um período;
- ▶ A taxa livre de risco é a mesma para todos os investidores;
- ▶ Há informação livre e instantaneamente disponível para todos os investidores;
- ▶ Os investidores têm expectativas homogêneas, ou seja, têm as mesmas percepções em relação a retornos esperados, desvios-padrão e covariâncias entre os retornos dos portfólios;
- ▶ as operações individuais de investidores de compra e venda de títulos não afetam o preço de mercado;
- ▶ os investidores são racionais e preferem mais consumo, em qualquer período, e são indiferentes quanto à forma de financiamento desse consumo.

Como se pode observar, é feita a suposição de que os mercados são perfeitos, i.e., não existem barreiras que impeçam o livre investimento dos indivíduos, tais como: divisibilidade finita, impostos, custos de transação e taxas diferentes de captação e aplicação.

Além do mais, como há completa concordância entre os investidores acerca das estimativas dos retornos esperados dos ativos, bem como das variâncias, covariâncias e do nível da taxa livre de risco, é razoável admitir que os investidores analisariam os ativos e determinariam o mesmo portfólio de tangência, obtendo, em equilíbrio, a mesma composição de pesos ótimos. Tendo o mesmo conjunto eficiente, a única razão na qual os investidores escolheriam portfólios diferentes seria a existência de curvas de indiferença específicas (NAKAMURA, 1998, p. 26).

Todos os investidores aplicariam no mesmo portfólio de tangência (ativos com risco), sendo

que a combinação com o ativo livre de risco é que depende das curvas de indiferença.

Em equilíbrio, cada investidor desejará manter um certo montante positivo de cada ativo com risco. Ademais, o preço corrente de mercado de cada ativo estará num nível tal que o número de ações demandadas seria igual ao número de ações ofertadas. Ainda, o ativo livre de risco estará num nível em que o total emprestado igualará o montante aplicado. Em equilíbrio, portanto, as proporções do portfólio de tangência corresponderão às proporções do que é conhecido como portfólio de mercado (*Ibid*, p. 26).

O portfólio de mercado é um portfólio consistindo de todos os ativos da economia, cuja proporção investida em cada ativo corresponda ao seu valor relativo de mercado, que é igual ao valor de mercado agregado do ativo dividido pelo valor de mercado agregado de todos os ativos.

Em teoria, o portfólio de mercado é formado por outros tipos de investimento além de ações, tais como: debêntures, imóveis, obras de arte etc. Dada a impossibilidade de se adquirir o portfólio de mercado, toma-se normalmente uma *proxy*, tal como o S&P 500, nos EUA, e o índice BOVESPA, no Brasil.

Segundo Ingersoll Jr (1987, p. 126), portfólios eficientes são aqueles para os quais não existem outros com retorno esperado igual ou superior e risco menor. Sob a hipótese de um agente representativo em um mercado perfeito, Ingersoll Jr (1987, p. 195) demonstra que o conjunto de portfólios eficientes é convexo e, em particular, o portfólio de mercado é eficiente em um mercado completo, o que não é necessariamente satisfeito quando o mercado é incompleto¹⁶. Um mercado completo garante a existência de um agente representativo e, assim, afirma-se que um agente representativo é aquele para o qual o portfólio de mercado é o portfólio ótimo de se possuir (*Ibid.*, p. 217).

A criação de valores mobiliários financeiros não altera o equilíbrio alcançado em um mercado incompleto visto que estes "novos" ativos já podiam ser obtidos a partir dos ativos complexos comercializados; similarmente, o equilíbrio a partir de um agente representativo também não

¹⁶Um mercado financeiro é incompleto quando nem todo o pagamento numa data futura T pode ser replicado com todos os ativos existentes no mercado (ZIMMER, 2005, p.9).

é afetado. Em relação ao CAPM, por se tratar de um modelo de precificação de ativos por argumentos de equilíbrio, convém tratar brevemente das conseqüências da introdução de valores mobiliários financeiros a fim de completar um mercado. Em mercados incompletos a precificação de ativos via CAPM torna-se inválida, sendo o modelo incorreto tanto para os ativos originais da economia como para os que foram introduzidos. Este fato não ocorre caso o mercado original, i.e., o mercado anterior à inserção dos novos valores mobiliários financeiros, for efetivamente completo, haja vista que não haverá incentivo por parte de nenhum dos agentes para que sejam transacionados os novos ativos criados (*Ibid.*, p. 205).

Entretanto, a não-validez do CAPM pode ser evitada até mesmo em mercados que não sejam efetivamente completos. Caso os ativos complexos existentes na economia representem investimentos irreversíveis, previamente fixados ou que sejam investimentos discricionários com retornos estocásticos constantes à escala e, além disso, os retornos dos ativos complexos desconsiderando-se os valores mobiliários financeiros possuam distribuição elíptica multivariada, é demonstrado que a precificação por equilíbrio via CAPM é válida tanto no mercado original como no mercado efetivamente completo pela introdução de novos valores mobiliários financeiros, com a ressalva de que o portfólio de mercado pode ser diferente antes e após o mercado se tornar efetivamente completo, assim como a estrutura de covariância entre os ativos (*Ibid.*, p. 206).

As derivações de Sharpe (1964) e Lintner (1965) para o modelo CAPM assumem a existência de um banco ideal constante.¹⁷ Para esta versão, o retorno esperado do ativo i é

$$E[R_i] = R_f + \beta_{im}(E[R_m] - R_f) \quad (2.41)$$

com

$$\beta_{im} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{Var[R_m]} \quad (2.42)$$

sendo que R_m é o retorno do portfólio de mercado, R_f é o retorno do ativo livre de risco e β_{im} é uma medida do risco sistemático. A versão Sharpe-Lintner pode ser expressamente mais compactada em termos dos retornos em excesso $Z_i \equiv R_i - R_f$.

¹⁷Pode-se tomar e emprestar dinheiro à taxa livre de risco.

$$E[Z_i] = \beta_{im}E[Z_m] \quad (2.43)$$

com

$$\beta_{im} = \frac{Cov[Z_i, Z_m]}{Var[Z_m]} \quad (2.44)$$

sendo que Z_m representa o retorno em excesso em relação ao portfólio de mercado.

Na ausência da taxa livre de risco, Black (1972) derivou uma versão do CAPM mais geral. Nesta versão, conhecida por zero-beta, o retorno em excesso esperado do ativo i em relação ao retorno zero-beta R_{om} é linearmente relacionado com o seu beta. O modelo CAPM zero-beta terá a seguinte representação:

$$E[R_i] = E[R_{om}] + \beta_{im} (E[R_m] - E[R_{om}]) \quad (2.45)$$

sendo que R_m é o retorno do portfólio de mercado, e R_{om} é o retorno do portfólio zero-beta associado com R_m . Ele é definido como sendo o portfólio (não-observável) de mínima variância de todos os portfólios não-correlacionados com o portfólio de mercado.

2.2.1 Pré-requisitos conceituais

Distribuição elíptica multivariada Segundo Bonomo *et al.* (2004, p. 24), ao adotar o procedimento de estimação do modelo CAPM da versão Sharpe-Lintner¹⁸ assumindo normalidade multivariada, estamos estimando uma matriz de covariâncias dos estimadores de forma incorreta. Isso cria um viés nas estatísticas dos testes de hipóteses. Mackinlay e Richardson (1991) quantificam o viés e mostram que, ao assumir a hipótese de normalidade multivariada, com retornos de ações IID, em detrimento da hipótese de distribuição t de Student multivariada, com retornos de ações IID, estaremos rejeitando a hipótese nula de validade do modelo mais frequentemente do que deveríamos. Os autores declaram que o viés é reflexo do fato de que a variância condicional dos erros no modelo, que assume normalidade, não é mais independente do retorno do portfólio de mercado. Zellner (1971 *apud*

¹⁸Estes comentários também valem para a versão zero-beta (CHOU, 2000).

MACKINLAY & RICHARDSON, 1991, p. 518) chega ao seguinte resultado para o caso da t multivariada:

$$\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t | Z_m) = \left[\frac{\nu - 2}{\nu - 1} \right] \left[1 + \frac{(Z_m - \mu_m)^2}{(\nu - 2)\sigma_m^2} \right] \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.46)$$

sendo que:

$\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t | Z_m)$ é a variância condicional dos erros no modelo CAPM.

Z_m representa o excesso de retorno do portfólio de mercado m no instante t .

ν representa o número de graus de liberdade da distribuição t multivariada.

μ_m representa a média do excesso de retorno do portfólio m .

σ_m^2 representa a variância não-condicionada do excesso de retorno do portfólio m .

$\boldsymbol{\Sigma}$ representa a matriz de covariâncias do termo de erro $\boldsymbol{\epsilon}_t$.

Segundo Campbell *et al.* (1997, p. 210), a distribuição t multivariada¹⁹ para os retornos de ações pode ser motivada tanto empiricamente quanto teoricamente. Hamada e Valdez (2004) derivaram o modelo CAPM, na versão Sharpe-Lintner, sob a consideração de que o vetor (R_i, R_m) pertença à classe das distribuições elípticas (e.g. distribuição t multivariada e distribuição normal multivariada).

Huffer e Park (2005) construíram um teste a fim de avaliar a hipótese de distribuição elíptica simétrica multivariada. Este teste não pode ser aplicado no nosso contexto de retornos de ações, pois há a suposição de que as p observações provenientes dos vetores aleatórios $p \times 1$ sejam IID²⁰. Portanto, admitiremos a plausibilidade da t multivariada conforme argumentos passados.

Definição: Um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ tem uma distribuição elíptica com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ se a função característica²¹ puder ser expressa da seguinte forma:

$$E \left[e^{i\mathbf{t}^T \mathbf{X}} \right] = \exp \left(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} \right) g_p \left(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right) \quad (2.47)$$

¹⁹A utilização da distribuição t multivariada em retornos de ações implica consistência entre a análise retorno esperado-variância e a maximização da utilidade esperada. Ver Ingersoll Jr (1987, p. 104).

²⁰No próximo capítulo, concluímos pela rejeição da hipótese IID em uma amostra significativa de ativos com alta liquidez.

²¹A função característica de uma *v.a.* X é definida como: $C(t) = E \left[e^{itX} \right]$.

sendo que $g_p(\cdot)$ é uma função escalar conhecida como geradora de densidade²², $\mathbf{t}^T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ e Σ é dado por:

$$\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad (2.48)$$

para alguma matriz \mathbf{A} $n \times m$.

Se a variável aleatória X apresenta distribuição elíptica, então a representação poderá ser expressa do seguinte modo:

$$X \sim E_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g_p)$$

Uma função de densidade de probabilidades (f.d.p.) elíptica será obtida pela seguinte expressão:

$$f_X(x) = \frac{c_p}{(\det[\Sigma])^{1/2}} g_p \left\{ (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.49)$$

sendo que c_p é a constante de normalização obtida por Landsman e Valdez (2002 *apud* HAMADA & VALDEZ, 2004, p. 7) de acordo com a expressão $\frac{\Gamma[p/2]}{\pi^{p/2}} \left[\int_0^\infty x^{p/2-1} g_p(x) dx \right]^{-1}$, $\boldsymbol{\mu}$ é o parâmetro de locação e Σ é a matriz de covariâncias.

Para a distribuição t multivariada, a função g_p será igual a:

$$g_p(x) = \left(1 + \frac{x}{\nu} \right)^{-\frac{(\nu+p)}{2}} \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.49), tem-se que:

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}) &= \frac{\frac{\Gamma[p/2]}{\pi^{p/2}} \left[\int_0^\infty x^{p/2-1} \left(1 + \frac{x}{\nu} \right)^{-\frac{(\nu+p)}{2}} dx \right]^{-1}}{\det[\Sigma]^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\nu} \right\}^{-\frac{(\nu+p)}{2}} \\ &= \frac{\Gamma \left[\frac{p+\nu}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{\nu}{2} \right] [\pi(\nu)]^{p/2} \det[\Sigma]^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\nu} \right\}^{-\frac{(\nu+p)}{2}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Podemos também expressar (2.51) da seguinte forma:

²²As condições necessárias e suficientes para que uma função escalar seja um geradora de densidade se encontram em Fang *et al.* (1990 *apud* HAMADA & VALDEZ, 2004).

$$f_X(x) = \frac{(\nu)^{\nu/2} \Gamma\left[\frac{p+\nu}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right] \pi^{p/2} \det[\Sigma]^{1/2}} \{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \nu\}^{-\frac{(\nu+p)}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.52)$$

Chou (2000, p. 470) diz que as distribuições elípticas podem servir para a validade da estrutura de eficiência média-variância devido as mesmas serem, parcialmente ou totalmente (e.g. dist. normal), caracterizadas pela média e pela variância.

A classe de distribuições elípticas possui a propriedade de linearidade que é muito útil na teoria de portfólios, ou seja, se assumirmos que os retornos de ativos possuem distribuição elíptica, então o retorno do portfólio destes ativos terá distribuição elíptica. Matematicamente, se $X_k \sim E_1(\boldsymbol{\mu}_k, \sigma_k^2, g_1)$ com $k = 1, \dots, n$, então a soma $\mathbf{S} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ terá a seguinte distribuição:

$$\mathbf{S} \sim E_n(\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}^T \Sigma \boldsymbol{\nu}, g_1) \quad (2.53)$$

Um resultado crucial a ser utilizado na derivação do modelo CAPM é o Lemma de Stein para distribuições elípticas. Sendo assim:

Lemma de Stein Seja um vetor bivariado $(X, Y) \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, g_2)$ com gerador de densidade denotado por g_2 , $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$. Se h é uma função diferenciável de X , então:

$$Cov[h(X), Y] = \frac{c}{\tilde{c}} \times Cov[X, Y] \times E[h'(\tilde{X})] \quad (2.54)$$

sendo que $\tilde{X} \sim E_1(\mu_X, \sigma_X^2, -\int g_2)$ e \tilde{c} é a constante de normalização de \tilde{X} .

É importante notar que não há a necessidade de que as variáveis X e Y devam ser IID a fim de se obter o resultado mostrado em (2.54). A classe de distribuições elípticas (e.g. t multivariada) proporciona uma maior flexibilidade para a modelagem das caudas da distribuição com a possibilidade de que os retornos dos ativos possuam valores extremos com probabilidades significantes. A estrutura de dependência dos retornos será captada pela matriz de covariâncias e pela função geradora de densidade.

Equação básica para a precificação de ativos Esta revisão de conceitos se encontra na obra de Cochrane (2001, p. 6-8). O comportamento dos investidores é modelado pela

função utilidade $U(c_t, c_{t+1})$ na qual é definida sobre valores de consumo atual e futuros,

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \quad (2.55)$$

sendo que c_t denota o consumo na data t . Frequentemente utiliza-se de uma função utilidade potência, cuja expressão é dada por:

$$u(c_t) = \frac{1}{1-\gamma} c_t^{1-\gamma} \quad (2.56)$$

O limite quando $\gamma \rightarrow 1$ é

$$u(c) = \ln(c) \quad (2.57)$$

A expressão (2.57) é denominada de função utilidade logarítmica. Na função utilidade logarítmica, o consumo do investidor é proporcional a sua riqueza. A função utilidade captura o desejo fundamental por mais consumo, ao invés do desejo por objetivos intermediários tais como a média e a variância do portfólio. A função utilidade $u(\cdot)$ é crescente, refletindo um desejo por mais consumo, e côncava, refletindo um declínio do valor marginal do consumo. Assume-se que os investidores podem livremente comprar ou vender o *payoff* x_{t+1} ²³ conforme o desejo deles ao preço p_t . Quanto eles deveriam comprar ou vender? Para encontrar a solução desta resposta, denota-se por e_t o nível de riqueza em t , e ξ a quantidade de ativos que ele escolhe comprar. Então, o problema será:

$$\max_{\{\xi\}} \{u(c_t) + E_t[\beta u(c_{t+1})]\} \quad (2.58)$$

Ou seja, qual é a cesta de ativos que maximiza (2.58), considerando o desejo de consumo do investidor em t (hoje) e o valor presente do seu desejo de consumir em c_{t+1} descontado pela taxa de impaciência ao consumo β característica do investidor.

sujeito às restrições

$$c_t = e_t - p_t \xi \quad (2.59)$$

²³Não se deve confundir o conceito de *payoff* em x_{t+1} com o conceito de lucro ou retorno; o *payoff* em x_{t+1} equivale ao investimento em x_{t+1} .

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1}\xi \quad (2.60)$$

Substituindo (2.59) e (2.60) em (2.58), obtemos:

$$\max_{\{\xi\}} \{u(e_t - p_t\xi) + E_t[\beta u(e_{t+1} + x_{t+1}\xi)]\} \quad (2.61)$$

Derivando (2.61) com respeito a ξ e igualando a zero, obtemos

$$p_t u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}] \quad (2.62)$$

ou

$$p_t = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right] \quad (2.63)$$

O investidor compra mais ou menos do ativo até que a validade da condição de primeira ordem expressa em (2.63) seja satisfeita.

Sendo que m será denominado de fator de desconto estocástico (ou taxa de substituição marginal). Assim,

$$m \equiv m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (2.64)$$

Se não houvesse incerteza, poderíamos expressar os preços via a equação padrão do valor presente:

$$p_t = \frac{1}{r_f} x_{t+1} \quad (2.65)$$

sendo que r_f é a taxa bruta livre de risco.

Portanto, (2.63) se tornará:

$$p_t = E_t[m_{t+1}x_{t+1}] \quad (2.66)$$

ou

$$p = E[mx] \quad (2.67)$$

Para ações, o *payoff* x_{t+1} será igual ao preço p_{t+1} mais o dividendo d_{t+1} . Frequentemente, divide-se o *payoff* x_{t+1} pelo preço p_t a fim de obter o retorno bruto

$$r_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t} \quad (2.68)$$

Aplicando $\log(\cdot)$ em (2.68), obtemos o retorno composto continuamente R_{t+1} ,

$$R_{t+1} = \ln \left(\frac{x_{t+1}}{p_t} \right) \quad (2.69)$$

Supondo a existência de um retorno R como um *payoff* de preço unitário. Se você pagar um real hoje, o retorno será a quantidade de reais ou de unidades de consumo que você obterá amanhã. Dessa forma,

$$1 = E[mR] \quad (2.70)$$

Como o ativo livre de risco R_f é independente do fator m ,

$$R_f = 1/E[m] \quad (2.71)$$

Somente o risco sistemático gera uma correção de risco ao preço. A fim de dar significado a esta frase, podemos decompor um *payoff* x em uma parte correlacionada como o fator m e uma outra parte idiossincrática não correlacionada com o fator m ,

$$x = \text{proj}(x \mid m) + \epsilon \quad (2.72)$$

Então, o preço do resíduo ou do risco idiossincrático é zero, e o preço de x é o mesmo que o preço de sua projeção em m . A projeção de x em m é a parte de x no qual é perfeitamente correlacionada com m . O componente idiossincrático de qualquer *payoff* x é a parte não-correlacionada com m . Projeção significa uma regressão linear sem constante,

$$\text{proj}(x \mid m) = \frac{E[mx]}{E[m^2]}m \quad (2.73)$$

O preço da $\text{proj}(x \mid m)$ resultará em:

$$p(\text{proj}(x \mid m)) = p \left(\frac{E[mx]}{E[m^2]}m \right) = E \left(\frac{E[mx]}{E[m^2]}m^2 \right) = E(mx) = p(x) \quad (2.74)$$

Sendo assim, os ativos que se encontram na fronteira eficiente são perfeitamente correlacionados uns com os outros e com o fator m . Pode-se construir um fator de desconto m a partir de qualquer retorno da fronteira eficiente (exceto R_f) (COCHRANE, 2001, p. 20).

Cochrane (2001, p. 20-21), declara a seguinte propriedade para a fronteira eficiente:

- Cada ponto da fronteira eficiente apresenta correlação negativa perfeita com o fator de desconto estocástico m (e correlação positiva perfeita com o consumo), portanto, em um modelo uniperiódico, pode-se escolher constantes a e b tal que:

$$m = a + bR_{FR} \quad (2.75)$$

sendo que R_{FR} é qualquer portfólio de fronteira. Para o caso do modelo CAPM não-condicional uniperiódico, R_{FR} será fixado como sendo o portfólio de mercado (ou portfólio de riqueza) R_m (COCHRANE, 2001, p. 152). O fator de desconto m será denotado por m^* ,

$$m^* = a + bR_m \quad (2.76)$$

Para o modelo CAPM zero-beta, o retorno do portfólio zero-beta R_{om} associado com o portfólio de mercado (ver Figura 2.4) terá a seguinte propriedade:

$$Cov[m^*, R_{om}] = 0 \quad (2.77)$$

Dessa forma,

$$E[R_{om}] = 1/E[m^*] \quad (2.78)$$

Como $Cov[A, B] = E[AB] - E[A]E[B]$, para quaisquer *v.a.* A e B , a equação (2.70) pode ser escrita da seguinte forma:

$$1 = E[m^*]E[R_i] + Cov[m^*, R_i] \quad (2.79)$$

Substituindo (2.71) em (2.79), obtemos:

$$E[R_i] - R_f = -R_f \cdot Cov[m^*, R_i] \quad (2.80)$$

Analogamente, substituindo (2.78) em (2.79), obtemos:

$$E[R_i] - E[R_{om}] = -E[R_{om}] \cdot Cov[m^*, R_i] \quad (2.81)$$

Substituindo R_i por R_m em (2.80), obtemos:

$$E[R_m] - R_f = -R_f \cdot Cov[m^*, R_m] \quad (2.82)$$

Dividindo (2.80) por (2.82), teremos:

$$\frac{E[R_i] - R_f}{E[R_m] - R_f} = \frac{Cov[m^*, R_i]}{Cov[m^*, R_m]} \quad (2.83)$$

Rearrajando (2.83), obtemos:

$$E[R_i] = R_f + \frac{Cov[m^*, R_i]}{Cov[m^*, R_m]} \cdot (E[R_m] - R_f) = R_f + \beta_{im}^* (E[R_m] - R_f) \quad (2.84)$$

sendo que o componente β_{im}^* é não-observável, pois não conhecemos explicitamente o fator m^* .

Para que a condição de linearidade em (2.84) seja satisfeita, devemos supor algum tipo de função utilidade para m^* (e.g. logarítmica) e/ou alguma distribuição de probabilidades para o par (R_i, R_m) . Supondo que o par (R_i, R_m) tenha uma distribuição elíptica bivariada (e.g. distribuição t bivariada), podemos utilizar o Lemma de Stein para distribuições elípticas declarado em (2.54). Sendo assim, utilizando-se de (2.54), (2.76) e (2.64), β_{im}^* resultará em:

$$\beta_{im}^* = \frac{Cov[m^*, R_i]}{Cov[m^*, R_m]} = \frac{(c/\tilde{c}) \cdot Cov[a + bR_m, R_i] \cdot \beta E \left[\frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u''(\tilde{c}_t)} \right]}{(c/\tilde{c}) \cdot Cov[a + bR_m, R_m] \cdot \beta E \left[\frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u''(\tilde{c}_t)} \right]} \quad (2.85)$$

Como $Cov[A + B, C] = Cov[A, C] + Cov[B, C]$ e $Cov[aA, B] = aCov[A, B]$ ($a \in \mathbb{R}$), para quaisquer *v.a.* A , B e C , obtemos:

$$\begin{aligned} \beta_{im}^* &= \frac{Cov[a, R_i] + b \cdot Cov[R_m, R_i]}{Cov[a, R_m] + b \cdot Cov[R_m, R_m]} \\ &= \frac{Cov[R_m, R_i]}{Var[R_m]} = \beta_{im} \end{aligned} \quad (2.86)$$

A derivação econômica mostrada acima não supõe a condição de que os retornos de ações sejam IID. Além do mais, o Lemma de Stein em (2.85) nos possibilita a utilização da função

utilidade logarítmica²⁴. Cochrane (2001, p. 152-160), ao contrário, derivou o CAPM de Sharpe-Lintner via suposições de algumas funções de utilidade (e.g. exponencial, quadrática e a logarítmica). No caso da função logarítmica, Cochrane mostrou que a hipótese de normalidade multivariada e a da conjectura IID podem ser relaxadas.

Analogamente ao que foi realizado em (2.85), pode-se derivar o modelo CAPM zero-beta, utilizando-se de (2.81) ao invés de (2.80).

2.3 CAPM e Informação Contábil

Segundo Iudícibus *et al.* (2004, p. 91), o CAPM faz a conexão entre as taxas de retornos requeridas para uma ação (título) e as informações contábeis. A taxa de retorno requerida para uma ação, dada pelo CAPM, é utilizada como taxa de juros para cálculo do valor presente de um título, pois o valor corrente do título é expresso pelo valor presente dos fluxos de caixa futuros. A ligação entre os dados contábeis e o CAPM é muito simples: a Contabilidade fornece dados passados sobre os diversos fluxos de caixa, lucros, dividendos e outras informações, que podem ser utilizadas como parâmetros de avaliação da empresa, principalmente aquelas informações que possibilitam a projeção de dados futuros. Ou seja, se as informações contábeis fornecem evidências de comportamentos de fluxos de caixa futuros, estas são utilizadas como determinantes do valor de uma empresa. No caso de avaliação de entidades, o lucro é uma das principais figuras contábeis utilizadas como substituto do fluxo de caixa. Portanto, os lucros passados podem ser grandes fontes de informação sobre lucros futuros, e indiretamente, dos fluxos de caixa futuros. Mais especificamente, as informações contábeis que são divulgadas possuem a característica de poder ou não alterar as expectativas do mercado com relação ao valor da entidade. O CAPM, fornecendo um dos principais dados para avaliação de ativos, adicionado às informações contábeis disponíveis para o mercado, compõe uma parcela das ferramentas empíricas para se testar a relevância da informação contábil na avaliação de ativos, mais especificamente entidades e suas ações. Em outras palavras, o valor de uma entidade (ou de suas ações) é igual ao valor presente dos fluxos de caixa fu-

²⁴Rubinstein (1976) mostra que o decisor logarítmico é o mais racional economicamente. Esta função é crescente e côncava em todo seu domínio.

turos, dado pelas taxas de retorno requeridas para a entidade (expressas pelo CAPM). Caso informações contábeis alterem expectativas sobre o futuro da entidade, as taxas de retorno requeridas também estarão sendo alteradas, implicando alterações de preços correntes. Portanto, o CAPM pode ser utilizado para a verificação da relevância ou não das informações contábeis para o mercado de capitais, através do estabelecimento de relações entre alterações de informações contábeis e alterações de preços (de taxas de retorno requeridas).

Outro aspecto relevante da relação entre o CAPM e as informações contábeis são as possíveis indicações de risco que essas informações podem possuir. Por exemplo, se as alterações (ou novidades) de informações contábeis (e.g. lucro) estiverem relacionadas com alterações de risco (e.g. flutuações da variância esperada de fluxos de caixa futuros), a informação contábil pode estar sendo relevante na indicação do risco da entidade, o que altera a taxa de retorno requerida (portanto, altera os níveis de preços). Caso isso não ocorra, a informação tanto pode não ser relevante, como somente pode estar confirmando expectativas de mercado (*Ibid.*, p. 92).

O beta das empresas é uma medida da sensibilidade dos retornos de um título ou de um portfólio à variabilidade dos retornos do portfólio de mercado e pode ser calculado mediante regressão linear dos retornos das ações de uma determinada empresa, em oposição aos retornos dos índices do mercado acionário, conforme equação do modelo de mercado. Entretanto, dificuldades para utilização do beta de mercado podem surgir em ambientes nos quais o mercado acionário não é tão representativo de sua economia ou em casos em que a entidade não possua suas ações negociadas no mercado, por exemplo. Nesses ambientes, o beta contábil pode ser um substituto do beta de mercado, pois mediante "uma regressão do poder de lucro básico ($LAJIR^{25}/Ativos\ Totais$) de uma empresa, com o passar do tempo, em oposição ao poder de lucro básico médio de uma grande amostragem de empresas", pode-se estimar o risco de determinada empresa comparativamente às demais empresas daquele mercado. A denominação beta contábil é consequência dos dados inputados no modelo, pois, no lugar de dados obtidos do mercado acionário, o investidor utiliza dados provenientes das demonstrações contábeis, sendo utilizadas as médias e variâncias de índices (de retorno contábil, geralmente) como estimação do risco da empresa. Ou seja, pode-se realizar uma regressão

²⁵Lucro antes dos juros e do imposto de renda

dos retornos contábeis de ativos específicos da entidade (ou da entidade em sua totalidade) contra o retorno contábil médio dos ativos de uma grande amostra de empresas (*Ibid*, p. 93).

Normalmente, a literatura de análise de balanço apresenta a fórmula da rentabilidade do ativo como o quociente entre o lucro líquido (LL) e o total de ativos. No caso da formulação do beta contábil, ajusta-se aquele índice de rentabilidade, alterando-se o numerador em função das despesas financeiras e da carga tributária incidente sobre o lucro. Portanto, substitui-se o LL pelo LAJIR. A substituição do LL pelo LAJIR é necessária por motivos óbvios, afinal, o beta contábil trabalha com a regressão do índice de rentabilidade do ativo de uma empresa em oposição àquele índice de diversas outras empresas, durante determinado período de tempo. Como empresas diferentes têm estruturas de financiamento diferentes, incorrem em despesas financeiras significativamente distintas. Por outro lado, nós sabemos que a carga tributária é alterada ao longo do tempo, o que pode causar impactos significativos no lucro das empresas ao se analisar uma série de tempo. Daí por que somar ao lucro líquido as despesas financeiras e o Imposto de Renda (*Ibid*, p. 93).

Segundo Watts e Zimmerman (1986, p. 117-120 *apud* IUDÍCIBUS *et al.*, 2004, p. 93), se os lucros contábeis forem aproximadores dos fluxos de caixa, um beta contábil (dado pela covariância entre os lucros da entidade e os lucros do mercado, dividido pela variância dos lucros do mercado) poderia ser também um aproximador do beta da entidade. E mais, haveria a possibilidade de que os lucros contábeis fossem utilizados para obter estimativas do beta da entidade. Não só os lucros podem ser utilizados como fonte de estimativa do beta da entidade. Outras figuras contábeis também podem ser utilizadas, assim como dados contábeis das dívidas, das despesas financeiras, entre outros. Dessa forma, estes modelos construídos para se calcular o beta contábil podem ser validados estatisticamente via os testes econométricos mostrados neste trabalho.

Capítulo 3

Métodos econométricos

3.1 Abordagem por máxima verossimilhança (MV)

3.1.1 Versão Sharpe-Lintner

Toda a estrutura estatística relacionada a abordagem por MV foi consultada em Campbell *et al.* (1997, p. 188-207). Inicialmente, consideraremos que os investidores podem emprestar ou tomar emprestado qualquer quantia à taxa livre de risco, tratando-se, portanto, da versão Sharpe-Lintner do CAPM. Depois, eliminaremos esta premissa e analisaremos a versão zero-beta do CAPM.

Define-se \mathbf{Z}_t como um vetor dos retornos em excesso para N ativos (ou portfólios de ativos). Para estes N ativos, os retornos em excesso podem ser descritos com a utilização do modelo de mercado multivariado:

$$\mathbf{Z}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}Z_{mt} + \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (3.87)$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_t] = 0 \quad (3.88)$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T] = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.89)$$

$$E[Z_{mt}] = \mu_m, \quad E[(Z_{mt} - \mu_m)^2] = \sigma_m^2 \quad (3.90)$$

$$Cov[Z_{mt}, \boldsymbol{\epsilon}_t] = 0. \quad (3.91)$$

sendo que $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor de betas, Z_{mt} é o retorno em excesso do portfólio de mercado no tempo t , $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\epsilon}_t$ são vetores dos interceptos e dos resíduos, respectivamente. A implicação do modelo CAPM na versão Sharpe-Lintner para (3.87) é que todos os elementos do vetor $\boldsymbol{\alpha}$ são iguais a zero. Esta implicação advém do resultado de (2.43) ao qual mostra que $E[Z_i] = \beta_{im}E[Z_m]$, portanto, $E[\boldsymbol{\alpha}]$ deverá ser igual a zero em (3.87). Se todos os elementos

de α são iguais a zero, então o portfólio de mercado é um portfólio de tangência, ou seja, encontra-se na fronteira eficiente tangenciando a linha de mercado de capitais.

A abordagem por MV será utilizada a fim de obter estimadores para α e para β em um modelo irrestrito²⁶. O método dos mínimos quadrados obtém os mesmos estimadores para α e para β . Considerando a f.d.p. dos retornos em excesso condicionada aos retornos em excesso do mercado $f(\mathbf{Z}_t | Z_{mt})$. Assumindo-se **normalidade multivariada** para a f.d.p de \mathbf{Z}_t , temos:

$$f(\mathbf{Z}_t | Z_{mt}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) \right] \quad (3.92)$$

e desde que os retornos em excesso sejam **IID**, com T observações, a f.d.p. conjunta é:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_T \mid Z_{m1}, Z_{m2}, \dots, Z_{mT}) &= \prod_{t=1}^T p(\mathbf{Z}_t | Z_{mt}) \quad (3.93) \\ &= \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) \right] \quad (3.94) \end{aligned}$$

Dado (3.94) e as T observações, os parâmetros do modelo de mercado podem ser estimados via MV. Nesta abordagem, com certas condições de regularidade, os estimadores de MV são consistentes, assintoticamente eficientes, e assintoticamente normais²⁷. Para definir o estimador por MV, formaremos a função de log-verossimilhança \mathcal{L} , ao qual é, o logaritmo da f.d.p conjunta (3.94),

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Sigma) = -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) \quad (3.95)$$

Os estimadores de MV são os valores dos parâmetros aos quais maximizam $\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Sigma)$. A fim de encontrar estes estimadores, derivamos $\mathcal{L}(\alpha, \beta, \Sigma)$ com respeito a α , β e Σ , e igualamos

²⁶Os parâmetros α e β podem assumir quaisquer valores reais dentro do domínio destes parâmetros.

²⁷Isto significa que os estimadores por MV são os que possuem menor matriz de covariâncias dentre todos os outros estimadores não-viesados e, ainda, convergem assintoticamente para uma distribuição normal.

a zero às equações resultantes:

$$\hat{\alpha} = \hat{\mu} - \hat{\beta}\hat{\mu}_m \quad (3.96)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (\mathbf{Z}_t - \hat{\mu})(Z_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^T (Z_{mt} - \hat{\mu}_m)^2} \quad (3.97)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{z}_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}Z_{mt} \right) \left(\mathbf{z}_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}Z_{mt} \right)^T \quad (3.98)$$

sendo que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_{mt}.$$

As distribuições dos estimadores por MV condicionados aos retornos em excesso do mercado, $Z_{m1}, Z_{m2}, \dots, Z_{mT}$, seguem uma distribuição normal multivariada. As variâncias e covariâncias dos estimadores irrestritos podem ser derivadas através da matriz inversa de informação de Fischer²⁸. As distribuições condicionais são:

$$\hat{\alpha} \sim N \left(\alpha, \frac{1}{T} \left[1 + \frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \right) \quad (3.99)$$

$$\hat{\beta} \sim N \left(\beta, \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \right) \quad (3.100)$$

$$T\hat{\Sigma} \sim W_N(T-2, \Sigma) \quad (3.101)$$

A notação $W_N(T-2, \Sigma)$ indica que a matriz $T\hat{\Sigma}$ tem uma distribuição de Wishart com $(T-2)$ graus de liberdade e matriz de covariâncias Σ . Esta distribuição é uma generalização multivariada da distribuição qui-quadrado²⁹. A covariância de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é:

$$\text{Cov}[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = -\frac{1}{T} \left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \quad (3.102)$$

Σ é independente de $\hat{\alpha}$ e de $\hat{\beta}$.

Utilizando-se dos estimadores do modelo irrestrito, podemos formular um teste de Wald para

²⁸ $\hat{\Sigma} = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)$. Ver em Campbell *et al.* (1997, p. 538).

²⁹Ver detalhes em Muirhead (1983).

a seguinte hipótese nula:

$$H_o : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (3.103)$$

contra a seguinte hipótese alternativa,

$$H_1 : \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \quad (3.104)$$

O teste de Wald será:

$$J_0 = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T [\mathbf{Var}[\hat{\boldsymbol{\alpha}}]]^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.105)$$

$$= T \left[1 + \frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m} \right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \sim \chi_N^2 \quad (3.106)$$

Como $\boldsymbol{\Sigma}$ é desconhecido, a fim de utilizar J_0 para testar H_o , utilizaremos um estimador consistente para $\boldsymbol{\Sigma}$ em (3.106) e, então, a distribuição da hipótese nula convergirá assintoticamente para uma qui-quadrado com N graus de liberdade. A expressão mostrada em (3.98) pode servir como um estimador consistente para $\boldsymbol{\Sigma}$.

Contudo, neste caso não há a necessidade de recorrermos a teoria de distribuições para grandes amostras a fim de fazer inferências usando o teste de Wald. A distribuição amostral finita, que é desenvolvida por MacKinlay (1987) e Gibbons *et al.* (1989), poderá ser aplicada neste contexto via o seguinte teorema.

Teorema Seja um vetor \mathbf{x} com distribuição $\mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Omega})$, seja uma matriz \mathbf{A} distribuída com $W_m(n, \boldsymbol{\Omega})$ com ($n \geq m$), sendo que \mathbf{x} e \mathbf{A} são independentes. Então:

$$\frac{(n - m + 1)}{m} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} \sim F_{m, n-m+1} \quad (3.107)$$

Primeiramente, temos: $\mathbf{x} = \sqrt{T} \left[1 + \hat{\mu}_m^2 / \hat{\sigma}_m^2 \right]^{-1/2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{A} = T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, $m = N$, e $n = (T - 2)$. Então, pode-se definir o teste J_1 como:

$$J_1 = \frac{(T - N - 1)}{N} \left[1 + \frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m} \right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \sim F_{N, (T-N-1)} \quad (3.108)$$

A fim de considerar um terceiro teste, o teste da razão de log-verossimilhança, necessita-se dos estimadores do modelo restrito ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$). Analogamente ao modelo irrestrito, os estimadores

$\hat{\beta}^*$ e $\hat{\Sigma}^*$ do modelo restrito se originarão de (3.95). Portanto, obtemos:

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t Z_{mt}}{\sum_{t=1}^T Z_{mt}^2} \quad (3.109)$$

$$\hat{\Sigma}^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{Z}_t - \hat{\beta}^* Z_{mt} \right) \left(\mathbf{Z}_t - \hat{\beta}^* Z_{mt} \right)^T \quad (3.110)$$

As distribuições dos estimadores restritos sob a hipótese nula são:

$$\hat{\beta}^* \sim N \left(\beta, \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\hat{\mu}_m^2 + \hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \right) \quad (3.111)$$

$$T\hat{\Sigma}^* \sim W_N(T-1, \Sigma). \quad (3.112)$$

Denotando \mathcal{LR} como a razão de log-verossimilhança, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{LR} &= \mathcal{L}^* - \mathcal{L} \\ &= -\frac{T}{2} \left[\log \left| \hat{\Sigma}^* \right| - \log \left| \hat{\Sigma} \right| \right] \end{aligned} \quad (3.113)$$

sendo que \mathcal{L}^* é a função de log-verossimilhança do modelo restrito [basta substituir $\alpha = \mathbf{0}$ em (3.95)]. Para derivar (3.113), estamos considerando que a somatória no último termo de ambas as funções de log-verossimilhança (irrestrita e restrita), avaliadas pelos estimadores de MV, resulte em NT . Isto pode ser demonstrado para a função irrestrita (Tr denota o traço de uma matriz³⁰):

$$\begin{aligned} & (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) \\ &= \sum_{t=1}^T Tr \left[(\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) \Sigma^{-1} (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \right] \\ &= Tr \left[\hat{\Sigma}^{-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt}) (\mathbf{Z}_t - \alpha - \beta Z_{mt})^T \right] \\ &= Tr \left[\hat{\Sigma}^{-1} (T\hat{\Sigma}) \right] = T \cdot Tr [I] = NT \end{aligned} \quad (3.114)$$

Finalmente, sob a hipótese nula, -2 vezes a razão de log-verossimilhança apresenta distribuição qui-quadrado com graus de liberdade igual ao número de restrições (No nosso caso, o número de restrições será igual ao número de elementos do vetor α). Portanto, pode-se

³⁰O traço de uma matriz é igual a quantidade de elementos da diagonal principal.

testar H_o da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_2 &= -2\mathcal{L}\mathfrak{R} \\ &= T \left[\log \left| \hat{\Sigma}^* \right| - \log \left| \hat{\Sigma} \right| \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_N^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Jobson e Korkie (1982 *apud* CAMPBELL *et al.*, 1997, p. 196) sugerem um ajustamento em J_2 a fim de obter melhores propriedades no caso de amostras finitas. Dessa forma,

$$J_3 = \frac{\left(T - \frac{N}{2} - 2\right)}{T} J_2 \stackrel{a}{\sim} \chi_N^2 \quad (3.116)$$

Uma interpretação econômica poderá ser realizada através do teste J_1 utilizando resultados provenientes das propriedades matemáticas do conjunto eficiente. Gibbons *et al.* (1989) mostraram que

$$J_1 = \frac{(T - N - 1)}{N} \left(\frac{\frac{\hat{\mu}_q^2}{\hat{\sigma}_q^2} - \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}}{1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}} \right) \quad (3.117)$$

sendo que o portfólio denotado por q representa o portfólio de tangência *ex post* construído como (2.35). Vale a pena lembrar que dentre todos os portfólios, aquele que possui o maior índice de Sharpe ao quadrado é o portfólio de tangência. Assim, quando o portfólio de mercado *ex post* é o portfólio de tangência, J_1 será igual a zero, e à medida em que o quadrado do índice de Sharpe da carteira de mercado diminui, J_1 aumenta, indicando uma evidência mais forte contra a eficiência da carteira de mercado. Portanto, a eficiência da carteira de mercado é tanto mais provável quanto menor for o valor calculado de J_1 .

3.1.2 Versão zero-beta

Na ausência da taxa livre de risco considera-se a versão zero-beta mostrada em (2.45). O retorno esperado do portfólio zero-beta $E[R_{om}]$ é um parâmetro desconhecido (não-observável). Definindo o retorno esperado do portfólio zero-beta como γ , a versão zero-beta será:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{R}_t] &= \boldsymbol{\iota}\gamma + \boldsymbol{\beta}(E[R_{mt}] - \gamma) \\ &= (\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta})\gamma + \boldsymbol{\beta}E[R_{mt}] \end{aligned} \quad (3.118)$$

Na versão zero-beta, o modelo irrestrito é o modelo de mercado para os retornos reais (ajustados pela inflação). Definindo \mathbf{R}_t como o vetor dos retornos reais para N ativos (ou portfólios). Para estes N ativos, o modelo de mercado multivariado para os retornos reais é:

$$\mathbf{R}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}R_{mt} + \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (3.119)$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_t] = 0 \quad (3.120)$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T] = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.121)$$

$$E[R_{mt}] = \mu_m, \quad E[(R_{mt} - \mu_m)^2] = \sigma_m^2 \quad (3.122)$$

$$Cov[R_{mt}, \boldsymbol{\epsilon}_t] = 0 \quad (3.123)$$

$\boldsymbol{\beta}$ é o vetor dos betas dos ativos, R_{mt} é o retorno do portfólio de mercado no instante t , e $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\epsilon}_t$ são os vetores dos interceptos e dos resíduos, respectivamente.

Comparando (3.119) e (3.118), a hipótese nula a ser testada é:

$$H_o : \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\iota} - \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma} \quad (3.124)$$

A estimativa dos parâmetros desta versão é mais complicada do que na versão de Sharpe-Lintner, uma vez que representa uma restrição não-linear.

Dada a hipótese **IID** e a **normalidade multivariada** dos retornos, a versão zero-beta do CAPM pode ser estimada e testada usando MV. Os estimadores de MV do modelo irrestrito, i.e., o modelo de mercado para os retornos reais em (3.119), são idênticos aos estimadores do modelo de mercado para os retornos em excesso, exceto, que os retornos reais são substituídos pelos retornos em excesso. Assim, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, por exemplo, é o vetor da média amostral dos retornos reais. Para os estimadores de MV do modelo irrestrito, temos:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\mu}_m \quad (3.125)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}})(R_{mt} - \hat{\mu}_m)}{\sum_{t=1}^T (R_{mt} - \hat{\mu}_m)^2} \quad (3.126)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \hat{\mu}_m) (\mathbf{R}_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} \hat{\mu}_m)^T \quad (3.127)$$

sendo que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_T \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{mt}$$

A distribuição dos estimadores de MV condicionada aos retornos de mercado, $R_{m1}, R_{m2}, \dots, R_{mT}$, é:

$$\hat{\alpha} \sim N \left(\alpha, \frac{1}{T} \left[1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \right) \quad (3.128)$$

$$\hat{\beta} \sim N \left(\beta, \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \right) \quad (3.129)$$

$$T\hat{\Sigma} \sim W_N(T-2, \Sigma) \quad (3.130)$$

sendo que

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{mt} - \hat{\mu}_m)^2 \quad (3.131)$$

A covariância de $\hat{\alpha}$ e de $\hat{\beta}$ é:

$$\text{Cov} \left[\hat{\alpha}, \hat{\beta}^T \right] = - \left[\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2} \right] \Sigma \quad (3.132)$$

Para o modelo restrito, i.e., a versão zero-beta do CAPM, a função de log-verossimilhança será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma, \beta, \Sigma) &= -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log |\Sigma| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \gamma(\mathbf{1} - \beta) - \beta R_{mt})^T \Sigma^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{R}_t - \gamma(\mathbf{1} - \beta) - \beta R_{mt}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Derivando $\mathcal{L}(\gamma, \beta, \Sigma)$ com respeito a γ , β e Σ , e igualando a zero todas as três equações resultantes, temos:

$$\hat{\gamma}^* = \frac{(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* \hat{\mu}_m)}{(\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{*-1} (\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*)} \quad (3.134)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \frac{\sum_{t=1}^T (\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^* \boldsymbol{\iota})(R_{mt} - \hat{\gamma}^*)}{\sum_{t=1}^T (R_{mt} - \hat{\gamma}^*)^2} \quad (3.135)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^* (\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* R_{mt} \right) \left(\mathbf{R}_t - \hat{\gamma}^* (\boldsymbol{\iota} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^*) - \hat{\boldsymbol{\beta}}^* R_{mt} \right)^T \quad (3.136)$$

Considerando tanto o modelo restrito como o modelo irrestrito, pode-se construir um teste assintótico para a razão de log-verossimilhança J_4 sob a hipótese nula declarada em (3.124). Este teste pode ser construído de maneira análoga ao que foi feito para a versão de Sharpe-Lintner. Dessa forma, teremos:

$$J_4 = T \left[\log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| - \log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}| \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_{N-1}^2 \quad (3.137)$$

Para este caso, o número de graus de liberdade é igual a $N - 1$, pois o retorno esperado do zero-beta γ é um parâmetro livre.

Pode-se ajustar o teste J_4 a fim de melhorar as propriedades para amostras finitas. Este teste ajustado J_5 será:

$$J_5 = \left(T - \frac{N}{2} - 2 \right) \left[\log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| - \log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}| \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_{N-1}^2 \quad (3.138)$$

Em amostras finitas, a distribuição de J_5 se aproxima mais da distribuição qui-quadrado.

Uma maneira de interpretar a estatística J_4 se encontra na expressão a seguir.

$$T \left[\log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| - \log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}| \right] = T \log \left(\frac{1 + \frac{\hat{\mu}_q^2}{\hat{\sigma}_q^2}}{1 + \frac{\hat{\mu}_m^2}{\hat{\sigma}_m^2}} \right) \quad (3.139)$$

O portfólio q é o de maior razão de variabilidade (média do retorno em excesso sobre o desvio-padrão). Assim, a estatística pode ser vista como um teste que relaciona a razão de variabilidade da *proxy* de mercado com a maior razão de um portfólio de fronteira. Caso a *proxy* de mercado esteja efetivamente na fronteira, a estatística deverá ter um valor próximo

de zero e não será possível rejeitar o modelo a um determinado nível de significância.

3.2 Abordagem pelo método dos momentos generalizados (GMM)

Até aqui assumimos que os retornos de ativos e do portfólio de mercado eram normalmente distribuídos e IID. Como será visto em seção oportuna, essas hipóteses não são estatisticamente significantes.

Ao assumirmos que os retornos são normalmente distribuídos, estamos apenas facilitando a análise estatística adotada em termos de suas derivações (e.g. abordagem por MV), pois, como já se sabe, não há a necessidade de que os retornos sejam normais para que se possa derivar teoricamente o modelo CAPM.

Com relação a presença da dependência temporal entre os ativos, mostrou-se em (2.86) que não há necessidade da conjectura IID. A seguir, há uma explicação sucinta do que venha a ser o método GMM.

Segundo Hamilton (1997, p. 411), a formulação proposta por Hansen (1982) é a seguinte: Seja

\mathbf{w}_t um vetor de $v.a.$ que são observáveis na data t , $\boldsymbol{\theta}$ um vetor de parâmetros desconhecidos, e $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_t)$ uma função vetorial tal que $\mathbf{h} : (\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^h) \rightarrow \mathbb{R}^r$. \mathbf{w}_t deve representar um processo fracamente estacionário³¹ e ergódico³². $\boldsymbol{\theta}_o$ denota o verdadeiro parâmetro de $\boldsymbol{\theta}$, valendo-se da seguinte propriedade:

$$E[\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t)] = 0 \quad (3.140)$$

As r linhas de (3.140) são descritas como condições de ortogonalidade. Seja $\mathbf{y}_t = (\mathbf{w}_T, \mathbf{w}_{T-1}, \dots, \mathbf{w}_1)$ o vetor contendo todas as observações em uma amostra de tamanho T , e a função vetorial $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)$ denotando a média amostral de $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_t)$ por:

³¹Hamilton (1994, p. 45) diz que um processo estocástico é fracamente estacionário se, e somente se, a média μ_t é constante para todo t e as autocovariâncias γ_{jt} não dependem da data t .

³²Segundo Morettin e Tolo (2004, p. 41), um processo será ergódico se pudermos estimar características de interesse (média, auto-covariância etc.) a partir de uma única trajetória do processo. Portanto, um processo será ergódico na média se a média amostral convergir, em probabilidade, para a verdadeira média do processo.

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) = (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{w}_t) \quad (3.141)$$

A idéia vinculada ao GMM é escolher o $\boldsymbol{\theta}$ que faça com que a distância entre o momento amostral $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)$ e o momento populacional seja bem próxima de zero, i.e., o estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ GMM é o valor de $\boldsymbol{\theta}$ que minimiza o escalar

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) = \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)^T \mathbf{P}_T \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) \right] \quad (3.142)$$

sendo que $\{\mathbf{P}_T\}_{T=1}^{\infty}$ é uma seqüência de $(r \times r)$ matrizes de peso³³ nas quais podem ser uma função dos dados y_t .

Segundo Hamilton (1997, p. 412-413), se o processo estocástico $\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ é fracamente estacionário e ergódico, então a matriz de covariâncias é dada por:

$$\boldsymbol{\Gamma}_v = E \left[\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t) \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_{t-v})^T \right]$$

Assumindo que estas autocovariâncias são absolutamente somáveis (modelos ARMA), então:

$$\mathbf{S} \equiv \sum_{v=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Gamma}_v$$

A matriz \mathbf{S} é a matriz de variância assintótica da média amostral de $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t)$:

$$\mathbf{S} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot E \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)^T \right] \quad (3.143)$$

O valor ótimo para a matriz de pesos \mathbf{P}_t é dado pela inversa da matriz de covariâncias assintótica \mathbf{S}^{-1} . Portanto, (3.142) se tornará:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) = \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t) \right] \quad (3.144)$$

Se o processo vetorial $\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ não for serialmente correlacionado, então a matriz \mathbf{S} poderá ser estimada por:

³³Todas são do tipo positiva-definida. Uma matriz simétrica real A será positiva definida se para qualquer vetor real x , $x^T A x \geq 0$.

$$\hat{\mathbf{S}}_T = (1/T) \sum_{t=1}^T \left(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T, \mathbf{w}_t) \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T, \mathbf{w}_t)^T \right) \xrightarrow{p} \mathbf{S} \quad (3.145)$$

Deve-se notar que esta descrição de matriz ótima é circular, pois antes de se obter uma estimativa para $\boldsymbol{\theta}$, necessita-se de uma estimativa para \mathbf{S} . Segundo Hamilton (1997, p. 413), deve-se, primeiramente, obter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^{(0)}$ através da minimização de (3.142) com \mathbf{P}_t sendo uma matriz identidade. Esta estimativa é então usada em (3.144) a fim de se obter uma estimativa para $\hat{\mathbf{S}}_T^{(1)}$ e, assim por diante, até que $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T^{(j)} \simeq \hat{\boldsymbol{\theta}}_T^{(j+1)}$.

Por outro lado, se o processo vetorial $\{\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}_o, \mathbf{w}_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ for serialmente correlacionado, a fórmula de Newey-West³⁴ (1987) poderá ser utilizada a fim de se obter $\hat{\mathbf{S}}_T$, pois ela captura as autocorrelações do processo e, também, alguns níveis de heterocedasticidade.

Hamilton (1997, p. 414-415) mostra que sob às seguintes condições:

- ▶ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_o$;
- ▶ $\sqrt{T} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_o; \mathbf{y}_t) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{S})$;
- ▶ para alguma sequência $\{\boldsymbol{\theta}_T^*\}_{T=1}^{\infty}$ satisfazendo $\boldsymbol{\theta}_T^* \xrightarrow{p} \boldsymbol{\theta}_o$, pode-se dizer que:

$$p \lim \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_T^*} \right\} = p \lim \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_o} \right\} \equiv \mathbf{D}^T_{r \times a} \quad (3.146)$$

com as colunas de \mathbf{D}^T linearmente independentes. Então:

$$\sqrt{T} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_o \right) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{V}) \quad (3.147)$$

sendo que $\mathbf{V} = \{\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\}^{-1}$. As condições acima declaradas nos permite tratar $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ da seguinte forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_T \overset{a}{\sim} N \left(\boldsymbol{\theta}_o, \hat{\mathbf{V}}_T/T \right) \quad (3.148)$$

sendo que $\hat{\mathbf{V}}_T = \left\{ \hat{\mathbf{D}}_T \hat{\mathbf{S}}_T^{-1} \hat{\mathbf{D}}_T^T \right\}^{-1}$ e $\hat{\mathbf{D}}_T = \frac{\partial \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y}_t)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_T}$.

³⁴Newey West (1987) sugeriu a seguinte estimativa:

$$\hat{S} = \hat{\Gamma}_o + \sum_{\nu=1}^q \left[1 - \frac{\nu}{q+1} \right] \left(\hat{\Gamma}_\nu + \hat{\Gamma}_\nu^T \right), \quad \hat{\Gamma}_\nu = (1/T) \sum_{t=\nu+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-\nu} - \bar{y})^T \text{ com } q = \text{int} \left[4(n/100)^{2/9} \right]$$

int(\cdot) denota a parte inteira do argumento.

Conforme Cochrane (2001, p. 196), tem-se que:

$$T \left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_T \right) \left[\mathbf{D} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^T \right]^{-1} \left(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_T \right)^T \stackrel{a}{\sim} \chi_p^2 \quad (3.149)$$

sendo que p é a quantidade de parâmetros estimados do vetor $\boldsymbol{\theta}$.

3.2.1 Versão Sharpe-Lintner

O teste GMM para a versão de Sharpe e Lintner foi desenvolvido por Mackinlay e Richardson (1991). Os principais aspectos deste teste se encontram em Campbell *et al.* (1997, p. 208-210).

Para utilizar o GMM devemos construir um vetor de momentos condicionados com esperança igual a zero. O vetor de resíduos proporcionam N condições de momentos, e o produto do retorno em excesso do portfólio de mercado e o vetor de resíduos proporcionam outras N condições de momentos. Devemos construir uma função $\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})$, tal que:

$$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{h}_t \otimes \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (3.150)$$

sendo que \otimes representa o produto de Kronecker³⁵, $\mathbf{h}_t^T = [\mathbf{1} \ Z_{mt}]$, $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_m$, e $\boldsymbol{\theta}^T = [\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta}^T]$.

Portanto, temos:

$$\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_m \\ Z_m(\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} Z_m) \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

A especificação do modelo de mercado para retornos em excesso implica que $E[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta})] = 0$, onde $\boldsymbol{\theta}_o$ é o vetor dos verdadeiros parâmetros de $\boldsymbol{\theta}$. Estas condições de momentos formam o núcleo para a abordagem GMM em termos de estimação e testes de hipótese. O procedimento é encontrar um estimador que faça com que a combinação linear da média amostral dos

³⁵Para \mathbf{A} e \mathbf{B} , $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ será:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

momentos condicionados seja zero. A média amostral pode ser descrita como:

$$\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.152)$$

O estimador do GMM, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, será tal que minimize a função quadrática

$$Q_T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W} \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.153)$$

onde $\mathbf{W}_{2N \times 2N}$ é a matriz positiva-definida de pesos. N é igual ao número de portfólios. Como este sistema é exatamente identificado, a minimização da função quadrática será dada onde $\mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ para qualquer matriz de pesos \mathbf{W} . Segundo Campbell *et al.* (1997, p. 209), os estimadores do GMM são idênticos aos estimadores de MV conforme (3.96) e (3.97). Isso não é surpresa, pois o nosso sistema é exatamente identificado³⁶ e as variáveis instrumentais³⁷ são as mesmas das utilizadas no modelo por MV.

A vantagem do GMM está na robustez da matriz de covariâncias dos estimadores, o que permite maior segurança no teste de hipótese da validade do modelo CAPM. Assim, a variância dos estimadores $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ e $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ difere da variância dos estimadores encontrados na maximização da função de log-verossimilhança. A matriz de covariâncias de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é dada por:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{D}_o^T \mathbf{S}_o^{-1} \mathbf{D}_o]^{-1} \quad (3.154)$$

sendo que

$$\mathbf{D}_o = E \left[\frac{\partial \mathbf{g}_T(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right] \quad (3.155)$$

e

$$\mathbf{S}_o = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} E \left[\mathbf{f}_t(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{f}_{t-1}(\boldsymbol{\theta})^T \right], \quad (3.156)$$

A distribuição assintótica de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é uma normal multivariada. Assim, temos:

³⁶Macklinlay e Richarson (1991) denominam de teste GMM irrestrito, quando o número de condições de momentos é igual ao número de parâmetros.

³⁷Uma variável explicativa X será instrumental em um determinado modelo de regressão, se ela não for correlacionada com os resíduos do modelo.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{a}{\sim} N\left(\boldsymbol{\theta}, \frac{1}{T} [\mathbf{D}_o^T \mathbf{S}_o^{-1} \mathbf{D}_o]^{-1}\right) \quad (3.157)$$

A aplicação do resultado em (3.157) exige estimadores consistentes para as matrizes \mathbf{D}_o e \mathbf{S}_o , que são desconhecidas. Para \mathbf{D}_o , temos:

$$\mathbf{D}_o = - \begin{bmatrix} 1 & \mu_m \\ \mu_m & (\sigma_m^2 + \mu_m^2) \end{bmatrix} \otimes I_N \quad (3.158)$$

A fim de estimar uma matriz consistente para \mathbf{S}_o é necessário assumir que a soma dos termos da matriz seja finita³⁸. Na prática temos dificuldade para encontrar um estimador para \mathbf{S}_o , pois, numa amostra finita, existem apenas finitas auto-covariâncias; portanto, não podemos permitir que o número de auto-covariâncias estimadas cresça muito rapidamente. Usaremos o estimador proposto por Newey e West (1987).

$$\mathbf{S}_T^{(\hat{\boldsymbol{\theta}})} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{o,T} + \sum_{\nu=1}^q \left[1 - \frac{\nu}{q+1}\right] \left(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\nu,T} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\nu,T}^T\right) \quad (3.159)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\nu,T} = (1/T) \sum_{t=\nu+1}^T \left[\mathbf{f}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{f}_{t-\nu}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T\right] \quad (3.160)$$

Com esses estimadores, podemos construir a estatística que usaremos para testar a hipótese nula do CAPM de Sharpe e Lintner ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$).

$$J_6 = T \hat{\boldsymbol{\alpha}}^T \left[\mathbf{R} [\mathbf{D}_T^T \mathbf{S}_T^{-1} \mathbf{D}_T] \mathbf{R}^T\right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.161)$$

com $\mathbf{R} = (1 \ 0) \otimes I_N$ e $\mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

Sob a hipótese nula,

$$J_6 \stackrel{a}{\sim} \chi_N^2. \quad (3.162)$$

Vale a pena mencionar que o teste J_6 apresenta vantagem em termos de eficiência computacional em relação aos testes J_1, J_2, \dots, J_5 , pois estes testes necessitam de muitas iterações para a obtenção dos resultados necessários (BONOMO *et al.*, 2004, p. 31).

³⁸Ver detalhes em Campbell *et al* (1994, p. 535)

3.2.2 Versão zero-beta

Chou (2000) desenvolveu um teste GMM específico a fim de avaliar o modelo CAPM zero-beta não-condicional. A hipótese nula mostrada em (3.124) será rearranjada da seguinte forma:

$$H_o : \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \quad (3.163)$$

Seja $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = (g_1, \dots, g_{N-1})^T$, com $g_i = \frac{\alpha_i}{1-\beta_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{1-\beta_{i+1}}$, para $i = 1, \dots, N-1$. Há $2N$ condições de momentos e $2N$ parâmetros a serem estimados. Portanto, diz-se o modelo está exatamente identificado.

Para a abordagem GMM, sabe-se que o vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ converge assintoticamente para uma distribuição normal multivariada conforme (3.147). Assim,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \overset{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}/\mathbf{T}) \quad (3.164)$$

Aplicando-se uma função real $\mathbf{g}(\cdot)$ em (3.164), obtemos:

$$\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \overset{a}{\sim} N\left(\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}), \frac{1}{T} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}{}^T\right)$$

Segundo Chou (2000, p. 476)³⁹, o teste de Wald para o modelo CAPM zero-beta J_7 sob a hipótese nula, $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, será:

$$J_7 = T \cdot \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) \hat{\mathbf{V}}_T \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right)^T \right]^{-1} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \overset{a}{\sim} \chi_{N-1}^2 \quad (3.165)$$

Analogamente a (3.159), a matriz $\hat{\mathbf{V}}_T$ será igual a $[\mathbf{D}_T^T \mathbf{S}_T^{-1} \mathbf{D}_T]^{-1}$,

$$\mathbf{D}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{h}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{h}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \right] \quad (3.166)$$

$$\mathbf{S}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T \otimes \mathbf{h}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{h}_t(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \right] \quad (3.167)$$

sendo que o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ poderá ser estimado pelas fórmulas de MV em (3.96) e (3.97).

³⁹Chou (2000) cometeu um erro ao não multiplicar por T a estatística de Wald.

3.3 Escolha do método econométrico

Torna-se necessário investigar se os retornos de ações e o portfólio de mercado (IBOVESPA) são IID e normais a fim de selecionar qual será a abordagem, por MV (máxima verossimilhança) ou por GMM, mais adequada para testar a aderência do modelo CAPM no mercado de capitais brasileiro.

Segundo Morettin e Tolo (2004, p. 10), Cont (2001, p. 224) e Pagan (1996, p. 18-21), os principais fatos estilizados relacionados aos retornos financeiros são os seguintes:

- ▶ Os retornos são, em geral, não-auto-correlacionados serialmente, mas dependentes sob uma estacionariedade fraca. A questão da estacionariedade foi investigada por Pagan (1996, p. 18-21) via teste ADF⁴⁰ em relação a uma amostra de log-retornos diários de ações⁴¹ e índices de ações norte-americanos;
- ▶ Decaimento lento da função de auto-correlação dos quadrados dos retornos;
- ▶ A distribuição (não-condicionada) dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma normal; além disso, a distribuição, embora aproximadamente simétrica, é, em geral, leptocúrtica⁴²;
- ▶ As séries de log-retornos apresentam *clusters* de volatilidade ao longo do tempo, ou seja, há a presença de heterocedasticidade condicionada⁴³.

Conforme Campbell *et al.* (1997, p. 208), a utilização do método dos momentos generalizados (GMM) resolve o problema de robustez dos testes do CAPM. Os testes com GMM nos garantem robustez dos resultados mesmo na presença de dependência serial e de heterocedasticidade no retorno condicionado dos ativos do mercado. Nesse caso, precisamos assumir apenas que o retorno em excesso dos ativos sobre o portfólio de mercado é estacionário e ergódico no quarto momento.

A avaliação empírica se utilizará de ativos brasileiros que possuem alta liquidez no mer-

⁴⁰O teste ADF serve para verificar se a série de tempo é um modelo AR(p) estacionário ou um AR(p) não-estacionário. Ver detalhes em Hamilton (1997, p. 516)

⁴¹Os log-retornos diários são calculados por $R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$, sendo que P_t representa o preço do ativo no instante t .

⁴²Rose e Smith(2002, p. 40) afirmam que se o coeficiente de curtose κ de uma determinada variável aleatória X , no qual é definido como $E[(\frac{X-\mu}{\sigma})^4]$, for maior do que três, dizemos que a f.d.p. desta variável X é leptocúrtica.

⁴³Dessa forma, a variância condicional poderá ser modelada por modelos da família ARCH. Ver Morettin (2004, p. 313-348).

cado, i.e., aqueles que compõem o índice BOVESPA. Primeiramente, obtemos uma listagem dos ativos que tiveram uma alta negociação (mínima de 90%) no ano de 2004 através do site⁴⁴ da RiskTech[®]. A partir de tal lista, filtramos os ativos cuja negociação mínima fosse de 90% entre 2/1/1995 até 30/12/2004⁴⁵. São eles: Acesita PN (ACES4), Ambev PN (AMBV4), Aracruz PNB (ARCZ6), Brasil ON (BBAS3), Bradesco PN (BBDC4), Belgo Mineira PN (BELG4), Banespa PN (BESP4), Cesp PN (CESP4), Cemig PN (CMIG4), Copel ON (CPLE3), CSN ON (CSNA3), Sid. Tubarão PN (CSTB4), Eletrobrás ON (ELET3), Embratel Part. PN (EBTP4), Embraer PN (EMBR4), IBOVESPA (IBOV), Bco. Itaú Hold. PN (ITAU4), Ligth ON (LIGH3), Petrobrás PN (PETR4), Ipiranga Pet. PN (PTIP4), Telesp Operac PN (TLPP4), Unibanco PN (UBBR4), Usiminas PNA (USIM5), Vale do Rio Doce PNA (VALE5), Votorantim C P PN (VCPA4), Braskem PNA (BRKM5) e Brasil Telecom PN (BRTO4).

3.4 Verificação da hipótese de IID

Aplicaremos o conhecido teste BDS⁴⁶, desenvolvido por Brock *et al.* (1996), a fim de verificar se a série dos log-retornos de ações são IID. O teste BDS é um teste portmanteau relacionado a dependência em séries de tempo. Conforme Fernandes e Preumont (2003, p. 4), o BDS apresenta um alto poder contra uma variedade de modelos lineares, não-lineares e não-estacionários.

O BDS é derivado da medida conhecida como correlação integral, na qual relaciona-se a correlação dos pontos dispersos no espaço m -dimensional. No contexto de séries de tempo, $\{x_t\}$ será tratada como um vetor $x_t^m = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m+1})$. A correlação integral teórica será:

$$C(\delta, m) = \int_u \int_v I(u, v, \delta) dF_m(u) dF_m(v) \quad (3.168)$$

sendo que a função indicadora $I(\cdot)$ é 1 quando $|u - v| < \delta$, e zero, caso contrário, $F_m(\cdot)$ é a

⁴⁴O site é www.risktech.com.br

⁴⁵Este período foi utilizado devido à política de estabilização econômica proporcionada pelo Plano Real.

⁴⁶Veja detalhes teóricos em Pagan (1996, p.27). O teste BDS foi executado no software econométrico E-Views 5.0.

função distribuição de x_t^m . Ela indica a distribuição conjunta das m -observações consecutivas.

Brock *et al.* (1996) mostraram que a estatística-U generalizada $C(\delta, m, T) = \frac{2}{(T-m)(T-m+1)} \sum_{t < s} I(x_t^m, x_s^m, \delta)$ é um estimador consistente de $C(\delta, m)$. Conforme Serfling (1980 *apud* FERNANDES & PREUMONT, 2003, p. 4), a utilização de uma U -estatística está vinculada ao fato de que esta apresenta mínima variância quando comparamos com todos os outros estimadores não-viesados, e além do mais, converge rapidamente para a normalidade.

Se o processo $\{x_t\}$ é IID, então $F_m(x_t^m) = \prod_{i=0}^{m-1} F_1(x_{t-i})$, e $C(\delta, m) = C(\delta, 1)^m$ quase certamente. Esta relação é utilizada para construir o seguinte teste a fim de detectar os desvios da propriedade IID.

$$BDS(\delta, m, T) = \sqrt{T} \frac{C(\delta, m, T) - C(\delta, 1, T)^m}{\sigma(\delta, m, T)} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.169)$$

sendo que $\sigma(\delta, m, T)$ é uma função não-trivial da correlação integral.

O teste BDS foi executado da segunda até a sexta dimensão, portanto, uma determinada série temporal de log-retornos diários de ações rejeitará a hipótese nula se, e somente se, pelo menos um dos cinco níveis descritivos do teste (p-valor) forem menores do que o nível de significância de 5%.

Tabela 3.2 - Resultados obtidos pelo teste BDS nas respectivas dimensões

| Ativos | p-valores do teste BDS | | | | |
|--------|------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | Dim. 2 | Dim. 3 | Dim. 4 | Dim. 5 | Dim. 6 |
| ACES4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| AMBV4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| ARCZ6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BBAS3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BBDC4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BELG4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BESP4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CESP4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CMIG4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CPLE3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CSNA3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| CSTB4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| ELET3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| EBTP4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| EMBR4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| IBOV | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| ITAU4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| LIGH3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| PETR4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| PTIP4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| TLPP4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| UBBR4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| USIM5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VALE5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VCPA4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BRKM5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| BRTO4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

Em vista dos resultados obtidos na Tabela 3.2, verifica-se que todas as séries acima não podem ser considerados IID ao nível de 5%.

3.5 Verificação da normalidade multivariada

Segundo Richardson e Smith (1993, p. 296), se um vetor de retornos de ativos \mathbf{R}_t possui distribuição normal multivariada, então cada componente R_{it} de \mathbf{R}_t possui distribuição normal univariada. Embora, a condição de normalidade univariada não implique em normalidade multivariada, a rejeição da normalidade univariada é suficiente para rejeitarmos a condição de normalidade multivariada. Portanto, torna-se crucial que utilizemos um teste de normalidade univariada que não suponha que as observações sejam IID.

Na Econometria, o teste de normalidade mais utilizado e divulgado é o de Jarque-Bera⁴⁷. Jarque e Bera (1987) propuseram o seguinte teste estatístico: Sendo uma amostra IID $\{X_i\}_{i=1}^n$ no qual a variável aleatória é normalmente distribuída com esperança zero e variância σ^2 , tem-se:

$$JB = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T (X_i/\hat{\sigma})^3 \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \left[\sum_{i=1}^T (X_i/\hat{\sigma})^4 - 3 \right] \right)^2 \stackrel{a}{\sim} \chi_2^2 \quad (3.170)$$

sendo que $\hat{\sigma}$ é o estimador de máxima verossimilhança do σ (desvio-padrão) sob a hipótese nula de normalidade.

Bai e Ng (2005, p. 52) formularam um teste de normalidade sob a consideração apenas de que os dados devam ser fracamente estacionários. Bai e Ng (2005, p. 57) mostraram, por simulações, que este teste apresenta um aceitável poder (em média acima de 80%) para amostras contendo 500 observações.

Este teste verificará o seguinte conjunto de hipóteses:

H_0 : A f.d.p. da *v.a.* X segue uma distribuição normal univariada

H_1 : A f.d.p. da *v.a.* X não segue uma distribuição normal univariada

Seja $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^3 \\ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \left[(X_t - \bar{X})^4 - 3(\hat{\sigma}^2)^2 \right] \end{bmatrix}$. Sob a hipótese nula de normalidade, tem-se que:

$$\mathbf{Y}_t = \gamma \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t + o_p(1) \quad (3.171)$$

sendo que $\gamma = \begin{bmatrix} -3\sigma^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6\sigma^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} (X_t - \mu) \\ (X_t - \mu)^2 - \sigma^2 \\ (X_t - \mu)^3 \\ (X_t - \mu)^4 - 3\sigma^4 \end{bmatrix}$ com $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{Z}_t \xrightarrow{d} N(0, \Phi)$

e $\Phi = \lim_{T \rightarrow \infty} TE \left[\bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{Z}}^T \right]$. Portanto, $\mathbf{Y}_t \xrightarrow{d} N(0, \gamma \Phi \gamma^T)$. Sendo $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}$ e $\hat{\Phi}$ estimadores consistentes de γ , σ e Φ , tem-se que:

⁴⁷Este teste se encontra disponível no software econométrico E-Views 5.0.

$$\hat{\mu}_{34} = \mathbf{Y}_t^T \left(\hat{\gamma} \hat{\Phi} \hat{\gamma}^T \right)^{-1} \mathbf{Y}_t \stackrel{a}{\sim} \chi_2^2 \quad (3.172)$$

Os resultados do teste de normalidade de Bai e Ng (2005) se encontram a seguir.

Tabela 3.3 - Teste de normalidade univariada - Bai e Ng (2005)

| Ativos | p-valor |
|--------|---------|
| ACES4 | 0.00 |
| AMBV4 | 0.00 |
| ARCZ6 | 0.00 |
| BBAS3 | 0.00 |
| BBDC4 | 0.00 |
| BELG4 | 0.00 |
| BESP4 | 0.00 |
| CESP4 | 0.00 |
| CMIG4 | 0.00 |
| CPLE3 | 0.00 |
| CSNA3 | 0.00 |
| CSTB4 | 0.00 |
| ELET3 | 0.00 |
| EBTP4 | 0.00 |
| EMBR4 | 0.00 |
| IBOV | 0.00 |
| ITAU4 | 0.00 |
| LIGH3 | 0.00 |
| PETR4 | 0.00 |
| PTIP4 | 0.00 |
| TLPP4 | 0.00 |
| UBBR4 | 0.00 |
| USIM5 | 0.00 |
| VALE5 | 0.00 |
| VCPA4 | 0.00 |
| BRKM5 | 0.00 |
| BRTO4 | 0.00 |

Pela Tabela 3.3, rejeitamos a hipótese nula de normalidade univariada para todos os log-retornos analisados ao nível de 5%. Como não há indícios de que os retornos de ações individuais sejam normais, não há a necessidade de utilizarmos um teste de normalidade multivariada⁴⁸. Conclui-se pela não existência de normalidade multivariada.

Sendo assim, não há evidências significativas de que os log-retornos de ações sejam IID e que, conjuntamente, resultem em uma distribuição normal multivariada. Portanto, optaremos

⁴⁸Richardson e Smith (1993) propuseram um teste de normalidade multivariada via GMM. Este teste leva em consideração alguns momentos centrados e alguns co-momentos da distribuição normal multivariada.

pela utilização do método econométrico GMM a fim de testar a validade do CAPM não-condicional.

Capítulo 4

Resultados Obtidos

Igualmente à Bonomo *et al.* (2004), os portfólios serão construídos a partir de ações da carteira do IBOVESPA, respeitando o critério de juntar ações do mesmo setor da economia. Os setores em questão serão: Siderurgia, Bancos, Papel e Celulose, Elétrico, Petroquímico e Telecomunicações. Estes setores agrupam o conjunto de ações diárias de maior liquidez no período de janeiro de 1995 até dezembro de 2004.

Campbell *et al.* (1997, p.214) mostram os resultados dos testes em que o modelo CAPM, na versão de Sharpe-Lintner, foi testado a partir de 10 portfólios de mercado. Os testes foram feitos a partir de uma amostra de ações diárias no período de 30 anos, de janeiro de 1965 a dezembro de 1994. Primeiramente são analisados subperíodos de 5 anos; depois, de 10 anos; por fim é analisado o período de 30 anos. Os resultados demonstram que o modelo CAPM não pode ser rejeitado na maior parte dos subperíodos de 5 anos em relação as estatísticas J_1 , J_2 , J_3 e J_6 . Já com o período de 10 anos o modelo é rejeitado em dois subperíodos, enquanto no período de 30 anos o modelo é rejeitado. Similarmente, dividiremos a nossa amostra de portfólios em dois subperíodos de 5 anos que irão de 2/1/1995 até 31/12/1999 e de 2/1/2000 até 31/12/2004.

Conforme Bonomo *et al.* (2004), Silva e Motta (2002) e Nakamura (1998), utilizaremos o índice BOVESPA como *proxy* do mercado, a taxa de juros efetiva mensal do SELIC e a taxa efetiva mensal do CDI (Certificado de Depósito Interbancário), como ativos livres de risco no teste GMM do modelo CAPM de Sharpe-Lintner (SL), e o índice IGP-DI a fim de ajustar os retornos nominais para a sua utilização posterior no modelo CAPM zero-beta. A listagem a seguir nos mostra a composição dos ativos em seus respectivos setores econômicos:

- ▶ Setor de Siderurgia: Vale PN; Acesita PN; Sid. Tubarão PN; Usiminas PNA; Belgo PN; Sid. Nacional ON.
- ▶ Setor Bancário: Bradesco PN; Itaú PN; Unibanco PN; Banco do Brasil PN e Banespa PN.
- ▶ Setor Elétrico: CESP PN; CEMIG PN; Eletrobrás PNB; Copel ON e Ligth ON.

- ▶ Setor Petroquímico: Petrobrás PN; IpirangaPN; Petrobrás ON e Braskem PNA.
- ▶ Setor de Telecomunicações: Brasil Telecom PN; Brasil Telecom ON e Telesp Operac. PN.
- ▶ Setor de Papel e Celulose: Aracruz PNB e Votorantim CP PN.

A escolha das ações se deve puramente a uma questão de liquidez do período considerado. Todas as ações receberão o mesmo peso dentro de cada portfólio. Esta forma de construção é arbitrária porém comum na literatura de testes empíricos⁴⁹. Além disso, como estamos querendo testar o modelo, não há perda de generalidade ao se construir arbitrariamente o formato do portfólio.

Bonomo *et al.* (2004, p. 41) declara que quando escolhemos um índice brasileiro de ações como a carteira de mercado, estamos assumindo implicitamente que o mercado está segmentado. Outra possível abordagem seria adotar a perspectiva de um investidor estrangeiro, que diversifica sua carteira internacionalmente. Se um grande número de investidores diversificar internacionalmente sua carteira, o mercado se moverá no sentido de uma integração, e os retornos esperados no Brasil serão bem descritos pela exposição do país ao risco mundial, medida pela covariância dos retornos das ações brasileiras com a carteira de mercado mundial. Harvey (1995) testa um modelo de apreçamento de ativos dinâmico no qual as cargas de risco são medidas em relação à diferença entre o retorno de mercado mundial e o retorno do ativo sem risco. Os resultados para o Brasil mostram que o beta do retorno de mercado mundial não é estatisticamente significativo, e que a parte inesperada do prêmio de risco mundial é relacionada à informação do mercado local, tais como dividendos ou às taxas de juros locais. Isso sugere que o mercado brasileiro é segmentado do mercado mundial. Portanto, a *proxy* de mercado que usaremos será o índice BOVESPA. Em teoria, o portfólio de mercado deveria conter todos os ativos transacionados. Nakamura (1988) e Bonomo *et al.* (2004) obtiveram resultados positivos ao testar a eficiência média-variância para o índice BOVESPA.

Deve ser enfatizado que o IBOVESPA não corresponde a um índice no qual a participação dos ativos é proporcional aos seus valores de mercado. A participação de cada ativo no

⁴⁹Ver Fama (1988).

IBOVESPA é proporcional ao seu índice de negociabilidade (IN), que é dado por:

$$IN = \sqrt{\frac{n}{N} \times \frac{\nu}{V}} \quad (4.173)$$

sendo que n é o número de negócios realizados com a ação no mercado à vista nos últimos 12 meses; N é o número total de negócios no mercado à vista nos últimos 12 meses; ν é o valor movimentado com a ação no mercado à vista nos últimos 12 meses; V é o valor total movimentado no mercado à vista nos últimos 12 meses.

Calcularemos os retornos reais com base no trabalho de Silva e Motta (2002). Estes autores testaram o CAPM zero-beta no mercado de capitais brasileiro segundo o teste J_5 . Os retornos dos portfólios foram ajustados pela inflação através do IGP-DI através da equação:

$$R_{Nt} = R_{Rt} + \ln(\theta) \quad (4.174)$$

sendo que R_{Nt} é o retorno nominal do portfólio no instante t ; R_{Rt} é o retorno real do portfólio no instante t e $\theta = \frac{\text{IGP-DI}(t)}{\text{IGP-DI}(t-1)}$ representa a inflação entre os instante $t - 1$ e t .

Como *proxy* do ativo sem risco, para teste da versão Sharpe-Lintner, usaremos a taxa de juros efetiva mensal do SELIC que serve como taxa de juros básica da economia e a taxa efetiva mensal do CDI. Em teoria a SELIC seria garantida pelo Banco Central nas operações diárias para zeragem do caixa bancário no final do dia, sendo, portanto, um bom indicador de ativo sem risco. Silva e Motta (2002) declaram que há divergências a respeito de se a taxa SELIC e a taxa CDI realmente correspondem a ativos sem risco, já que possuem variações tanto em termos reais como nominais.

A seguir, calculamos os valores de $\hat{\alpha}$ e de $\hat{\beta}$ tanto para o modelo de mercado dos retornos em excesso, conforme (3.87), como para o modelo de mercado dos retornos reais, conforme (3.119). Os p-valores para $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ foram calculados com base nas variâncias estimadas pela abordagem GMM⁵⁰.

⁵⁰Estes valores foram calculados no software econométrico E-Views 5.0.

Tabela 4.4 - CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/95 até 31/12/99

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.3614 | 0.0000 | 0.7366 | 0.0000 |
| Petroquímico | -0.3361 | 0.0000 | 0.7899 | 0.0052 |
| Siderurgia | -0.6076 | 0.0000 | 0.63200 | 0.0786 |
| Elétrico | -0.1897 | 0.0000 | 0.9500 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.2575 | 0.0000 | 0.8369 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.9665 | 0.0000 | 0.3272 | 0.0001 |

Pela Tabela 4.4, todos os valores de $\hat{\alpha}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%, contribuindo, dessa forma, para que o modelo CAPM de SL (taxa SELIC) no período de 2/1/95 até 31/12/99 seja igualmente rejeitado. Em relação aos valores de $\hat{\beta}$, pode-se considerar que $\hat{\beta} = 0$ ao nível de 5% somente para o portfólio do setor de Bancos e para o portfólio do setor de Siderurgia.

Tabela 4.5 - CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/00 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.0196 | 0.3571 | 0.6587 | 0.0000 |
| Petroquímico | -0.0041 | 0.2183 | 0.7506 | 0.0000 |
| Siderurgia | -0.0311 | 0.2758 | 0.6366 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.0707 | 0.0000 | 1.0714 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.1499 | 0.0000 | 0.8654 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.0815 | 0.0003 | 0.4615 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.5, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, três portfólios (Bancos, Petroquímico e Siderurgia) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; e outros três (Elétrico, Telecomunicações e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.6 - CAPM de SL (taxa SELIC) - 2/1/95 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.1825 | 0.0000 | 0.7275 | 0.0000 |
| Petroquímico | -0.1814 | 0.0000 | 0.7897 | 0.0000 |
| Siderurgia | -0.3027 | 0.0000 | 0.6427 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.1245 | 0.0000 | 0.9850 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.1990 | 0.0000 | 0.8477 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.4964 | 0.0000 | 0.3899 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.6, todos os valores de $\hat{\alpha}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de

5%, contribuindo, dessa forma, para que o modelo CAPM de SL (taxa SELIC) no período de 2/1/95 até 31/12/04 seja igualmente rejeitado. Em relação aos valores de $\hat{\beta}$, pode-se considerar que, para todos os portfólios, $\hat{\beta} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.7 - CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/95 até 31/12/99

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.3568 | 0.2163 | 0.7366 | 0.0528 |
| Petroquímico | -0.3319 | 0.1395 | 0.7904 | 0.0050 |
| Siderurgia | -0.6003 | 0.0851 | 0.6206 | 0.0782 |
| Elétrico | -0.1887 | 0.0016 | 0.9501 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.2534 | 0.0013 | 0.8380 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.9544 | 0.0000 | 0.3276 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.7, Em relação aos valores de $\hat{\beta}$, quatro portfólios (Petroquímico, Elétrico, Telecomunicações e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\beta} \neq 0$ ao nível de 5%; e outros dois (Bancos e Siderurgia) mostraram que podemos considerar $\hat{\beta} = 0$ ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, três portfólios (Bancos, Petroquímico e Siderurgia) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; e os outros três (Elétrico, Telecomunicações e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.8 - CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/00 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.0193 | 0.4332 | 0.6586 | 0.0000 |
| Petroquímico | -0.0437 | 0.3735 | 0.7508 | 0.0000 |
| Siderurgia | -0.0305 | 0.4049 | 0.6372 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.0707 | 0.0373 | 1.0717 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.1499 | 0.0000 | 0.8651 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.0812 | 0.0872 | 0.4610 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.8, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, quatro portfólios (Bancos, Petroquímico, Siderurgia e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; e outros dois (Elétrico e Telecomunicações) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.9 - CAPM de SL (taxa CDI) - 2/1/95 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.1802 | 0.2193 | 0.7272 | 0.0009 |
| Petroquímico | -0.1794 | 0.1385 | 0.7898 | 0.0000 |
| Siderurgia | -0.2993 | 0.1084 | 0.6428 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.1244 | 0.0004 | 0.9849 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.1981 | 0.0002 | 0.8483 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.4913 | 0.0000 | 0.3893 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.9, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, pode-se considerar que três portfólios (Bancos, Petroquímico, Siderurgia e Papel) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; e outros três (Elétrico, Telecomunicações e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.10 - CAPM zero-beta - 2/1/95 até 31/12/99

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | -0.0118 | 0.4337 | 0.7276 | 0.0000 |
| Petroquímico | -0.0567 | 0.1836 | 0.7716 | 0.0000 |
| Siderurgia | -0.1025 | 0.0732 | 0.5906 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.1234 | 0.0207 | 0.9481 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.0411 | 0.3451 | 0.8304 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | -0.0724 | 0.2519 | 0.2794 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.10, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, cinco portfólios (Bancos, Petroquímico, Siderurgia, Telecomunicações e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; já para o portfólio do setor Elétrico, podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.11 - CAPM zero-beta - 2/1/00 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | 0.1483 | 0.0016 | 0.6513 | 0.0000 |
| Petroquímico | 0.0787 | 0.0711 | 0.7445 | 0.0000 |
| Siderurgia | 0.1472 | 0.0007 | 0.6345 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.1058 | 0.0539 | 1.0728 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.0835 | 0.1151 | 0.8605 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | 0.1835 | 0.0085 | 0.4494 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.11, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de

5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, três portfólios (Petroquímico, Elétrico e Telecomunicações) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%; e outros três (Bancos, Siderurgia e Papel e Celulose) mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%.

Tabela 4.12 - CAPM zero-beta - 2/1/95 até 31/12/04

| Portfólio | $\hat{\alpha}$ | p-valor | $\hat{\beta}$ | p-valor |
|------------------|----------------|---------|---------------|---------|
| Bancos | 0.0664 | 0.0659 | 0.7060 | 0.0000 |
| Petroquímico | 0.0112 | 0.3935 | 0.7646 | 0.0000 |
| Siderurgia | 0.0243 | 0.2889 | 0.6040 | 0.0000 |
| Elétrico | -0.1107 | 0.0056 | 0.9842 | 0.0000 |
| Telecomunicações | -0.0611 | 0.1638 | 0.8392 | 0.0000 |
| Papel e Celulose | 0.0617 | 0.1763 | 0.3294 | 0.0000 |

Pela Tabela 4.12, todos os valores de $\hat{\beta}$ podem ser considerados diferentes de zero ao nível de 5%. Em relação aos valores de $\hat{\alpha}$, apenas o portfólio do setor Elétrico mostrou que podemos considerar $\hat{\alpha} \neq 0$ ao nível de 5%; e outros portfólios mostraram que podemos considerar $\hat{\alpha} = 0$ ao nível de 5%.

Em relação ao teste GMM para o modelos CAPM de SL, obtemos os seguintes resultados:

Tabela 4.13 - Teste GMM para o CAPM de SL (taxa SELIC)

| Período | J_6 | p-valor |
|-------------------|---------|---------|
| 2/1/95 - 31/12/99 | 80.3281 | 0.0000 |
| 2/1/00 - 31/12/04 | 9.2923 | 0.1578 |
| 2/1/95 - 31/12/04 | 54.7820 | 0.0000 |

Tabela 4.14 - Teste GMM para o CAPM de SL (taxa CDI)

| Período | J_6 | p-valor |
|-------------------|---------|---------|
| 2/1/95 - 31/12/99 | 78.7798 | 0.0000 |
| 2/1/00 - 31/12/04 | 9.2784 | 0.1585 |
| 2/1/95 - 31/12/04 | 53.8387 | 0.0000 |

Pelas Tabelas 4.13 e 4.14, verifica-se que o modelo CAPM de SL, tanto em termos da SELIC como do CDI, não pode ser rejeitado ao nível de 5% para o período de 2/1/00 até 31/12/04. Já para os períodos de 2/1/95 até 31/12/99 e de 2/1/95 até 31/12/04, tal modelo será rejeitado ao nível de 5%. Dessa forma, para o modelo CAPM de SL, tanto em termos da SELIC como do CDI, o índice BOVESPA se comportou como um portfólio eficiente somente no período de 2/1/00 até 31/12/04.

Em relação ao teste GMM para o modelo CAPM zero-beta, obtemos os seguintes resultados:

Tabela 4.15 - Teste GMM para o modelo CAPM zero-beta

| Período | J_7 | p-valor |
|-------------------|--------|---------|
| 2/1/95 - 31/12/99 | 2.7089 | 0.7460 |
| 2/1/00 - 31/12/04 | 5.5987 | 0.3472 |
| 2/1/95 - 31/12/04 | 3.0081 | 0.6987 |

Pela Tabela 4.15, verifica-se que o modelo CAPM zero-beta não pode ser rejeitado ao nível de 5% em nenhum dos três períodos analisados acima. Dessa forma, para o modelo CAPM zero-beta, o índice BOVESPA se comportou como um portfólio eficiente para todos os períodos analisados.

4.1 Conclusão

Primeiramente, derivamos economicamente o modelo CAPM não-condicional uniperiódico, tanto para a versão Sharpe-Lintner como para a versão zero-beta, somente com a suposição de que o par de retornos (R_i, R_m) tenha uma distribuição elíptica bivariada. Não há a necessidade de que a série dos retornos de ações seja IID e de que os investidores do mercado de capitais tenham algum tipo de função de utilidade específica.

Escolheu-se o método GMM a fim de testar o modelo CAPM não-condicional no mercado de capitais brasileiro, pois as séries dos log-retornos diários de ações não se mostraram normais e IID.

A partir dos resultados de Bonomo *et al.* (2004), Silva e Motta (2002) e aqueles pertencentes a este trabalho (Tabelas 4.13, 4.14 e 4.15), conclui-se que o modelo CAPM não-condicional zero-beta comportou-se de forma mais satisfatória, em termos da eficiência média-variância, do que o modelo CAPM não-condicional de SL. Além do mais, na versão zero-beta, não necessitamos utilizar alguma taxa da economia como *proxy* da taxa livre de risco. Em relação ao modelo CAPM de SL não houve diferenças significativas nos resultados obtidos quando da comparação entre à SELIC e o CDI.

Conforme relatado em Braga *et al.* (1997), verificaram que, no período de junho de 1989 a junho de 1996, o retorno médio do CDI foi maior que o do IBOVESPA. As diversas crises que ocorreram durante o período forçaram o governo brasileiro a aumentar a taxa de juros. Conforme relatado em Cordeiro *et al.* (1999), com o objetivo de diminuir especulações financeiras resultantes da crise asiática sobre a economia nacional, o Banco Central dobrou a taxa SELIC, passando de 22% em setembro de 1997 para 42,2% em outubro de 1997. Durante a crise russa, a taxa SELIC aumentou de 33,5% para 39,3% no período de setembro a outubro de 1998. Estes fatores corroboram para que o modelo CAPM de SL, tanto em termos da SELIC como do CDI, fosse rejeitado ao nível de 5% para o período de 2/1/95 até 31/12/98. Dessa forma, os resultados corroboram para que a taxa SELIC e o CDI não sejam considerados como ativos livre de risco.

Bonomo *et al.* (2004) aplicaram as estatísticas J_5 (versão zero-beta⁵¹) e J_3 (versão de Sharpe-Lintner) em 7 portfólios (cada portfólio representa um setor da economia com alta liquidez) no período de junho de 1989 até março de 1998. De modo geral, as duas versões do CAPM⁵² não puderam ser rejeitadas ao nível de 5%. Aplicou-se, também, os mesmos testes em 7 portfólios que representavam setores com menor liquidez e, de forma análoga, as duas versões do CAPM não puderam ser rejeitadas ao nível de 5%. O modelo testado com os setores de maior liquidez tem estatísticas menores em ambas as versões, implicando pior ajuste dos dados. Esta conclusão não se adere a noção intuitiva de que os portfólios, com maior liquidez, deveriam proporcionar melhores resultados. Na aplicação do método GMM inverte-se a conclusão para a versão de Sharpe-Lintner. Bonomo *et al.* (2004) não testaram o modelo CAPM na versão zero-beta via GMM.

Bonomo *et al.* (2004, p.35) aplicaram a estatística J_6 (versão Sharpe-Lintner) em 7 portfólios (cada portfólio representa um setor da economia com alta liquidez) no período de junho de 1989 até março de 1998. De modo geral, esta versão do CAPM não pode ser rejeitada ao nível de 5%. Aplicou-se, também, o mesmo teste em 7 portfólios que representavam setores com menor liquidez e, de forma análoga, o modelo CAPM não pode ser rejeitado ao nível de 5%. O modelo testado com os setores de maior liquidez tem p-valor maior quando comparado

⁵¹Analogamente a Silva e Motta (2002), os retornos nominais dos portfólios foram ajustados à inflação.

⁵²A *proxy* de mercado considerada foi o IBOVESPA. A taxa livre de risco foi a SELIC.

com o outro setor ($0.284 > 0.091$), implicando melhor fit dos dados. Esta conclusão se adere a noção intuitiva de que os portfólios, com maior liquidez, deveriam proporcionar melhores resultados.

Silva e Motta (2002) testaram o CAPM zero-beta no mercado de capitais brasileiro segundo o teste J_5 . Utilizando-se do índice BOVESPA como *proxy* da carteira de mercado, os testes realizados não rejeitaram o CAPM zero-beta nos períodos de 1991 a 1996 e 1996 a 2001.

Neste trabalho objetivou-se discutir somente especificações do modelo CAPM não-condicional (ou com beta constante). Entretanto, a literatura recente em testes do modelo CAPM tem-se concentrado em estimar o modelo com o beta variando no tempo. Esses modelos são conhecidos como versões condicionais do CAPM de Sharpe-Lintner. O CAPM condicional é uma forma conveniente para incorporar variâncias e covariâncias que se modificam ao longo do tempo, o que empiricamente verificamos em séries temporais financeiras. Vale a pena mencionar que o exame do CAPM condicional é importante, pois a especificação do CAPM não-condicional pode levar a conclusões erradas quanto à validade do modelo⁵³. Segundo Bonomo *et al.* (2004, p. 27), diversos artigos utilizando dados americanos mostraram que o CAPM não-condicional não é válido quando estamos analisando períodos de tempo muito extensos. Uma das possíveis explicações seria o fato de não estarmos incorporando as informações existentes em cada período na modelagem dos testes.

O fato de o CAPM não-condicional não valer não significa que o CAPM condicional também não valha. Poderíamos pensar no CAPM não-condicional como o CAPM condicionado a um conjunto de informações formado por um conjunto vazio. Então, poderíamos afirmar que, se o CAPM condicional vale, também vale o CAPM não-condicional, mas a recíproca não é verdadeira (BONOMO, 2004, p. 27).

Na modelagem mais recente de testes do CAPM condicional, os artigos têm-se concentrado em incorporar processos ARCH e GARCH na variância do retorno do portfólio de mercado e na covariância entre o retorno dos ativos e do portfólio de mercado. Bonomo *et al.* (2004, p. 41-52) testam os modelos CAPM não-condicional e CAPM condicional com dados brasileiros,

⁵³Ver Hansen e Richard (1987).

para três carteiras de tamanhos diferentes, através de uma versão proposta por Bodurtha e Mark (1991)⁵⁴. No modelo testado, ambos os componentes de beta, a variância do retorno de mercado e a covariância entre o retorno do portfólio de mercado e o retorno de um ativo ou portfólio R_i , seguem um processo ARCH⁵⁵. Essa foi a modelagem escolhida porque os dados brasileiros revelavam autocorrelação na série do quadrado do retorno dos ativos. Por outro lado, o modelo especificado nos permite achar estimadores mais robustos para mudanças estruturais. O CAPM condicional baseado em efeitos ARCH mostrou maior aderência aos dados, capturando melhor a dinâmica das medidas de risco e dos retornos esperados.

⁵⁴Ver detalhes em Bonomo *et al.* (2004, p. 41-52)

⁵⁵Ver detalhes em Morettin e Tolo (2004).

Programas

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Maria Margarida de. **Como Preparar Trabalhos para Cursos de Pós-Graduação**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- [2] BAI, J.; NG, S. *Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series data*. Journal of Business and Economics Statistics, v. 23, p. 49-60, 2005.
- [3] BLACK, Fisher. *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*. Journal of Business, v. 45, p. 444-454, 1972.
- [4] BODURTHA, J. M.; MARK, N. C. *Testing the CAPM with time-varying risks and returns*. Journal of Finance, v. 46, p. 485-505, 1991.
- [5] BONOMO, Marco (Org.). **Finanças Aplicadas ao Brasil**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2004.
- [6] BRAGA, C *et al.* **Risco e Retorno das value e growth stocks no mercado de capitais brasileiro**. In: ENANPAD, 21, Rio das Pedras, 1997.
- [7] BROCK, W. A. *A test for independence based on the correlation dimension*. Econometric Reviews, v. 15, p. 197-235, 1996.
- [8] CAMPBELL, John Y *et al.* *The Econometrics of Financial Markets*. New Jersey: Princeton University Press, 1997.
- [9] CHOU, Pin-Huang. *Alternative tests of the zero-beta CAPM*. The Journal of Financial Research, v. 23, n. 4, p. 469-493, 2000.
- [10] COCHRANE, John H. *Asset Pricing*. New Jersey: Princeton University Press, 2001.
- [11] CONT, Rama. *Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues*. Quantitative Finance, v. 2, p. 223-36, 2001.
- [12] CORDEIRO, F. F. **Expectativas racionais e eficiência informacional: análise do mercado acionário brasileiro num cenário de regras no período de 1997-1999**. In: ENANPAD, 23, Foz do Iguaçu, 1999.
- [13] FERNANDES, M.; PREUMONT, Y. P. *The finite-sample size of the BDS test for GARCH standardized residuals*. Working Paper.
- [14] FRANCIS, Jack C.; TAYLOR, Richard W. *Investments*. 2nd ed. [S.l.]: MacGraw-Hill, 2000.

- [15] GIBBONS, M *et al.* ***A Test of the Efficiency of a Given Portfolio***. *Econometrica*, v. 57, p. 1121-1152, 1989.
- [16] HAMADA, M.; VALDEZ, E. A. ***CAPM e Option Pricing with Elliptical Distributions***. Quantitative Finance Research Centre, University of Technology (Sydney), Research Paper Series, v. 120, p. 1-30, 2004.
- [17] HAMILTON, J. D. ***Time Series Analysis***. New York: Princeton University Press, 1997.
- [18] HANSEN, L. P. ***Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators***. *Econometrica*, v. 50, p. 1029-1054, 1982.
- [19] HANSEN, Lars Peter; RICHARD, Scott F. ***The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models***. *Econometrica*, v. 55, p. 587-614, 1987.
- [20] HARVEY, C. R. ***Predictable risk and returns in emerging markets***. *Review of Financial Studies*, p. 773-816, 1995.
- [21] HUFFER, F. W.; PARK, C. ***A test for elliptical symmetry***. *Journal of Multivariate Analysis*, p. 1-26, 2005.
- [22] INGERSOLL JR., J. E. ***Theory of Financial Decision Making***. New York: Rowman & Littlefield, 1987.
- [23] IUDÍCIBUS, Sergio de; LOPES, Alexsandro Broedel. ***Teoria Avançada da Contabilidade***. São Paulo: Atlas, 2004.
- [24] JARQUE, C. M.; BERA, A. K. ***A test for normality of observations and regression residuals***. *International Statistical Review*, v. 55, p. 163-172, 1987.
- [25] LINTNER, J. ***Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification***. *Journal of Finance*, v. 20, p. 587-615, 1965.
- [26] LUENBERGER, D. G. ***Investment Science***. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1998.
- [27] MACKINLAY, A. C. ***On Multivariate Tests of the CAPM***. *Journal of Financial Economics*, v. 18, p. 341-372, 1987.
- [28] MACKINLAY, A. C.; RICHARDSON, M. ***Using Generalized Methods of Moments to Test Mean-Variance Efficiency***. *Journal of Finance*, v. 46, p. 511-527, 1991.
- [29] MARKOWITZ, Harry. ***Portfolio Selection***. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77-91, 1952.

- [30] MARKOWITZ, Harry. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Blackwell Publishers, Inc., 1959.
- [31] MARTINS, Gilberto de Andrade. *Manual para Elaboração de Monografias e Dissertações*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- [32] MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- [33] NAKAMURA, Wilson. **Eficiência da carteira teórica do índice BOVESPA no contexto da moderna teoria de carteiras**. São Paulo, 1998. Tese (Doutorado em Administração) - Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.
- [34] NEWEY, W.; WEST, K. *A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*. *Econometrica*, v. 55, p. 703-708, 1987.
- [35] PAGAN, Adrian. *The Econometrics of Financial Markets*. *Journal of Empirical Finance*, v. 3, p. 15-102, 1996.
- [36] RICHARDSON, M.; SMITH, T. *A Test for Multivariate Normality in Stock Returns*. *Journal of Business*, v. 66, p. 295-321, 1993.
- [37] ROSE, C.; SMITH, M. D. *Mathematical Statistics with Mathematica*. [S.l]: Springer-Verlag, 2002.
- [38] RUBINSTEIN, Mark. *The Valuation of Uncertain Income Streams and the Price Options*. *Bell Journal of Economics*, v. 7, p. 407-425, 1976.
- [39] SHARPE, William. *Mutual fund performance*. *Journal of Business*, p. 119-138, 1966.
- [40] SHARPE, William. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. *Journal of Finance*, v. 19, p. 425-442, 1964.
- [41] SILVA, F. F.; MOTTA, L. F. J. **Teste do CAPM zero-beta no mercado de capitais brasileiro**. *Revista de Economia e Administração*, v. 1, n. 4, p. 72-88, 2002.
- [42] WEIL, P. *The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle*. *Journal of Monetary Economics*, v. 24, p. 401-421, 1989.
- [43] WOLFRAM, Stephen. *Mathematica Book*. 5 th. ed. Champaign: Wolfram Media, 2003.
- [44] ZIMMER, C. J. **Novos critérios de precificação em mercados incompletos: con-**

sistência, racionalidade e desvio-padrão normalizado por volume. São Paulo, 2005. Tese (Doutorado em Administração) - Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.