"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA E ADMINISTRAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

CONTRIBUIÇÃO AO DESENVOLVIMENTO DE MODELOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

José Roberto Securato

Tese apresentada à Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Administração.

Orientador: Prof. Dr. Keyler Carvalho Rocha

São Paulo
1991

AGRADECIMENTOS

Queremos registrar nosso profundo agradecimento a todos os que, de alguma forma, tornaram viável a realização do presente trabalho.

Ao professor doutor Geraldo Luciano Toledo, o primeiro a nos indicar a Administração como caminho para os nossos estudos.

Ao professor doutor Claus Leon Warschauer, nosso primeiro orientador, que nos deu a oportunidade de apresentar nosso trabalho.

Aos professores doutores Ruy Aguiar da Silva Leme e Jairo Simon da Fonseca, que nos mostraram o quão desafiante é quantificar em Administração.

Em especial, ao professor doutor Keyler Carvalho Rocha, nosso orientador, de quem recebemos grande parte de nossa formação geral em finanças, bem como a prática e ética relativas à profissão. Ainda, pela amizade paciente em tantos anos de convívio.

Ao professor doutor Rubens Famá que, em momento importante, foi o incentivador deste trabalho, além do amigo de muitas horas, assim como o foram os professores José Henrique Mendeas Tarcia, Luiz Antonio Malheiros Meloni, Jorge Arnaldo Maluf Filho e Roy Martelanc.

À Hermínia A.G. Bernardi, pela datilografia e organização do material e à professora Maria Silvia Olivi Louzada, pelo desafio da revisão formal do texto.

Agradecemos, finalmente, à família que nos soube tão bem compreender e estimular com seu carinho.

Ao Diamantino Securato e Dorina Amendola Securato, pais zelosos, a boa formação e o senso de responsabilidade incutidos.

Especialmente, ao José Roberto, José Cláudio e Andréa Silvia, pela paciência e compreensão com o pai estudante.

À Silva Barbosa Bruno Securato, esposa e companheira de todas as horas, pela ajuda indispensável nos momentos mais difíceis.

ABSTRACT

The primary objective of this research is to make a contribution to the field of Finance. Special emphasis is given to Financial Mathematics in order to introduce new models relating to the value of money over a period of time.

From the science of Physics the concepts of velocity and acceleration are incorporated, which are applied to variations in capital. As a resùlt, new forms of capitalization are devised, such as, the model of uniform variation of capitalization.

From the study of Marketing, analyzing the Bass difusion model with regards to the first purchases of a new durable and consumable product, a capitalization model that reflects the behavior of innovators and immitators is presented.

To conclude the research, the concepts of speed and acceeleration are applied to interest rates enabling the development of a model that explains the inertial aspect of interest rate variations.

The multi-disciplinary aspects of this research are a complementary contribution which should be fruitful for other financial studies.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento da área de Finanças, em especial a Matemática Financeira, de forma a introduzir novos modelos relacionados ao valor do dinheiro no tempo.

Da Física, trazemos os conceitos de velocidade e aceleração aplicados à variação do capital. Como resultado, obtemos novos modelos de capitalização, dentre os quais, o modelo de capitalização uniformemente variado.

Do Marketing, estudando o modelo de difusão de Bass para as primeiras compras de um novo produto durável e de consumo, obtemos um modelo de capitalização que caracteriza a atuação dos inovadores e imitadores.

Finalmente, estendemos os conceitos de velocidade e aceleração às taxas de juros. Este fato nos proporciona um novo tratamento às taxas de juros variáveis e à obtenção de um modelo que procura captar o aspecto inercial da variação das taxas de juros.

O aspecto multidisciplinar do trabalho é uma contribuição complementar que esperamos possa frutificar em outros estudos de finanças.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente trabalho tem por objetivo oferecer uma contribuição ao desenvolvimento de novos modelos de capitalização na tentativa de melhor explicar a evolução do valor do dinheiro no tempo.

Como observou Galbraith, em seu livro "Moeda: de onde veio, para onde foi"(34), o grande problema, antigamente, era como ganhar o dinheiro. Em nossos dias, permanece o problema de como ganhar o dinheiro, acrescido de um segundo problema, tão importante quanto o primeiro: como mantê-lo, sem que perca o seu valor.

O crescente processo inflacionário com que convive o país, nesta década de 80, nos traz grandes problemas relativos à manutenção do valor do dinheiro no tempo. Os sucessivos choques econômicos, as trocas de indexadores e as mudanças de política econômica nos obrigam a realizar verdadeiros exercícios de matemática superior quando nos propomos ao exame da comparação do valor dos ativos em relação ao tempo.

O estudo de finanças nos leva a uma de suas disciplinas - a Matemática Financeira - que está baseada no conceito de capitalização, definido como "qualquer processo de formação do capital ao longo do tempo". Pela própria definição observa-se que um dos seus principais objetivos é a relação do capital com o tempo, ou seja, o valor do dinheiro no tempo.

Baseados em nossos estudos e experiência no mercado financeiro, podemos considerar que a evolução da Matemática Financeira nos últimos anos deu-se, fundamentalmente, no aprimoramento do uso de seus conceitos e na criatividade de suas aplicações, apresentando poucas inovações do ponto de vista da evolução conceitual.

Os modelos clássicos de capitalização formam a estrutura básica da Matemática Financeira, a saber:

- capitalização simples, praticamente não utilizada pelo mercado, a não ser em operações de atrasos em cobranças;

- capitalização exponencial ou composta, também conhecida como juros sobre juros, como base para praticamente todos os modelos utilizados pelo mercado financeiro brasileiro;

- capitalização contínua, de uso acadêmico, com poucas aplicações práticas até o momento.

Com a evolução do mercado financeiro no Brasil e com a crescente inflação, o conceito de capitalização composta passou a ser cada vez mais estudado, constituindo-se numa questão de sobrevivência para o executivo financeiro. O advento das calculadoras eletrônicas do tipo financeiro, por volta de 1978, auxiliou, em muito, o desenvolvimento do conceito de capitalização, visto que deixava para as mesmas os problemas dos cálculos, permitindo assim que os executivos se fixassem nas questões financeiras.

Esta prática no tratamento dos conceitos logo tornou o mercado financeiro brasileiro bastante exigente em termos de tomada de decisão, principalmente em relação às taxas de juros. Estas passaram a ser muito bem definidas, de forma a não haver dúvidas quanto à taxa que se estava negociando, embora muitos produtos do mercado fossem cotados por taxas nominais. Assim, foram refinados os conceitos de taxa efetiva, taxa nominal, taxa real, etc.

A fórmula de Fischer, dada por:

$$(1 + \text{taxa efetiva}) = (1 + \text{taxa inflação}).(1 + \text{taxa real}),$$

passou a ser de uso corrente no mercado financeiro, demostrando com clareza a procura por operações que dessem ganho real. Naturalmente, os indexadores para a inflação também foram questionados quando não conseguiam captar claramente o que ocorria com a mesma.

A questão dos cálculos financeiros em nosso país passou a ser tão complexa que, em alguns casos, foram cometidos até erros conceituais a fim de que não fosse criada uma indignação na população. Pode-se citar, como um caso interessante, o da caderneta de poupança, à época trimestral, que pagava juros de 6% a.a., o que equivalia a 1,467% a.t. Quando a taxa das cadernetas passou a ser calculada mensalmente, os juros de 0,4867% a.m., em termos de capitalização composta, não foram aceitos pela população que, raciocinando de forma linear, queria a taxa de 6% a.a. que, dividida por 12 meses, daria 0,5% a.m.

Note-se que, mesmo errando o conceito de capitalização composta, o povo não errava o conceito de taxa real e lutava por ele.

Em junho de 1981, o ministro Mário Henrique Simonsen, ao proferir aula inaugural na Fundação Getúlio Vargas, chamava a atenção para os quatro erros mais comuns na Matemática Financeira:

- não saber distinguir juros descontados de juros postecipados;
- usar juros simples quando deveríamos utilizar juros compostos;
- confundir juros nominais com juros reais;
- respeitar a aritmética dos juros compostos, mas com a suposição de que as taxas se mantenham constantes no tempo.

Das palavras proferidas pelo ministro, publicadas na Gazeta Mercantil de 9 de junho de 1981, pode-se inferir o estágio de necessidade do domínio dos conceitos de Matemática Financeira em nossos dias; daí termos, hoje, um grande número de profissionais com perfeito conhecimento do assunto.

A evolução dos estudos de Matemática Financeira passa, naturalmente, também pelos financiamentos, pelas séries de pagamentos. Os planos de financiamentos da casa própria foram os mais populares na época, sendo que muitos técnicos dominavam os cálculos dos planos mais comuns, tais como:

- SAC - Sistema de Amortização Constante;
- PRICE - Parcelas de Igual Valor;
- MISTO - A parcela é média entre os dois planos anteriores.

Estes sistemas de financiamento tinham embutido o conceito de risco, que era caracterizado por:

- correção monetária;
- seguro de vida;
- fundo de compensação do saldo devedor.

A criatividade dos modelos e as modificações feitas ao longo do tempo mostram o domínio da **Matemática** Financeira no Brasil.

Como já afirmamos antes, o domínio dos conceitos e a criatividade nas aplicações fizeram da Matemática Financeira disciplina exigida para a formação de qualquer estudioso ou prático da área de finanças.

Atualmente, a possibilidade de evolução no estudo da Matemática Financeira ocorre através do desenvolvimento de novos conceitos. Objetivando dar uma contribuição a esta evolução conceitual é que nos propusemos ao presente trabalho.

2. APRESENTAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DESTE TRABALHO

O objetivo de nossa tese é oferecer uma contribuição ao desenvolvimento de modelos de capitalização, bem como introduzir novos conceitos para a avaliação da relação entre capital e tempo. Procuraremos, ainda, mostrar que modelos obtidos em outras áreas do conhecimento, tais como a física e o marketing podem, após conveniente adaptação, ser utilizados em finanças.

Neste capítulo I, introdutório, procuramos deixar claro os objetivos de nossa tese, bem como apresentar a questão básica que é o valor do dinheiro no tempo.

No capítulo II apresentamos os modelos usuais de capitalização, fixando os principais conceitos e notações utilizados nos demais capítulos.

Dois novos conceitos são apresentados no capítulo III: o de velocidade e o de aceleração do capital. Estes conceitos são obtidos por analogia aos estudos de física voltados para a cinemática, ou seja, movimento de um móvel em função do tempo. Encerramos o capítulo examinando os conceitos de velocidade e aceleração das capitalizações usuais.

Dedicamos o capítulo IV ao desenvolvimento de novos modelos de capitalização, a partir de condições impostas aos valores de velocidade e aceleração. Contribuímos com novos modelos de capitalização, tais como:

- capitalização exponencial, caso geral;
- capitalização quadrática.

De forma geral, apresentamos um método para a obtenção de modelos de capitalização.

No capítulo V estudamos mais detalhadamente a capitalização quadrática e fazemos sua comparação com as capitalizações usuais.

O capítulo VI dá, inicialmente, um novo enfoque à questão da capitalização. Partimos do texto "Aplicações de um modelo de crescimento para novos produtos" (55), publicado inicialmente pela Management Science, 15(5), janeiro de 1969, com o título "A new product growth model for consumer durables", de autoria de F.M. Bass.

Como se sabe, Bass desenvolve o modelo que nos dá "o número de compradores de um novo produto em função do tempo", a partir da hipótese de que "a probabilidade de uma compra ser feita na data t, dado que nenhuma compra tenha sido feita, é função linear do número de compradores prévios, dito inovadores, e dos compradores por estes influenciados, chamados de imitadores."

Adaptamos o Modelo de Bass para um modelo de capitalização ou para um modelo de formação de preços em relação ao tempo.

O modelo por nós obtido, comparado ao modelo de capitalização quadrática, mostrar-nos-á que os inovadores são responsáveis pela velocidade inicial com que os preços se desenvolvem e, os imitadores, pela aceleração.

Reservamos ao capítulo VII o desenvolvimento dos conceitos de velocidade e aceleração com que variam as taxas de juros, e o desenvolvimento de modelos de capitalização com taxas variadas.

Finalmente, no capítulo VIII, apresentamos nossas conclusões sobre o trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO II

OS MODELOS USUAIS DE CAPITALIZAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Quando nos propomos ao desenvolvimento de um estudo, em qualquer área do conhecimento, é fundamental termos claramente definidos os conceitos básicos que serão as pedras fundamentais do possível castelo a ser construído; devem ser marcos imutáveis a fim de que a teoria construída seja um sistema fechado.

Assim, neste capítulo, examinaremos, de maneira formal, os principais conceitos que envolvem a Matemática Financeira.

1.1. Capital

Um dos conceitos mais importantes é, com certeza, o de capital que entenderemos como sendo qualquer número real, referido a uma data, associado a uma unidade de moeda. Fixando um observador, vamos convencionar como entradas de caixa ou créditos os valores positivos de capital e os negativos como saídas ou débitos.

Indicaremos o capital, neste trabalho, pela letra S. Quando desejarmos evidenciar a data t a que o mesmo está se referindo anotaremos: S_t ou $S(t)$ e ainda usaremos a notação [$] para indicarmos a grandeza, no conceito de medida, do capital.

1.2. Capitalização

Podemos entender capitalização como "qualquer processo de formação do capital ao longo do tempo".

De maneira mais formal, podemos também chamar de capitalização a toda função que descreve o comportamento do capital ao longo do tempo, ou seja:

$$S: R^+ \longrightarrow R, \quad \text{dada por} \quad S = S(t)$$

É muito comum, em Matemática Financeira, restringirmos o domínio da função capitalização ao conjunto dos números inteiros. Assim, teríamos:

$$S: N \longrightarrow R, \quad \text{dada por} \quad S = S(n)$$

1.3. Juros

Dentre as várias maneiras de entendermos o conceito de juros, a mais simples, ao nosso ver, é como "remuneração do fator capital" (63). Outra forma interessante de entendermos os juros "decorre do fato de que a maioria das pessoas prefere consumir seus bens no presente e não no futuro. Em outras palavras, havendo uma preferência temporal para consumir, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio, para que não haja consumo, é o juro"(53).

Indicaremos os juros pela letra J e por J_t quando referido a uma data t. Assim, considerando um capital, que indicaremos por S_0, aplicado a partir da data zero e por um período t, rendendo juros J_t, o valor do capital na data t será:

$$S_t = S_o + J_t$$

Nestas condições, também podemos entender "capitalização como um processo de formação de juros"(3).

Considerando as datas t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, podemos definir como juros do período entre as datas a:

$$J = S_{t_2} - S_{t_1};$$

o que é outra forma de entendermos o conceito de juros.

1.4. Montante

Consideremos um capital S_{t_1} que participará de um processo de capitalização iniciado em t_1, auferindo juros J ao fim do processo em t_2, $t_2>t_1$.

Chamamos de montante, e o indicaremos pela letra M, a:

$$M = J + S_{t_1}, \quad \text{ou seja,} \quad M = S_{t_2}$$

1.5. Taxa de Juros

Será entendida como sendo a remuneração da unidade de capital por unidade de tempo. Indicaremos a taxa de juros com a letra i. Quando considerarmos o tempo em seu conceito infinitesimal, chamaremos a taxa de juros de instantânea.

2. CAPITALIZAÇÕES USUAIS

As capitalizações usuais em finanças são a capitalização simples, a capitalização composta e a capitalização instantânea.

A capitalização simples consiste basicamente em uma regra de três na formação dos juros. Na prática, é utilizada na cobrança de atraso de pagamentos.

A capitalização composta considera a evolução dos juros sobre juros na formação do capital. É o modelo mais utilizado nas práticas financeiras.

Com relação à capitalização instantânea ou contínua, os juros se incorporam ao capital a cada infinitésimo de tempo, o que praticamente é impossível de ser realizado. Consiste em um belo modelo teórico, mas de pouquíssima aplicação prática até os nossos dias.

Estas capitalizações apresentam um desenvolvimento matemático, como será demonstrado a seguir.

2.1. Capitalização Simples

Considera que os juros são diretamente proporcionais ao capital, ao número n de unidades de tempo fixados pela taxa e a própria taxa i.

Assim:

$$J = S_o \times i \times n$$

logo,

$$S_n = S_o + J$$

ou

$$S_n = S_o + S_o \times i \times n$$

ou, ainda,

$$S_n = S_o (1 + in) \qquad [1]$$

2.2. Capitalização Composta

Considera que dada a taxa de juros, esta fixa o prazo unitário de tempo ao fim do qual se deve incorporar ao capital os juros desse prazo unitário de tempo, dito período de capitalização. Assim, ao fim do primeiro período de capitalização teremos:

$$J_1 = S_o \times i \times 1 \quad e \quad S_1 = S_o (1 + i) .$$

No segundo período:

$$J_2 = S_1 \times i \times 1 \quad e \quad S_2 = S_o (1 + i)^2$$

Continuando com o processo, obteremos:

$$S_n = S_0 (1 + i)^n. \qquad [2]$$

As definições da capitalização simples e da composta nos dão funções com domínios nos inteiros. Poderíamos, no entanto, estendê-las para os reais positivos e considerar, também, o valor de um capital em um prazo de tempo não inteiro em relação à unidade de tempo fixada pela taxa. Nessas condições, poderíamos escrever para a capitalização simples:

$$S_t = S_o + S_o \times i \times t$$

ou

$$S_t = S_o (1 + it) \quad ; \quad \text{com } t \text{ real positivo;}$$

e, para a composta,

$$S_t = So (1 + i)^t.$$

Estas funções são contínuas em seu domínio R^+, que estamos trabalhando.

2.3. Capitalização Instantânea

Também conhecida como capitalização contínua, por considerar a taxa de juros I referida a um período de tempo infinitesimal, ao fim do qual os juros se incorporam ao capital.

Sendo S_t o capital em um instante t, dS_t o acréscimo de capital obtido pela aplicação de S_t pelo tempo dt, à taxa I, teremos:

$$dS_t = S_t \times I \times dt, \qquad [3]$$

baseados na idéia de que os juros dS_t são diretamente proporcionais ao prazo dt, ao capital S_t e à taxa I.

Assim:

$$\frac{dS_t}{S_t} = Idt$$

ou

$$\int \frac{dS_t}{S_t} = \int Idt$$

$$\ln S_t = I \times t + k$$

onde k é uma constante de integração. Logo,

$$S_t = e^{it + k}$$

ou

$$S_t = e^{it} \times e^k.$$

Considerando que para t = 0 temos o capital S_o, resulta $S_o = e^k$;
logo,

$$S_t = S_o\, e^{it} \qquad [4]$$

que é uma função contínua para os reais positivos, domínio em que estamos trabalhando, e também contínua, em relação ao prazo de tempo a que se refere a taxa de juros.

3. AS TAXAS DE JUROS E AS LEIS DE CAPITALIZAÇÃO

Pelas capitalizações vistas é fácil observar o quanto é importante a unidade de tempo a que uma taxa está fixada. Vamos, então, estabelecer as relações entre as diversas taxas e os sistemas de capitalização.

Para tanto, vamos considerar que, partindo de um capital S_o para um prazo t, com diferentes taxas ou sistemas de capitalização, chegamos a um mesmo montante S_t.

3.1. Taxas Proporcionais

Duas taxas são proporcionais quando, sob o regime de juros simples, temos as taxas i_1 e i_2 definidas em unidades de tempo distintas e, de tal forma, que ao prazo em questão correspondam respectivamente a t_1 e t_2, medidas de tempo em relação às unidades de i_1 e i_2.

Assim:

$$S_t = S_o\ (1 + i_1 \times t_1)$$

e

$$S_t = S_o\ (1 + i_2 \times t_2)\ .$$

Logo,

$$i_1\ t_1 = i_2\ t_2 \qquad [5]$$

3.2. Taxas Equivalentes

Ocorrem quando, na capitalização composta, as taxas i e i_k definidas em unidades de tempo distintas de maneira que, enquanto a taxa i completa uma capitalização, a taxa i_k completa k-capitalizações. Assim, para o prazo t teremos:

$$S_t = S_o \ (1 + i)^t$$

e

$$S_t = S_o \ (i + i_k)^{kt} \ .$$

Logo,

$$(1 + i) = (1 + i_k)^k. \qquad [6]$$

3.3. Relações entre as Taxas de Juros

Admitindo agora as taxas referidas a uma mesma unidade, podemos conhecer suas equivalências em relação aos sistemas de capitalização. Indicando por i_s a taxa relativa à capitalização simples, por i_c a composta e por I a instantânea, teremos:

$$S_t = S_o \ (1 + i_s t)$$
$$S_t = S_o \ (1 + i_c)^t$$
$$S_t = S_o \ e^{It}.$$

Assim:

a) $(1 + i_s t) = (1 + i_c)^t$ [7]

b) $(1 + i_c)^t = e^{It}$ ou [8]

$(1 + i_c) = e^I$ [9]

c) $(1 + i_s \cdot t) = e^{It}$. [10]

Destas relações, os itens **a** e **c** dependem do prazo **t** e o item **b** não. Do item **b** concluímos que é sempre possível obter uma taxa instantânea equivalente à taxa composta, independentemente do prazo **t** da capitalização.

CAPÍTULO III

VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DO CAPITAL

1. O CONCEITO DE VELOCIDADE

Em nosso cotidiano, é freqüente encontrar expressões que usam o termo velocidade agregado às mais variadas situações. Este fato pode ser caracterizado pela leitura dos jornais onde encontramos frases tais como:

- a velocidade de aumento dos preços indica uma inflação crescente;
- cai a velocidade das vendas no comércio;
- aumenta a velocidade de crescimento da inflação.

Como é sabido, o conceito de velocidade vem da física e é dado pelo quociente do espaço percorrido por um móvel pelo tempo gasto para tal. Assim, quando um carro se locomove a uma velocidade de 80 km por hora, em condições ideais, entendemos que percorreremos o espaço de 80 km no intervalo de tempo de 1 hora.

Este conceito da física vem sendo generalizado de forma a ser entendido como "o quociente da variação do valor de uma grandeza, passível de ser medida, pelo tempo gasto para ocorrer tal variação". Assim, este conceito geral de velocidade passa a ter uso comum na indústria, no comércio e nos vários ramos do conhecimento.

Quando nos referimos a uma produção de 5000 malhas por mês, ou a vendas de 2000 unidades por ano, ou a um salário de Cr$ 100,00 por hora, estamos usando o conceito de velocidade.

Como disse Ludiwig von Bertalanffy "Examinando a evolução da ciência moderna encontramos um surpreendente fenômeno. Independente uns dos outros, problemas e concepções semelhantes surgiram em campos amplamente diferentes"(10). O que ocorre com o conceito de velocidade é que ele rompe barreiras, passando de um casulo do conhecimento para outro.

Estamos particularmente interessados no quociente da "variação do valor da grandeza capital pelo tempo gasto para ocorrer tal variação". Entenderemos este quociente como sendo a velocidade do capital.

Em nosso dia-a-dia é muito comum o aparecimento deste tipo de velocidade, caracterizado pelo quociente do capital pelo tempo. As frases:

- salário de Cr$ 200.000,00 por mês,
- custo da produção de Cr$ 1.000,00 por hora,
- lucros de US$ 1.000.000 para o semestre,

são exemplos de aplicação da idéia de velocidade do capital.

Do exposto, temos uma noção do conceito de velocidade aplicado à grandeza dinheiro, ou seja, ao capital; devemos, no entanto, elaborar formalmente a questão e procurar ampliar os resultados, como o fazemos a seguir.

1.1. Velocidade do Capital

Consideremos $S_t = S(t)$ uma lei de capitalização.

Então, para a data **t** corresponde um capital $S(t)$ e para a data $t + \Delta t$ corresponde o Capital $S(t + \Delta t)$, onde Δt é um acréscimo de tempo.

Indiquemos por:

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t),$$

o acréscimo de capital correspondente a Δt.

Nestas condições, definimos: "velocidade média do capital no intervalo Δt", que indicaremos por v_m, a:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad . \qquad [11]$$

Definimos a velocidade em um instante t, indicada por v_t, a:

$$v_t = \lim_{\Delta t \to 0} v_m \qquad [12]$$

evidentemente consideradas as condições para a existência do limite.

Assim, partindo da função capitalização $S_t = S(t)$ obtivemos que:

$$v_t = \lim_{\Delta t \to 0} v_m$$

com $$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

logo $$v_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad [13]$$

mas este limite nada mais é que a derivada da função capitalização em relação ao tempo, no instante t.

Então: $$v_t = \frac{dS}{dt} \qquad [14]$$

que, admitidas as condições de existência da derivada, nos dá a função velocidade de um capital, ou seja:

$$v_t = v(t) \, . \qquad [15]$$

Consideremos, ainda, o capital inicial de uma lei de capitalização, indicado por S_o ; chamaremos de velocidade unitária no instante t, indicada por vu_t, a:

$$vu_t = \frac{v_t}{S_o} \qquad [16]$$

Como S_o é constante, a velocidade unitária será uma função do tempo, ou seja,

$$vu_t = vu(t). \qquad [17]$$

2. O CONCEITO DE ACELERAÇÃO

O termo aceleração, da mesma forma que o termo velocidade, é comumente utilizado em nosso cotidiano na tentativa de dar a idéia de movimento da grandeza em foco.

Tomando por base a física, o conceito de aceleração é dado pelo quociente da "variação da velocidade pelo tempo gasto para ocorrer tal variação". Naturalmente, esta aceleração poderá ser positiva ou negativa, conforme sejam crescentes ou decrescentes as velocidades.

Ocorre que, na maioria das vezes, o conceito de aceleração estabelecido pela física não é respeitado ao passar para o uso comum, contrariamente ao que em geral acontece com o termo velocidade. Um exemplo deste fato é a manchete, de primeira página, do jornal Folha de São Paulo de 17 de outubro de 1990, que diz: "Dólar acelera e chega a 100"; referindo-se ao valor do dólar, no mercado paralelo, que registrava o valor de cem cruzeiros.

Admitamos que a evolução do valor do dólar tenha sido de:

- Cr$ 96,00 em 15/10/90
- Cr$ 98,00 em 16/10/90
- Cr$ 100,00 em 17/10/90.

Como já conhecemos o conceito de velocidade, desenvolvido no item anterior, é fácil observar que a velocidade do dólar é de Cr$ 2,00 por dia; constante, portanto, no período observado.

Assim, como não há variação da velocidade no período, a aceleração é zero, de acordo com os princípios da física.

Vamos então formalizar o conceito de aceleração para o caso do capital, ou seja, do valor do dinheiro, como segue.

2.1. Aceleração do Capital

Sabemos que, a partir da lei de capitalização $S_t = S(t)$, podemos obter a função velocidade de uma capitalização dada por:

$$v(t) = \frac{dS}{dt}$$

ou, ainda, que

$$v_t = v(t).$$

Consideremos, então, que para o instante t corresponda a velocidade $v(t)$ e para $t + \Delta t$ corresponda $v(t + \Delta t)$, onde Δt é um acréscimo de tempo.

Indiquemos a variação da velocidade, correspondente ao acréscimo de tempo Δt por:

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t).$$

Assim, chamaremos de aceleração do capital no intervalo Δt, indicaremos por a_m, a:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad [18]$$

Podemos definir a aceleração no instante t, que indicaremos por a_t, com a passagem da aceleração ao limite, com Δt tendendo a zero, como segue:

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} a_m; \qquad [19]$$

naturalmente, consideradas as condições de existência do limite.

Do exposto, vimos que a partir da equação de velocidades de um capital,

$$v_t = v(t)$$

obtemos

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

que chamaremos de aceleração média.

Obtemos, ainda, a aceleração no instante t dada por:

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} a_m$$

ou

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \qquad [20]$$

Esta última expressão é a derivada da função velocidade do capital em relação ao tempo, no instante t.

Logo: $$a_t = \frac{dv}{dt} \quad . \qquad [21]$$

Assim, admitindo as condições de existência da derivada, obtemos a função aceleração de um capital, dada por:

$$a_t = a(t) \quad . \qquad [22]$$

Chamaremos de aceleração unitária no instante t, que indicaremos por au_t, à:

$$au_t = \frac{a_t}{S_o} \quad .$$

Como S_o é constante então podemos escrever:

$$au_t = au(t) \quad .$$

3. VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DE CAPITAIS SUJEITOS ÀS CAPITALIZAÇÕES USUAIS

A fim de desenvolver um pouco mais as idéias de velocidade e aceleração de um capital, vamos aplicá-las a capitais sujeitos aos modelos de capitalização simples, composta e contínua.

3.1. Velocidade e Aceleração na Capitalização Simples

Dada a lei da capitalização simples

$$S_t = S_o + S_o \cdot i \cdot t \quad ; \quad \text{com t real positivo,}$$

então,

$$v_t = \frac{ds}{dt} = S_o \cdot i,$$

ou seja, a velocidade é constante, independe do prazo.

A velocidade unitária será:

$$vu_t = \frac{v_t}{S_o} \quad \text{ou} \quad vu_t = i.$$

Como se observa, a taxa de juros nos dá a velocidade por unidade de capital aplicado.

Sendo $v_t = S_o i$, então $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$ e $au_t = 0$, ou seja, a capitalização simples se caracteriza pela aceleração nula, o que implica na velocidade constante.

Observando a equação das velocidades, teremos para $t = 0$ que $v_o = S_o i$. Podemos então escrever a equação da capitalização simples

$$S_t = S_o + S_o it ,$$

como:

$$S_t = S_o + v_o t , \qquad [23]$$

que bem caracteriza a importância da velocidade inicial na formação do capital na data t.

Evidentemente, o juro na capitalização simples será dado por:

$$J = v_o t .$$

67009

3.2. Velocidade e Aceleração da Capitalização Composta

Sendo $S_t = S_o (1 + i)^t$, com t real positivo, a lei que descreve a capitalização composta, teremos:

$$v_t = \frac{dS}{dt} = S_o(1+i)^t \times \ln(1+i), \text{ com } 1+i>0. \qquad [24]$$

Para $t = 0$ obtemos a velocidade inicial da capitalização que será: $v_o = S_o \ln(1+i)$; donde podemos escrever:

$$v_t = v_o (1+i)^t , \qquad [25]$$

que é uma forma análoga à expressão da capitalização composta $S = S_o (1+i)^t$.

Ainda, considerando a equação das velocidades, podemos calcular a velocidade unitária

$$vu_t = (1+i)^t \times \ln (1+i) .$$

Finalmente, podemos calcular a equação da aceleração:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = S_o (1+i)^t \times \ln^2 (1+i) . \qquad [26]$$

Para $t = 0$, $a_o = S_o \ln^2 (1+i)$, assim podemos escrever:

$$a_t = a_o (1+i)^t . \qquad [27]$$

A aceleração unitária seria dada por:

$$au_t = (1+i)^t \times \ln^2 (1+i) . \qquad [28]$$

3.3. Velocidade e Aceleração na Capitalização Contínua

Sabemos que $S_t = S_o e^{It}$,

assim,

$$v_t = \frac{dS}{dt} = S_o I e^{It} . \qquad [29]$$

Para t = 0 teremos $v_o = S_o I$, donde:

$$v_t = v_o e^{It} .$$

A velocidade unitária será:

$$vu_t = I\ e^{It} .$$

Derivando a equação das velocidades, teremos:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = S_o\ I^2\ e^{It} . \qquad [30]$$

Para t = 0, teremos $a_o = S_o\ I^2$, donde:

$$a_t = a_o\ e^{It} ;$$

e a aceleração unitária será dada por:

$$au_t = I^2\ e^{It} . \qquad [31]$$

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTO DE MODELOS DE CAPITALIZAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Neste capitulo vamos fixar parâmetros para a velocidade e para a aceleração, com a finalidade de obter modelos de capitalização.

Os modelos obtidos serão nomeados conforme as características que nos pareçam significativas; embora, em alguns casos, possamos obter capitalizações conhecidas.

Nestes casos, procuraremos comparar os elementos conhecidos com os conceitos de velocidade e aceleração.

2. CAPITALIZAÇÃO UNIFORME

Por analogia à física, vamos utilizar o termo uniforme para um modelo de capitalização onde a velocidade é constante.

Assim, a capitalização uniforme fica definida pela equação de velocidades:

$$v_t = k \,, \qquad k: \text{ constante;}$$

onde, para $t = 0$ temos $V_o = k$.

A partir da equação diferencial do capital, dado por:

$$dS_t = v_t \, dt \,,$$

vem $$S_t = \int v_t \, dt$$

com $$v_t = v_o = k \,.$$

Integrando, vamos obter

$$S_t = v_o t + r \,,$$

onde r é a constante devido a integração, que pode ser obtida substituindo $t = 0$ na equação;

então, para $t = 0$ teremos $S_o = r$.

Daí, a lei de capitalização uniforme será da forma:

$$S_t = S_o + V_o t. \qquad [32]$$

Trata-se, naturalmente, da lei de capitalização simples com $V_o = S_o \times i$. Este fato também pode ser evidenciado derivando $v_t = k$, onde

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 .$$

3. CAPITALIZAÇÃO EXPONENCIAL

Chamaremos de capitalização exponencial a toda capitalização em que a aceleração é da forma seguinte:

$$a_t = k\, p^{st} \text{ , com } t \text{ real positivo ,} \qquad [33]$$

onde k, p, s são constantes que devem satisfazer às seguintes condições:

- $p \neq 0$ e $p \neq 1$
- $k \neq 0$
- $s \neq 0$.

Estas condições justificam-se pois:

- se $k = 0$ ou $p = 0$, teremos $a_t = 0$ e estaremos no caso de capitalização uniforme;

- se $p = 1$ ou $s = 0$, teremos $a_t = k$, ou seja, a aceleração é constante, perdendo sua característica exponencial.

Partindo da equação diferencial da velocidade:

$$dv_t = a_t \, dt ,$$

para $a_t = k\, p^{st}$, como hipótese,

teremos $v_t = \int k\, p^{st}\, dt$.

Integrando, obtemos a equação da velocidade dada por

$$v_t = \frac{k}{s.\ln p} p^{st} + r_1 ,$$

onde r_1 é a constante de integração.

Para obtermos o valor de r_1, consideramos a condição inicial $t = 0$,

onde: $$v_o = \frac{k}{s.\ln p} + r_1 ;$$

daí $$r_1 = v_o - \frac{k}{s.\ln p} .$$

Obtido r_1 podemos integrar novamente e obter a lei de capitalização.

Partindo da equação diferencial da velocidade,

$$dS_t = v_t\, dt$$

temos $$S_t = \int v_t\, dt ,$$

ou $$S_t = \int \left(\frac{k}{s.\ln p} p^{st} + r_1 \right) dt .$$

Integrando, obtemos:

$$S_t = \frac{k}{s^2.\ln^2 p} p^{st} + r_1 t + r_2 ,$$

onde r_2 é constante de integração.

Fazendo $t = 0$, na equação obtida,

temos: $$S_o = \frac{k}{s^2.\ln^2 p} + r_2 ,$$

daí $$r_2 = S_o - \frac{k}{s^2.\ln^2 p} .$$

Substituindo os valores obtidos para r_1 e r_2 na equação que nos dá S_t, obtemos a lei de capitalização procurada:

$$S_t = \frac{k}{s^2.\ln^2 p} p^{st} + (v_o - \frac{k}{s.\ln p})t + (S_o - \frac{k}{s^2.\ln^2 p}) . \qquad [34]$$

Esta lei de capitalização foi obtida a partir da hipótese de que a aceleração segue um modelo exponencial genérico, dado por $a_t = k\ p^{st}$.

Fixando valores convenientes para as constantes k, p e s obtemos casos particulares de capitalização, como segue:

a) fazendo

$k = S_o \times \ln^2 (1 + i)$

$p = 1 + i$

$s = 1$

temos: $$a_t = (S_o \times \ln^2 [1 + i])(1 + i)^t . \qquad [35]$$

A partir da equação da aceleração podemos obter v_o, por integração, e substituir na equação que nos dá S_t .

O resultado final deste trabalho de cálculo nos dá:

$$S_t = S_o (1 + i)^t ,$$

ou seja, a lei de capitalização composta.

b) fazendo:

$k = S_o I^2$

$p = e$

$s = I$

temos: $a_t = S_o \, I^2 \, e^{It}$. [36]

Com trabalho semelhante ao anterior obteremos:

$$S_t = S_o \, e^{It} ,$$

ou seja, a lei de capitalização contínua.

4. CAPITALIZAÇÃO UNIFORMEMENTE VARIADA OU QUADRÁTICA

Na física um movimento é chamado de uniformemente variado quando a aceleração é constante. Seguindo um processo análogo dizemos que uma capitalização é uniformemente variada quando sua aceleração é constante, ou seja:

$$a_t = a \; ; \quad a: \text{constante}, \; a \neq 0 \, .$$

Partindo da equação diferencial da velocidade, dada por:

$$dv_t = a_t \, dt \, ,$$

ou $$dv_t = a \, dt \, ,$$

temos $$v_t = \int a \, dt \, .$$

Integrando:

$$v_t = at + r_1 \, ,$$

onde r_1 é uma constante de integração.

Para $t = 0$ obtemos: $v_o = r_1$,

logo: $$v_t = at + v_o \, .$$

Tomemos, agora, a equação diferencial do capital, dada por:

$$dS_t = v_t \, dt \, .$$

Então, $S_t = \int v_t \; dt$,

ou, substituindo v_t, temos:

$$S_t = \int (at + v_o) \; dt \, .$$

Integrando:

$$S_t = \frac{1}{2} \; at^2 + v_o t + r_2 \; ,$$

onde r_2 é a constante de integração.

Para as condições iniciais $t = 0$ temos $S_o = r_2$; substituindo, obtemos a lei da capitalização uniformemente variada, dada por:

$$S_t = S_o + v_o t + \frac{1}{2} \; at^2 \, . \qquad [37]$$

Uma propriedade interessante da capitalização quadrática, ocorre quando nos propomos a aplicá-la, sucessivamente, aos montantes obtidos ao fim de períodos inteiros de tempo.

Consideremos a lei de capitalização quadrática para períodos inteiros de tempo, dada por:

$$S_n = S_o + v_o \, . \, n + \frac{1}{2} \; an^2 \; , \qquad [38]$$

onde a equação de velocidades será:

$$v_n = v_o + a \cdot n \,. \qquad [39]$$

Por meio da tabela, mostramos os valores do montante e do capital ao fim de cada período de tempo, como segue:

PERÍODO	CAPITAL NO INÍCIO DO PERÍODO	VELOCIDADE DO INÍCIO DO PERÍODO	MONTANTE AO FIM DO PERÍODO
1	S_o	v_o	$S_1 = S_o + v_o + \frac{1}{2} a$ (1)
2	S_1	$v_1 = v_o + a$	$S_1 = S_1 + v_1 + \frac{1}{2} a,$ ou substituindo e simplificando $S_2 = S_o + 2v_o + 2a$ (2)
3	S_2	$v_2 = v_o + 2a$	$S_3 = S_2 + v_2 + \frac{1}{2} a,$ ou substituindo e simplificando $S_3 = S_o + 3v_o + \frac{9}{2} a$ (3)
4	S_3	$v_3 = v_o + 3a$	$S_4 = S_3 + v_3 + \frac{1}{2} a,$ ou substituindo e simplificando $S_4 = S_o + 4v_o + 8a$ (4)

Observando as equações (1), (2), (3) e (4), constata-se que a dificuldade para a determinação de um termo geral está na seqüência dos coeficientes da aceleração, dada por:

$$\{\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \ldots\} = \{\frac{1^2}{2}, \frac{2^2}{2}, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{2}, \ldots\} = \{\frac{n^2}{2}\}$$

Determinado o termo geral da seqüência, obtemos o termo geral da capitalização ao fim de cada período:

$$S_n = S_o + n \times v_o + \frac{n^2}{2} a ,$$

o que facilmente se demonstra pelo princípio da indução finita.

Reescrevendo o termo geral obtido teremos:

$$S_n = S_o + v_o n + \frac{1}{2} a n^2 ,$$

obtendo novamente a equação do modelo de capitalização uniformemente variada, provando assim sua característica de capitalização composta.

5. OUTROS MODELOS DE CAPITALIZAÇÃO

Pelos exemplos dados observa-se que podemos obter vários modelos de capitalização, bastando para tanto impor condições para a velocidade ou aceleração.

Consideremos como último exemplo, o caso da aceleração dada por:

$$a_t = bt + a \; ; \quad a, b: \text{constantes},$$

com $b \neq 0$, pois caso contrário obtemos a lei da capitalização quadrática.

Sendo $a_t = bt + a$,

então $v_t = \int (bt + a)\, dt$,

ou $v_t = \frac{1}{2} bt^2 + a \times t + r_1$.

Para $t = 0$, $v_o = r_1$,

logo $v_t = \frac{1}{2} bt^2 + at + v_o$,

como $S_t = \int (\frac{1}{2} bt^2 + at + v_o)\, dt$,

então $S_t = \frac{1}{6} bt^3 + \frac{1}{2} at^2 + v_o t + r_2$, onde $r_2 = S_o$ para $t = 0$.

Daí, $$S_t = S_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2 + \frac{1}{6} bt^3 \; ; \qquad [40]$$

o que nos dá a lei de capitalização procurada.

CAPÍTULO V

ESTUDO DO MODELO DE CAPITALIZAÇÃO UNIFORMEMENTE VARIADA OU QUADRÁTICA

1. CONDIÇÕES INICIAIS

Ao desenvolvermos uma equação matemática, que procura descrever um fenômeno qualquer, devemos nos preocupar com suas condições de existência, do ponto de vista matemática e do ponto de vista lógico, dentro do estudo em questão.

Assim, ao desenvolvermos a lei de capitalização quadrática, dada por:

$$S = S_o + V_o t + \frac{1}{2} a\, t^2 ,$$

estamos considerando que $t \geqslant 0$ e $S_o > 0$, ou seja, que existe um capital inicial positivo a ser aplicado durante um prazo de tempo positivo, com início em uma data de origem.

Vamos considerar ainda que a aceleração, constante no caso, seja diferente de zero, pois caso contrário cairíamos na lei de capitalização uniforme já examinada.

A interpretação da lei obtida tem dois aspectos, conforme consideremos a aceleração positiva ou negativa.

Quando a aceleração é positiva temos as velocidades crescentes e a evolução do capital será uniformemente acelerada. No caso da aceleração ser negativa, então as velocidades serão decrescentes e dizemos que o capital estará sendo uniformemente desacelerado.

A partir da lei da capitalização uniformemente variada, dada por:

$$S_t = S_o + V_o t + \frac{1}{2} at^2, \text{ com } S_o>0,\ t\geq 0 \text{ e } a \neq 0$$

obtemos, por derivação, a equação da velocidade, que será:

$$v_t = v_o + at .$$

Derivando novamente, obtemos a equação da aceleração:

$$a_t = a = \text{constante} .$$

O nosso objetivo será o de determinar critérios para a fixação dos parâmetros velocidade e aceleração, a fim de aplicarmos a lei de capitalização obtida e as equações derivadas.

2. A FIXAÇÃO DOS PARÂMETROS

Quando observamos a capitalização simples, dada por:

$$S = S_o (1 + it)$$

e a capitalização composta, dada por:

$$S = S_o (1 + i)^t ,$$

temos que o capital S assume um mesmo valor, para ambas as capitalizações, em duas situações, como segue:

para $t = 0$, onde temos $S = S_o$; e
para $t = 1$, onde $S_1 = S_o (1 + i)$.

Para a capitalização quadrática, dada por:

$$S = S_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2 ,$$

também, para $t = 0$, temos $S = S_o$; e para $t = 1$, temos

$$S_1 = S_o + v_o + \frac{1}{2} a .$$

Impondo a condição, que ao fim do primeiro periodo de capitalização pelo modelo quadrático, o valor do capital seja o mesmo obtido pelas capitalizações simples e composta, teremos:

$$S_o\ (1 + i) \ = \ S_o + v_o + \frac{1}{2}\ a\ ,$$

ou, desenvolvendo:

$$S_o i \ = \ v_o + \frac{1}{2}\ a\ ; \qquad [41]$$

que nos dá uma relação entre velocidade e aceleração.

Tirando o valor da velocidade e substituindo na equação de capitalização quadrática, obtemos:

$$S \ = \ S_o + (S_o i - \frac{1}{2}\ a)\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2\ , \qquad [42]$$

onde os parâmetros taxa de juros "i" e aceleração "a" devem caracterizar a capitalização, a partir de um mesmo capital inicial S_o.

Como vimos, a taxa de juros é a mesma utilizada nas leis de capitalização simples ou composta, não havendo portanto novidade no seu trato. A questão que se coloca é como fixar a aceleração, a fim de efetivamente termos alguma aplicação prática do modelo quadrático.

Devemos, assim, estabelecer critérios que nos permitam fixar esta aceleração. É o que passaremos a examinar.

3. UM EXEMPLO PARA FIXAÇÃO DO PARÂMETRO ACELERAÇÃO

Consideremos que possamos estabelecer uma política que pretenda beneficiar as aplicações financeiras de prazo mais longo. Naturalmente existirão várias maneiras de fixarmos tal política e elas poderão ter sucesso ou não, conforme os fatores conjunturais.

Particularmente, vamos estabelecer uma política com tal objetivo, admitindo as seguintes condições:

a) fixemos um prazo k, k>1, de maneira que as aplicações financeiras de prazo maior que k sejam remuneradas pela capitalização composta;

b) que as aplicações financeiras, com prazos menores ou iguais a k, sigam a capitalização uniformemente variada ou quadrática, do tipo:

$$S = S_o + (S_o i - \frac{1}{2} a)\ t + \frac{1}{2} at^2 \ ;$$

c) que, nas condições do item b, a aceleração da capitalização quadrática seja fixada da seguinte forma: o montante da capitalização quadrática S_Q, na data $t = k$, é igual à média ponderada dos montantes obtidos pela capitalização simples S_S e composta S_C, na mesma data k. Ou seja:

$$S_Q = xS_s + yS_c \; ; \text{ com } 0<x,\ y<1 : x + y = 1 .$$

Substituindo as equações na condição acima, para $t = k$, teremos:

$$S_o + (S_o i - \frac{1}{2} a)k + \frac{1}{2} ak^2 = x.S_o(1 + ik) + y.S_o\ (1 + i)^k,$$

ou, tirando o valor da aceleração:

$$a = 2.S_o.y \frac{(1+i)^k - (1+ik)}{k\ (k-1)} \; ; \qquad [43]$$

lembrando que $au = \frac{S_o}{a}$, vem:

$$au = 2\ y \frac{(1+i)^k - (1+ik)}{k\ (k-1)} . \qquad [44]$$

Como exemplo, fixemos nossa política com base nos parâmetros $k = 3$ meses e $y = 70\%$.

A aceleração unitária será dada por:

$$au = 2 \times 0{,}70 \frac{(1+i)^3 - (1+i3)}{3.2}$$

Podemos, assim, elaborar uma tabela que nos dá a aceleração para cada taxa de juros praticada no mercado, como segue:

TAXA DO MERCADO % a.m.	ACELERAÇÃO UNITÁRIA
3	0,0006363
5	0,0017792
7	0,0035100

Desta forma, tomando um capital de Cr$ 1.000,00, aplicado por 2 meses a taxa de 5% ao mês, teremos:

$$a = au \times 1.000 \ , \quad \text{ou} \quad a = 1,7792 \ ,$$

então:

$$S = 1.000 + (1.000 \times 0,05 - \frac{1}{2} \times 1,7792) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1,7792 \times 2^2,$$

ou seja: $S = 1.101,78$.

Observemos que, pelo regime de capitalização composta, teríamos:

$$S = 1.102,50$$

e pela de capitalização simples:

$$S = 1.100,00 \ .$$

Nestas condições, as aplicações com prazos menores ou iguais a três meses, estão sendo penalizadas, ao seguirem a capitalização quadrática, ao passo que as de prazos maiores são beneficiadas ao seguirem a capitalização composta.

O exemplo apresentado nos mostra um critério para a determinação da aceleração; outros critérios poderiam ser desenvolvidos como, por exemplo, fixarmos o valor da capitalização quadrática igual ao da capitalização composta em uma data pré-fixada ou, ainda, a partir de uma regressão sobre dados preestabelecidos.

Naturalmente, a aplicação ou não do modelo de capitalização uniformemente variado deverá, ainda, ser objeto de estudos e experiências. Neste estágio, nossa intenção é a apresentação do modelo e os novos conceitos desenvolvidos.

CAPÍTULO VI

O MODELO DE DIFUSÃO DE BASS TRANSFORMADO EM UM MODELO DE CAPITALIZAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo deixamos de lado, inicialmente, a área de finanças e entramos na área de marketing com a finalidade de examinarmos questões relativas à previsão de vendas, previsão de demanda, participação de mercado, etc.

Estamos interessados nos estudos relativos à "seleção de um particular modelo de difusão de bens de consumo que melhor se ajuste a uma série histórica das vendas do produto, permitindo assim ao administrador de marketing conhecer de forma mais fidedigna o comportamento passado das vendas e prever melhor o seu comportamento futuro"(55).

Dentro desta área de atuação, os principais modelos de difusão em geral examinados são: o modelo da difusão côncavo e o da difusão em "esse" e, neste caso, o modelo logístico e o modelo de Gompertz.

Quando estudamos o caso da previsão de vendas de novos produtos, devemos nos preocupar com o "processo de difusão que é o nome dado ao processo de propagação de uma nova idéia, desde a sua fonte de invenção (ou criação) até o seu último utilizador ou adotante"(55).

Um modelo de difusão aplicado a novos produtos, no qual temos particular interesse, é o modelo de Bass "baseado nos conceitos de adoção e difusão de novos produtos dentro do sistema social e classificando os agentes do processo como sendo inovadores e imitadores"(55).

A partir do modelo de Bass, que relaciona o volume de vendas de um novo produto com o tempo, obtemos um modelo que relaciona o preço do produto conforme vão ocorrendo as vendas e, em seguida, estendemos o conceito a um modelo de capitalização, voltando, assim, os nossos estudos para a área de finanças.

É dentro desta linha que passamos a examinar o modelo de Bass.

2. O MODELO DE BASS

Dentre os vários trabalhos desenvolvidos por Frank M. Bass na área de métodos quantitativos aplicados ao marketing, nos interessa, particulamente, o modelo que se "propõe a determinar a evolução das primeiras compras de um novo produto durável de consumo, ao longo do tempo"(55).

O modelo obtido por Bass tem origem nos modelos de difusão epidemiológica, ou de contágio. Segundo esse modelo, admite-se que uma pessoa conhecedora de certas idéias, desejos, ou de novos produtos possa influenciar, como um germe em um processo de contágio, pessoas que não conhecem o assunto em questão.

2.1. A hipótese básica do modelo

O modelo de Bass é desenvolvido para determinar o volume de vendas de um novo produto em função do tempo.

Chamamos de inovadoras as pessoas que decidem adotar um novo produto sem influência de outros pessoas e, de imitadoras, aquelas pessoas que adotam o produto por alguma influência daqueles que já adquiriram o produto.

A hipótese básica do modelo de Bass diz que "a probabilidade de uma compra ser feita na data T, dado que nenhuma compra tenha sido feita, é função linear do número de compradores prévios"(55), ou seja, os inovadores e os imitadores.

Indicaremos por:

$Y(T)$:	o número acumulado de compradores até a data T;
m:	O número total de compradores para o período de tempo em estudo; também chamado de "Potencial do mercado";
$P(A/B)$:	Probabilidade de uma pessoa fazer a compra até a data T, sem antes ter sido comprador do produto;
p, q:	constantes.

Assim, a hipótese básica de Bass toma a seguinte formulação matemática:

$$P(A/B) = p + \frac{q}{m} \cdot Y(T) \qquad [45]$$

Observando a formulação matemática da hipótese de Bass, teremos:

a) para $T = 0$, ou seja, quando o produto for lançado teremos $Y(0) = 0$, logo:

$$P(A/B) = p,$$

o que caracteriza a importância dos inovadores.

b) Como a razão $\frac{Y(T)}{m}$ indica a variação do número de compradores, então $q \cdot \frac{Y(T)}{m}$ representa a ação dos imitadores, à medida que as compras ocorrem.

Assim, designaremos:

p: coeficiente de inovação;

q: coeficiente de imitação.

2.2. Desenvolvimento do Modelo

Seja f(T) a função densidade de probabilidade de compra.

Indicando $F(T) = \int_0^T f(t)\, dt$; com $F(0) = 0$,

teremos:

a) $F(T) = \int_0^T f(t)dt = P(0 \leqslant t \leqslant T)$: probabilidade da compra ser feita até a data T.

b) $P(t \geqslant T) = 1 - F(T)$: probabilidade da compra ser feita após a data T, ou probabilidade da compra não ter sido feita até a data T.

Por outro lado, a "Probabilidade de uma pessoa fazer a compra até a data T, sem antes ter sido comprador do produto", pode ser escrita na forma:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} , \qquad [46]$$

onde:

P(B): indica a probabilidade da compra não ter sido feita até a data T; então, $P(B) = 1 - F(T)$;

$P(A \cap B)$: indica a probabilidade de uma pessoa fazer a compra até a data T e que esta pessoa não tenha sido compradora do produto até a data T. Nestas condições podemos escrever que:

$$P(A \cap B) = P(T-h \leqslant t \leqslant T+h) = \int_{T-h}^{T+h} f(t)\, dt$$

onde h é um intervalo de tempo conveniente, que nos permita calcular a probabilidade da intersecção.

Admitindo que a função t seja contínua no intervalo $T-h < t < T+h$, então pelo teorema da Média do Cálculo Integral (6), existe t* pertencente ao intervalo em questão tal que:

$$\int_{T-h}^{T+h} f(t)\, dt = f(t^*) \cdot 2h \quad .$$

Assim, para 2h unitário, teremos:

$$P(A \cap B) = f(t^*) .$$

Do exposto podemos escrever que:

$$P(A/B) = \frac{f(t^*)}{1 - F(T)}$$

Indiquemos, agora, por

Q(T): o número de compradores no instante T.

Fazendo $Q(T) = m \cdot f(t^*)$, com $T-h \leq t^* \leq T^*h$, e substituindo o valor de $f(t^*)$, vem:

$$Q(T) = m \cdot P(A/B) \cdot (1 - F(T)) \quad . \qquad [47]$$

Observando as compras acumuladas até a data T, podemos escrever:

$$Y(T) = \int_0^T Q(T)\, dt$$

ou, ainda,

$$Y(T) = \int_0^T m \cdot f(t^*) dt^* = m \int_0^T f(t^*) dt^* = m.F(T) \qquad [48]$$

2.3. A Equação do Modelo de Bass

Sendo $Q(T) = m \cdot P(A/B) \cdot (1 - F(T))$

e $Y(T) = m \cdot F(T)$,

então: $Q(T) = m \cdot P(A/B) \cdot (1 - \frac{Y(T)}{m})$

ou $Q(T) = P(A/B) \cdot (m - Y(T))$;

Mas, pela hipótese de Bass: $P(A/B) = p + \frac{q}{m} \cdot Y(T)$.

Daí: $$Q(T) = (p + \frac{q}{m} Y(T)) \cdot (m - Y(T)) \quad [49]$$

ou $$Q(T) = pm + (q - p)\ Y(T) - \frac{q}{m} Y(T)^2 ,$$

onde:

i) p: coeficiente de inovação
   q: coeficiente de imitação

ii) Y(T): número acumulado de compradores até a data T

iii) Q(T): número de compradores na data T.

2.4. Modelo de Bass na forma discreta

O modelo

$$Q(T) = pm + (q - p)\, Y(T) - \frac{q}{m}\, Y(T)^2 ,$$

pode ser colocado na forma discreta:

$$Q_T = pm + (q - p)\, Y_{T-1} - \frac{q}{m}\, Y^2_{T-1} ,$$

onde:

Q_T : número de compradores no período T - 1 a T ;

Y_{T-1}: número acumulado de compradores até a data T-1 .

Obtemos, assim, o modelo básico

$$Q_T = a + b\, Y_{T-1} + c\, Y^2_{T-1} , \qquad [50]$$

de fácil aplicação prática, visto que os parâmetros a, b e c são calculados pelo método da regressão múltipla, possibilitando, em seguida, estabelecer projeções da demanda do bem em questão.

3. MODELO DE FORMAÇÃO DE PREÇOS COM BASE NO MODELO DE BASS

Bass estudou a ação dos inovadores e imitadores em relação à quantidade de produtos comprados quando do lançamento de um novo produto. Queremos examinar a ação dos inovadores e imitadores com relação à formação do preço de um novo produto.

Para tanto indiquemos por S_o o preço inicial do produto e por $S(T)$ o preço na data T ; sendo

$$S(T = 0) = S_o .$$

Admitimos que os inovadores e imitadores atuarão sobre o preço S_o inicial do produto, de forma a obtermos, a cada data T, um acréscimo, positivo ou negativo, sobre o preço inicial.

Indicando por $A(T)$ a função que nos dá o valor do acréscimo para cada data T, podemos escrever que:

$$S(T) = S_o + A(T) . \qquad [51]$$

Esta equação nos dá o preço do produto a cada data T .

Nosso problema é estabelecermos o modelo da função A(T) que deve caracterizar a ação dos inovadores e imitadores, durante o intervalo de tempo em que estes atuarem.

Uma das formas de fixarmos a função A(T) consiste no estudo de sua variação em relação ao tempo, ou seja, estudar a função:

$$g(T) = \frac{dA(T)}{dT} .$$

A função g(T), que descreve a variação dos acréscimos de preço, pode ser estabelecida, por exemplo, admitindo as seguintes condições para a atuação dos inovadores e imitadores:

a) que a variação dos acréscimos de preços devida aos inovadores seja constante a qual indicaremos pela letra p;

b) que a variação dos acréscimos de preços devida aos imitadores seja diretamente proporcional ao tempo de atuação sobre o novo procuto. Indicaremos por $q_1 \cdot T$ esta relação .

Admitindo que as ações dos inovadores e imitadores seja aditiva, teremos:

$$\frac{dA(T)}{dT} = p + q_1 \cdot T ,$$

durante o intervalo de tempo, de zero a t, que atuarem os inovadores e imitadores.

Assim:

$$A(T) = \int_{0}^{t} (p + q_1 \,.\, T)dT$$

ou

$$A(t) = p \,.\, t + \frac{q_1}{2} t^2 \,.$$

Substituindo na equação que nos dá o preço do produto e fazendo

$$q = \frac{q_1}{2} \,,$$

teremos:

$$S(t) = S_o + p \,.\, t + q\, t^2 \,. \qquad [52]$$

O modelo obtido, que chamaremos de Modelo de Formação de Preços com base em Bass, caracteriza a ação dos inovadores por meio do coeficiente p, e dos imitadores pelo coeficiente q, na formação de preços de um bem, no processo de lançamento do produto.

4. O MODELO DE FORMAÇÃO DE PREÇOS, COM BASE NO MODELO DE BASS, É UM MODELO DE CAPITALIZAÇÃO

O modelo $S(T) = S_o + pT + qT^2$ nos dá o valor do capital $S(T)$ ao longo do tempo, a partir de um capital inicial S_o. Esta caracterização adapta-se perfeitamente ao que definimos como conceito de capitalização, ou seja, "qualquer processo de formação do capital ao longo do tempo".

Então, podemos considerar o modelo como uma lei de capitalização, que chamaremos de Modelo de capitalização com base no modelo de Bass.

4.1. O Modelo de Capitalização, com base no Modelo de Bass, é um Modelo de Capitalização Uniformemente Variado

Observando o modelo de capitalização baseado em Bass:

$$S(T) = S_o + pT + qT^2 ,$$

e o modelo uniformemente variado, dado por:

$$S = S_o + v_oT + \frac{1}{2} a T^2 ,$$

constata-se, de imediato, tratar-se da mesma lei de capitalização, fazendo:

$$p = v_o$$

e $$q = \frac{1}{2} a \, .$$

Assim, podemos interpretar que:

- a velocidade inicial reflete a ação dos inovadores;
- e a aceleração do processo, a ação dos imitadores.

5. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO DE CAPITALIZAÇÃO BASEADO EM BASS

Para aplicarmos o modelo de capitalização que tem por base o modelo de Bass, devem estar satisfeitas as seguintes condições iniciais:

- tratar-se de produto novo;
- bem caracterizar a possibilidade de ação dos inovadores e imitadores.

Uma condição para a qual se deve estar atento, uma vez aplicado o modelo, é relativa ao tempo de validade do modelo, visto que não podemos considerar perpétua a ação dos inovadores e imitadores.

Na realidade, devemos esperar que o tempo de validade do modelo seja razoavelmente curto e indicado pelo fim da ação dos inovadores e imitadores.

Assim, para construírmos nosso exemplo, devemos conseguir caracterizar que as condições mencionadas estejam satisfeitas, como passaremos a estudar.

5.1. Os ativos de risco como produtos novos

O processo de tomada de decisão nos leva a condições de risco ou incerteza.

Dizemos que decidimos levando em consideração o risco quando o processo decisório é desenvolvido de forma a levarmos em conta as probabilidades de ocorrência dos eventos que envolvem o problema. Estamos em condições de incerteza quando não temos elementos de análise, ou não queremos levar em conta estas probabilidades.

No mercado financeiro existem vários ativos, dos quais possuímos, diariamente, um conjunto de informações que irão afetar seus preços. Este conjunto de informações relativas pode ser transformado em probabilidades, mesmo que subjetivas, de ocorrência dos retornos previstos dos ativos em questão.

Os ativos que se caracterizam por terem sensíveis flutuações de preços, em função do fluxo de informações, são chamados de ativos de risco.

As ações, negociadas em bolsa de valores, são o exemplo mais típico de ativos de risco, visto que seus preços flutuam segundo um conjunto de informações que envolvem a empresa, o segmento em que ela atua, o mercado financeiro e a economia como um todo.

No Brasil, em certas conjunturas, comportam-se como ativos de risco, além das ações, o ouro e o dólar, até mesmo os certificados de depósito bancário, que podem estar com taxas de 600% ao ano em um dia, 1.000% ao ano, no dia seguinte, e a 400% ao ano, na próxima semana.

Consideremos, então, um ativo de risco que esteja sujeito a um fluxo de informações. Estas informações vão atingindo as pessoas gradativamente. Assim, consideramos como inovadoras aquelas que primeiro recebem a informação e tomam a decisão de comprar ou vender o ativo e de imitadoras aquelas que tomam a mesma decisão por influência das primeiras.

Por outro lado, os ativos de risco podem ser entendidos como um binômio ativo-conjunto de informações, de forma que, podem ser considerados como um novo produto sempre que mudar o conjunto de informações a eles acoplados.Esta interpretação de novo produto é referendada por Ferber quando ele observa que "genuinamente um novo produto é uma inovação somente quando os consumidores o vêem como tal"(28). Um exemplo sempre citado é o da pequena cidade do interior, com 500 anos de idade, que é descoberta por uma agência de turismo: naturalmente, o novo produto está na forma como o turista vê a cidade.

Pelo exposto, admitidas as hipóteses acima mencionadas, podemos aplicar o modelo de capitalização baseado em Bass, sempre que detectarmos um novo conjunto de informações envolvendo o ativo de risco em questão, visto que ficam satisfeitas as condições de:

- estarmos tratando com produtos novos;
- estarem bem caracterizadas as ações dos inovadores e imitadores, necessárias para a aplicação do modelo.

5.2. Aplicação do Modelo de Capitalização com base em Bass

Consideremos, por exemplo, o ativo de riscos - ação de determinada empresa - e um conjunto de informações a ela acoplado.

A equação do modelo para os preços da ação, com base em Bass, é dada por

$$S = S_o + pt + qt^2 ,$$

onde devemos determinar os valores de S_o, p e q. Para tanto, devemos conhecer três pares de valores: do tempo e do respectivo preço da ação.

Consideremos, por exemplo, que a partir da abertura do pregão sejam feitas leituras a cada dez minutos, obtendo-se a tabela abaixo:

TEMPO EM MINUTOS	10	20	30
PREÇO DA AÇÃO	40.000	47.000	53.000

Substituindo na equação, teremos que resolver o seguinte sistema

$$40.000 = S_0 + p \times 10 + q \times 10^2$$
$$47.000 = S_0 + p \times 20 + q \times 20^2$$
$$53.000 = S_0 + p \times 30 + q \times 30^2$$

O sistema pode ser resolvido de imediato, obtendo:

$q = -5,$ cruzeiros por quadrado de minuto,
$p = 850,$ cruzeiros por minuto,
$S_0 = 32.000,$ cruzeiros,

significando que:

- os inovadores atuam com uma velocidade inicial de crescimento do preço da ação de:

  $v_0 = p = 850,$ cruzeiros por minuto,

  mas que a variação de velocidade é negativa visto que os imitadores, responsáveis pela aceleração dada por:

  $a = 2 \times q = 2 \times (-5) = -10,$

  tendem a ter uma atuação cada vez menor com o passar do tempo.

Assim, a parábola obtida tem concavidade voltada para baixo. Nestas condições, podemos calcular o tempo em que vai ocorrer o pico do valor da ação, dado por:

$$t_{pico} = \frac{-p}{2 \times q}$$

ou no exemplo,

$$t_{pico} = \frac{-850}{2 \times (-5)} = 85 \text{ minutos.}$$

O valor da ação pode ser obtido substituindo o tempo t = 85 minutos na equação de movimento dos preços da ação, dada por:

$$S = 32.000 + 850\,t - 5\,t^2 .$$

Então, para t = 85 minutos, o valor da ação previsto pelo modelo será de:

$$S = 68.125, \text{ cruzeiros.}$$

Naturalmente, podemos projetar os valores da ação, no decorrer do pregão, por meio do modelo obtido. Em seguida, compararemos os valores de pregão com nossas projeções, determinando o erro cometido.

A tabela nos dá valores projetados pelo modelo:

TEMPO EM MINUTOS	40	50	60	70	80	85	90	100	120
PREÇO DA AÇÃO PROJETADO	58.000	62.000	65.000	67.000	68.000	68.125	68.000	67.000	62.000

À medida que o pregão da bolsa de valores vai ocorrendo e novos preços da ação são estabelecidos, nós podemos adequar nosso modelo, acrescentando esses novos resultados. Neste caso, se temos mais que três observações, devemos usar o método da regressão múltipla para determinação dos parâmetros da equação e, em seguida, calcularmos as projeções dos preços da ação.

Procuramos, no exemplo em questão, mostrar as condições de aplicabilidade do modelo de capitalização com base no modelo de Bass, ou seja, como adaptar os conceitos desenvolvidos em condições práticas. Naturalmente, não temos a pretensão de estar esgotando o assunto, mas sim, apontando para um novo horizonte de estudos que podem ser desenvolvidos pelo modelo de capitalização de Bass.

CAPÍTULO VII

OS CONCEITOS DE VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ESTENDIDOS ÀS TAXAS DE JUROS

1. INTRODUÇÃO

Um dos principais parâmetros da economia é, sem dúvida, a taxa de juros. Ela, em princípio, é efeito de condições impostas ao mercado financeiro podendo, em seguida, ser causa de várias situações da economia em questão.

As taxas de juros representam o preço do dinheiro. Assim, estão sujeitas às condições da oferta e da procura de capitais e ainda aos riscos e incertezas que os cercam.

Uma das maiores preocupações dos últimos anos, quer do ponto de vista dos economistas, quer dos financistas, ou mesmo do homem comum, foram, sem dúvida, as flutuações das taxas de juros. No contexto mundial, vimos as taxas de juros do dólar americano chegarem ao patamar de 20% ao ano, rompendo o patamar histórico de 6% a 10% ao ano, no máximo. No âmbito local, com o crescimento da inflação, chegamos a taxas absurdas de 100% ao mês, ou mais.

Não pretendemos estudar as causas e efeitos das situações econômicas e financeiras geradas por tais amplitudes das taxas de juros.

Nosso estudo será dirigido a uma das preocupações dos financistas, ou seja, no desenvolvimento de um instrumental que nos possibilite avaliar as variações das taxas de juros e, assim, obtermos modelos que, explicando as variações passadas, nos permitam elaborar previsões para o futuro.

Para tanto, lembremos que o conceito de velocidade média era dado por:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} ,$$

a partir do qual obtínhamos o conceito de velocidade instantânea, como segue:

$$v_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v_t = \frac{dS}{dt} .$$

As velocidades unitárias ou por unidade de capital eram obtidas pela divisão da velocidade pelo capital inicial S_o.

Assim, a velocidade unitária média era dada por:

$$vu_m = \frac{v_m}{S_o} = \frac{\frac{\Delta S}{S_o}}{\Delta t}$$

e a velocidade unitária no instante t por:

$$vu_t = \frac{v_t}{S_o} .$$

Observando a equação da velocidade unitária média e escrevendo-a na forma:

$$vu_m = \frac{\Delta S}{S_o \, \Delta t} \qquad [53]$$

é fácil concluir tratar-se da taxa de juros no período Δt.

Então,

$$vu_m = i_{\Delta t} , \qquad [54]$$

onde $i_{\Delta t}$ indica a taxa de juros do período Δt.

2. ACELERAÇÃO DAS TAXAS DE JUROS

Para formularmos o conceito de aceleração, partimos da equação:

$$vu_m = i_{\Delta t} ,$$

que passando ao limite, com Δt tendendo a zero, nos dá:

$$\lim_{\Delta t \to 0} vu_m = \lim_{\Delta t \to 0} i_{\Delta t} . \qquad [55]$$

Como a velocidade no instante t é dada por:

$$vu_t = \lim_{\Delta t \to 0} vu_m ,$$

então chamaremos a velocidade unitária no instante t de taxa de juros no instante t, indicada por i_t .

Assim, teremos:

$$i_t = vu_t = \lim_{\Delta t \to 0} i_{\Delta t} . \qquad [56]$$

Mostramos, assim, que a taxa de juros instantânea i_t tem seu valor variando com o tempo, ou seja:

$$i_t = f(t) \; ; \qquad [57]$$

o que nos permite obter o conceito de aceleração de uma taxa de juros.

Chamaremos de aceleração da taxa de juros no instante t, indicada por w_t, a:

$$w_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta i_t}{\Delta t}$$

ou $$w_t = \frac{di_t}{dt} \; . \qquad [58]$$

3. MODELOS DE CAPITALIZAÇÃO COM TAXAS DE JUROS VARIADAS

Todo o desenvolvimento dos conceitos da Matemática Financeira se dá considerando a taxa de juros constante durante o período de capitalização.

O estudo das capitalizações simples, composta, contínua e mesmo a uniformemente variada, por nós desenvolvida, admite que a taxa de juros é fixa durante a capitalização.

Assim: $i_t = i =$ constante.

Este fato significa que, segundo o conceito de aceleração das taxas de juros, a aceleração é zero, ou seja:

$$w_t = 0 .$$

Então, fixando condições para a aceleração w_t, com $w_t \neq 0$, estaremos estabelecendo um comportamento para as taxas de juros instantâneas i_t, que não serão mais constantes durante todo o período de capitalização. Podemos, desta forma, estudar os modelos de capitalização com taxas variáveis, adaptados à realidade de nossa economia.

4. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DAS TAXAS VARIÁVEIS

Para construirmos nosso exemplo, examinemos o caso em que a aceleração w_t das taxas de juros seja constante, ou seja:

$$w_t = w = \text{constante}$$

Então $$\frac{di_t}{dt} = w \text{ ,}$$

ou $$di_t = w \times dt \text{ .} \qquad [59]$$

Integrando:

$$i_t = wt + k \text{ .} \qquad [60]$$

Para $t = 0$, teremos $i_o = k$,

o que nos permite escrever a equação da variação das taxas de juros com o tempo, como segue:

$$i_t = i_o + wt \text{ .} \qquad [61]$$

Como a variação da taxa de juros é linear, com o tempo, podemos chamar estas capitalizações de lineares, de forma que:

- se $w > 0$, a capitalização será linearmente acelerada;
- se $w < 0$, a capitalização será linearmente desacelerada.

Naturalmente, como já observamos, se $w = 0$, teremos $i_t = i_o$, o que nos leva a capitalizações com taxas constantes.

Examinemos, pois, como se comportam os modelos de capitalização simples e composta com as taxas variadas, na forma:

$$i_t = i_0 + wt \ , \quad \text{com } w \neq 0 \ .$$

4.1. A capitalização simples com taxas de juros linearmente variadas

Partindo da lei de capitalização simples

$$S = S_0 \ (1 + it) \ ,$$

com a taxa de juros variando segundo a lei:

$$i = i_0 + wt \ ,$$

teremos:

$$S = S_0 \ (1 + (i_0 + wt) \times t)$$

ou, então,

$$S = S_0 + S_0 \, i_0 \, t + S_0 \, wt^2 \ , \qquad [62]$$

que nos dá a lei de capitalização simples com taxas linearmente variadas.

O resultado obtido é bastante interessante, pois, se lembrarmos da forma geral da capitalização uniformemente variada:

$$S = S_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

podemos concluir que a capitalização simples com taxas linearmente variadas é equivalente a uma capitalização uniformemente variada, fixados os parâmetros:

$$v_o = S_o \times i_o$$

e $$a = 2 S_o \times w .$$

4.2. Capitalização composta com taxas de juros linearmente variadas

Neste caso, podemos examinar a influência das taxas variáveis sob dois enfoques.

O primeiro, que chamaremos de contínuo, admite que o valor do montante é obtido por variação contínua da taxa de juros.

Então, sendo:

$$S = S_o (1 + i)^t ,$$

a lei que descreve o modelo de capitalização composta, com as taxas variando na forma:

$$i = i_o + wt \quad , \quad w \neq 0 ;$$

teremos:

$$S = S_o (1 + (i_o + wt))^t , \qquad [63]$$

que nos dá a lei de capitalização composta com taxas linearmente variadas, na forma contínua.

O segundo enfoque para a capitalização composta, com taxas linearmente variadas, nos foi sugerido pela própria construção do modelo de capitalização composta.

Admitamos que as taxas variem segundo o modelo:

$$i_t = i_o + wt \text{ , com } w \neq 0 \text{ ,}$$

mas que esta variação de taxas acompanhe os períodos de capitalização, permanecendo constante durante o período.

Nestas condições, teremos:

- para o período 1 a taxa será: $i_1 = i_o + w \cdot 1$,
- para o período 2 a taxa será: $i_2 = i_o + w \cdot 2$,

  e assim sucessivamente, de forma que
- para o período n a taxa será: $i_n = i_o + w \cdot n$;

temos, portanto, uma variação de taxas que chamaremos de escalonada.

Para obtermos a regra de capitalização basta calcularmos o montante ao fim de cada período, como segue:

$$S_1 = S_o (1 + i_1)^1$$

$$S_2 = S_1 (1 + i_2)^1 = S_o \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \text{ ,}$$

e assim sucessivamente, tal que:

$$S_n = S_{n-1} \cdot (1+i_n)^1 = S_o \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot \ldots \cdot (1+i_n) \cdot$$

Pelo princípio da indução finita pode-se provar que o montante S será dado por:

$$S = S_o \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j) \text{ , para } j = 1,2,3.... \qquad [64]$$

Como $\quad i_j = i_o + w \cdot j$,

então, o modelo final da capitalização composta com taxas linearmente variadas na forma escalonada, será:

$$S = S_o \cdot \prod_{j=1}^{n} (1 + i_o + w \cdot j) \cdot \qquad [65]$$

É fácil perceber que para $w = 0$ voltamos ao modelo de capitalização composta, dado por:

$$S = S_o (1 + i_o)^n ,$$

onde i_o é taxa constante a partir da data zero.

4.2.1. Cálculo da Aceleração

Consideremos uma capitalização composta com taxas linearmente variadas fixando que sejam equivalentes os modelos contínuo e escalonado.

Isto significa que, para o período de tempo t, em que ocorreu a capitalização, os montantes:

$$S = S_0 \cdot (1 + i_0 + wt)^t \text{ , da contínua, e}$$

$S = S_0 \cdot \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j)$, da escalonada, devem ser iguais.

Deste fato obtemos que:

$$(1 + i_0 + wt)^t = \prod_{j=1}^{n} (1 + i_j) . \qquad [66]$$

Isolando o valor de w, teremos:

$$w = \frac{1}{t} \left(\left(\prod_{j=1}^{n} (1 + i_j) \right)^{\frac{1}{t}} - (1 + i_0) \right) . \qquad [67]$$

A aceleração w deve ser entendida como sendo o efeito resultante da variação das taxas de juros a cada período de capitalização.

Nestas condições, a aceleração w é uma média que deve passar, como caráter inercial, para os períodos seguintes. Naturalmente, à medida que o tempo vai passando, as novas taxas devem compor a nova estimativa de w para o período seguinte.

Em conclusão, podemos considerar a fórmula obtida como um estimador do caráter inercial das taxas de juros que se propagam para os períodos seguintes de tempo.

Um exemplo numérico pode nos ajudar a melhor entender a questão.

Consideremos a tabela abaixo, que representa as taxas de inflação mensal:

OBSERVAÇÃO	PERÍODO	TAXA DE INFLAÇÃO % AO MÊS
Mês anterior ao período em estudo	0	$i_0 = 8,0$
1º período	1	$i_1 = 9,5$
2º período	2	$i_2 = 12,0$
3º período	3	$i_3 = 13,7$

Aplicando a fórmula, que nos dá o valor da aceleração das taxas de juros, teremos:

$$w = \frac{1}{3} \left[\left((1+0,095).(1+0,12).(1+0,137) \right)^{\frac{1}{3}} - (1+0,08) \right],$$

daí, $w = 0,0124$ ao quadrado do mês.

Obtido o valor de w e lembrando que:

$$i_j = i_0 + wj ,$$

então, podemos calcular a previsão da inflação para os próximos meses

$i_4 = 0,08 + 0,0124 \times 4$, ou $i_4 = 12,96\%$ ao mês
$i_5 = 0,08 + 0,0124 \times 5$, ou $i_5 = 14,20\%$ ao mês
$i_6 = 0,08 + 0,0124 \times 6$, ou $i_6 = 15,44\%$ ao mês.

A aceleração constante $w = 0,0124$ caracteriza o aspecto inercial da inflação que é passado para os meses seguintes.

À medida que o tempo passa e vamos obtendo novos valores da inflação, podemos recalcular o valor da aceleração, melhorando o estimador, e elaborando novas previsões.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

CONCLUSÕES

O trabalho, por nós desenvolvido, teve como principal objetivo contribuir com o desenvolvimento de modelos de capitalização, bem como introduzir novos conceitos para a avaliação da relação entre capital e tempo.

As principais contribuições do trabalho são, ao nosso ver, as seguintes:

- aplicação dos conceitos de velocidade e aceleração à Matemática Financeira, que nos permitiu estabelecer novas relações entre capital e tempo. Além disso, possibilita a elaboração de novos modelos de capitalização, bastando para tanto condicionar os parâmetros velocidade ou aceleração visto que as equações do capital, da velocidade e da aceleração estão intimamente ligadas por meio das equações derivadas;

- dos exemplos de modelos de capitalização desenvolvidos, nos parece particularmente interessante o de capitalização uniformemente variada ou quadrática. Ele mantém relações com as capitalizações simples e composta que podem ser estabelecidas de forma a terem aplicações práticas como, por exemplo, na política monetária;

- o modelo de capitalização baseado em Bass, que não deixa de ser um modelo de capitalização uniformemente variado ou quadrático, com a atuação dos inovadores e imitadores, nos parece ser um modelo que poderá ter seus estudos aprofundados, principalmente na análise da postura dos investidores em relação aos ativos de risco. A transformação do modelo da área de marketing para a área de finanças permite o exame da atuação da lei da oferta e da procura sobre os preços dos produtos novos;

- a aplicação dos conceitos de velocidade e aceleração, aplicados às taxas de juros, é nossa contribuição à questão das taxas variáveis que na realidade ocorrem no mercado financeiro. Com os modelos apresentados temos novas armas para o tratamento da questão, inclusive obtendo um estimador para a avaliação do caráter inercial das taxas de juros de forma geral, ou da inflação em particular, como no exemplo apresentado.

- finalmente, o que acreditamos ser nossa maior contribuição foi exemplificar a existência de um relacionamento entre as várias áreas do conhecimento. Os conceitos e modelos desenvolvidos na física e em marketing, que foram adaptados à área de finanças, nos parecem caracterizar uma abordagem de estudo multidisciplinar que poderá dar muitos outros frutos.

Esperamos, com esta tese, dar uma contribuição que permita o desenvolvimento de estudos mais aprofundados nas seguintes questões:

- estruturar a Matemática Financeira com os novos conceitos por nós estabelecidos, explicitando condições de risco e incerteza;

- estruturar a atuação dos inovadores e imitadores, por meio do modelo de capitalização baseado em Bass, com o estudo da análise técnica e da análise estruturalista das empresas com ações negociadas em Bolsa;

- utilizar o conceito de aceleração para avaliação de empresas;

- realizar pesquisa de campo com a finalidade de obter a evidência estatística da aplicação do modelo quadrático aos ativos de risco.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

(1) ABREU, Paulo F.; SIMAS, P. de & STEPHAN, Christian. Análise de investimentos. Rio de Janeiro, Campus, 1982.

(2) ACKOFF, Russell L. & SASIENE, Maurice W. Pesquisa operacional. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1974.

(3) ALONSO, Marcelo & FINN, Edward J. Física. São Paulo, Edgard Blücher, 1972.

(4) APOSTOL, T.M. Análise matemático. Barcelona, Reverté, 1960.

(5) ARCHER, Stephen H. & D'AMBROSIO, Charles A. Administração financeira. São Paulo, Atlas, 1976.

(6) ÁVILA, Geraldo. Cálculo - Funções de uma variável. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982, p.208,

(7) BARTLE, R.G. The elements of real analysis, New York, Wiley International, 1964.

(8) BASS, Frank M. A new growth model for consumer durables. Management Science, 15(5), Jan. 1969.

(9) BEKMAN, Otto R. & COSTA NETO, Pedro Luiz O. Análise estatística da decisão. São Paulo, Edgard Blücher, 1980.

(10) BERTALANFFY, Ludwig Von. Teoria geral dos sistemas. Petrópolis, Vozes, 1977, p. 52.

(11) BEZERRA, José Alberto Soler. A capitalização contínua: uma alternativa financeira. Tese apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências, 1974.

(12) BLECKE, Curtis J. Análise financeira para a tomada de decisão. São Paulo, Atlas, 1978.

(13) BONINI, Edmundo Eboli. Análise de investimentos: engenharia econômica. Edição Própria, 1978.

(14) BOTTS, McShane. Analisis real. Madrid, Aguilar, 1971.

(15) BOYD JR., Harper W. & MASSY, William F. Administração de marketing. São Paulo, Saraiva, 1978.

(16) BRAGA, Roberto. Fundamentos e Técnicas de administração financeira. São Paulo, Atlas, 1989.

(17) BRITT, Stevart & BOYD, Harper. Marketing: gerência e ação executiva. São Paulo, McGraw-Hill, 1981.

(18) BRONSON, Richard. Pesquisa operacional. São Paulo, McGraw-Hill, 1985.

(19) CASTRO, Hélio O. Portocarrero. Introdução ao mercado de capitais. Rio de Janeiro, IBMEC, 1979.

(20) CHIANG, Alpha. Matemática para economista. São Pulo, Edusp/McGraw-Hill, 1982.

(21) CHIESA, Dirceu Antonio. Open-market. Porto Alegre, Livraria Sulina, 1978.

(22) COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira. Estatística. São Paulo, Edgard Blücher, 1977.

(23) EHRLICH, Pierre Jacques. Avaliação e seleção de projetos de investimento. São Paulo, Atlas, 1979.

(24) FARIA, Rogério Gomes de. Matemática comercial e financeira. São Paulo, McGraw-Hill, 1973.

(25) FARO, Clóvis de. Elementos de engenharia econômica. São Paulo, Atlas, 1979.

(26) ________________. A eficiência marginal do capital como critério de avaliação econômica de projetos de investimentos. Rio de Janeiro, IBMEC, 1985.

(27) FEITOSA, Miguel Martins. Modelos discretos financeiros. Tese apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências, 1973.

(28) FERBER, Robert. Handbook of Marketing Research, New York, McGraw-Hill, 1974, p. 3-194.

(29 FLEISCHER, Gerald A. Teoria da aplicação do capital. São Paulo, Edgard Blücher, 1973.

(30) FONSECA, Jairo Simon da; MARTINS, Gilberto de Andrade & TOLEDO, Geraldo Luciano. Estatística aplicada. São Paulo, Atlas, 1985.

(31) FRITZSCHE, Helmut. Programação não linear. São Paulo, Edgard Blücher-USP, 1978.

(32) FUSARI, Valberto. Moeda e inflação. São Paulo, Livraria Ciência e Tecnologia, 1981.

(33) GALBRAITH, John Kenneth. A era da incerteza. São Paulo, Pioneira, 1977.

(34) ________________________. Moeda: de onde veio, para onde foi. São Paulo, Pioneira, 1983, p. 3.

(35) ________________________. O colapso da bolsa - 1929. São Paulo, Pioneira, 1988.

(36) GALVÊAS, Ernane. Sistema financeiro e mercado de capitais. Rio de Janeiro, IBMEC, 1985.

(37) GAZETA MERCANTIL, São Paulo, 09 jun. 1981, p. 1.

(38) GERSDORFF, Ralph C.J. von. Prática da engenharia econômica no Brasil. Rio de Janeiro, Zahar, 1978.

(39) GITMAN, Lawrence J. Princípios de administração financeira. São Paulo, Harbra, 1984.

(40) HARRISON, Ian W. Avaliação de projetos de investimento. São Paulo, McGraw-Hill, 1978.

(41) HEIN, Leonard W. Introdução quantitativa às decisões administrativas. São Paulo, Atlas, 1972.

(42) HESS, Geraldo; MARQUES, José Luiz; PAES, L.C. Rocha & PUCCINI, Abelardo. Engenharia econômica. Rio de Janeiro, Difel, 1977.

(43) HIRSCHFELD, Henrique. Engenharia econômica. São Paulo, Atlas, 1982.

(44) HUBERMAN, Leo. História da riqueza do homem. Rio de Janeiro, Zahar, 1979.

(45) JOHNSON, Tore Nils Olof Polmer. Mecânica. São Paulo, Nobel, 1960.

(46) JUER, Milton. Matemática financeira. Rio de Janeiro, IBMEC, 1983.

(47) KITTEL, Charles; KNIGHT, Walter D. & RUDERMAN, Malvin A. Curso de física de Berkeley - Mecânica. São Paulo, Edgard Blücher, 1970.

(48) KOTLER, Philip. Marketing. São Paulo, Atlas, 1980.

(49) LEITE, Hélio de Paula. Introdução ao mercado de ações. Comissão Nacional de Bolsa de Valores, 1984.

(50) LEME, Ruy Aguiar da Silva. Curso de estatística. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1963.

(51) LION, Octavio Manuel Bessada. Matemática financeira aplicada ao mercado aberto. Rio de Janeiro, IBMEC, 1985.

(52) MARIM, Walter Chaves. Análise de alternativas de investimento. São Paulo, Atlas, 1978.

(53) MATHIAS, Washington Franco & GOMES, José Maria. Matemática financeira. São Paulo, Atlas, 1984, p. 13.

(54) MATTOS, Antonio Carlos M. O modelo matemático dos juros. Petrópolis, Vozes, 1975.

(55) MAZZON, José Afonso; GUAGLIARDI, José Augusto & FONSECA, Jairo Simon da. Marketing: aplicações de métodos quantitativos. São Paulo, Atlas, 1983, p. 158, 170 e 174.

(56) MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1975.

(57) MOFFITT, Michael. O dinheiro do mundo. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1985.

(58) MONTEZANO, Roberto M. Capital de risco. Rio de Janeiro, IBMEC, 1983.

(59) MORETTIN, Luiz Gonzaga. Estatística básica. São Paulo, Livraria Ciência e Tecnologia, 1983.

(60) MORITA, Akio. Made in Japan. São Paulo, Livraria Cultura, 1986.

(61) MOTA, Luiz de Gonzaga Fonseca. Introdução à análise monetária. São Paulo, Atlas, 1978.

(62) NAERT, Philippe A. & PETER, S.H. Building implementable marketing models. Boston, Martinus Nijhoff, 1978.

(63) NEVES, Cesar das. Análise de investimentos. Rio de Janeiro, Zahar, 1982, p. 21.

(64) OLIVEIRA, José Alberto Nascimento de. Engenharia econômica. São Paulo, McGraw-Hill, 1982, p. 5.

(65) PELÁEZ, C.M. & SUZIGAN, W. Economia monetária. São Paulo, Atlas, 1978.

(66) PINTO, Antonio Carlos Figueiredo. Investidores institucionais. Rio de Janeiro IBMEC, 1985.

(67) PLATO, Ricardo A. & XAVIER, Dorival F. Matemática financeira. São Paulo, Nobel, 1983.

(68) PUCCINI, Abelardo de Lima. Matemática financeira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982.

(69) RAIFFA, Howard. Teoria da decisão. São Paulo, Vozes, 1977.

(70) RIGGS, James L. Administração da produção. São Paulo, Atlas, 1981.

(71) ROLFE, Sidney E. & BURTLE, James L. O sistema monetário mundial. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

(72) SAMPSON, Anthony. Os credores do mundo. Rio de Janeiro, Record, 1981.

(73) SANVICENTE, Antonio Zoratto. Administração financeira. São Paulo, Atlas, 1983.

(74) SCHEWE, Charles D. & SMITH, Reuben M. Marketing: conceitos, casos e aplicações. São Paulo, McGraw-Hill, 1982.

(75) SIMONSEN, Mario Henrique. Teoria microeconômica. Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, 1979.

(76) SMITH, Adam. Papel moeda. Rio de Janeiro, Record, 1981.

(77) SOLOMON, Ezra & PRINGLE, John J. Introdução à administração financeira. São Paulo, Atlas, 1981.

(78) TEIXEIRA, Marco Antonio; FRAGA, João Batista & BENEVIDES, Moema Unis. Mercado de opções. Teresópolis, Correio da Serra Livraria, 1984.

(79) THOMAS, J.J. Introdução à análise estatística para economistas. Rio de Janeiro, Zahar, 1973.

(80) TOLEDO, Geraldo Luciano & OVALLE, Ivo Izidoro. Estatística básica. São Paulo, Atlas, 1981.

(81) TZU, Sun. A arte da guerra. Rio de Janeiro, Record, 1983.

(82) VAN HORNE, James C. Funções e análise das taxas de mercado de capitais. São Paulo, Atlas, 1972.

(83) VAN HORN, James C. Fundamentos de administração financeira. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1984.

(84) VELLOSO, João Paulo dos Reis. O último trem para Paris. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986.

(85) VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Matemática financeira. São Paulo, Atlas, 1982.

(86) VILANOVA, Wilson. Matemática Atuarial. São Paulo, Pioneira-USP, 1969.

(87) ________________. Algebra financeira. São Paulo, Pioneira-USP, 1980.

(88) WIENER, Norbert. Cibernética. São Paulo, Poligono-USP, 1970.

(89) WOILER, Samsão & MATHIAS, Washington Franco. Projetos. São Paulo, Atlas, 1983.

(90) WONNACOTT, Thomas H. & WONNACOTT, Ronald J. Estatística aplicada à economia e à administração. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Cientificos, 1981.

NOMENCLATURA UTILIZADA NO TEXTO

a	aceleração
a_m	aceleração média
$A(t)$, $A(T)$	função valor do acréscimo para cada data t ou T
a_t, $a(t)$	aceleração no instante t ou na data t
au	aceleração unitária ou por unidade de capital
au_t, $au(t)$	aceleração unitária no instante t ou na data t
a_o	aceleração na origem ou na data zero
dS, dS_t	diferencial do capital
dt	diferencial de tempo
$\frac{dS}{dt}$	derivada do capital em relação ao tempo
$\frac{dv}{dt}$	derivada da velocidade em relação ao tempo
dv, dv_t	diferencial da velocidade
di, di_t	diferencial da taxa de juros
$\frac{di_t}{dt}$	derivada da taxa de juros em relação ao tempo
$f(T)$	função densidade de probabilidade de compra no instante T
$F(T)$	probabilidade da compra ser feita até a data T
$g(T)$	função que descreve a variação dos acréscimos de preço
i	taxa de juros
i_s	taxa de juros no modelo de capitalização simples
i_c	taxa de juros no modelo de capitalização composta
I	taxa de juros no modelo de capitalização instantânea ou contínua
$i_{\Delta t}$	taxa de juros no período Δt
i_o	taxa de juros na origem ou na data zero
i_t	taxa de juros no instante t ou na data t

J	juros
J_t	juros na data t
M	montante
m	número de compradores para o período de tempo em estudo
n	prazo referido a um número inteiro de períodos de tempo
$P(A/B)$	probabilidade de uma pessoa fazer a compra até a data T, sem antes ter sido comprador do produto
p	coeficiente de inovação
$P(t \geq T)$	probabilidade da compra ser feita após a data T
q	coeficiente de imitação
$Q(T)$	número de compradores no instante T
Q_T	número de compradores no período T-1 a T
S	montante, capital em uma data qualquer
S_o	capital inicial, capital na origem ou na data zero
S_t, $S(t)$	capital no instante t ou na data t
S_n, $S(n)$	capital referente a um período inteiro n de tempo
ΔS	acréscimo de capital
S_Q	montante na capitalização quadrática
S_s	montante na capitalização simples
S_c	montante na capitalização composta
t	tempo
Δt	acréscimo de tempo
v	velocidade do capital
v_m	velocidade média do capital
v_o	velocidade inicial, velocidade na origem ou na data zero
v_t, $v(t)$	velocidade no instante t ou na data t
v_n, $v(n)$	velocidade referente a um período inteiro n de tempo

Δv	acréscimo de velocidade do capital
v_u	velocidade unitária ou por unidade de capital
vu_m	velocidade unitária média
Y_T, $Y(T)$	número acumulado de compradores até a data T
w_t	aceleração da taxa de juros no instante t
w	aceleração da taxa de juros