

**Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”**

Análise do efeito do espaçamento e material genético na forma do tronco de árvores de *Eucalyptus* spp. sob o prisma da modelagem

Silvio Henrique Menezes Gomes

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Recursos Florestais. Opção em: Silvicultura e Manejo Florestal

**Piracicaba
2022**

Silvio Henrique Menezes Gomes
Bacharelado em Engenharia Florestal

Análise do efeito do espaçamento e material genético na forma do tronco de árvores de *Eucalyptus* spp. sob o prisma da modelagem

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:

Prof. Dr. **JOÃO LUIS FERREIRA BATISTA**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Recursos Florestais. Opção em: Silvicultura e Manejo Florestal

Piracicaba
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP**

Gomes, Silvio Henrique Menezes

Análise do efeito do espaçamento e material genético na forma do tronco de árvores de *Eucalyptus* spp. sob o prisma da modelagem / Silvio Henrique Menezes Gomes. -- versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. -- Piracicaba, 2022 .

150 p.

Tese (Doutorado) -- USP / Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz".

1. Biometria florestal 2. Índices de qualidade de forma 3. Variáveis de copa 4. Modelos de *taper* . I. Título.

DEDICATÓRIA

Ao meu pai (*in memoriam*) dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primordialmente à minha família, em especial a minha mãe Ângela Menezes pelos ensinamentos repassados ao longo da vida. Às minhas irmãs Giselle e Nalini, sobretudo minha sobrinha Dalila. Ao meu irmão Gabriel Gomes, pelas dicas em como aplicar os conhecimentos matemáticos nas deduções necessárias.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Batista por todo suporte acadêmico, sugestão do tema e orientações que lapidaram este documento, além de conceder o privilégio de compartilhar seu vasto conhecimento na biometria florestal, cruciais para minha formação como pesquisador. À Profa. Dra. Clarice Demétrio (LCE-ESALQ) por ter sido minha mentora na prática docente, sobretudo pela parceria e disposição quanto às dúvidas que surgiram ao longo do processo. À Profa. Dra. Luciana pela coorientação e suporte técnico na condução das coletas dos dados utilizados nesta tese. Aos estagiários e todos os funcionários da Estação Experimental de Ciências Florestais no município de Itatinga, em especial ao Rildo. Ao Prof. Dr. Paulo Inácio (IB-USP) pelas contribuições indiretas e pelo convite em sua disciplina para atuar como professor convidado.

Aos doutores membros da banca José Aleixo (UFRPE), Edgar Vismara (UFTPR) e Hilton Tadeu (ESALQ) pelas contribuições que foram indispensáveis para o enriquecimento deste documento, bem como todo entusiasmo em fazer parte deste momento. Aos pesquisadores Dr. John Paul McTague (University of Georgia) e Dr. Lauri Mehtätalo (Natural Resources Institute Finland) pelas conversas informais que foram de grande contribuição para o entendimento dos métodos de modelagem aplicados. Ao Dr. Henrique Scolforo pelos conselhos em expandir os conhecimentos sobre a elaboração de modelos explicativos.

Aos colegas de laboratório do Centro de Métodos Quantitativos (CMQ), no Departamento de Ciências Florestais da ESALQ, pelos momentos de descontração, pelas conversas sobre linguagem computacional e demais conhecimentos em estatística, em especial ao Dr. Jefferson Polizel, Dr. Gabriel Prata, Dra. Rafaela Naves e Msc. Cristiano Reis.

Um agradecimento mais que especial a Adriana Peretti, por ser uma pessoa maravilhosa, pelo amor, companheirismo e carinho repassados sublimemente ao longo de todo processo de elaboração deste documento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - código de financiamento 001, pela bolsa concedida nesses quase quatro anos de doutorado.

BIOGRAFIA

Silvio Henrique Menezes Gomes é graduado em Engenharia Florestal e possui mestrado em Ciências Florestais. Brasileiro, natural da cidade Aracaju, estado de Sergipe, filho de Ângela Maria de Araújo Menezes e João José de Andrade Gomes (*in memoriam*), nasceu em 23 de fevereiro de 1984 em uma manhã ensolarada como é costumeiro em diversas capitais do litoral nordestino.

Ingressou no curso de Engenharia Florestal em 2005, na Universidade Federal de Sergipe, localizada na cidade de São Cristóvão. Durante a graduação, as áreas de interesse sempre foram voltadas àquelas disciplinas que possuíam algum aspecto quantitativo. Os primeiros contatos com regressão linear e não-linear foram definitivos para a escolha do manejo florestal e o estímulo para entender quais eram os desafios em quantificar os recursos de uma floresta, algo até então muito abstrato. Teve sua primeira aproximação com a estatística experimental, na prática, nos anos em que atuou como bolsista de iniciação científica na Embrapa Tabuleiros Costeiros, onde trabalhou especificamente com física, fertilidade e microbiologia do solo, sob orientação do pesquisador Dr. Marcelo Fernandes.

Em seu trabalho de conclusão de curso, houve a tentativa de trabalhar com volumetria sob a orientação da Profa. Dra. Anabel de Mello e coorientação do Prof. Dr. Robério Ferreira. O objetivo era desenvolver equações de volume para espécies da Mata Atlântica. No entanto, devido a escassez de informações de amostras, o tema foi migrado para então trabalhar com a fitossociologia das espécies arbóreas do próprio campus, o que gerou uma publicação posteriormente.

A biometria florestal se fez presente no mestrado, no Programa de pós-graduação em Ciências Florestais na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, em Vitória da Conquista-BA, ano de 2015. O trabalho foi conduzido em uma Floresta Nacional em área de Caatinga predominantemente arbórea, no sentido de obter equações de volume e outras ferramentas para seu manejo.

Em 2018, ingressou no Programa de pós-graduação em Recursos Florestais, na ESALQ-USP em Piracicaba, para cursar seu doutorado sob a orientação do Prof. Dr. João Luis Ferreira Batista. Durante esses quatro anos de doutorado, atuou como monitor nos estágios de férias fornecidos pela Estação Experimental em Ciências Florestais, situada no município de Itatinga-SP, bem como na disciplina de Introdução à Bioestatística Florestal, ministrada pela Profa. Dra. Clarice Demétrio do Departamento de Ciências Exatas da própria universidade. No mesmo período, atuou também como professor convidado na disciplina Modelagem Estatística para Ecologia e Recursos Naturais, no Instituto de Biociências da USP no campus Butantã em São Paulo. A experiência foi importante por solidificar os conhecimentos tanto da inferência pela estatística frequentista quanto por verossimilhança, imprescindíveis na sua formação como pesquisador.

EPÍGRAFE

”O homem é a medida de todas as coisas,
das coisas que são, enquanto são,
das coisas que não são, enquanto não são.”

Protágoras, 490 a.C.

SUMÁRIO

RESUMO	9
ABSTRACT	10
1 Introdução geral	11
1.1 Introdução	11
1.2 Revisão bibliográfica	13
1.2.1 A forma do tronco das árvores: conceito e contextualização teórica	13
1.2.2 Medidas de forma do tronco	14
1.2.2.1 Outras medidas de forma do tronco	16
1.2.3 Modelos de <i>taper</i>	17
1.2.3.1 Modelos segmentados	18
1.2.3.2 Modelos de simples função	19
1.2.4 Modelos de <i>taper</i> e os fatores de influência sobre a forma	21
1.2.5 Sofisticações e alternativas nos modelos de <i>taper</i>	22
1.2.6 Imposições aos estimadores dos modelos	25
1.3 Objetivos e estrutura da tese	27
Referências	29
2 Índices de qualidade de forma sob a ótica dos diferentes tipos de modelos de <i>taper</i>	33
Resumo	33
2.1 Introdução	34
2.2 Material e Métodos	35
2.2.1 Descrição da área de estudo	35
2.2.1.1 Delineamento experimental	36
2.2.2 Procedimentos de mensuração e coleta de dados	36
2.2.3 Medidas de forma	39
2.2.4 Procedimento para obtenção das medidas de forma	39
2.2.5 Estimativas das medidas de forma	40
2.2.6 Ajuste dos modelos	41
2.2.6.1 Avaliação dos modelos (<i>Goodness-of-fit</i>)	42
2.2.7 Estimativas das medidas de forma a partir dos modelos	43
2.3 Resultados	44
2.3.1 Descrição das medidas de forma	44
2.3.2 Análise geral dos modelos de <i>taper</i>	45
2.3.2.1 Análise das estimativas das medidas de forma	50
2.4 Discussão	53
2.5 Conclusões	56
Referências	58
2.6 Material suplementar	61
3 Influência do material genético e espaçamento na forma do tronco a partir das medidas de forma e modelos de <i>taper</i>	69
Resumo	69
3.1 Introdução	70
3.2 Material e métodos	71
3.2.1 Descrição da área de estudo	71
3.2.2 Modelos de <i>taper</i>	72
3.2.2.1 Modelo Segmentado	72

3.2.2.2	Modelo de Expoente-variável	73
3.2.3	Medidas de forma	73
3.2.3.1	Ajuste dos modelos	74
3.2.3.2	Avaliação dos modelos (<i>Goodness-of-fit</i>)	74
3.3	Resultados	76
3.3.1	Seleção do modelo e escala de ajuste	76
3.3.2	Análise dos resíduos dos modelos	77
3.3.3	Interpretação dos coeficientes	77
3.3.4	Interpretação dos parâmetros a partir das estimativas das medidas de forma	78
3.3.5	Intervalos de verossimilhança das medidas de forma	79
3.4	Discussão	82
3.5	Conclusões	84
	Referências	86
3.6	Material suplementar	89
4	Aplicação de variáveis arborimétricas e de povoamento na modelagem de <i>taper</i> considerando o material genético e espaçamento em plantios de <i>Eucalyptus</i>	95
	Resumo	95
4.1	Introdução	96
4.2	Material e métodos	98
4.2.1	Descrição da área de estudo	98
4.2.2	Variáveis utilizadas nos modelos	100
4.2.3	Modelos de <i>taper</i>	101
4.2.3.1	Adaptação para elaborar o modelo explicativo	102
4.2.3.2	Ajuste dos modelos	103
4.2.3.3	Seleção e análise dos modelos (<i>Goodness-of-fit</i>)	104
4.3	Resultados	106
4.3.1	Modelo segmentado adaptado para incorporar as variáveis de copa, medidas de forma e de povoamento	106
4.3.2	Variáveis incorporadas ao modelo de expoente-variável	111
4.3.3	Mudanças dos sólidos a partir do modelo com interruptores numéricos	114
4.3.4	Amostragem e validação cruzada	117
4.4	Discussão	117
4.5	Conclusões	122
	Referências	123
4.6	Material suplementar	126
5	Considerações finais	131
5.1	Aspectos gerais dos principais resultados	131
5.2	A altura de Pressler quando desconhecida	133
5.3	Aplicação da função Weibull como interruptor numérico e a altura de Pressler	135
5.4	A modelagem sob o aspecto das práticas silviculturais e de manejo: a forma do tronco e novos paradigmas	137
	Referências	139
	Apêndices	141
	Anexos	143

RESUMO

Análise do efeito do espaçamento e material genético na forma do tronco de árvores de *Eucalyptus* spp. sob o prisma da modelagem

Entender os fatores que interferem no crescimento das árvores, sobretudo as características que podem interferir na forma delas têm sido objeto de interesse no manejo florestal. Aspectos como densidade de plantio, copa, bem como o efeito do clima nas diferentes espécies do gênero *Eucalyptus* são fatores que podem direcionar as práticas de manejo para maior eficiência do uso dos recursos, sobretudo quando o interesse principal é obter produtos nobres da madeira. Portanto, o objetivo central do presente estudo foi avaliar os efeitos do espaçamento e material genético na forma das árvores de espécies de clones de *Eucalyptus* spp em situação experimental a partir da análise de modelos. Assim, o estudo foi conduzido na Estação Experimental de Ciências Florestais, no município de Itatinga, estado de São Paulo. Foi avaliado um experimento com seis materiais genéticos de *Eucalyptus* spp. em três espaçamentos (3mx1m, 3mx2m, 3mx4m). Técnicas de modelagem estatística foram utilizadas para interpretar os principais atributos da árvore e de povoamento. Neste sentido, modelos-hipóteses foram construídos a partir da análise de duas categorias de variáveis: atributos da árvore e de povoamento. Como atributos da árvore, foram utilizadas as principais variáveis como diâmetro e altura total. Outros atributos como variáveis de copa (altura da base da copa, comprimento e razão de copa) também foram avaliados. Ainda, medidas adicionais do tronco com base em conceitos teóricos da forma foram usadas: a altura de Pressler, os diâmetros de Hohenadl e de Hossfeld, além do próprio fator de forma artificial (ff); e para o povoamento, a área basal, o diâmetro médio quadrático, o espaçamento relativo e o Índice de Área Foliar (IAF). No segundo capítulo, foram obtidas as medidas de forma para determinar qual relação estas medidas possuem a partir da análise de diferentes categorias de modelos de *taper*. Nesta etapa exploratória não foi considerado o efeito do espaçamento e do material genético. Neste sentido, foi possível definir qual categoria de modelo foi mais plausível em detectar as medidas de forma e quais dessas medidas podem possuir maior sensibilidade aos aspectos silviculturais (clone e espaçamento). No terceiro capítulo, as categorias de modelo segmentado e expoente-variável foram comparadas considerando o efeito do espaçamento e material genético. No ajuste dos modelos o efeito da interação cloneXespaçamento se fez presente, embora na análise das estimativas das medidas de forma o efeito do espaçamento seja aparentemente dispensável. O modelo de expoente-variável foi melhor em descrever os perfis teóricos bem como nas estimativas das medidas de forma. O quociente de Hossfeld foi a medida mais realista em descrever as diferenças na forma dos materiais genéticos o que não ocorreu com a altura de Pressler. O fator de forma artificial, embora seja o referencial mais comum, não possui o realismo necessário. No quarto capítulo, as medidas de forma, de copa e de povoamento foram incorporadas como co-variáveis nos modelos de *taper*. O quociente de Hossfeld e a altura relativa de Pressler foram as únicas variáveis capazes de explicar o efeito do clone e espaçamento independentemente da categoria do modelo (segmentado e expoente-variável). A área basal em hectares consegue explicar apenas o efeito do espaçamento. As medidas de copa utilizadas, o comprimento e razão de copa, não conseguem explicar ambos efeitos. O Índice de Área Foliar consegue substituir o efeito das variáveis de copa, embora não seja um bom indicador de mudança na forma do tronco. No quinto e último capítulo, é sugerida uma nova abordagem baseada na categoria de modelo com interruptores numéricos, utilizando a altura de Pressler como referencial para mudança dos segmentos do tronco, bem como a aplicação da família Weibull na transição dos sólidos. Sugere ainda uma maneira de calcular a altura de Pressler quando esta não é mensurada com resultados promissores quando incorporada ao modelo.

Palavras-chave: Biometria florestal, Índices de qualidade de forma, *Taper*, Atributos de copa, Modelos biológicos

ABSTRACT

Analysis of the effect of spacing and genetic material on the shape of the tree trunk of *Eucalyptus* spp. under modeling approach

Understanding the factors that interfere with the growth of trees, especially the characteristics that can interfere with their shape, has been an object of interest in forest management. Aspects such as planting density, canopy, as well as the effect of climate on different species of the *Eucalyptus* genus are factors that can guide management practices towards greater efficiency in the use of resources, especially when the main interest is to obtain noble products of wood. Therefore, the present study aimed to evaluate the effects of spacing and genetic material on the stem of *Eucalyptus* spp clone species from an experimental condition in a modeling approach. Thus, the study was applied at the Experimental Station of Forest Sciences, in the municipality of Itatinga, state of São Paulo. An experiment with six genetic materials of *Eucalyptus* spp. under three spacings (3mx1m, 3mx2m, 3mx4m) was evaluated. Statistical modeling techniques were used to interpret the main tree and stand attributes. In this sense, hypothetical models were built from the analysis of two categories of variables: tree and stand attributes. As tree attributes, the main variables such as diameter and total height were used. Other attributes such as crown variables (crown base height, length and ratio) were also evaluated. Furthermore, additional measurements of the stem based on theoretical concepts of form were applied: Pressler height, Hohenadl and Hossfeld diameters, in addition to the artificial form factor (ff); and for the stand variables, the basal area, the mean square diameter, the relative spacing and the Leaf Area Index (LAI). In the second chapter, shape measurements were obtained to determine what relationship these measurements have from the analysis of different categories of taper models. In this exploratory stage, the effect of spacing and genetic material was not considered. In this sense, it was possible to define which model category was more plausible in detecting shape measurements and which of these measurements may have greater sensitivity to silvicultural aspects (clone and spacing). In the third chapter, the segmented model and exponent-variable categories were compared considering the effect of spacing and genetic material. In the fitting process, the effect of the cloneXspacing interaction was present, although in the analysis of the estimates of the form measurements the spacing effect is apparently unnecessary. The exponent-variable model was better at describing theoretical profiles as well as estimating form measurements. The Hossfeld quotient was the most realistic measure in describing differences in the shape of genetic materials, which was not the case with Pressler's height. The artificial form factor, although it is the most common benchmark, lacked the necessary realism. In the fourth chapter, measures of shape, canopy and stand attributes were incorporated as co-variables into taper models. Hossfeld's quotient and Pressler's relative height were the only variables able to explain clone and spacing effects regardless of the model category (segmented and variable exponent). The basal area in hectares can only explain the spacing effect. The crown measurements used, crown length and ratio, cannot explain both effects. The Leaf Area Index replaces the effect of canopy variables, although it is not a good indicator of changes in the stem shape. In the fifth and final chapter, a new approach based on the model category with numerical switches is suggested, using the Pressler height as a reference for changing the bole segments, as well as the application of the Weibull function in the solids transition. It also suggests an expression to calculate the Pressler height when it is unknown with promising results when incorporated into the same model category.

Keywords: Forest biometrics, Shape quality index, Taper, Crown attributes, Biological models

1 INTRODUÇÃO GERAL

1.1 Introdução

Desde que a forma do tronco foi associada a atributos como produção e rendimento da floresta, medidas de forma e modelos de *taper* foram criados no intuito de obter respostas factíveis sobre seus aspectos quantitativos. No Brasil, as duas abordagens são geralmente aplicadas em florestas plantadas de espécies do gênero *Eucalyptus*, e utilizadas como ferramenta para auxiliar no planejamento do uso desses recursos. Isto flexibilizou o multiuso dessas espécies frente às flutuações de oferta e demanda do mercado.

Mudanças na forma podem modificar substancialmente a destinação de um determinado povoamento em suprir a demanda em termos de volume de madeira (Figueiredo Filho et al., 2014). A maneira mais comum de obter informações quantitativas do povoamento é por meio de equações de volume, que podem estimar tanto o volume total quanto comercial da árvore. Este último obtido a partir de um diâmetro mínimo do tronco para cada subproduto.

Os diâmetros comerciais têm sido atualizados frequentemente devido a inclusão de novas progênies no mercado bem como o avanço tecnológico na cadeia produtiva florestal. Naturalmente, essas equações de volume são geradas para expressarem padrões florestais particulares sobretudo o volume comercial para um produto específico, exigindo sempre novas equações à cada mudança destes dois aspectos. Neste sentido, equações de *taper* são vantajosas pela sua capacidade de extrair informações de volume a qualquer altura da árvore, se comparado às equações de volume convencionais. São mais capazes de projetar a capacidade volumétrica para cada subproduto da madeira a nível de povoamento com apenas uma única função e as mesmas medidas coletadas nos inventários florestais. O que esses modelos fazem indiretamente é idealizar a forma teórica do tronco, que pode variar entre diferentes padrões florestais.

Fatores como densidade de plantio e características de copa têm sido indicadores de variação na forma em distintos padrões florestais, mas que podem estar mais associadas a sensibilidade de algumas espécies e aspectos genéticos em resposta a essas mudanças. Para produtos como a celulose, a variável de interesse principal é o volume mas, quando o destino final é para produtos mais rentáveis como a madeira para serraria, a forma do tronco tende a ser objeto preponderante de interesse. Esta é uma das razões para que o estudo da forma do tronco seja recorrente, principalmente quando o objetivo central é modelar as relações entre esses fatores.

Na última década, tem-se buscado avaliar a influência de algumas medidas de forma sugeridas por pesquisadores alemães do século XIX, a partir de teorias sobre a forma do tronco (Ducey e Williams, 2011). Muitas destas medidas são utilizadas para cálculo de volume e podem ser usadas para encontrar relações que melhor expliquem as mudanças na forma, como a altura de Pressler e o diâmetro de Hossfeld¹. O que ainda não se tem conhecimento é se estas posições no tronco, que representam as medidas de forma, possuem relação com outros atributos da árvore, como por exemplo a altura da base da copa. Ou, se estas medidas possuem real significado teórico e prático a partir de métodos de modelagem analíticos, neste caso, os modelos de *taper*.

A altura de Pressler é o ponto de referência do tronco que expressa a forma da árvore para posterior cálculo do volume. Em grande parte das espécies excurrentes, esse ponto pode ser localizado aproximadamente a 75% da altura total o que determina a forma paraboloide do tronco e sua fórmula² de volume consegue expressar com alta fidelidade o volume da árvore nestas condições (McTague, 1992). Por ser uma medida que pode estar próxima da altura da base da copa, espera-se que haja uma relação

¹O diâmetro de Hossfeld pode ser encontrado a 1/3 da altura total do tronco. Sua fórmula de volume é expressa por $v_{hs} = (3/4)kd_{H/3}^2H$, em que v_{hs} é o volume cúbico total; k é a constante $\pi/40000$; $d_{H/3}$ é o diâmetro em cm a 1/3 da altura total (H).

²A fórmula de volume de Pressler consiste em $v_{pr} = (2/3)kD^2h_{pr}$, em que v_{pr} é o volume cúbico total acima do dap ; D é o diâmetro na altura de 1,3m, em cm; h_{pr} é a altura de Pressler que consiste na altura em que pode ser localizado o diâmetro que é a metade do valor do dap ($D_{0.5}$).

entre elas. A copa, além de sua praticidade de obtenção em campo ao contrário da altura de Pressler, é um atributo da árvore que além de participar de inúmeros eventos fisiológicos, pode ser sensível a variações de densidade de plantio e estar diretamente relacionada as mudanças da forma no tronco em árvores individuais.

Têm-se observado que existe associação evidente entre alguns atributos da árvore, como a copa (Valentine e Gregoire, 2001), bem como densidade de plantio e sua influência sobre a forma do tronco (Sharma e Zhang, 2004; Sharma e Parton, 2009). O que se espera é que a densidade de plantio possua interferência direta na dimensão e comportamento da copa, onde áreas mais adensadas apresentem copas menores. Assim, é mais comum traduzir a influência da copa por outras variáveis a nível de povoamento como por exemplo o número de árvores por hectare e/ou área basal (Schneider, 2018).

Mesmo com significado teórico, a inclusão de algumas medidas de copa nos modelos de *taper* não têm apresentado melhora substancial na acurácia deles (Burkhart e Tomé, 2012). Se a copa possui relação com a forma, além de fortemente captar variações de práticas silviculturais e de manejo, variáveis de povoamento podem indiretamente representá-la nos modelos. Uma tentativa de validá-la como atributo intrínseco da forma do tronco é aplicá-la, neste caso, como um referencial direto na transição dos sólidos a partir da posição de sua base no tronco (Valentine e Gregoire, 2001). Isto pode explicar o porquê da maneira convencional de aplicar variáveis de copa possui pouca influência quando incluída nos modelos de *taper* e qual sentido biológico dela, ou seja, intui-se que os modelos não conseguem captar este efeito. Outra limitação é a maneira simplificada de expressar o efeito da densidade de plantio e competição intraespecífica, que permanece como um dos maiores desafios para fornecer significado biológico ao modelo (Sanquetta et al., 2020).

No Brasil, investigações com modelos de *taper* tem como enfoque obter equações que sejam efetivas nas estimativas dos diâmetros e volume, sobretudo na escolha de qual expressão obteve melhor desempenho preditivo em diferentes espaçamentos (Cerqueira et al., 2017). Existe preferência marcante na escolha do modelo de polinômio de grau cinco no Brasil, já que o objetivo central desses trabalhos é obter equações que possuam boa capacidade preditiva nas estimativas dos diâmetros do fuste (Figueiredo-Filho et al., 1996; Müller et al., 2005; Cerqueira et al., 2017). Embora seja o comportamento esperado, uma boa predição do diâmetro não garante que as estimativas de volume terão respostas equivalentes. Relata-se que a observação das estatísticas descritivas de diâmetro sem considerar a propagação do erro nas integrais de volume, pode consistir numa falsa ideia de eficiência nas estimativas dos modelos (Gregoire et al., 2000; Fortin et al., 2013) o que pode ser um provável entrave não reconhecido nessas equações polinomiais.

Nas últimas décadas, estudos de *taper* têm mostrado que considerar efeitos aleatórios e fixos a partir de modelos de efeitos mistos, atribui maior eficiência nas estimativas quando o objetivo é obter equações que captem os componentes de variação (Valentine e Gregoire, 2001; Lappi, 2006; Westfall e Scott, 2010). Neste caso o maior interesse ainda é na capacidade preditiva destes modelos, que naturalmente são mais sensíveis aos fatores de variação e inegavelmente mais acurados que os métodos convencionais. A grande vantagem desta abordagem é a de fornecer a possibilidade de construir equações para outros locais a partir de amostras menores deste novo local, processo conhecido como calibração. Entretanto, para que isto seja possível é necessário fornecer grandes matrizes da estrutura do erro das equações originais, algo que nem sempre é disponibilizado.

Embora estas sofisticadas tenham sido implementadas no sentido de traduzir a forma idealizada do tronco, há portanto preocupação em entender os processos mecânicos sobre ela. Grande parte dos modelos são elaborados com base em observações empíricas. Teoricamente um modelo mais flexível terá uma vantagem maior em comportar a imensa variedade de formas existentes, mas nem sempre será capaz de fornecer informações biológicas (Gomat et al., 2011). Raros trabalhos evidenciam a importância do significado teórico da interpretação dos parâmetros dos modelos frente a estas variações naturais da

forma (Newberry e Burkhart, 1986). Por outro lado, observa-se o interesse crescente em incluir elementos estocásticos nesses modelos (Narmontas et al., 2020; Petrauskas et al., 2020) sobretudo incorporar funções que originalmente explicam eventos ecológicos a partir de teorias sobre o crescimento de plantas (Valentine e Gregoire, 2001; Westfall e Scott, 2010).

Diante do exposto, nota-se a preocupação em desenvolver modelos não somente mais flexíveis e que sigam critérios que os tornem satisfatórios (Goodwin, 2009), mas que sejam capazes de fornecer significado biológico a partir do teste de novas variáveis. No Brasil, a crescente expansão dos plantios de *Eucalyptus* tem impulsionado os programas de melhoramento a desenvolverem materiais genéticos tolerantes a regiões onde a escassez hídrica é uma realidade. Isto torna o setor florestal cada vez mais dependente de métodos de modelagem mais sofisticados que possam captar as variações do ambiente, dado que o procedimento de atualização das equações por métodos destrutivos é ainda uma prática onerosa. Neste sentido, é necessário a investigação de algumas variáveis arborimétricas e de povoamento que possam substituir os fatores de variação mesmo em plantios considerados homogêneos. Portanto, o que se espera é que antigas medidas de forma até então pouco evidenciadas em estudos recentes possam fornecer amparo biológico aos modelos, bem como torná-los mais explicativos aos diferentes padrões florestais com apenas uma medida adicional.

1.2 Revisão bibliográfica

1.2.1 A forma do tronco das árvores: conceito e contextualização teórica

Na literatura florestal dois termos são usados como sinônimos para representar o mesmo significado teórico sobre a forma do tronco: forma e *taper* (ou afilamento). O primeiro possui a capacidade de representar a forma das árvores a partir de associações à sólidos ou formas geometricamente conhecidas por meio expressões matemáticas (Burkhart e Tomé, 2012; Batista et al., 2014). O segundo significa que a forma consiste na taxa de diminuição dos diâmetros desde a extremidade inferior até o topo do fuste (Burkhart e Tomé, 2012; Kershaw Jr et al., 2016).

A forma do tronco das árvores têm sido objeto de interesse desde o século XIX, na Alemanha, com as primeiras teorias publicadas por Pressler em 1865. Nesse período, Pressler em seu postulado denominado de *lei da formação do tronco*, observou que a área dos anéis de crescimento das árvores é proporcional a capacidade assimilação da copa, na ideia de que o crescimento é constante abaixo da base dela e diminui a partir desse ponto até o ápice (Schneider, 2018). Ou seja, o incremento em área de qualquer parte do tronco é proporcional a capacidade de absorção de suas partes superiores (Assmann, 1970). Associou também uma medida relacional de forma que consiste na altura de um dado ponto do tronco em que seu diâmetro é metade do diâmetro medido a 1,3m de altura (*dap*), convencionalmente chamada de altura de Pressler (McTague, 1992).

Em outra abordagem, Metzger deu ênfase a conceitos de aspecto mecânico e estrutural para a forma das árvores, com as primeiras teorias sobre estrutura e funcionalidade do tronco. Acreditava-se que a árvore e seu tronco funcionava como “braço” de sustentação da copa e que sua forma foi assim concebida para lidar com as forças dos ventos. Baseado nas leis da mecânica, afirmou que o tronco possuía igual resistência em todas as seções dele quando essa força fosse aplicada. Esta teoria deu suporte para o entendimento do *centro de gravidade da copa*, que consiste na afirmação de que a distância do centro da copa é proporcional a terceira potência do diâmetro da árvore, descrevendo-a como um parabolóide cúbico (Larson, 1963; Assmann, 1970; Schneider, 2018).

Processos fisiológicos podem explicar algumas variações na forma, mas não são por ora contundentes. Devido a existência de uma imensa variedade de espécies e, conseqüentemente, variação natural tanto a nível de espécie quanto de indivíduo, a explicação da forma ficou restrita a árvores de algumas

espécies de gimnospermas (Larson, 1963). Neste sentido, dois eixos centrais foram definidos para explicar estas variações: teorias hidráulicas e mecânicas (Schneider, 2018).

A partir de pressupostos mecânicos da forma do tronco das árvores, outras alternativas à teoria de Metzger foram propostas para melhor entendimento sobre o crescimento e sua forma. Na tentativa de explicar o ponto mínimo e máximo de crescimento do tronco, alguns autores observaram situações distintas de condições as quais os indivíduos se desenvolviam (Larson, 1963). Características como densidade do povoamento, clima e tamanho de copa foram contempladas nesses trabalhos, e evidencia que a copa tem sido o mais decisivo para o comportamento da forma (Larson, 1963; Long et al., 1981; Valinger, 1992) em detrimento à teoria inicialmente defendida de resistência contra estresses mecânicos como as forças dos ventos (Assmann, 1970).

Variáveis de copa como medida adicional nos inventários têm apresentado bons resultados em estudos empíricos sobre o comportamento da forma nas últimas décadas (Burkhart e Walton, 1985; Valenti e Cao, 1986; Leites e Robinson, 2004). Árvores com copas mais largas possuem fustes mais afilados em detrimento de copas com menores dimensões, e a inclusão das derivações de variáveis de copa (diâmetro, forma, razão e comprimento de copa) fornecem melhor desempenho aos modelos de *taper* (Leites e Robinson, 2004). Alterações na forma do tronco a partir da altura da base da copa também podem ser evidenciadas (Valentine e Gregoire, 2001).

Apesar da intrínseca relação com a forma, medidas de copa não são comuns em inventários florestais. Estudos têm mostrado que a densidade de plantio provoca alterações tanto na forma quanto nos atributos de copa dessas árvores (Muhairwe, 1994), onde áreas mais adensadas possuem troncos mais afilados em *Pinus* e *Black Spruce* (Sharma e Zhang, 2004; Sharma e Parton, 2009) e podem adquirir copas com menores dimensões (Ducey, 2009). Neste sentido, é mais comum optar por variáveis a nível de povoamento, como por exemplo a densidade de plantio e/ou área basal, justificadas por não possuírem custos adicionais em sua coleta (Schneider, 2018; Sharma, 2020). Entretanto, a influência da densidade na forma pode ser mais dependente das características de espécie e conseqüentemente de sítio (Goudiaby et al., 2012; Kershaw Jr et al., 2016; Schneider, 2018), embora práticas silviculturais de manejo como desbaste, poda e fertilização também possam ser consideradas (Burkhart e Tomé, 2012).

Estudos mais recentes têm apresentado relações entre a forma das árvores e variáveis climáticas como temperatura, precipitação, sobretudo variáveis de outra natureza como a força e velocidade dos ventos (Schneider, 2018). Schneider et al. (2018) demonstram a importância dessas variáveis de maneira hierárquica e, como a utilização de outras técnicas de modelagem que consideram efeitos aleatórios e fixos podem detalhar as mudanças na forma, no volume e biomassa. Contudo, ainda não existe teoria conclusiva sobre a formação do tronco e nem sobre os diferentes comportamentos da forma nas diferentes espécies (West, 2015).

1.2.2 Medidas de forma do tronco

Algumas abordagens para melhor entender a estrutura e formação do tronco deram suporte para algumas teorias sobre sua funcionalidade e conceituadas para este fim. Inúmeros fatores são responsáveis para sua variação, como espécie, idade, material genético, região, tamanho em diâmetro e densidade. Esta variação indica que mensurar a forma se refere a grandezas conceituais, ou seja, não é um atributo sensível do tronco em si e sim uma combinação de atributos sensíveis (Batista et al., 2014).

As medidas de forma podem ser categorizadas em dois tipos distintos. A primeira é o fator de forma e a segunda o quociente de forma. Ambas possuem suas próprias concepções teóricas e tiveram maior popularidade no século passado para cálculo de volume, mas até hoje ainda possuem relevância prática.

O fator de forma pode ser entendido aqui como a razão entre o volume sólido do tronco, obtido

por procedimentos de cubagem rigorosa ou outros meios de determinação do volume e o volume de algum sólido geométrico, como cilindro, cone ou neilóide com base no diâmetro e altura da árvore (Kershaw Jr et al., 2016). Por ser uma medida adimensional e necessitar do volume sólido da árvore, constitui-se como uma medida destrutiva já que exige a derrubada da árvore para sua quantificação.

O cilindro e o cone são os dois sólidos de referência para classificação do fator de forma do tronco. Fatores entre um e um terço conferem ao tronco um aspecto parabolóide e neilóide abaixo disto. Em estudos empíricos, geralmente um único fator é designado para representar um grupo de árvores de alguma espécie ou, muitas vezes, de uma região, a partir do fator de forma médio de todas as árvores do povoamento.

Alguns aspectos são determinantes na variação dos fatores de forma. Estudos empíricos da forma têm demonstrado que o valor deste fator decresce conforme o aumento do *dap*, ou seja, é menos homogêneo nas menores e se torna mais homogêneo nas maiores árvores, e varia também a nível de espécie mesmo em florestas plantadas de *Eucalyptus* spp. (Batista et al., 2014). Como a área basal é convencionalmente atribuída a altura fixa de 1,3m da árvore, este fator de forma se altera conforme a altura da árvore aumenta, mesmo quando sua forma essencial se mantém intacta, o que passou a ser chamado de fator de forma artificial (Assmann, 1970).

A segunda medida de forma, o quociente de forma, consiste na razão entre um diâmetro geralmente acima do *dap* (D a 1,3m) e o próprio diâmetro a altura do peito. Constitui-se como a terceira variável independente de maior importância, em conjunto com o *dap* e *altura total*, no cálculo de volume (Kershaw Jr et al., 2016). Por ter obrigatoriamente duas medidas de diâmetro, não é considerada uma medida destrutiva e seu objetivo é indicar uma medida de forma que possa ser facilmente obtida nas rotinas de inventário e assim classificar as árvores em classes de forma (Batista et al., 2014). Desde que uma segunda medida de diâmetro foi considerada importante para cálculo de volume, alguns tipos de quociente foram elaborados desde o século XIX.

O primeiro deles foi o quociente de forma normal em que o diâmetro é obtido na metade da altura total. Este quociente possui a problemática com árvores menores, quando a altura total é o dobro da altura do *dap*, o que obviamente terá o segundo diâmetro igual ao próprio *dap*. Assim, para contornar esta anormalidade, convencionou-se que o diâmetro deverá ser medido na posição central entre a altura do peito e altura total. Este procedimento é chamado de quociente de forma absoluto (Kershaw Jr et al., 2016).

Apesar de possuir uma melhor expressão da forma do tronco, em comparação ao quociente de forma normal, o quociente de forma absoluto ainda assim não é a pura expressão da forma por não ser independente da relação diâmetro-altura, sobretudo nas diferentes classes desta relação. Para grande parte das espécies, este quociente varia entre 0,60 e 0,80, sendo que 0,71 representa o parabolóide, 0,50 para o cone e 0,35 para neilóide, quando o diâmetro é medido na região da base do tronco (Kershaw Jr et al., 2016).

Outro quociente sugerido por Girard utiliza o diâmetro sem casca na altura de aproximadamente 5,21m no tronco. Como muitas espécies possuem grandes variações na espessura da casca, este quociente pode ser vantajoso por expressar tanto essa variação quanto na forma da parte lenhosa (Batista et al., 2014). Esta medida adicional pode ser inserida em modelos de volume para obtenção de resultados preditivos mais precisos e podem ser mensuradas a partir de dendrômetros ópticos (McTague, 1992; Kershaw Jr et al., 2016).

Diferentes posições no tronco também foram sugeridas por outros autores, como o método de Hohenadl conhecido como fator de forma natural que tem como referência o diâmetro a 10% da altura total da árvore aferido a partir do nível do solo. Esta posição sinaliza uma estabilidade que independe do tamanho dela, diferentemente do que ocorre quando a altura do *dap* é usada como referência (Assmann, 1970). Por ser independente da altura da árvore, mostrou-se como uma medida de forma capaz de obter

pequenas mudanças sistemáticas quando comparado com o fator de forma artificial (Assmann, 1970). Sob a mesma ótica do Hohenadl, Zimmerle observou que a 20% da altura o diâmetro relativo é igual nos diferentes tamanhos de árvores, mas que a 10% mostrou-se equivalentemente estável o que reforça a teoria de Hohenadl (Zimmerle, 1949 *apud* Assmann, 1970).

Outros quocientes foram sugeridos e raramente mencionados na literatura atual. Um deles é o ponto de forma, construído a partir de teorias sobre o centro de gravidade de copa, que é o percentual da altura designado para resistir a pressões externas como a força dos ventos. Outra abordagem pode ser vista em Da Silva et al. (1994) que consiste na razão entre um diâmetro medido a 15,2cm e outro a 1,52m acima do solo, em que o fator de forma é dado pelo volume do segmento entre estes dois diâmetros e o volume cilíndrico baseado no *dap*. Por fim, um outro diâmetro localizado a 2,3m de altura acima do solo foi sugerido por Maass para cálculo do quociente de forma (Maass, 1939 *apud* Kershaw Jr et al., 2016). Mais medidas de forma podem ser vistas em Assmann (1970) e Ducey e Williams (2011) como o diâmetro de Hossfeld. Outras maneiras de expressar a forma foram determinadas a partir de outras medidas auxiliares e suas respectivas fórmulas de volume, o que será abordado a seguir.

1.2.2.1 Outras medidas de forma do tronco

Diante da complexidade na determinação da forma das diversas espécies e obter expressões factíveis com a realidade do tronco em árvores excurrentes, outras razões foram desenvolvidas para obter uma representação mais fiel sobre a forma delas.

Têm-se observado o interesse em utilizar algumas medidas de forma sugeridas por pesquisadores alemães do século XIX até então esquecidas na literatura florestal (Ducey e Williams, 2011). Algumas destas medidas foram utilizadas para aprimorar os modelos de volume e encontrar associações que melhor descrevam as mudanças da forma dessas espécies, no entanto algumas delas carecem de literatura detalhada sobre sua concepção teórica.

Como algumas medidas acima do *dap* são mais difíceis de coletar em campo e assim obter os quocientes de forma relatados, algumas medidas auxiliares se baseiam em razões de alturas com base em frações do *dap*. Soma-se a isto, o fato de que o erro na localização desses diâmetros em alturas relativas fixas está ao redor de 2-3 cm (Rustagi e Loveless Jr, 1991b) o que pode justificar o uso dessas alturas em detrimento de frações do diâmetro, embora não estejam também isentas de erros a depender da sua localização no tronco.

Dentre estas medidas está a altura de Pressler, que consiste na altura que se encontra a metade do *dap* ($0,5D$). A medida de altura de Pressler é o ponto de referência na parte do fuste que expressa a forma da árvore para posterior cálculo do volume. Em grande parte das árvores excurrentes, esse ponto pode ser localizado aproximadamente a 75% do fuste o que determina a forma parabolóide do tronco e sua fórmula de volume consegue expressar com alta fidelidade o volume da árvore nestas condições (McTague, 1992). Portanto, se esta altura for encontrada próximo de 50% do tronco mais cônico será.

Outras medidas de alturas também podem ser sugeridas a partir das frações de diâmetros gabaritadas de alguns aparelhos para obtenção delas, como o relascópio de Spiegel. Rustagi e Loveless Jr (1991b) utilizaram frações de diâmetros das bandas de referência encontradas no relascópio de Spiegel para determinar as alturas. As frações de diâmetros utilizadas foram $0,5D$ (altura de Pressler), $0,67D$ e $0,75D$, bem como utilizaram razões dessas alturas obtidas com a altura total. Observaram que a altura a $0,67D$ possibilitou maior acurácia nas estimativas de volume, bem como que a posição dela fica localizada abaixo da copa, o que facilita sua localização no tronco em detrimento da altura de Pressler. Ainda, salientaram que a adição de medidas de forma como razões de alturas nessas equações, habilita o desenvolvimento de modelos de *taper* compatíveis com o volume.

1.2.3 Modelos de *taper*

Conforme mencionado anteriormente, na tentativa de explicar o comportamento da forma de várias espécies, modelos que associam a forma da árvore a sólidos geometricamente conhecidos foram sugeridos nas últimas décadas. Esses modelos, chamados de modelos de *taper* ou afilamento, são funções matemáticas que, a partir de medidas básicas como diâmetro e altura total, objetiva-se obter diâmetros a qualquer altura do tronco para cálculo de volume em seções definidas dele (Cao et al., 1980; Burkhart e Tomé, 2012; Kershaw Jr et al., 2016; Schneider, 2018).

Segundo Batista et al. (2014), um modelo de *taper* para satisfazer as propriedades ideais necessita dos seguintes requisitos: 1) o decrescimento do diâmetro ao longo do tronco será de maneira monotônica conforme a altura da árvore aumenta; 2) o diâmetro na altura da seção a 1,3m da árvore ($d_{1,3}$), e o valor referente ao *dap* (D), deverão ser iguais ($d_{1,3} = D$); 3) o diâmetro na altura total deverá ser nulo ($d_i = 0$ quando $h_i = H$). Com o passar dos anos, outras propriedades e exigências a estes modelos foram implementadas, como por exemplo serem suficientemente flexíveis para obter perfis ideais nas diferentes espécies (Goodwin, 2009).

Devido a complexidade e variedade de formas existentes, a concepção teórica desses modelos ficou restrita à árvores excurrentes, sobretudo espécies que possuem fustes únicos e com explícito interesse econômico (Burkhart e Tomé, 2012). Fatores externos a essas espécies como competição e densidade têm indicado alguma influência sutil na forma (Muhairwe et al., 1994), bem como no volume e biomassa que são as principais variáveis de interesse quando se pretende quantificar seu potencial produtivo (Kershaw Jr et al., 2016; Schneider, 2018), principalmente no cálculo do sortimento de madeira (Kozak, 2004).

A maneira mais simples e menos usual de determinar a forma a partir do conceito de *taper* é a partir de um modelo fenomenológico que possui um parâmetro exclusivo de forma. Este modelo proposto por Kunze (1873) *apud* Inoue et al. (2021) associa o raio da seção do tronco (y) em função da distância da seção até a altura total ($H - h_i$). Possui duas constantes que indicam o afilamento da espécie (α) e outra o expoente de forma (β):

$$y^2 = \alpha(H - h_i)^\beta + \varepsilon$$

Este conceito foi a base para elaboração do modelo de *taper* de Ormerod (1973), que também possui um único parâmetro de forma. O modelo de Ormerod é usado ainda hoje como referência para novas abordagens (Valentine e Gregoire, 2001; Kozak, 2004) e será referenciado novamente mais adiante. Ainda no conceito de Kunze, Inoue et al. (2021) mais recentemente elaboraram um novo índice de *taper* baseado no fator de forma artificial em espécies de bambu. Constataram que existe relação entre o expoente de forma β e o índice proposto, além de apresentar uma maneira de diferenciar a forma de três espécies. Isto porque o expoente de forma pode ser interpretado a partir dos valores que possa assumir, ou seja, quando $\beta = 0$ representa um cilindro e quando $\beta = 3$ um neiloide. Valores intermediários classificam o tronco em cônicos e paraboloides (2 e 1, respectivamente).

Embora pareça interessante investigar a forma do tronco a partir de um único parâmetro, conforme apresentado por Tasissa e Burkhart (1998) sobre o efeito do desbaste, a forma do tronco é muito mais complexa. De maneira simplificada, a árvore pode ser dividida em três partes que associam a sólidos em revolução como: 1) neilóide, que representa a região que une raízes ao ponto considerado a base do tronco; 2) parabolóide, na região intermediária acima da base do tronco, geralmente acima de 1,3 m de altura, até a base da copa; 3) cone, da base da copa até a altura total (Prodan et al., 1997; Burkhart e Tomé, 2012; Schneider, 2018). Ou, mais resumidamente, pode ser dividida em neilóide, parabolóide cúbico com transição para um parabolóide quadrático e, parabolóide quadrático com transição para um conoide (Assmann, 1970).

A divisão e os respectivos sólidos associados ao volume da árvore deram os primeiros suportes teóricos para elaboração dos primeiros modelos de *taper*. Assim, foram divididos em dois grandes grupos: 1) modelos segmentados, que são aqueles em que cada parte do tronco é dividida e associada a polinômios que são unificados a partir de restrições ao modelo ou pontos de inflexão (Max e Burkhart, 1976; Sharma e Burkhart, 2003); e 2) de simples função, ou seja, o perfil do tronco é obtido por uma única e simples função (Bruce et al., 1968; Ormerod, 1973; Kozak, 1988; Thomas e Parresol, 1991; Kozak, 1997, 2004). Dentro destes dois grupos existem outras subclassificações e aqui usaremos apenas as nomenclaturas sugeridas por Burkhart e Tomé (2012). Outras classificações e uma revisão mais detalhada sobre a evolução dos modelos de *taper* foram descritas mais recentemente em McTague e Weiskittel (2021). Dentro do grupo dos segmentados uma atenção maior será despendida aos modelos de Max e Burkhart (1976) e Demaerschalk e Kozak (1977), pela sua relevância bem como serem a base para adaptações e desenvolvimento de outros modelos similares. Os de simples função, temos as subclassificações em modelos polinomiais e trigonométricos. Outro grupo é o de expoente e forma-variável, retratado no mesmo tópico dos modelos de simples função, pelo fato de não possuírem segmentação.

1.2.3.1 Modelos segmentados

Modelos segmentados são funções polinomiais, de graus iguais ou diferentes, em que as funções são unidas para obter uma única função. Estes modelos podem possuir dois ou mais segmentos. A quantidade de segmentos dependerá da complexidade da forma da espécie (Max e Burkhart, 1976; Demaerschalk e Kozak, 1977). Para cada um são associados sólidos em revolução básicos que descrevem as dimensões do tronco e conseqüentemente a forma (Burkhart e Tomé, 2012).

Os polinômios são então unificados por meio de pontos de união designados a partir dos pontos de inflexão e o modelo completo é então ajustado utilizando métodos de regressão comuns. Segundo Demaerschalk e Kozak (1977) o ponto de inflexão pode ser entendido como a taxa fixa do d_i/D e h_i/H , na mudança do formato neilóide para parabolóide a um dado percentual (p) da altura total da árvore.

O modelo mais popular é o de Max e Burkhart (1976) que, a partir das derivações do modelo polinomial quadrático simples de Kozak et al. (1969), modelo este concebido para florestas canadenses na época, descreveram os primeiros métodos de segmentação. Os autores ajustaram modelos polinomiais segmentados para expressar a forma do tronco de árvores de *Pinus taeda*, a partir de dois pontos de unificação: 1) modelo com dois segmentos, sendo cada qual um modelo quadrático; 2) modelo com três segmentos, em que modelos quadráticos representaram a base e o topo, outro linear para a região intermediária do tronco; 3) modelo com três segmentos, em que todas as partes foram representadas por modelos quadráticos.

Para ajuste desta categoria de modelo, dois procedimentos podem ser sugeridos: 1) os pontos de união podem ser designados a priori, ou seja, as posições deles são constantes fixas conhecidas e os parâmetros da expressão desconhecidos; 2) Ou estimados a partir de procedimentos não lineares (Max e Burkhart, 1976). A partir de simples derivações que restringem os parâmetros que controlam os pontos de união, garante continuidade ao modelo e habilita gerar perfis do tronco coerentes.

A necessidade de segmentação nesses modelos teve como premissa diminuir o recorrente problema dos modelos de simples função que tentam explicar a forma da árvore a partir de uma única função. Este último apresentam viés acentuado em explicar partes consideradas críticas das árvores, como a base do tronco, sobretudo em subestimar o volume total em pequenas árvores e superestimativas nas maiores, além do negativo efeito da multicolinearidade e autocorrelação (Kozak, 1988, 1997, 2004).

Mesmo que os modelos segmentados tenham apresentado resultados satisfatórios em contornar alguns destes problemas nos modelos quadráticos de simples função (Max e Burkhart, 1976; Figueiredo-Filho et al., 1996; Fang et al., 2000; Sharma e Burkhart, 2003), algumas razões para estimativas com

viés foram relatadas. As razões para o alto viés podem ser devido a concepção simplificada do modelo; sistemas de equações que não consideram o caráter contínuo da expressão com pontos de união coerentes, que geram acentuações irreais na forma; não estimar o diâmetro nulo quando a altura da seção coincide com a altura total, além da baixa correlação entre o diâmetro com e sem casca e; o ponto de inflexão na altura relativa vinculada ao *dap* pode ser afetado pela dimensão do diâmetro na base do tronco (Demaerschalk e Kozak, 1977).

Abordagens mais recentes com esses modelos têm possibilitado maneiras mais simples de integração e compatibilidade no cálculo de volume, a partir de sistemas que incluem equações de *taper*, volume comercial e total, com outras técnicas de estimadores de parâmetros³ (Fang et al., 2000). Outras modificações podem ser vistas na construção de modelos de razão de volume e de *taper* segmentados (Cao et al., 1980), sobretudo com técnicas mais avançadas como modelos de efeitos mistos segmentados, com o objetivo de obter perfis individuais incorporando medidas adicionais do tronco (Trincado e Burkhart, 2006).

1.2.3.2 Modelos de simples função

Anteriormente foi mencionado que esses modelos tentam expressar a forma da árvore a partir de uma única função matemática, sem a necessidade de segmentação dos modelos. Como nem todo modelo de simples função possui a mesma concepção matemática, para melhor compreensão eles serão classificados em três categorias: polinomial ou parabólico, de expoente-variável ou forma variável e trigonométrico.

Os primeiros modelos de única função foram usados como referência para as aplicações do método de segmentação, como o modelo quadrático (parabólico) básico proposto por Kozak et al. (1969) no trabalho de Max e Burkhart (1976), conforme já mencionado. Este modelo de simples função, em uma época que se discutia a inclusão de outras medidas no tronco das árvores, além das já rotineiras (*dap* e altura total), sobretudo outras maneiras de análise para auxiliar nos inventários florestais, foi inovador tanto pela sua simplicidade no ajuste quanto em menores erros na expressão da forma de várias espécies avaliadas. O modelo quadrático não necessitava da inclusão de variáveis além das comuns nos inventários florestais e também prometia solucionar a problemática variação na base do tronco, sobretudo o diâmetro sem casca a partir do diâmetro com casca.

Devido a sua simples concepção teórica na idealização da forma das espécies avaliadas, o modelo de Kozak et al. (1969) foi passível de críticas positivas e negativas. Mesmo que o desempenho dele tenha sido satisfatório nas espécies testadas, sua função não era suficientemente flexível a outras formas do tronco mais complexas, e não atendia as propriedades exigidas para um modelo de *taper* coerente (Batista et al., 2014). Por outro lado, era suficientemente simples em obter integrais para cálculo tanto do volume comercial bem como estimar a altura comercial para um determinado subproduto da madeira (Kozak, 1988). Entretanto, isto não foi suficiente e outras concepções de modelo foram elaboradas o que culminou nos modelos de expoente ou forma-variável.

Os modelos de expoente-variável são a sofisticação da expressão simples sugerida por Ormerod (1973) que possuía um parâmetro fixo no expoente da expressão, diferentemente do modelo quadrático de Kozak et al. (1969). Esse modelo foi posteriormente modificado por Reed e Byrne (1985), em que os parâmetros do expoente são uma função⁴ e, no ano seguinte, por Newberry e Burkhart (1986) que passa a incorporar variáveis de copa e de sítio.

O modelo desta categoria que se consagrou como mais flexível nas diferentes espécies de ocorrência natural em florestas canadenses foi o modelo de expoente-variável sugerido por Kozak (1988). Sua principal limitação foi em não possibilitar obter integrais para cálculo do volume na época, embora no

³ As técnicas sugeridas podem ser a partir dos mínimos quadrados ordinários (OLS) ou generalizados (GLS)

⁴ a função é $1 - [(H/D - 30)/120]$

mesmo trabalho exemplifique como calculá-lo sem essa integral. Mesmo que isto seja aparentemente um entrave, com o advento tecnológico e métodos iterativos numéricos atuais, este último problema pode ser contornado (Bi, 2000; Burkhardt e Tomé, 2012). Apesar de ter sido um modelo de ajuste simples, tornou-se pouco flexível por possuir apenas um ponto de inflexão na função, o que acarretava em viés nas estimativas quando possui apenas as medidas básicas de diâmetro e altura. Por outro lado, com a inclusão de variáveis como densidade e classes de sítio o modelo apresenta melhor performance (Muhairwe et al., 1994).

Até então, modificações ao modelo de simples função foram sugeridas desde sua primeira aparição para explicar alguns problemas recorrentes como viés, multicolinearidade e autocorrelação (Newnham, 1992; Kozak, 1997, 1998, 2004), com a utilização de outras medidas como diâmetros acima do *dap* (Kozak, 1998), incorporar variáveis de copa (Newberry e Burkhardt, 1986; Burkhardt e Tomé, 2012) ou concepções mais complexas a partir de funções trigonométricas que possuem uma maior flexibilidade e são mais generalistas aos variados tamanhos das árvores de várias espécies (Thomas e Parresol, 1991; Bi, 2000). Por fim, a inclusão de interruptores numéricos que funcionam como funções de ligação que indicam a posição no tronco onde será dada a transição dos sólidos (Valentine e Gregoire, 2001; Westfall e Scott, 2010).

As funções trigonométricas possuem relação espacial e associação com as angulações naturais que constituem as mudanças dos sólidos e outros perfis geométricos. O primeiro modelo foi proposto por Thomas e Parresol (1991) que no mesmo trabalho se mostrou mais parcimonioso que o próprio modelo segmentado de Max e Burkhardt (1976) nas três espécies norte americanas avaliadas. O modelo ainda é capaz de obter integrais para cálculo de volume sem a necessidade de aplicação de métodos iterativos numéricos, como o de Newton-Raphson, desde que os ângulos sejam limitados. Entretanto, não possui maneira explícita para obtenção da altura comercial a partir de um diâmetro conhecido (Thomas e Parresol, 1991).

A grande vantagem em atribuir elementos trigonométricos e seus ângulos, parte do pressuposto evidente de que a forma da árvore está associada a aproximações dos três sólidos em revolução principais, mas que também capacita o modelo em tornar-se flexível o suficiente para ajuste em diversas espécies. Entretanto, Burkhardt e Tomé (2012) comentam que esse tipo de modelo possui a limitação de não possuir a propriedade de estimar o diâmetro nulo quando a altura da seção é igual a altura total ($d_i = 0$ quando $h_i = H$), diferentemente dos modelos de expoente-variável que possuem restrições para este fim.

Outro modelo trigonométrico é o de Bi (2000). Ele sugeriu uma função criada a partir de equações trigonométricas baseada nas questões levantadas por Kozak (1988, 1997) sobre multicolinearidade e autocorrelação de variáveis nos modelos. Essa função se mostrou suficientemente estável e flexível para árvores de diferentes tamanhos, em que os pontos de inflexão da equação se alteram em função do tamanho da árvore. Ainda, os erros obtidos foram de pouca relevância em todas as classes de tamanho das 25 espécies de eucalipto australiano.

Com interruptores numéricos, Valentine e Gregoire (2001) tentaram aliar as vantagens do modelo de expoente-variável e o expoente-forma onde os expoentes da expressão teriam valores guiados por funções que agem como interruptores (*switches*) para mudança de um sólido a outro no fuste. Os autores usaram o *dap* (1,37 m de altura) e a altura da base da copa como restrição ao modelo em separar a parte inferior, intermediária e superior, a partir da área basal em detrimento do *dap* que é convencionalmente aplicado em modelos de *taper*. A metodologia foi capaz de tornar os coeficientes das equações interpretáveis que parecem indicar a necessidade de maiores medições na parte neilóide do fuste, além de indicar facilmente se a altura da base da copa possui influência na forma em segmentos superiores do tronco.

Westfall e Scott (2010) em florestas norte-americanas, alteraram a metodologia e o modelo de Valentine e Gregoire (2001). As mudanças aplicadas foram em utilizar pontos de inflexão estimados a partir de alterações nas funções dos interruptores. Observaram que os modelos foram flexíveis o suficiente

para atender as diferentes formas, mesmo com os problemas relatados das estimativas na base do tronco. Observaram que um dos pontos de inflexão que determina a separação dos sólidos não necessariamente se encontra a partir do *dap* (1,37 m) conforme indicado por Valentine e Gregoire (2001). Os autores enfatizam que os modelos explicam uma realidade macro e sugerem cautela em seu uso para explicações regionalizadas.

Ambos trabalhos com interruptores possuem uma complexa sofisticação por utilizar técnicas de modelos não-lineares de efeitos-mistos. A complexidade desses modelos pode trazer maiores detalhes na forma das árvores de várias espécies e diminuir o viés problemático na região de maior deformidade no tronco, que é a base. O trabalho de Westfall e Scott (2010) possui caráter empírico já que as modificações sugeridas no modelo seguiram problemáticas que os próprios dados forneciam, embora as alterações na expressão apontem que os pontos de inflexão são mais propensos às características morfológicas das espécies em si. Detalhes sobre a construção dos modelos nos dois trabalhos podem ser vistos no Anexo A deste documento.

Os parâmetros dos modelos também podem detalhar os atributos das árvores das diferentes espécies de maneira interpretativa. O trabalho de Newberry e Burkhart (1986) já discutia maneiras de interpretação dos parâmetros a partir de generalizações do modelo de Ormerod (1973) com base nas associações de variáveis de copa, idade e sítio, o que mostra que essa preocupação não é recente. Outras possibilidades a partir dos parâmetros de funções probabilísticas conhecidas, como a função Weibull, podem ser utilizadas como interruptores (Valentine e Gregoire, 2001).

Os modelos de expoente-variável têm sido escolhidos devido a sua flexibilidade e possibilidade de inclusão de outras covariáveis, sobretudo na facilidade de modificação de sua expressão algébrica original. Além disto, seu ajuste é mais fácil por possuir capacidade de linearização, em alguns casos. São modelos em que procedimentos estatísticos mais simples podem ser utilizados, sem a necessidade de possuir condicionantes lógicas mais complexas para explicar cada parte da árvore, como os segmentados.

1.2.4 Modelos de *taper* e os fatores de influência sobre a forma

Alguns aspectos podem ser descritos sobre os fatores que possuem influência direta na forma, embora seu conceito ainda careça de amparo teórico consensual. Muitos deles se aderem no conceito de formação do tronco, que atribuem razões de causa e efeito às teorias hidráulicas e mecânicas, sobretudo nas ações externas a ele, como o vento (Assmann, 1970). Sob a ótica da modelagem, atributos da árvore e condições do povoamento são os principais aspectos descritos na literatura florestal no sentido de encontrar aplicações práticas a partir de conceitos teóricos sobre ela.

No sentido individual da árvore e seus atributos, a copa tem sido objeto de interesse em estudos de *taper* para entender como sua estrutura interfere na forma do tronco a partir de sua base até o topo (Valentine e Gregoire, 2001). Embora alguns trabalhos tenham fornecido informações exclusivamente quanto ao desempenho dos modelos que incorporam variáveis de copa, seu uso ainda não possui a justificativa necessária dado baixos níveis de precisão e por ser uma variável de difícil obtenção e alto custo em campo (Burkhart e Tomé, 2012). Por outro lado, esse formato de análise é considerado controverso porque se baseia unicamente em significâncias estatísticas e não como um atributo essencial da árvore que trará significado biológico a esses modelos (Weiskittel et al., 2011).

Como alternativa à atributos de copa, variáveis a nível de povoamento possuem significado mais prático que teórico. Acredita-se que o desenvolvimento da copa está intimamente ligado às mudanças das condições de sítio, bem como práticas silviculturais. A densidade de plantio ou desbaste neste caso têm sido definidas nos modelos e sua viabilidade comprovada nos estudos de Sharma e Zhang (2004), Sharma e Parton (2009) e recentemente em Sharma (2020). Mais detalhes destes trabalhos serão abordados nos tópicos subsequentes.

Diante das variações naturais das florestas, modelos mais flexíveis foram criados a fim de torná-los mais generalistas (Bi, 2000). Embora suas expressões tenham sido satisfatórias no uso em diferentes espécies, ainda assim os parâmetros destes modelos não possuíram significado biológico sobre a forma, sobretudo suficientemente generalistas à essas variações. Neste sentido, Gomat et al. (2011) em clones de *Eucalyptus* na África, trabalharam com uma equação global que fosse sensível ao material genético utilizando variáveis que traz significado biológico a partir de atributos simples como idade, diâmetro e altura.

No Brasil, mais recentemente, este apelo biológico nas equações de *taper* tem sido evidenciado em plantios comerciais de *Acacia mearnsii* De Wild. no estado do Paraná (Sanquetta et al., 2020). Isto indica que têm se tornado comum a inclusão do efeito de tratamentos silviculturais, como desbaste e densidade de plantio, sobretudo a preocupação em tornar o modelo mais explicativo às variações de comportamento em termos de competição interespecíficas (Burkhardt e Tomé, 2012).

1.2.5 Sofisticações e alternativas nos modelos de *taper*

Alternativas tanto na aplicação quanto modificações foram sugeridas nas últimas décadas com o objetivo de aprimorar o desempenho desses modelos e contornar os principais problemas de multicolinearidade e autocorrelação. Dentre elas estão o uso de variáveis adicionais além das convencionais diâmetro e altura total; modificações algébricas dos modelos e torná-los compatíveis na estimativa dos diâmetros e cálculo de volume e; uso de métodos estatísticos como a generalização de modelos (GAMs e GLS), de efeitos-mistos, sobretudo aqueles que são baseados em elementos computacionais a partir de algoritmos ou vias semi-paramétricas (Lappi, 2006) e não paramétricas (Scolforo et al., 2018).

O que tem se tornado consensual nos trabalhos mais recentes é o uso de técnicas com efeitos mistos, e isto inclui considerar a aplicação de funções para contornar o efeito da correlação entre as medidas tomadas no mesmo tronco, bem como uma função para a variância quando os dados são naturalmente heteroscedásticos. Uma revisão mais detalhada sobre esta afirmação e a evolução dos modelos de *taper* é melhor discutida em McTague e Weiskittel (2021).

Para efeito prático, neste tópico serão abordados somente: variáveis adicionais ou auxiliares a partir de atributos do tronco ou da árvore; conceitos consagrados na modelagem como a compatibilidade de modelos de *taper* e de volume; modificações algébricas de modelos já existentes e; incorporação de variáveis de povoamento. Um outro tópico logo em seguida será destinado exclusivamente sobre imposições aos parâmetros, muitas vezes usadas para localização desses modelos. A localização desses modelos tem se tornado uma técnica importante, principalmente quando dados do inventário são atualizados com uma certa frequência. Portanto, optou-se por detalhar o procedimento no Anexo A.

As variáveis adicionais consistem no uso de outras medidas de diâmetros acima do *dap* (Kozak, 1998), variáveis como índice de sítio, idade, classes de copa bem como o comprimento e razão da copa (Muhairwe et al., 1994), pela separação por classes de copa apenas (Long et al., 1981; Valenti e Cao, 1986; Muhairwe et al., 1994), sobretudo os principais atributos dela como comprimento, dimensão, diâmetro, além da razão de copa (Leites e Robinson, 2004).

Do ponto de vista teórico, a inclusão de outras variáveis a serem mensuradas nas rotinas florestais parecem interessantes por demonstrar forte relação com os principais indicadores quantitativos da floresta como volume e biomassa. Na prática, a adição de algumas delas, a exemplo de mais diâmetros além do *dap*, não mostraram eficiência esperada que justifique seu uso (Kozak, 1998) e, tornam-se ainda mais injustificáveis em outras variáveis como índice de sítio e idade, por não serem atributos da árvore (Muhairwe et al., 1994), o que não ocorre com a inclusão de variáveis de copa (Jiang e Liu, 2011).

Os modelos mais simples que se tem conhecimento e que possuem relevância teórica e prática, foram o modelo parabólico de Kozak et al. (1969) e o de Ormerod (1973). O modelo de Kozak foi assim

descrito:

$$\frac{d_i^2}{D^2} = \beta_0 + \beta_1 \frac{h_i}{H} + \beta_2 \frac{h_i^2}{H^2} + \varepsilon_i$$

e; o de Ormerod,

$$d_i = \alpha D \left(\frac{H - h_i}{H - 1,3} \right)^\beta + \varepsilon_i$$

Na última década, Kozak (2004) sugeriu modificações aos modelos publicados por ele em 1988 e 1994 (este último publicado Kozak (1997)). As propriedades do modelo de 1988 foram as seguintes: 1) $d_i = 0$ quando a $h_i/H = 1$, ou seja, o diâmetro será nulo quando atingir o topo da árvore; 2) $d_i = D_{sc}$ (D_{sc} - diâmetro sem casca estimado) quando $h_i/H = p$, em que p é a razão entre a altura da inflexão e a altura total; 3) a direção do modelo mudará de sentido quando a restrição $h_i/H = p$ for estabelecida (Kozak, 1988). O modelo de 1988, chamado de expoente-variável, teve a seguinte expressão

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} \alpha_2^D X_i^{\beta_1 z_i^2 + \beta_2 \ln(z_i + 0,001) + \beta_3 \sqrt{z_i} + \beta_4 e_i^z + \beta_5 (D/H)} + \varepsilon_i$$

o de 1994 foi assim descrito

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} \alpha_2^D X_i^{\beta_0 + \beta_1 z_i^{1/4} + \beta_2 z_i^{1/3} + \beta_3 z_i^{1/2} + \beta_4 \arcsin(Q_i) + \beta_5 \left[\frac{1}{H + z_i} \right]} + \varepsilon_i$$

em que, D é o diâmetro a altura do peito a 1,3m de altura; X_i é a expressão $[1 - (h_i/H)^{1/2}]/(1 - p^{1/2})$; Q_i é $[1 - (h_i/H)^{1/2}]$; H a altura total (m); h_i é a altura na seção i do tronco; d_i é o diâmetro sem casca estimado na altura h_i ; p é a altura relativa como restrição ao modelo (ponto de inflexão); z_i é a altura relativa (h_i/H); α_i e β_i são os parâmetros dos modelos; a expressão $\alpha_0 D^{\alpha_1} \alpha_2^D$ uma função não linear que expressa o diâmetro sem casca no ponto de inflexão em função do dap com casca.

O modelo de 1994, foi sugerido como alternativa para torná-lo compatível e melhorar a eficiência nas estimativas de volume (Kozak, 1997). Além das diferenças na concepção dos modelos, o ponto crucial a ser debatido aqui será o critério de restrição p^5 baseado na espécie e sua altura relativa. Há necessidade de análise empírica no sentido de obter esse parâmetro (Fang et al., 2000) caso não haja informações sobre a espécie.

Isso indica que a parametrização desses pontos de inflexão é convencionalizada ao perfil fornecido pela espécie em questão e exige cautela em situações às quais eles não foram estimados. Assim, o uso da altura do dap como ponto de referência para determinar os valores de restrição a esses modelos (Newnham, 1992) pode possuir caráter menos arbitrário por ser a altura convencionalmente aceita nas relações alométricas.

Dois novos modelos foram então elaborados nos anos de 2001 e 2002 que alteram o modelo de 1988. O modelo de 2002 obteve melhor desempenho para as variáveis diâmetro sem casca e volume, mas na estimativa da altura comercial o modelo de 2001 foi mais eficiente (Kozak, 2004). Este modelo tem a seguinte expressão,

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 z_i^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0,1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_1} + \beta_6 X_i} + \varepsilon_i$$

com a diferença no termo da base da expressão X_i , que agora significa $[1 - (h_i/H)^{1/3}]/(1 - p^{1/3})$; Q_i agora é $[1 - (h_i/H)^{1/3}]$ e p a relação $1,3/H$. Os demais termos da expressão já foram descritos anteriormente. Essa alteração do modelo de 1988, maneira encontrada para comportar às diversas condições

⁵ Para o modelo de 1988, o valor de p pode ser de 0,1 a 0,3 da altura total da árvore a depender da espécie (Kozak, 2004). Kozak (1997) sugere um valor de 0,2 no modelo de 1988 para espécies de florestas canadenses. Nos modelos de 1994 e 2001, o valor de 0,01 é fixo. Para o modelo de 2002, o valor de p passa a ser uma razão fixa entre a altura do dap e altura total ($1,3/H$), similar ao que foi realizado por Newnham (1992).

florestais encontradas, foi realizada por meio de modificações dos: i) termos nos expoentes; ii) da base (X_i) do expoente; iii) o multiplicador da base que expressa a estimativa do diâmetro sem casca a partir do *dap* com casca (ex.: $\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$ neste último) (Kozak, 2004).

Outra abordagem foi proposta por Sharma e Oderwald (2001) utilizando o modelo simples conhecido como modelo de *variável-expoente adimensionalmente compatível* para *Pinus taeda*. Os autores conceberam esse modelo de *taper* para ser compatível com o cálculo de volume, e sugeriram métodos analíticos a partir de conceitos teóricos sobre a relação adimensional do diâmetro, altura e volume. O modelo foi assim descrito,

$$d_i^2 = D^2 \left(\frac{h_i}{h_D} \right)^{2-\gamma} \left(\frac{H-h_i}{H-h_D} \right) + \varepsilon_i$$

em que, h_i é a altura da seção; h_D é a altura do *dap* (1,37m); γ é o parâmetro adimensional a ser estimado ou parâmetro de forma.

Diante desta formulação do modelo anterior, as modificações propostas por Sharma e Zhang (2004) ao modelo foram as seguintes:

$$\left(\frac{d_i}{D} \right)^2 = \beta_0 \left(\frac{h_i}{h_D} \right)^{2-f(z)} \left(\frac{H-h_i}{H-h_D} \right) + \varepsilon_i$$

em que, $f(z)$ expressa o parâmetro a partir de uma função quadrática ($\beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2$) em que z é h_i/H . Elencaram também o mesmo modelo mas com a inclusão do efeito da densidade na expressão do parâmetro [$\beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \beta_4 g(N)$], em que $g(N)$ é igual a $1/N$, onde N é o número de árvores por hectare. Mesmo que o parâmetro seja calculado por uma função quadrática, ele ainda permanece adimensional. A constante β_0 é opcional e serve para obter o diâmetro sem casca a partir do diâmetro com casca. É calculada por D_{sc}^2/D^2 em que D_{sc} é o diâmetro a altura do peito sem casca. Em comparação aos modelos segmentados, o modelo se mostrou menos enviesado em pelo menos uma das espécies estudadas, onde o efeito da densidade de povoamento (N) obteve influência na equação.

Na mesma direção, Sharma e Parton (2009) utilizaram o conceito apresentado acima e expandiram as possibilidades de representação do efeito da densidade no modelo com as mesmas espécies. A fim de manter o caráter adimensional as variáveis de povoamento também foram adimensionais. Testaram as possibilidades de inclusão do: a) diâmetro médio quadrático (Dg/D), já que ele é representado pela área basal por hectare e o número de árvores por hectare (N); b) área basal (AB/D^2); c) raiz da área basal (\sqrt{AB}/D); d) número de árvores por hectare (N). Em análises exploratórias preliminares, a raiz da área basal se mostrou mais fiel em representar o efeito da densidade (\sqrt{AB}/D):

$$\frac{d_i}{D} = \beta_0 \left(\frac{h_i}{h_D} \right)^{\beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \beta_4 \frac{\sqrt{AB}}{D}} \left(\frac{H-h_i}{H-h_D} \right) + \varepsilon_i$$

Recentemente, Sharma (2020) aplicou o mesmo modelo para *Pinus resinosa* no Canadá e examinou a influência das mesmas variáveis bem como outra variável adimensional que combina duas variáveis de densidade ($\sqrt{AB/N}/D$) para diâmetros com e sem casca. Observou que esta última é a mais adequada em explicar a variação dos dados da espécie estudada. Neste caso, para que o aspecto adimensional possa ser contemplado, as unidades de medida adotadas devem ser equivalentes. Ou seja, a área basal (AB) é geralmente calculada em metros quadrados enquanto que o *dap* em centímetros. Assim, sugere-se que o termo $\sqrt{AB/N}$ seja multiplicado por um fator de conversão ($\lambda = 100$).

No Brasil, em plantios de Acácia (*Acacia mearnsii*) no estado do Paraná, o mesmo modelo foi modificado para incluir variáveis de povoamento com significado biológico (Sanquetta et al., 2020). Os autores incluíram dois tipos de variáveis: 1) variáveis a nível de povoamento como a altura dominante de

cada parcela e índice de competição independente da distância; 2) variáveis a nível de árvore individual, como a razão de copa e a posição hierárquica da árvore. Assim, o modelo final foi descrito da seguinte maneira:

$$d_i^2 = D^2 \left(\frac{h_i}{h_D} \right)^{(\beta_0 + \alpha_0) + \beta_1 H_{dom} + \beta_2 \frac{RS}{H - h_i} + \beta_3 THP \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right) + \varepsilon_i$$

em que, β_0 , β_1 , β_2 são os parâmetros fixos do modelo; α_0 é o parâmetro aleatório baseado nas árvores aninhadas nas parcelas; H_{dom} é a altura dominante da parcela; RS é o índice de espaçamento relativo: $\frac{\sqrt{10000/N}}{H_{dom}}$; THP é a posição hierárquica da árvore, que segue a expressão $\frac{D}{Dg}$ onde Dg é o diâmetro médio quadrático da parcela. Recentemente, tanto o RS quanto o THP foram incorporados ao modelo de expoente-variável de Kozak (2004) para espécies de *Eucalyptus* também no Brasil (McTague et al., 2020).

1.2.6 Imposições aos estimadores dos modelos

Quando a expressão algébrica básica que explica o perfil do fuste não possui as propriedades esperadas para elaboração do modelo de *taper*, algumas condições aos parâmetros podem ser impostas para obter estimativas menos enviesadas nas partes mais críticas dele. Um exemplo simples é o modelo de Kozak et al. (1969) que, por ser parabólico, possui a problemática de não estabelecer algumas relações entre os diâmetros nas alturas relativas do tronco, principalmente na parte superior. Primeiro, os diâmetros não são monotonicamente distribuídos ao longo do fuste; segundo que não contempla outras duas principais propriedades básicas: $d_i = D$ quando $h_i = 1,3m$ e; $d_i = 0$ quando $h_i = H$ (Batista et al., 2014). Assim, a maneira de contornar este impasse é criar imposições ao modelo a partir da estimação dos parâmetros. Então, considerando que $d_i = D$ quando $h_i = 1,3m$, podemos atribuir os seguintes procedimentos e a primeira imposição ao modelo de Kozak (Batista et al., 2014):

$$\frac{d_i^2}{D^2} = \beta_0 + \beta_1 \frac{h_i}{H} + \beta_2 \frac{h_i^2}{H^2}$$

e para obter o diâmetro em qualquer altura relativa isolamos o termo d_i na equação:

$$d_i = D \sqrt{\beta_0 + \beta_1 \frac{h_i}{H} + \beta_2 \frac{h_i^2}{H^2}}$$

Assim, para que d_i seja igual ao dap na altura 1,3m o modelo deverá cumprir a seguinte condição:

$$\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1,3}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{1,3^2}{H^2} \right) = 1$$

Como a relação das alturas são adimensionais e, portanto, condicionadas ao tamanho total de cada árvore, o processo não teria viabilidade explícita e obrigaria a ter uma imposição diferente para cada uma delas. Já a terceira condição ($d_i = 0$ quando $h_i = H$), a seguir, pode ser imposta a partir do método de estimação de parâmetros, o que exige procedimentos mais complexos que a regressão linear:

$$\beta_0 + \beta_1 \frac{h_i}{H} + \beta_2 \frac{h_i^2}{H^2} = 0 \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$$

Portanto, o modelo de Kozak et al. (1969) será descrito com a perda do intercepto o que altera o modelo original da seguinte maneira:

$$\frac{d_i^2}{D^2} = \beta_1 \frac{h_i}{H} + \beta_2 \left(\frac{h_i^2}{H^2} - 1 \right) + \varepsilon_i$$

Em outros modelos as imposições já estão implícitas em sua concepção final. Para obter o modelo dimensionalmente compatível com o volume e forma, Sharma e Oderwald (2001) derivaram um modelo básico a partir de imposições criadas aos parâmetros dele para estabelecer as propriedades esperadas. Eles observaram que a expressão básica que melhor comporta grande parte das espécies avaliadas foi esta:

$$d_i^2 = \alpha D^{\beta_1} \left(1 - \frac{h_i}{H}\right) h_i^{\beta_2}$$

em que, β_1 e β_2 são os parâmetros adimensionais e o termo adimensional $\left(1 - \frac{h_i}{H}\right)$ certifica ao modelo a condição $d_i = 0$ quando $h_i = H$. Neste sentido, a equação pode ser rearranjada a partir da imposição $\beta_1 + \beta_2 = 2$ e, portanto, o parâmetro β_2 pode ser substituído por $2 - \beta_1$. Ao aplicar a segunda imposição $h_i = h_D$ quando $d_i = D$, o parâmetro α se torna agora uma função com a expressão $\left(\frac{\frac{D}{h_D}}{1 - \frac{h_D}{H}}\right)$. Como resultado da primeira imposição teremos a expressão:

$$d_i^2 = \alpha D^{\beta_1} \left(1 - \frac{h_i}{H}\right) h_i^{2-\beta_1}$$

Ao aplicar a segunda imposição e substituir o valor de α na expressão acima, teremos o modelo final:

$$d_i^2 = D^2 \left(\frac{h_i}{h_D}\right)^{2-\beta_1} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D}\right) + \varepsilon_i$$

Outras maneiras de imposições com modelos de taper mais complexos como os modelos segmentados foram realizadas (Demaerschalk e Kozak, 1977). Outra possibilidade é na obtenção do volume total e comercial com equações compatíveis com o volume para quaisquer altura comercial (Clutter, 1980; McTague e Bailey, 1987). Este último procedimento tem como enfoque obter modelos compatíveis com o volume, em qualquer altura da árvore, a partir de modelos que comportam razões de volume nas alturas relativas, sendo que inúmeras condições podem ser aplicadas para atender as expectativas esperadas (Lynch et al., 2017). Dentre as condições, a mais comum é definir que o volume comercial somente será igual ao volume total quando um dado diâmetro na parte superior do tronco (geralmente algum diâmetro mínimo desejado para algum subproduto) for igual a zero ou caso a altura comercial seja igual a altura total (McTague e Stansfield, 1988).

Outras condições como a altura de Pressler, o diâmetro na altura relativa para o fator de forma natural de Hohenadl bem como para obtenção do quociente de forma de Girard podem ser impostas a esses modelos de maneira semelhante. Neste sentido, McTague (1992) ao utilizar a altura de Pressler e o diâmetro a 10% da árvore, referente ao fator de forma natural de Hohenadl, obteve as seguintes expressões para obtenção de cada uma delas. Dois modelos que se baseiam nas propriedades ideais das funções de *taper* foram propostos. O primeiro foi usado para obtenção da altura comercial:

$$\left[\frac{(H - H_c)}{H}\right] = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{d_c}{D}\right)^2 + \beta_2 D^2 H + \varepsilon$$

O segundo, considerado modelo de *taper* para estimar o diâmetro a qualquer altura comercial foi assim designado:

$$\left(\frac{d_c}{D}\right)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left[\frac{(H - H_c)}{H}\right] + \alpha_2 D^2 H + \varepsilon$$

Nas condições florestais estudadas, convencionou-se que a altura de Pressler está localizada a 75% do tronco a partir da base (ou 25% a partir do topo). Portanto, uma condição lógica ao parâmetro do

intercepto (β_0) foi então imposta a ele, considerando que $d_c = 0,5D$ quando a altura comercial $H_c = h_{pr}$, em que d_c é o diâmetro na altura comercial H_c e; h_{pr} é a altura de Pressler (altura do tronco em que o diâmetro é metade do dap). A expressão final⁶ para estimar a altura de Pressler fica assim descrita:

$$\hat{h}_{pr} = H_c + \hat{\beta}_1 \left[\left(\frac{d_c}{D} \right)^2 - 0,25 \right] H + \varepsilon$$

Para estimar o diâmetro na altura a 10% do tronco a partir da base (90% a partir do topo) pelo método de Hohenadl, o mesmo procedimento de condição lógica anterior, agora aplicado ao parâmetro α_0 também foi imposto considerando agora que $H_c = 0,1H$ e $d_c^2 = d_{0,9}^2$. Obtém-se o seguinte modelo final:

$$\hat{d}_{0,9}^2 = d_c^2 + \hat{\beta}_1 \left[0,1 - \frac{H_c}{H} \right] D^2 + \varepsilon$$

Além disto, o mesmo trabalho ainda verificou se as equações de volume comparadas possuíam homogeneidade de variância e se havia necessidade de aplicar alguma função de proporcionalidade, ou pesos, para contornar este impasse. O procedimento pode ser entendido aqui como análogo para resíduos que são naturalmente heterocedásticos, ou seja, a variância da variável predita aumenta em função de alguma variável preditora. Em estudos florestais, este tipo de evidência é comum devido a inúmeros fatores que podem interferir na variação desses dados, bem como não possuir padrões explícitos que comportem todas as premissas obrigatórias da inferência frequentista.

Outro procedimento é obter equações para diferentes locais quando possui uma equação de *taper* já ajustada. O método não é necessariamente uma imposição ao parâmetro, semelhante ao descrito anteriormente, mas visa obter equações para uma árvore de interesse. Isto é importante quando as estimativas do inventário mudam em função do material genético, desbaste ou local da floresta, além de melhorar as estimativas de volume (Cao e Wang, 2015; McTague et al., 2020). O método se baseia em rearranjar a equação para obter parâmetros individualizados para cada árvore, a partir de um diâmetro a uma altura comercial de interesse, com base nas características do subproduto da madeira ao qual se pretende obter. Conforme mencionado por McTague et al. (2020) essa altura é arbitrária ou obtida ao fazer análises exploratórias dos dados. Por outro lado, pode ser obtida quando já se possui alguma informação a priori sobre a espécie ou povoamento florestal. Este procedimento é melhor discutido no Anexo A a partir dos modelos segmentado e de expoente-variável.

1.3 Objetivos e estrutura da tese

O objetivo desta tese foi verificar se os modelos de forma são expressões capazes de detectar o efeito do material genético e densidade de plantio a partir de atributos da árvore como as medidas de forma, de copa e características do povoamento, em uma floresta de *Eucalyptus* num contexto experimental. A tese foi estruturada em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo foi apresentada a introdução geral e uma breve revisão de literatura contextualizando a evolução das principais categorias de modelos de *taper*, suas aplicações e limitações, sobretudo o conceito das principais medidas de forma que serão aplicadas nos capítulos subsequentes. Nos capítulos 2 ao 5 foi utilizada a mesma base de dados de um experimento com seis clones de *Eucalyptus* spp. e três espaçamentos, em delineamento em esquema fatorial. O segundo capítulo, de caráter exploratório, descreve a metodologia de como foram extraídas as medidas de forma de Hohenadl, Pressler e Hossfeld, onde foram avaliadas diferentes categorias de modelos de *taper* a fim de verificar se permitem boas estimativas dessas medidas, sem considerar o efeito do material genético e espaçamento num primeiro momento. No terceiro capítulo, as mesmas medidas de forma foram

⁶ As deduções dessa fórmula para melhor entender como o autor encontrou os modelos finais, podem ser vistas no Apêndice ao final deste documento. Este detalhe não consta no artigo supracitado.

então avaliadas como referenciais interpretativos dos efeitos do material genético e espaçamento com base no perfil médio gerado pelas equações de *taper*. No quarto capítulo, variáveis de copa, de povoamento e as próprias medidas forma, foram incorporadas aos modelos segmentado e expoente-variável para verificar qual delas consegue substituir o efeito das duas fontes de variação principais: material genético e espaçamento. Ainda no mesmo capítulo é apresentado a categoria de modelo com interruptores numéricos até então não aplicado em florestas do gênero, onde utiliza a altura da base da copa e a altura de Pressler como posições do tronco para a mudança dos sólidos. Nas considerações finais, como quinto capítulo, são discutidas as principais vantagens e limitações dos resultados encontrados. É apresentada uma possível solução para obter a altura de Pressler quando não mensurada, além de uma nova abordagem que utiliza a função Weibull 2-parâmetros no modelo com interruptores numéricos para o mesmo referencial do tronco.

Referências

- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield study*. Pergamun, Oxford, England.
- Batista, J. L., Couto, H. d., e Silva Filho, D. d. (2014). *Quantificação de recursos florestais: árvores, arvoredos e florestas*. Oficina de Textos, São Paulo.
- Bi, H. (2000). Trigonometric variable-form taper equations for australian eucalypts. *Forest Science*, 46(3):397–409.
- Bruce, D., Curtis, R. O., e Vancoevering, C. (1968). Development of a system of taper and volume tables for red alder. *Forest Science*, 14(3):339–350.
- Burkhart, H. E. e Tomé, M. (2012). *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer, New York, 1st. edition.
- Burkhart, H. E. e Walton, S. B. (1985). Incorporating crown ratio into taper equations for loblolly pine trees. *Forest Science*, 31(2):478–484.
- Cao, Q. V., Burkhart, H. E., e Max, T. A. (1980). Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science*, 26(1):71–80.
- Cao, Q. V. e Wang, J. (2015). Evaluation of methods for calibrating a tree taper equation. *Forest Science*, 61(2):213–219.
- Cerqueira, C. L., Môra, R., e Tonini, H. (2017). Forma do fuste de eucalipto em diferentes arranjos de plantio e espaçamentos. *Advances in Forestry Science*, 4(3):137–141.
- Clutter, J. L. (1980). Development of taper functions from variable-top merchantable volume equations. *Forest Science*, 26(1):117–120.
- Da Silva, J. A. A., Borders, B. E., e Brister, G. H. (1994). Estimating tree volume using a new form factor. *The Commonwealth Forestry Review*, 71(01):14–17.
- Demaerschalk, J. e Kozak, A. (1977). The whole-bole system: a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. *Canadian Journal of Forest Research*, 7(3):488–497.
- Ducey, M. J. (2009). Predicting crown size and shape from simple stand variables. *Journal of Sustainable Forestry*, 28(1-2):5–21.
- Ducey, M. J. e Williams, M. S. (2011). Comparison of hossfeld's method and two modern methods for volume estimation of standing trees. *Western Journal of Applied Forestry*, 26(1):19–23.
- Fang, Z., Borders, B. E., e Bailey, R. L. (2000). Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46(1):1–12.
- Figueiredo-Filho, A., Borders, B. E., e Hitch, K. L. (1996). Taper equations for pinus taeda plantations in southern brazil. *Forest Ecology and Management*, 83(1-2):39–46.
- Figueiredo Filho, A., Kohler, S. V., Felde, J. L., e Dias, A. N. (2014). Dinâmica do afilamento do tronco e da produção de madeira em plantios de araucaria angustifolia. *Cerne*, 20(4):595–603.
- Fortin, M., Schneider, R., e Saucier, J.-P. (2013). Volume and error variance estimation using integrated stem taper models. *Forest Science*, 59(3):345–358.
- Gomat, H. Y., Deleporte, P., Moukini, R., Mialounguila, G., Ognouabi, N., Saya, A. R., Vigneron, P., e Saint-Andre, L. (2011). What factors influence the stem taper of eucalyptus: growth, environmental conditions, or genetics? *Annals of forest science*, 68(1):109–120.

- Goodwin, A. N. (2009). A cubic tree taper model. *Australian Forestry*, 72(2):87–98.
- Goudiaby, V., Brais, S., Berninger, F., e Schneider, R. (2012). Vertical patterns in specific volume increment along stems of dominant jack pine (*pinus banksiana*) and black spruce (*picea mariana*) after thinning. *Canadian Journal of Forest Research*, 42(4):733–748.
- Gregoire, T. G., Schabenberger, O., e Kong, F. (2000). Prediction from an integrated regression equation: a forestry application. *Biometrics*, 56(2):414–419.
- Inoue, A., Sato, M., e Shima, H. (2021). A new taper index based on form-factor: application to three bamboo species (*phylostachys* spp.). *European Journal of Forest Research*, pages 1–10.
- Jiang, L.-c. e Liu, R.-l. (2011). Segmented taper equations with crown ratio and stand density for dahurian larch (*larix gmelinii*) in northeastern china. *Journal of Forestry research*, 22(3):347.
- Kershaw Jr, J. A., Ducey, M. J., Beers, T. W., e Husch, B. (2016). *Forest mensuration*. John Wiley & Sons, New York.
- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11):1363–1368.
- Kozak, A. (1997). Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Canadian Journal of Forest Research*, 27(5):619–629.
- Kozak, A. (1998). Effects of upper stem measurements on the predictive ability of a variable-exponent taper equation. *Canadian journal of forest research*, 28(7):1078–1083.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4):507–515.
- Kozak, A., Munro, D., e Smith, J. (1969). Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*, 45(4):278–283.
- Lappi, J. (2006). A multivariate, nonparametric stem-curve prediction method. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(4):1017–1027.
- Larson, P. R. (1963). Stem form development of forest trees. *Forest science*, 9(suppl_2):a0001–42.
- Leites, L. P. e Robinson, A. P. (2004). Improving taper equations of loblolly pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. *Forest Science*, 50(2):204–212.
- Long, J. N., Smith, F. W., e Scott, D. R. (1981). The role of douglas-fir stem sapwood and heartwood in the mechanical and physiological support of crowns and development of stem form. *Canadian Journal of Forest Research*, 11(3):459–464.
- Lynch, T. B., Zhao, D., Harges, W., e McTague, J. P. (2017). Deriving compatible taper functions from volume ratio equations based on upper-stem height. *Canadian Journal of Forest Research*, 47(10):1424–1431.
- Max, T. A. e Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22(3):283–289.
- McTague, J. e Stansfield, W. (1988). Total and merchantable volume equations and taper functions for southwestern ponderosa pine. *Western Journal of Applied Forestry*, 3(4):123–125.
- McTague, J. P. (1992). Enhanced estimates of total volume with any single upper-stem measurement. *Forest ecology and management*, 48(1-2):55–67.

- McTague, J. P. e Bailey, R. L. (1987). Simultaneous total and merchantable volume equations and a compatible taper function for loblolly pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 17(1):87–92.
- McTague, J. P., Scolforo, H. F., e Scolforo, J. R. S. (2020). Early volume formulas, taper, implicit volume ratio, and auxiliary information: A new system of volume equations invariant to silvicultural practices, site, and genetic pedigree. *Forest ecology and management*, 475(1):1.
- McTague, J. P. e Weiskittel, A. (2021). Evolution, history, and use of stem taper equations: a review of their development, application, and implementation. *Canadian Journal of Forest Research*, 51(2):210–235.
- Muhairwe, C. K. (1994). Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(9):1904–1913.
- Muhairwe, C. K., LeMay, V. M., e Kozak, A. (1994). Effects of adding tree, stand, and site variables to kozak’s variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(2):252–259.
- Müller, I., Finger, C. A. G., e Schneider, P. R. (2005). Forma de tronco e sortimentos de madeira de eucalyptus grandis hill ex maiden, na região sudeste do estado do rio grande do sul. *Ciência Florestal*, 15(3):293–305.
- Narmontas, M., Rupšys, P., e Petrauskas, E. (2020). Models for tree taper form: the gompertz and vasicek diffusion processes framework. *Symmetry*, 12(1):80.
- Newberry, J. D. e Burkhart, H. E. (1986). Variable-form stem profile models for loblolly pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(1):109–114.
- Newnham, R. (1992). Variable-form taper functions for four alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22(2):210–223.
- Ormerod, D. (1973). A simple bole model. *The Forestry Chronicle*, 49(3):136–138.
- Petrauskas, E., Rupšys, P., Narmontas, M., Aleinikovas, M., Beniušienė, L., e Šilinskas, B. (2020). Stochastic models to qualify stem tapers. *Algorithms*, 13(4):94.
- Prodan, M., Peters, R., Cox, F., e Real, P. (1997). *Mensura Forestal. GTZ/IICA*. Serie Investigación y Educación en Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica.
- Reed, D. D. e Byrne, J. C. (1985). A simple, variable form volume estimation system. *The Forestry Chronicle*, 61(2):87–90.
- Rustagi, K. P. e Loveless Jr, R. S. (1991b). Improved cubic volume prediction using a new measure of form factor. *Forest ecology and management*, 40(1-2):1–11.
- Sanquetta, M. N. I., McTague, J. P., Ferraco Scolforo, H., Behling, A., Sanquetta, C. R., e Schmidt, L. N. (2020). What factors should be accounted for when developing a generalized taper function for black wattle trees? *Canadian Journal of Forest Research*, 50(11):1113–1123.
- Schneider, R. (2018). Understanding the factors influencing stem form with modelling tools. In *Progress in Botany Vol. 80*, pages 295–316. Springer.
- Schneider, R., Franceschini, T., Fortin, M., e Saucier, J.-P. (2018). Climate-induced changes in the stem form of 5 north american tree species. *Forest Ecology and Management*, 427:446–455.

- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Raimundo, M. R., Weiskittel, A., Carrero, O., e Scolforo, J. R. S. (2018). Comparison of taper functions applied to eucalypts of varying genetics in brazil: Application and evaluation of the penalized mixed spline approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 48(5):568–580.
- Sharma, M. (2020). Incorporating stand density effects in modeling the taper of red pine plantations. *Canadian Journal of Forest Research*, 50(8):751–759.
- Sharma, M. e Burkhart, H. E. (2003). Selecting a level of conditioning for the segmented polynomial taper equation. *Forest science*, 49(2):324–330.
- Sharma, M. e Oderwald, R. G. (2001). Dimensionally compatible volume and taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(5):797–803.
- Sharma, M. e Parton, J. (2009). Modeling stand density effects on taper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis. *Forest science*, 55(3):268–282.
- Sharma, M. e Zhang, S. (2004). Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern canada. *Forest ecology and management*, 198(1-3):39–53.
- Tasissa, G. e Burkhart, H. E. (1998). An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. *Forest ecology and management*, 103(1):87–101.
- Thomas, C. E. e Parresol, B. R. (1991). Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 21(7):1132–1137.
- Trincado, G. e Burkhart, H. E. (2006). A generalized approach for modeling and localizing stem profile curves. *Forest Science*, 52(6):670–682.
- Valenti, M. A. e Cao, Q. V. (1986). Use of crown ratio to improve loblolly pine taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(5):1141–1145.
- Valentine, H. e Gregoire, T. (2001). A switching model of bole taper. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(8):1400–1409.
- Valinger, E. (1992). Effects of wind sway on stem form and crown development of scots pine (*pinus sylvestris* l.). *Australian Forestry*, 55(1-4):15–21.
- Weiskittel, A. R., Hann, D. W., Kershaw Jr, J. A., e Vanclay, J. K. (2011). *Forest growth and yield modeling*. John Wiley & Sons.
- West, P. W. (2015). *Tree and forest measurement*. John Wiley & Sons, New York.
- Westfall, J. A. e Scott, C. T. (2010). Taper models for commercial tree species in the northeastern united states. *Forest Science*, 56(6):515–528.

2 ÍNDICES DE QUALIDADE DE FORMA SOB A ÓTICA DOS DIFERENTES TIPOS DE MODELOS DE *TAPER*

Resumo

A forma do tronco é o principal atributo da árvore para estimar o volume de madeira. Os modelos de *taper* são expressões que descrevem o perfil teórico do tronco e indiretamente sua forma. São usados principalmente para obter a projeção de madeira nos diversos sortimentos baseados em diâmetros ou alturas comerciais. As medidas de forma, que geralmente são razões de diâmetros, volumes ou alturas específicas do tronco, podem ser usadas como indicadores de forma. Portanto, o presente capítulo tem como objetivo principal avaliar diferentes categorias de modelos de *taper* e verificar se os coeficientes de suas funções são capazes de fornecer estimativas confiáveis das medidas de forma de Pressler, Hossfeld e Hohenadl. O estudo foi conduzido na Estação Experimental de Ciências Florestais, no município de Itatinga-SP, em experimento em esquema fatorial com seis clones de *Eucalyptus spp.*, três espaçamentos e seis blocos. Diferentes categorias de modelos de *taper* foram avaliadas. Os modelos de simples função foram o parabólico, trigonométrico e o adimensionalmente compatível. Das categorias mais flexíveis foram os modelos segmentado e de expoente-variável. Os modelos foram ajustados pela máxima verossimilhança em sua estrutura homoscedástica e heteroscedástica. Para seleção da melhor estrutura, foi usado o critério de Akaike quando estes possuíam a mesma variável resposta. Tanto as estimativas dos diâmetros nas diferentes alturas quanto as medidas de forma, foram avaliadas pela raiz do erro quadrado médio, o erro médio e absoluto, ambos em percentagem, bem como por gráficos de resíduos. O modelo parabólico e trigonométrico apresentaram equivalência ao segmentado somente nas estimativas da altura de Pressler e Hossfeld. O modelo adimensionalmente compatível embora tenha um parâmetro de forma de fácil interpretação obteve os piores resultados com as medidas de forma. O ponto de inflexão superior do modelo segmentado aparentemente possui uma relação com a altura relativa de Pressler o que pode ter favorecido a sua estimativa. O modelo de expoente-variável se mostrou mais coerente em estimar os diâmetros de Hossfeld e Hohenadl, mas problemático quando alturas de Pressler abaixo de 10 m. Entretanto, foi o modelo mais indicado para lidar com a variação dos dados.

Palavras-chave: Medidas de forma, Funções de afilamento, Seleção de modelos

Abstract

The stem shape is the main attribute of the tree for estimating wood volume. Taper models are functions that describe the theoretical stem profile and indirectly its shape. They are mainly used to projects the wood amount in different assortments based on merchantable diameters or heights. Form measurements, which are usually ratios of specific stem diameters, volumes or heights, can be used as form index. Therefore, the main objective of this chapter is to evaluate different categories of taper models to verify if the parameters of their functions provides reliable estimates of the Pressler, Hossfeld and Hohenadl form measures. The study was carried out at the Experimental Station of Forest Sciences, in the municipality of Itatinga-SP, in a factorial experiment with six clones of *Eucalyptus spp.*, three spacings and six blocks. Different categories of taper models were evaluated. The simple function models were parabolic, trigonometric and dimensionally compatible. Of the most flexible categories were the segmented and exponent-variable models. The models were fitted for maximum likelihood in their homoscedastic and heteroscedastic structure. To select the best structure, the Akaike Information Criterion was applied when they had the same dependent

variable. Both diameter estimates at different heights and stem form measurements were evaluated by the root mean square error, mean and absolute error, both in percentage, as well as by residual plots analysis. The parabolic and trigonometric models are equivalent to the segmented model only in the estimates of the height of Pressler and Hossfeld. The dimensionally compatible model, despite having an easily interpreted shape parameter, provided the worst result in estimate form measures. The upper inflection point of the segmented model apparently has a relationship with the relative height of Pressler, which may have favored its estimate. The exponent-variable model proved to be more reliable in estimating Hossfeld and Hohenadl diameters, although problematic when Pressler height is below 10 meters. However, it was the most suitable model to deal with data variation.

Keywords: Shape measurements, Tapering functions, Model selection

2.1 Introdução

A forma foi objeto de interesse para explicar processos mecânicos e hidráulicos do tronco, mas devido a grande variedade de espécies existentes e diferentes condições de adaptabilidade, muitas teorias foram condicionadas às espécies excurrentes com alto interesse econômico (Larson, 1963; Burkhardt e Tomé, 2012). Estas espécies geralmente possuem fustes únicos e retilíneos, como as espécies de coníferas, e deram suporte as primeiras teorias sobre a formação do tronco.

No manejo florestal, a maneira convencional em definir a forma é por meio de modelos de *taper*, que são funções que descrevem o perfil individual do tronco pelos parâmetros obtidos a partir de árvores amostra do povoamento. Podem ser classificados em modelos de simples função, segmentados e expoente-variável, embora outras categorias sejam possíveis (Goodwin, 2009). Estas categorias são quase sempre flexíveis em estimar diâmetros nas diferentes alturas no sentido de obter o volume comercial para o sortimento de madeira e seus multiprodutos.

Os modelos de simples função em alguns casos possuem um único parâmetro que fornece interpretação direta sobre a forma, como os modelos simples de Ormerod (1973) e Sharma e Oderwald (2001). Como o tronco pode possuir diversas formas em toda sua extensão, um único parâmetro pode não descrever sua forma com o realismo necessário. Por isto, quando possuem mais parâmetros, pelo menos um deles possui significado sobre ela como é o caso do modelo trigonométrico, que pode ser tão flexível quanto o segmentado a depender da espécie (Thomas e Parresol, 1991). Quando isto não ocorre, os modelos segmentado e de expoente-variável são funções mais complexas e criadas para definir as diferentes formas do tronco em neiloides, paraboloides e cones (Burkhardt e Tomé, 2012).

Outra maneira mais simples na representação da forma foi definida para tentar classificar o tronco, chamadas de medidas de forma. A mais comum é o fator de forma artificial que traz uma medida adimensional com significado prático na conversão do volume cilíndrico em volume de madeira, geralmente usado quando não há equações ajustadas para uma situação florestal particular. Porém, outras menos comuns necessitam de medidas adicionais de diâmetro ou de altura para obter quocientes que se associam aos principais sólidos de referência para o tronco. Medidas adicionais de diâmetro são obtidas acima da altura do *dap* a partir de alguma altura relativa para obtenção de quocientes de forma. Dentre elas estão o fator de forma natural de Hohenadl, que possui a vantagem de ser independente da altura da árvore, o que não ocorre com o fator de forma artificial (Assmann, 1970).

Medidas adicionais além do *dap* e a altura total é algo controverso nas rotinas de inventário. Algumas dessas medidas necessitam de aparelhos mais sofisticados para localização delas no tronco, o que muitas vezes pode se tornar inviável no sentido prático e onerar a operação. Por outro lado, modelos de *taper* possuem importância prática na obtenção dessas medidas acima do *dap* e tem sido usados para obtenção tanto de diâmetros quanto de alturas adicionais no cálculo de volume (McTague, 1992; Westfall et al., 2016; McTague et al., 2020).

Acredita-se que um bom modelo de *taper* deve possuir duas propriedades básicas. A primeira delas deve assegurar que $d_i = dap$ quando a altura $h_i = 1,3m$ e a segunda $d_i = 0$ quando $h_i = H$. Alguns trabalhos têm reportado a importância de se obter medidas adicionais no tronco além das convencionais como o diâmetro de Hossfeld (Ducey e Williams, 2011), altura de Pressler e o diâmetro de Hohenadl (McTague, 1992). Mais recentemente a altura de Pressler e diâmetro de Hossfeld foram obtidos a partir do modelo localizado de expoente-variável para espécies de *Pinus* spp. e *Eucalyptus* spp., que são medidas de forma realistas quando o tronco é um parabolóide (McTague et al., 2020).

Como os modelos de *taper* possuem a premissa básica de expressarem a forma idealizada do tronco, espera-se que além das propriedades básicas, seus parâmetros sejam capazes de fornecer estimativas satisfatórias dessas medidas de forma. Portanto, o objetivo do presente capítulo foi comparar as diferentes categorias de modelos de *taper* e selecionar aqueles mais capazes de obter melhores estimativas das medidas de forma.

Assim, o presente capítulo possuiu a seguinte hipótese:

I - Os modelos de simples função possuem desempenho equivalente ao segmentado e de expoente-variável nas estimativas das medidas de forma;

2.2 Material e Métodos

2.2.1 Descrição da área de estudo

O estudo foi conduzido na Estação Experimental de Ciências Florestais de Itatinga (EECFI), localizada no município de Itatinga-SP, sob jurisdição da Universidade de São Paulo e vinculada ao Departamento de Ciências Florestais (LCF) da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ). A estação possui uma área total aproximada de 2.247 hectares, sendo ocupada por áreas de preservação e conservação ambiental, bem como por plantios comerciais e experimentais de *Eucalyptus* spp. e *Pinus* spp. Está inserida na Bacia Hidrográfica do Médio Paranapanema (SigRH), região centro-sul do estado de São Paulo.

A altitude da região é de 850 m, e fica localizada nas coordenadas geográficas com latitude 23° 10' sul e longitude de 48°40' oeste. O clima local é classificado, segundo critérios de Köppen, como Cwa, denominado clima subtropical de inverno seco e verão quente com chuvas. A precipitação anual média é de 1.350 mm, com temperaturas médias anuais de 20° C, sendo 3° C a temperatura média mínima do mês mais frio e 32° C a temperatura média máxima do mês mais quente (Alvares et al., 2013). No período de coleta de dados, entre fevereiro e abril de 2019, a temperatura máxima foi de 35,3° C no mês de fevereiro e mínima de 10,6° C no mês de abril, com precipitação acumulada nesse período de 762,8 mm (dados monitorados e fornecidos pela estação meteorológica da própria EECFI)

Os dados utilizados neste estudo foram provenientes de um experimento com seis diferentes materiais genéticos de *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake (clones CO1404, CO1407, AEC0042, AEC0144, AEC0224) e *Eucalyptus* spp. (clone AEC1528), com idade de 7 anos, alinhados em seis blocos casualizados em esquema fatorial, com diferentes arranjos espaciais (espaçamentos). O experimento foi implantado em janeiro de 2012, como parte de um projeto maior que visou monitorar o crescimento destes clones e sua adaptabilidade às condições de escassez hídrica (Figura 2.1).

A classificação do solo na área onde o experimento foi instalado é o Latossolo Vermelho Distroférico tipo A moderado de textura argilosa (LVdf). É formado por meio da intemperização do basalto, grupo São Bento, formação Serra Geral (Gonçalves et al., 2012). Este tipo de solo é caracterizado por apresentar baixa saturação por bases, baixa fertilidade natural e alto teor de óxidos de ferro (Fe_2O_3), além de serem solos muito profundos, porosos a muito porosos, bem drenados o que é uma vantagem no sentido físico, entretanto mais susceptíveis à compactação devido a sua textura argilosa (Alves, 2021, *apud* EMBRAPA, 2019).

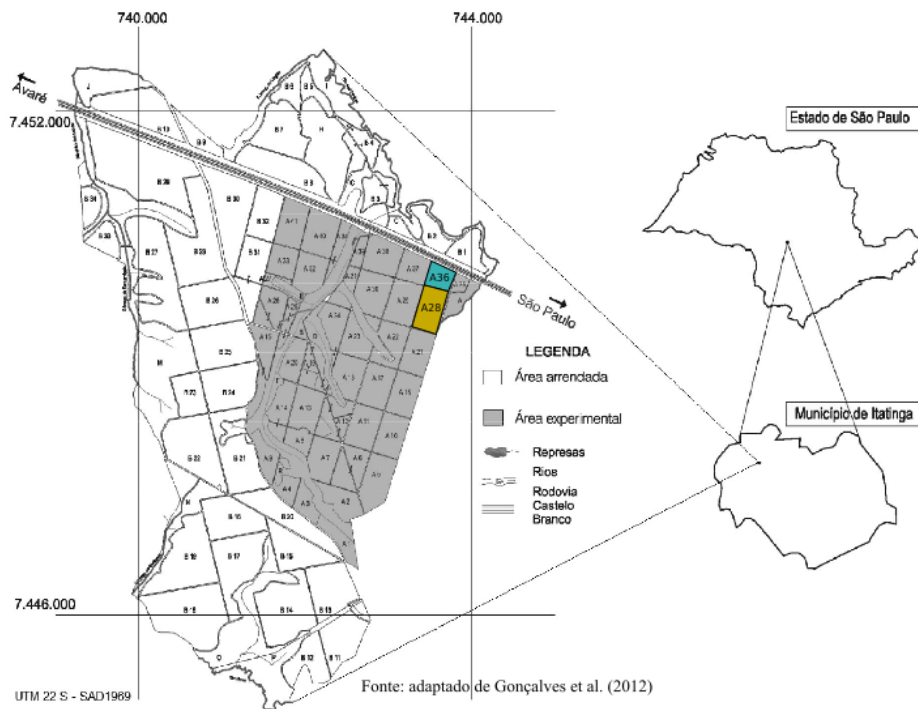


Figura 2.1: Mapa de localização e divisão territorial das áreas experimentais na Estação Experimental de Ciências Florestais, no município de Itatinga, São Paulo. As áreas em destaque colorido consistem nos talhões onde foram implantados os experimentos, sendo os dados coletados no A36. Fonte: adaptado de Gonçalves et al. (2012)

2.2.1.1 Delineamento experimental

No experimento (A36), os espaçamentos avaliados apresentam as seguintes estruturas: 1) 3m x 1m; 2) 3m x 2m; 3) 3m x 4m e seis clones o que totaliza 18 tratamentos (clone e espaçamento) em seis blocos (Figura 2.2A). Foram realizadas as etapas de cubagem no final do ciclo (7 anos), bem como a retirada de discos na região do *dap* para posterior cálculo de biomassa. Este último não foi utilizado neste trabalho.

2.2.2 Procedimentos de mensuração e coleta de dados

Na seleção das árvores para procedimento de cubagem, foram utilizados dados do levantamento realizado em janeiro de 2019, a partir da distribuição diamétrica dos valores do *dap*. No mesmo levantamento, foram realizadas medições do diâmetro a altura do peito (*dap*, a 1,3m de altura do tronco), altura total e a altura da base da copa. Por último foram obtidos o Índice de Área Foliar (LAI) de cada tratamento. As parcelas contabilizaram um número fixo de 25 árvores (5 linhas x 5 plantas), contudo apenas a área útil dela foi considerada no levantamento. A área útil consiste nas nove árvores centrais. As árvores marginais foram consideradas como bordadura interna simples, no intuito de manter o efeito do espaçamento e controlar a influência dos tratamentos vizinhos (Figura 2.2B).

A partir destes valores, três classes de diâmetro foram estabelecidas empiricamente para compor a categorização em árvores menores (P), intermediárias (M) e grandes (G), para cada um dos tratamentos. Em posse dos diâmetros mínimos e máximos de cada um deles, foram obtidas amplitudes de classe diferentes para cada um dos tratamentos (Tabela 2.1). Foram selecionadas 30 árvores aleatoriamente por tratamento (10 árvores em cada classe de *dap*) para a cubagem rigorosa. Na etapa de cubagem, as medições das árvores do talhão A36 foram executadas no período de fevereiro a abril de 2019. As seções para obtenção dos diâmetros com casca (d_{cc}) ao longo do fuste na cubagem rigorosa obedeceram

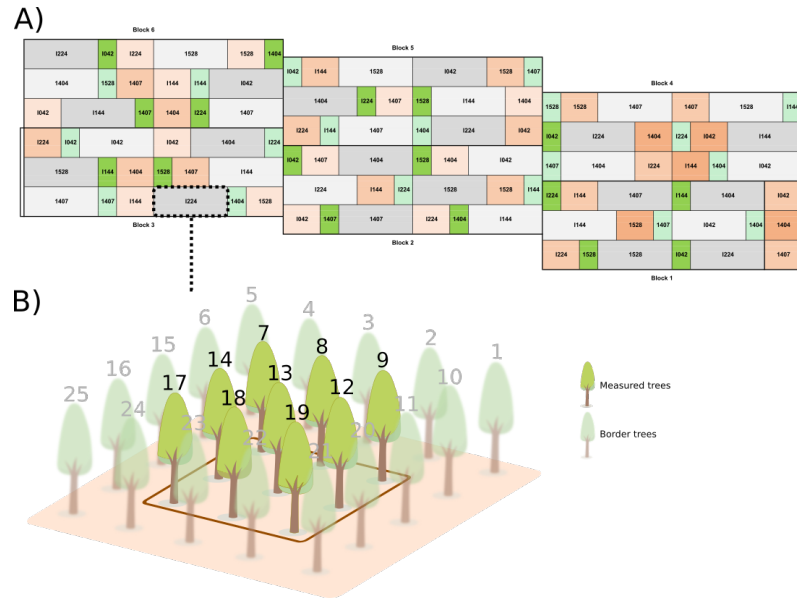


Figura 2.2: Desenho experimental dos tratamentos e da área útil da parcela. A) croqui do experimento em esquema fatorial contendo os diferentes clones e espaçamentos em seis blocos; B) Área útil da parcela: as nove árvores centrais em destaque foram aleatoriamente selecionadas na cubagem rigorosa para cada tratamento e as desfocadas ao redor são árvores de borda que separa cada tratamento.

as seguintes alturas: 0,1m; 0,7m; 1,3m; 2,0m e seções de 1m a partir desta marca até a altura comercial, para posterior cálculo do volume total e comercial (com casca) das árvores a partir do método de Smalian, com diâmetro mínimo de 3 cm para obtenção da última seção. A partir da altura da última seção, o volume da ponta foi calculado com a fórmula do cone.

Árvores consideradas problemáticas seja por erros de medição ou por não apresentarem medidas de copa tanto observadas bem como estimadas pelo hipsômetro foram retiradas. Assim, foram utilizadas efetivamente um total de 503 árvores para as análises. O comportamento dos dados da cubagem rigorosa nas diferentes combinações de material genético e espaçamento pode ser visto na Figura 2.3.

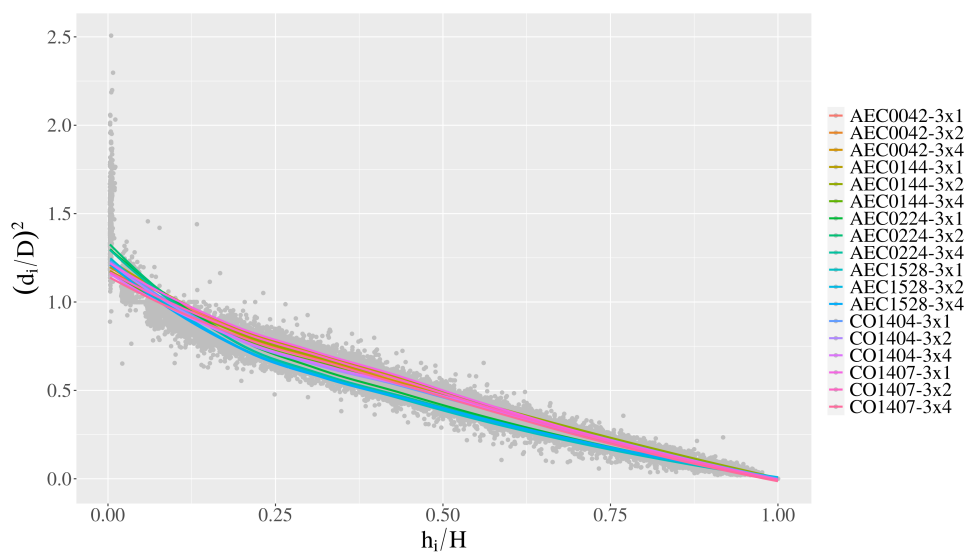


Figura 2.3: Dispersão das medidas adimensionais de diâmetro e altura nas seções do tronco com as respectivas curvas de suavização, por combinação de material genético e espaçamento. d_i é o diâmetro na altura h_i do tronco; D , é o diâmetro a 1,3m de altura do solo e; H é a altura total.

Tanto o *dap* (a 1,3m de altura do solo) quanto a altura total foram mensuradas antes do corte das árvores. Os diâmetros foram coletados por meio de suta graduada com precisão em cm, considerando duas medidas perpendiculares em todas as seções do tronco (Figura 2.4). Para medição indireta da altura total foi utilizado o hipsômetro digital Vertex IV e, nas medições diretas, após o corte, foi usada trena graduada com precisão em cm para ambas. Apenas as medições diretas foram utilizadas nesse estudo.



Figura 2.4: Procedimento de cubagem rigorosa estabelecendo as duas medidas perpendiculares nas alturas das seções pré-definidas, por meio de suta graduada e trena para sinalização das seções. Em alguns momentos, marcas em giz foram utilizadas para facilitar a localização das seções, bem como o diâmetro mínimo.

Tabela 2.1: Caracterização por classes de diâmetros referente ao levantamento realizado em fevereiro de 2019, no experimento A36, para cada combinação de clone e espaçamento. LI é o limite inferior da classe; CC é o centro da classe; LS é o limite superior da classe e; Freq. é a frequência absoluta.

Clone	Esp.	Trat.	n	Classes											
				P				M				G			
				LI	CC	LS	Freq.	LI	CC	LS	Freq.	LI	CC	LS	Freq.
CO1404	3mx1m	T1	52	5,6	7,6	9,5	16	9,5	11,4	13,4	26	13,4	15,3	17,2	10
	3mx2m	T2	53	4,5	7,5	10,5	12	10,5	13,5	16,5	28	16,5	19,5	22,5	13
	3mx4m	T3	51	11,9	14	16,1	9	16,1	18,3	20,4	30	20,4	22,5	24,6	12
CO1407	3mx1m	T4	54	4,9	7,2	9,5	15	9,5	11,7	14,0	33	14,0	16,3	18,6	6
	3mx2m	T5	53	9,1	11,0	13,0	14	13,0	14,9	16,8	24	16,8	18,8	20,7	15
	3mx4m	T6	54	13,2	15,3	17,3	9	17,3	19,4	21,4	27	21,4	23,5	25,6	18
AEC1528	3mx1m	T7	53	8,4	10,0	11,6	16	11,6	13,2	14,8	20	14,8	16,4	18,0	17
	3mx2m	T8	54	11,8	13,1	14,4	5	14,4	15,6	16,9	29	16,9	18,1	19,4	20
	3mx4m	T9	54	16,2	17,2	18,2	5	18,2	19,2	20,2	22	20,2	21,2	22,3	27
AEC0042	3mx1m	T10	53	4,1	6,7	9,2	9	9,2	11,7	14,2	36	14,2	16,7	19,2	8
	3mx2m	T11	53	11,6	13,1	14,7	23	14,7	16,2	17,7	17	17,7	19,3	20,8	13
	3mx4m	T12	54	12,1	13,9	15,8	6	15,8	17,6	19,5	21	19,5	21,3	23,2	27
AEC0224	3mx1m	T13	54	5,3	8,1	10,8	18	10,8	13,5	16,2	23	16,2	18,9	21,6	13
	3mx2m	T14	54	6,2	8,8	11,4	4	11,4	14,0	16,6	24	16,6	19,1	21,7	25
	3mx4m	T15	53	9,2	12,0	14,8	2	14,8	17,7	20,5	21	20,5	23,3	26,1	29
AEC0144	3mx1m	T16	54	4,9	7,2	9,4	10	9,4	11,7	13,9	29	13,9	16,2	18,4	15
	3mx2m	T17	54	10,6	12,3	13,9	12	13,9	15,6	17,3	24	17,3	18,9	20,6	18
	3mx4m	T18	53	14,5	16,0	17,4	7	17,4	18,9	20,3	27	20,3	21,8	23,3	19

2.2.3 Medidas de forma

As medidas de forma são a altura de Pressler, o diâmetro de Hossfeld e o diâmetro de Hohenadl. A altura de Pressler (h_{pr}), consiste na altura referente ao valor do diâmetro que é a metade do dap ($d_{0,5D}$), teoricamente encontrada a 75% da altura total em grande parte das espécies excurrentes. Quanto mais próxima desta altura relativa, mais paraboloide quadrático será o tronco.

Outros métodos possuem diâmetros em posições relativas da altura para aplicação deles. O de Hossfeld utiliza o diâmetro à 1/3 da altura total (Ducey e Williams, 2011) e o de Hohenadl a 10% (Assmann, 1970), usando como ponto partida a base da árvore. Com valores desses diâmetros nessas posições é possível obter quocientes de forma por meio de razões simples entre esses diâmetros e o dap .

2.2.4 Procedimento para obtenção das medidas de forma

Como as medidas adicionais não foram medidas diretamente na árvore durante a cubagem, com os diâmetros observados nas diferentes seções do tronco todas essas medidas podem ser obtidas. Assim, procedimentos de interpolação que determinam perfil individual a partir de pontos fornecidos foram utilizados para obtê-las indiretamente (Buja et al., 1989). Neste caso, os intervalos para obter interpolações são os valores dos diâmetros das seções medidos diretamente na cubagem rigorosa (Kershaw Jr et al., 2016). O perfil individual de cada árvore foi utilizado para buscar a posição das medidas de forma de cada uma delas. A Figura 2.5 representa o procedimento de interpolação que gera o perfil para as n árvores mensuradas a partir do exemplo com a altura de Pressler. O mesmo procedimento foi replicado para obter as outras medidas de forma como o diâmetro na altura de Hossfeld e de Hohenadl. Os valores obtidos pela interpolação foram considerados como informações observadas do tronco. Este procedimento pode ser facilmente aplicado pela função *approx* no software R.

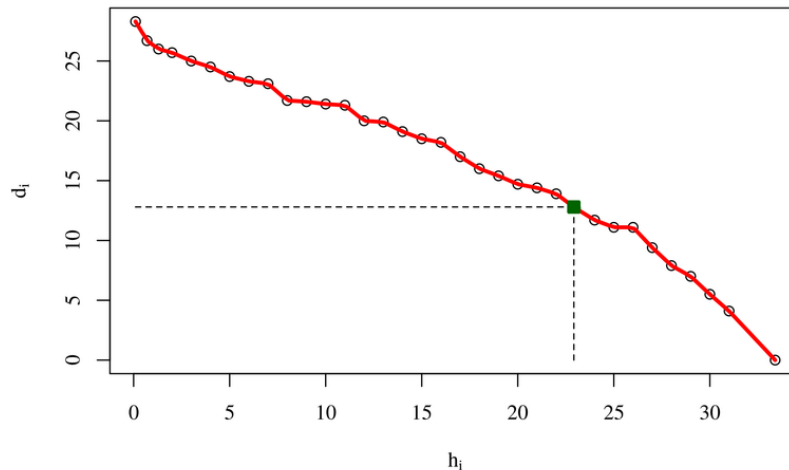


Figura 2.5: Exemplo de perfil individual do tronco gerado a partir da função *approx* no *software* R representando um tronco com 25,6 cm de dap e altura total de 33,4 m, a partir de medições de diâmetro nas alturas das seções pela cubagem rigorosa. O quadrado em verde e as linhas tracejadas representam a altura de Pressler ($h_{pr} = 22,92$ m), ou seja, a posição onde consta a metade do dap ($d_{0,5D} = 12,8$ cm). A curva em vermelho que liga os pontos foi gerada a partir da interpolação dos dados de diâmetro observados nas seções h_i .

2.2.5 Estimativas das medidas de forma

Para observar qual categoria de modelo consegue captar melhor a forma dos tronco das árvores, três categorias foram utilizadas: 1) modelos de simples função; 2) segmentados e; 3) Expoente-variável (Burkhart e Tomé, 2012).

1) Modelos de simples função

Kozak et al. (1969) - com intercepto

$$y^2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{h_i^2}{H^2} \right) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

Kozak et al. (1969) - sem intercepto

$$y^2 = \beta_1 \left(\frac{h_i}{H} - 1 \right) + \beta_2 \left(\frac{h_i^2}{H^2} - 1 \right) + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

Thomas e Parresol (1991)

$$y^2 = \beta_1(x - 1) + \beta_2 \sin(c\pi x) + \beta_4 \cotan \left(\pi \frac{x}{2} \right) + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

Sharma e Oderwald (2001)

$$y^2 = \left(\frac{h_i}{1,3} \right)^{2-\beta_1} \left(\frac{H - h_i}{H - 1,3} \right) + \varepsilon_i \quad (2.4)$$

2) Modelo segmentado

Max e Burkhart (1976)

$$y^2 = \beta_1(x - 1) + \beta_2(x^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x)^2 I_2 + \varepsilon_i \quad (2.5)$$

3) Expoente-variável

Para o modelo de expoente-variável foi utilizada a eq. 2.6 de Kozak (2004):

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 x^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0,1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_i} + \beta_6 X_i} + \varepsilon_i \quad (2.6)$$

Para obter os palpites iniciais do modelo não linear, a linearização foi aplicada. O modelo pode ser linearizado da seguinte maneira seguindo-se o mesmo princípio adotado por Kozak (1988):

$$\begin{aligned} \ln(d_i) = & \alpha_0 + \alpha_1 \ln(D) + \alpha_2 \ln(H) + \\ & \beta_1 \ln(X_i) z^4 + \beta_2 \ln(X_i) [1/e^{D/H}] + \\ & \beta_3 \ln(X_i) X_i^{0,1} + \beta_4 \ln(X_i) [1/D] + \\ & \beta_5 \ln(X_i) H^{Q_i} + \beta_6 \ln(X_i) X_i + \ln(\varepsilon_i) \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que, y é a razão de diâmetros (d_i/D); x e z são razões h_i/H ; h_i , é a altura da seção i do tronco em (m); H , a altura total (m); d_i , diâmetro com casca, em cm, na altura h_i ; D ou dap , diâmetro a 1.3m acima do solo (cm); β_i , coeficientes do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); c é o parâmetro de forma do modelo trigonométrico; Q_i , a expressão $[1-(h_i/H)^{1/3}]$; X_i , significa $[1-(h_i/H)^{1/3}]/(1-p^{1/3})$ em que p representa $1.3/H$ que é o ponto de inflexão; α_1 e α_2 são os pontos de inflexão de mudança dos sólidos no modelo segmentado; I_1 e I_2 são as variáveis indicadores que seguem as seguintes restrições: $I_1 = 1$ se $x \leq \alpha_1$; $I_2 = 1$ se $x \leq \alpha_2$, caso contrário, retorna zero; \ln é o logaritmo natural; ε é o erro aleatório ou estocástico.

2.2.6 Ajuste dos modelos

O procedimento de ajuste para estimativa de seus parâmetros foi por meio do método da Máxima Verossimilhança (MLE), sendo neste caso, para obter os perfis de cada um deles, utilizada a Log-verossimilhança negativa relativa (NRLR). Neste capítulo os modelos descritos na seção anterior foram ajustados sem distinção ou sem considerar o efeito dos tratamentos, utilizando-se informações das 503 árvores.

A partir dos estimadores da MLE é possível obter o intervalo de valores do parâmetro mais verossímil para realidade dos dados fornecidos (Bolker, 2008). Este procedimento é realizado por algoritmos que executam iterações a um limite especificado para encontrar os melhores estimadores para os parâmetros do modelo. Já os perfis de verossimilhança, mostram os intervalos da log-verossimilhança negativa relativa para os possíveis valores de cada parâmetro do modelo individualmente, dentro de um critério canônico. Este último foi verificado quando houve necessidade de fazer inferências aos parâmetros dos modelos ou observar se convergiram satisfatoriamente.

Os modelos de *taper* foram ajustados primeiramente em sua forma homocedástica, considerando que a variância é constante em função da média. Para observar se o modelo possui esta premissa, gráficos de resíduos com curvas de suavização foram elaborados para análise visual dos valores preditos e seus respectivos desvios.

Nos modelos heterocedásticos, a função da variância seguiu a Lei de Taylor (Taylor, 1961). Neste caso, a maneira de ajuste foi semelhante, utilizando a MLE, onde a variância possui pesos a partir de uma função de proporcionalidade representada pela eq. 2.8. Tanto o ajuste quanto os gráficos dos perfis de verossimilhança foram obtidos por meio dos pacotes *nlme*, *bbmle* e *sads* no software R.

$$\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 \left[\frac{h_i}{H}\right]^\delta\right) \quad (2.8)$$

De posse das equações, a estimativa do diâmetro a qualquer altura é obtida de maneira explícita isolando os termos da expressão de ajuste, exceto no modelo de Kozak (2004) que já é ajustado desta maneira. Entretanto, as únicas funções que possuem a capacidade de inversão da expressão do diâmetro para estimativa de uma altura qualquer ao longo do tronco é o modelo de Kozak et al. (1969) e o modelo segmentado de Max e Burkhart (1976). Os outros modelos necessitam de métodos numéricos para obtenção desta medida a partir de um diâmetro específico. Este procedimento é melhor detalhado em Robinson e Hamann (2010, p. 291-293) que apresentam a solução analítica com o modelo de Kozak (1988) por meio do *software* R. O mesmo procedimento pode ser adaptado para qualquer modelo que possua essa limitação. As expressões são descritas da seguinte maneira:

1) Modelos de simples função

Kozak et al. (1969) - com intercepto

$$\hat{d}_i = D \sqrt{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left(\frac{h_i}{H}\right) + \hat{\beta}_2 \left(\frac{h_i^2}{H^2}\right)} \quad (2.9)$$

$$\hat{h}_i = \frac{-\hat{\beta}_1 H - \sqrt{(\hat{\beta}_1 H)^2 - 4\hat{\beta}_2(\hat{\beta}_0 H^2 - \hat{d}_i^2 H^2 / D^2)}}{2\hat{\beta}_2} \quad (2.10)$$

Kozak et al. (1969) - sem intercepto

$$\hat{d}_i = D \sqrt{\hat{\beta}_1 \left(\frac{h_i}{H} - 1\right) + \hat{\beta}_2 \left(\frac{h_i^2}{H^2} - 1\right)} \quad (2.11)$$

$$\hat{h}_i = \frac{-\hat{\beta}_1 H - \sqrt{(\hat{\beta}_1 H)^2 - 4\hat{\beta}_2((-\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)H^2 - d_i^2 H^2 / D^2)}}{2\hat{\beta}_2} \quad (2.12)$$

Thomas e Parresol (1991)

$$\hat{d}_i = D\sqrt{\hat{\beta}_1(x-1) + \hat{\beta}_2 \sin(\hat{c}\pi x) + \hat{\beta}_4 \cotan(\pi \frac{x}{2})} \quad (2.13)$$

Sharma e Oderwald (2001)

$$\hat{d}_i = D\sqrt{\left(\frac{h_i}{1,3}\right)^{2-\hat{\beta}_1} \left(\frac{H-h_i}{H-1,3}\right)} \quad (2.14)$$

2) Modelo segmentado

Max e Burkhart (1976)

$$\hat{d}_i = D\sqrt{\hat{\beta}_1(x-1) + \hat{\beta}_2(x^2-1) + \hat{\beta}_3(\hat{\alpha}_1-x)^2 I_1 + \hat{\beta}_4(\hat{\alpha}_2-x)^2 I_2} \quad (2.15)$$

$$\hat{h}_i = \frac{H}{2A} \left[-B - \sqrt{B^2 - 4AC} \right] \quad (2.16)$$

em que: A é a expressão $\hat{\beta}_2 + I_1' \hat{\beta}_3 + I_2' \hat{\beta}_4$; B significa $\hat{\beta}_1 - 2I_1' \hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_3 - 2I_2' \hat{\alpha}_2 \hat{\beta}_4$; C é $-\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - d_i^2 / D^2 + I_1' \hat{\alpha}_1^2 \hat{\beta}_3 + I_2' \hat{\alpha}_2^2 \hat{\beta}_4$; I_1' e I_2' são as variáveis indicadoras com os critérios: $I_1' = 1$, se $\hat{d}_i \geq \hat{d}_1$; $I_2' = 1$, se $\hat{d}_i \geq \hat{d}_2$; caso contrário, assume o valor zero. \hat{d}_1 é o diâmetro estimado na altura referente a $\hat{\alpha}_1 H$, que pode ser calculado por $D\sqrt{\hat{\beta}_1(\hat{\alpha}_1-1) + \hat{\beta}_2(\hat{\alpha}_1^2-1)}$; \hat{d}_2 é o diâmetro estimado na altura referente a $\hat{\alpha}_2 H$ obtido a partir da expressão $D\sqrt{\hat{\beta}_1(\hat{\alpha}_2-1) + \hat{\beta}_2(\hat{\alpha}_2^2-1) + \hat{\beta}_3(\hat{\alpha}_1-\hat{\alpha}_2)^2}$.

2.2.6.1 Avaliação dos modelos (*Goodness-of-fit*)

Na avaliação dos modelos, tanto análises visuais quanto critérios de seleção foram utilizados. Para análise visual, gráficos de resíduos a partir das relações entre os desvios e os valores preditos pelos modelos, com curva de suavização paramétrica, foram utilizados (resíduos vs. estimativas). Em complemento, a análise dos desvios foi observada em função das alturas relativas do tronco a partir de gráficos box-plot e assim verificar em qual parte dele o modelo possui maior viés (Kozak e Smith, 1993; Shahzad et al., 2020).

Para comparação e seleção de modelos, foi utilizado o Critério de Akaike (Akaike Information Criterion ou AIC). O AIC tem sido relatado como um dos critérios parcimoniosos na escolha de modelos candidatos, por não favorecer modelos a partir do maior número de estimadores contidos nele. Como os modelos foram ajustados com diferentes variáveis resposta, o critério foi usado apenas para verificar se o ajuste com a função para variância é necessário. Diferenças no critério iguais ou acima de $\log(8)$ ($\Delta_i \geq 2,08$) conferem maior plausibilidade na escolha de um determinado modelo em detrimento do outro. Caso contrário, se o valor de $\Delta_i \leq 2,08$ os modelos são equivalentes. A expressão do Critério de Akaike é assim descrita (Burnham e Anderson, 2002):

$$AIC_i = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2k \quad (2.17)$$

em que, AIC_i é o critério de Akaike do modelo i ; \mathcal{L} é a função de verossimilhança; $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança e k é o número de parâmetros livres no modelo. Δ_i é a diferença entre o AIC_i do modelo i e o menor valor de AIC dentre os modelos candidatos.

Para validar e selecionar pelo desempenho dos modelos, as estimativas foram avaliadas a partir da raiz do erro quadrado médio (RMSE, eq. 2.18), o erro médio absoluto (MAE%, eq. 2.19) e o erro médio (ME%, eq. 2.20) ambos em porcentagem. Todos os procedimentos descritos foram realizados por meio do *software* R (R Core Team, 2020).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}} \quad (2.18)$$

$$MAE\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (2.19)$$

$$ME\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (2.20)$$

em que n é o número de observações; y_i é o valor observado; \hat{y}_i o valor estimado pelo modelo; e m é o número de parâmetros do modelo.

2.2.7 Estimativas das medidas de forma a partir dos modelos

Com os modelos ajustados, foram avaliados os desempenhos de categoria de modelo para verificar a capacidade de estimar cada medida de forma partir de seus parâmetros. Neste caso, com os valores obtidos pela interpolação, as estimativas das medidas de forma pelos modelos foram confrontadas com estes valores "reais". Os desvios foram analisados a partir das estatísticas de precisão já mencionadas como RMSE, MAE% e ME%. Com estas informações e de posse da melhor equação, índices de forma foram extraídos a partir de suas expressões.

2.3 Resultados

2.3.1 Descrição das medidas de forma

Os resultados da tabela 2.2 indicam diferenças nas distribuições de cada medida de forma extraída do processo de interpolação de cada árvore individualmente. A altura total média das árvores foi de 26,2m com mínimos e máximos de 9,1m e 36,0m respectivamente. Em termos relativos, a altura média de Pressler se encontra aproximadamente a 70% da altura total da árvore. Isto indica preliminarmente que a forma das árvores amostra é mais próxima de um parabolóide que cônicas. Embora este seja um bom indicador de qualidade de forma da árvore, sua limitação está nas árvores de menor porte, ou seja, árvores menores que 10m de altura ou suprimidas, não conseguem expressar geometricamente os sólidos conhecidos e a altura de Pressler passa a ser impraticável nesses casos. Isto porque existe maior probabilidade da altura de Pressler estar muito próxima da altura total, geralmente entre o comprimento de copa, além de geralmente serem árvores muito finas, onde a metade do *dap* está em regiões com maiores incertezas, que possuem pouca visibilidade em campo e acima do diâmetro mínimo definido na cubagem.

Tabela 2.2: Sumarização das estatísticas descritivas fornecidas a partir do procedimento de interpolação para cada árvore individualmente. Na tabela se encontra a altura de Pressler (em metros e relativa), os diâmetros de Hossfeld e Hohenadl. Intervalo de confiança (I.C.) a um nível de 95%.

Medidas de forma	min	max	\bar{x}	med.	s	s^2	Q25%	Q75%	I.C.
Pressler (h_{pr}) m	5.86	25.00	18.17	18.90	3.80	14.47	15.89	21.20	± 0.33
Rel. Pressler (h_{pr}/H)	0.5431	0.8308	0.6950	0.7029	0.0415	0.0017	0.6685	0.7235	± 0.0036
Hossfeld ($d_{1/3H}$) cm	3.83	21.13	12.36	12.62	3.36	11.29	9.94	14.91	± 0.29
Hohenadl ($d_{0,1H}$) cm	4.32	24.83	14.77	14.92	3.98	15.83	11.97	17.68	± 0.35

O primeiro e terceiros quartis indicam suave assimetria à esquerda na altura de Pressler, o que também ocorreu com a altura total a partir de observações do histogramas de frequências tanto da cubagem quanto do levantamento (Figura 2.6).

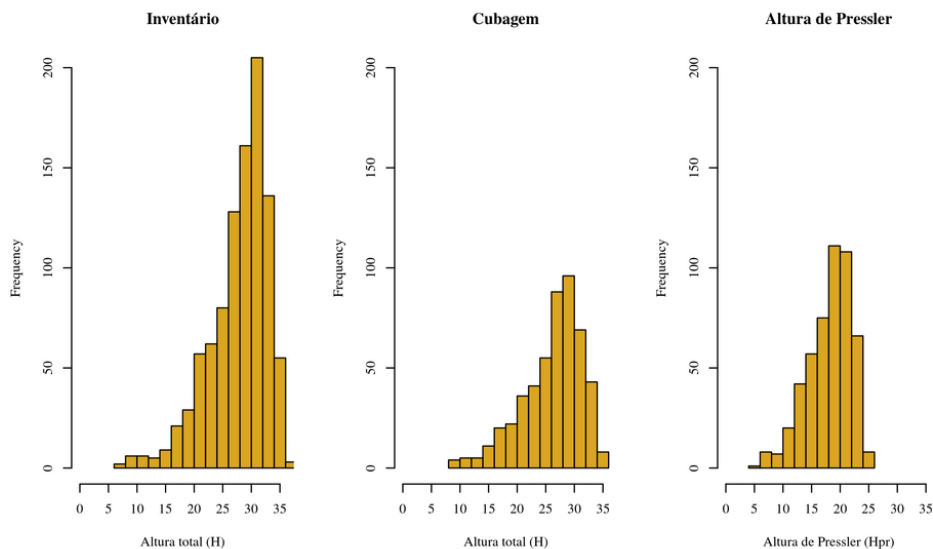


Figura 2.6: Histograma de frequências para comparação das alturas totais do levantamento, das árvores amostra da cubagem rigorosa e altura de Pressler.

Quanto aos valores dos diâmetros de Hossfeld e Hohenadl, as médias foram próximas dos valores da mediana. Em observação aos quartis, a distribuição dos diâmetros não obteve nítida assimetria conforme mostra a curva suavizada na Figura 2.7, que apresenta distribuição aproximadamente normal

ou simétrica em torno da média. Já na dispersão dos dados em torno da média, o desvio padrão foi de 3,8m para a altura de Pressler, de 3,36cm e 3,98cm para Hossfeld e Hohenadl respectivamente. Portanto, seus coeficientes de variação (CV%) foram de 20,91%, 21,18% e 29,95% para a altura de Pressler, os diâmetros de Hossfeld e Hohenadl respectivamente.

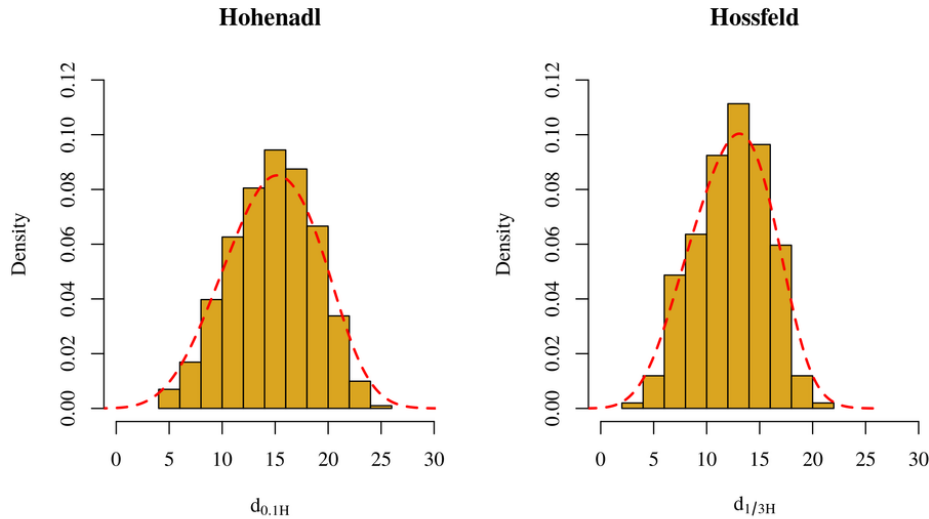


Figura 2.7: Gráfico da função de densidade de probabilidade. A curva ajustada em vermelho mostra o grau de simetria na distribuição dos dados dos diâmetros de Hohenadl e Hossfeld.

Embora o grau de dispersão relativo não esteja acima de 30%, ou seja a variabilidade é moderada, esta variação pode ser natural já que não fora considerado o efeito dos tratamentos neste primeiro momento. É importante destacar que, como as árvores foram selecionadas a partir de classes de *dap*, logo a variabilidade da amostra não é necessariamente igual a da floresta. A maior variação no diâmetro de Hohenadl pode ser explicada também por ser uma medida localizada mais próxima da base do tronco que do topo, consideradas regiões críticas de variabilidade em dados de *taper*. Vale salientar que esta é a referência geral na estatística experimental, embora normas técnicas para espécies de *Eucalyptus* spp. indiquem outros parâmetros de alta variabilidade para o diâmetro à 1,3m de altura do solo (CV > 14,15%) e altura total (CV > 15,80%), considerando o efeito do espaçamento (Garcia, 1989).

2.3.2 Análise geral dos modelos de *taper*

As informações das medidas de precisão como RMSE, MAE%, ME% e o critério de Akaike nas Tabelas 2.3 e 2.4 descrevem que os modelos ajustados em sua forma heteroscedástica obtiveram melhor desempenho que os homoscedásticos. Naturalmente as informações dos diâmetros relativos possuem alta variação, sobretudo nas regiões críticas do tronco como a base dele. Este procedimento têm sido adotado frequentemente na biometria florestal, onde grande parte das práticas em mensuração do tronco seguem os postulados da Lei de Taylor (Taylor, 1961) em que a variância não é constante nas diferentes alturas relativas do tronco. Embora aqui não tenha sido usada a mesma função de proporcionalidade da variância adotada por Taylor, observa-se que a expressão foi mais plausível que assumir variância constante, tendo em vista os valores de AIC.

A categoria de modelo que obteve melhor desempenho na estimativa dos diâmetros nas alturas fixas de cada seção no tronco foi a expoente-variável, com a equação de Kozak (2004) heteroscedástica (Tabela 2.4). Já a equação que apresentou o pior desempenho foi o de Sharma e Oderwald (2001) em

Tabela 2.3: Medidas de precisão para avaliação do desempenho dos modelos de *taper* com a mesma variável resposta. As siglas 'c.i.' e 's.i.' significam com intercepto e sem intercepto respectivamente. Já os termos 'Hom' e 'Het' são os tipos de ajuste dos modelos, em sua estrutura homoscedástica e heteroscedástica. *LL* é a log-verossimilhança.

Modelo	RMSE	MAE%	ME%	AIC	Δ_i	LL	Tipo
Kozak (1969) (c. i.)	0.9778	5.98	-0.93	-26787.2	14546.5	13397.61	Hom
Kozak (1969) (c. i.)	0.8030	5.31	-0.30	-40045.3	1288.4	20027.63	Het
Kozak (1969) (s. i.)	0.7982	5.71	0.56	-26624.3	14709.4	13315.15	Hom
Kozak (1969) (s. i.)	0.8020	5.34	-0.44	-40036.3	1297.4	20022.15	Het
Thomas e Parresol (1991)	0.8518	5.90	-2.96	-31773.5	9560.1	15891.77	Hom
Thomas e Parresol (1991)	0.7839	5.39	-1.01	-39966.1	1367.5	19989.07	Het
Sharma e Oderwald (2001)	1.1048	8.78	-6.68	-20855.1	20478.6	10429.53	Hom
Sharma e Oderwald (2001)	1.0826	7.34	-1.94	-35138.0	6195.6	17572.01	Het
Max e Burkhart (1976)	0.6385	4.95	-0.75	-35488.62	5845.1	17751.31	Hom
Max e Burkhart (1976)	0.6384	4.95	-0.74	-41333.67	0.0	20674.84	Het

Tabela 2.4: Medidas de precisão para avaliação do desempenho do modelo de expoente-variável de Kozak (2004) Os termos 'Hom' e 'Het' são os tipos de ajuste dos modelos, em sua estrutura homoscedástica e heteroscedástica. *LL* é a log-verossimilhança.

Modelo	RMSE	MAE%	ME%	AIC	Δ_i	LL	Tipo
Kozak (2004)	0.6187	4.77	-0.24	25110.7	450.3	-12545.3	Hom
Kozak (2004)	0.6205	4.75	-0.26	24660.4	0	-12319.2	Het

todas as medidas de precisão. Embora Kozak (2004) demonstre acurácia aparente, não significa ainda que possa ser o melhor em estimar as medidas de forma.

Em observação ao RMSE, não houve diferença substancial ao compará-lo com a equação do modelo segmentado de Max e Burkhart (1976), que foi o segundo melhor na estimativa geral dos diâmetros. Ambas as categorias de modelo, segmentado e expoente-variável, possuem as propriedades ideais, ou seja, $d_i = D$ quando $h_i = 1, 3m$ bem como $d_i = 0$ quando $h_i = H$, o que os torna mais flexíveis às diferentes formas das árvores. No entanto, a grande problemática dos modelos segmentados é na busca de bons palpites iniciais dos parâmetros no ajuste¹, o que ocasiona uma certa instabilidade no modelo conforme mostra os perfis da log-verossimilhança negativa relativa com o parâmetro α_1 e β_4 (material suplementar, Figuras 2.29 e 2.30). Assim, para observar os perfis em outro aspecto inferencial, a partir do ajuste pelos mínimos quadrados não-lineares, observou-se que grande parte dos parâmetros do modelo não possuem aproximação linear adequada, já que os gráficos apresentaram curvatura acentuada (material suplementar, Figura 2.31). Como o objetivo central não foi fazer inferências a partir de testes de hipóteses em relação aos parâmetros, a análise visual serviu apenas para verificar a qualidade do ajuste do modelo.

Os resultados do MAE%, apresentaram valores percentuais satisfatórios e abaixo de 5,4%, exceto no modelo de Sharma e Oderwald (2001) que obteve um erro acima de 7%. Já o ME% indica que quase todos os modelos superestimam as medidas de diâmetro, exceto o modelo de Kozak et al. (1969) (s.i., Hom.) que subestimou em 0,56%. O restante superestima as estimativas de diâmetro em média abaixo de 1%, exceto o modelo de Sharma e Oderwald (2001) e Thomas e Parresol (1991) que obtiveram valores de -2,96% (Hom.) e -6,68% (Hom.), respectivamente. Os valores do MAE% e ME% são importantes por definir o erro médio percentual (viés) dos valores observados e estimados pelos modelos. No entanto, em dados de *taper*, sozinhos não apresentam os detalhes necessários para obter informações

¹Foi usado diferentes combinações de valores fixos em substituição aos parâmetros α_1 e α_2 , e inicialmente ajustá-lo como um modelo de regressão linear em um processo iterativo. Com os coeficientes obtidos linearmente, o ajuste se deu em sua estrutura não-linear generalizada usando estes valores como palpites iniciais. A melhor equação foi selecionada a partir do menor AIC.

quanto a possíveis correções do viés nas alturas relativas do tronco.

Embora as medidas de precisão apresentem quantitativamente o grau de dispersão, a análise dos desvios em cada uma das alturas relativas do tronco é necessária (Kozak e Smith, 1993). A Figura 2.8 representa os diferentes comportamentos do modelo parabólico de Kozak et al. (1969) em função da altura do tronco. Observa-se que o modelo com intercepto homoscedástico (c.i.) não atende as propriedades esperadas. Porém, ao impor restrições aos parâmetros (s.i., homoscedástico), ele consegue assumir $d_i = 0$ quando $h_i = H$ embora subestime mais na base do tronco. Isto também ocorreu ao considerar heteroscedasticidade, em que o viés nas áreas críticas do tronco se torna menos acentuado mesmo com a presença do intercepto na equação, embora permaneçam grandes desvios até 5% do tronco.

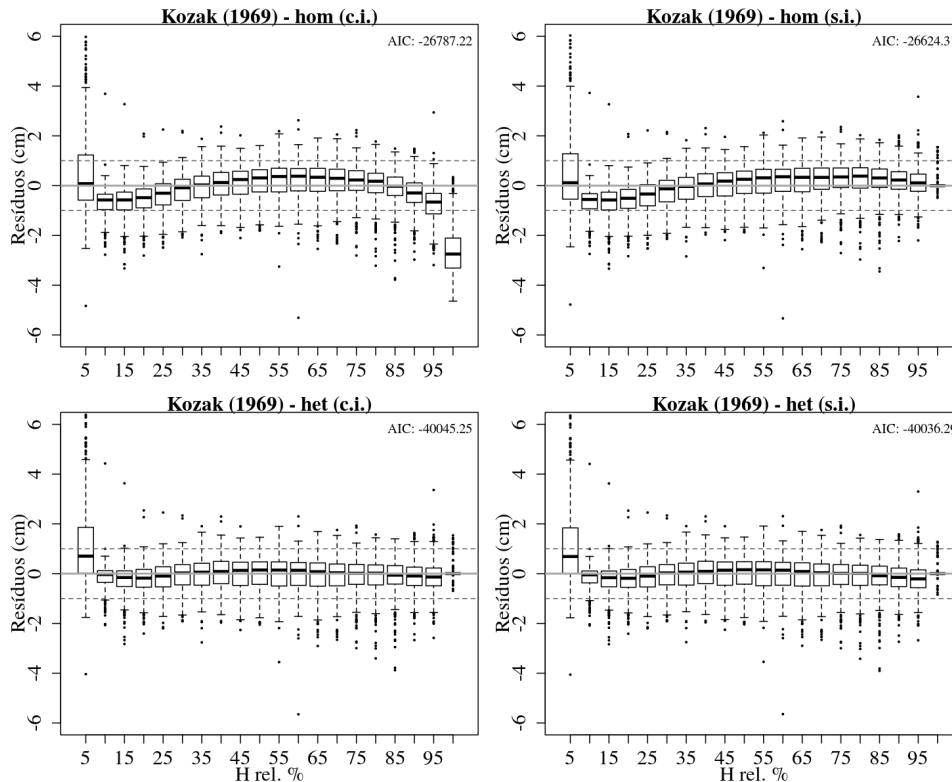


Figura 2.8: Gráficos box-plot dos resíduos das estimativas dos diâmetros em função das alturas relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de Kozak et al. (1969) com intercepto (c.i.) e sem intercepto (s.i.). hom: homoscedástico; het: heteroscedástico. As linhas tracejadas em paralelo referenciam os desvios em $|1|$ cm.

Apesar do modelo trigonométrico de Thomas e Parresol (1991) ser relativamente flexível nas diferentes espécies as quais ele foi originalmente testado, não possuiu as propriedades esperadas e nem se ajustou satisfatoriamente. A Figura 2.9 indica que o modelo não consegue diminuir o viés na base da árvore bem como no topo dela, mesmo em sua forma heteroscedástica. Além disto, observa-se que a equação passa a subestimar na base e superestimar no topo de maneira acentuada.

Conforme esperado a Figura 2.10 confirma o pior desempenho do modelo de Sharma e Oderwald (2001) nas estimativas gerais. Seu alto viés pode ser explicado por possuir apenas um parâmetro diante da alta variação de formas encontradas nos dados. Isto justifica as adaptações baseadas nesse modelo por Sharma e Zhang (2004) e Sharma e Parton (2009), que incluíram expressões com mais estimadores além da inclusão de variáveis a nível de povoamento. No entanto ele é um modelo de fácil interpretação das mudanças da forma da árvore em diferentes situações florestais, por ter o parâmetro (β_1) que a qualifica e é sensível à mudanças dela. Algo semelhante é encontrado no modelo de Thomas e Parresol (1991), onde diferentes valores do parâmetro \hat{c} em conjunto com o β_2 são determinantes em definir acentuações

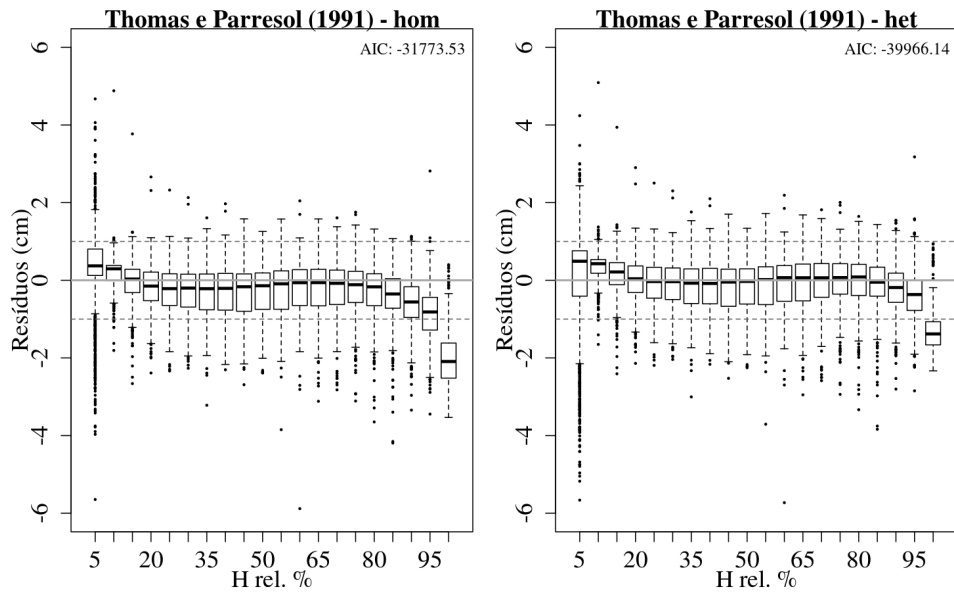


Figura 2.9: Gráficos box-plot dos resíduos das estimativas dos diâmetros em função das alturas relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de Thomas e Parresol (1991). hom: homoscedástico; het: heteroscedástico. As linhas tracejadas em paralelo referenciam os desvios em $|1|$ cm.

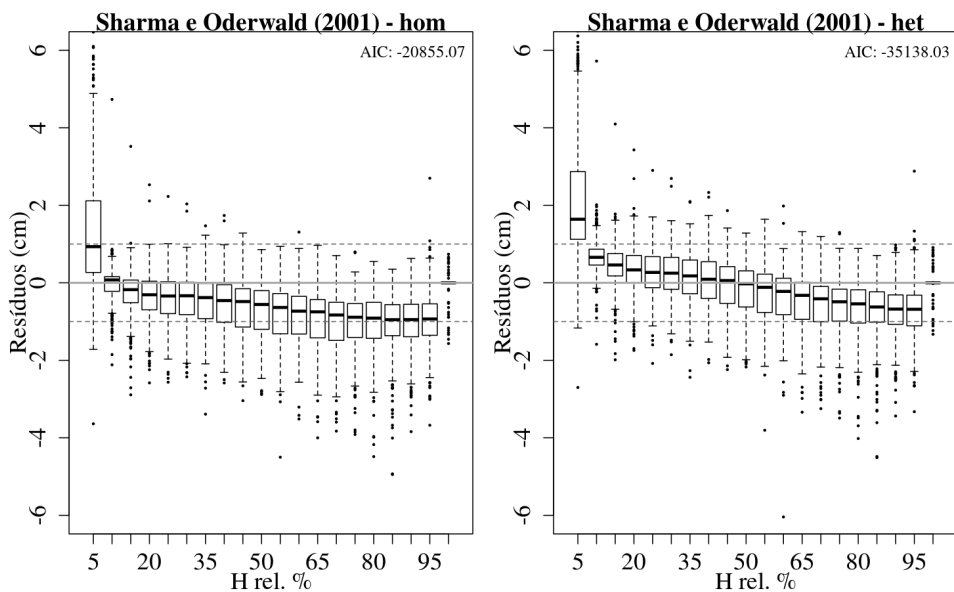


Figura 2.10: Gráficos box-plot dos resíduos das estimativas dos diâmetros em função das alturas relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de Sharma e Oderwald (2001). hom: homoscedástico; het: heteroscedástico. As linhas tracejadas em paralelo referenciam dos desvios em $|1|$ cm.

na forma do tronco.

As Figuras 2.11 e 2.12 indicam que o modelo segmentado de Max e Burkhart (1976) e Kozak (2004) possuem as propriedades esperadas e conferem as melhores estimativas dos diâmetros nas áreas críticas do tronco, principalmente alturas próximas a base.

Os resíduos não fornecerem nítida diferença visual dos desvios nas alturas relativas do tronco no modelo de Kozak (2004). No entanto, o AIC determina que sua estrutura heteroscedástica é mais plausível. Por outro lado o modelo segmentado possui a distribuição dos resíduos de maneira mais equilibrado que o expoente-variável na base do tronco, embora as medidas precisão favoreçam o de expoente-variável. Isto indica uma suposta equivalência entre os modelos, sendo que o de expoente-

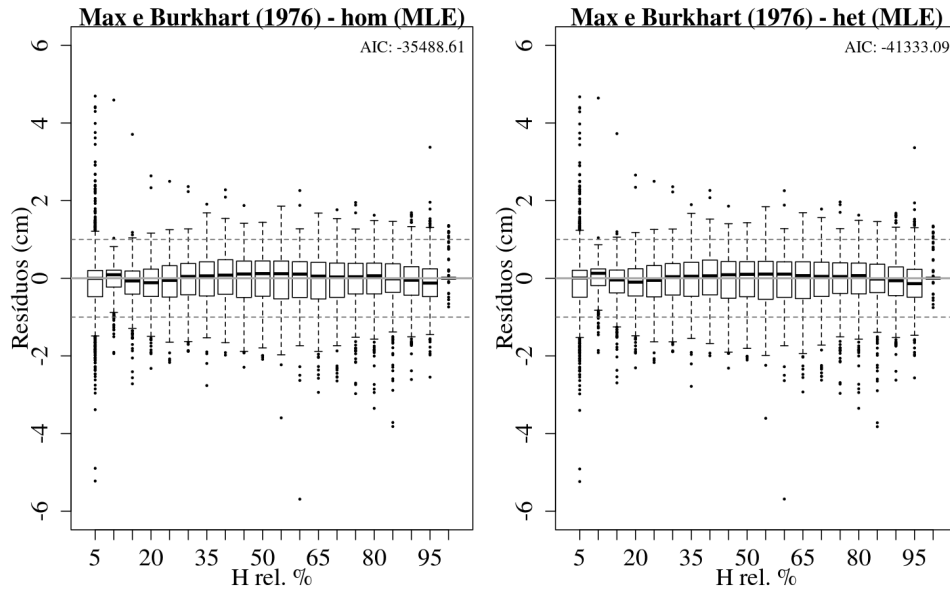


Figura 2.11: Gráficos box-plot dos resíduos das estimativas dos diâmetros em função das alturas relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de Max e Burkhart (1976). hom: homoscedástico; het: heteroscedástico. As linhas tracejadas são a referência dos desvios em $|1|$ cm.

variável possui a vantagem de não necessitar de uma expressão para cada segmento do tronco. Outra possível vantagem, é que em sua aplicação pioneira em florestas canadenses esta categoria de modelo se mostrou eficiente na problemática da multicolinearidade (Kozak, 1997, 2004), embora essa preocupação esteja associada ao método de inferência escolhido para elaboração de modelos explicativos, algo não explorado com os dados deste estudo.

Todos os modelos convergiram satisfatoriamente pelo método da máxima verossimilhança (MLE), tanto em sua forma homoscedástica quanto heteroscedástica, bem como os parâmetros foram significativos a 95% de probabilidade em todos eles (Tabela 2.6 e Tabela 2.7, no material suplementar). Observa-se que os pontos de inflexão encontrados no modelo segmentado homoscedástico foi em torno de 5% na base

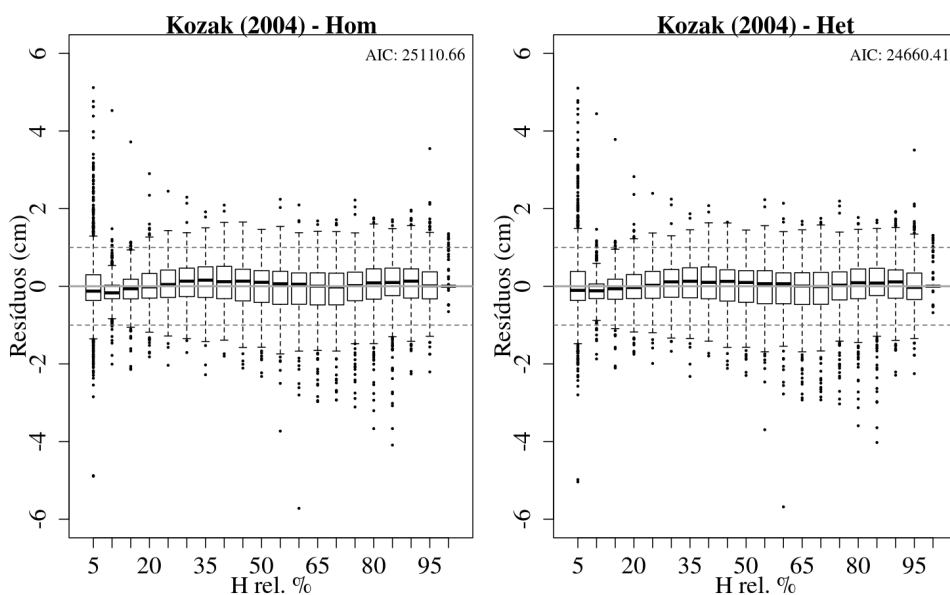


Figura 2.12: Gráficos box-plot dos resíduos das estimativas dos diâmetros em função das alturas relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de Kozak (2004). Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. As linhas tracejadas são a referência dos desvios em $|1|$ cm.

e 69% para o topo (α_2 e α_1). No heteroscedástico a mesma altura relativa foi computada na base, sendo que para o topo foi 61%. Embora a convergência tenha ocorrido, o modelo de Max e Burkhart (1976) e Kozak (2004) tiveram coeficientes que não perfilharam satisfatoriamente nos perfis da log-verossimilhança negativa relativa conforme mencionado anteriormente (material suplementar, Figuras 2.29, 2.30, 2.32 e 2.33). Com todos os outros modelos esta problemática não foi detectada (ver material suplementar). Segundo Bolker (2008) isto ocorre quando o modelo fornece várias superfícies para o mínimo global, algo observado no coeficiente α_1 do modelo segmentado heteroscedástico e no α_2 do expoente-variável, sem distinção do tipo de ajuste.

2.3.2.1 Análise das estimativas das medidas de forma

A Tabela 2.5 apresenta os resultados do desempenho dos modelos em prever as medidas de forma. De maneira geral, os modelos foram piores na estimativa da altura de Pressler que dos diâmetros de Hossfeld e Hohenadl, com destaque para o diâmetro de Hohenadl que obteve os menores percentuais do MAE. O modelo trigonométrico (heteroscedástico) foi o melhor para estimar a altura de Pressler com o menor erro médio e viés (RMSE, 1,0822; ME%, -0,36), embora o modelo segmentado no mesmo tipo de ajuste possua erros ligeiramente próximos. Nos diâmetros de Hossfeld e Hohenadl o modelo de expoente-variável (heteroscedástico) obteve as melhores estimativas. Atribuir uma função para a variância conferiu maior acurácia aos modelos, embora não tenha sido um grande diferencial principalmente nos modelos segmentado e de expoente-variável mas sim nos modelos de simples função.

Tabela 2.5: Erro médio entre os valores reais das medidas de forma obtidas pelo método de interpolação e estimadas pelos modelos de *taper*. As siglas 'c.i.' e 's.i.' significam com intercepto e sem intercepto respectivamente. Já os termos 'Hom' e 'Het' são os tipos de ajuste dos modelos, em sua forma homoscedástica e heteroscedástica.

Modelo	Tipo	Pressler (m)			Hossfeld (cm)			Hohenadl (cm)		
		RMSE	MAE%	ME%	RMSE	MAE%	ME%	RMSE	MAE%	ME%
Simples Função										
Kozak (1969) (c. i.)	Hom	1.1538	5.21	1.76	0.5994	3.97	-0.07	0.8378	4.33	-4.09
Kozak (1969) (c. i.)	Het	1.0856	4.80	-0.84	0.5976	3.97	0.09	0.4811	2.30	-0.94
Kozak (1969) (s. i.)	Hom	1.1875	5.37	2.24	0.6082	3.96	-0.52	0.8292	4.27	-4.02
Kozak (1969) (s. i.)	Het	1.0857	4.80	-0.84	0.5973	3.98	0.12	0.4866	2.32	-1.01
Thomas e Parresol (1991)	Hom	1.1262	4.86	-2.05	0.6903	4.22	-2.27	0.4204	2.31	0.80
Thomas e Parresol (1991)	Het	1.0822	4.82	-0.36	0.6271	3.99	-1.09	0.4767	2.86	2.04
Sharma e Oderwald (2001)	Hom	2.0043	9.71	-9.60	0.7935	4.91	-3.96	0.4421	2.03	-0.92
Sharma e Oderwald (2001)	Het	1.4982	6.81	-6.19	0.6097	3.98	0.74	0.6819	3.92	3.65
Segmentado										
Max e Burkhart (1976)	Hom	1.0846	4.80	-0.77	0.5974	3.98	0.11	0.4381	2.18	-0.24
Max e Burkhart (1976)	Het	1.0830	4.80	-0.60	0.5984	3.97	0.01	0.4293	2.18	-0.02
Expoente-variável										
Kozak (2004)	Hom	1.1132	4.92	-0.41	0.5519	3.64	0.65	0.4035	2.02	-0.82
Kozak (2004)	Het	1.1006	4.80	-0.47	0.5456	3.58	0.51	0.4011	2.01	-0.62

Na análise das predições da altura de Pressler, os modelos de simples função de Kozak et al. (1969) e Thomas e Parresol (1991), ambos heteroscedásticos, possuíam erros abaixo de 1,2 m e quase o mesmo MAE que o segmentado e de expoente-variável. Basicamente, todos os modelos em sua estrutura heteroscedástica superestimam essa medida, sendo o de Sharma e Oderwald (2001) com o maior percentual do ME (aproximadamente 6%). Nos demais modelos as superestimativas são menores que 1%. O gráfico de resíduos sinaliza o bom desempenho desta categoria de modelo, exceto para a função de Sharma e Oderwald (2001) (Figura 2.13g-h). Nas Figuras 2.13a-f, as diferenças entre as funções de Kozak et al. (1969) e Thomas e Parresol (1991) são negligenciáveis e foram semelhantes ao segmentado (Figura 2.14a-b). Por outro lado, o de expoente-variável tem maior tendência em subestimar esta medida de forma nas menores árvores (Figura 2.14c-d).

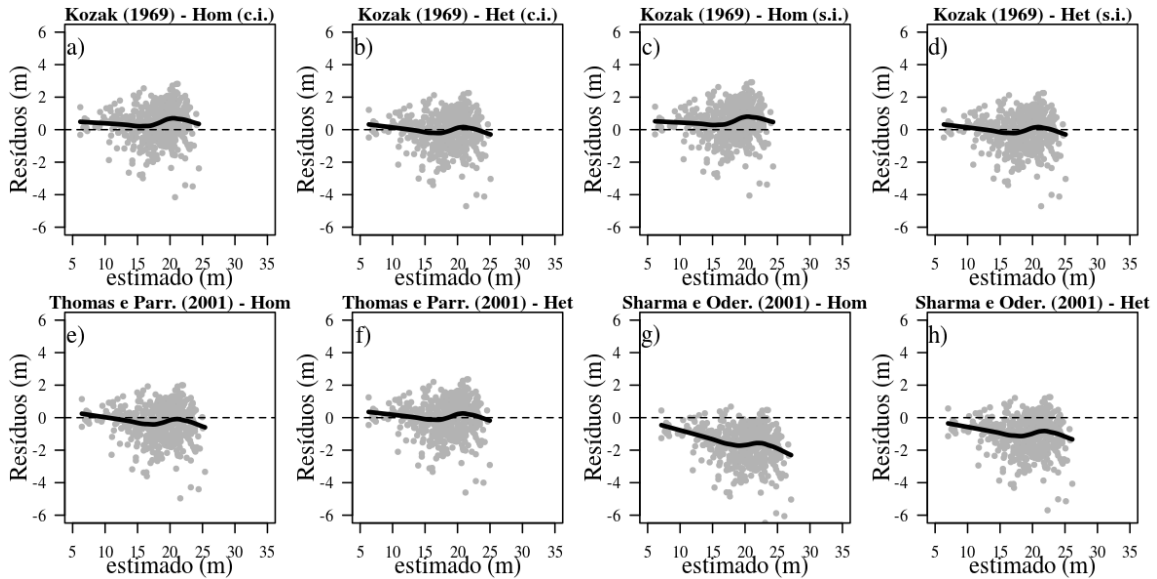


Figura 2.13: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos de simples função para a altura de Pressler. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

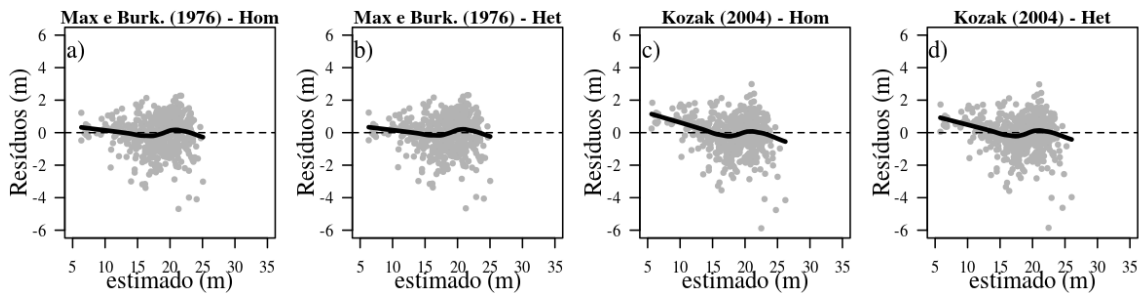


Figura 2.14: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos segmentado e de expoente-variável para a altura de Pressler. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

A semelhança do modelo de Kozak et al. (1969) com o modelo segmentado parte do pressuposto de que em sua derivação, constitui a união de três expressões do mesmo modelo parabólico unidos a partir de restrições aos parâmetros para assegurar continuidade de cada segmento (Max e Burkhardt, 1976). Na Figura 2.14a e 2.14b o modelo segmentado se mostrou menos enviesado que o expoente-variável, embora todos eles indiquem tendências semelhantes aos modelos de simples função para a altura de Pressler. Neste caso, considerar heteroscedasticidade não foi suficiente para contornar esta problemática principalmente no modelo segmentado. O modelo perde sua eficácia principalmente nas menores árvores, abaixo dos 10m de altura, embora em menor escala que o de expoente-variável. Inconsistências desta magnitude para esta medida são esperadas, já que a altura de Pressler como medida de forma tende a representar melhor árvores de maior porte. Outra possível razão é que os modelos são concebidos para estimar diâmetros nas respectivas alturas e não o contrário.

Em análise às estimativas dos diâmetros de Hossfeld, embora tenha fornecido melhor precisão em termos do MAE e ME, os gráficos de resíduos apontam maiores inconsistências que a própria altura de Pressler. Em termos gerais, todos os modelos de simples função superestimam de maneira semelhante e em grande escala esta medida nas árvores maiores, exceto o modelo de Sharma e Oderwald (2001) homoscedástico com valores de MAE e ME de 4,91% e -3,96%, respectivamente (Figura 2.15).

Na Figura 2.16c e 2.16d o modelo de Kozak (2004) foi superior ao modelo segmentado de Max

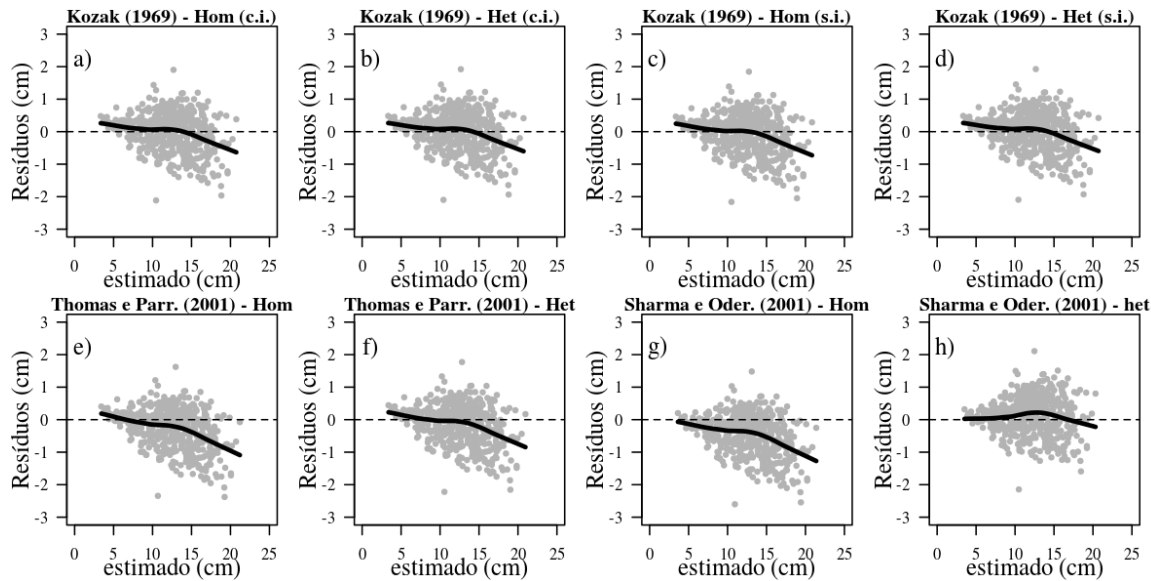


Figura 2.15: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos de simples função para o diâmetro de Hossfeld. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

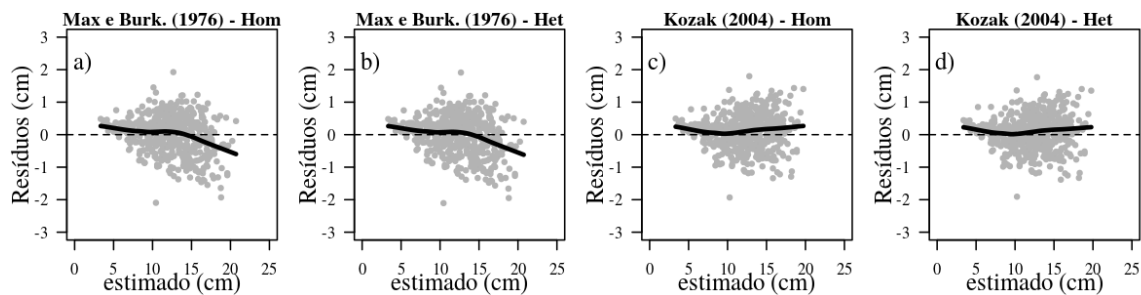


Figura 2.16: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos segmentado e expoente variável para o diâmetro de Hossfeld. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

e Burkhart (1976) nas estimativas do diâmetro de Hossfeld. Neste caso, o modelo de expoente-variável heteroscedástico foi o que obteve estimativas menos enviesadas dentre todos os modelos (RMSE: 0,5456; MAE: 3,58%; ME: 0,51%).

As Figuras 2.17 e 2.18 mostram a dispersão das estimativas dos modelos para o diâmetro de Hohenadl, dos modelos de simples função, segmentados e de expoente-variável. Observa-se que o modelo de Kozak et al. (1969), em todas as situações, não proporcionou boas estimativas para esta medida de forma. Embora os modelos de Thomas e Parresol (1991) e Sharma e Oderwald (2001) tenham obtido resultados de RMSE, MAE e ME próximos dos modelos segmentados e de expoente-variável, a dispersão dos resíduos indicam instabilidade na detecção do diâmetro de Hohenadl. É importante destacar que aplicar uma função de proporcionalidade no modelo de Sharma e Oderwald (2001), fez com que as estatísticas de precisão desta medida de forma fossem piores que o mesmo modelo homoscedástico (Tabela 2.5). Por outro lado, os modelos segmentado e de expoente-variável foram mais coerentes neste sentido, o que pode fornecer preliminarmente explicações mais realistas sobre a forma do tronco. Mais uma vez o modelo de Kozak (2004) heteroscedástico foi o que apresentou melhor desempenho, em observância à dispersão dos resíduos quanto os valores de RMSE, MAE e ME na Tabela 2.5.

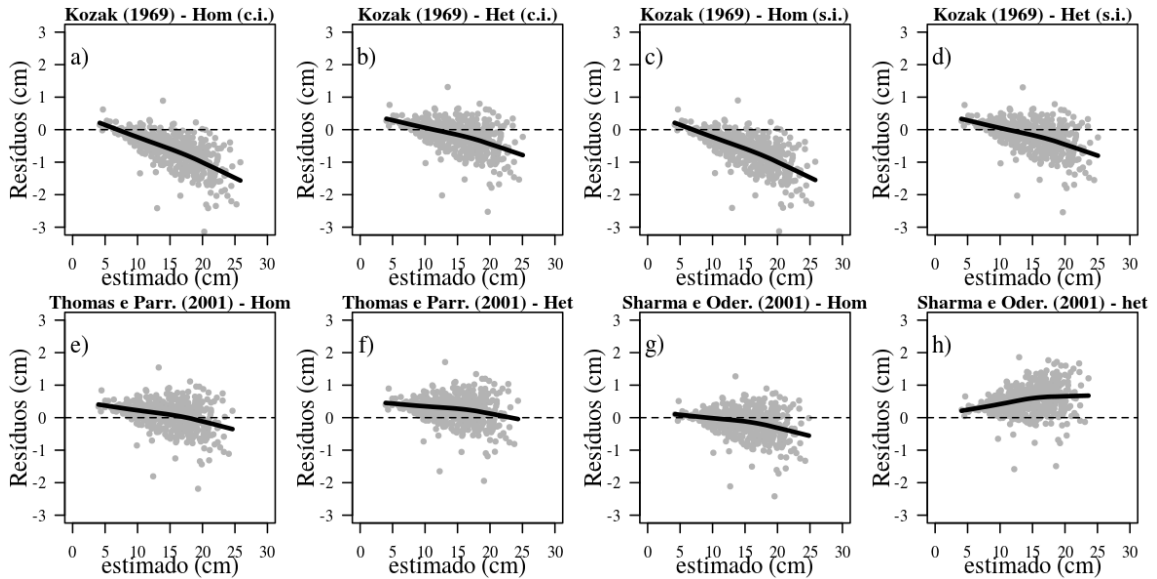


Figura 2.17: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos de simples função para o diâmetro de Hohenadl. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

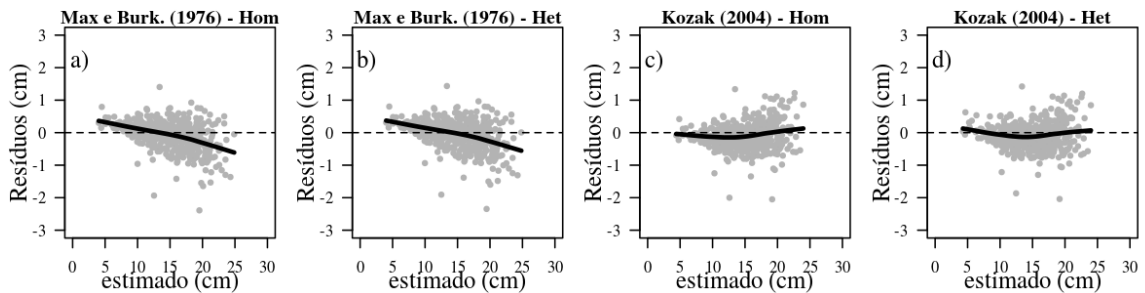


Figura 2.18: Gráfico de resíduos (*resíduos vs. estimados*) dos modelos segmentado e de expoente-variável para o diâmetro de Hohenadl. Hom: homoscedástico; Het: heteroscedástico. A linha de suavização em preto indica o comportamento da tendência central dos desvios entre os valores preditos e observados.

2.4 Discussão

Como o presente capítulo possui caráter exploratório, os tratamentos (espaçamento e clone) não foram computados como efeito nas equações de *taper*. O intuito foi observar apenas a tendência geral das suas estimativas para obter possíveis indicadores de forma. A escolha dos modelos foi guiada a partir da categoria e sua relevância, seja pela sua utilização frequente na literatura especializada, quanto pela sua capacidade interpretativa da forma por meio dos estimadores. É nítido que modelos mais flexíveis naturalmente fornecem perfis mais próximos da realidade e geralmente são elaborados considerando alguns critérios que os tornam ideais (Goodwin, 2009). No entanto, os modelos de simples função são conhecidos pela sua facilidade de interpretação sobre a forma, principalmente pelo menor número de parâmetros. Por isto que, independente do quão complexa seja a expressão desses modelos, o objetivo foi verificar se as funções conseguem expressar implicitamente as medidas de forma avaliadas.

A abordagem aqui apresentada buscou, a partir das medidas de forma, obter indicadores da forma do tronco por meio da expressão dos parâmetros do modelo. Como as predições de um modelo ajustado por máxima verossimilhança podem ser consideradas funções das estimativas de máxima verossimilhança dos seus parâmetros, essa característica pode ser estendida ao erro de predição visto que estes são uma função linear das predições (Batista, 2014).

Os fatores biológicos sobre a forma do tronco têm sido objeto de interesse por muitos anos, embora ainda careça de amparo teórico conclusivo (Larson, 1963; West, 2015). Por outro lado, as medidas de forma aqui mencionadas não somente possuem amparo teórico sobre a forma do tronco de espécies excurrentes, como ampla aplicação prática no cálculo de volume de árvores em pé (McTague, 1992; Ducey e Williams, 2011; McTague et al., 2020). Mesmo que medidas auxiliares, além das convencionais (*dap* e altura total), possam onerar os procedimentos de inventário, diante da complexidade dos fatores de variação torna-se evidente a necessidade do uso de mais medidas do tronco (McTague et al., 2020).

As medidas adicionais podem ser adquiridas a partir de dendrômetros ópticos, mesmo que seu uso seja ainda controverso. Quando a acurácia desses aparelhos é comprometida, o uso de equações de *taper* se torna imperativo em obtê-las por meio da interpolação das estimativas dos diâmetros (Westfall et al., 2016; McTague et al., 2020). Assim, é importante avaliar o comportamento das diferentes categorias de modelos frente às principais medidas de forma e observar não somente qual deles possui capacidade interpretativa sobre elas mas sobretudo boas estimativas. Isto porque é comum usar estimativas em outras equações e há uma crescente preocupação na propagação do erro (Fortin e DeBlois, 2010). Embora alguns modelos não possuam a capacidade de inversão algébrica para obter alturas a partir de um diâmetro específico (geralmente comercial), métodos numéricos podem ser aplicados e os resultados aqui apresentados indicam que o procedimento é coerente. O mesmo procedimento é difundido em outros trabalhos com modelos desta natureza (Hussain et al., 2021).

O modelo parabólico de Kozak et al. (1969) possui a expressão básica da forma do tronco quando este assume a característica de um parabolóide quadrático. É problemático em expressar as medidas na base e na porção superior do tronco, geralmente mais cônica e, não possui as propriedades ideais (Burkhart e Tomé, 2012). Mesmo que o modelo não possua estas propriedades, aparentemente atribuir uma função de proporcionalidade para a variância (heteroscedasticidade) possibilitou que a imposição ao intercepto (assumir $d_i = 0$ quando $h_i = H$) fosse descartada. Ou seja, generalizar o modelo com estrutura heteroscedástica habilita considerar pelo menos esta propriedade sem a necessidade de imposição. Sua expressão embora simples e com poucos parâmetros, possuiu estatísticas de precisão das medidas de forma de Pressler e Hossfeld bem próximas ao modelo segmentado mas não nas estimativas gerais dos diâmetros. É importante mencionar que embora a função não possua um parâmetro específico de forma, a composição de seus parâmetros funciona como um fator de forma².

Em análise ao modelo trigonométrico, observa-se que o coeficiente de forma c foi aproximadamente igual a 2,1. Os intervalos dos perfis da NRLL no entanto, indicam que a variação deste parâmetro possui sensibilidade quase nula às mudanças de forma do tronco, mesmo com dados heterogêneos. Este parâmetro é amplamente discutido no trabalho de Thomas e Parresol (1991) e pode ser melhor visualizado a partir da simulação com os resultados encontrados por eles e os descritos aqui (Figura 2.19a).

Mudanças nos valores da simulação expõem diferentes formas do tronco, que vai desde um cone perfeito ($c: 0$) até o parabolóide ($c: 2$) (Figura 2.19b). Entretanto, este parâmetro não deve ser analisado de maneira individualizada e sim a partir das mudanças no parâmetro β_2 (Figura 2.19c). Este parâmetro é mais sensível e portanto mais simples de ser interpretado. Embora necessite de maiores investigações, valores iguais a 2 podem indicar alguma influência dos atributos da árvore, como a copa, já que há nítida mudança da curva na altura relativa entre 0,6 e 0,7H (Figura 2.19b). Esta pode ser uma das razões para que o modelo tenha obtido boas estimativas para a altura de Pressler e inferiores no diâmetro de Hossfeld, por controlar a sinuosidade da curva nesta região do tronco. O parâmetro β_1 pode ser considerado um parâmetro de escala e indica maior ou menor dimensão na base em termos de volume e o β_4 a extensão da região entre a base e o sistema radicular (Figura 2.19a).

Apesar do modelo adimensionalmente compatível de Sharma e Oderwald (2001) em termos ge-

²Este fator é obtido a partir da expressão $f = \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\beta}_1}{2} + \frac{\hat{\beta}_2}{3}$ (Burkhart e Tomé, 2012, p. 14-15)

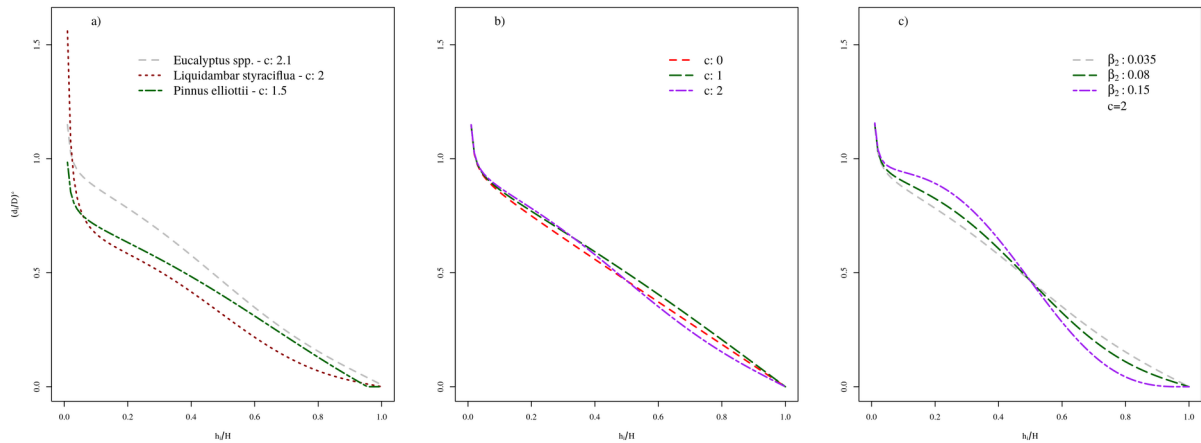


Figura 2.19: Curvas paramétricas do modelo de Thomas e Parresol (1991). Nas figuras temos: a) comparação da equação do presente trabalho (modelo heteroscedástico) e das espécies estudadas por Thomas e Parresol (1991); b) simulação com diferentes valores do parâmetro c e fixado os valores dos outros parâmetros do modelo heteroscedástico; c) simulação com diferentes valores de β_2 e fixado o valor do parâmetro c .

rais não ter obtido as melhores estimativas, o seu parâmetro β_1 possui algumas particularidades. Segundo os próprios autores quando o coeficiente $\hat{\beta}_1$ é maior que 2, indica que as árvores possuem mais volume na base do tronco e fornecerá estimativas consistentes dos diâmetros; se for igual a 2, é um indicador de um parabolóide perfeito assumindo a condição $d_i = D$ quando $h_i = 1,37m$; menor que 2, inconsistências na base do tronco ou abaixo do dap são observadas. O valor encontrado foi um pouco acima de 2 (ver Tabela 2.6, material suplementar), tanto no homoscedástico quanto no heteroscedástico, o que indica um parabolóide. Entretanto, a expressão do parâmetro não foi observada nas estimativas da altura de Pressler, mas sim no diâmetro de Hossfeld. Segundo McTague et al. (2020) tanto a altura de Pressler quanto o diâmetro de Hossfeld são expressões exatas de cones e parabolóides. Isto sinaliza que este modelo além de não obter boas estimativas desta medida, bem como apresentar inconsistências tanto na base quanto no topo, o parâmetro não fornece a melhor descrição sobre a forma, conforme exemplifica a Figura 2.20.

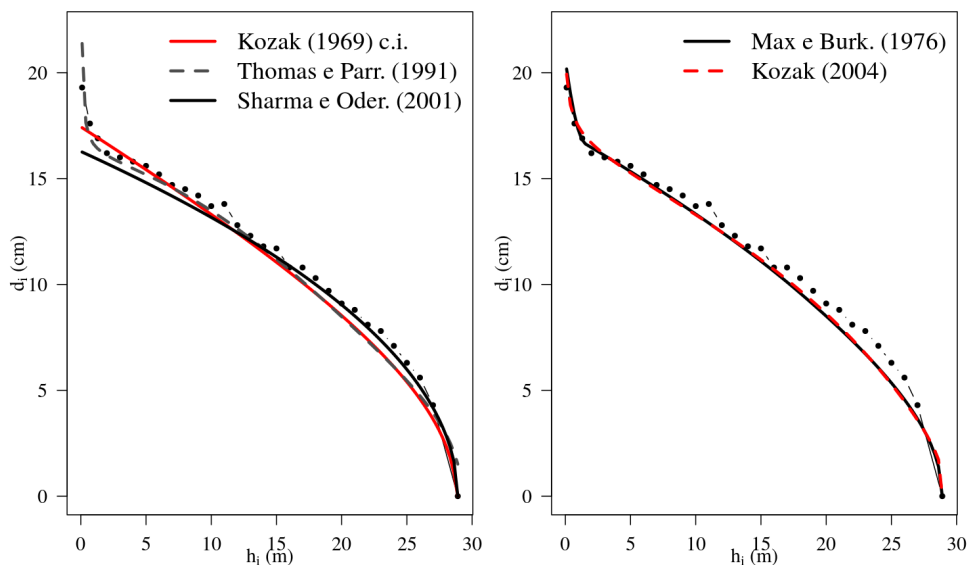


Figura 2.20: Perfil estimado por todos os modelos para uma árvore com dap de 16,9cm e altura total de 28,9m. As curvas são os perfis estimados e os pontos são os valores dos diâmetros observados.

O modelo segmentado de seis parâmetros é o mais utilizado em trabalhos de *taper* tanto pela sua capacidade preditiva quanto pela facilidade em impor condições aos parâmetros ou simplesmente pela maior flexibilidade (Max e Burkhart, 1976; Czaplewski e McClure, 1988; Thomas e Parresol, 1991; Kozak e Smith, 1993; Maguire e Batista, 1996; Sabatia e Burkhart, 2015; Cao e Wang, 2015; MacFarlane e Weiskittel, 2016). Foi o modelo que expressou as melhores estimativas da altura de Pressler. Isto pode ter ocorrido devido a proximidade do coeficiente $\hat{\alpha}_1$ em assumir valores próximos a 70%. Estudos com modelos segmentados têm relatado a associação desses pontos com variáveis de copa (Maguire e Hann, 1987), mas que podem ter uma relação mais intrínseca com a altura de Pressler.

A segmentação do modelo com três expressões para cada parte do tronco permite, por meio dos pontos de inflexão, uma análise mais detalhada dos atributos dele. No trabalho de Max e Burkhart (1976), os autores observaram que esses pontos de inflexão podem estar entre 8 e 11% na base, bem como entre 75 e 79% no topo a depender do padrão florestal (plantadas ou naturais). Na espécie *Liquidambar styraciflua* L. do mesmo país, os pontos foram determinados em 8% na base e 67% no topo (Thomas e Parresol, 1991). Outras posições podem ser vistas em Sharma e Burkhart (2003) e bem revisitada em Burkhart e Tomé (2012). Se a forma das árvores é a expressão dos parâmetros nos pontos de inflexão, isso mostra a influência da espécie nesse atributo. Segundo McTague (1992) a altura de Pressler está localizada em 75% do tronco em árvores que assumem o formato parabolóide. Isto explica o interesse em incluir esta medida de forma nas rotinas de campo nos EUA em espécies de *Pinnus sp.* (McTague et al., 2020).

O modelo de expoente-variável foi o que apresentou as melhores estimativas para os diâmetros de Hossfeld e Hohenadl. Como o modelo possui as propriedades ideais, seu melhor desempenho no diâmetro de Hohenadl pode estar atrelado ao fato da medida estar próxima do *dap* em árvores de pequeno e médio porte. A medida de Hohenadl é geralmente escolhida por ser uma medida com baixa correlação ao *dap*, o que a torna menos influenciada pelo tamanho da árvore na aplicação do quociente de forma (Assmann, 1970).

A vantagem do modelo de expoente-variável é a sua capacidade de inclusão de outras medidas que são atributos do tronco em seu expoente (Kozak, 1998, 2004), bem como na adaptação do modelo para adição de variáveis de povoamento (Muhairwe, 1994). Algumas dessas variáveis, como a razão D/H do modelo proposto por Kozak (1988), possui alta correlação com a razão de copa das árvores em *Eucalyptus spp.* (Muhairwe, 1999). Mais recentemente, a razão $\frac{H_{pr}}{H}$ e $(\frac{d_{1/3H}}{D})^2$, altura relativa de Pressler e diâmetro relativo de Hossfeld respectivamente, foram associadas ao volume e a forma em modelo de expoente-variável localizado (McTague et al., 2020). Isto torna possível a construção de hipóteses a partir de modelos candidatos e entender os fatores intraespecíficos (atributos do tronco, copa e material genético), bem como fatores externos (espaçamento) a partir destas relações. Na maneira adotada neste capítulo não foi possível observar a partir dos parâmetros interpretações sobre a forma, embora o modelo possua ótima capacidade de expressar as medidas de forma a partir de seus parâmetros.

O termo que controla a inflexão do modelo de expoente-variável de Kozak (p) tem sido explorado em florestas de *Eucalyptus* no Brasil no sentido de obter estimativas mais precisas dos diâmetros com e sem casca, embora sem sucesso (Alves et al., 2019). Por ser um termo facilmente adaptável e que possui impacto direto na descrição do perfil médio do tronco, justifica as proposições realizadas ao longo dos anos (Kozak, 1988, 2004). Portanto, é possível que ao incluir as medidas de forma como referência à inflexão da curva do modelo, inferências possam ser aplicadas nos diferentes materiais genéticos e espaçamentos.

2.5 Conclusões

Atribuir uma função de proporcionalidade para a variância forneceu as melhores estimativas e deve ser aplicada em dados dessa natureza. Nas estimativas das medidas de forma, os modelos segmentado

e de expoente-variável são os mais indicados. Os modelos segmentado e trigonométrico foram os melhores em estimar a altura de Pressler. O de expoente-variável consegue boas estimativas em quase todas as medidas de forma, exceto na altura de Pressler. O maior viés se dá quando essa altura está localizada abaixo de 10 m, o que favoreceu o modelo segmentado, mas essa diferença pode ser negligenciável na prática.

O coeficiente $\hat{\alpha}_1$ do modelo segmentado parece sinalizar alguma relação com a altura de Pressler. Os modelos parabólico e trigonométrico são equivalentes aos segmentado e expoente-variável somente nas estimativas da altura de Pressler e do diâmetro de Hossfeld.

Os modelos de simples função analisados foram satisfatórios nas estimativas gerais dos diâmetros, exceto o modelo adimensionalmente compatível. Neste último, aplicar uma função de proporcionalidade para a variância acarretou em maior erro quando estimado o diâmetro de Hohenadl.

O modelo adimensionalmente compatível possui um parâmetro de forma, porém não foi realista às medidas de forma propostas. Por outro lado, o modelo parabólico mesmo que não possua um parâmetro específico de forma, a expressão conjunta de seus parâmetros retorna o próprio fator de forma.

Referências

- Alvares, C. A., Stape, J. L., Sentelhas, P. C., de Moraes, G., Leonardo, J., e Sparovek, G. (2013). Köppen's climate classification map for Brazil. *Meteorologische Zeitschrift*, 22(6):711–728.
- Alves, J. d. A., Isaac Júnior, M. A., Calegario, N., Possato, E. L., e Melo, E. d. A. (2019). Avaliação de funções de afilamento de expoente-variável para árvores de eucalyptus spp. *Scientia Forestalis*, 47(121):45–58.
- Alves, P. B. (2021). Relação entre atividades de copa e cambial de clones de eucalyptus spp. em diferentes densidades de plantio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.
- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield study*. Pergamon, Oxford, England.
- Batista, J. L. F. (2014). Biometria florestal segundo o axioma da verossimilhança-com aplicações em mensuração florestal. *Universidade de São Paulo-USP, Piracicaba-SP*.
- Bolker, B. M. (2008). *Ecological models and data in R*. Princeton University Press.
- Buja, A., Hastie, T., e Tibshirani, R. (1989). Linear smoothers and additive models. *The Annals of Statistics*, pages 453–510.
- Burkhardt, H. E. e Tomé, M. (2012). *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer, New York, 1st. edition.
- Burnham, K. P. e Anderson, D. P. (2002). *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer, New York.
- Cao, Q. V. e Wang, J. (2015). Evaluation of methods for calibrating a tree taper equation. *Forest Science*, 61(2):213–219.
- Czaplewski, R. L. e McClure, J. P. (1988). Conditioning a segmented stem profile model for two diameter measurements. *Forest Science*, 34(2):512–522.
- Ducey, M. J. e Williams, M. S. (2011). Comparison of Hossfeld's method and two modern methods for volume estimation of standing trees. *Western Journal of Applied Forestry*, 26(1):19–23.
- Fortin, M. e DeBlois, J. (2010). A statistical estimator to propagate height prediction errors into a general volume model. *Canadian journal of forest research*, 40(10):1930–1939.
- Garcia, C. H. (1989). *Tabelas para classificação do coeficiente de variação*. IPEF, 1989. 11 p.
- Gonçalves, J. L. d. M., Álvares, C. A., Gonçalves, T. D., Moreira, R. M., Mendes, J. C. T., e Gava, J. L. (2012). Mapeamento de solos e da produtividade de plantações de eucalyptus grandis, com uso de sistema de informação geográfica. *Scientia Forestalis*, 40(94):187–201.
- Goodwin, A. N. (2009). A cubic tree taper model. *Australian Forestry*, 72(2):87–98.
- Hussain, A., Shahzad, M. K., e Jiang, L. (2021). The effect of crown dimensions on stem profile for dahurian larch, Korean spruce, and Manchurian fir in northeast China. *Forests*, 12(4):398.
- Kershaw Jr, J. A., Ducey, M. J., Beers, T. W., e Husch, B. (2016). *Forest mensuration*. John Wiley & Sons, New York.
- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11):1363–1368.

- Kozak, A. (1997). Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Canadian Journal of Forest Research*, 27(5):619–629.
- Kozak, A. (1998). Effects of upper stem measurements on the predictive ability of a variable-exponent taper equation. *Canadian journal of forest research*, 28(7):1078–1083.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4):507–515.
- Kozak, A., Munro, D., e Smith, J. (1969). Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*, 45(4):278–283.
- Kozak, A. e Smith, J. (1993). Standards for evaluating taper estimating systems. *The Forestry Chronicle*, 69(4):438–444.
- Larson, P. R. (1963). Stem form development of forest trees. *Forest science*, 9(suppl_2):a0001–42.
- MacFarlane, D. W. e Weiskittel, A. R. (2016). A new method for capturing stem taper variation for trees of diverse morphological types. *Canadian Journal of Forest Research*, 46(6):804–815.
- Maguire, D. A. e Batista, J. L. (1996). Sapwood taper models and implied sapwood volume and foliage profiles for coastal douglas-fir. *Canadian Journal of Forest Research*, 26(5):849–863.
- Maguire, D. A. e Hann, D. W. (1987). Equations for predicting sapwood area at crown base in southwestern oregon douglas-fir. *Canadian Journal of Forest Research*, 17(3):236–241.
- Max, T. A. e Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22(3):283–289.
- McTague, J. P. (1992). Enhanced estimates of total volume with any single upper-stem measurement. *Forest ecology and management*, 48(1-2):55–67.
- McTague, J. P., Scolforo, H. F., e Scolforo, J. R. S. (2020). Early volume formulas, taper, implicit volume ratio, and auxiliary information: A new system of volume equations invariant to silvicultural practices, site, and genetic pedigree. *Forest ecology and management*, 475(1):1.
- Muhairwe, C. K. (1994). Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(9):1904–1913.
- Muhairwe, C. K. (1999). Taper equations for eucalyptus pilularis and eucalyptus grandis for the north coast in new south wales, australia. *Forest Ecology and Management*, 113(2-3):251–269.
- Ormerod, D. (1973). A simple bole model. *The Forestry Chronicle*, 49(3):136–138.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Robinson, A. P. e Hamann, J. D. (2010). *Forest analytics with R: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- Sabatia, C. O. e Burkhart, H. E. (2015). On the use of upper stem diameters to localize a segmented taper equation to new trees. *Forest Science*, 61(3):411–423.
- Shahzad, M. K., Hussain, A., e Jiang, L. (2020). A model form for stem taper and volume estimates of asian white birch (*Betula platyphylla*): a major commercial tree species of northeast china. *Canadian Journal of Forest Research*, 50(3):274–286.

- Sharma, M. e Burkhart, H. E. (2003). Selecting a level of conditioning for the segmented polynomial taper equation. *Forest science*, 49(2):324–330.
- Sharma, M. e Oderwald, R. G. (2001). Dimensionally compatible volume and taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(5):797–803.
- Sharma, M. e Parton, J. (2009). Modeling stand density effects on taper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis. *Forest science*, 55(3):268–282.
- Sharma, M. e Zhang, S. (2004). Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern canada. *Forest ecology and management*, 198(1-3):39–53.
- Taylor, L. R. (1961). Aggregation, variance and the mean. *Nature*, 189(4766):732–735.
- Thomas, C. E. e Parresol, B. R. (1991). Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 21(7):1132–1137.
- West, P. W. (2015). *Tree and forest measurement*. John Wiley & Sons, New York.
- Westfall, J. A., McRoberts, R. E., Radtke, P. J., e Weiskittel, A. R. (2016). Effects of uncertainty in upper-stem diameter information on tree volume estimates. *European Journal of Forest Research*, 135(5):937–947.

2.6 Material suplementar

Tabelas dos coeficientes dos modelos de *taper*

Tabela 2.6: Estimativas dos parâmetros dos modelos de *taper* de simples função. As siglas 'c.i.' e 's.i.' significam com intercepto e sem intercepto respectivamente. Já os termos 'Hom' e 'Het' são as estruturas de ajuste dos modelos, em sua forma homoscedástica e heteroscedástica. As últimas linhas representam os parâmetros da função de proporcionalidade da variância dos modelos heteroscedásticos; s é o desvio padrão dos modelos homoscedásticos.

Coef.	Modelos							
	Kozak (1969) (c. i.)		Kozak (1969) (s. i.)		Thomas e Parresol (1991)		Sharma e Oderwald (2001)	
	Hom	Het	Hom	Het	Hom	Het	Hom	Het
$\hat{\beta}_0$	1.1593	1.0653						
$\hat{\beta}_1$	-1.7871	-1.4023	-1.7158	-1.4161	-0.9537	-0.9219	2.0078	2.0389
$\hat{\beta}_2$	0.6597	0.3337	0.5640	0.3483	0.0328	0.0350		
$\hat{\beta}_3$					0.0028	0.0037		
$\hat{\beta}_4; \hat{c}$					2.1906	2.0739		
s	0.0888		0.0894		0.0737		0.1109	
σ^2		0.0324		0.0325		0.0341		0.0375
δ		-0.4205		-0.4193		-0.3815		-0.4517

Tabela 2.7: Resultados dos coeficientes dos modelos de *taper* segmentado e de expoente-variável. Os termos 'Hom' e 'Het' são as estruturas de ajuste dos modelos, em sua forma homoscedástica e heteroscedástica. As últimas linhas representam os parâmetros da função de proporcionalidade da variância dos modelos heteroscedásticos; s é o desvio padrão dos modelos homoscedásticos.

Coef.	Modelos			
	Max e Burkhart (1976)		Kozak (2004)	
	Hom	Het	Hom	Het
$\hat{\alpha}_0$			0.8775	0.7815
$\hat{\alpha}_1$	0.6993	0.6156	0.9098	0.8894
$\hat{\alpha}_2$	0.0504	0.0528	0.1195	0.1712
$\hat{\beta}_1$	-1.6540	-1.5985	0.1951	0.1705
$\hat{\beta}_2$	0.4895	0.4589	-0.4695	-0.3302
$\hat{\beta}_3$	-0.2462	-0.2739	0.6445	0.5969
$\hat{\beta}_4$	175.5077	162.0989	1.6523	1.1870
$\hat{\beta}_5$			0.0339	0.0360
$\hat{\beta}_6$			-0.4181	-0.4457
s	0.0641		0.6184	
σ^2		0.0356		0.5492
δ		-0.3035		-0.0835

Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos modelos de *taper*

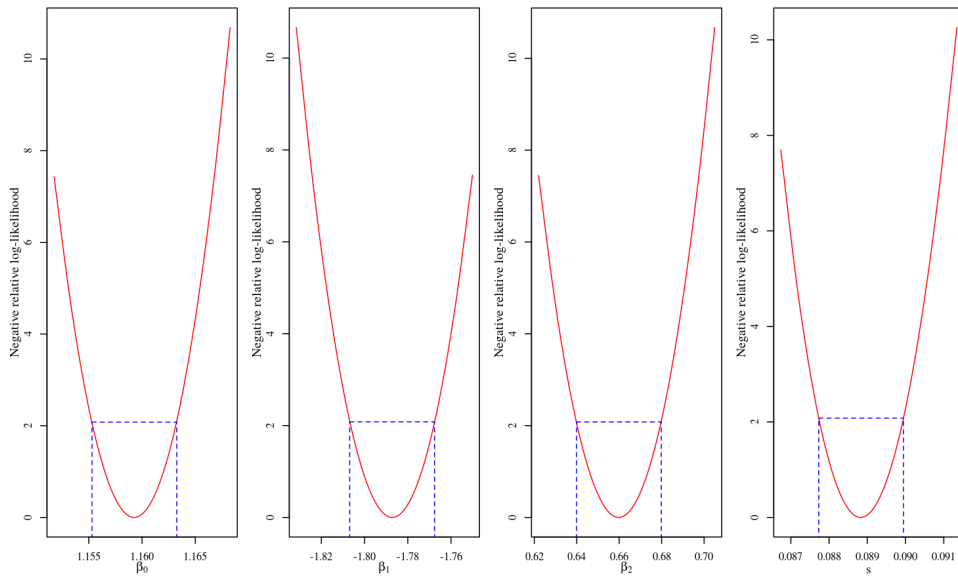


Figura 2.21: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Kozak (1964) ajustado em sua forma homoscedástica com o intercepto.

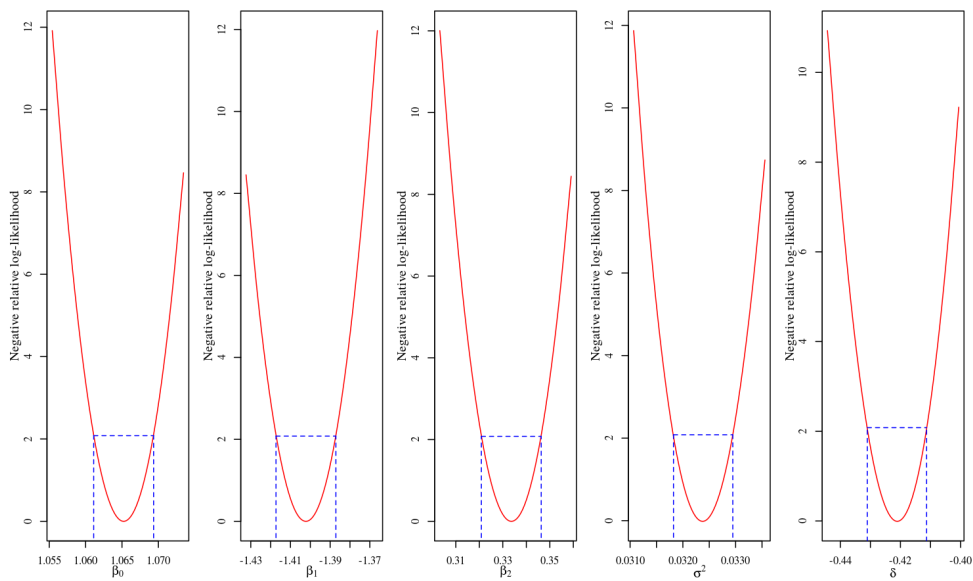


Figura 2.22: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Kozak (1964) ajustado em sua forma heteroscedástica com o intercepto.

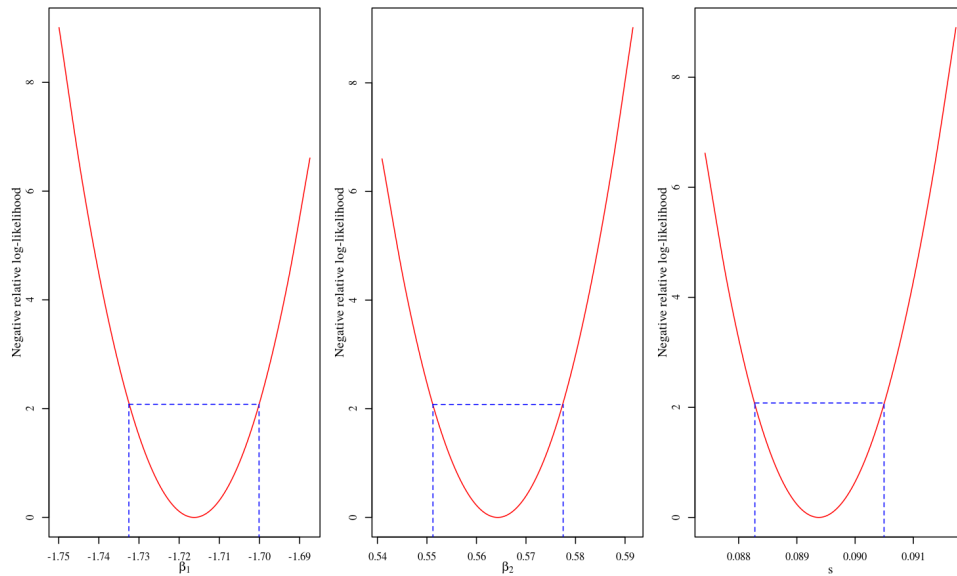


Figura 2.23: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Kozak (1964) ajustado em sua forma homoscedástica sem o intercepto.

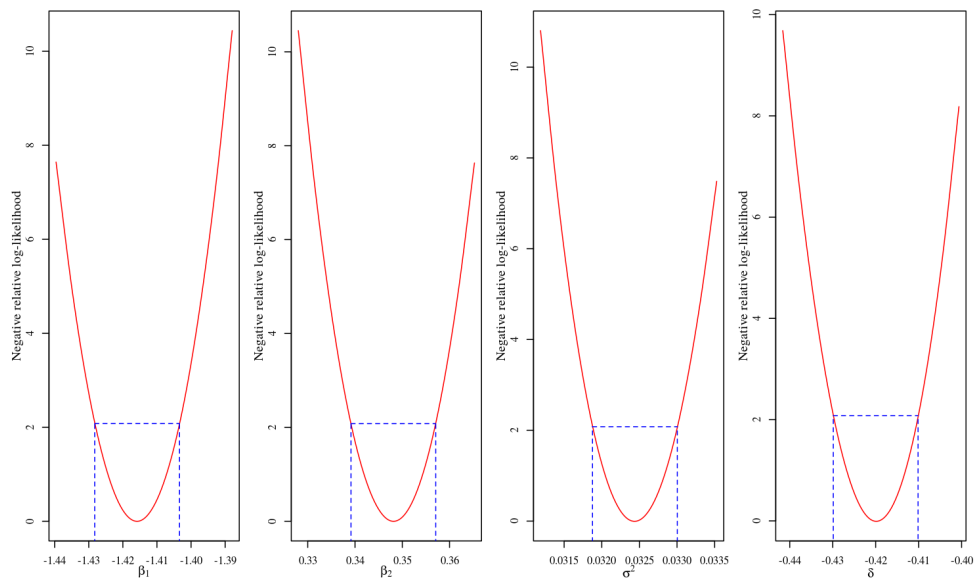


Figura 2.24: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Kozak (1964) ajustado em sua forma heteroscedástica sem o intercepto.

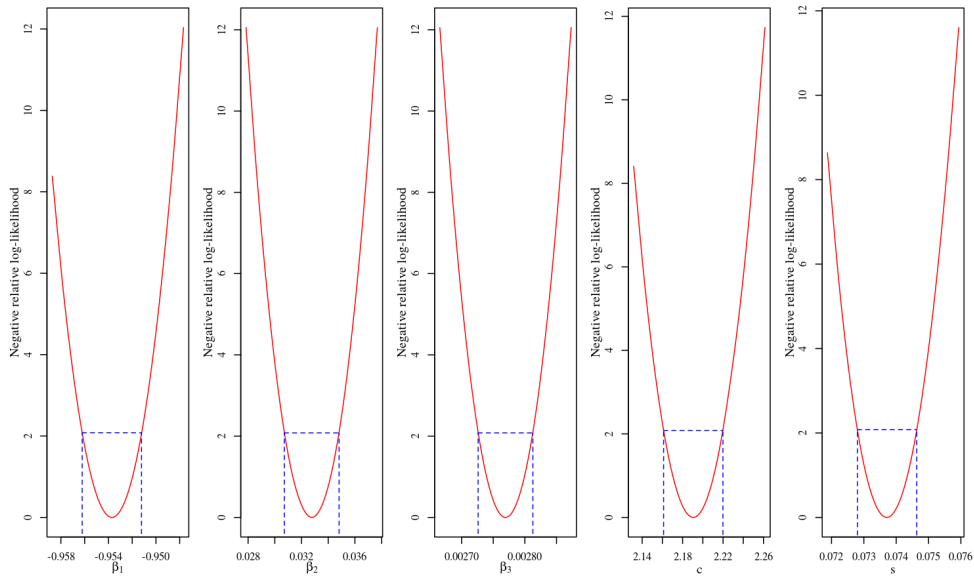


Figura 2.25: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Thomas e Parresol (1991) ajustado em sua forma homoscedástica.

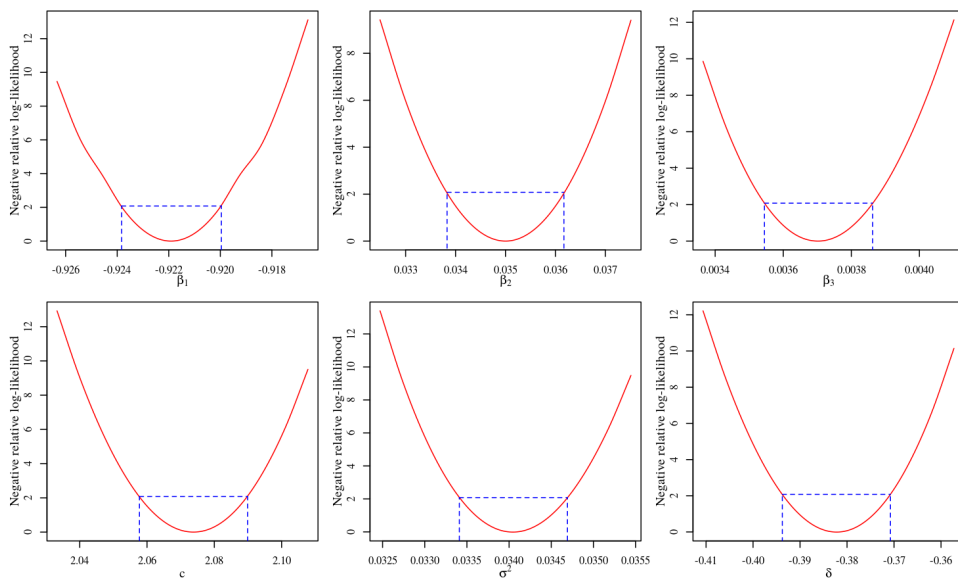


Figura 2.26: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Thomas e Parresol (1991) ajustado em sua forma heteroscedástica.

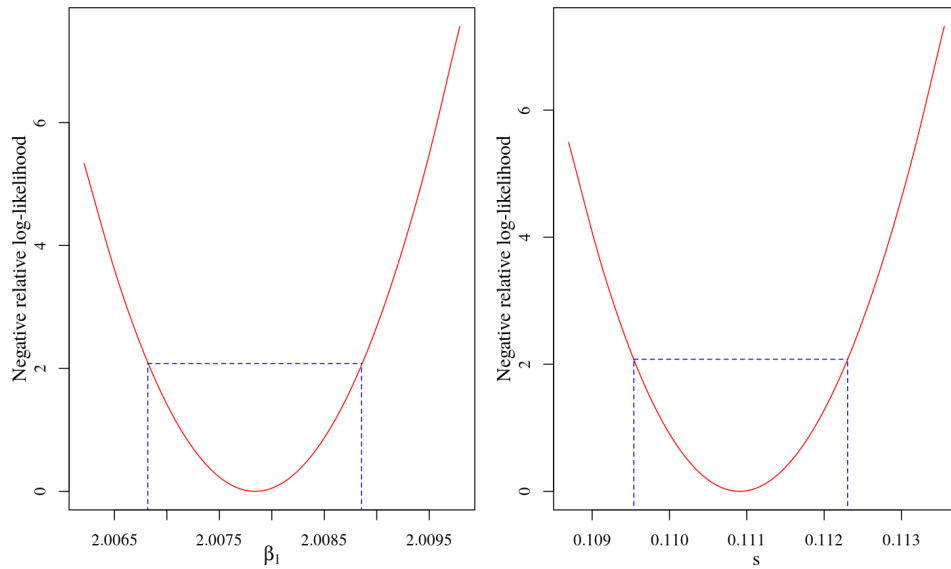


Figura 2.27: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Sharma e Oderwald (2001) ajustado em sua forma homoscedástica.

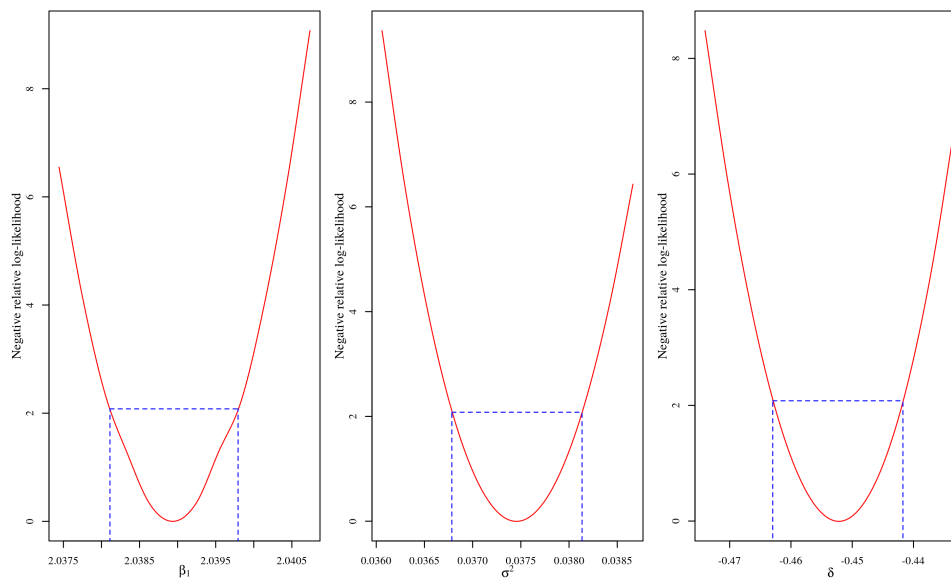


Figura 2.28: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Sharma e Oderwald (2001) ajustado em sua forma heteroscedástica.

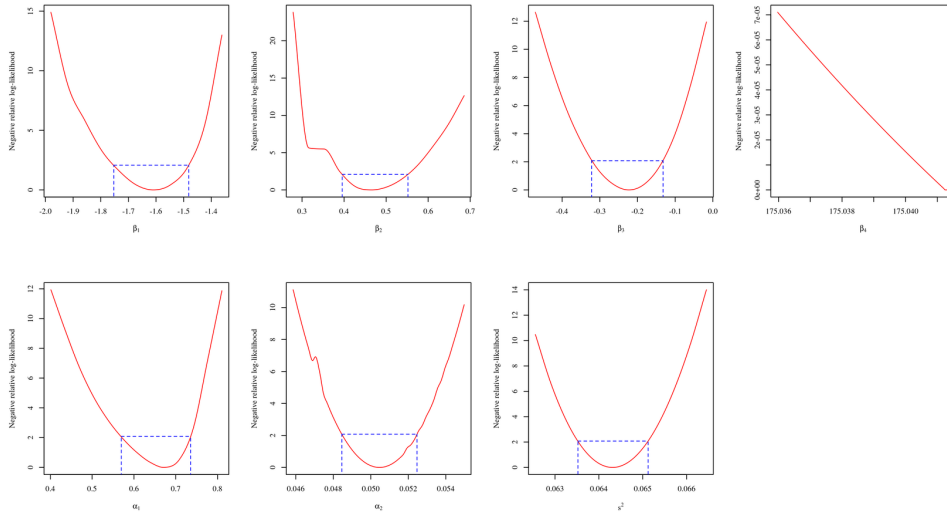


Figura 2.29: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Max e Burkhart (1976) ajustado em sua forma homoscedástica.

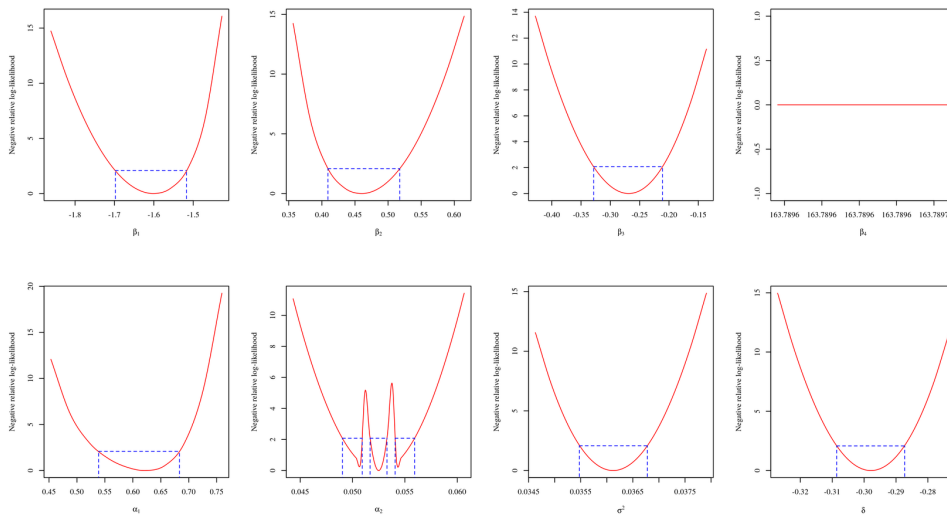


Figura 2.30: Perfis da log-verossimilhança negativa dos coeficientes do modelo de Max e Burkhart (1976) ajustado em sua forma heteroscedástica.

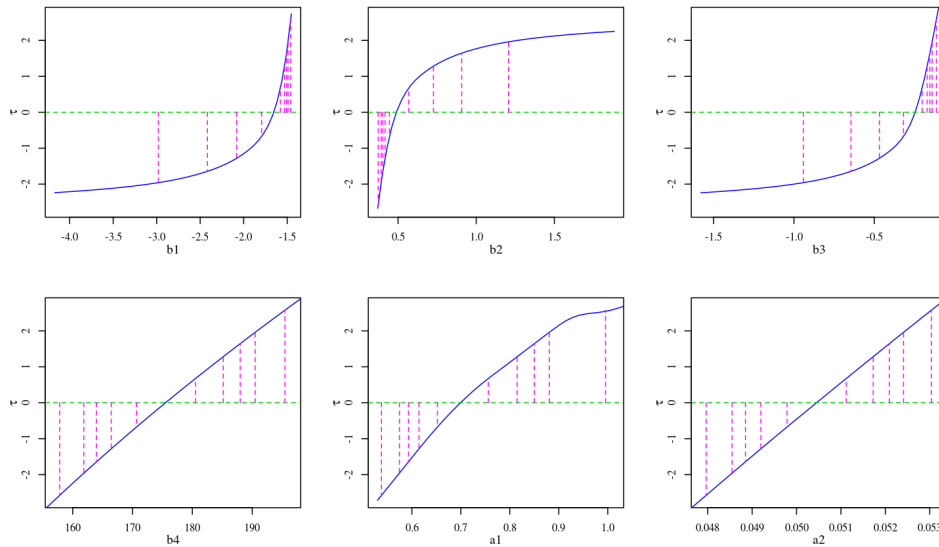


Figura 2.31: Perfis dos coeficientes do modelo de Max e Burkhart (1976) ajustado em sua forma homoscedástica pelo método dos mínimos quadrados não-lineares.

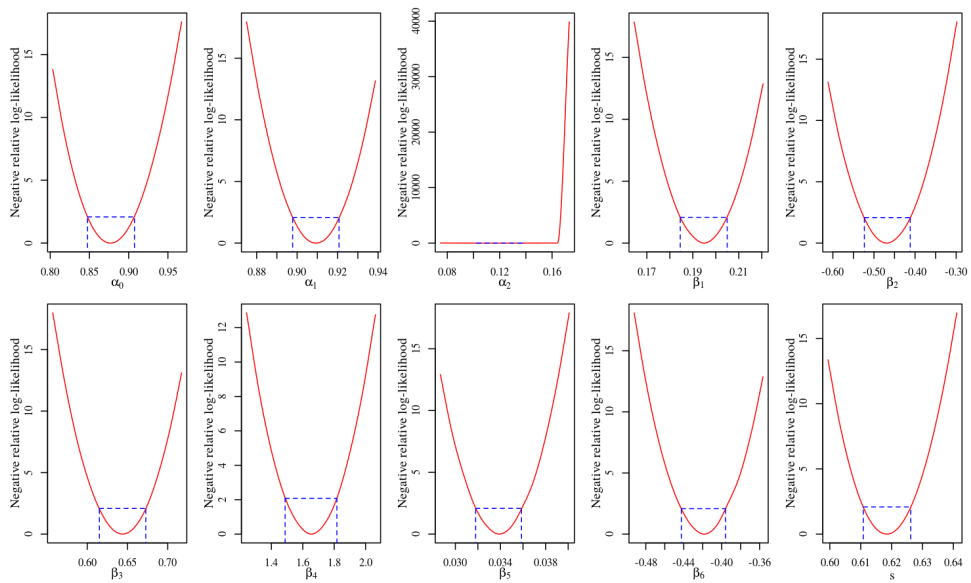


Figura 2.32: Perfis da log-verossimilhança negativa dos coeficientes do modelo de Kozak (2004) ajustado em sua forma homoscedástica.

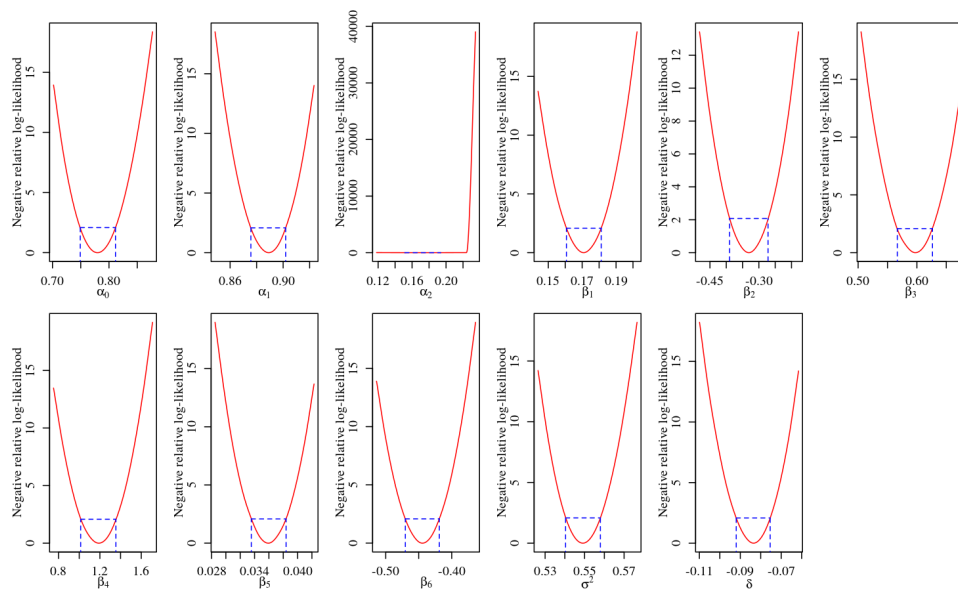


Figura 2.33: Perfis da log-verossimilhança negativa relativa dos coeficientes do modelo de Kozak (2004) ajustado em sua forma heteroscedástica.

3 INFLUÊNCIA DO MATERIAL GENÉTICO E ESPAÇAMENTO NA FORMA DO TRONCO A PARTIR DAS MEDIDAS DE FORMA E MODELOS DE *TAPER*

Resumo

O fator de forma artificial é a principal medida usada como referência na conversão do volume cilíndrico para volume de madeira. É geralmente usado para classificar o tronco entre cones e paraboloides. Outros referenciais como os quocientes de forma são pouco comuns devido a necessidade da coleta de mais medidas de diâmetro ou altura no tronco além do diâmetro à altura do peito e altura total. Ainda não se tem conhecimento se estas medidas possuem a capacidade de classificar a forma de maneira mais realista que o fator de forma artificial a partir de comparações com as curvas paramétricas de modelos de *taper* com muitos parâmetros. Assim, a hipótese deste capítulo é que antigos quocientes de forma sugeridos por Pressler, Hossfeld e Hohenadl são semelhantes ao fator de forma em descrever os diferentes clones e espaçamentos em plantios de *Eucalyptus sp.* a partir da modelagem do tronco. Os dados foram coletados na Estação Experimental de Ciências Florestais, no município de Itatinga-SP, em experimento em esquema fatorial com seis clones, três espaçamentos e seis blocos. Duas categorias de modelos de *taper* foram escolhidas: segmentado e de expoente variável. Os modelos foram ajustados pela máxima verossimilhança, com função para variância, em diferentes escalas de ajuste. Os modelos foram selecionados com base no critério de Akaike, raiz do erro quadrado médio, erro médio e absoluto. Ainda, efeitos aleatórios foram aplicados nos parâmetros do melhor modelo com base nos componentes de variação e comparado com as equações obtidas nas diferentes escalas de ajuste. O modelo de expoente-variável na escala de ajuste que considera o efeito da interação (clone:espaçamento) foi melhor que aplicar efeito aleatório para lidar com a variação dos dados. Os intervalos de verossimilhança da média de cada medida de forma observada demonstrou que o quociente de Hossfeld foi mais fiel em diferenciar a forma quando validado com a estimativa do perfil médio do modelo de *taper*. Aparentemente, a altura relativa de Pressler fornece informações complementares em conjunto com o quociente de Hossfeld. A medida de Hohenadl não foi realista em descrever os diferentes perfis. O modelo foi capaz de obter boas estimativas do fator de forma, embora este referencial não tenha sido validado pelas curvas teóricas do modelo. No sentido da modelagem, o efeito do espaçamento possuiu menor influência para obter boas estimativas das medidas de forma em relação ao material genético, embora a interação entre eles tenha sido mais plausível. A abordagem sugerida pode ser uma alternativa na interpretação de modelos complexos como o segmentado, de expoente-variável, dentre outros.

Palavras-chave: Medidas auxiliares, Expoente-variável, Índices de forma, Hossfeldt

Abstract

The artificial form factor is the main measure used as a reference in converting the cylindrical volume to wood volume. It is generally used to classify the stem between cones and paraboloids. Other references such as form quotients are uncommon due to the need to collect more upper-stem measurements of diameter or height in addition to the diameter at breast height and total height. However, whether these measures have the ability to classify the stem shape more realistically than the artificial form factor from comparisons with the parametric profile curves of taper models with many parameters is unknown. Thus, the hypothesis of this chapter is that old form measurement ratios suggested by Pressler, Hossfeld and Hohenadl are similar to the form factor in describing the different clones and spacings in *Eucalyptus sp.*. Data were collected at the Experimental Station of Forest Sciences, in the

municipality of Itatinga-SP, in a factorial experiment with six clones, three spacings and six blocks. Both categories of taper models were tested: segmented and variable-exponent. The models were fitted for maximum likelihood, with a function for variance, at different scales of fit. The models were selected based on the Akaike Information Criterion, root mean square error, mean and absolute error. Also, random effects were applied to the parameters of the best model based on interaction effect and compared with the equations fitted at the same fitting scale. The variable-exponent model on the fitting scale that considers the interaction effect (clone:spacing) was better than applying random effect to deal with data variation. The likelihood intervals of the mean of each measured shape observed demonstrated that the Hossfeld quotient was more faithful in differentiating the shape when validated with the estimate of the mean profile of the taper model. Apparently, Pressler's relative height provides complementary information in conjunction with the Hossfeld quotient. The Hohenadl measure was not realistic in describing the different profiles. The model was able to obtain good estimates of the form factor, although this reference has not been validated by the mean profile curves of the model. In the modeling aspect, considering the spacing effect to obtain good estimates of shape measurements have less influence than genetic material, although the interaction effect have been more plausible. The suggested approach can be an alternative in the interpretation of complex models such as segmented, variable-exponent, among others.

Keywords: Auxiliary measures, Exponent-variable, Shape index, Hossfeldt

3.1 Introdução

Desde o advento do modelo parabólico simples, modelos mais flexíveis que comportam a extensa variação da forma do tronco de diferentes espécies foram elaborados. Duas categorias desses modelos podem ser destacadas: os segmentados e de expoente-variável.

A segmentação de modelos é justificada pela complexidade natural em descrever a forma idealizada do tronco, sobretudo na região que possui alta variação como a base dele. No modelo de Max e Burkhart (1976) dois parâmetros controlam os pontos de inflexão baseados em posições relativas do tronco e que unem duas ou mais expressões. Estes pontos de inflexão definem as posições relativas do tronco e separam os diferentes sólidos. Para cada um dos sólidos uma expressão é designada e unidas a partir desses pontos.

Diferentemente dos modelos segmentados, o de expoente-variável não necessita de segmentação e são equivalentemente flexíveis. Possui a capacidade de adição de quaisquer variáveis preditoras em seu expoente, bem como pode ser facilmente adaptado algebricamente (Kozak, 1988, 2004). O que estes modelos têm em comum é a alta flexibilidade em descrever a forma idealizada do tronco em diferentes espécies (Li e Weiskittel, 2010). Consequentemente são modelos com seis ou mais parâmetros, o que os tornam complexos e difíceis de interpretar.

Uma maneira de contornar esta problemática é obter medidas de forma que possam, a partir de um único valor, tornar interpretáveis as curvas paramétricas dos modelos a partir de suas estimativas (Naves et al., 2019). Medidas de forma possuem importância teórica em sua definição para espécies que possuem fustes únicos e retilíneos, e na prática são medidas auxiliares para o cálculo de volume de árvores em pé. No Brasil, o fator de forma artificial é o mais usado na representação da forma do tronco, embora recentemente não tenha sido o melhor referencial se comparado a altura de Pressler em ranquear a forma de diferentes espécies de *Eucalyptus* (Naves et al., 2019).

É natural supor que a forma das árvores pode mudar em função do seu tamanho, idade, sobretudo características como espécie e densidade de plantio. Por isto, fica evidente que apenas o *dap* e altura total da árvore não são suficientes em explicar a enorme variação dos padrões florestais, mesmo em florestas clonais do gênero *Eucalyptus*. Assim, tem-se optado por obter empiricamente outras medidas do tronco, geralmente diâmetros acima de 50% da altura total do tronco (Kozak, 1998, 1997).

A altura de Pressler e o diâmetro de Hossfeld são consideradas boas medidas de forma para obtenção de equações que forneçam o volume exato para grande parte das espécies excurrentes com formato paraboloide e cônico (McTague et al., 2020). O mesmo pode ser dito para o diâmetro de Hohenadl, usado para obter quocientes de forma e para cálculo do fator de forma natural (Assmann, 1970; McTague, 1992). Portanto, espera-se que considerar essas medidas forneçam um aspecto explicativo aos modelos, por serem atributos da árvore e possuírem amparo teórico sobre a forma do tronco.

Por terem significado direto sobre a forma, estas medidas podem ser usadas como referencial a partir de suas estimativas obtidas pelos estimadores dos modelos, o que fornece significado teórico e prático sobre ela. Espera-se que os parâmetros estimados dos modelos de *taper* expressem o efeito do espaçamento e material genético, para assim por meio de métodos analíticos de modelagem, obter indicadores diretos sobre os diferentes fatores que podem interferir na forma do tronco das árvores.

Assim, o presente capítulo possui as seguintes hipóteses:

- I – Os parâmetros dos modelos são sensíveis à mudança de espaçamento e material genético;
- II – As medidas de forma e modelos de *taper* são capazes de explicar o efeito dos diferentes espaçamentos e materiais genéticos na forma do tronco;

3.2 Material e métodos

3.2.1 Descrição da área de estudo

O estudo foi conduzido na Estação Experimental de Ciências Florestais de Itatinga (EECFI), localizada no município de Itatinga-SP, sob jurisdição da Universidade de São Paulo e vinculada ao Departamento de Ciências Florestais (LCF) da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ). A estação possui uma área total aproximada de 2.247 hectares, sendo ocupada por áreas de preservação e conservação ambiental, bem como por plantios comerciais e experimentais de *Eucalyptus spp.* e *Pinus spp.*. Está inserida na Bacia Hidrográfica do Médio Paranapanema (SigRH), região centro-sul do estado de São Paulo.

A altitude da região é de 850 m, e fica localizada nas coordenadas geográficas com latitude 23° 10' sul e longitude de 48°40' oeste. O clima local é classificado, segundo critérios de Köppen, como Cwa, denominado clima subtropical de inverno seco e verão quente com chuvas. A precipitação anual média é de 1.350 mm, com temperaturas médias anuais de 20° C, sendo 3° C a temperatura média mínima do mês mais frio e 32° C a temperatura média máxima do mês mais quente (Alvares et al., 2013). No período de coleta de dados, entre fevereiro e abril de 2019, a temperatura máxima foi de 35,3° C no mês de fevereiro e mínima de 10,6° C no mês de abril, com precipitação acumulada nesse período de 762,8 mm (dados monitorados e fornecidos pela estação meteorológica da própria EECFI).

A classificação do solo na área onde o experimento foi instalado é o Latossolo Vermelho Distroférico tipo A moderado de textura argilosa (LVdf). É formado por meio da intemperização do basalto, grupo São Bento, formação Serra Geral (Gonçalves et al., 2012). Este tipo de solo é caracterizado por apresentar baixa saturação por bases, baixa fertilidade natural e alto teor de óxidos de ferro (Fe_2O_3), além de serem solos muito profundos, porosos a muito porosos, bem drenados o que é uma vantagem no sentido físico, embora mais susceptíveis à compactação devido a sua textura argilosa (Alves, 2021, *apud* EMBRAPA, 2019).

Os dados utilizados neste estudo foram provenientes de seis diferentes materiais genéticos de *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake (clones CO1404, CO1407, AEC0042, AEC0144, AEC0224) e *Eucalyptus spp.* (clone AEC1528), com idade de 7 anos, em experimento alinhado em seis blocos casualizados em esquema fatorial, com três diferentes arranjos espaciais (espaçamentos 3mx1m, 3mx2m e 3mx4m). O experimento foi implantado entre dezembro de 2011 e janeiro de 2012. Os clones são melhoramentos

genéticos com plasticidade suficiente para resistência a grande escassez hídrica, e possuem as melhores características para comportar essas adversidades nas regiões às quais eles foram desenvolvidos.

Na seleção das árvores para procedimento de cubagem, foram utilizados dados do levantamento realizado em janeiro de 2019, a partir da distribuição diamétrica dos valores do *dap*. No mesmo levantamento, foram realizadas medições do diâmetro a altura do peito (*dap*, a 1,3m de altura do tronco), altura total e a altura da base da copa. Por último foram obtidos o Índice de Área Foliar (IAF) de cada tratamento. As parcelas contabilizaram um número fixo de 25 árvores (5 linhas x 5 plantas), contudo apenas a área útil dela foi considerada no levantamento. A área útil consiste nas nove árvores centrais. As árvores marginais foram consideradas como bordadura interna simples, no intuito de manter o efeito do espaçamento e controlar a influência dos tratamentos vizinhos.

Três classes de diâmetro foram estabelecidas empiricamente para compor a categorização em árvores menores (P), intermediárias (M) e grandes (G), para cada um dos tratamentos. Em posse dos diâmetros mínimos e máximos de cada um deles, foram obtidas amplitudes de classe diferentes para cada um dos tratamentos. Foram selecionadas 30 árvores aleatoriamente por tratamento (10 árvores em cada classe de *dap*) para a cubagem rigorosa. Árvores problemáticas ou com erros de medição justificados e que inviabilizam as análises foram removidas, totalizando 503 árvores úteis, portanto com número de observações diferentes por tratamento. Na etapa de cubagem, as medições das árvores foram executadas no período de fevereiro a abril de 2019. As seções para obtenção dos diâmetros com casca (d_{cc}) ao longo do fuste na cubagem rigorosa obedeceram as seguintes alturas: 0,1m; 0,7m; 1,3m; 2,0m e seções de 1m a partir desta marca até o diâmetro limite de 3cm, para posterior cálculo do volume observado total pela fórmula de *Smalian*. A partir da altura da última seção, o volume da ponta foi calculado com a fórmula do cone. Informações das estatísticas descritivas das principais variáveis coletadas, bem como o número de árvores por tratamento, podem ser vistas no material suplementar (Tabela 3.3).

3.2.2 Modelos de taper

3.2.2.1 Modelo Segmentado

O modelo segmentado utilizado foi o de seis parâmetros conhecido como "quadrático-quadrático-quadrático", que é a escolha comum em inúmeros trabalhos (Max e Burkhardt, 1976; Cao et al., 1980; Thomas e Parresol, 1991; Figueiredo-Filho et al., 1996). A estrutura básica do modelo pode ser assim apresentada:

$$y^2 = \beta_1(x - 1) + \beta_2(x^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x)^2 I_2 + \epsilon_i \quad (3.1)$$

Em que: y^2 , é a razão de diâmetros (d_i/D); x é a razão h_i/H ; h_i , é a altura da seção i do tronco em (m); H , a altura total (m); d_i , diâmetro com casca, em cm, na altura h_i ; D ou *dap*, diâmetro a 1.3m de altura acima do solo (cm); β_i , parâmetros do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); α_1 e α_2 são os pontos de inflexão de mudança dos sólidos; I_1 e I_2 são as variáveis indicadoras que seguem as condições: $I_1 = 1$ se $x \leq \alpha_1$; $I_2 = 1$ se $x \leq \alpha_2$, caso contrário, retorna zero.

A partir do modelo ajustado, é possível obter tanto diâmetros a qualquer altura (eq. 3.2) quanto alturas a um diâmetro preestabelecido (eq. 3.3). A eq. 3.1 pode ser rearranjada algebricamente para obter a integral para cálculo do volume em qualquer altura comercial do tronco (eq. 3.4).

$$\hat{d}_i = D \sqrt{\hat{\beta}_1(x - 1) + \hat{\beta}_2(x^2 - 1) + \hat{\beta}_3(\hat{\alpha}_1 - x)^2 I_1 + \hat{\beta}_4(\hat{\alpha}_2 - x)^2 I_2} \quad (3.2)$$

$$\hat{h}_i = \frac{H}{2A} \left[-B - \sqrt{B^2 - 4AC} \right] \quad (3.3)$$

em que, A é a expressão $\hat{\beta}_2 + I'_1\hat{\beta}_3 + I'_2\hat{\beta}_4$; B significa $\hat{\beta}_1 - 2I'_1\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_3 - 2I'_2\hat{\alpha}_2\hat{\beta}_4$; C é $-\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 - d_i^2/D^2 + I'_1\hat{\alpha}_1^2\hat{\beta}_3 + I'_2\hat{\alpha}_2^2\hat{\beta}_4$; I'_1 e I'_2 são as variáveis indicadoras com os critérios: $I'_1 = 1$, se $d_i \geq d_1$; $I'_2 = 1$, se $d_i \geq d_2$; caso contrário, assume o valor zero. \hat{d}_1 é o diâmetro estimado na altura referente a $\hat{\alpha}_1H$, que pode ser calculado por $D\sqrt{\hat{\beta}_1(\hat{\alpha}_1 - 1) + \hat{\beta}_2(\hat{\alpha}_2^2 - 1)}$; \hat{d}_2 é o diâmetro estimado na altura referente a $\hat{\alpha}_2H$ obtido a partir da expressão $D\sqrt{\hat{\beta}_1(\hat{\alpha}_2 - 1) + \hat{\beta}_2(\hat{\alpha}_2^2 - 1) + \hat{\beta}_3(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)^2}$.

$$\hat{v}ol = kD^2H \left\{ \frac{\hat{\beta}_2}{3}(X^3 - Y^3) + \frac{\hat{\beta}_1}{3}(X^2 - Y^2) - (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)(X - Y) - \frac{\hat{\beta}_3}{3}[(\hat{\alpha}_1 - X)^3\hat{I}_1 - (\hat{\alpha}_1 - Y)^3J_1] - \frac{\hat{\beta}_4}{3}[(\hat{\alpha}_2 - X)^3\hat{I}_2 - (\hat{\alpha}_2 - Y)^3J_2] \right\} \quad (3.4)$$

em que: k é a constante $\pi/40000$; X é a altura relativa superior (h_u/H); Y a altura relativa inferior (h_l/H). \hat{I}_i e J_i são variáveis indicadoras em que: $\hat{I}_1 = 1$ se $X \leq \hat{\alpha}_1$, caso contrário, $\hat{I}_1 = 0$; $\hat{I}_2 = 1$ se $X \leq \hat{\alpha}_2$, caso contrário, $\hat{I}_2 = 0$; $J_1 = 1$ se $Y \leq \hat{\alpha}_1$, caso contrário $J_1 = 0$ e; $J_2 = 1$ se $Y \leq \hat{\alpha}_2$, caso contrário $J_2 = 0$. Os outros termos são os mesmos já descritos anteriormente.

3.2.2.2 Modelo de Expoente-variável

O modelo de expoente-variável utilizado foi o de Kozak (2004) descrito pela eq. 3.5.

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 x^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0.1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_i} + \beta_6 X_i} + \epsilon_i \quad (3.5)$$

em que, α_j e β_j são os parâmetros do modelo ($j = 1, 2, \dots, 6$); Q_i , a expressão $[1 - (h_i/H)^{1/3}]$; X_i , significa $[1 - (h_i/H)^{1/3}] / (1 - p^{1/3})$ em que p representa $1,3/H$ que é o ponto de inflexão. Os outros termos são os mesmos descritos anteriormente no modelo segmentado.

Como o modelo não possui uma maneira analítica para obter integrais de volume sobretudo alturas a partir de qualquer diâmetro de interesse, métodos numéricos com aplicações no ambiente R foram usados para obter as medidas necessárias (Robinson e Hamann, 2010) (ver pág. 291-293).

3.2.3 Medidas de forma

As medidas extraídas do tronco são a altura de Pressler, o diâmetro de Hossfeld e de Hohenadl. Com as informações dos diâmetros mensurados na etapa de cubagem rigorosa, todas essas medidas podem ser obtidas por interpolação pela função *approx* no *software* R (R Core Team, 2020). Como são medidas que variam em função do tamanho da árvore, foram usadas como razões de altura e de diâmetros. Portanto, as medidas adimensionais de forma são: H_{pr}/H , altura relativa de Pressler; $d_{1/3H}^2/D^2$, quociente de forma de Hossfeld; $d_{0,1H}^2/D^2$, quociente de forma de Hohenadl. O fator de forma artificial observado (ff) foi calculado a partir da razão entre o volume sólido observado e o volume cilíndrico hipotético. No caso do fator de forma estimado, foi usada a razão do volume sólido estimado pelo modelo de *taper* e o volume cilíndrico hipotético:

$$ff_e = \frac{\hat{v}ol}{kD^2H}$$

em que: ff_e é o fator de forma estimado; $\hat{v}ol$ é o volume estimado pelo modelo de *taper*; k é a constante $\pi/40000$; D e H são o *dap* e a altura total respectivamente. Tanto a altura relativa, o fator de forma e os quocientes foram calculados usando os valores derivados da interpolação, bem como pelas estimativas dos modelos. Para obter o ff , basta substituir o volume estimado ($\hat{v}ol$) pelo volume observado na fórmula acima.

3.2.3.1 Ajuste dos modelos

O procedimento para estimativa dos parâmetros dos modelos foi o mesmo aplicado no Capítulo 2, pelo método da Máxima Verossimilhança (MLE). Conforme observado, a melhor maneira de lidar com a variação dos dados foi aplicar uma função de proporcionalidade para variância, considerando que o modelo é heteroscedástico. A função da variância seguiu a Lei de Taylor (Taylor, 1961) em que a variância possui pesos a partir de uma função de proporcionalidade. Neste caso, o desvio de y^2 da eq. 3.1 e d_i na eq. 3.5 a partir dos seus valores esperados, ε , segue a potência da variância em função da altura relativa do tronco a uma distribuição do erro conhecida por meio da expressão

$$\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 \left[\frac{h_i}{H}\right]^\delta\right)$$

Para observar o efeito dos componentes de variação nos modelos, duas etapas foram construídas. Na primeira, diferentes escalas de ajuste foram analisadas para observar qual a melhor maneira de lidar com os dados. Na segunda etapa, para observar o efeito aleatório dos tratamentos (Clone e Espaçamento) nos parâmetros da melhor categoria de modelo da etapa anterior, diferentes combinações dos coeficientes foi aplicada a partir da abordagem de modelos de efeitos mistos (Leites e Robinson, 2004). Como a estrutura da variância-covariância para os efeitos fixos e aleatórios foram diferentes entre os modelos, o ajuste foi pela máxima verossimilhança (MLE) (Pinheiro e Bates, 2000).

Os ajustes dos modelos nas duas etapas foram realizados por meio dos pacotes *nlme*, pela função *gmls* na generalização do modelo com a função para variância e a função *nlme* para aplicar os efeitos aleatórios nos parâmetros (Pinheiro e Bates, 2000). Todas as etapas foram executadas no *software* R (R Core Team, 2020).

3.2.3.2 Avaliação dos modelos (*Goodness-of-fit*)

Na análise dos modelos, tanto análises visuais quanto critérios de seleção de modelos foram utilizados. Para análise gráfica, gráficos de resíduos a partir das relações entre os desvios e os valores preditos pelos modelos, com curva de suavização paramétrica, foram utilizados (*residuals vs. fitted*). Em complemento, a análise dos desvios foi observada em função das alturas relativas do tronco por meio de gráficos *box-plot* e assim verificar em qual parte dele o modelo possui maior viés (Kozak e Smith, 1993; Shahzad et al., 2020).

Para fazer inferências sobre os efeitos clone e espaçamento, os dados foram particionados e, para cada categoria de modelo, diferentes escalas de ajuste foram aplicadas. As escalas de ajuste são:

- M0) Sem efeito (ajuste geral);
- M1) Com efeito do espaçamento;
- M2) Com efeito do material genético;
- M3) Com efeito da interação (Clone:Espaçamento);
- M4) Efeito da parcela

Neste sentido, foi utilizado o Critério de Akaike (*Akaike Information Criterion* ou *AIC*), sendo que diferenças no critério iguais ou acima de dois ($\Delta_i \geq 2,08$) conferem maior plausibilidade na escolha de um determinado modelo em detrimento do outro. Caso contrário, se o valor de $\Delta_i \leq 2,08$ os modelos são equivalentes, ou seja, possuem a mesmo poder preditivo. As fórmulas do Critério de Akaike (eq. 3.6) e do Δ_{AIC} (eq. 3.7) são (Burnham e Anderson, 2002):

$$AIC_i = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2k \quad (3.6)$$

$$\Delta_i = AIC_i - \min_{j=1}^R(AIC_j) \quad (3.7)$$

considerando um conjunto de R modelos sendo i ($i=1,2,\dots,R$) o índice do modelo; AIC_i é o critério de Akaike do modelo i ; \mathcal{L} é a função de máxima verossimilhança; $\hat{\theta}$ são as estimativas de máxima verossimilhança do modelo e k o número de parâmetros livres do modelo.

Como o AIC possui propriedade aditiva, os $AICs$ dos subconjuntos do conjunto dos dados, ou seja, os subconjuntos contidos em cada escala de ajuste, podem ser somados para obter um único AIC de modo que esta medida global seja resultado da adição das medidas nos subconjuntos (Batista, 2014).

Além do AIC , o ajuste foi avaliado a partir da raiz do erro quadrado médio (RMSE, eq. 3.8), o erro médio absoluto e o erro médio ambos em porcentagem (MAE, eq. 3.9 e ME eq. 3.10).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}} \quad (3.8)$$

$$MAE\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (3.9)$$

$$ME\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (3.10)$$

Finalmente, para verificar a confiabilidade dos coeficientes da equação selecionada, o valor médio das estimativas das medidas de forma pelo modelo foi comparado pelo intervalo do estimador da máxima verossimilhança (μ) das medidas observadas extraídas pela interpolação, considerando que são normalmente distribuídas. Em análises exploratórias, o estimador do desvio padrão (σ) não diferiu entre os tratamentos, portanto a média foi o único parâmetro usado na inferência. Para obter o estimador de máxima verossimilhança foi utilizada a função *mle* do pacote *bbmle* (Bolker, 2008) e os intervalos dentro do critério de plausibilidade pela função *likelregions* do pacote *sads* (Prado et al., 2018). Todos os procedimentos descritos foram realizados no *software* R.

3.3 Resultados

3.3.1 Seleção do modelo e escala de ajuste

A tabela 3.1 apresenta o resultado do Critério de Informação de Akaike (AIC) para os modelos segmentado e expoente-variável nas diferentes escalas de ajuste. Observa-se que ter uma equação para cada parcela foi mais plausível nas duas categorias de modelo. Este resultado é esperado dado que modelos de *taper* são funções que possuem a capacidade de descrever o perfil individual a nível de árvore (ou seja, uma equação para cada árvore). Como obter uma equação para cada parcela (Clone:Espaçamento:Bloco) não nos fornece informações sobre os efeitos principais (clone e espaçamento), optou-se por trabalhar com um modelo para cada interação (Clone:Espaçamento) e posteriormente verificar se o efeito do espaçamento pode ser negligenciado a partir da escala de ajuste por clone.

Tabela 3.1: Critério de Informação de Akaike (AIC) para os modelos segmentado e expoente variável ajustados para o agregado de todas as árvores do levantamento (Povoamento) e escala de ajuste. Cada escala possui seus respectivos números de grupos e fornece o número de coeficientes totais (N° parâm.). O AIC é a soma da log-verossimilhança dos valores individuais de cada grupo.

Esc. de ajuste	N° de grupos	Segmentado (eq. 3.1)			Expoente-variável (eq. 3.5)		
		$\sum AIC^*$	Δ_{AIC}	N° parâm.	$\sum AIC^{**}$	Δ_{AIC}	N° parâm.
S/ efeito	1	-41333.67	12068.16	8	24660.37	15797.04	11
Espaçamento	3	-41800.72	11601.11	24	24298.79	15435.46	33
Clone	6	-48127.79	5274.04	48	18275.77	9412.44	66
Clone:Espaç.	18	-49343.07	4058.76	144	16214.97	7351.64	198
Parcela	108	-53401.83	0	864	8863.33	0	1188

* d_i^2/D^2 ; ** d_i como variáveis resposta.

A Tabela 3.2 sinaliza que o modelo de expoente-variável obteve as melhores estimativas para todas as medidas avaliadas. Ainda, as medidas de precisão indicam que a escala de ajuste que considera a interação (Clone:Espaçamento) foi a melhor opção, embora desconsiderar o espaçamento como um fator também forneça boas estimativas tanto dos diâmetros nas diferentes alturas, volume e medidas de forma.

Tabela 3.2: Estatísticas de precisão das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i , cm), diâmetro de Hossfeld ($\hat{d}_{1/3H}$, cm), diâmetro de Hohenadl ($\hat{d}_{0.1H}$, cm), altura de Pressler (\hat{h}_{pr} , m), volume total ($\hat{v}ol$, m³) e fator de forma (ff_e), das 18 equações na escala de ajuste da interação (Clone:Espaçamento) e 6 equações para o material genético (Clones).

Modelo	Estatísticas	Estimativas				$\hat{v}ol$	ff_e
		\hat{d}_i	$\hat{d}_{1/3H}$	$\hat{d}_{0.1H}$	\hat{h}_{pr}		
Clone:Espaçamento							
Max and Burk. (1976)	RMSE	0.4984	0.4047	0.3916	0.7973	0.0164	0.0275
	MAE%	3.66	2.50	2.02	3.38	4.27	4.27
	ME%	-0.40	0.13	0.09	-0.30	-0.15	-0.15
Kozak (2004)	RMSE	0.4702	0.3767	0.3703	0.7258	0.0132	0.0245
	MAE%	3.50	2.41	1.91	3.24	3.87	3.87
	ME%	-0.17	0.30	-0.59	-0.13	-0.31	-0.31
Clones							
Max and Burk. (1976)	RMSE	0.5186	0.4299	0.4123	0.8100	0.0184	0.0289
	MAE%	3.81	2.61	2.12	3.44	4.45	4.45
	ME%	-0.50	0.19	0.13	-0.19	-0.07	-0.07
Kozak (2004)	RMSE	0.4955	0.4081	0.3864	0.7793	0.0149	0.0257
	MAE%	3.69	2.54	1.91	3.40	4.08	4.08
	ME%	-0.20	0.24	-0.66	-0.22	-0.45	-0.45

Comparando a Tabela 3.1, o modelo de expoente-variável e a Tabela 3.4 no material suplementar, há evidências que aplicar o efeito aleatório da interação (Clone:Espaçamento) é menos plausível que obter uma equação para cada uma na abordagem por diferentes escalas de ajuste, conforme valores de *AIC*.

3.3.2 Análise dos resíduos dos modelos

A Figura 3.1 apresenta os resultados da distribuição dos resíduos para cada altura relativa do tronco bem com os desvios padronizados em função dos valores estimados pelo modelo. Embora a partição dos dados em diferentes escalas de ajuste tenha sido a melhor maneira de lidar com os efeitos do material genético e espaçamento, não foi suficiente para contornar a problemática da alta dispersão dos resíduos na base do tronco. As curvas de suavização dos resíduos padronizados também indicam que aplicar uma função para variância não resolve esta mesma problemática na maioria dos casos, embora seja mais plausível utilizá-la. No espaçamento mais adensado (3mx1m), esta problemática foi mais acentuada (alturas até 5%), exceto no clone AEC1528 e CO1404. Em termos gerais no espaçamento menos adensado (3mx4m) naturalmente os resíduos são melhor distribuídos ao longo do eixo central, exceto no clone CO1404, AEC0042 e em menor escala no clone AEC0144.

O efeito do espaçamento pode nos indicar indiretamente qual material genético possui maior plasticidade sobre os aspectos de competição árvore-a-árvore dentro de cada tratamento. Neste caso, o clone AEC1528 foi o que obteve a melhor distribuição dos resíduos nos três espaçamentos, com as curvas de suavização concentradas no eixo central (Figura 3.1d).

3.3.3 Interpretação dos coeficientes

A Tabela 3.5 no material suplementar apresenta os valores das estimativas dos parâmetros dos modelos obtidos para cada escala de ajuste. O modelo de Kozak (2004) modificado possui seis parâmetros portanto difícil de ser interpretado. Observa-se que os parâmetros mudam em função do material genético e espaçamento, com maior ênfase ao efeito do clone. Mesmo que alguns desses parâmetros sejam associados a razões conhecidas, como D/H (Kozak, 1988; Muirwe, 1999), obter informações sobre a forma a partir de seus valores não é intuitivo, sobretudo em observar se há uma tendência lógica na mudança dos perfis e os estimadores do modelo.

A Figura 3.2a exemplifica a maneira usual de obter a forma teórica do tronco a partir das medidas adimensionais de diâmetro e altura. Os clones AEC0144 e AEC1528 representam os extremos da forma do tronco encontradas neste estudo e foram usados como referência para representar os limites das diferentes formas. O clone AEC1528 foi sensível quanto ao efeito médio do espaçamento principalmente no espaçamento 3mx1m e o contrário ocorreu com o clone AEC0144 onde o efeito foi visível somente na base do tronco. Para o clone AEC1528 a diferença se dá em maior escala na base do tronco entre os espaçamentos 3mx2m e 3mx4m e a partir de 20% de altura a diferença se torna negligenciável, embora no mais adensado (3mx1m) apresente nítida diferença entre as duas outras densidades. No clone AEC0144, as curvas adimensionais nas três densidades se sobrepõem acima de 20% do tronco. Por outro lado, ao avaliar a mudança do expoente¹ em troncos de diferentes tamanhos, nota-se que o efeito do material genético altera o formato da curva em função da altura relativa (Figura 3.2b). No clone AEC0144 após 10% da altura, o valor do expoente ascende conforme se aproxima do topo e demonstra que a diferença entre o espaçamento 3mx1m e 3mx2m é imperceptível. Este comportamento se repetiu tanto para árvores médias quanto grandes. Entretanto, no clone AEC1528 o valor do expoente mantêm-se aparentemente

¹O objetivo é mostrar a tendência geral do expoente da equação de Kozak (2004) em árvores de diferentes tamanhos. Este procedimento é aplicado em outro trabalho do mesmo autor (Kozak, 1988). Consiste em usar apenas o valor calculado do expoente (desconsiderando a base) em função da altura relativa, visto que o expoente é uma longa expressão. Isto torna mais fácil de interpretar o comportamento de árvores com diferentes dap's e alturas sob efeito de cada espaçamento.

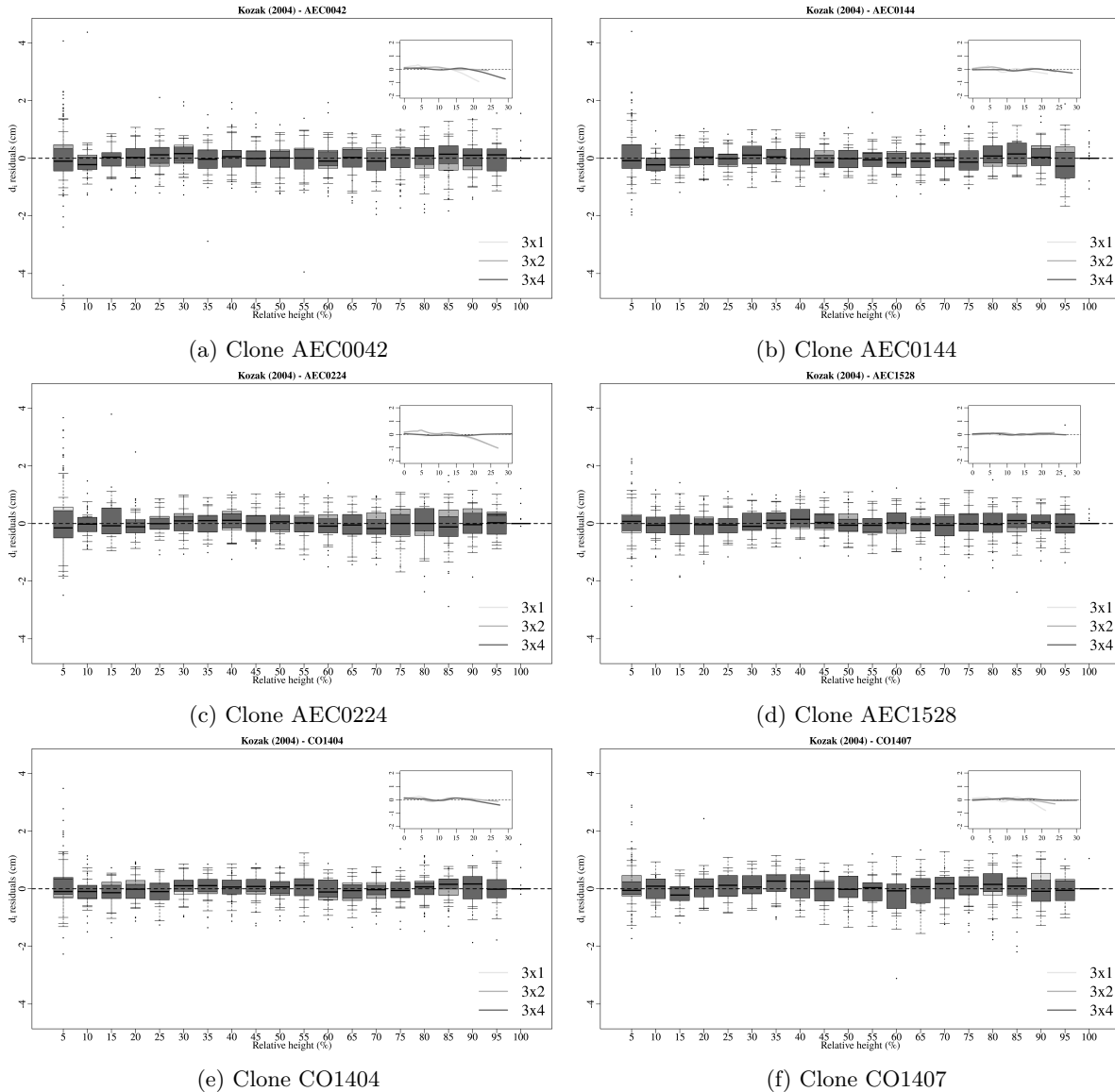


Figura 3.1: Gráficos de resíduos em formato box-plot para cada altura percentual do tronco, em intervalos de 5%. O gráfico interno é a curva suavizada (*loess*) do resíduo padronizado (eixo y) em função dos valores estimados (eixo x) pelo modelo de Kozak (2004). Os gráficos foram divididos por clone, e as cores representam cada espaçamento.

constante ao longo do fuste após 10%, porém no espaçamento mais adensado (3mx1m) o expoente muda de escala nos diferentes tamanhos de árvores. Ainda, no espaçamento mais adensado (3mx1m) árvores de tamanho médio possuem formas equivalentes ao espaçamento menos adensado (3mx4m) e, em árvores maiores, o expoente possui o mesmo comportamento do espaçamento intermediário (3mx2m).

3.3.4 Interpretação dos parâmetros a partir das estimativas das medidas de forma

As Figuras 3.3a até 3.3c representam as curvas obtidas de cada equação, do espaçamento mais ao menos adensado, referente a interação do clone e espaçamento, sobretudo as posições relativas no tronco das medidas de forma estimadas pelas mesmas equações. Observa-se que todas as medidas de forma como posições relativas do tronco são mais sensíveis à mudanças do material genético e em menor escala a densidade de plantio. Sendo assim, a altura relativa de Pressler e o diâmetro relativo de Hossfeld aparentemente são mais capazes de fornecer um indicador sobre a forma que o quociente de Hohenadl.

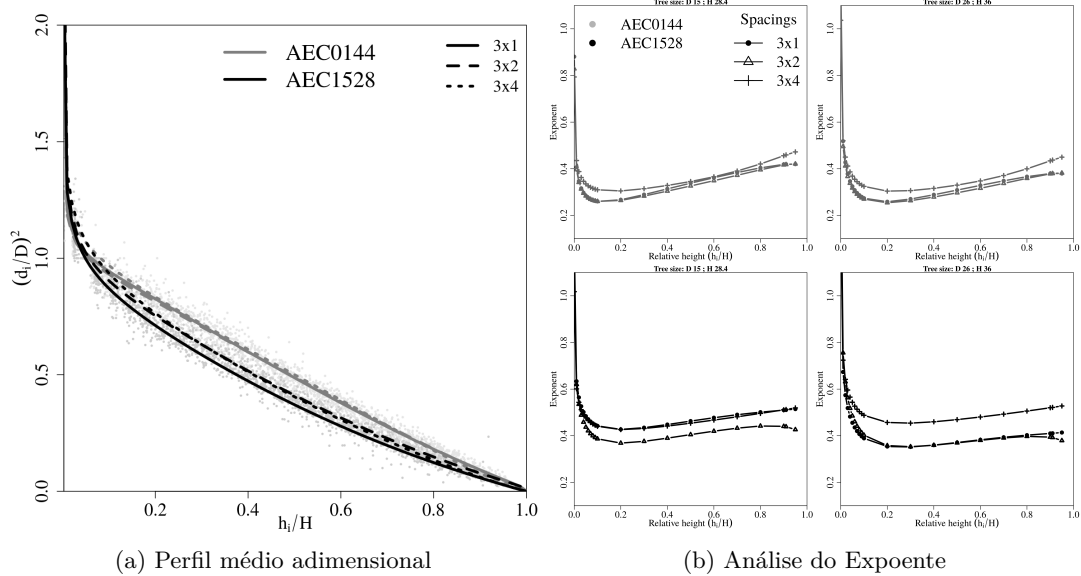


Figura 3.2: Descrição da forma do tronco para os clones AEC0144 e AEC1528 nos diferentes espaçamentos. a) é o perfil médio do tronco com as medidas adimensionais de diâmetro e altura; b) é a mudança do expoente em função da altura relativa para árvores de tamanho médio (esquerda) e grande (direita).

O quociente de Hossfeld se mostrou mais sensível em identificar se há efeito do espaçamento que a altura relativa de Pressler, embora a mudança dos valores de ambas medidas não indiquem que essa diferença seja visualmente significativa. O clone CO1404 é o que possui a forma intermediária entre os clones, principalmente nos espaçamentos 3mx1m e 3mx2m, mantendo quase constante o quociente de Hossfeld e a altura relativa de Pressler. A Figura 3.3a referente ao espaçamento mais adensado, indica que os materiais genéticos podem ser agrupados em três grupos distintos e mantêm esse agrupamento no espaçamento 3mx2m. No espaçamento menos adensado, a forma do clone AEC0224 se torna mais próxima do clone AEC1528, bem como nos clones AEC0144, AEC0042 e CO1407 as curvas se sobrepõem com o CO1404. Em termos gerais, a variação entre clones é reduzida em função do espaçamento mais adensado ao menos adensado, ou seja, a expressão do material genético é mais evidente quando as árvores estão em maior competição por recursos (3mx1m).

Conforme mencionado anteriormente, os clones AEC0144 e AEC1528 são os dois extremos de forma encontrados, algo refletido no resultado das três medidas de forma adotadas. Neste caso, há uma vantagem em adotar a medida de Hossfeld como referência, principalmente na classificação do grupo intermediário (clones AEC0224 e CO1404), que possuem formas mais complexas e mudanças acentuadas mais próximas da base do tronco.

3.3.5 Intervalos de verossimilhança das medidas de forma

As Figuras 3.3b e 3.3c, podem sinalizar visualmente algum efeito do espaçamento na forma, mas não indica se esta diferença tem significado prático. Portanto, os resultados com os intervalos de verossimilhança que considera a interação (Clone:Espaç.) indicam que o efeito do espaçamento dentro do mesmo clone possui menor relevância prática no sentido das medidas de forma (Figura 3.6, material suplementar). Para validar se o efeito do espaçamento foi pouco relevante para o ajuste do modelo, a Figura 3.4 verifica tanto as estimativas das medidas de forma com o efeito do material genético quanto da interação. Ou seja, os valores permanecem inseridos nos intervalos de verossimilhança do valor médio das medidas observadas (μ) mesmo sem o efeito do espaçamento. O valor médio estimado pelos modelos de quase todas as medidas de forma nas duas diferentes escalas de ajuste, encontram-se dentro dos intervalos

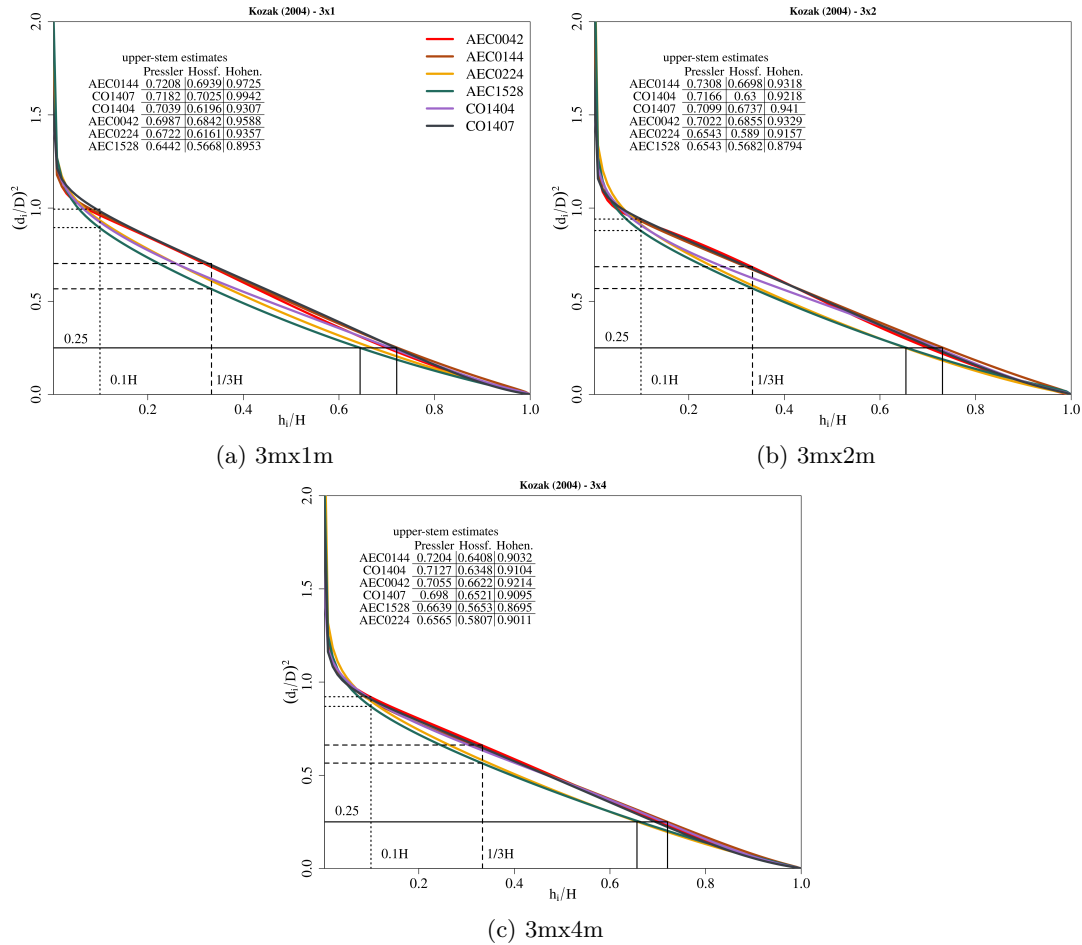


Figura 3.3: Curvas paramétricas do modelo ajustado de Kozak (2004) para cada escala de ajuste. As duas linhas em paralelo, são os mínimos e máximos de cada medida estimada com base nos valores da tabela. Já a linha isolada é a posição da altura relativa (para os diâmetros) ou o diâmetro relativo (para altura de Pressler) onde encontram-se estas medidas. A linha sólida representa a altura relativa de Pressler (1/4 ou 0.25); a linha tracejada é o diâmetro relativo de Hossfeld ($d_{1/3H}^2/D^2$) e; a pontilhada é o diâmetro relativo de Hohenadl ($d_{0.1H}^2/D^2$) estimadas a partir dos parâmetros do modelo.

e valida as estimativas do modelo de expoente-variável selecionado.

A medida de Hohenadl foi a única mais problemática, com valores estimados fora do intervalo de plausibilidade em ambas escalas de ajuste (Figuras 3.6c e 3.4c). O modelo foi capaz de obter boas estimativas do fator de forma, onde a estimativa média fica bem próxima do valor da máxima verossimilhança de μ obtido com as medidas observadas de volume (Figura 3.4d). Algo semelhante ocorreu com a altura relativa de Pressler e em menor escala com o quociente de Hossfeld (Figuras 3.4a e 3.4b). Nas Figuras 3.4 e 3.5, observa-se que todas as medidas de forma ordenam de maneira diferenciada as formas dos materiais genéticos a partir do seu valor mínimo e máximo, bem como a maneira de agrupá-los com base nos intervalos de plausibilidade. Nas Figuras 3.4a e 3.4b é fácil observar a diferença entre a altura relativa de Pressler e o quociente de Hossfeld. Enquanto que a altura de Pressler classifica os clones em dois grupos, a medida de Hossfeld faz a distinção em quatro grupos. Ao comparar com as curvas obtidas pela Figura 3.5, fica evidente que existem quatro formas diferentes entre os materiais genéticos, mesmo que o clone AEC0224 e AEC1528 possuam curvas próximas entre si. Por outro lado, a medida de Hohenadl se mostrou pouco realista e descreve apenas dois grupos além de fornecer estimativas fora dos intervalos de verossimilhança (Figura 3.4c). Já o fator de forma indica três grupos, algo semelhante ao descrito pela altura de Pressler, embora afirme que o clone CO1404 possua forma equivalente aos clones

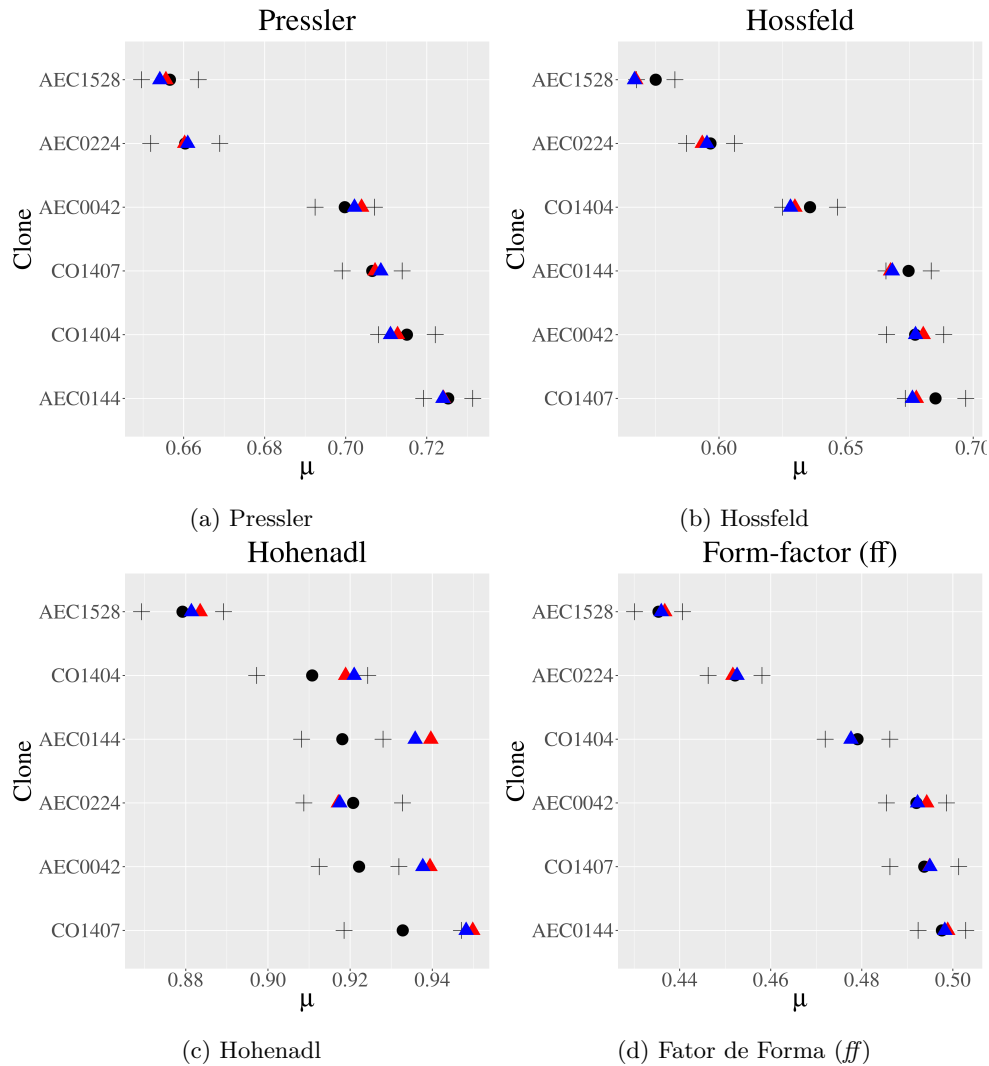


Figura 3.4: Intervalos de verossimilhança da média (μ) das medidas de forma para cada material genético. Em que: (●) é a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro μ da medida de forma obtida pela interpolação; (+) os intervalos de verossimilhança ou vizinhança da MLE pelo critério canônico ($\log(8)$ ou $2,08$); (Δ em vermelho) é o valor médio da estimativa da medida de forma obtida por cada equação de *taper* por clone; (Δ em azul) por tratamento.

AEC0042, AEC0144 e CO1407 (Figura 3.4d). Isto demonstra que, apesar do modelo conseguir obter ótimas estimativas de volume e conseqüentemente o fator de forma artificial, este referencial da forma do tronco é problemático para formas mais complexas como a do clone CO1404.

A avaliação dos intervalos de verossimilhança também nos indica a sensibilidade destas medidas à mudanças de material genético e espaçamento. Neste sentido, ao adotar a altura relativa de Pressler observa-se que esta posição no tronco é mais sensível à mudança de material genético que do espaçamento. Por outro lado, ao considerar Hossfeld como referência, no clone AEC0144 a medida de forma indica que há diferença entre o espaçamento $3m \times 4m$ e os outros dois ($3m \times 2m$ e $3m \times 1m$). Nos outros materiais genéticos isto não ocorreu, sendo este efeito mais evidente. Isto corrobora com o observado nas curvas paramétricas das Figuras 3.2 e 3.3. Já com a medida de Hohenadl, embora descreva diferenças entre clones, é menos sensível tanto ao material genético quanto ao espaçamento.

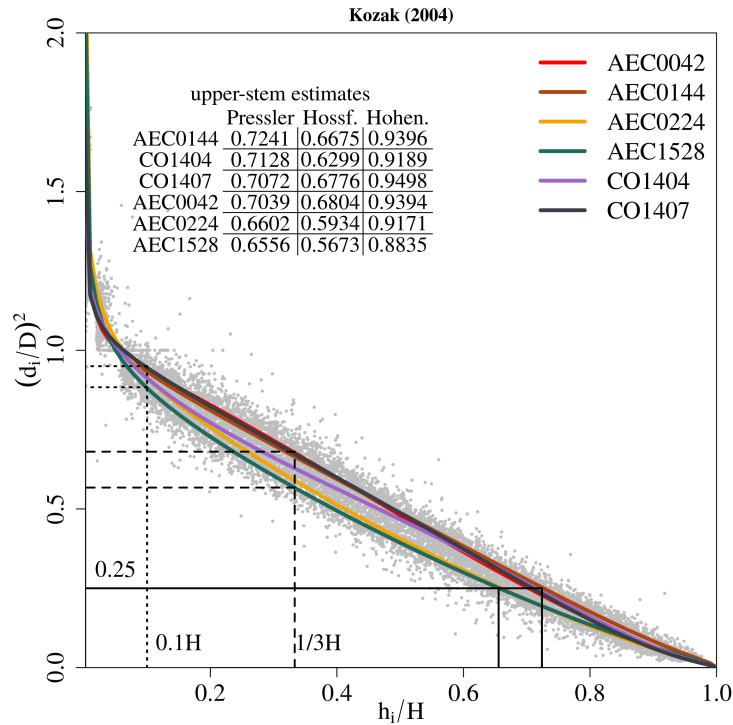


Figura 3.5: Curvas paramétricas do modelo ajustado de Kozak (2004) para cada escala de ajuste considerando apenas o material genético. As duas linhas em paralelo representam os valores mínimos e máximos de cada medida. Já a linha isolada é a posição da altura relativa (para os diâmetros) ou o diâmetro relativo (para altura de Pressler) onde encontram-se estas medidas. A linha sólida representa a altura relativa de Pressler (1/4 ou 0.25); A linha tracejada é o diâmetro relativo de Hossfeld ($d_{1/3H}^2/D^2$) e; a pontilhada é o diâmetro relativo de Hohenadl ($d_{0.1H}^2/D^2$) estimadas a partir dos parâmetros do modelo.

3.4 Discussão

A forma do tronco das árvores é a principal característica quando se pretende obter o conteúdo volumétrico de madeira, principalmente para produtos como serraria e laminação. Ainda, traz informações quantitativas em termos de sortimento a nível de povoamento. Em grande parte das espécies excurrentes se supõe que o diâmetro decresce monotonicamente a medida em que se desloca da base até o topo do tronco. A partir deste pressuposto, as funções de *taper* tentam descrever monotonicamente o que pode ser considerado o perfil do tronco e conseqüentemente a sua forma.

Os modelos de *taper* são funções que projetam a forma idealizada do tronco a partir de seus parâmetros. Portanto, é coerente supor que para obter modelos mais flexíveis às particularidades florestais, naturalmente formulações mais complexas são desenvolvidas, muitas vezes para obter melhor capacidade preditiva de volume (Valentine e Gregoire, 2001; Westfall e Scott, 2010; Pang et al., 2016; Scolforo et al., 2019; Narmontas et al., 2020). Conseqüentemente, os modelos adquirem de seis parâmetros, a exemplo do modelo segmentado de Max e Burkhart (1976) a nove parâmetros como o de expoente-variável originalmente proposto de Kozak (2004). Este último, possui a vantagem de ser um modelo linearizável, além de facilmente incorporar novas variáveis em seu expoente, realizar adaptações na sua expressão original ou aplicar calibrações algébricas (Oliveira et al., 2022). Entretanto, a análise individual dos seus coeficientes não fornece uma interpretação simples, sendo necessária a avaliação de seu expoente (Kozak, 1988).

O modelo de expoente-variável foi mais coerente em descrever o perfil do tronco nas diferentes combinações de material genético e espaçamento. A flexibilidade do modelo de Kozak (2004) o torna sensível à mudanças desses efeitos, algo refletido nas estimativas dos parâmetros. Este modelo tem sido escolhido para descrever a forma do tronco e volume de outras espécies como a *Picea rubens* e *Pinus strobus*

(Li e Weiskittel, 2010) e mais recentemente relatado como um bom modelo para árvores médias e grandes em plantios de *Eucalyptus sp.* no Brasil (Scolforo et al., 2018; McTague et al., 2020). Aparentemente, o efeito da densidade de plantio na forma do tronco pode ser menos expressivo que o material genético, algo observado tanto nas curvas médias que descrevem os perfis teóricos quanto nas medidas de forma. Entretanto, a interação demonstra que o adensamento é um fator a ser considerado visto que diferenças na forma entre clones se tornam mais evidentes quando há maior competição por recursos.

Os estimadores do modelo obtidos pela máxima verossimilhança (MLE), por serem considerados estimadores não enviesados possui a vantagem de fornecer um caráter inferencial confiável sobre as estimativas dessas medidas. Isto quer dizer que as estimativas de um modelo ajustado por máxima verossimilhança podem ser consideradas elas mesmas funções das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo (Batista, 2014). Obter os intervalos de verossimilhança em torno da MLE do valor observado, ou seja, das medidas de forma extraídas pela interpolação validam as estimativas dos modelos, além de fornecer informações mais confiáveis sobre os efeitos e medidas avaliadas.

A medida relativa de Hossfeld foi mais coerente em ranquear a forma nos diferentes materiais genéticos quando validada com o método usual das curvas com os perfis médios do tronco, inclusive na mudança de espaçamento. Espera-se que a densidade de plantio seja um fator determinante da forma do tronco embora não tenha sido observado como efeito nas medidas de forma avaliadas, exceto no quociente de Hossfeld e Hohenadl, apenas no clone AEC0144. Nesta última medida, o intervalo dos valores observados no clone AEC0144 mostra que há diferença entre o espaçamento 3mx1m e 3mx2m, embora o modelo não obtenha estimativas confiáveis desta medida. Entretanto, em análise dos perfis médios do tronco se torna evidente que a densidade refletida nos diferentes espaçamentos tem influência direta na base dele, onde no menos adensado apresenta um aspecto neiloide nesta região (Tasissa e Burkhart, 1998). Em termos gerais, é efetivo que em espaçamentos mais adensados seja observado troncos menos afilados (Muhairwe, 1999; Sharma e Zhang, 2004) algo também constatado pela curva teórica no clone AEC0144.

O fator de forma é o referencial da forma do tronco mais aplicado no Brasil. Em investigações recentes, esta medida de forma não foi um bom referencial quando usada para classificar diferentes materiais genéticos do gênero *Eucalyptus* (Naves et al., 2019). Em grande parte das espécies excurrentes, espera-se que a forma do tronco possa ser classificada em dois sólidos geométricos limítrofes, o parabolóide e o cone. Embora esta seja a afirmação atualmente aceita, um tronco em sua extensão pode assumir outras formas como um neiloide ou subclassificações de um parabolóide, como o cúbico e o quadrático. As medidas de forma aqui utilizadas possuem significado teórico sobre a forma, principalmente as medidas de Pressler e Hossfeld. Teoricamente, a altura de Pressler pode ser encontrada a 75% da altura total do tronco quando este possui a forma de um parabolóide quadrático. Tanto Pressler quanto Hossfeld são expressões fieis de volume quando o tronco assume um cone (0.50) e parabolóide (0.75) (McTague et al., 2020).

Tanto Hossfeld quanto Pressler aparentam ser medidas complementares, já que exprimem regiões distintas do tronco. O diâmetro relativo de Hossfeld por estar localizado a 1/3 da altura total, geralmente traduz a região com maior volume do tronco, e o que se espera é que seja uma grandeza mais sensível à mudanças de espaçamento. A altura de Pressler aparenta ser um indicador da influência indireta de atributos da árvore como a copa por estar mais próxima do topo. Na verdade, pode explicar a recessão da copa em consequência de tratos silviculturais como a fertilidade do solo (Scolforo et al., 2018). Em análises exploratórias deste trabalho, tanto a altura de Pressler quanto a altura da base da copa foram altamente relacionadas com valores da correlação de 0,78 a 0,92 entre clones, o que sugere maiores investigações em trabalhos futuros. O diâmetro de Hohenadl, ainda que usado para obter o fator de forma natural, não possui a mesma coerência nos diferentes tratamentos na maneira aplicada aqui, o que indica não ser um bom referencial para representar os materiais genéticos de *Eucalyptus* nas circunstâncias aqui investigadas.

A busca por um bom referencial da forma do tronco geralmente possui significado empírico. Têm-se convencionado que obter diâmetros em alturas relativas em/ou acima de 50% da altura total do tronco e incluí-los nos modelos de *taper* melhoram suas estimativas de diâmetro (Cao, 2009; Cao e Wang, 2015; Sabatia e Burkhart, 2015). Outro estudo empírico demonstra que a altura relativa na posição de 2/3 do *dap* ($h_{0,67D}/H$) quando associada ao fator de forma artificial estimado pelo modelo de volume de *Spurr*, possui maior significado sobre a forma do tronco se comparado a própria altura relativa de Pressler (Rustagi e Loveless Jr, 1991b). Recentemente, obter um modelo de expoente-variável localizado na altura arbitrária fixa de 5m constrói equações particulares para uma árvore de interesse, o que habilita estimar com maior acurácia as medidas de Pressler e Hossfeld para cálculo de volume (McTague et al., 2020).

Obter outros diâmetros do tronco além do *dap* e altura total podem fornecer melhor capacidade preditiva em modelos de volume, bem como substituir a altura total nestas relações (Da Silva e Ferreira, 2021), embora sejam pouco convencionais na prática. A depender da altura desta terceira medida, a maior dificuldade está em coletá-la nas árvores em pé, porque o erro em campo aumenta em função do tamanho da árvore, entre espécies e o tipo de dendrômetro usado (Westfall et al., 2016). Ainda, obter outros diâmetros do tronco são recomendáveis apenas quando este erro está abaixo de 5%, caso o principal objetivo seja construir modelos preditivos (Arias-Rodil et al., 2017). A abordagem adotada aqui buscou obter modelos explicativos, portanto esta preocupação não foi considerada por enquanto.

A medida de Hossfeld foi a mais coerente em traduzir a forma do tronco conforme evidenciado nas comparações com os perfis médios gerados pelo modelo. Isto indica um caráter menos arbitrário na escolha da posição do tronco que melhor caracteriza a forma nas diferentes espécies, além de fornecer uma maneira de interpretar qualquer modelo complexo e com muitos parâmetros. Esta informação deve, inclusive, indicar qual material genético pode ser mais produtivo e menos sensível à mudanças de espaçamento. Com o passar dos anos, esforços em desenvolver abordagens inovadoras têm sido aplicados em funções de *taper*. Algumas consideram expressões biológicas como interruptores numéricos para explicar as transições dos sólidos ao longo do fuste (Valentine e Gregoire, 2001; Westfall e Scott, 2010). Além disto, futuras investigações que incorporam as razões de Pressler e Hossfeld como co-variáveis nestes modelos devem ser testadas. Espera-se que os parâmetros dos modelos que incorporem estas medidas do tronco as validarão como referencial da forma capaz de compensar os efeitos da espécie e competição nas estimativas de volume.

3.5 Conclusões

Os modelos segmentado e de expoente-variável forneceram boas equações para estimar tanto diâmetros nas diferentes alturas, o volume e as medidas de forma. Entretanto, o de expoente-variável foi escolhido para representar os perfis teóricos e validar as estimativas das medidas de forma. Aplicar efeitos aleatórios nos parâmetros do modelo com o efeito da interação foi menos eficaz que particionar os dados na mesma escala de ajuste.

Embora o efeito da interação do material genético e espaçamento tenha sido mais plausível, a escala de ajuste que considera apenas o efeito do material genético foi suficiente quando suas estimativas das medidas de forma foram confrontadas com os intervalos de verossimilhança dos valores observados destas medidas. Isto pode ser um indicativo que os parâmetros do modelo são mais sensíveis ao material genético que pelo espaçamento, mesmo que o efeito da interação esteja presente, embora este efeito não possa ser desconsiderado na prática.

O quociente de Hossfeld foi a medida de forma mais realista em fornecer informações sobre o efeito da interação bem como do material genético na forma do tronco. Os perfis médios gerados pelas equações de *taper* na escala de ajuste por material genético fornece ampla capacidade de análise, princi-

palmente ao validá-las com a medida relativa de Hossfeld. Ainda, a abordagem aplicada pode ser usada para fornecer interpretações confiáveis mesmo em modelos mais complexos e com muitos parâmetros, sobretudo na classificação de diferentes espécies ou detectar o efeito de práticas silviculturais como o desbaste em diferentes regiões geoclimáticas.

O quociente de Hohenadl não forneceu informações confiáveis talvez por ser uma medida majoritariamente localizada em posições críticas do tronco, como a base. Em particular, a altura relativa de Pressler forneceu apenas informações complementares quando avaliada em conjunto com o quociente de Hossfeld e pode revelar relações com a altura da base da copa e outras práticas silviculturais. Esta afirmação precisa ser validada em investigações com diferentes fertilidades do solo ou regimes de poda. Mesmo que seja avaliada como um atributo da árvore, a altura relativa de Pressler possui desvantagens em diferenciar o efeito da interação ou materiais genéticos se comparada a medida Hossfeld e o fator de forma artificial.

Finalmente, embora o modelo de expoente-variável tenha um bom desempenho para estimativa de volume e permita bons resultados para o fator de forma artificial estimado, este referencial conveniente da forma não foi bom o suficiente para descrever as distinções entre os clones. Além disto, métodos destrutivos são necessários para calcular esta medida, em oposição as outras medidas de forma aplicadas que podem ser facilmente medidas indiretamente por dendrômetros ópticos nas árvores em pé. As informações destas outras medidas não foram obtidas tanto no momento da cubagem quanto em pé, embora tenha demonstrado vantagens como bons referências da forma. Consequentemente, considerar ambos procedimentos em trabalhos futuros são recomendados.

Referências

- Alvares, C. A., Stape, J. L., Sentelhas, P. C., de Moraes, G., Leonardo, J., e Sparovek, G. (2013). Köppen's climate classification map for brazil. *Meteorologische Zeitschrift*, 22(6):711–728.
- Alves, P. B. (2021). Relação entre atividades de copa e cambial de clones de eucalyptus spp. em diferentes densidades de plantio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., e Burkhardt, H. E. (2017). Effects of measurement error in total tree height and upper-stem diameter on stem volume prediction. *Forest Science*, 63(3):250–260.
- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield study*. Pergamun, Oxford, England.
- Batista, J. L. F. (2014). Biometria florestal segundo o axioma da verossimilhança-com aplicações em mensuração florestal. *Universidade de São Paulo-USP, Piracicaba-SP*.
- Bolker, B. M. (2008). *Ecological models and data in R*. Princeton University Press.
- Burnham, K. P. e Anderson, D. P. (2002). *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer, New York.
- Cao, Q. V. (2009). Calibrating a segmented taper equation with two diameter measurements. *Southern Journal of Applied Forestry*, 33(2):58–61.
- Cao, Q. V., Burkhardt, H. E., e Max, T. A. (1980). Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science*, 26(1):71–80.
- Cao, Q. V. e Wang, J. (2015). Evaluation of methods for calibrating a tree taper equation. *Forest Science*, 61(2):213–219.
- Da Silva, J. A. A. e Ferreira, R. L. C. (2021). Influences of determined and estimated dendrometric variables on the precision of volumetric modelling. *Journal of Forest Science*, 67(12):553–561.
- Figueiredo-Filho, A., Borders, B. E., e Hitch, K. L. (1996). Taper equations for pinus taeda plantations in southern brazil. *Forest Ecology and Management*, 83(1-2):39–46.
- Gonçalves, J. L. d. M., Álvares, C. A., Gonçalves, T. D., Moreira, R. M., Mendes, J. C. T., e Gava, J. L. (2012). Mapeamento de solos e da produtividade de plantações de eucalyptus grandis, com uso de sistema de informação geográfica. *Scientia Forestalis*, 40(94):187–201.
- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11):1363–1368.
- Kozak, A. (1997). Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Canadian Journal of Forest Research*, 27(5):619–629.
- Kozak, A. (1998). Effects of upper stem measurements on the predictive ability of a variable-exponent taper equation. *Canadian journal of forest research*, 28(7):1078–1083.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4):507–515.
- Kozak, A. e Smith, J. (1993). Standards for evaluating taper estimating systems. *The Forestry Chronicle*, 69(4):438–444.
- Leites, L. P. e Robinson, A. P. (2004). Improving taper equations of loblolly pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. *Forest Science*, 50(2):204–212.

- Li, R. e Weiskittel, A. R. (2010). Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the north american acadian region. *Annals of Forest Science*, 67(3):302.
- Max, T. A. e Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22(3):283–289.
- McTague, J. P. (1992). Enhanced estimates of total volume with any single upper-stem measurement. *Forest ecology and management*, 48(1-2):55–67.
- McTague, J. P., Scolforo, H. F., e Scolforo, J. R. S. (2020). Early volume formulas, taper, implicit volume ratio, and auxiliary information: A new system of volume equations invariant to silvicultural practices, site, and genetic pedigree. *Forest ecology and management*, 475(1):1.
- Mehtatalo, L. e Lappi, J. (2020). *Biometry for forestry and environmental data: With examples in R*. CRC press.
- Muhairwe, C. K. (1999). Taper equations for eucalyptus pilularis and eucalyptus grandis for the north coast in new south wales, australia. *Forest Ecology and Management*, 113(2-3):251–269.
- Narmontas, M., Rupšys, P., e Petrauskas, E. (2020). Models for tree taper form: the gompertz and vasicek diffusion processes framework. *Symmetry*, 12(1):80.
- Naves, R. P., Moreira, R. M. e., e Batista, J. L. (2019). Comparing the form of different genetic materials of eucalyptus using model fit and selection for taper equation. In *Forest Research and Cooperation for Sustainable Development: XXV IUFRO World Congress*, page 383, Curitiba, Brasil.
- Oliveira, X. M. d., Scolforo, H. F., McTague, J. P., Junior, M. D., e Scolforo, J. R. S. (2022). Impact of the inclusion of the sociological position and upper-stem diameter in the taper modeling of pinus taeda trees, subjected to different thinning regimes. *Trees, Forests and People*, 8:100251.
- Pang, L., Ma, Y., Sharma, R. P., Rice, S., Song, X., e Fu, L. (2016). Developing an improved parameter estimation method for the segmented taper equation through combination of constrained two-dimensional optimum seeking and least square regression. *Forests*, 7(9):194.
- Pinheiro, J. C. e Bates, D. M. (2000). Linear mixed-effects models: basic concepts and examples. *Mixed-effects models in S and S-Plus*, pages 3–56.
- Prado, P. I., Miranda, M. D., e Chalom, A. (2018). *sads: Maximum Likelihood Models for Species Abundance Distributions*. R package version 0.4.2.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Robinson, A. P. e Hamann, J. D. (2010). *Forest analytics with R: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- Rustagi, K. P. e Loveless Jr, R. S. (1991b). Improved cubic volume prediction using a new measure of form factor. *Forest ecology and management*, 40(1-2):1–11.
- Sabatia, C. O. e Burkhart, H. E. (2015). On the use of upper stem diameters to localize a segmented taper equation to new trees. *Forest Science*, 61(3):411–423.
- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Burkhart, H., Roise, J., Carneiro, R. L., e Stape, J. L. (2019). Generalized stem taper and tree volume equations applied to eucalyptus of varying genetics in brazil. *Canadian Journal of Forest Research*, 49(5):447–462.

- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Raimundo, M. R., Weiskittel, A., Carrero, O., e Scolforo, J. R. S. (2018). Comparison of taper functions applied to eucalypts of varying genetics in brazil: Application and evaluation of the penalized mixed spline approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 48(5):568–580.
- Shahzad, M. K., Hussain, A., e Jiang, L. (2020). A model form for stem taper and volume estimates of asian white birch (*Betula platyphylla*): a major commercial tree species of northeast china. *Canadian Journal of Forest Research*, 50(3):274–286.
- Sharma, M. e Zhang, S. (2004). Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern canada. *Forest ecology and management*, 198(1-3):39–53.
- Tasissa, G. e Burkhart, H. E. (1998). An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. *Forest ecology and management*, 103(1):87–101.
- Taylor, L. R. (1961). Aggregation, variance and the mean. *Nature*, 189(4766):732–735.
- Thomas, C. E. e Parresol, B. R. (1991). Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 21(7):1132–1137.
- Valentine, H. e Gregoire, T. (2001). A switching model of bole taper. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(8):1400–1409.
- Westfall, J. A., McRoberts, R. E., Radtke, P. J., e Weiskittel, A. R. (2016). Effects of uncertainty in upper-stem diameter information on tree volume estimates. *European Journal of Forest Research*, 135(5):937–947.
- Westfall, J. A. e Scott, C. T. (2010). Taper models for commercial tree species in the northeastern united states. *Forest Science*, 56(6):515–528.

3.6 Material suplementar

Descrição do procedimento a partir do modelo com efeitos mistos

A concepção teórica na elaboração da estrutura do modelo não-linear com efeitos mistos seguiu os procedimentos relatados por Pinheiro e Bates (2000) e Mehtatalo e Lappi (2020). Para uma apresentação formal e tornar a explicação mais dinâmica, será utilizado o modelo de Kozak (2004) aplicando efeitos aleatórios no parâmetro α_0 como exemplo. A estrutura básica de um modelo não-linear de efeitos mistos considerando a i -ésima seção do j -ésimo tronco no t -ésimo tratamento possui a seguinte expressão:

$$y_{ij} = f(x_{ij}, \phi_{jt}) + \varepsilon_{ij} \quad j = 1, \dots, M; t = 1, \dots, n_{ij} \quad (3.11)$$

em que f é uma função não-linear em resposta a um respectivo efeito aleatório ϕ_{jt} . O termo ε_{ij} é o erro aleatório ou residual, neste caso com média zero e variância associada a potência da altura relativa da árvore: $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 [\frac{h_{ij}}{H_j}]^\delta)$. Neste sentido, adaptando a eq. 3.11 à situação específica do modelo de Kozak (2004) teremos:

$$d_{ij} = (\alpha_0 + \phi_{0t}) D_j^{\alpha_1} H_j^{\alpha_2} X_{ij}^{\beta_1 x^4 + \beta_2 [1/e^{D_j/H_j}] + \beta_3 X_{ij}^{0,1} + \beta_4 [1/D_j] + \beta_5 H^{Q_{ij}} + \beta_6 X_{ij}} + \varepsilon_{ij}$$

Os parâmetros são descritos como a expressão dos preditores fixos e dos efeitos aleatórios dos tratamentos. Para melhor visualização, especificamos um submodelo linear para cada elemento de $\phi_{jt}^{(k)}$ no vetor ϕ_{jt} , $k = 1, \dots, q$:

$$\phi_{jt}^{(k)} = \alpha_{jt}^{(k)'} \beta^{(k)} + z_{jt}^{(k)'} b_j^{(k)}$$

O termo $\alpha_{jt}^{(k)'} \beta^{(k)}$ representa a combinação linear do efeito fixo $\alpha_j^{(k)}$ e os parâmetros $\beta^{(k)}$ ($k = 1, \dots, q$). O vetor $b_j^{(k)}$ de comprimento s_k inclui os efeitos aleatórios e $z_{jt}^{(k)}$ corresponde aos preditores associados com os efeitos aleatórios de primeira ordem do parâmetro $\phi_{jt}^{(k)}$. Portanto, o vetor de parâmetros do vetor para uma observação individual é definida pela matriz:

$$\phi_{jt} = A_{jt} \beta + B_{jt} b_j \quad (3.12)$$

em que

$$A_{jt} = \begin{bmatrix} \alpha_{jt}^{(1)'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{jt}^{(2)'} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{jt}^{(q)'} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \vdots \\ \beta^{(q)} \end{bmatrix}.$$

Sendo portanto comum adotar $b_j \sim N(0, D_*)$, onde D_* é a matriz variância-covariância positiva definida dos efeitos aleatórios. Se o efeito aleatório do vetor $b_j^{(k)}$ é associado a cada parâmetro de primeira ordem $\phi_{jt}^{(k)}$ então as matrizes B_{jt} e o vetor b_j podem ser definidos como:

$$B_{jt} = \begin{bmatrix} z_{jt}^{(1)'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{jt}^{(2)'} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{jt}^{(q)'} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} b_j^{(1)} \\ b_j^{(2)} \\ \vdots \\ b_j^{(q)} \end{bmatrix}$$

Tabela 3.3: Estatísticas descritivas das principais variáveis obtidas na cubagem rigorosa separadas por material genético e espaçamento. H_{bc} é a altura da base da copa; v o volume total com casca; sd é o desvio padrão.

Clones	Espaçamentos								
	3mx1m			3mx2m			3mx4m		
	n. árv.	min-max	média (sd)	n. árv.	min-max	média (sd)	n. árv.	min-max	média (sd)
AEC0042	D (cm)	4.2-17.9	11.379 (3.386)	29	12.1-20.5	16.457 (2.428)	29	12.3-24.0	18.053 (3.120)
	H (m)	10.7-30.8	23.654 (5.534)		24.5-36.0	30.041 (3.014)		23.9-35.5	30.214 (3.242)
	H_{bc} (m)	6.9-27.3	19.798 (5.607)		20.2-28.6	25.283 (2.205)		14.6-31.4	24.675 (3.789)
	v (m^3)	0.009-0.387	0.144 (0.105)		0.135-0.546	0.329 (0.118)		0.131-0.735	0.398 (0.166)
AEC0144	D (cm)	5.3-19.0	12.023 (3.684)	30	11.3-21.0	15.948 (2.828)	27	15.3-25.4	19.504 (2.523)
	H (m)	9.8-29.6	22.046 (5.714)		21.7-31.6	27.296 (3.125)		25.2-33.5	30.012 (2.395)
	H_{bc} (m)	6.6-26.4	17.689 (6.699)		13.9-28.3	22.882 (4.584)		17.1-28.5	24.326 (3.415)
	v (m^3)	0.012-0.399	0.155 (0.113)		0.114-0.522	0.290 (0.126)		0.237-0.761	0.444 (0.133)
AEC0224	D (cm)	5.4-20.1	12.889 (3.931)	26	9.0-21.4	15.425 (3.747)	27	9.5-24.8	18.161 (4.123)
	H (m)	10.2-31.8	22.864 (5.951)		15.5-34.6	25.425 (5.681)		18.0-34.0	27.637 (4.791)
	H_{bc} (m)	5.2-27.5	19.026 (6.853)		9.9-29.5	20.733 (6.739)		9.2-29.6	23.575 (5.505)
	v (m^3)	0.012-0.45	0.167 (0.124)		0.050-0.494	0.240 (0.147)		0.063-0.763	0.357 (0.199)
AEC1528	D (cm)	8.3-18.3	13.305 (2.706)	30	11.9-19.5	15.938 (2.060)	29	16.5-22.2	19.640 (1.618)
	H (m)	16.7-28.4	23.471 (3.479)		20.8-28.6	25.759 (1.927)		25.8-32.9	28.158 (1.443)
	H_{bc} (m)	8.6-25.1	17.425 (5.681)		12.3-27.4	20.681 (4.222)		17.2-27.2	22.170 (2.951)
	v (m^3)	0.044-0.322	0.154 (0.077)		0.108-0.376	0.231 (0.073)		0.251-0.515	0.375 (0.069)
CO1404	D (cm)	6.4-17.4	11.642 (2.710)	28	4.6-23.6	13.746 (5.121)	28	12.2-24.4	18.529 (3.539)
	H (m)	13.2-30.4	22.421 (4.425)		9.9-33.0	24.118 (6.741)		22.5-32.7	29.465 (2.886)
	H_{bc} (m)	10.2-24.9	18.273 (4.935)		5.9-24.4	18.933 (5.735)		15.5-25.6	22.947 (2.218)
	v (m^3)	0.021-0.368	0.129 (0.082)		0.009-0.612	0.220 (0.162)		0.132-0.736	0.400 (0.161)
CO1407	D (cm)	4.7-18.5	11.500 (3.599)	30	9.0-20.6	14.942 (3.161)	26	13.9-26.0	19.829 (3.582)
	H (m)	9.1-30.1	21.147 (5.970)		15.7-32.9	26.332 (4.366)		23.2-34.87	30.716 (2.969)
	H_{bc} (m)	5.2-23.6	16.407 (5.659)		8.6-26.5	20.370 (4.316)		17.3-29.9	23.520 (3.406)
	v (m^3)	0.009-0.392	0.138 (0.102)		0.055-0.536	0.252 (0.132)		0.166-0.818	0.473 (0.183)

Tabela 3.4: Critério de Akaike (AIC) e a log-verossimilhança (LL) do modelo de expoente-variável em diferentes combinações dos parâmetros com efeitos aleatórios da interação (Clone:Espaçamento).

Parâm. c/ efeitos aleatórios	Expoente-variável			
	LL	AIC	Δ_{AIC}	df
$\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$	-8772.62	17581.25	0.00	18
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$	-8772.62	17585.25	4.00	20
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$	-8800.72	17635.44	54.19	17
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$	-8862.99	17757.97	176.72	16
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$	-8937.74	17905.48	324.23	15
$\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$	-9088.76	18209.51	628.27	16
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	-9214.53	18457.06	875.81	14
$\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$	-9288.95	18607.89	1026.64	15
$\beta_4, \beta_5, \beta_6$	-9544.37	19116.74	1535.50	14
β_1, β_2	-9552.17	19130.33	1549.08	13
β_5, β_6	-9873.13	19772.26	2191.02	13
β_6	-10093.91	20211.82	2630.58	12
β_3	-10170.18	20364.36	2783.11	12
β_5	-10234.21	20492.41	2911.16	12
β_2	-10261.47	20546.95	2965.70	12
β_4	-10312.70	20649.41	3068.16	12
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$	-10756.53	21541.06	3959.81	14
α_0, α_1	-10901.12	21828.23	4246.98	13
α_0	-10987.88	21999.77	4418.52	12
β_1	-11703.69	23431.38	5850.13	12

Tabela 3.5: Coeficientes do modelo de expoente variável de Kozak (2004) (e seu respectivo erro padrão) para cada combinação de material genético e espaçamento (Clone:Espaçamento).

Espaç.	Coef.	Clones					
		AEC0042	AEC0144	AEC0224	AEC1528	CO1404	CO1407
3mx1m	$\hat{\alpha}_0$	0.8954 (0.071)	0.8332 (0.045)	0.8597 (0.042)	0.8601 (0.060)	0.6396 (0.045)	1.1231 (0.064)
	$\hat{\alpha}_1$	0.9938 (0.037)	0.8423 (0.028)	0.9233 (0.030)	0.9006 (0.030)	0.7155 (0.041)	0.9984 (0.040)
	$\hat{\alpha}_2$	0.0432 ^{ns} (0.049)	0.1900 (0.036)	0.1149 (0.037)	0.1287 (0.043)	0.3705 (0.050)	-0.0293 ^{ns} (0.047)
	$\hat{\beta}_1$	6e - 04 ^{ns} (0.026)	0.0284 ^{ns} (0.016)	0.0177 ^{ns} (0.016)	-0.0443 (0.019)	0.2085 (0.027)	0.1939 (0.026)
	$\hat{\beta}_2$	0.6149 (0.177)	0.1607 ^{ns} (0.092)	0.4314 (0.104)	0.9663 (0.143)	-0.4174 (0.168)	0.2260 ^{ns} (0.175)
	$\hat{\beta}_3$	0.0400 ^{ns} (0.112)	0.3073 (0.054)	0.2584 (0.062)	-0.0826 ^{ns} (0.079)	0.5670 (0.105)	0.2161 (0.109)
	$\hat{\beta}_4$	0.3565 ^{ns} (0.247)	0.8322 (0.172)	0.0197 ^{ns} (0.158)	0.0312 ^{ns} (0.271)	1.6487 (0.249)	0.7096 (0.218)
	$\hat{\beta}_5$	0.0551 (0.006)	0.0446 (0.006)	0.0449 (0.005)	0.0433 (0.004)	0.0145 (0.006)	0.0259 (0.005)
	$\hat{\beta}_6$	-0.6221 (0.058)	-0.5516 (0.046)	-0.4657 (0.042)	-0.3701 (0.043)	-0.2145 (0.060)	-0.3184 (0.053)
	σ^2	0.152	0.068	0.050	0.088	0.117	0.176
	δ	-0.109	-0.232	-0.259	-0.094	-0.124	-0.021
	n_{obs}	654	623	625	700	562	554
	n_{arv}	28	28	27	30	25	26
	3mx2m	$\hat{\alpha}_0$	0.6152 (0.062)	1.1060 (0.111)	0.9566 (0.052)	0.7719 (0.112)	0.8091 (0.063)
$\hat{\alpha}_1$		0.8326 (0.032)	0.9455 (0.035)	0.9239 (0.034)	0.8118 (0.041)	0.8844 (0.031)	0.9179 (0.027)
$\hat{\alpha}_2$		0.2815 (0.048)	0.0172 ^{ns} (0.057)	0.0833 (0.038)	0.2388 (0.074)	0.1628 (0.047)	0.1501 (0.036)
$\hat{\beta}_1$		-0.0924 (0.019)	0.0779 (0.016)	0.0393 ^{ns} (0.023)	0.0375 ^{ns} (0.024)	0.3156 (0.017)	0.1559 (0.016)
$\hat{\beta}_2$		1.7776 (0.140)	-0.0721 ^{ns} (0.139)	0.4364 (0.121)	-0.5598 (0.230)	-0.7683 (0.105)	-0.1083 ^{ns} (0.107)
$\hat{\beta}_3$		-0.4832 (0.076)	0.3756 (0.070)	0.2341 (0.072)	0.6271 (0.103)	0.8078 (0.057)	0.4602 (0.060)
$\hat{\beta}_4$		-2.9165 (0.420)	1.6345 (0.337)	0.4469 ^{ns} (0.275)	3.6986 (0.684)	1.0630 (0.214)	1.0152 (0.234)
$\hat{\beta}_5$		0.0593 (0.004)	0.0405 (0.003)	0.0515 (0.005)	0.0552 (0.005)	0.0168 (0.005)	0.0368 (0.004)
$\hat{\beta}_6$		-0.6572 (0.048)	-0.5019 (0.034)	-0.4645 (0.056)	-0.5721 (0.048)	-0.2156 (0.045)	-0.5247 (0.040)
σ^2		0.197	0.114	0.224	0.174	0.112	0.104
δ		-0.125	-0.095	-0.124	-0.075	-0.166	-0.149
n_{obs}		877	846	660	789	684	801
n_{arv}		29	30	26	30	28	30
3mx4m		$\hat{\alpha}_0$	0.5350 (0.059)	0.7493 (0.093)	0.7574 (0.051)	0.7911 (0.096)	1.4664 (0.165)
	$\hat{\alpha}_1$	0.7899 (0.036)	0.7447 (0.040)	0.8307 (0.030)	0.8062 (0.033)	1.0295 (0.023)	0.9573 (0.028)
	$\hat{\alpha}_2$	0.3647 (0.058)	0.3094 (0.066)	0.2364 (0.041)	0.2431 (0.053)	-0.1354 (0.050)	0.0735 ^{ns} (0.054)
	$\hat{\beta}_1$	0.1276 (0.019)	0.1401 (0.018)	0.0364 (0.017)	0.0117 ^{ns} (0.016)	0.2439 (0.015)	0.2116 (0.018)
	$\hat{\beta}_2$	0.4251 (0.157)	0.2918 ^{ns} (0.165)	0.4902 (0.115)	1.4618 (0.162)	0.0732 ^{ns} (0.125)	0.1974 ^{ns} (0.155)
	$\hat{\beta}_3$	0.2275 (0.078)	0.2593 (0.074)	0.1550 (0.057)	-0.0056 ^{ns} (0.065)	0.3842 (0.053)	0.4771 (0.066)
	$\hat{\beta}_4$	-0.6771 ^{ns} (0.458)	-0.2855 ^{ns} (0.554)	1.1983 (0.324)	-5.6696 (0.732)	-0.3192 ^{ns} (0.457)	-2.3498 (0.579)
	$\hat{\beta}_5$	0.0472 (0.004)	0.0321 (0.003)	0.0472 (0.004)	0.0355 (0.003)	0.0154 (0.003)	0.0376 (0.003)
	$\hat{\beta}_6$	-0.5367 (0.045)	-0.3488 (0.038)	-0.4235 (0.044)	-0.3012 (0.037)	-0.2196 (0.036)	-0.5231 (0.041)
	σ^2	0.202	0.165	0.201	0.161	0.191	0.270
	δ	-0.136	-0.122	-0.134	-0.091	-0.036	-0.030
	n_{obs}	894	833	763	846	845	813
	n_{arv}	29	27	27	29	28	26

ns, não significativo a P < 0.05; n_{obs} , número de seções do tronco; n_{arv} , número de árvores

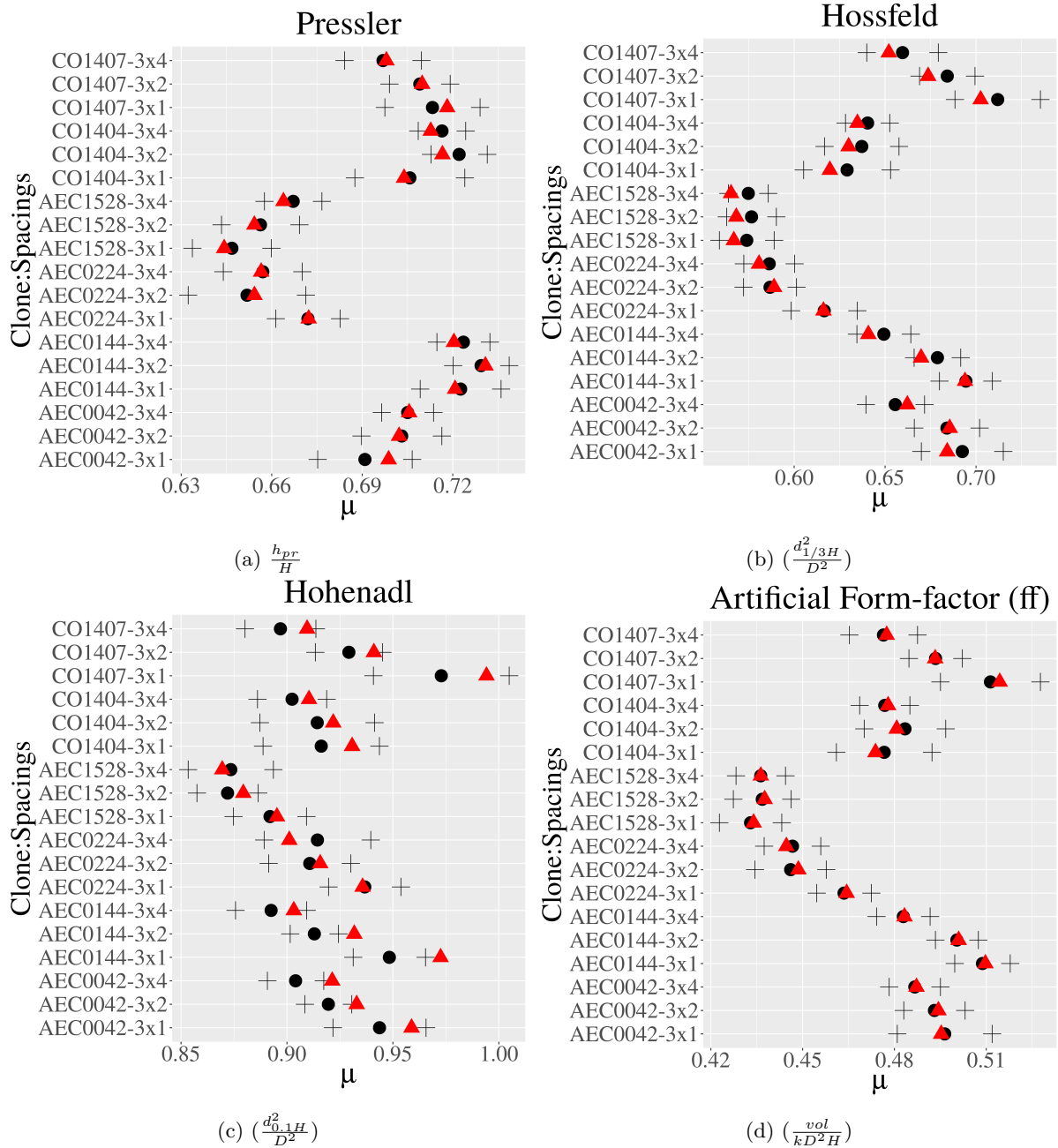


Figura 3.6: Intervalos de verossimilhança da média (μ) das medidas de forma para cada combinação de material genético e espaçamento (Clone:Espaçamento). em que: (●) é a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro μ das medidas observadas pela interpolação; (+) os intervalos de verossimilhança ou vizinhança da MLE pelo critério canônico ($\log(8)$ ou $2,08$); (\triangle) é o valor médio da estimativa obtido pelas equações de *taper* em cada tratamento (vermelho).

4 APLICAÇÃO DE VARIÁVEIS ARBORIMÉTRICAS E DE POVOAMENTO NA MODELAGEM DE *TAPER* CONSIDERANDO O MATERIAL GENÉTICO E ESPAÇAMENTO EM PLANTIOS DE *EUCALYPTUS*

Resumo

Incorporar atributos da árvore e de povoamento aos modelos de *taper* tem sido um procedimento comum quando se pretende obter equações mais generalistas. Além do diâmetro a altura do peito e a altura total medidas em outras posições do tronco são escolhidas empiricamente. Por outro lado, a altura da base da copa é a principal característica do tronco incluída nesses modelos por possuir intrínseca relação com o crescimento da floresta e a forma do tronco. Por ser uma medida pouco comum na coleta em campo, geralmente é substituída por variáveis de povoamento que representam indiretamente a competição entre árvores e sua dinâmica. No entanto, a copa tem sido reportada como um atributo que fornece significado biológico aos modelos. Uma provável medida que pode substituí-la é o índice de área foliar estimado, que possui relação com a biomassa da copa do povoamento. Outra abordagem que pode ser mais generalista é o uso das medidas de forma de Pressler e Hossfeld. Portanto, o presente capítulo tem como objetivo central identificar quais atributos da árvore e de povoamento que explicam o efeito do material genético e espaçamento, sobretudo fornecer significado biológico ao modelo. Foram utilizados dados de cubagem de seis clones e três espaçamentos de um experimento em esquema fatorial (6x3) de *Eucalyptus spp.*. Três categorias de modelos de *taper* foram aplicadas: segmentado, expoente-variável e expoente e forma-variável com interruptores numéricos. As variáveis incorporadas aos modelos foram classificadas em atributos individuais da árvore, que incluem medidas de forma relativa e derivações da altura da base da copa; medidas de povoamento, como a densidade de plantio, área basal por hectare, diâmetro médio quadrático, espaçamento relativo e o índice de área foliar estimado. Os modelos foram ajustados pelo método da máxima verossimilhança e avaliados a partir do critério de informação de Akaike (AIC), raiz do erro quadrado médio (RMSE), erro médio (ME) e o erro médio absoluto (MAE). Os resultados indicam que tanto a altura relativa de Pressler quanto o quociente de Hossfeld compensam o efeito do clone e espaçamento e fornecem significado sobre a forma do tronco. O índice de área foliar estimado é capaz de substituir medidas de copa apenas com o modelo de expoente-variável o que não ocorreu com as outras categorias de modelo. A área basal (\sqrt{AB}/D) foi a melhor medida de povoamento para o modelo de expoente-variável e é sensível às diferentes formas, embora não compense o efeito do material genético. O modelo de interruptores numéricos indica que a altura de Pressler possui melhor referencial que a altura da base da copa para transição dos sólidos no topo do tronco.

Palavras-chave: Medidas de forma, Modelos generalistas, Transição numérica, Espaçamento relativo

Abstract

Incorporating tree and forest stand attributes into taper models has been a common procedure to consider more general equations. In addition to diameter at breast height and total height, upper-stem measurements in different positions are chosen empirically. On the other hand, the base of the crown height is the main tree attribute included into models because it has an intrinsic relationship with the growth of the forest and the stem shape. As uncommon measure in forest inventories, it is usually replaced by stand variables that indirectly represent the competition among trees and their dynamics as well. However, the crown has been reported as an attribute that provides biological

meaning to the models. Thus, a probable measure that can replace it is the estimated leaf area index, which is related to the biomass of the forest stand canopy. Another approach that may be more general is the use of Pressler and Hossfeld's form ratios. Therefore, the main objective of this chapter is to identify which tree and stand attributes explain the effect of genetic material and spacing, especially to provide biological meaning to the model. Data from six clones and three spacings from a factorial design (6x3) experiment of *Eucalyptus spp.* were used. Three categories of taper models were applied: segmented, exponent-variable and exponent and variable-shape with numerical switches. The variables incorporated into the models were classified from individual attributes of the tree, which include measures of form ratios and derivations of the height of base of the crown height; stand measurements, such as planting density, basal area per hectare, mean square diameter, relative spacing and estimated leaf area index. The models were fitted by maximum likelihood method and evaluated using the Akaike Information Criterion (AIC), root mean square error (RMSE), mean error (ME) and mean absolute error (MAE). The results indicate that both Pressler's relative height and Hossfeld's quotient compensates the clone and spacing effect and provide meaning on stem form and shape. The estimated leaf area index is able to replace crown measurements only with the variable-exponent model, unlike other model categories. Basal area (\sqrt{AB}/D) was the best stand measurement for the exponent-variable model and is sensitive to different shapes, although it does not compensates the genetic material effect. The model with numerical switches signs that the Pressler height has a better reference than the base of the crown height for the transition of solids at the top segment.

Keywords: Shape measurements, Generalist models, Numerical stem transition, Relative spacing

4.1 Introdução

Características individuais da árvore e de povoamento como co-variáveis nos modelos tem sido o principal meio de traduzir os fatores que interferem na forma do tronco. Dentre os atributos individuais da árvore temos a copa que, além de cumprir papel essencial na captação de luz e ser a principal característica para os processos fisiológicos da planta, é também associada a algumas teorias sobre a formação do tronco (Larson, 1963; Assmann, 1970). Isto porque, na região onde se encontram os primeiros galhos até o topo do tronco é retratada a diminuição da área seccional neste intervalo para algumas espécies (Valentine e Gregoire, 2001). Como bem documentado em McTague e Weiskittel (2021), quando a copa possui formato triangular esta região tende a ser cônica, o que suporta a teoria do centro de gravidade da copa. Detalhes sobre esta afirmação e demais teorias podem ser vistas em Assmann (1970), recentemente em Schneider (2018) e McTague e Weiskittel (2021) com mais profundidade.

A maneira mais fácil e comum de traduzir o efeito da copa é pela altura de sua base no tronco. Com ela é possível obter tanto o comprimento quanto seu percentual que servem como co-variáveis nos modelos de *taper*, além do *dap* e altura total. Embora seja um atributo da árvore associado a processos diretos na formação do tronco, a justificativa de sua inclusão nestes modelos permanece dividida (Burkhart e Tomé, 2012). Primeiramente por não ser uma medida convencional nos inventários florestais, sobretudo pela subjetividade em definir sua localização no tronco. Consequentemente, em florestas muito adensadas a visualização de sua base pode ser comprometida. Mas, o que torna esta co-variável pouco justificável são os resultados variados da capacidade preditiva quando adicionada a estes modelos, que traz apenas melhoras marginais nas estimativas. O problema é que geralmente o critério adotado para justificar o uso ou não de medidas de copa se baseia exclusivamente na significância estatística do parâmetro associado a esta co-variável, sem considerar a capacidade do modelo de ser biologicamente extrapolável (Weiskittel et al., 2011).

Poucos trabalhos exploraram as variáveis de copa, inclusive na elaboração de modelos para este fim conforme apresentado em Valentine e Gregoire (2001) que descreve uma nova categoria de modelo de *taper* com interruptores numéricos. Neste estudo, a altura da base da copa foi usada para definir a

transição dos sólidos entre os segmentos intermediário e o topo do tronco, por meio de funções comuns em processos biológicos¹. A abordagem com interruptores numéricos mostrou que há uma diminuição abrupta da área seccional das seções que partem da posição onde é iniciada a copa até o topo, em pelo menos duas das quatro espécies avaliadas, além de fornecer parâmetros facilmente interpretáveis. No mesmo sentido, Westfall e Scott (2010) adaptou o modelo com interruptores numéricos para tornar essa transição empírica sem a necessidade da altura da base da copa, além de incluir um parâmetro associado a variáveis simples como a razão D/H . Isto habilita o modelo a incluir variáveis de outras naturezas.

Em outras categorias de modelo o mais comum é adaptar expressões já existentes, a exemplo do modelo segmentado de Max e Burkhart (1976) que não possui maneira direta de inclusão de novas variáveis em seu modelo original. Nesta ocasião, alguns parâmetros previamente selecionados se tornam funções lineares e não lineares que habilitam incluir o comprimento e a razão de copa (Burkhart e Walton, 1985; Valenti e Cao, 1986; Leites e Robinson, 2004). Por outro lado, na categoria de modelo de expoente-variável, estas medidas podem ser facilmente incorporadas no expoente da função (Li e Weiskittel, 2010). As duas últimas abordagens embora forneçam resultados razoáveis com o uso da copa, ainda mantêm o argumento que o ganho em precisão é pouco justificável para sua coleta em campo.

Devido a esta problemática, co-variáveis de povoamento têm sido uma opção mais viável por isentar, na maioria dos casos, a coleta de mais medidas em campo. Isto porque se entende que o desenvolvimento da copa das árvores é diretamente influenciado por condições de sítio e de povoamento como a densidade de plantio (N , árv. ha^{-1}) e área basal (AB , $m^2 \cdot ha^{-1}$) (Burkhart e Tomé, 2012). Teoricamente, se atributos de povoamento forem capazes de substituir o efeito da copa, isentaria a sua coleta em campo por ser um componente que deve ser obtido árvore-a-árvore. Entretanto, isto nem sempre ocorre conforme evidenciado por Sharma e Zhang (2004).

Em contrapartida, a capacidade de captação de luz de um povoamento pode ser facilmente quantificada a partir de métodos indiretos. O Índice de Área Foliar (*Leaf Area Index*) é uma medida adimensional associada a quantidade de luz que pode ser interceptada pelas árvores. Este índice é comumente relacionado a biomassa da copa, mas sua importância se dá na explicação de processos de evapotranspiração e crescimento da floresta (Kershaw Jr et al., 2016). Ainda, é sensível à práticas silviculturais de desbaste intensivo e possui relação direta com mudanças no comprimento de copa individual da árvore (Medhurst e Beadle, 2001). Assim, espera-se que esta medida possa capacitar o modelo a obter generalizações em diferentes tratamentos silviculturais, como arranjos espaciais e materiais genéticos, sobretudo ser uma forte candidata a substituir medidas de copa e fornecer significado biológico aos modelos.

Embora pareça vantajoso optar por variáveis de povoamento, devido a alta correlação com outras variáveis já existentes, a aplicação destas no modelo de expoente-variável trouxe apenas melhoras marginais (Muhairwe et al., 1994). Por outro lado, a densidade e ranqueamento da árvore² fornecem resultados realistas sobre a forma para algumas espécies (Sharma e Zhang, 2004; Sharma e Parton, 2009), bem como o espaçamento relativo³ que tem sido o mais indicado para obter significado biológico ao modelo (Sanquetta et al., 2020; McTague et al., 2020).

Com o crescente interesse em obter modelos explicativos e mais generalistas, estas características da árvore e de povoamento são informativas na definição dos fatores de variação, mesmo em florestas plantadas. É natural supor que fatores como espécie ou material genético e competição interespecífica sejam os principais. No entanto, quando a variável de interesse é a forma do tronco a variação a nível

¹Os interruptores podem ser entendidos aqui como algo análogo as "funções de ligação", usadas em generalizações de alguns modelos estocásticos que explicam mecanismos ecológicos específicos (ex.: *logit*). No caso de modelos de *taper*, servem para fazer transições de um submodelo a outro, na mudança de um neiloide a um parabolóide e em sequência para um cone.

² \sqrt{AB}/D , em que AB é a área basal por hectare em m^2 ; D o diâmetro a altura do peito.

³ $\sqrt[3]{10000/N/H_{dom}}$

de indivíduo tem sido o foco para obter modelos com a possibilidade de calibração. Isto torna evidente a escolha de outras abordagens mais sofisticadas, como modelos de efeitos mistos ou na localização desses modelos para obter expressões árvore-a-árvore. As duas técnicas por mais que forneçam ótimas estimativas e boa capacidade de extrapolação para novos padrões florestais, ainda mantém o aspecto determinista dos modelos. Mais recentemente tem surgido maior interesse em entender os mecanismos sobre a forma do tronco a partir de elementos estocásticos (Narmontas et al., 2020; Petrauskas et al., 2020).

Modelos de *taper* mais simples possuem parâmetros que são expressões da forma do tronco quando adotados árvore-a-árvore e conseqüentemente mais fáceis de interpretar quando relacionados aos atributos dela e de povoamento (Newberry e Burkhart, 1986). O problema é que esta simplicidade embora forneça capacidade interpretativa, não apresenta uma definição satisfatória da forma quando a espécie possui maiores deformidades na base do tronco. Segundo Goodwin (2009), um dos critérios para a seleção de uma boa equação de *taper* é ser suficientemente flexível para explicar a enorme variedade de formas do tronco em diferentes espécies. Para obter essa flexibilidade muitos modelos adotam de seis a mais parâmetros (Max e Burkhart, 1976; Kozak, 1988, 2004), atribui elementos trigonométricos (Thomas e Parresol, 1991; Fang et al., 2000) ou são apenas funções não paramétricas (Lappi, 2006) e semi-paramétricas (Scolforo et al., 2018). Conforme já comentado no Capítulo 3, esta maior complexidade não facilita a interpretação das equações, mas as estimativas das medidas de forma associadas aos perfis teóricos do tronco habilitam interpretar mais facilmente modelos com muitos parâmetros.

Medidas de forma são definidas para o cálculo de volume de árvores em pé (Ducey e Williams, 2011). Espera-se que a forma das árvores mude em função do seu tamanho, idade, sobretudo características como espécie e densidade de plantio. Por isto, fica evidente que apenas o *dap* e altura total da árvore não são suficientes em explicar a enorme variação dos padrões florestais, mesmo em florestas clonais do gênero *Eucalyptus*. A altura de Pressler e o diâmetro de Hossfeld são consideradas boas medidas de forma para obtenção de equações que forneçam o volume exato para grande parte das espécies excurrentes com formato parabolóide e cônico (McTague, 1992; McTague et al., 2020). Isto torna menos arbitrária a escolha da posição do tronco que possua significado sobre a forma ao incluir no modelo de *taper*.

Tanto os atributos da árvore quanto de povoamento são tentativas de fornecer aos modelos capacidade de generalização aos complexos fatores de variação que abarcam florestas plantadas do gênero *Eucalyptus*. Neste capítulo, acredita-se que a inclusão desses atributos e as medidas de forma forneçam um aspecto explicativo aos modelos, por serem atributos da árvore e possuírem amparo teórico sobre a forma do tronco. A partir das relações obtidas é possível obter informações complementares sobre os fatores que interferem na forma das árvores, a partir de métodos analíticos de modelagem. Os modelos de *taper* existentes são a tentativa de expressar a forma idealizada do tronco, sem necessariamente considerar os mecanismos sobre ela, o que justifica construir modelos com significado biológico e conseqüentemente mais explicativos.

Assim, o presente capítulo possui as seguintes hipóteses:

- I – A inclusão de medidas de forma nos modelos de *taper* é capaz de explicar a forma do tronco bem como substituir o efeito do material genético e espaçamento;
- II - Medidas de copa e de povoamento são indicadoras da variação da forma do tronco;
- III - O Índice de Área Foliar é semelhante ao efeito da copa na forma do tronco.

4.2 Material e métodos

4.2.1 Descrição da área de estudo

O estudo foi conduzido na Estação Experimental de Ciências Florestais de Itatinga (EECFI), localizada no município de Itatinga-SP, sob jurisdição da Universidade de São Paulo e vinculada ao De-

partamento de Ciências Florestais (LCF) da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ). A estação possui uma área total aproximada de 2.247 hectares, sendo ocupada por áreas de preservação e conservação ambiental, bem como por plantios comerciais e experimentais de *Eucalyptus spp.* e *Pinus spp.*. Está inserida na Bacia Hidrográfica do Médio Paranapanema (SigRH), região centro-sul do estado de São Paulo.

A altitude da região é de 850 m, e fica localizada nas coordenadas geográficas com latitude 23° 10' sul e longitude de 48°40' oeste. O clima local é classificado, segundo critérios de Köppen, como Cwa, denominado clima subtropical de inverno seco e verão quente com chuvas. A precipitação anual média é de 1.350 mm, com temperaturas médias anuais de 20° C, sendo 3° C a temperatura média mínima do mês mais frio e 32° C a temperatura média mínima do mês mais quente (Alvares et al., 2013). No período de coleta de dados, entre fevereiro e abril de 2019, a temperatura máxima foi de 35,3° C no mês de fevereiro e mínima de 10,6° C no mês de abril, com precipitação acumulada nesse período de 762,8 mm (dados monitorados e fornecidos pela estação meteorológica da própria EECFI).

Os dados utilizados neste estudo foram provenientes de seis diferentes materiais genéticos de *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake (clones CO1404, CO1407, AEC0042, AEC0144, AEC0224) e *Eucalyptus spp.* (clone AEC1528), com idade de 7 anos, em experimento alinhado em seis blocos casualizados em esquema fatorial, com três diferentes arranjos espaciais (espaçamentos 3mx1m, 3mx2m e 3mx4m). O experimento foi implantado entre dezembro de 2011 e janeiro de 2012. Os clones são melhoramentos genéticos com plasticidade suficiente para resistência a grande escassez hídrica, e possuem as melhores características para comportar essas adversidades nas regiões às quais eles foram desenvolvidos.

A classificação do solo na área onde o experimento foi instalado é o Latossolo Vermelho Distroférrico tipo A moderado de textura argilosa (LVdf). É formado por meio da intemperização do basalto, grupo São Bento, formação Serra Geral (Gonçalves et al., 2012). Este tipo de solo é caracterizado por apresentar baixa saturação por bases, baixa fertilidade natural e alto teor de óxidos de ferro (Fe_2O_3), além de serem solos muito profundos, porosos a muito porosos, bem drenados o que é uma vantagem no sentido físico, entretanto mais susceptíveis à compactação devido a sua textura argilosa (Alves, 2021, *apud* EMBRAPA, 2019).

Na seleção das árvores para procedimento de cubagem, foram utilizados dados do levantamento realizado em janeiro de 2019, a partir da distribuição diamétrica dos valores do *dap*. No mesmo levantamento, foram realizadas medições do diâmetro a altura do peito (*dap*, a 1,3m de altura do tronco), altura total e a altura da base da copa. Por último foram obtidos o Índice de Área Foliar medido (IAF) em cada tratamento. As parcelas contabilizaram um número fixo de 25 árvores (5 linhas x 5 plantas), contudo apenas a área útil dela foi considerada no levantamento. A área útil consiste nas nove árvores centrais. As árvores marginais foram consideradas como bordadura interna simples, no intuito de manter o efeito do espaçamento e controlar a influência dos tratamentos vizinhos.

Três classes de diâmetro foram estabelecidas empiricamente para compor a categorização em árvores menores (P), intermediárias (M) e grandes (G), para cada um dos tratamentos. Em posse dos diâmetros mínimos e máximos de cada um deles, foram obtidas amplitudes de classe diferentes para cada um dos tratamentos. Foram selecionadas 30 árvores aleatoriamente por tratamento (10 árvores em cada classe de *dap*) para a cubagem rigorosa. Árvores problemáticas ou com erros de medição justificados e que inviabilizam as análises, foram removidas totalizando 503 árvores úteis. Na etapa de cubagem, as medições das árvores foram executadas no período de fevereiro a abril de 2019. As seções para obtenção dos diâmetros com casca (d_{cc}) ao longo do fuste na cubagem rigorosa obedeceram as seguintes alturas: 0,1m; 0,7m; 1,3m; 2,0m e seções de 1m a partir desta marca até o diâmetro limite de 3cm, para posterior cálculo do volume total pela fórmula de *Smalian*. A partir da altura da última seção, o volume da ponta foi calculado com a fórmula do cone.

4.2.2 Variáveis utilizadas nos modelos

O critério aplicado para determinar a altura da base da copa seguiu as recomendações de Batista et al. (2014), que considera os galhos vivos contíguos como a região de máxima capacidade de absorção e eficiência da copa. Algumas situações encontradas na área experimental podem ser exemplificadas na Figura 4.1. Esta medida foi mensurada indiretamente a partir do hipsômetro Vertex IV, bem como obtida por meio de uma fita métrica com precisão em centímetros no momento da cubagem. Neste caso, somente as medidas obtidas diretamente com a fita métrica foram usadas.



Figura 4.1: Diferentes situações de copas encontradas e as determinações dos pontos de mensuração da altura da base da copa nos diferentes tratamentos. Fonte: https://www.dnr.wa.gov/publications/lm_hcp_west_oldgrowth_guide_df_hires.pdf

Além das variáveis arborimétricas convencionais, como *dap* e altura total (H), foram utilizados outros atributos como altura da base da copa (H_{bc}), a razão de copa (Cr), comprimento de copa (Cc). O comprimento de copa é a diferença entre a altura total e altura da base da copa ($H - H_{bc}$). Para cálculo da razão de copa foi usada a expressão

$$Cr = \frac{(H - H_{bc})}{H} = \frac{Cc}{H}$$

em que, Cr e Cc é a razão e o comprimento de copa respectivamente; H é a altura total, em metros; H_{bc} altura da base da copa, em metros.

Outras medidas adicionais do tronco foram obtidas seguindo algumas teorias sobre a forma. As medidas foram a altura relativa de Pressler, h_{pr}/H , bem como o quociente de forma de Hossfeld, $(d_{1/3H}/D)^2$. Com os dados dos diâmetros mensurados no momento de cubagem rigorosa, todas essas medidas adicionais foram obtidas pelo procedimento de interpolação pela função *approx* no software R. Este procedimento já foi melhor descrito no Capítulo 2 e usado novamente neste capítulo.

Variáveis de povoamento incorporadas aos modelos são conhecidas como a maneira de traduzir o efeito da competição ou o espaço ocupado pelas árvores em uma área. Quantificar essa ocupação é a principal maneira de obter modelos preditivos confiáveis, quando se pretende obter o crescimento e a produção da floresta (Burkhardt e Tomé, 2012). As variáveis de povoamento foram elaboradas com base na aplicação já conhecida em modelos de *taper*. Dentre elas estão: 1) AB , em m^2ha^{-1} (Jiang e Liu, 2011); 2) \sqrt{AB}/D (Sharma e Parton, 2009; Sharma, 2020); 3) Dg , em cm; 4) D/Dg (McTague et al., 2020); 5) $\sqrt{10000/N}/H_{dom}$, espaçamento relativo ou RS (Sanquetta et al., 2020; McTague et al., 2020); 6) IAF ou Índice de Área Foliar medido (sugerido pelo autor).

As variáveis descritas no parágrafo anterior foram obtidas a partir dos dados do levantamento realizado em janeiro de 2019, considerando a área útil da parcela (as 9 árvores centrais). O N , número de árvores por hectare de cada um dos espaçamentos, foi calculado a partir do espaço ocupado pela árvore, ou seja, 3.333 (3mx1m); 1.666 (3mx2m); 833 (3mx4m) $arv.ha^{-1}$, respectivamente. A área ocupada pelas nove árvores centrais foram usadas para extrapolar a área basal (AB) por parcela em hectare. Assim, foi possível calcular o fator de expansão que consiste na soma da área individual em m^2 das nove árvores centrais (área útil: 3mx1m, 27m²; 3mx2m, 54m²; 3mx4m, 108m²). O IAF foi obtido por meio do LAI-2000, seguindo-se a metodologia aplicada por Cordova Flores (2016) e replicada por Alves (2021) neste levantamento. A altura dominante (H_{dom}) foi calculada a partir das 15 árvores com maior diâmetro dentre o total de 54 árvores de cada tratamento, considerando o experimento em sua totalidade com os dados do levantamento ($\approx 28\%$ das árvores de cada tratamento). As estatísticas descritivas tanto dos atributos da árvore quanto do levantamento podem ser vistas na Tabela 4.1. As medidas de copa, de forma e de povoamento foram referenciadas nos modelos pelo termo X_v .

Tabela 4.1: Sumarização das estatísticas descritivas das características mensuradas tanto das árvores individualmente na cubagem quanto do levantamento. Intervalo de confiança a um nível de 95% (I.C.).

Variável	Min.	Máx.	Média	Mediana	Desv. Pad.	Q25%	Q75%	I.C.
Árvores individuais (cubagem); n = 503 árv.								
D (cm)	4.20	26.00	15.52	15.65	4.3249	12.45	18.775	± 0.3780
H (m)	9.10	36.00	26.19	27.50	5.2409	23.20	30.00	± 0.4580
C_r	0.02	0.61	0.20	0.17	0.1113	0.1195	0.264	± 0.0097
C_c (m)	0.50	14.65	5.12	4.60	2.5742	3.20	6.80	± 0.2250
h_{pr}/H	0.54	0.83	0.69	0.70	0.0416	0.6672	0.7227	± 0.0036
$(d_{1/3H}/D)^2$	0.41	0.84	0.64	0.64	0.0617	0.5991	0.6824	± 0.0054
Levantamento (povoamento); n = 960 árv.								
$AB(m^2ha^{-1})$	17.88	72.06	32.33	30.61	8.9095	26.0541	36.2671	± 0.7790
D_g (cm)	9.37	21.93	15.87	15.87	3.2614	13.12	18.70	± 0.2850
$N(arv.ha^{-1})$	833	3333	1934.61	1666	1031.99	833	3333	± 90.200
IAF	1.86	4.62	3.27	3.26	0.5118	2.96	3.57	± 0.0447
H_{dom}	28.34	34.13	31.38	31.89	1.9444	29.44	33.2467	± 0.1700

AB, área basal; D_g , diâmetro médio quadrático; N , densidade de plantio; IAF, índice de área foliar; H_{dom} , altura dominante.

4.2.3 Modelos de taper

Foram utilizados três modelos de taper que possuem procedimentos com a capacidade de incluir co-variáveis. O modelo segmentado utilizado foi o de seis parâmetros conhecido como "quadrático-quadrático-quadrático". Embora outras expressões mais simplificadas do modelo tenham sido testadas, é a escolha comum em inúmeros trabalhos (Max e Burkhardt, 1976; Cao et al., 1980; Thomas e Parresol, 1991; Figueiredo-Filho et al., 1996). A estrutura básica do modelo é assim apresentada:

$$y^2 = \beta_1(x - 1) + \beta_2(x^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x)^2 I_2 + \varepsilon_i$$

em que: y^2 , é a razão de diâmetros (d_i/D); x é a razão h_i/H ; h_i , é a altura da seção i do tronco em (m); H , a altura total (m); d_i , diâmetro com casca, em cm, na altura h_i ; D ou d_{ap} , diâmetro a 1.3m de altura acima do solo (cm); β_i , coeficientes do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); α_1 e α_2 são os pontos de inflexão de mudança dos sólidos; I_1 e I_2 são as variáveis indicadoras que seguem as condições: $I_1 = 1$ se $x \leq \alpha_1$; $I_2 = 1$ se $x \leq \alpha_2$, caso contrário, retorna zero.

O modelo de expoente-variável usado foi o de Kozak (2004). Neste caso, optou-se por utilizar a expressão original, sem perda da expressão que estima o ponto de inflexão ($\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$) devido a possibilidade de localização do modelo. O modelo pode ser assim descrito:

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 z^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0,1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_i} + \beta_6 X_i} + \varepsilon_i$$

em que, d_i , diâmetro com casca, em cm, na altura h_i ; z é a razão h_i/H ; β_i , coeficientes do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); Q_i , a expressão $[1-(h_i/H)^{1/3}]$; X_i , significa $[1-(h_i/H)^{1/3}]/(1-p^{1/3})$. Os demais termos já foram descritos anteriormente no modelo segmentado.

O terceiro e último modelo foi o de Valentine e Gregoire (2001), considerado de expoente e forma-variável, que incorpora interruptores numéricos e a altura da base da copa originalmente. Maiores detalhes sobre a construção deste modelo pode ser visto no Anexo A deste documento. Optou-se por usar como variável dependente o diâmetro relativo ao invés da área seccional relativa. O modelo proposto pode ser descrito como:

$$y^2 = \left(\frac{H - h_i}{H - 1,3} \right)^{\alpha_1 + S_5(h_i)} \left(\frac{H - h_i}{H - h_u} \right)^{\alpha_2 S_6(h_i)} + \varepsilon_i \quad (4.1)$$

em que, h_u é uma altura qualquer do tronco em metros; $\alpha_1, \alpha_2; \lambda_1; \lambda_2; \theta_1$ e θ_3 são os parâmetros a serem estimados; $S_5(h_i)$ e $S_6(h_i)$ são os interruptores numéricos descritos como:

$$S_5(h_i) = \frac{\alpha_0}{1 + [h_i/(\theta_3 H)]^{\lambda_1}}, \quad 0 < \theta_3 < \frac{h_u}{H}; \quad \alpha_0 = \theta_1 H$$

$$S_6(h_i) = \frac{(h_i/h_u)^{\lambda_2}}{1 + (h_i/h_u)^{\lambda_2}}$$

4.2.3.1 Adaptação para elaborar o modelo explicativo

Na adaptação do modelo original de Max e Burkhardt (1976) foram aplicados critérios de seleção dos parâmetros para associá-los a funções matemáticas básicas extraídas de Almeida-Neto et al. (2010). Podem ser classificadas em: Linear (eq. 4.2) e Quadrática (eq. 4.3).

$$\hat{\beta}_j; \hat{\alpha}_j = c_0 + c_1 X_v \quad (4.2)$$

$$\hat{\beta}_j; \hat{\alpha}_j = c_0 + c_1 X_v + c_2 X_v^2 \quad (4.3)$$

em que, X_v são as variáveis preditoras de copa, de forma e de povoamento apresentadas anteriormente; $\hat{\beta}_j$ ou $\hat{\alpha}_j$ é o parâmetro do modelo estimado pela função onde $j=1, \dots, 6$; c_0, \dots, c_2 são os parâmetros da função. As expressões acima foram incorporadas no modelo segmentado. A escolha dos parâmetros foi guiada com base nas hipóteses sobre o efeito de cada variável nos submodelos da segmentação. Os pontos de inflexão separam o tronco da árvore em três partes. Assim, o modelo pode ser subdividido e assumir as seguintes expressões:

1) topo ($h_i/H > \alpha_1$)

$$y_i^2 = \beta_1(x_i - 1) + \beta_2(x_i^2 - 1) + \varepsilon_i$$

2) região intermediária ($\alpha_2 \leq h_i/H \leq \alpha_1$)

$$y_i^2 = \beta_1(x_i - 1) + \beta_2(x_i^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 + \varepsilon_i$$

3) base ($h_i/H \leq \alpha_2$)

$$y_i^2 = \beta_1(x_i - 1) + \beta_2(x_i^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x_i)^2 + \beta_4(\alpha_2 - x_i)^2 + \varepsilon_i$$

A partir dos submodelos da segmentação, a escolha dos parâmetros para incorporar as funções básicas foi executada seguindo-se os critérios:

- i) Coeficientes comuns em todos os submodelos ($\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$)
- ii) Coeficientes que estão em apenas dois submodelos ($\hat{\beta}_3$ e $\hat{\alpha}_1$)
- iii) Coeficientes que estão em apenas um submodelo ($\hat{\beta}_4$ e $\hat{\alpha}_2$)
- iv) e v) Pontos de inflexão $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$, respectivamente.

No modelo de expoente-variável de Kozak (2004), as co-variáveis foram inseridas em seu expoente e representadas pelo parâmetro β_7 associado a X_v :

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 z^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0,1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_i} + \beta_6 X_i + \beta_7 X_v} + \varepsilon_i$$

No modelo de Valentine e Gregoire (2001) foram testadas apenas as alturas da base da copa (h_{bc}) e altura de Pressler (h_{pr}) em substituição ao termo h_u das expressões tanto do modelo original (eq. 4.1) quanto do interruptor numérico $S_6(h_i)$. Para verificar se estas medidas são necessárias, o modelo foi adaptado para incluir um parâmetro que represente o ponto de inflexão a partir da altura total (γ). Neste caso mantém-se o $S_5(h_i)$ e o interruptor $S_6(h_i)$ se torna $S_7(h_i)$ (eq. 4.5). A adaptação foi assim proposta:

$$y^2 = \left(\frac{H - h_i}{H - 1,3} \right)^{\alpha_1 + S_5(h_i)} \left(\frac{H - h_i}{H - \gamma H} \right)^{\alpha_2 S_7(h_i)} + \varepsilon_i \quad (4.4)$$

$$S_5(h_i) = \frac{\alpha_0}{1 + [h_i/(\theta_3 H)]^{\lambda_1}}, \quad 0 < \theta_3 < \frac{\gamma H}{H}; \quad \alpha_0 = \theta_1 H$$

$$S_7(h_i) = \frac{(h_i/(\gamma H))^{\lambda_2}}{1 + (h_i/(\gamma H))^{\lambda_2}} \quad (4.5)$$

4.2.3.2 Ajuste dos modelos

O procedimento para estimativa dos parâmetros foi pelo método da Máxima Verossimilhança (MLE). A melhor maneira de lidar com a variação dos dados é aplicar uma função de proporcionalidade para variância, considerando que o modelo é heteroscedástico. A função da variância seguiu a Lei de Taylor (Taylor, 1961) em que a variância possuirá pesos a partir de uma função de proporcionalidade dada por:

$$\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2 \left[\frac{h_i}{H} \right]^\delta\right)$$

O ajuste dos modelos foi realizado por meio do pacote *nlme* pela função *gnls* no *software* R (R Core Team, 2020).

4.2.3.3 Seleção e análise dos modelos (*Goodness-of-fit*)

Os modelos foram avaliados tanto pelo comportamento visual dos resíduos quanto pelo critério de informação de Akaike (*AIC*) e estatísticas de precisão das estimativas (RMSE, MAE e ME). Gráficos de resíduos padronizados a partir das relações entre os desvios e os valores preditos pelos modelos, com curva de suavização foram utilizados (*resíduos vs. estimado*). Os desvios dos diâmetros foram também classificados por intervalos de alturas percentuais do tronco por meio de gráficos *box-plot* e assim verificar em qual parte dele o modelo possui maior viés (Kozak e Smith, 1993; Shahzad et al., 2020).

Os dados foram particionados em diferentes escalas de ajuste, em que os modelos foram ajustados em sua estrutura original, sem adição de novas variáveis. As escalas de ajuste foram:

- M1) Com efeito do espaçamento;
- M2) Com efeito do material genético;
- M3) Com efeito da interação (Clone:Espaçamento);
- M4) Efeito da parcela

Na comparação e seleção de modelos, foi utilizado o Critério de informação de Akaike-AIC (Burnham e Anderson, 2002). Diferenças no critério iguais ou acima de dois ($\Delta_i \geq 2,08$) conferem maior plausibilidade na escolha de um determinado modelo em detrimento do outro. Caso contrário, se o valor de $\Delta_i \leq 2,08$ os modelos são equivalentes.

Para que os *AICs* sejam comparáveis nas diferentes escalas de ajuste, foi feito o somatório do critério a partir do *AIC* de cada subconjunto na escala. Como o *AIC* possui propriedade aditiva, os *AICs* dos subconjuntos do conjunto dos dados, ou seja, os subconjuntos contidos em cada escala de ajuste, podem ser somados para obter um único *AIC* de modo que esta medida global seja resultado da adição das medidas nos subconjuntos (Batista, 2014). O *AIC* global foi usado como referência para avaliar a capacidade dos modelos que incluem as variáveis arborimétricas e de povoamento, em substituir os efeitos do clone, espaçamento, interação ou parcela.

As expressões do Critério de Akaike (eq. 4.6) e do Δ_{AIC} (eq. 4.7) são:

$$AIC_i = -2\log(\mathcal{L}(\hat{\theta}|y)) + 2k \quad (4.6)$$

$$\Delta_i = AIC_i - \min_{j=1}^R(AIC_j) \quad (4.7)$$

considerando um conjunto de R modelos sendo i ($i=1,2,\dots,R$) o índice do modelo; AIC_i é o critério de Akaike do modelo i ; \mathcal{L} é a função de máxima verossimilhança; $\hat{\theta}$ são as estimativas de máxima verossimilhança do modelo e k o número de parâmetros livres do modelo.

Além do *AIC*, o ajuste foi avaliado a partir da raiz do erro quadrado médio (RMSE, eq. 4.8) e o erro médio absoluto (MAE%, eq. 4.9) e o erro médio (ME%, eq. 4.10).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m}} \quad (4.8)$$

$$MAE\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (4.9)$$

$$ME\% = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}}{n} \right) 100 \quad (4.10)$$

De posse da melhor expressão para cada categoria de modelo, foi aplicado o procedimento de validação-cruzada que consiste em particionar os dados em que 70% das árvores foram utilizadas para o ajuste (treino) do modelo e as 30% remanescentes na validação, em um processo aleatório. Este processo foi repetido 10000 vezes, sem reposição, sendo que para cada repetição foram calculados o RMSE, MAE e ME, tanto para o ajuste quanto para validação. No final foi obtida a média e o intervalo de confiança destas estatísticas de precisão a um nível de confiança de 95%. Todos os procedimentos descritos foram realizados no *software* R.

4.3 Resultados

4.3.1 Modelo segmentado adaptado para incorporar as variáveis de copa, medidas de forma e de povoamento

Todos os valores do critério de informação de Akaike (AIC) com base nas etapas de seleção dos coeficientes do modelo segmentado substituídos pelas funções básicas para incorporação das variáveis de copa, medidas de forma e de povoamento podem ser vistos no material suplementar ao final do capítulo (Tabela 4.7). Os demais resultados dos coeficientes e medidas de precisão também podem ser vistos no material suplementar (Tabela 4.8). A Tabela 4.2 apresenta o resultado da mesma categoria de modelo em diferentes escalas de ajuste para comparação dos modelos com a incorporação das variáveis.

Tabela 4.2: Estatísticas de precisão nas escalas de ajuste por espaçamento, clone, interação clone:espaçamento (tratamento) e parcela do modelo segmentado de Max e Burkhart (1976).

Escala de ajuste	Nº de grupos	Nº de parâm.	$\sum AIC$	Estat.	\hat{d}_i	$\hat{v}ol.$
Espaçamento	3	24	-41800.72	RMSE	0.6303	0.0217
				MAE%	4.87	6.15
				ME%	-0.62	-0.54
Clone	6	48	-48127.79	RMSE	0.5186	0.0184
				MAE%	3.81	4.45
				ME%	-0.50	-0.07
Clone:Espaç.	18	144	-49343.07	RMSE	0.4984	0.0164
				MAE%	3.66	4.27
				ME%	-0.40	-0.15
Parcela	108	864	-53401.83	RMSE	0.4503	0.0140
				MAE%	3.29	3.73
				ME%	-0.34	-0.09

A Tabela 4.3 fornece os coeficientes com as medidas de precisão dos modelos segmentados com apenas as medidas de forma, por possuírem os menores valores do AIC. A função básica quadrática que explica os parâmetros $\beta_3; \alpha_1$ pela medida relativa de Hossfeld ($(d_{1/3H}/D)^2$), foi a estrutura de modelo que apresentou menor valor do critério (AIC: -53611,90, quad.). Substituir ambos parâmetros pela função quadrática que incorpora esta medida individual do tronco é capaz de compensar o efeito da parcela e consequentemente a combinação de clone e espaçamento (tratamentos). Isto refletiu também na diminuição do erro médio absoluto, com estimativas próximas para os diâmetros nas diferentes alturas (MAE%: 3,41) e melhorou as estimativas do volume total (MAE%: 2,40). Ainda, o modelo simplificado com apenas o parâmetro α_1 substituído pela função quadrática com a mesma medida também compensou o efeito dos tratamentos (AIC: -52245,85, quad.). A altura relativa de Pressler (h_{pr}/H) associada aos parâmetros $\beta_1; \beta_2$, embora tenha sido menos plausível que adotar a medida de Hossfeld, apresenta ótimo resultado sendo que não houve diferença entre as funções básicas aplicadas. Portanto, favorece a simplificação do modelo com a função linear dentro do critério de parcimônia (AIC: -50745,83 lin.; -50746,64 quad.; Δ_i : 0,80). Em termos gerais, a função básica quadrática foi a melhor expressão para explicar a mudança dos parâmetros para quase todas as variáveis, exceto com a altura relativa de Pressler. Ainda, observa-se que as melhores combinações dos parâmetros para aplicar as funções básicas são $\beta_1; \beta_2$ e $\beta_3; \alpha_1$. Por outro lado, alguns problemas de convergência foram observados ao substituir unicamente o parâmetro α_1 nas variáveis Área Basal (AB) tanto pela função linear quanto quadrática. Todos estes modelos tendem a superestimar não mais que 0,40% o diâmetro nas diferentes alturas, bem como não mais que 0,07% o volume total, conforme valores do erro médio (ME).

As variáveis razão e comprimento de copa, embora forneçam diferença entre elas nos valores de AIC, não obtiveram desempenho superior a algumas medidas de fácil obtenção como a razão H/D e

Tabela 4.3: Coeficientes estimados (com o erro padrão) e estatísticas das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i , cm) e volume total com casca (m^3) dos melhores modelos segmentados na substituição dos parâmetros para inclusão das medidas de forma de Hossfeld e Pressler a partir das funções básicas linear e quadrática. Valores em negrito com * são coeficientes que não foram significativos ($P < 0,05$); $n_{arv} = 503$.

<i>Coef./Estat.</i>	Hossfeld	Hossfeld	Hossfeld	Hossfeld	Hossfeld	Pressler	Pressler
<i>Fun. básica</i>	Quad.	Quad.	Lin.	Lin.	Quad.	Lin.	Quad.
<i>Critério</i>	ii) $\beta_3; \alpha_1$	i) $\beta_1; \beta_2$	ii) $\beta_3; \alpha_1$	i) $\beta_1; \beta_2$	iv) α_1	i) $\beta_1; \beta_2$	i) $\beta_1; \beta_2$
$\hat{\beta}_1$	-2.9127 (0.0715)	—	-6.7640 (0.4508)	—	-1.8246 (0.0393)	—	—
$\hat{\beta}_2$	1.1568 (0.0396)	—	3.1824 (0.2359)	—	0.4835 (0.0183)	—	—
$\hat{\beta}_3$	—	-0.2995 (0.0169)	—	-0.2954 (0.0170)	-0.2074 (0.0173)	-0.3353 (0.0186)	-0.3365 (0.0186)
$\hat{\beta}_4$	153.4387 (8.3842)	143.8795 (8.1747)	164.6927 (9.5086)	145.2466 (8.2126)	172.7274 (11.4183)	140.9292 (10.3593)	140.8012 (10.3381)
$\hat{\alpha}_1$	—	0.6006 (0.0220)	—	0.5996 (0.0225)	—	0.6230 (0.0211)	0.6238 (0.0211)
$\hat{\alpha}_2$	0.0537 (0.0011)	0.0553 (0.0012)	0.0518 (0.0011)	0.0551 (0.0012)	0.0504 (0.0012)	0.0557 (0.0015)	0.0557 (0.0015)
c_0	-0.6958 (0.0996)	-4.8428 (0.2984)	-1.5099 (0.2465)	-2.1636 (0.0474)	1.8535 (0.0927)	-4.2815 (0.0778)	-5.9443 (0.7755)
c_1	2.5970 (0.4142)	9.3514 (0.9314)	-2.2274 (0.0571)	0.8887 (0.0621)	0.2019* (0.4073)	3.7831 (0.1019)	8.6764 (2.2740)
c_2	-4.6431 (0.3618)	-6.6346 (0.7271)	1.2272 (0.0236)	1.4499 (0.0327)	-1.9433 (0.4357)	3.2136 (0.0544)	-3.5902 (1.6674)
c_3	2.8432 (0.1238)	3.7051 (0.2167)	-0.4631 (0.0395)	-1.5533 (0.0451)	—	-3.9185 (0.0732)	4.4358 (0.5607)
c_4	-4.3146 (0.3139)	-8.6782 (0.6773)	—	—	—	—	-7.5153 (1.6441)
c_5	1.9445 (0.1897)	5.5846 (0.5288)	—	—	—	—	2.6386 (1.2050)
δ	-0.3976	-0.4056	-0.4014	-0.4017	-0.4263	-0.4579	-0.4576
σ^2	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
n	13369	13369	13369	13369	13369	13369	13369
AIC	-53611.90	-53191.27	-53161.42	-53003.6	-52245.85	-50745.83	-50746.64
<i>diâm. c/ casca</i>							
RMSE (cm)	0.4810	0.4933	0.4881	0.4942	0.5246	0.4893	0.4891
MAE%	3.41	3.52	3.45	3.52	3.73	3.35	3.35
ME%	-0.20	-0.39	-0.22	-0.40	-0.33	-0.37	-0.37
<i>vol. tot. c/ casca</i>							
RMSE (m ³)	0.0091	0.0094	0.0092	0.0093	0.0100	0.0139	0.0140
MAE%	2.40	2.44	2.48	2.46	2.55	3.56	3.56
ME%	0.02	-0.07	-0.04	-0.10	-0.0003	0.03	0.03

D/H . O índice de área foliar associado aos parâmetros β_3 e α_1 (IAF , AIC : -41435,39; quad.) é menos vantajoso que adotar quaisquer das variáveis de copa associadas aos parâmetros $\beta_1; \beta_2$ com a função quadrática (Cc , AIC : -41537,77; Cr , AIC : -41606,62, Tabela 4.8). Entretanto, as variáveis de copa foram menos plausíveis que outros atributos mais simples do povoamento como a Área Basal (AB) e o diâmetro médio quadrático (Dg). As variáveis espaçamento relativo ($\sqrt{10000/N}/H_{dom}$, RS), \sqrt{AB}/D , Dg e D/Dg , já possuem a capacidade de compensar o efeito do espaçamento mas não do material genético. É importante mencionar que a razão H/D ainda assim é mais plausível que qualquer variável de povoamento (AIC : -42908,56, $\beta_3; \alpha_1$, quad., Tabela 4.8) mesmo que o espaçamento relativo (RS) tenha sido razoavelmente satisfatório diante de todas as variáveis de povoamento. Tanto H/D quanto D/H obtiveram comportamento semelhante entre elas no erro das estimativas dos volumes e substituem somente o efeito do espaçamento. Entretanto, a razão D/H forneceu coeficientes não significativos. Todos os modelos apresentados na Tabela 4.8 possuem tendência média em superestimar os diâmetros entre de 0,59 e 0,78%, conforme valores negativos do ME. Para o volume, superestimativas entre 0,39 e 0,83%.

A Figura 4.2 ilustra o comportamento residual de cada modelo apresentado na Tabela 4.3, tanto pela posição relativa do tronco quanto pelos resíduos padronizados em função dos valores preditos. Enquanto que em Hossfeld o modelo diminui as incertezas no intervalo entre 25 e 40% (Figuras 4.2a até 4.2e), em Pressler esse efeito é mais evidente entre 65 e 75% (Figura 4.2f). Entretanto, os resíduos padronizados remontam semelhanças entre as duas medidas, principalmente em maiores tendências nos maiores diâmetros estimados geralmente concentrados na base do tronco. Essa diferença possivelmente explica o MAE de Pressler ter sido ligeiramente menor se comparado a Hossfeld ($MAE\%$: 3,35 Pressler; 3,41 Hossfeld). Na análise dos resíduos das outras variáveis, tanto de copa quanto de povoamento, não há evidências se estas variáveis possuem influência direta em alguma altura relativa específica, mesmo ao indicar breve diminuição das incertezas em 10% do tronco. Isto porque é provável que nesta posição esteja localizado o dap , e espera-se que a equação seja menos enviesada por causa de uma das propriedades básicas do modelo ($d_i = D$ quando $h_i = 1,3m$). Em termos gerais, incluir variáveis de povoamento embora sejam mais plausíveis que não adotá-las, fornecem apenas diferenças marginais nas estatísticas de precisão utilizadas.

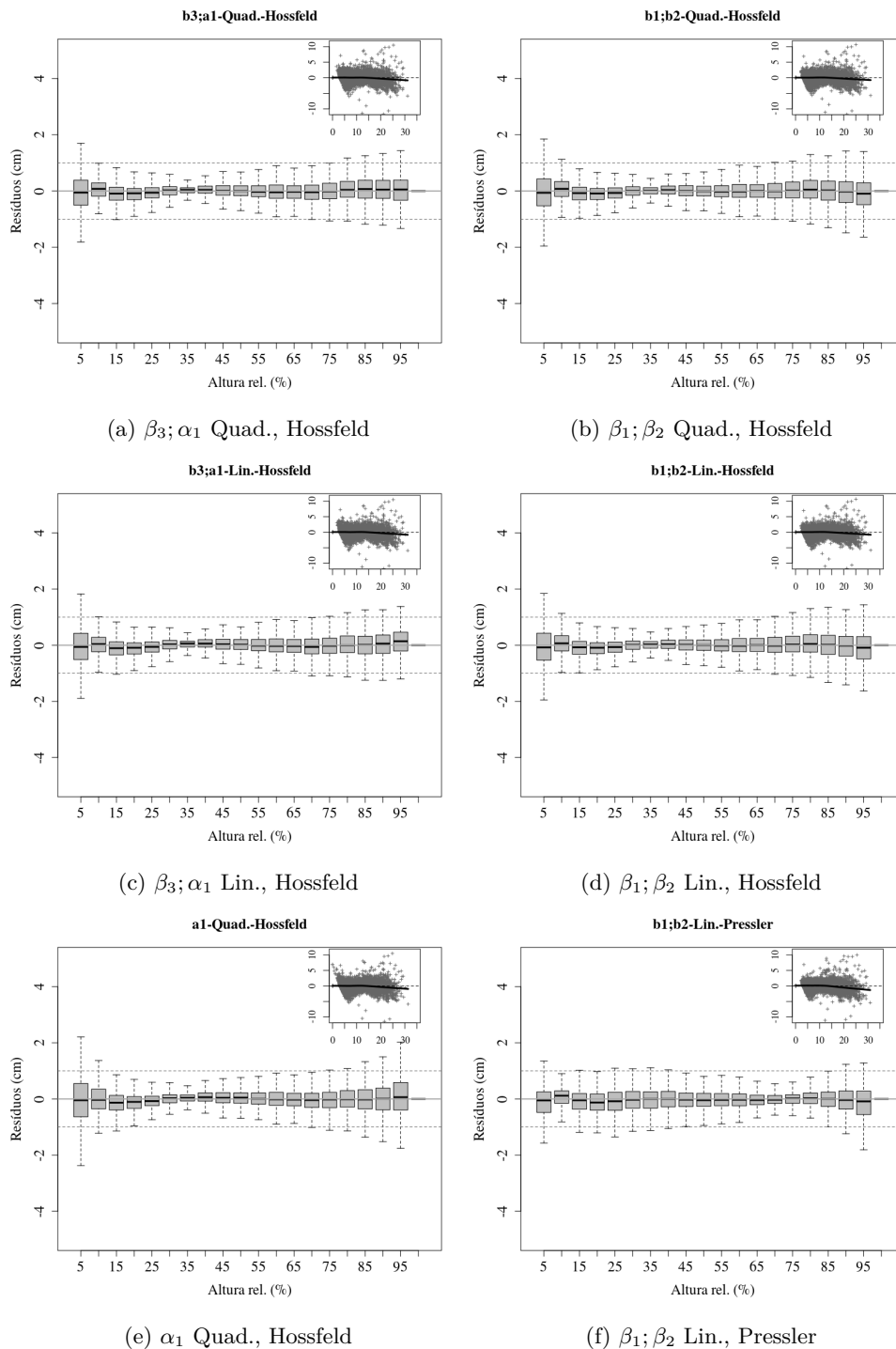


Figura 4.2: Gráficos de resíduos dos diâmetros (\hat{d}_i) em cm representados por *box-plots* para cada altura percentual do tronco, em intervalos de 5%. A figura interna apresenta o resíduo padronizado com curva suavizada (*loess*, eixo y) em função dos valores estimados de \hat{d}_i em cm (eixo x).

As Figuras 4.3a-b apresentam as curvas paramétricas que representam os perfis do tronco dos modelos que incluem as duas medidas de forma. Os perfis foram obtidos usando os valores dos quartis e a média da tabela no interior do gráfico pelos dados da interpolação, bem como considerando 0,50 e 0,75 como perfis limites de cada medida de forma. A partir delas é possível interpretar o efeito de cada medida nos parâmetros escolhidos por meio dos critérios que associam as funções básicas linear e quadrática nos diferentes segmentos.

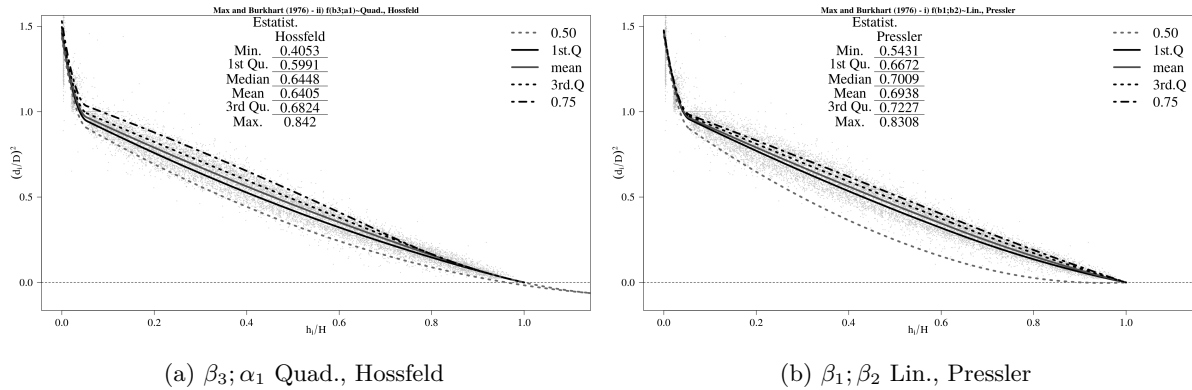
(a) $\beta_3; \alpha_1$ Quad., Hossfeld(b) $\beta_1; \beta_2$ Lin., Pressler

Figura 4.3: Curvas paramétricas do modelo segmentado modificado com as medidas de forma: a) é o modelo com a medida relativa de Hossfeld associada aos parâmetros β_3 e α_1 pela função quadrática; b) é a medida relativa de Pressler associada aos parâmetros β_1 e β_2 pela função linear.

As medidas de Hossfeld e Pressler foram sensíveis em indicar mudanças nítidas nos perfis teóricos, sendo bons referenciais de forma. Usar os quartis e a média das duas medidas se mostraram coerentes em termos práticos, já que não há evidente assimetria na distribuição de seus valores. Neste caso os parâmetros do modelo associados a medida de Hossfeld foram teoricamente mais sensíveis que Pressler, e pode ser um indicador de sua capacidade generalista em explicar a variação do material genético e espaçamento na forma do tronco. No entanto, considerar valores marginais ou próximos do mínimo em Hossfeld com a função quadrática nos parâmetros β_3 e α_1 , retornou perfis teóricos não realistas no topo diferentemente da função linear associada aos mesmos parâmetros (Figuras 4.3a e 4.4b). Ainda, observa-se que os parâmetros escolhidos para incorporar a medida de Hossfeld aparentemente são influenciados pelo tamanho da árvore. A partir das mudanças da medida, diferenças de escala na base do tronco entre as curvas referentes a 0,50 e 0,75 são evidenciadas. O resultado irreal do perfil na região do topo do tronco para o modelo que adota a função quadrática é justificado pelo comportamento do parâmetro α_1 , em função da medida de Hossfeld (Figura 4.4a). Valores desta medida abaixo de 0,58 retornam estimativas do parâmetro α_1 acima de um, o que gera anomalias na curva teórica com esta função, algo não observado ao aplicar a função linear simples (Figura 4.4b, gráfico interno).

Os dois referenciais habilitam interpretar se os parâmetros $\beta_3; \alpha_1$ e $\beta_1; \beta_2$ são expressões da forma do tronco. A Figura 4.5 ilustra o perfil individual de uma árvore de tamanho médio na comparação entre as medidas de Hossfeld e Pressler expressas nos parâmetros do melhor modelo para cada uma, além do perfil com modelo ajustado sem as medidas de forma. Os valores usados para obtenção dos perfis foram os mesmos apresentados nas tabelas que contém as estatísticas de cada medida nas Figuras 4.3a-b.

O modelo com a medida de Hossfeld foi problemático em obter o perfil do tronco com o valor do diâmetro relativo igual a 0,50 (Figura 4.5a). Ainda, conforme já relatado anteriormente nas curvas teóricas, esta medida gerou novamente maiores mudanças de escala na base do tronco o que pode acarretar em incertezas na região próxima ao *dap*. Ao adotar Pressler como referencial, observa-se que o ajuste do modelo apresentou perfis que podem ser facilmente interpretados e não houve nítida mudança de escala na base (Figura 4.5b). Já ao aplicar o valor médio de ambas medidas, retorna o mesmo perfil do modelo do povoamento sem inclusão das variáveis. Teoricamente troncos mais afilados ou cônicos terão perfis semelhantes ao exposto na Figura 4.5b referente a 0,50 e o parabólico quadrático quando assume 0,75 da altura total. No modelo com Hossfeld isto não fica tão evidente quanto Pressler, embora o 1o. quartil desta medida indique mudança substancial na forma, com proximidade maior a um cone que um parabolóide. A partir da árvore média apresentada na Figura 4.5, menores valores do diâmetro de Hossfeld a 1/3 da altura total é um indicador que mais cônicos será o tronco, e com Pressler o diâmetro que é a metade do *dap* estará localizado aproximadamente na metade da altura total.

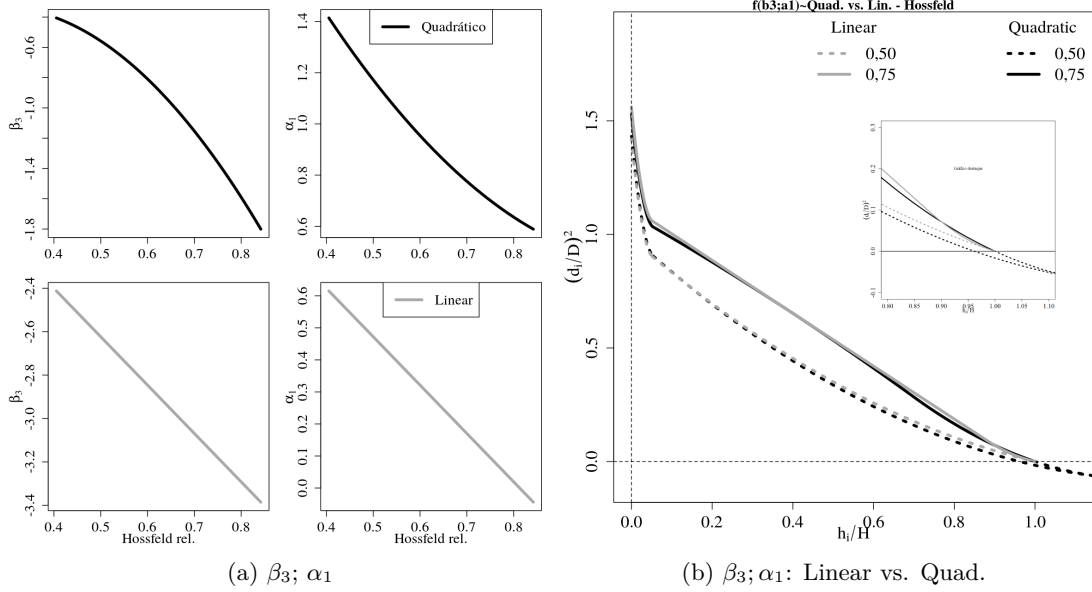


Figura 4.4: Parâmetros β_3 e α_1 estimados em função do diâmetro relativo de Hossfeld pela função quadrática (acima) e linear (abaixo) (a). Comparação dos perfis teóricos do tronco obtidos a partir dos modelos que contém a função quadrática e linear associadas aos parâmetros β_3 e α_1 com valores extremos da medida relativa de Hossfeld, com ênfase na inconsistência no topo pelo gráfico interno (b).

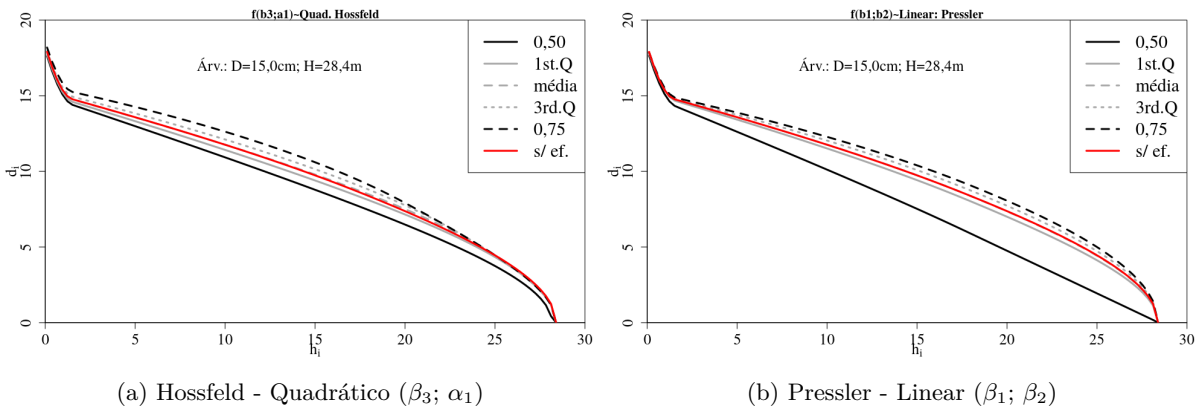


Figura 4.5: Perfis obtidos a partir de uma árvore com *dap* de 15cm e altura total de 28,4m, pelo modelo segmentado. a) é o modelo com a medida relativa de Hossfeld associada aos parâmetros β_3 e α_1 pela função quadrática; b) é a medida relativa de Pressler associada aos parâmetros β_1 e β_2 pela função linear. O perfil em vermelho representa a estimativa do modelo ajustado no Capítulo 2, sem co-variáveis e sem efeito dos tratamentos.

Diferentemente das medidas de forma, as variáveis de povoamento foram menos sensíveis e o uso sugerido do índice de área foliar (*IAF*) não trouxe significado adicional como efeito direto sobre a forma nesta categoria de modelo (Figura 4.6a). Por outro lado, a razão de copa associada aos parâmetros $\beta_1; \beta_2$ sinaliza que quanto maior for sua proporção mais côncavo será o fuste (Figura 4.6b). Aparentemente, o *IAF* e o espaçamento relativo (*RS*) apresentam influência semelhante muito embora pouco expliquem mudanças na forma do tronco (Figuras 4.6a e 4.6c). Entretanto, a razão da raiz da área basal e o *dap* indica que quanto maior o espaço entre as árvores há mudanças da forma na base do tronco, embora esta influência seja sutil (Figura 4.6d).

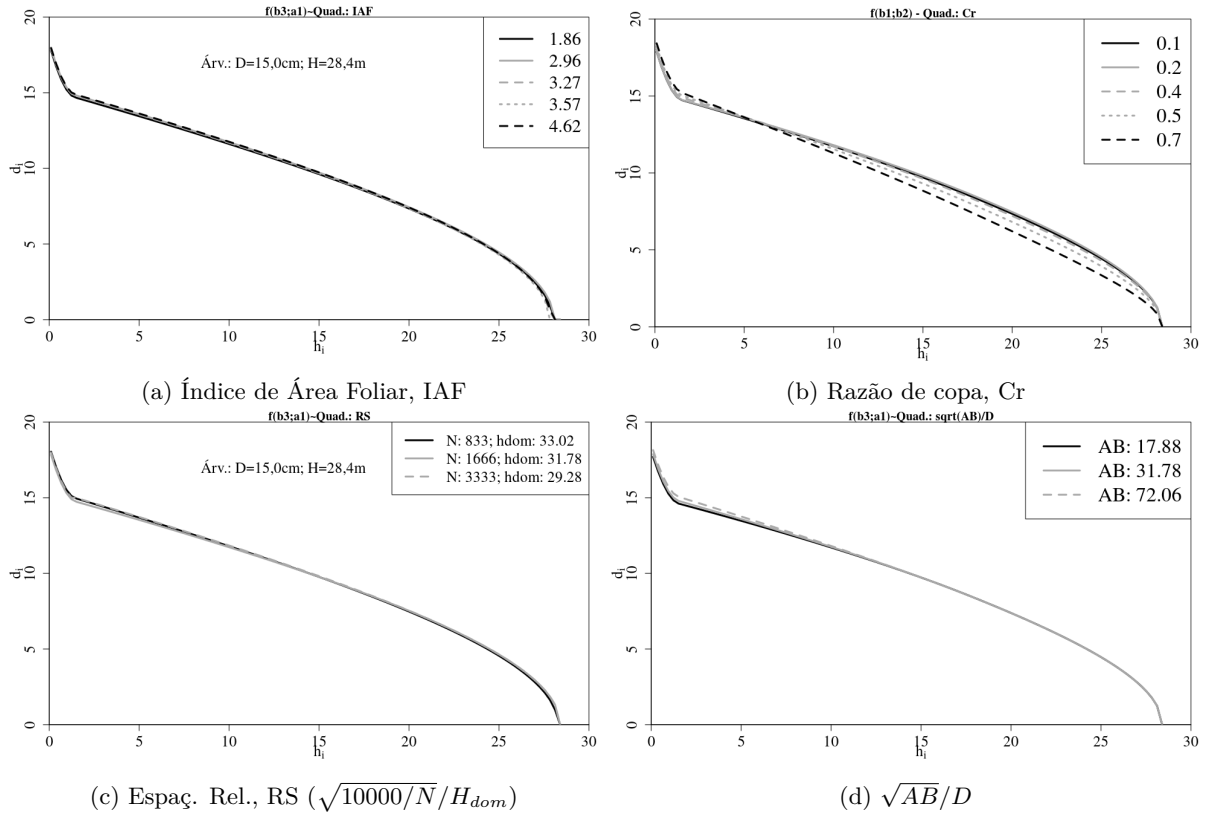


Figura 4.6: Perfis obtidos a partir de uma árvore com *dap* de 15cm e altura total de 28,4m, pelo modelo segmentado. a) é o modelo com o índice de área foliar (IAF) associado aos parâmetros $\beta_3; \alpha_1$ pela função quadrática; b) é a medida relativa de copa (Cr) associada aos parâmetros $\beta_1; \beta_2$ pela função quadrática; c) o espaçamento relativo (RS) e; d) a razão da raiz da Área Basal ($m^2 ha.^{-1}$) e o *dap*, ambos com $\beta_3; \alpha_1$ associados à função quadrática.

4.3.2 Variáveis incorporadas ao modelo de expoente-variável

A Tabela 4.4 apresenta o desempenho do modelo de expoente-variável pelas estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) ao adotar as diferentes escalas de ajuste. Observa-se ligeira melhora nas precisão das estimativas em comparação com o modelo segmentado (Tabela 4.2). Ainda, comportamentos distintos ao incorporar as co-variáveis podem ser observados ao optar pela mesma categoria de modelo. A Tabela 4.5 apresenta o resultado do ajuste do modelo de Kozak (2004) ao incluir mais uma variável em seu expoente. Neste caso, o modelo consegue obter melhores estimativas de diâmetro ao incluir a altura relativa de Pressler e melhores estimativas de volume com Hossfeld. O valor do AIC para o modelo que incorpora a altura relativa de Pressler, indica que esta variável fornece a capacidade de pelo menos compensar o efeito dos tratamentos (Clone:Espaç.), embora o RMSE indique breve piora na estimativa dos diâmetros, mas melhor desempenho na estimativa do volume total. Mesmo que os *AIC*'s entre os modelos segmentado ($\beta_3; \alpha_1$, Quad., Hossfeld) e de expoente-variável (com Hossfeld) não possam ser comparados, as outras estatísticas de precisão indicam que o segmentado possui menor erro médio para as estimativas de volume. Em termos práticos, ambos modelos são igualmente flexíveis e obtêm bons resultados tanto para diâmetros quanto para volumes totais ao adotar ambas medidas de forma. Diferentemente do modelo segmentado, nesta categoria a variável de povoamento que obteve melhor *AIC* entre elas foi \sqrt{AB}/D , embora não apresente diferenças nas estimativas de diâmetro e volume se comparado a área basal isoladamente (*AB*).

Como os outros parâmetros do modelo são associados a variáveis convencionais, *dap* e altura total, altos valores do parâmetro β_7 em seus respectivos sinais indicam primariamente o grau de influência

Tabela 4.4: Estatísticas de precisão nas escalas de ajuste por espaçamento, clone, interação clone:espaçamento (tratamento) e parcela do modelo de expoente-variável de Kozak (2004); $p = 1, 3/H$.

Escala de ajuste	N° de grupos	N° de parâm.	$\sum AIC$	Estat.	\hat{d}_i	\hat{vol} .
Espaçamento	3	24	24298.79	RMSE	0.6161	0.0197
				MAE%	4.68	5.43
				ME%	-0.32	-0.36
Clone	6	48	18275.77	RMSE	0.4955	0.0149
				MAE%	3.69	4.07
				ME%	-0.20	-0.48
Clone:Espaç.	18	144	16214.97	RMSE	0.4702	0.0132
				MAE%	3.50	3.87
				ME%	-0.17	-0.35
Parcela	108	864	8863.33	RMSE	0.3917	0.0070
				MAE%	2.63	2.00
				ME%	-0.10	-0.28

Tabela 4.5: Coeficientes estimados (erro padrão) do modelo de Kozak (2004) após inclusão das medidas de forma e de povoamento, bem como a estatísticas das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i , cm) e do volume total com casca (m^3). O coeficiente β_7 representa a co-variável referenciada em cada coluna; $p = 1, 3/H$. Valores em negrito e com * são coeficientes não significativos ($P < 0,05$); $n_{arv} = 503$.

Coefs./Estat.	Pressler	Hossfeld	$\sqrt{AB/D}$	AB
$\hat{\alpha}_0$	0.6781 (0.0103)	0.7575 (0.0117)	0.7851 (0.0143)	0.7886 (0.0144)
$\hat{\alpha}_1$	0.8588 (0.0053)	0.8800 (0.0054)	0.8902 (0.0064)	0.8913 (0.0064)
$\hat{\alpha}_2$	0.2397 (0.0080)	0.1883 (0.0082)	0.1690 (0.0097)	0.1668 (0.0097)
$\hat{\beta}_1$	0.2857 (0.0038)	0.1899 (0.0039)	0.1772 (0.0049)	0.1706 (0.0049)
$\hat{\beta}_2$	0.0433 (0.0208)	0.4122 (0.0233)	-0.3746 (0.0279)	-0.3931 (0.0280)
$\hat{\beta}_3$	1.2010 (0.0122)	0.6808 (0.0115)	0.6332 (0.0144)	0.5966 (0.0143)
$\hat{\beta}_4$	0.2398 (0.0576)	0.1704 (0.0622)	-0.3295 (0.1031)	1.1241 (0.0782)
$\hat{\beta}_5$	0.0369 (0.0011)	0.0369 (0.0011)	0.0362 (0.0012)	0.0362 (0.0012)
$\hat{\beta}_6$	-0.5468 (0.0105)	-0.4696 (0.0107)	-0.4532 (0.0129)	-0.4473 (0.0129)
$\hat{\beta}_7$	-0.9564 (0.0085)	-0.6523 (0.0071)	0.2509 (0.0113)	0.0012 (1e-04)
σ^2	0.1235	0.1661	0.2888	0.2897
δ	-0.1833	-0.1296	-0.0868	-0.0858
n	13369	13369	13369	13369
AIC	15971.80	18182.14	24177.74	24189.30
<i>diâm. c/ casca</i>				
RMSE (cm)	0.4900	0.5064	0.6104	0.6104
MAE%	3.34	3.70	4.62	4.62
ME%	-0.06	-0.12	-0.25	-0.25
<i>vol. tot. c/ casca</i>				
RMSE (m^3)	0.01037	0.00959	0.01922	0.01921
MAE%	3.17	2.66	5.42	5.39
ME%	-0.01	-0.31	-0.21	-0.22

da variável incorporada. Entretanto, além do valor do parâmetro, visualizar as mudanças fornecidas pela expressão do expoente torna a interpretação da influência das co-variáveis de diferentes naturezas mais intuitiva, conforme realizado por Kozak (1988). Valores do expoente abaixo de 0,5 geram troncos mais próximos de um parabolóide quando a altura de Pressler está a 0,75H (Figura 4.7a). O mesmo ocorreu ao adotar a medida de Hossfeld, embora classifique entre um parabolóide cúbico e quadrático com valores da razão de diâmetros entre 0,50 e 0,75 (Figura 4.7b). É notório que o expoente no segmento da base do tronco assume valores próximos de 1, o que é esperado por ser a parte do tronco que se aproxima de um

neiloide. As Figuras 4.7c e 4.7d, deixam claro a influência da altura relativa de Pressler e Hossfeld em indicar a representação dos sólidos nos perfis do tronco individual ao assumir diferentes valores destas medidas. Nesse sentido, a mesma afirmação aplicada ao modelo segmentado pode ser designada a esta categoria de modelo, em que caso a altura de Pressler esteja localizada a 50% do tronco, retorna um perfil mais afilado ou cônico e acima disso perfis que remetem a um paraboloide quadrático.

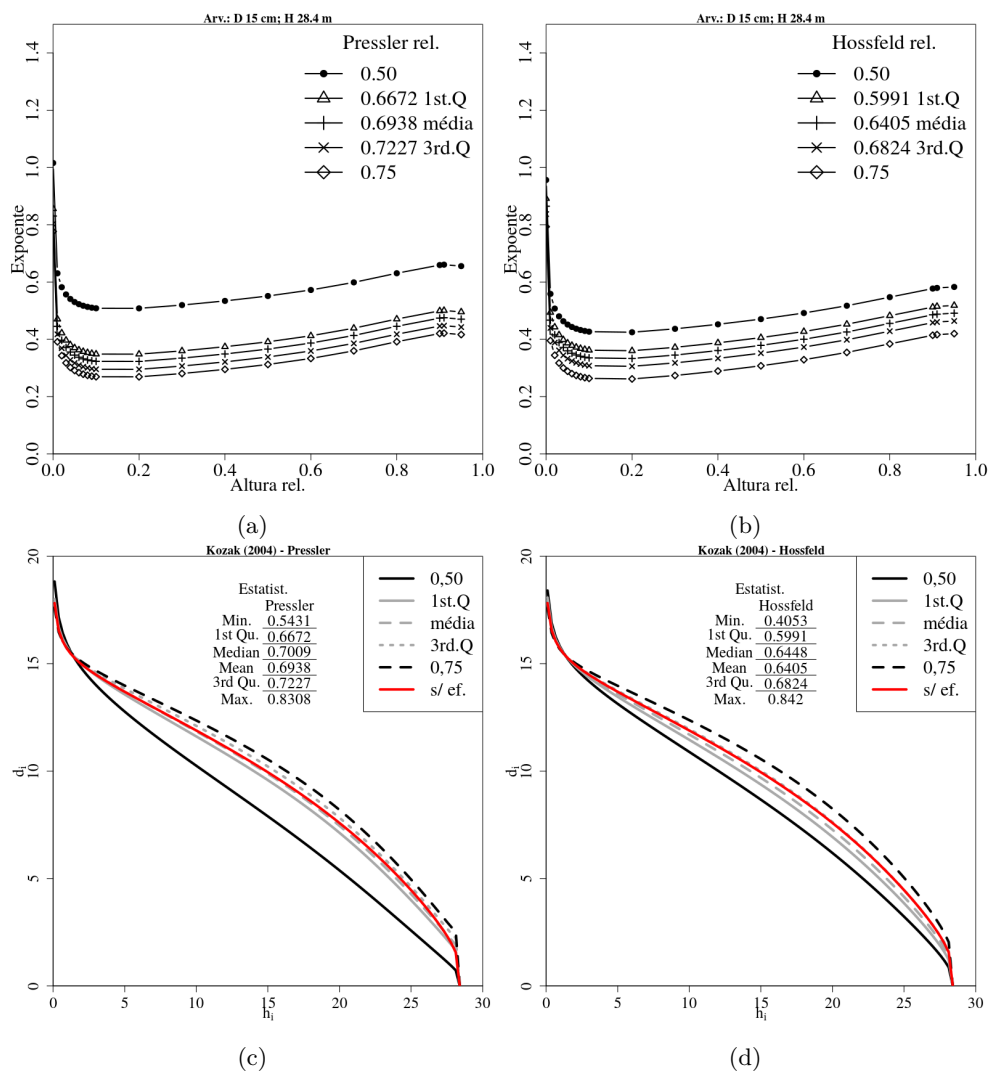


Figura 4.7: Mudança do expoente do modelo de Kozak (2004) em função da altura relativa, com as medidas de Pressler (a) e Hossfeld (b); Perfil do tronco de uma árvore com *dap* de 15cm e altura total de 28,4m estimado pelo modelo com Pressler (c) e Hossfeld (d), com diferentes proporções das duas medidas. Para obter tanto os valores dos expoentes quanto as curvas dos perfis foram utilizados os quartis da distribuição da medida de forma.

A Figura 4.8 apresenta a tendência do erro das estimativas dos diâmetros nas alturas relativas do tronco (RMSE, MAE e ME) para os melhores modelos segmentado e de expoente-variável, tanto com Pressler quanto com Hossfeld. Cada medida de precisão aplicada ao intervalo percentual da altura, amplifica a interpretação do viés de cada co-variável de forma incorporada. Ao adotar a medida relativa de Hossfeld, houve diminuição do RMSE nas posições entre 20 e 35% enquanto que no modelo com a medida relativa de Pressler estima melhor entre 65 e 75% do tronco. Todos eles possuíam RMSE abaixo de 1cm na região da base do tronco (até 5% de altura). O erro médio (ME) informa que ambas categorias de modelo possuem tendências semelhantes tanto em subestimar quanto em superestimá-los, mas favorece o modelo segmentado com a medida de Pressler. Com esta medida, observa-se MEs abaixo

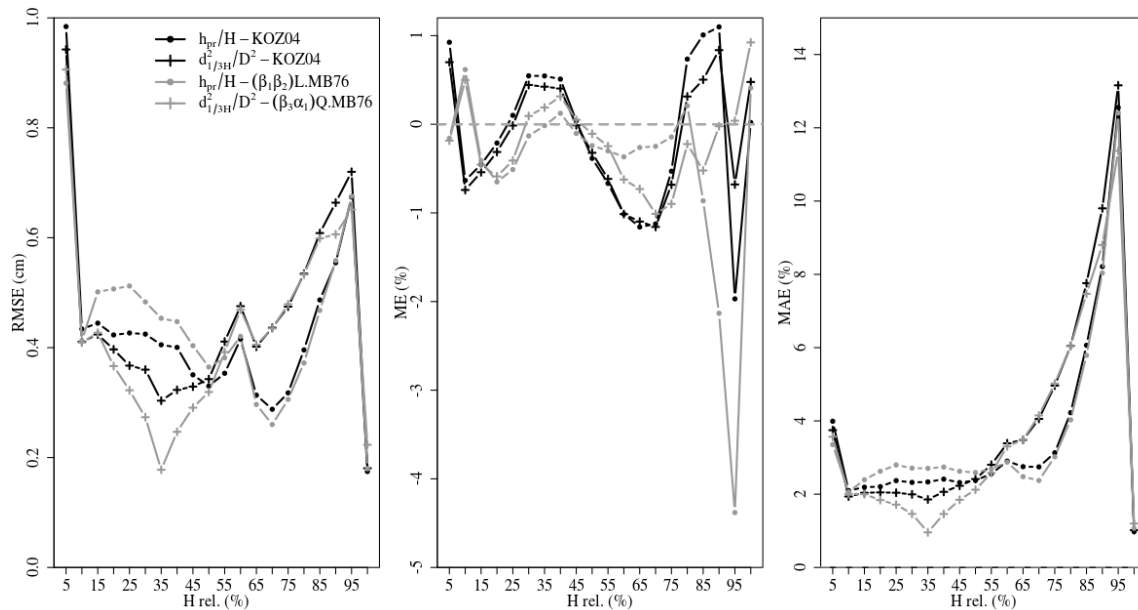


Figura 4.8: Tendência do erro médio residual das estimativas dos diâmetros $c/$ casca (\hat{d}_i) obtida a partir das estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) nas posições relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de expoente-variável (KOZ04) e segmentado (MB76) com as medidas de Pressler e Hossfeld.

de 1% e próximos do eixo central até 85% da altura total. A partir deste percentual do tronco, o modelo passa a superestimar acima de 2% bem como acima de 4% entre 90 e 95% da altura total. Por outro lado, em análise ao erro médio absoluto (MAE), favorece o modelo segmentado com a medida de Hossfeld principalmente na diminuição do erro até 55% de altura. Acima disto, o MAE cresce de maneira quase exponencial em todos os quatro modelos apresentados, sendo que aqueles com a medida de Pressler conseguem obter as menores incertezas nesta região.

Nas estimativas de volume nos diferentes intervalos percentuais do tronco, o maior RMSE permanece até 10% da altura total exceto para o modelo segmentado com Pressler que possuiu maior erro em 20% (Figura 4.9). Embora não tenha sido uma regra geral, as incertezas desta medida de precisão diminuem conforme a altura do tronco aumenta. O modelo de expoente-variável com Hossfeld diminui o erro (RMSE) até 40% do tronco e mantém-se razoavelmente estável até o topo. Ainda, a medida de Hossfeld é capaz de fornecer os menores erros de volume com toras entre 20 e 50% do tronco com o modelo segmentado, algo refletido também no MAE com erros absolutos abaixo de 2%. Em relação ao ME, os quatro modelos subestimam volumes até 10% da altura total. A partir de 60% passam a superestimar em maior escala, exceto no modelo segmentado com Pressler que mantém-se equilibrado e com erros próximos do eixo central até 80% do tronco (ME abaixo de 1%). O modelo segmentado com Hossfeld foi o que possuiu o maior valor do ME e superestima acima de 4% entre 80 e 90% do tronco, bem como a mesma categoria de modelo com a medida de Pressler no mesmo intervalo. O erro absoluto médio (MAE) evidencia ascendência das incertezas a partir de 60% do tronco, o que favorece os modelos com a altura relativa de Pressler. Abaixo desta posição, é evidente que a medida relativa de Hossfeld é a melhor opção, o que favorece o modelo segmentado.

4.3.3 Mudanças dos sólidos a partir do modelo com interruptores numéricos

A Tabela 4.6 apresenta os resultados do modelo com interruptores numéricos com as alturas da base da copa (h_{bc}) e de Pressler (h_{pr}), bem como o modelo adaptado para obter o parâmetro que identifica a altura que segmenta o topo do tronco (γH). Observa-se que adotar a altura de Pressler possui

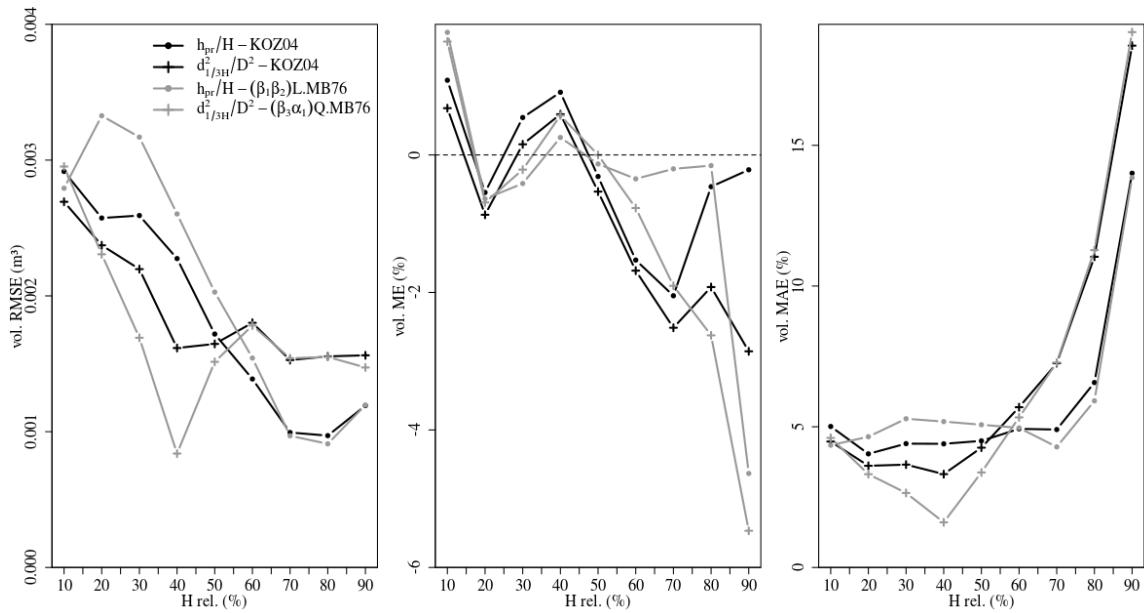


Figura 4.9: Tendência do erro médio residual das estimativas dos volumes $c/$ casca (m^3) obtida a partir das estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) nas posições relativas do tronco, em intervalos de 10%, para o modelo de expoente-variável (KOZ04) e segmentado (MB76) com as medidas de Pressler e Hossfeld.

menor perda de informação, bem como obteve melhor resultado que adotar a altura da base da copa e o modelo adaptado, tanto para estimativas dos diâmetros quanto de volume, mesmo que as diferenças sejam negligenciáveis. Segundo Valentine e Gregoire (2001), pode-se afirmar que quando o parâmetro $\alpha_1 \approx 1$ o segmento intermediário do tronco é um parabolóide quadrático, quando $\alpha_1 + \alpha_2 \approx 2$ a região do topo será um cone e neiloide acima de 2. Por outro lado, o λ_1 e o θ_3 , em conjunto com a altura total H , representam o quão distante será a transição entre a base e a região intermediária, ou seja, a mudança de um neiloide a um parabolóide; a transição será em posições mais próximas da base com valores altos de λ_1 e em posições maiores quando altos valores de θ_3 forem obtidos. Já o parâmetro λ_2 indica a extensão em que a transição entre a região intermediária e o topo ocorrerá. Altos valores deste parâmetro representará a retração da posição no tronco em que se inicia a transição de um parabolóide a um segmento mais cônico no topo. Em outras palavras, a transição do segmento intermediário e o topo ocorrerá abruptamente a partir daquela posição do tronco.

Os valores encontrados do parâmetro λ_2 indicam que a transição é abrupta quando o referencial parte da altura da base da copa, mas gradual quando adota-se a altura de Pressler e o modelo adaptado. Entretanto, houve maiores incertezas em torno desse parâmetro no modelo com a altura da base da copa. Quanto ao α_1 e α_2 , ambos evidenciam que a região intermediária é um parabolóide quadrático mas que a região do topo está mais próxima de um parabolóide do que um cone. O parâmetro γ do modelo adaptado aparentemente indica que a transição no topo está localizada a 40,47% da altura total, mas o erro padrão da estimativa apresenta grande incerteza em torno dele o que invalida a afirmação. Este modelo foi mais plausível que o modelo que adota a copa (AIC: γH -41933,14; h_{bc} -41880,14), embora menos plausível que a medida de Pressler (AIC: h_{pr} -42282,80). Assim, a altura de Pressler pode ser analisada como a melhor medida que indica a posição do tronco para mudanças dos sólidos, mesmo que não forneça perfis individuais tão diferentes quanto a altura da base da copa, visto que nas mesmas posições destas duas medidas geram perfis próximos entre si (Figura 4.10). Este modelo possui tendência maior em superestimar diâmetros abaixo de 10% e em subestimá-los quando acima de 75% do tronco, conforme valores negativos e positivos do ME, respectivamente (Figura 4.11). O modelo γH obteve comportamento

Tabela 4.6: Coeficientes estimados (erro padrão) e estatísticas das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i , cm) e volume total com casca (m^3) do modelo de Valentine e Gregoire (2001), com a altura a altura de Pressler (h_{pr} , m), base da copa (h_{bc} , m) e sua adaptação (γH). O modelo adaptado é o que possui o parâmetro γ . Valores com * em negrito foram não significativos ($P < 0,05$); $n_{arv} = 503$.

Coef./Estat.	h_{pr}	γH	h_{bc}
$\hat{\alpha}_1$	1.1417 (0.0070)	1.2523 (0.0807)	1.1940 (0.0051)
$\hat{\alpha}_2$	0.2013 (0.0110)	-0.1241* (0.0863)	0.1143 (0.0192)
$\hat{\lambda}_1$	1.4337 (0.0417)	2.4951 (0.2739)	1.7889 (0.0615)
$\hat{\lambda}_2$	1.0168 (0.0528)	0.7843 (0.1452)	15.4324* (8.7931)
$\hat{\theta}_1$	0.2480 (0.0057)	0.2430 (0.0058)	0.2496 (0.0052)
$\hat{\theta}_3$	0.0333 (0.0020)	0.0275 (0.0014)	0.0266 (0.0016)
$\hat{\gamma}$	—	0.4047* (0.3441)	—
σ^2	0.0012	0.0013	0.0013
δ	-0.2871	-0.2756	-0.276
n	13639	13639	13639
AIC	-42282.8	-41933.14	-41880.14
<i>diâm. c/ casca</i>			
RMSE (cm)	0.6243	0.6277	0.6294
MAE%	4.9	4.84	4.85
ME%	0.16	-0.54	-0.17
<i>vol. tot. c/ casca</i>			
RMSE (cm)	0.02053	0.02179	0.02170
MAE%	5.91	6.01	6.02
ME%	-1.38	-0.95	-0.98

semelhante ao modelo com h_{bc} pelo RMSE e MAE, mas diferentes percentuais do erro médio (ME) nas posições do tronco. Comparativamente aos outros dois referenciais, este modelo adaptado foi mais estável e menos tendencioso entre 30 e 60% conforme o ME. Por outro lado, os três modelos com suas respectivas posições do tronco para aplicar a transição dos sólidos, obtiveram comportamentos similares no erro absoluto médio (MAE), que cresce exponencialmente a partir de 10% até 95%.

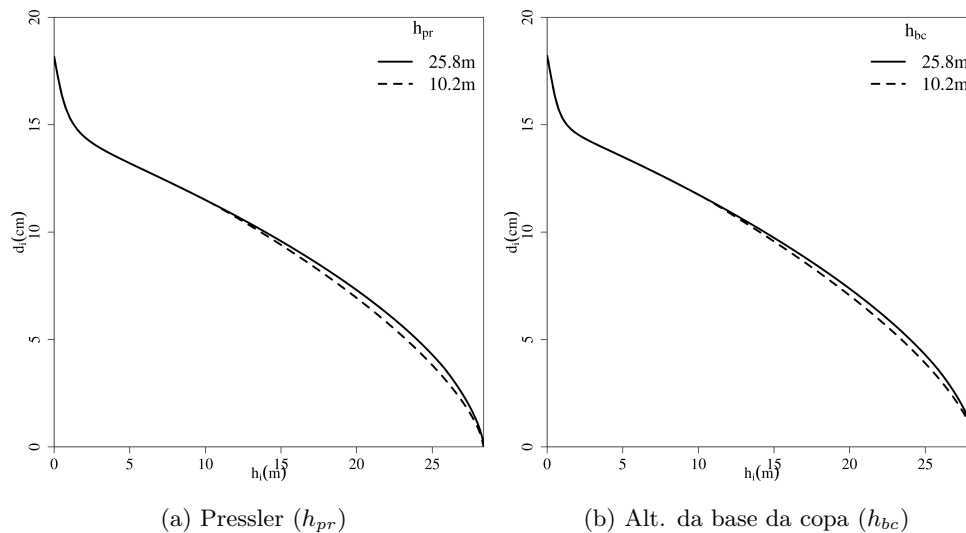


Figura 4.10: Perfis obtidos a partir de uma árvore com d_{ap} de 15cm e altura total de 28,4m, pelo modelo de Valentine e Gregoire (2001). a) é o modelo com a altura de Pressler; b) com a altura da base da copa, ambas em metros.

Referente as estimativas de volume em diferentes segmentos do tronco, o modelo de Valentine e Gregoire (2001) mostrou-se mais enviesado e com piores comportamentos tanto do RMSE, ME e MAE.

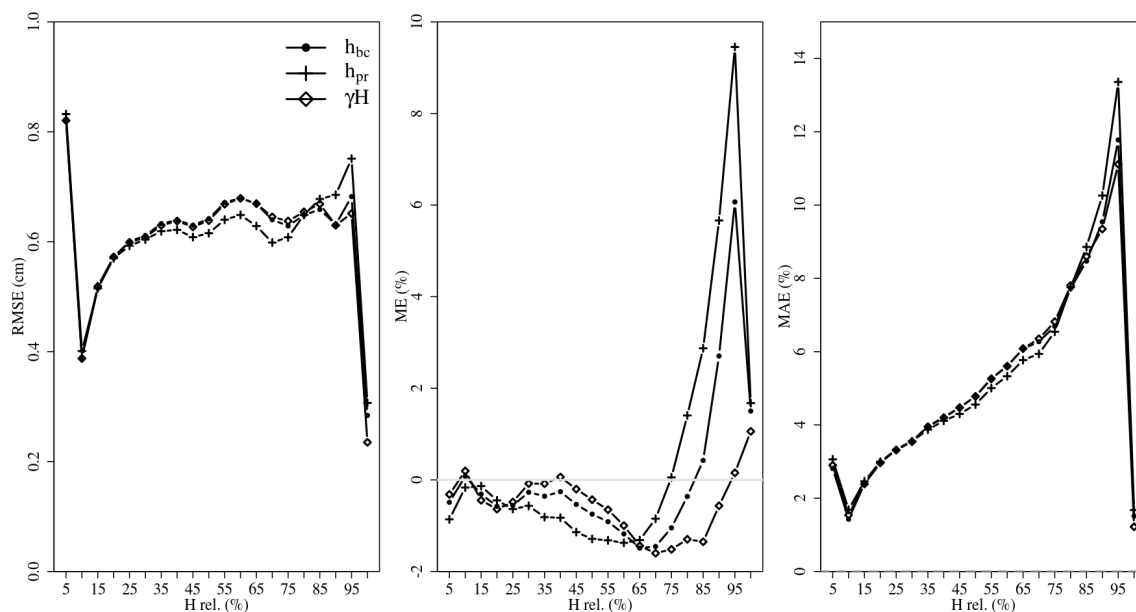


Figura 4.11: Tendência do erro médio residual das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i) obtida a partir das estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) nas posições relativas do tronco, em intervalos de 5%, para o modelo de expoente-variável de Valentine e Gregoire (2001).

Isto fica evidente quando comparado com o erro médio (RMSE) do modelo segmentado já apresentado anteriormente, embora possua a vantagem de diminuir o viés em segmentos até 10% do tronco (Figura 4.12). Em termos gerais, todos os três modelos desta categoria superestimam o volume nos diferentes intervalos de altura (ME negativo). Ainda, o modelo modificado com γH possuiu melhor desempenho com toras até 60% do tronco e partir disso tem superestimativas ascendentes com ME acima de 10%. Entretanto, o erro médio absoluto indica que não há nítida diferença entre os três referenciais, mesmo com ligeira melhora ao escolher a altura de Pressler (h_{pr} em metros) a partir de 60% do tronco, mas apresenta MAE acima de 10% e valor máximo de 22,97%.

4.3.4 Amostragem e validação cruzada

Os resultados a partir da simulação por validação cruzada com a partição dos dados em 70% para o ajuste e 30% para validação podem ser vistos no material suplementar, Tabela 4.10. Com os melhores modelos apresentados anteriormente para cada categoria de modelo, o diâmetro relativo de Hossfeld pelo modelo segmentado possuiu melhor capacidade preditiva tanto para o diâmetro quanto para o volume total com casca. Além disto, os intervalos de confiança tanto do ajuste quanto da validação informam que as estatísticas de precisão foram semelhantes às equações com todas as observações. Isto aconteceu em todas as três categorias de modelos. O de expoente-variável obteve resultados próximos ao modelo segmentado e a medida de Hossfeld possuiu maior relação com volume se comparado com a medida de Pressler.

4.4 Discussão

Incorporar co-variáveis aos modelos de *taper* ainda possui evidente interesse, sendo a copa e a densidade das árvores as mais comuns (Jiang e Liu, 2011; Hussain et al., 2021; Sharma, 2020). Dentre as variáveis de copa, o comprimento e razão de copa são as mais usadas e fornecem resultados variados com modelos segmentados (Burkhardt e Walton, 1985; Valenti e Cao, 1986; Leites e Robinson, 2004). A escolha das duas não é arbitrária por se tratar de variáveis derivadas de uma única medida, que é a altura da

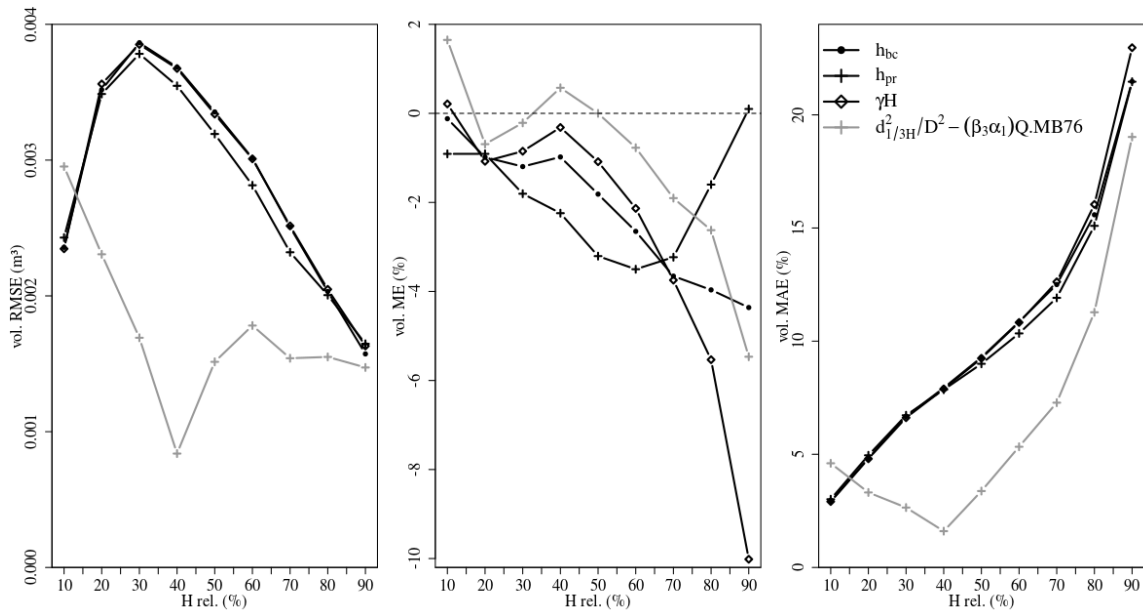


Figura 4.12: Tendência do erro médio residual das estimativas dos volumes c / casca (m^3) obtida a partir das estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) nas posições relativas do tronco, em intervalos de 10%, para o modelo de Valentine e Gregoire (2001) com a altura de Pressler (m), altura da base da copa e adaptado (γH). A linha em cinza é o modelo segmentado (MB76, $\beta_3; \alpha_1$ - quad., Hossfeld) já apresentado anteriormente.

base da copa. Possui a vantagem de ser facilmente obtida tanto em árvores em pé, no mesmo momento da mensuração da altura total por meio de hipsômetros, quanto após o corte na cubagem rigorosa.

Os resultados encontrados não evidenciam que o comprimento e a razão de copa explicam o efeito do material genético e espaçamento, sobretudo a interação entre eles, tanto ao adotar o modelo segmentado quanto o de expoente-variável. A razão de copa (C_r), embora mais plausível que seu comprimento (C_c), não substituiu o efeito do espaçamento. Mesmo que aparentemente seja vantajoso adotá-las, caso a escolha seja considerar um modelo para todo povoamento sem efeito do material genético e espaçamento, mesmo assim não justifica o esforço em campo caso o objetivo final seja maior precisão das estimativas. Ainda, mesmo que supostamente a razão de copa tenha influência direta no modelo segmentado, o mesmo não ocorreu com o modelo de expoente-variável que possuiu melhor desempenho para esta variável.

Ambas variáveis de copa foram menos plausíveis ao compará-las com algumas co-variáveis de povoamento em termos de precisão das estimativas, tanto para o diâmetro quanto para o volume. Dentre elas, o espaçamento relativo (RS) se mostrou mais plausível e com melhor desempenho para estimativas de volume, embora não seja a melhor opção para diâmetros do tronco no modelo segmentado. O espaçamento relativo é uma variável sensível à intensidade do manejo em uma área e ainda possui relação direta com o percentual de copa em florestas de *Pinus*, onde quanto maior o espaçamento relativo maior será este percentual (Zhao et al., 2012). Tanto o espaçamento relativo (RS) quanto a área basal ($AB m^2/ha.$) e o diâmetro médio quadrático (Dg) são capazes de compensar o efeito do espaçamento, mas não conseguem captar o efeito do clone. Ainda, fica evidente que variáveis mais simples como a razão D/H ou H/D já são suficientes para compensar o efeito do espaçamento.

As únicas capazes de compensar ambos efeitos foram as medidas de forma de Hossfeld e Pressler, mesmo com menor número de parâmetros no modelo segmentado em comparação com as diferentes escalas de ajuste. Neste modelo, para que elas sejam incluídas como co-variáveis é necessário que os parâmetros β_1 e β_2 sejam substituídos por uma função linear simples, caso Pressler. Caso opte pela medida de Hossfeld, os parâmetros β_3 e α_1 devem ser substituídos por uma função linear quadrática. A vantagem do modelo

segmentado neste caso é que com o mesmo modelo ajustado boas estimativas tanto para o diâmetro quanto para o volume podem ser obtidas. No modelo de expoente-variável, embora a altura relativa de Pressler tenha sido a única co-variável que compensa a interação de ambos efeitos para estimativas dos diâmetros, adotar a medida de Hossfeld possui uma relação maior com o volume. Essa relação do diâmetro de Hossfeld se sustenta na teoria de que, por estar localizado na porção de maior área seccional do tronco, será uma medida com maior capacidade de obter melhores estimativas dele (Gregoire et al., 1986). É importante mencionar que mesmo que a medida de Pressler forneça melhores estimativas dos diâmetros, na prática, a diferença do erro médio para com o modelo que incorpora Hossfeld é negligenciável.

Tanto a medida de Pressler quanto de Hossfeld são fiéis referenciais sobre suas teorias na forma do tronco e fornecem aos modelos uma maneira mais simples de interpretação das estimativas dos parâmetros. Neste sentido, os três tipos de modelos foram capazes de obter bons indicadores sobre a forma, principalmente com a altura relativa de Pressler. O diâmetro relativo de Hossfeld, embora também esteja associado a ela, algo refletido nos parâmetros e nas simulações dos perfis teóricos, gerou algumas inconsistências no modelo segmentado. As fórmulas para cálculo de volume de árvores em pé para cada uma dessas medidas, são exatas para troncos que possuem formas gerais de um cone e parabolóide. Portanto, ao unificá-las é possível obter equações com parâmetros invariantes que representam a população mesmo com mudanças das características dos plantios em decorrência de práticas silviculturais (McTague et al., 2020). Ainda assim a equação unificada considera que o referencial teórico de interpretação sobre a forma se dá a partir da altura de Pressler e não pelo diâmetro de Hossfeld. Os resultados aqui apresentados desta medida (Hossfeld) podem ser usados como referencial sobre a forma em outros materiais genéticos do gênero *Eucalyptus* em estudos futuros.

A altura de Pressler mostrou-se relevante como indicadora na mudança de forma do tronco. Mensurá-la em campo no momento da cubagem ou pela interpolação de duas medidas, como aplicado aqui, torna-se necessário para obter equações de *taper* generalistas. Neste caso, a altura de Pressler é importante para designar a mudança dos sólidos da região intermediária e o topo da árvore, conforme evidenciado pelo modelo com interruptores numéricos de Valentine e Gregoire (2001). Ainda, modificar este modelo e incluir um parâmetro que assume a posição relativa do tronco que realiza a transição de um parabolóide a um cone, mostra que uma altura arbitrária faz mais sentido que adotar a altura da base da copa nessa transição. Embora este tenha sido menos plausível que a altura de Pressler. Empiricamente falando, há indícios que a altura próxima a $1/3H$ possui melhor significado que a própria altura de Pressler, quando pretende-se obter equações de *taper* compatíveis com o volume (Rustagi e Loveless Jr, 1991a). Obviamente, essa discussão sobre a escolha de diâmetros ou alturas como medidas auxiliares sobre o referencial da forma, será guiada pelos possíveis problemas encontrados no momento de sua coleta em árvores em pé. Isso justifica o uso de equações de *taper* em obter essas medidas quando o erro da estimativa não ultrapassa 0,2 cm para diâmetros (Westfall et al., 2016).

No trabalho de Valentine e Gregoire (2001) o efeito da altura da base da copa na mudança dos sólidos para o mesmo modelo foi detectado apenas em duas das quatro espécies avaliadas. Tanto Pressler quanto a altura da base da copa, possuem efeito sobre a forma do tronco pelo modelo com interruptores numéricos, mesmo que os parâmetros indiquem que as duas tenham efeito sutil nesta categoria de modelo. É importante destacar que Valentine e Gregoire (2001) consideraram a árvore como efeito aleatório para obter parâmetros exclusivos em troncos individuais. Isto indica que o baixo rendimento deste modelo, pode ser justificado pelo fato de não ser adequado para obter parâmetros do povoamento se comparado ao segmentado e de expoente-variável, sendo necessário obter parâmetros individuais árvore-a-árvore. Neste caso, justifica a adaptação do modelo para adição de um parâmetro que representa o ponto de inflexão, onde isenta a necessidade de obter a altura da base da copa, bem como possibilita incorporar variáveis adimensionais de qualquer natureza que possam representar a variação natural do povoamento (Westfall e Scott, 2010). Ambos trabalhos aplicam o método de ajuste com modelos de efeitos mistos, o

que habilita obter também parâmetros individuais do tronco e portanto melhor capacidade preditiva.

Conforme já relatado em Leites e Robinson (2004), os submodelos do modelo segmentado podem ser interpretados a partir dos efeitos aleatórios associados aos parâmetros. Substituir os parâmetros β_1 e β_2 com função linear e ao fixar o tamanho da árvore mas com diferentes proporções da altura de Pressler (ver Figura 4.5b), mostra que alterações nestes dois parâmetros nos fornece troncos com formas distintas. Isto porque, ambos são parâmetros comuns nos três submodelos da segmentação. Dentre os critérios sugeridos para escolha dos parâmetros, são os únicos que representam o submodelo do topo do tronco algo que faz sentido por ser uma medida de forma localizada na região superior dele.

Incorporar a altura relativa da base da copa, sobretudo a proporção dela nos diferentes segmentos, não possui mesma capacidade explicativa que a altura relativa de Pressler no mesmo ponto. Isto explica a escolha recorrente do uso das variáveis de copa divididas por classes e os parâmetros estimados a partir de funções que incluem estas variáveis (Burkhart e Walton, 1985; Valenti e Cao, 1986). Mesmo assim ainda fornece apenas melhora marginal nas estatísticas de precisão dos modelos, sendo este o principal argumento para não justificar sua coleta em campo. No entanto, é importante considerar que a copa é um fator não somente sobre a forma do tronco (Larson, 1963; Valentine e Gregoire, 2001), mas é o atributo da árvore que fornece um componente biológico ao modelo por ser a principal fonte de captação de luz (Weiskittel et al., 2011).

A tentativa de substituir medidas de copa por uma medida de povoamento equivalente, o Índice de Área Foliar estimado (*IAF*), foi somente possível ao incorporá-la ao modelo de expoente-variável. No modelo segmentado, tanto o comprimento (*Cc*) quanto a razão de copa (*Cr*) foram mais plausíveis que incorporar o *IAF* pela função quadrática aos parâmetros β_1 e β_2 . Embora menos plausível, como estes parâmetros representam o submodelo do segmento do topo, pode indicar preliminarmente uma relação com o dossel da floresta. Essa relação com o dossel está associada também ao incremento em volume, onde quanto maior o *IAF* menor será a eficiência no crescimento da floresta em plantios mistos (Caselli et al., 2021). Em plantios mais adensados espera-se um maior fechamento do dossel e consequentemente troncos mais cilíndricos (Muhairwe, 1994; Pinkard e Neilsen, 2003).

Em modelos de expoente-variável mais simples é comum incluir as variáveis em seu expoente e isto tem sido reportado como um potencial entrave para que o modelo não capte os efeitos das co-variáveis (Muhairwe et al., 1994). Por outro lado, ao aplicar a proporção de copa no mesmo expoente mostra a importância da razão de copa (*Cr*) na sua capacidade preditiva (Muhairwe, 1994; Muhairwe et al., 1994). O modelo mais recente de Kozak (2004) além de facilmente incluir co-variáveis em seu expoente, ainda possibilita obter empiricamente o ponto de inflexão da base do tronco individualmente (Alves et al., 2019). É o modelo usado em plantios clonais de *Eucalyptus* ao incorporar co-variáveis como espaçamento relativo (*RS*), diâmetro médio quadrático (*Dg*) e a altura dominante (H_{dom}) e posteriormente ser rearranjado algebricamente para obter equações localizadas (McTague et al., 2020). Ainda, este modelo obteve ótimo desempenho para árvores médias e grandes no mesmo gênero, embora tenha sido instável ao estimar o volume para multiprodutos da madeira (Scolforo et al., 2018). O mesmo comportamento com árvores médias e grandes é também evidenciado na Figura 4.13 com a inclusão da altura relativa de Pressler, sendo ligeiramente semelhante ao modelo segmentado que incorpora a medida relativa de Hossfeld ($\beta_3; \alpha_1$, Quad.), embora possuam maiores incertezas conforme o *dap* aumenta.

Nota-se que o efeito das co-variáveis de povoamento como a área basal e o espaçamento relativo é dependente da categoria de modelo. No modelo segmentado, o espaçamento relativo mostrou-se mais plausível que a área basal (\sqrt{AB}/D), o diâmetro médio quadrático (*Dg*) e a posição hierárquica da árvore (*D/Dg*). No de expoente-variável a \sqrt{AB}/D possui efeito evidente dentre todas as variáveis de povoamento. A Figura 4.14a exemplifica a nítida mudança na forma do tronco nos diferentes valores da *AB* pelo modelo de expoente-variável, em que a menor área basal apresenta troncos mais grossos. Além disso, o efeito da variável pode ser percebido também no comportamento do expoente conforme a área

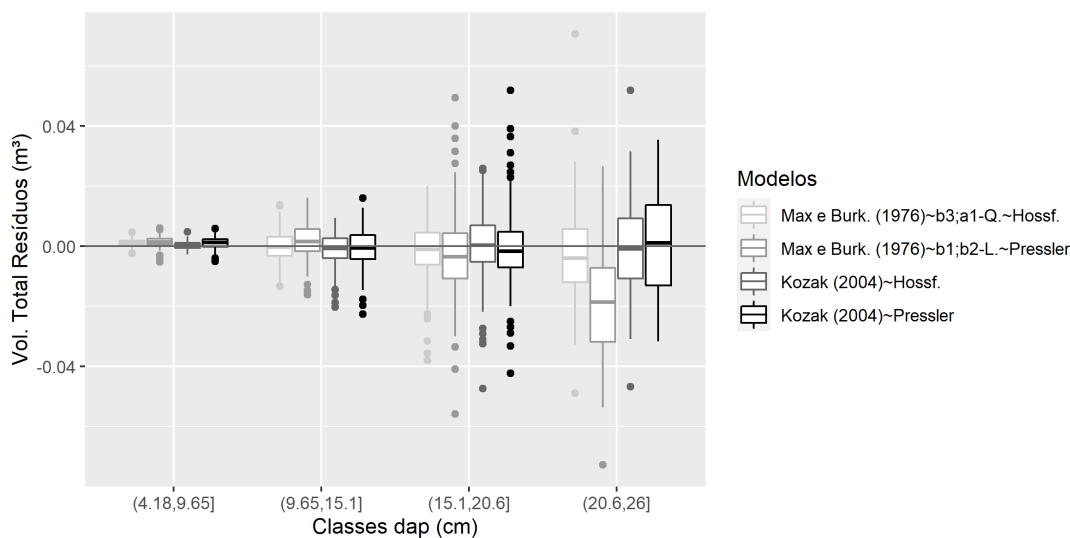


Figura 4.13: Gráfico *boxplot* dos resíduos do volume total em diferentes intervalos de classe do *dap* e categorias de modelo de *taper*.

basal aumenta, que tende a troncos mais próximos de um paraboloide cúbico que quadrático (Figura 4.14b). Esta variável também indicou diferenças acentuadas na forma do tronco quando incorporada ao modelo adimensionalmente compatível nas espécies *Pinus banksiana* Lamb. e *Picea mariana* [Mill.] B.S.P., embora tenha indicado que quanto menor for a área basal traz troncos mais finos (Sharma e Parton, 2009). Por outro lado, o efeito foi negligenciável para a espécie *Pinus resinosa* Aiton, tanto para diâmetros com e sem casca na mesma categoria de modelo anterior (Sharma, 2020). Esta diferença comparativa com os resultados encontrados indicam que os clones menos produtivos podem influenciar indiretamente no comportamento desta variável quando não computado o efeito do material genético no modelo⁴.

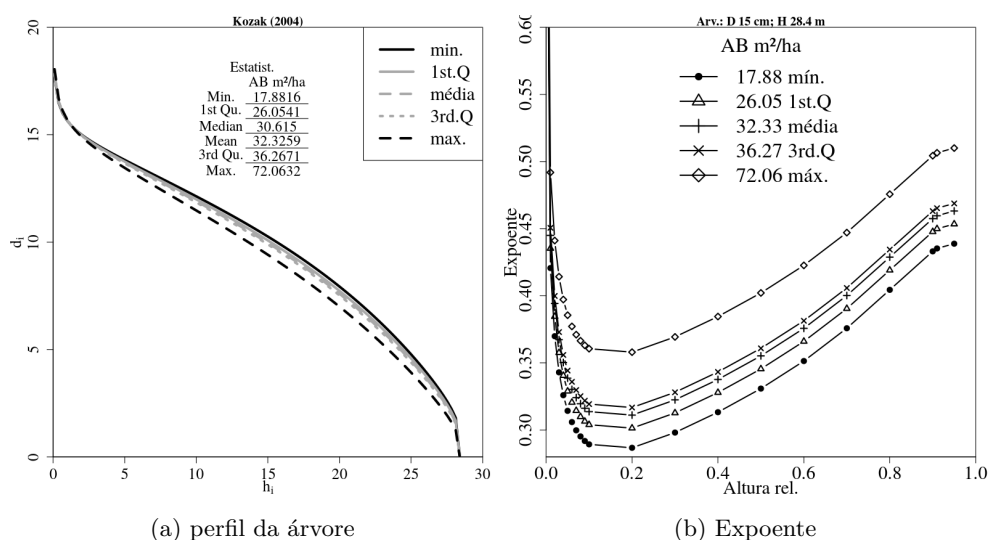


Figura 4.14: Perfis e expoentes obtidos a partir de uma árvore com *dap* de 15cm e altura total de 28,4m, pelo modelo de (Kozak, 2004) com diferentes valores de AB pela variável \sqrt{AB}/D .

As variáveis de povoamento foram incorporadas uma-a-uma nos modelos. Utilizar duas ou

⁴Em análises exploratórias ajustando o modelo de expoente-variável por material genético incorporando a mesma variável, três dos seis clones corroboram com as afirmações de Sharma e Parton (2009). Os únicos clones que apresentaram um tronco mais grosso em área basal menor foram o AEC1528, CO1404 e CO1407, o que difere do encontrado na literatura.

mais variáveis desta categoria pode melhorar ainda mais as estimativas. Outra maneira de obter perfis do tronco factíveis para uma árvore de interesse é localizar o modelo, o que implica melhores estimativas de volume. O procedimento para localização tanto do modelo segmentado quanto de expoente-variável pode ser visto no Anexo A. A localização do modelo de *taper* neste caso serve como suporte para obter boas estimativas do diâmetro de Hossfeld e de Pressler para posteriormente calcular o volume individual da árvore (McTague et al., 2020). Isto porque obter medidas do tronco a partir das estimativas de um modelo de *taper* tem sido reportado como a maneira mais interessante do que coletá-la em campo mesmo com aparelhos mais sofisticados (Westfall et al., 2016).

4.5 Conclusões

As medidas de forma de Hossfeld e de Pressler conseguem captar a variação natural da forma do tronco causada pelos fatores clone e arranjos espaciais, sobretudo compensar estes efeitos com uma única medida adicional do tronco. O diâmetro de Hossfeld possui uma relação maior com o volume e fornece ampla capacidade preditiva desta medida quando incorporada tanto no modelo segmentado quanto de expoente-variável.

Ambas medidas são bons referenciais do tronco capazes de expressar significado interpretativo sobre a forma a partir das suas medidas relativas ou adimensionais. Neste caso, a altura relativa de Pressler mostrou-se fiel a sua teoria e revela perfis que classificam o tronco em cones ou paraboloides de maneira simples. Isto ficou claro ao interpretar os parâmetros do modelo com interruptores, em que a altura de Pressler se torna um referencial com significado biológico na transição dos sólidos. O diâmetro de Hossfeld, embora não possua interpretações definidas a priori sobre os sólidos, também obteve significado equivalente a medida de Pressler. Os resultados encontrados podem servir como base em estudos comparativos para espécies do gênero *Eucalyptus* em investigações futuras, e estas medidas de forma podem ser priorizadas nos procedimentos de inventário florestal.

As medidas de copa usadas não foram suficientes para compensar o efeito dos tratamentos, mas possuem algum significado sobre a forma quando incorporada aos modelos, principalmente a razão de copa. O mesmo ocorreu com as co-variáveis de povoamento em menor escala, já que algumas conseguem compensar o efeito do espaçamento o que era esperado. Por isto, a área basal (\sqrt{AB}/D) representa melhor a dinâmica espacial do povoamento com o modelo de expoente-variável e o espaçamento relativo com o modelo segmentado.

O índice de área foliar (IAF) consegue substituir as medidas de copa ao adotar o modelo de expoente-variável, mas não no modelo segmentado. Isto indica uma forte relação desta variável com o dossel da floresta e carece de mais investigações, principalmente para obter o volume usado para o cálculo da biomassa. Além disso, esta variável pode ser usada em conjunto com as mesmas variáveis de povoamento sem custo adicional em ensaios futuros. Isto caso opte em não coletar informações de copa das árvores.

Referências

- Almeida-Neto, M., Prado, P. I., Kubota, U., Bariani, J. M., Aguirre, G. H., e Lewinsohn, T. M. (2010). Invasive grasses and native asteraceae in the brazilian cerrado. *Plant ecology*, 209(1):109–122.
- Alvares, C. A., Stape, J. L., Sentelhas, P. C., de Moraes, G., Leonardo, J., e Sparovek, G. (2013). Köppen's climate classification map for brazil. *Meteorologische Zeitschrift*, 22(6):711–728.
- Alves, J. d. A., Isaac Júnior, M. A., Calegario, N., Possato, E. L., e Melo, E. d. A. (2019). Avaliação de funções de afilamento de expoente-variável para árvores de eucalyptus spp. *Scientia Forestalis*, 47(121):45–58.
- Alves, P. B. (2021). Relação entre atividades de copa e cambial de clones de eucalyptus spp. em diferentes densidades de plantio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.
- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield study*. Pergamun, Oxford, England.
- Batista, J. L., Couto, H. d., e Silva Filho, D. d. (2014). *Quantificação de recursos florestais: árvores, arvoredos e florestas*. Oficina de Textos, São Paulo.
- Batista, J. L. F. (2014). Biometria florestal segundo o axioma da verossimilhança-com aplicações em mensuração florestal. *Universidade de São Paulo-USP, Piracicaba-SP*.
- Burkhart, H. E. e Tomé, M. (2012). *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer, New York, 1st. edition.
- Burkhart, H. E. e Walton, S. B. (1985). Incorporating crown ratio into taper equations for loblolly pine trees. *Forest Science*, 31(2):478–484.
- Burnham, K. P. e Anderson, D. P. (2002). *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer, New York.
- Cao, Q. V., Burkhart, H. E., e Max, T. A. (1980). Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science*, 26(1):71–80.
- Caselli, M., Loguercio, G. Á., Urretavizcaya, M. F., e Defossé, G. E. (2021). Stand level volume increment in relation to leaf area index of austrocedrus chilensis and nothofagus dombeyi mixed forests of patagonia, argentina. *Forest Ecology and Management*, 494:119337.
- Cordova Flores, K. S. (2016). *Estudo das respostas ecofisiológicas no crescimento de clones Eucalyptus spp. submetidos a variações de níveis de restrições hídricas em distintas condições edáficas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Ducey, M. J. e Williams, M. S. (2011). Comparison of hoesfeld's method and two modern methods for volume estimation of standing trees. *Western Journal of Applied Forestry*, 26(1):19–23.
- Fang, Z., Borders, B. E., e Bailey, R. L. (2000). Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46(1):1–12.
- Figueiredo-Filho, A., Borders, B. E., e Hitch, K. L. (1996). Taper equations for pinus taeda plantations in southern brazil. *Forest Ecology and Management*, 83(1-2):39–46.
- Gonçalves, J. L. d. M., Álvares, C. A., Gonçalves, T. D., Moreira, R. M., Mendes, J. C. T., e Gava, J. L. (2012). Mapeamento de solos e da produtividade de plantações de eucalyptus grandis, com uso de sistema de informação geográfica. *Scientia Forestalis*, 40(94):187–201.
- Goodwin, A. N. (2009). A cubic tree taper model. *Australian Forestry*, 72(2):87–98.

- Gregoire, T. G., Valentine, H. T., e Furnival, G. M. (1986). Estimation of bole volume by importance sampling. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(3):554–557.
- Hussain, A., Shahzad, M. K., e Jiang, L. (2021). The effect of crown dimensions on stem profile for dahurian larch, korean spruce, and manchurian fir in northeast china. *Forests*, 12(4):398.
- Jiang, L.-c. e Liu, R.-l. (2011). Segmented taper equations with crown ratio and stand density for dahurian larch (*larix gmelinii*) in northeastern china. *Journal of Forestry research*, 22(3):347.
- Kershaw Jr, J. A., Ducey, M. J., Beers, T. W., e Husch, B. (2016). *Forest mensuration*. John Wiley & Sons, New York.
- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11):1363–1368.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4):507–515.
- Kozak, A. e Smith, J. (1993). Standards for evaluating taper estimating systems. *The Forestry Chronicle*, 69(4):438–444.
- Lappi, J. (2006). A multivariate, nonparametric stem-curve prediction method. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(4):1017–1027.
- Larson, P. R. (1963). Stem form development of forest trees. *Forest science*, 9(suppl_2):a0001–42.
- Leites, L. P. e Robinson, A. P. (2004). Improving taper equations of loblolly pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. *Forest Science*, 50(2):204–212.
- Li, R. e Weiskittel, A. R. (2010). Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the north american acadian region. *Annals of Forest Science*, 67(3):302.
- Max, T. A. e Burkhart, H. E. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22(3):283–289.
- McTague, J. P. (1992). Enhanced estimates of total volume with any single upper-stem measurement. *Forest ecology and management*, 48(1-2):55–67.
- McTague, J. P., Scolforo, H. F., e Scolforo, J. R. S. (2020). Early volume formulas, taper, implicit volume ratio, and auxiliary information: A new system of volume equations invariant to silvicultural practices, site, and genetic pedigree. *Forest ecology and management*, 475(1):1.
- McTague, J. P. e Weiskittel, A. (2021). Evolution, history, and use of stem taper equations: a review of their development, application, and implementation. *Canadian Journal of Forest Research*, 51(2):210–235.
- Medhurst, J. L. e Beadle, C. L. (2001). Crown structure and leaf area index development in thinned and unthinned eucalyptus nitens plantations. *Tree Physiology*, 21(12-13):989–999.
- Muhairwe, C. K. (1994). Tree form and taper variation over time for interior lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(9):1904–1913.
- Muhairwe, C. K., LeMay, V. M., e Kozak, A. (1994). Effects of adding tree, stand, and site variables to kozak's variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(2):252–259.
- Narmontas, M., Rupšys, P., e Petrauskas, E. (2020). Models for tree taper form: the gompertz and vasicek diffusion processes framework. *Symmetry*, 12(1):80.

- Newberry, J. D. e Burkhart, H. E. (1986). Variable-form stem profile models for loblolly pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(1):109–114.
- Petrauskas, E., Rupšys, P., Narmontas, M., Aleinikovas, M., Beniušienė, L., e Šilinskas, B. (2020). Stochastic models to qualify stem tapers. *Algorithms*, 13(4):94.
- Pinkard, E. e Nielsen, W. (2003). Crown and stand characteristics of eucalyptus nitens in response to initial spacing: implications for thinning. *Forest Ecology and Management*, 172(2-3):215–227.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rustagi, K. P. e Loveless Jr, R. S. (1991a). Compatible variable-form volume and stem-profile equations for douglas-fir. *Canadian journal of forest research*, 21(2):143–151.
- Sanquetta, M. N. I., McTague, J. P., Ferraco Scolforo, H., Behling, A., Sanquetta, C. R., e Schmidt, L. N. (2020). What factors should be accounted for when developing a generalized taper function for black wattle trees? *Canadian Journal of Forest Research*, 50(11):1113–1123.
- Schneider, R. (2018). Understanding the factors influencing stem form with modelling tools. In *Progress in Botany Vol. 80*, pages 295–316. Springer.
- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Raimundo, M. R., Weiskittel, A., Carrero, O., e Scolforo, J. R. S. (2018). Comparison of taper functions applied to eucalypts of varying genetics in brazil: Application and evaluation of the penalized mixed spline approach. *Canadian Journal of Forest Research*, 48(5):568–580.
- Shahzad, M. K., Hussain, A., e Jiang, L. (2020). A model form for stem taper and volume estimates of asian white birch (*betula platyphylla*): a major commercial tree species of northeast china. *Canadian Journal of Forest Research*, 50(3):274–286.
- Sharma, M. (2020). Incorporating stand density effects in modeling the taper of red pine plantations. *Canadian Journal of Forest Research*, 50(8):751–759.
- Sharma, M. e Parton, J. (2009). Modeling stand density effects on taper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis. *Forest science*, 55(3):268–282.
- Sharma, M. e Zhang, S. (2004). Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern canada. *Forest ecology and management*, 198(1-3):39–53.
- Taylor, L. R. (1961). Aggregation, variance and the mean. *Nature*, 189(4766):732–735.
- Thomas, C. E. e Parresol, B. R. (1991). Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 21(7):1132–1137.
- Valenti, M. A. e Cao, Q. V. (1986). Use of crown ratio to improve loblolly pine taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(5):1141–1145.
- Valentine, H. e Gregoire, T. (2001). A switching model of bole taper. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(8):1400–1409.
- Weiskittel, A. R., Hann, D. W., Kershaw Jr, J. A., e Vanclay, J. K. (2011). *Forest growth and yield modeling*. John Wiley & Sons.

Westfall, J. A., McRoberts, R. E., Radtke, P. J., e Weiskittel, A. R. (2016). Effects of uncertainty in upper-stem diameter information on tree volume estimates. *European Journal of Forest Research*, 135(5):937–947.

Westfall, J. A. e Scott, C. T. (2010). Taper models for commercial tree species in the northeastern united states. *Forest Science*, 56(6):515–528.

Zhao, D., Kane, M., Borders, B. E., et al. (2012). Crown ratio and relative spacing relationships for loblolly pine plantations. *Open Journal of Forestry*, 2(03):101.

4.6 Material suplementar

Tabela 4.7: Critério de Informação de Akaike (AIC) do modelo adaptado de Max e Burkhardt (1976) para inclusão das variáveis arborimétricas e de povoamento. Os algoritmos romanos de i a iv são os critérios de seleção dos parâmetros substituídos pelas duas funções básicas (linear e quadrática) que contém as variáveis. O símbolo † representa etapas onde não houve convergência do modelo; o valor em negrito é o menor AIC dentre todas as situações; $n_{arv} = 503$.

Variáveis	Fun. básica / Critério												Melhor mod.
	Linear				Quadrático				Fun. básica				
	i) $\beta_1; \beta_2$	ii) $\beta_3; \alpha_1$	iii) $\beta_4; \alpha_2$	iv) α_1	v) α_2	i) $\beta_1; \beta_2$	ii) $\beta_3; \alpha_1$	iii) $\beta_4; \alpha_2$	iv) α_1	v) α_2	Fun. básica	Critério	
AB^*	-41615.26	-41586.99	-41335.91	†	-41335.39	-41640.93	-41641.99	-41332.94	†	-41335.74	Quad.; Quad.	i) ; ii)	
Cc	-41381.22	-41363.92	-41333.75	-41362.73	-41334.67	-41537.77	-41506.36	-41337.79	-41453.58	-41338.09	Quad.	i)	
Cr	-41376.07	-41353.39	-41361.86	-41343.07	-41362.54	-41606.62	-41581.91	-41389.76	-41440.01	-41368.62	Quad.	i)	
D/Dg	-41603.67	-41872.21	-41579.31	-41731.70	-41580.66	-41775.74	-41924.02	-41613.32	-41750.88	-41592.28	Quad.	ii)	
D/H	-42740.28	-42829.61	-41377.92	-42730.75	-41374.46	-42759.33	-42864.25	-41389.79	-42763.11	-41374.14	Quad.	ii)	
Dg	-41930.63	-41895.83	-41353.22	-41894.23	-41351.13	-41962.38	-42014.79	-41366.66	-41906.30	-41357.45	Quad.	ii)	
H/D	-42627.62	-42774.51	-41384.49	-42727.48	-41374.84	-42861.72	-42908.56	-41393.72	-42790.04	-41373.88	Quad.	ii)	
h_{pr}/H	-50745.83	-49457.92	-41336.78	-49187.31	-41333.46	-50746.64	-50676.49	-41388.72	-49382.28	-41336.90	Lin.; Quad.	i) ; i)	
$(d_{1/3H}/D)^2$	-53003.60	-53161.42	-41333.72	-52218.63	-41332.50	-53191.27	-53611.90	-41378.03	-52245.85	-41331.22	Quad.	ii)	
IAF	-41372.46	-41402.14	-41347.99	-41358.61	-41349.85	-41410.94	-41435.39	-41349.88	-41375.62	-41353.00	Quad.	ii)	
$\sqrt{10000/N}/H_{dom}$	-41716.59	-41728.09	-41347.58	-41720.94	-41347.04	-41747.29	-42432.82	-41345.03	-41727.22	-41345.53	Quad.	ii)	
$\sqrt{AB^*}/D$	-41938.26	-41938.52	-41566.94	-41848.97	-41519.68	-42001.62	-42028.51	-41602.41	-41872.34	-41532.92	Quad.	ii)	

*m²/ha; † não convergiu

Tabela 4.8: Coeficientes ajustados (com o erro padrão) e estatísticas das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i) e volume total com casca dos melhores critérios para os modelos segmentados selecionados com base no AIC, na substituição dos parâmetros para inclusão das variáveis de copa e de povoamento por meio das funções básicas. Os valores em negrito (*) representam coeficientes que não foram significativos ($P < 0,05$); $n_{arv} = 503$.

Coef./Estat.	H/D		D/H		RS		\sqrt{AB}/D m ² /ha.		D _g		D/D _g		AB m ² /ha.		AB m ² /ha.		Cr		C-c		IAE	
	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β _i ; α _i	Quant.	i) β ₁ ; β ₂	Quant.	i) β ₁ ; β ₂	Quant.	i) β ₁ ; β ₂	Quant.	i) β ₁ ; β ₂	Quant.	i) β _i ; α _i
<i>Fun. básica</i>																						
<i>Critério</i>																						
$\hat{\beta}_1$	-1,8640 (0,0464)		-1,7988 (0,0494)		-1,3798 (0,0069)		-1,5773 (0,0505)		-1,3857 (0,0095)		-1,4621 (0,0169)		-3,2066 (0,5046)		-0,2804 (0,0277)		-0,2833 (0,0281)		-0,2759 (0,0277)		-1,3449 (0,0099)	
$\hat{\beta}_2$	0,6047 (0,0271)		0,5681 (0,0290)		0,3090 (0,0051)		0,4452 (0,0297)		0,3086 (0,0065)		0,3149 (0,0100)		1,3581 (0,2681)								0,2757 (0,0078)	
$\hat{\beta}_3$																						
$\hat{\beta}_4$	138,0631 (9,5690)		136,3318 (9,4264)		170,6153 (11,2774)		151,7438 (9,1502)		182,5669 (12,1905)		169,4683 (10,5647)		174,3371 (11,5907)		160,4341 (10,4320)		159,8391 (10,3264)		161,2613 (10,5013)		180,3911 (12,0545)	
$\hat{\alpha}_1$																						
$\hat{\alpha}_2$	0,0532 (0,0013)		0,0535 (0,0013)		0,0511 (0,0013)		0,0539 (0,0013)		0,04936 (0,0013)		0,0511 (0,0012)		0,0507 (0,0013)		0,0530 (0,0014)		0,0530 (0,0014)		0,0529 (0,0014)		0,0498 (0,0013)	
$\hat{\alpha}_3$	1,4972 (0,1924)		-0,4257* (0,4932)		-0,8029 (0,1435)		-0,5949 (0,0441)		-0,4201 (0,0997)		0,0128* (0,0066)		-1,6621 (0,2577)		-1,1415 (0,0728)		-1,7193 (0,0532)		-1,7294 (0,0526)		-0,0332* (0,0200)	
$\hat{\alpha}_4$	-1,8658 (0,2376)		-1,0169* (1,5281)		15,1225 (2,7405)		1,1462 (0,1108)		0,0436 (0,0103)		0,0083* (0,0186)		0,0245 (0,0028)		-0,0205 (0,0029)		1,4816 (0,2007)		0,0556 (0,0083)		0,0154* (0,0092)	
$\hat{\alpha}_5$	0,4335 (0,0689)		1,8098* (1,1331)		-71,2287 (12,9100)		-0,4751 (0,0557)		-0,0011 (0,0003)		-0,0056 (0,0115)		-0,0002 (0,0000)		0,1094 (0,0495)		-3,6903 (0,3866)		-0,0048 (0,0007)		-0,0018* (0,0011)	
$\hat{\alpha}_6$	3,7619 (0,2485)		1,0740 (0,1876)		1,8288 (0,8428)		0,6899 (0,0348)		-5,3586 (1,1679)		4,1940 (0,3217)		0,7417 (0,0506)		0,5705 (0,0329)		0,5705 (0,0329)		0,5686 (0,0328)		11,9535 (3,8136)	
$\hat{\alpha}_7$	-2,9521 (0,2614)		-3,0516 (0,5879)		-112,2281 (24,6102)		-0,4940 (0,1434)		0,5990 (0,1418)		-3,6648 (0,4096)		0,0058 (0,0016)		0,0151 (0,0022)		-1,3426 (0,1487)		-0,0483 (0,0062)		-9,0481 (3,0325)	
$\hat{\alpha}_8$	0,6880 (0,0670)		4,1230 (0,5402)		1282,7256 (186,9063)		0,8950 (0,1267)		-0,0111 (0,0041)		1,0531 (0,1286)		-0,00004 (0,0000)		-0,0001 (0,0000)		3,2287 (0,2868)		0,0042 (0,0005)		2,0015 (0,6518)	
$\hat{\alpha}_9$																						
$\hat{\alpha}_{10}$																						
$\hat{\sigma}^2$	-0,3016		-0,3007		-0,3108		-0,2835		-0,3073		-0,2876		-0,3071		-0,3072		-0,3046		-0,3063		-0,3032	
n	13369		13369		13369		13369		13369		13369		13369		13369		13369		13369		13369	
<i>AIC</i>	-42908,56		-42864,25		-42432,82		-42028,51		-42014,79		-41924,02		-41641,99		-41640,97		-41606,62		-41537,77		-41435,39	
<i>diâm. c/ casca</i>																						
RMSE (cm)	0,6076		0,6082		0,6311		0,6270		0,6223		0,6312		0,6317		0,6347		0,6355		0,6346		0,6390	
MAE%	4,70		4,71		4,94		4,88		4,79		4,91		4,82		4,89		4,88		4,89		4,94	
ME%	-0,63		-0,64		-0,68		-0,78		-0,78		-0,66		-0,59		-0,73		-0,74		-0,73		-0,66	
<i>vol. tot. c/ casca</i>																						
RMSE (m ³)	0,0197		0,0196		0,0203		0,0216		0,0206		0,0218		0,0226		0,0227		0,0228		0,0225		0,0224	
MAE%	5,55		5,55		5,68		6,01		5,84		5,99		6,19		6,18		6,23		6,18		6,25	
ME%	-0,64		-0,64		-0,63		-0,83		-0,72		-0,64		-0,39		-0,42		-0,39		-0,45		-0,40	

Tabela 4.9: Parâmetros estimados do modelo de Kozak (2004) após inclusão das co-variáveis de copa, arborimétricas e de povoamento, bem como a estatísticas das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i) e do volume total com casca. O coeficiente β_7 representa a co-variável referenciada em cada coluna; $p = 1,3/H$. Valores em negrito e com * foram não significativos ($P < 0,05$); $n_{errv} = 503$.

Coefs./Estat.	Dg	D/Dg	D/H	IAF	H/D	Cc	Cr	$\sqrt{10000/N}/H_{dom}$
$\hat{\alpha}_0$	0.7756 (0.0143)	0.7844 (0.0145)	0.7789 (0.0143)	0.7811 (0.0144)	0.7690 (0.0145)	0.7774 (0.0144)	0.7785 (0.0144)	0.7799 (0.0144)
$\hat{\alpha}_1$	0.8876 (0.0065)	0.8900 (0.0065)	0.8879 (0.0064)	0.8891 (0.0065)	0.8854 (0.0065)	0.8881 (0.0065)	0.8884 (0.0065)	0.8888 (0.0065)
$\hat{\alpha}_2$	0.1749 (0.0098)	0.1696 (0.0098)	0.1730 (0.0097)	0.1716 (0.0098)	0.1794 (0.0100)	0.1738 (0.0098)	0.1731 (0.0098)	0.1722 (0.0098)
$\hat{\beta}_1$	0.1540 (0.0053)	0.1772 (0.0050)	-0.0372* (0.0245)	0.1678 (0.0050)	0.1866 (0.0072)	0.1695 (0.0050)	0.1693 (0.0050)	0.1727 (0.0052)
$\hat{\beta}_2$	-0.2589 (0.0292)	-0.3096 (0.0283)	0.8044 (0.1337)	-0.3368 (0.0283)	-0.6945 (0.1203)	-0.3224 (0.0285)	-0.3169 (0.0287)	-0.3398 (0.0295)
$\hat{\beta}_3$	0.5017 (0.0174)	0.6320 (0.0150)	-0.5691 (0.1345)	0.5788 (0.0148)	0.6820 (0.0310)	0.5882 (0.0149)	0.5874 (0.0150)	0.6073 (0.0172)
$\hat{\beta}_4$	1.3210 (0.0807)	0.9699 (0.0828)	1.2697 (0.0796)	1.1466 (0.0798)	1.0794 (0.0857)	1.1914 (0.0798)	1.1537 (0.0806)	1.1785 (0.0800)
$\hat{\beta}_5$	0.0358 (0.0012)	0.0360 (0.0012)	0.0340 (0.0012)	0.0359 (0.0012)	0.0359 (0.0012)	0.0359 (0.0012)	0.0359 (0.0012)	0.0359 (0.0012)
$\hat{\beta}_6$	-0.4295 (0.0132)	-0.4507 (0.0131)	-0.2609 (0.0245)	-0.4418 (0.0131)	-0.4565 (0.0136)	-0.4430 (0.0131)	-0.4430 (0.0131)	-0.4463 (0.0132)
$\hat{\beta}_7$	0.0020 (2e-04)	-0.0271 (0.0030)	0.6166 (0.0706)	0.0066 (0.0010)	0.0792 (0.0253)	5e-04 (2e-04)	0.0142 (0.0053)	-0.0387* (0.0327)
σ^2	0.2989	0.2997	0.3035	0.3008	0.3002	0.3011	0.3012	0.3016
δ	-0.0846	-0.0840	-0.0791	-0.0836	-0.0854	-0.0843	-0.0842	-0.0838
n	13369	13369	13369	13369	13369	13369	13369	13369
AIC	24565.49	24580.25	24590.58	24618.42	24652.12	24654.96	24655.12	24660.97
<i>diâm. c/ casca</i>								
RMSE (cm)	0.6184	0.6186	0.6175	0.6195	0.6208	0.6205	0.6204	0.6205
MAE%	4.74	4.73	4.75	4.74	4.75	4.74	4.74	4.74
ME%	-0.25	-0.27	-0.24	-0.26	-0.26	-0.26	-0.26	-0.26
<i>vol. tot. c/ casca</i>								
RMSE (m ³)	0.01978	0.0198	0.01983	0.01972	0.01978	0.01981	0.01981	0.01979
MAE%	5.72	5.63	5.68	5.64	5.66	5.68	5.67	5.66
ME%	-0.12	-0.21	-0.07	-0.18	-0.15	-0.15	-0.16	-0.17

Tabela 4.10: Validação cruzada com as diferentes categorias de modelos que incorporam as medidas de forma de Hossfeld e Pressler. No processo com 10000 iterações foram usadas 70% das árvores para ajuste (T) e as 30% remanescentes na validação (V). Foi contabilizada a média e os intervalos de confiança a 95% de probabilidade em cada estatística de precisão, tanto para estimativas de diâmetros quanto o volume individual com casca.

Variável	Estat.	Treino/Val.	\hat{d}_i			$\hat{v}ol$		
			média	IC 95% Inf.	IC 95% Sup.	média	IC 95% Inf.	IC 95% Sup.
Max e Burkhart (1976), $\beta_3; \alpha_1$, Quad.								
Hossfeld	RMSE	T	0.4810	0.4800	0.4810	0.0091	0.0091	0.0091
		V	0.4840	0.4830	0.4850	0.0094	0.0093	0.0095
	MAE%	T	3.41	3.41	3.42	2.40	2.39	2.40
		V	3.43	3.42	3.43	2.43	2.42	2.44
	ME%	T	-0.20	-0.20	-0.20	0.02	0.02	0.02
		V	-0.20	-0.21	-0.18	0.02	0.01	0.04
Max e Burkhart (1976), $\beta_1; \beta_2$, Lin.								
Pressler	RMSE	T	0.4890	0.4890	0.4900	0.0140	0.0140	0.0140
		V	0.4910	0.4900	0.4920	0.0142	0.0141	0.0142
	MAE%	T	3.35	3.35	3.35	3.56	3.55	3.57
		V	3.36	3.35	3.36	3.57	3.56	3.58
	ME%	T	-0.37	-0.37	-0.37	0.03	0.03	0.03
		V	-0.37	-0.38	-0.36	0.02	-0.01	0.05
Kozak (2004)								
Hossfeld	RMSE	T	0.5050	0.5050	0.5060	0.0096	0.0096	0.0096
		V	0.5100	0.5090	0.5110	0.0100	0.0099	0.0100
	MAE%	T	3.70	3.69	3.70	2.66	2.66	2.67
		V	3.72	3.71	3.73	2.69	2.68	2.70
	ME%	T	-0.12	-0.12	-0.12	-0.31	-0.31	-0.31
		V	-0.13	-0.14	-0.11	-0.30	-0.32	-0.28
Pressler	RMSE	T	0.4900	0.4890	0.4900	0.0104	0.0104	0.0104
		V	0.4930	0.4920	0.4940	0.0108	0.0107	0.0108
	MAE%	T	3.34	3.34	3.34	3.16	3.16	3.17
		V	3.36	3.36	3.37	3.21	3.19	3.22
	ME%	T	-0.06	-0.06	-0.06	-0.01	-0.01	-0.01
		V	-0.06	-0.08	-0.05	0.01	-0.02	0.03
Valentine e Gregoire (2001)								
Pressler	RMSE	T	0.6240	0.6240	0.6250	0.0206	0.0205	0.0206
		V	0.6260	0.6250	0.6270	0.0209	0.0208	0.0210
	MAE%	T	4.90	4.90	4.91	5.91	5.91	5.92
		V	4.91	4.90	4.92	5.92	5.90	5.94
	ME%	T	0.163	0.162	0.165	-1.42	-1.43	-1.42
		V	0.174	0.146	0.201	-1.41	-1.45	-1.37

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Aspectos gerais dos principais resultados

O objetivo principal deste trabalho foi encontrar medidas que possam facilitar na interpretação do efeito do espaçamento e material genético na forma do tronco em plantios de *Eucalyptus*. Mesmo que a metodologia sugerida seja recomendada ao gênero em questão, pode ser expandida à outras espécies preferencialmente excurrentes. Os dados avaliados foram provenientes de um experimento monitorado ao longo dos anos durante todo o ciclo, embora o escopo desta tese tenha focado apenas em seu final aos sete anos de idade. Resultados provenientes de dados desta natureza possuem algumas limitações quanto a usar as afirmações para extrapolar os limites de uma situação florestal fora do contexto experimental. Naturalmente um experimento possui maior controle que um plantio florestal convencional, como de uma empresa por exemplo. Por isto que informações sobre diferenças na produtividade entre clones e espaçamentos não foi o foco deste trabalho, visto que já foi explorado em Alves (2021). Entretanto, o efeito dos clones se mostrou decisivo na mudança da forma mesmo se tratando da mesma espécie. Portanto, os resultados encontrados neste estudo e as comparações com a literatura, evidenciam a importância de algumas medidas de forma raramente utilizadas e já esquecidas na literatura florestal.

As medidas de forma avaliadas foram relevantes do ponto de vista teórico. Na prática, essas medidas são pouco comuns nos inventários florestais do Brasil. Mesmo em plantios homogêneos de *Eucalyptus* que já possui conhecimento consolidado quanto as respostas de diferentes clones às práticas silviculturais e de manejo. O fator de forma artificial que é usado para converter volume sólido em volume de madeira embora não tenha sido um referencial ruim da forma, não foi coerente com o observado nos perfis médios do tronco. Portanto, em termos quantitativos se faz necessário a busca por referenciais mais generalistas, visto que há uma dependência crescente do setor florestal em explicar o comportamento de novos materiais genéticos a partir da modelagem.

A construção de equações, principalmente aquelas específicas para um volume comercial de interesse, necessita constantemente de atualizações a cada novo material genético. As equações de *taper* ainda são a melhor maneira de obter tanto diâmetros quanto volumes a qualquer altura comercial em uma única expressão. Ainda, técnicas como calibração ou localização de modelos vêm ganhando notoriedade recente com a promessa de isentar um esforço amostral maior na atualização das equações. Por isto que, no segundo capítulo o objetivo foi definir qual função é mais flexível aos dados mesmo desconsiderando o efeito presente do material genético e espaçamento. Neste sentido, a escolha dos modelos foi guiada por dois critérios: 1) modelos pouco testados em florestas de *Eucalyptus* no Brasil, como o segmentado, trigonométrico e o dimensionalmente compatível; 2) modelos mais recentes e relevantes como o de expoente variável de Kozak (2004). Neste caso, o melhor modelo foi aquele com maior capacidade de obter boas estimativas das medidas de forma. Dois modelos candidatos foram selecionados, o segmentado e expoente-variável por captarem satisfatoriamente essas medidas, embora sejam modelos com muitos parâmetros e difíceis de obter interpretações mais intuitivas.

Os resultados encontrados no segundo capítulo deram suporte para o terceiro capítulo, onde as duas categorias de modelos foram testadas em diferentes escalas de ajuste para validar as estimativas dessas medidas e, a partir delas, interpretar o efeito do material genético e espaçamento. Ficou evidente que o efeito da interação se fez presente em obter os volumes individuais das árvores para o cálculo do fator de forma artificial, embora para esta e as outras medidas de forma o efeito do espaçamento aparentemente seja dispensável. Neste caso, o quociente de Hossfeld foi a única medida capaz de fornecer uma interpretação coerente com o perfil médio estimado pelas equações de *taper* a partir da análise do intervalo de verossimilhança. Por outro lado, o quociente de Hohenadl foi problemático tanto em fornecer interpretações confiáveis sobre os efeitos quanto piores estimativas. A altura de Pressler, embora não

tenha possibilitado interpretações a partir do perfil médio do tronco, necessita de maiores investigações quanto a sua relação com a copa das árvores. A suposição é que esta medida do tronco seja um bom indicador da fertilidade do solo como consequência da recessão de copas.

Tanto a altura relativa de Pressler quanto o quociente de Hossfeld são ótimos referenciais do tronco capazes de compensar o efeito da interação do material genético e espaçamento ao incorporá-las nos modelos. Entretanto, esta afirmação é dependente da categoria de modelo e exige cautela em sua escolha. As medidas de forma incorporadas foram obtidas pela interpolação entre duas medidas diretas do tronco na cubagem, o que favoreceu os bons resultados das estimativas tanto dos diâmetros quanto do volume individual. Embora transferir a abordagem para uma prática usual de campo não seja algo tão simples, a escolha sobre qual medida de forma usar deverá seguir dois critérios técnicos e operacionais. Primeiro, considerar a precisão do equipamento para obter tanto diâmetros quanto alturas em árvores em pé, sobretudo a experiência do usuário. Neste caso, com a evolução dos dendrômetros ópticos ou a existência de sutas eletrônicas munidas com tecnologias como *gatoreye*, estas medidas podem ser facilmente coletadas. Segundo, em plantios muito adensados a visualização de alturas próximas ou inseridas no comprimento da copa possivelmente acarretará em erros de medição grosseiros. Neste último caso o diâmetro de Hossfeld pode ser mais vantajoso por estar inserido a 1/3 da altura total, principalmente em árvores médias e grandes. A probabilidade de encontrarmos comprimentos de copa que coincidam com esta fração da altura do tronco são menores que a altura de Pressler.

Devido a esta real problemática operacional, trabalhos recentes têm sugerido obter essas medidas auxiliares do tronco por meio de equações de *taper* ajustadas, quando o erro de suas estimativas é satisfatório. É importante mencionar que no quarto capítulo, estas medidas já foram incorporadas nos modelos, o que torna quase imperativo coletá-las em campo. Caso contrário, a abordagem precisa ser adaptada para que o modelo possa contabilizar o efeito desta medida auxiliar quando desconhecida (não coletada). Este procedimento será explicado e testado no tópico a seguir em que considera implicitamente o efeito da altura de Pressler. Utilizar a estimativa de uma equação de *taper* como variável de entrada em outra equação de mesma natureza aparentemente não faz muito sentido. Entretanto, é comum estimar o volume cuja variável de entrada são estimativas da altura total provenientes de uma equação hipsométrica, mesmo que a propagação do erro seja evidente (Fortin e DeBlois, 2010).

A partir da altura da base da copa, a categoria de modelo com interruptores numéricos possibilita obter implicitamente esta posição do tronco com um parâmetro adicional quando esta é desconhecida (ver Anexo A). O mesmo pode ser aplicado com a altura de Pressler, embora o processo necessite de adaptação que permita a mesma capacidade interpretativa proposta por Valentine e Gregoire (2001). No Apêndice A.1 deste documento há uma maneira simples de estimar a altura de Pressler pela restrição dos parâmetros de um modelo linear proposto por McTague (1992). Este procedimento não foi explorado no quarto capítulo, dado que esta categoria de modelo não consegue ser generalista o suficiente considerando apenas a posição do tronco como referencial transitório, mesmo que a altura de Pressler tenha sido mais plausível que a altura da base da copa. A adaptação desta categoria de modelo aplicada no mesmo capítulo (γH) foi uma tentativa de torná-lo independente de alguma medida auxiliar, já que o parâmetro naturalmente assume um valor relativo da altura total. Algo indica que pode ser necessário aplicar efeitos aleatórios aos parâmetros a nível de árvore ou obter equações separadamente para cada material genético ou mais especificamente por interação, o que não foi dado ênfase neste trabalho.

A dependência da categoria de modelo para descrever o perfil do tronco se fez presente também nas variáveis de copa e povoamento. O índice de área foliar estimado (IAF), embora não tenha compensado pelo menos o efeito do espaçamento, mostrou-se uma variável de povoamento compatível com o esperado. Como as medidas derivadas da altura da base da copa não possuíram efeito evidente sob a análise do perfil médio do tronco, pode ter sido um dos motivos para o favorecimento do IAF. No entanto, o fechamento de copas ao longo dos anos é um bom indicador da produtividade do povoamento, além de

possuir uma forte relação com práticas silviculturais como o desbaste (Caselli et al., 2021), bem como relação com o espaçamento relativo e o índice de área foliar (Medhurst e Beadle, 2001). Nos materiais genéticos avaliados a área basal por hectare já se mostra suficiente em compensar ao menos o efeito do espaçamento, o que é vantajoso por isentar mais medidas na parcela. A limitação desta afirmação é que o tamanho da amostra para o cálculo dessa variável se restringiu às nove árvores centrais das vinte e cinco árvores de cada tratamento. Normalmente nos inventários de florestas plantadas as parcelas possuem um tamanho fixo de 400m² com 60 a 90 árvores em média a depender do espaçamento, onde o *dap* de todas elas é medido. Entretanto esta diferença não invalida o significado biológico da variável, sobretudo sua interpretação como efeito sobre a forma.

5.2 A altura de Pressler quando desconhecida

As informações apresentadas para obter a altura da base da copa quando esta é desconhecida no modelo com interruptores numéricos de Valentine e Gregoire (2001) foram melhor descritas no Anexo A, ao final deste documento. O procedimento sugerido aqui seguiu o mesmo contexto teórico, agora descrevendo uma maneira de obter implicitamente a altura de Pressler quando esta é desconhecida ao invés da altura da base da copa. A partir do pressuposto de que conhecemos os passos que geram o modelo final¹, partiremos da expressão que descreve os segmentos da região intermediária e o topo. A expressão que descreve o segmento intermediário será usada para obter a altura de Pressler (h_{pr}) quando desconhecida (eq. 5.1). Neste caso usaremos a razão de diâmetros ao quadrado diferentemente da área seccional usada no modelo original.

$$\left(\frac{d_i}{D}\right)^2 = \left(\frac{H - h_i}{H - 1,3}\right)^{\alpha_1}, \quad 1,3 \leq h_i \leq h_{pr} \quad (5.1)$$

Para altura da base da copa cuja área seccional ou diâmetro nesta posição é desconhecido necessita ser estimado. Por outro lado, o diâmetro (ou área seccional) na altura de Pressler pode ser conhecido, dado que consiste na metade do *dap* ($(d_i/D)^2 = (1/2)^2 = 1/4 = 0,25$) ao presumir que o tronco é um parabolóide quadrático. Neste caso, como a altura de Pressler é desconhecida iremos calculá-la assumindo que $\alpha_1 = 1$ quando $h_i = h_{pr}$, na eq. 5.1. Portanto, a eq. 5.1 pode ser rearranjada para então isolarmos a altura de Pressler. Assim, obtemos a eq. 5.2 e a altura estimada pode ser usada como variável de entrada no modelo final (substituindo o termo h_u na eq. 4.1 do capítulo 4):

$$\hat{h}_{pr} = [H - 1,3] \left(\frac{H}{H - 1,3} - 0,25 \right). \quad (5.2)$$

A Figura 5.1a verifica a altura de Pressler calculada pela eq. 5.2 em função da altura observada. Os dados individuais das árvores são os mesmos já retratados nos capítulos anteriores. Podemos observar que por esta abordagem as alturas estimadas possuem erros percentuais próximos de 11%, bem como alta tendência em superestimar as alturas principalmente nas maiores árvores (Figura 5.1b). Embora o RMSE seja aproximadamente 2,12m, sua relevância prática depende da avaliação do desempenho ao incorporar a altura calculada no momento do ajuste do modelo. O modelo final com os efeitos aleatórios aplicados aos parâmetros α_1 , α_2 e θ_1 por interação (clone:espaç.) pode ser visto na eq. 5.3. Ao comparar a medida observada e estimada, nota-se que a altura de Pressler observada favorece de certa maneira seu desempenho geral. Por outro lado, as estatísticas de precisão das estimativas dos diâmetros considera que esta diferença pode ser negligenciável na prática (Tabela 5.1). Considerar o efeito da interação no modelo que possui a altura da base da copa observada melhora substancialmente as estimativas dos diâmetros, embora seja menos plausível que a altura de Pressler. Ajustar o modelo com a altura da base da copa

¹Os detalhes constam no Anexo A deste documento.

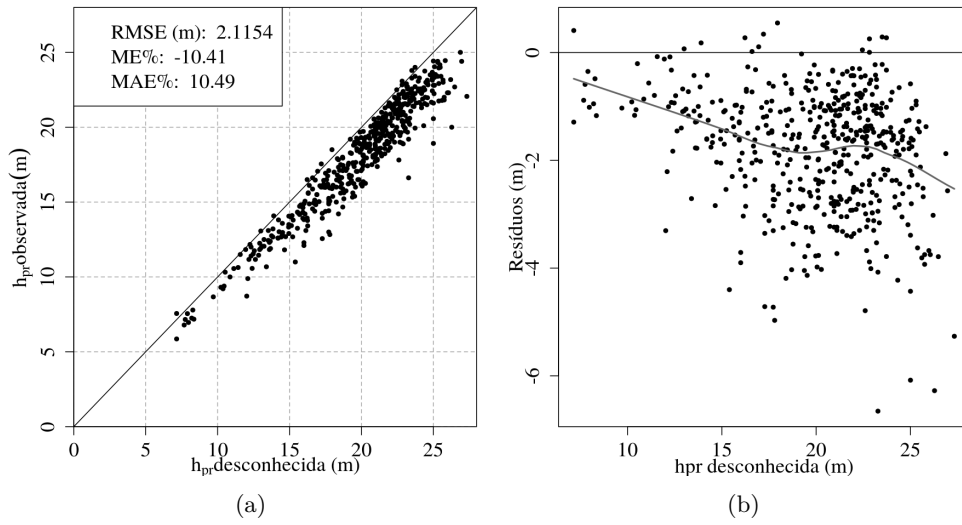


Figura 5.1: Altura de Pressler desconhecida, eq. 5.2, em função da altura de Pressler obtida pela interpolação (a); gráfico de resíduos em função da altura desconhecida (b); $n = 503$ árvores.

quando esta é desconhecida não a torna indispensável. Além disso, necessita estimar mais um parâmetro (θ_4 , ver Anexo A).

$$\left(\frac{d_{ij}}{D_j}\right)^2 = \left(\frac{H_j - h_{ij}}{H_j - 1,3}\right)^{(\alpha_1 + \phi_{1k}) + S_8(h_{ij})} \left(\frac{H_j - h_{ij}}{H_j - h_{prj}}\right)^{(\alpha_2 + \phi_{2k}) S_9(h_{ij})} + \varepsilon_{ij} \quad (5.3)$$

Os indexadores i, j, k representam as seções no tronco, árvore e a combinação de clone e espaçamento, respectivamente, em que os interruptores são descritos como:

$$S_8(h_{ij}) = \frac{(\theta_1 + \phi_{3k})H_j}{1 + [h_i/(\theta_3 H)]^{\lambda_1}}, \quad 0 < \theta_3 < \frac{h_{prj}}{H_j} \quad (5.4)$$

$$S_9(h_{ij}) = \frac{(h_{ij}/h_{prj})^{\lambda_2}}{1 + (h_{ij}/h_{prj})^{\lambda_2}} \quad (5.5)$$

Tabela 5.1: Estatísticas de precisão das estimativas dos diâmetros com casca pelo modelo de Valentine e Gregoire (2001) adaptado com as alturas de Pressler e copa observadas (h_{pr} ; h_{bc}) e desconhecidas (\hat{h}_{pr} ; \hat{h}_{bc}). LL é a log-verossimilhança; Φ_ρ a estrutura de correlação de primeira ordem $CAR(1)$; $\hat{\sigma}$ o desvio padrão dos parâmetros com efeitos aleatórios (clone:espaçamento).

Modelo	RMSE	MAE%	ME%	AIC	Δ_{AIC}	LL	Φ_ρ	$\hat{\sigma}_{\phi_1}$	$\hat{\sigma}_{\phi_2}$	$\hat{\sigma}_{\phi_3}$
h_{pr}	0.4967	3.71	0.04	-58303.00	0.00	29193.50	0.7124	0.0855	0.1673	0.0443
\hat{h}_{pr}	0.4970	3.67	-0.13	-58253.74	49.26	29138.87	0.7190	0.0763	0.1672	0.0419
h_{bc}	0.5024	3.74	-0.03	-58216.07	86.93	29120.04	0.7221	0.0777	0.1140	0.0429
\hat{h}_{bc}	0.5287	3.98	0.04	-57876.55	426.45	28951.28	0.7453	0.0903	0.0000	0.0673

É importante mencionar que ao optar pela altura de Pressler como referencial, não é necessário mais um parâmetro a ser estimado. Isto facilita de certa maneira a convergência, embora seja um dos motivos para valores baixos ou negativos principalmente do parâmetro α_2 , sobretudo a não significância deste. Isto pode mudar sua interpretação já que possui intrínseca relação com a forma do segmento superior do tronco. Se o α_2 for próximo ou igual a zero, o segmento do topo se assemelhará a um cone e parabolóide quando valores negativos. Quando isto ocorre, basicamente a forma geral do tronco será definida pelos parâmetros α_1 e λ_1 , com pouca ou nenhuma influência do λ_2 . Este último define se a transição entre o segmento intermediário e o topo terá diminuição abrupta ou não dos diâmetros a partir

da altura de Pressler. Assim, este referencial pode ser um forte indício que considerar implicitamente esta posição do tronco torne o parâmetro α_2 menos influente, dado que esta altura possui significado teórico sobre a forma quando este é um parabolóide quadrático.

Espécies excurrentes como as do gênero *Eucalyptus* naturalmente transitam entre um parabolóide cúbico e quadrático. Portanto, aplicar esta metodologia em formas mais complexas de outros gêneros e espécies pode fornecer resultados variados. Os resultados apresentados evidenciam a capacidade de generalização desta medida de forma quando a mudança dos sólidos é pouco perceptível nos dados visualmente. Na espécie *Lyquidambar styraciflua* L., do trabalho de Valentine e Gregoire (2001), fica evidente que a altura da base da copa é um ótimo referencial transitório da forma o que não ocorreu nos diferentes materiais genéticos aqui investigados. Isto favorece de certa maneira o uso da altura de Pressler pelos motivos já discutidos anteriormente.

5.3 Aplicação da função Weibull como interruptor numérico e a altura de Pressler

Outras funções podem ser aplicadas para a transição dos sólidos ao longo do tronco, como a função de distribuição acumulada da família Weibull e seu complemento. Em sua estrutura básica, esta família de distribuição possui dois parâmetros: um parâmetro de forma² e outro de escala. Na expressão do modelo original com interruptores a transição se dá por meio de funções que descrevem processos biológicos como o crescimento de plantas (Thornley e Johnson, 1990, p. 54-56). O mesmo suporte teórico foi aplicado para incorporar ao modelo as funções Weibull como interruptores, sendo necessária algumas adaptações. Até o presente não há publicações que descrevam este procedimento para esta categoria de modelo, mas é importante destacar que a aplicação foi consequência das provocações feitas no próprio trabalho de Valentine e Gregoire (2001).

Conforme já descrito no Anexo A, os autores aplicam duas funções que determinam as posições de transição dos sólidos no tronco. A expressão original do modelo será preservada, exceto os interruptores numéricos que são as próprias funções Weibull. As eq. 5.7 e eq. 5.8 são os interruptores numéricos usados para compor o modelo final, a eq. 5.6. O termo $\theta_1 H$ possui propósito similar ao descrito por Valentine e Gregoire (2001), que assegura o modelo a calcular o diâmetro, geralmente desconhecido, quando $h_i = 0$ no segmento da base do tronco. Os termos b_1 e b_2 são os parâmetros de escala, c_1 e c_2 os parâmetros de forma da Weibull.

$$\left(\frac{d_{ij}}{D_j}\right)^2 = \left(\frac{H_j - h_{ij}}{H_j - 1,3}\right)^{(\alpha_1 + \phi_{1k}) + S_{w_1}(h_{ij})} \left(\frac{H_j - h_{ij}}{H_j - h_{prj}}\right)^{(\alpha_2 + \phi_{2k}) S_{w_2}(h_{ij})} + \varepsilon_{ij} \quad (5.6)$$

$$S_{w_1}(h_{ij}) = \exp\left(-\left[\frac{h_{ij}}{b_1}\right]^{c_1}\right) \times (\theta_1 + \phi_{3k}) H_j, \quad 0 < h_{prj} \quad (5.7)$$

$$S_{w_2}(h_{ij}) = 1 - \exp\left(-\left[\frac{h_{ij}}{b_2}\right]^{c_2}\right) \quad (5.8)$$

A Tabela 5.2 apresenta os resultados da eq. 5.6 ajustada, aplicando efeitos aleatórios aos parâmetros α_1 , α_2 e θ_1 . Novamente, quando a altura de Pressler observada é usada melhora as estimativas dos diâmetros e o modelo aparentemente se torna mais flexível que o modelo original de Valentine e Gregoire (2001) (ver Tabela 5.1). Por outro lado, utilizar a eq. 5.2 para calcular a altura de Pressler quando desconhecida não favoreceu o modelo com a Weibull embora a diferença no erro entre eles seja aparentemente sutil. É importante mencionar que a eq. 5.6 agora possui um parâmetro a mais se

²O parâmetro de forma não deve ser confundido aqui como a representação da "forma do tronco", embora a metodologia possa fornecer alguma interpretação sobre ela a partir dele.

comparado a eq. 5.3. Entretanto, obter palpites iniciais confiáveis e a convergência no momento de ajuste foi mais simples.

Tabela 5.2: Estatísticas de precisão das estimativas dos diâmetros com casca pelo modelo de Valentine e Gregoire (2001), modificado com interruptores numéricos da Weibull (eq. 5.6). Foram comparadas a altura de Pressler observada (h_{pr}) e desconhecida (\hat{h}_{pr}). LL é a log-verossimilhança; Φ_ρ a estrutura de correlação de primeira ordem $CAR(1)$; $\hat{\sigma}$ o desvio padrão dos parâmetros com efeitos aleatórios (clone:espaçamento).

Modelo	RMSE	MAE%	ME%	AIC	Δ_{AIC}	LL	Φ_ρ	$\hat{\sigma}_{\phi_1}$	$\hat{\sigma}_{\phi_2}$	$\hat{\sigma}_{\phi_3}$
h_{pr}	0.4738	3.40	-0.35	-58926.85	0.00	29476.43	0.6282	0.0280	0.0527	0.0340
\hat{h}_{pr}	0.4972	3.69	-0.15	-58228.73	698.12	29127.37	0.7172	0.0807	0.0494	0.0550

A Figura 5.2 deixa claro que o modelo com a Weibull e altura de Pressler observada diminui as incertezas nas diferentes alturas relativas. Entretanto, o modelo foi mais problemático na base do tronco até 5% dele. Com a altura de Pressler estimada, fica evidente a semelhança com o modelo original (eq. 5.3), tanto pelo RMSE, ME e MAE. A precisão do modelo pode estar associada ao fato de que a função Weibull, mesmo com dois parâmetros, é considerada flexível quando as distribuições são assimétricas ou possuem estruturas mais complexas. É a função usada para prever eventos naturais como a mortalidade das árvores ao longo do tempo em florestas equiâneas (Somers et al., 1980). Recentemente, tem sido a principal função para descrever a distribuição do *dap* em híbridos do gênero *Eucalyptus* pela recuperação dos parâmetros a partir do método dos momentos associados a atributos do povoamento (Waldy et al., 2022).

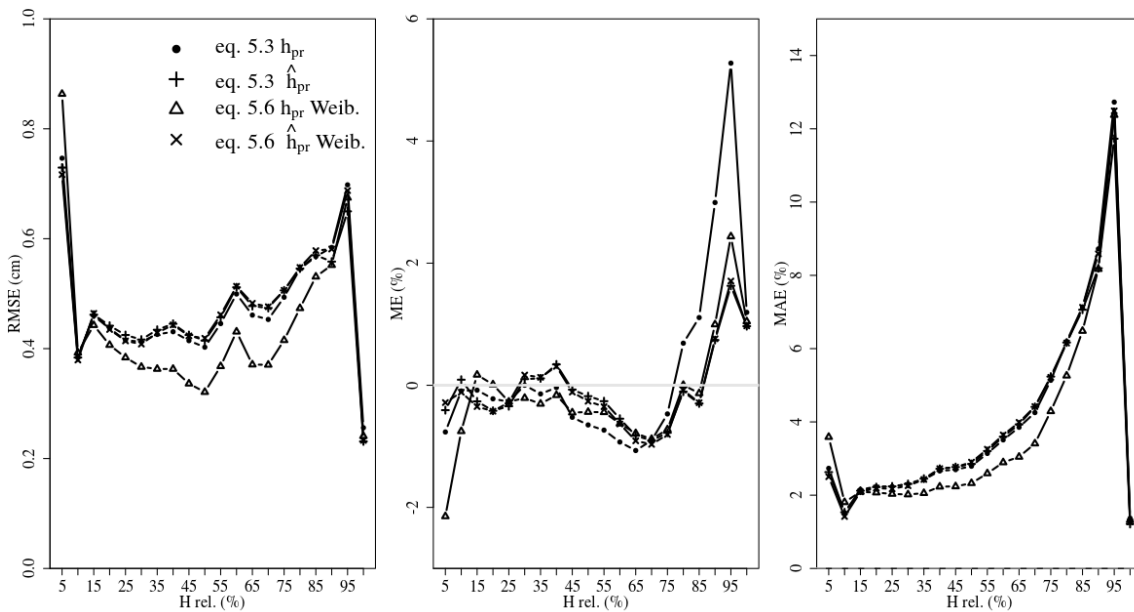


Figura 5.2: Tendência do erro médio residual das estimativas dos diâmetros (\hat{d}_i) obtida a partir das estatísticas de precisão (RMSE, ME e MAE) nas posições relativas do tronco, em intervalos de 5%, pela eq. 5.3 e eq. 5.6, com a altura de Pressler observada (h_{pr}) e estimada (\hat{h}_{pr}).

O parâmetro de escala b_1 no interruptor $S_{w_1}(h_{ij})$ indica o ponto de inflexão na base do tronco, algo semelhante ao realizado pelo termo $\theta_3 H$ na eq. 5.3. Teoricamente, o parâmetro de escala b_2 no interruptor $S_{w_2}(h_{ij})$ deverá assumir o valor médio da altura de Pressler do povoamento. Para que esta última afirmação seja verdadeira, deve ficar nítido que a diminuição dos diâmetros ocorra abruptamente a partir desta posição no tronco, algo não observado nos dados avaliados. Para confirmar a possibilidade desta afirmação, a Figura 5.3a demonstra o perfil médio esperado do tronco que corroboraria com a

definição anterior a partir de valores arbitrários dos parâmetros. A Figura 5.3b representa o perfil médio com os parâmetros obtidos utilizando os dados reais deste estudo, gerado a partir dos parâmetros fixos do modelo de efeitos mistos com a altura de Pressler observada (eq. 5.6). É importante destacar que os pontos de inflexão do modelo são definidos pelas probabilidades quando $P(h_i = b_1) = 0,378$ e $P(h_{pr} = b_2) = 0,632$, independentemente do valor do parâmetro de forma c_1 e c_2 dos interruptores da Weibull (Figura 5.3a). Nota-se que o parâmetro b_2 assume o valor de aproximadamente 6,021 e define a altura do tronco mais provável para a mudança dos sólidos na parte superior (Figura 5.3b). O comportamento fornecido por ambos interruptores torna o modelo muito flexível na iminência de não considerar o efeito do referencial do tronco. Isto precisaria ser melhor investigado e validado em outras espécies.

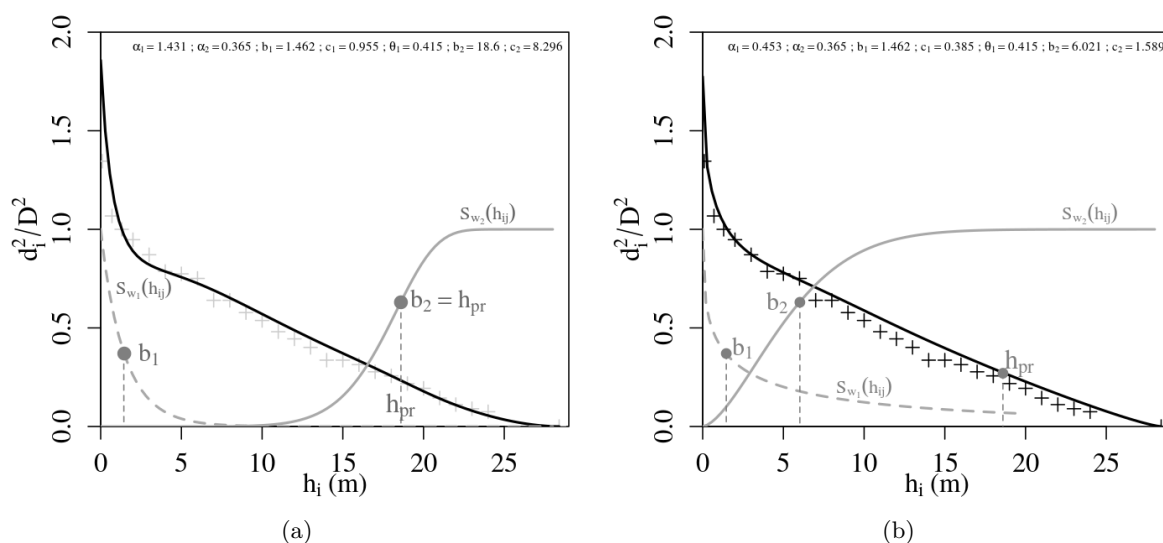


Figura 5.3: Perfil médio do tronco de uma árvore com $H = 28,4\text{m}$, $D = 15\text{cm}$ e $h_{pr} = 18,6\text{m}$, em que: (a) é o perfil esperado com o parâmetro de escala do interruptor S_{w_2} representando a altura de pressler ($b_2 = h_{pr}$), onde os \bullet em cinza no S_{w_1} e S_{w_2} são as probabilidades $P(h_i = b_1)$ e $P(h_{pr} = b_2)$; (b) o perfil médio com dados reais, a partir dos parâmetros fixos do modelo que considera a altura de Pressler observada.

5.4 A modelagem sob o aspecto das práticas silviculturais e de manejo: a forma do tronco e novos paradigmas

Os procedimentos adotados se propuseram a verificar se algumas medidas de forma, até então pouco referenciadas em investigações florestais no Brasil, possuem importância factível sob as características silviculturais analisadas. Incorporar o uso dessas medidas auxiliares nas rotinas de inventário florestal naturalmente acarretará em custos adicionais, embora se torne irrelevante a longo prazo quando atingir um esforço amostral satisfatório.

Conforme já demonstrado, ao menos a medida de Pressler pode ser calculada quando desconhecida, com o pressuposto de que a forma do tronco é um parabolóide quadrático. Isto traz algumas limitações já que devemos conhecer a forma a priori e necessita cautela quanto ao uso em espécies que não sejam do gênero *Eucalyptus*. Ainda, a abordagem utilizou apenas a categoria de modelo com interruptores numéricos, o que sugere que novas conduções sejam exploradas quando diferentes categorias forem escolhidas. Outra maneira seria obter as medidas de forma de Hossfeld e de Pressler a partir de equações ajustadas pelo método dos mínimos quadrados ordinários ou generalizados a depender da complexidade dos possíveis efeitos no povoamento. Neste caso, as estimativas podem ser usadas em equações ajustadas, como já aplicado em modelos de volume, onde a altura estimada por uma equação hipsométrica, em

conjunto com o *dap*, é usada para estimá-lo. A preocupação neste caso será na escolha das variáveis explicativas, a possível propagação do erro ou problemas com multicolinearidade.

Na avaliação dos modelos apresentados, o espaçamento se mostrou menos influente que o efeito do material genético. Entretanto, isto não significa que a densidade de plantio não possua relação com a forma do tronco e nem invalida os conhecimentos já consolidados. É importante mencionar que a avaliação dessas características se deu a partir das medidas de forma, sobretudo que o efeito da interação se fez presente. Ainda, as observações foram obtidas apenas em um dado momento do crescimento da floresta, em seu ciclo convencional de sete anos. Assim, a sugestão é que estudos futuros possam investigar o comportamento das medidas de forma e demais variáveis nas diferentes fases de crescimento da floresta. Isto porque tem se tornado evidente o interesse em entender a relação da forma do tronco e variáveis climáticas, com poucos trabalhos publicados nesta área principalmente no Brasil. Com a crescente expansão dos plantios do gênero *Eucalyptus* em diferentes regiões, obter equações que possam ser calibradas quando novos materiais genéticos forem implantados pode se tornar uma prática comum.

Modelos que consideram segmentos específicos do tronco para transição dos sólidos ainda são pouco explorados. Além do trabalho pioneiro de Valentine e Gregoire (2001), o modelo foi testado apenas em Li e Weiskittel (2010) e não há até o presente algum estudo com espécies de *Eucalyptus* no Brasil. Trabalhos que se utilizam da mesma base teórica, temos apenas as adaptações feitas por Westfall e Scott (2010) que utilizaram interruptores numéricos sem a necessidade da altura da base da copa.

A adaptação sugerida para esta categoria de modelo com a função Weibull trouxe maior flexibilidade quando a altura de Pressler é conhecida. O maior número de parâmetros no modelo não foi um aspecto limitante. Tentativas com a altura da base da copa foram realizadas, embora problemas de convergência tenham sido reportados quando aplicado efeitos aleatórios nos mesmos parâmetros. A tentativa de interpretação dos parâmetros teoricamente foi coerente com a proposição, embora a limitação esteja na própria concepção dos dados e necessita que seja validada com outras espécies ou dados independentes.

Outras funções como interruptores numéricos podem ser usadas, como a *logit*, considerando a densidade de plantio ou níveis de fertilidade do solo em uma escala entre 0 e 1, além de possibilitar sua generalização para incorporar variáveis de qualquer natureza em estudos futuros.

Referências

- Alves, P. B. (2021). Relação entre atividades de copa e cambial de clones de eucalyptus spp. em diferentes densidades de plantio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.
- Caselli, M., Loguercio, G. Á., Urretavizcaya, M. F., e Defossé, G. E. (2021). Stand level volume increment in relation to leaf area index of austrocedrus chilensis and nothofagus dombeyi mixed forests of patagonia, argentina. *Forest Ecology and Management*, 494:119337.
- Fortin, M. e DeBlois, J. (2010). A statistical estimator to propagate height prediction errors into a general volume model. *Canadian journal of forest research*, 40(10):1930–1939.
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80(4):507–515.
- Li, R. e Weiskittel, A. R. (2010). Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the north american acadian region. *Annals of Forest Science*, 67(3):302.
- McTague, J. P. (1992). Enhanced estimates of total volume with any single upper-stem measurement. *Forest ecology and management*, 48(1-2):55–67.
- Medhurst, J. L. e Beadle, C. L. (2001). Crown structure and leaf area index development in thinned and unthinned eucalyptus nitens plantations. *Tree Physiology*, 21(12-13):989–999.
- Somers, G. L., Oderwald, R. G., Harms, W. R., e Langdon, O. G. (1980). Predicting mortality with a weibull distribution. *Forest Science*, 26(2):291–300.
- Thornley, J. H. e Johnson, I. R. (1990). *Plant and crop modelling*. Clarendon Oxford.
- Valentine, H. e Gregoire, T. (2001). A switching model of bole taper. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(8):1400–1409.
- Waldy, J., Kershaw Jr, J. A., Weiskittel, A., Ducey, M. J., et al. (2022). Diameter distribution model development of tropical hybrid eucalyptus clonal plantations in sumatera, indonesia: A comparison of estimation methods. *New Zealand Journal of Forestry Science*, 52.
- Westfall, J. A. e Scott, C. T. (2010). Taper models for commercial tree species in the northeastern united states. *Forest Science*, 56(6):515–528.

APÊNDICES

Apêndice A.1

Dedução de fórmula do trabalho de McTague (1992)

McTague (1992) apresentou uma maneira de obter a altura de Pressler a partir de condições lógicas aos estimadores de um modelo de taper sugerido. O modelo hipotético foi descrito como (eq. 5.9):

$$\left[\frac{(H - H_c)}{H} \right] = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{d_c}{D} \right)^2 + \beta_2 D^2 H + \varepsilon \quad (5.9)$$

em que d_c é o diâmetro na altura comercial H_c ; D e H , são o diâmetro a altura do peito (1,3m) e altura total, respectivamente. Próximo passo é rearranjar a eq. 5.9 para isolar o intercepto (β_0) e assim poder aplicar as condicionantes (eq. 5.10). O elemento adimensional $\left(\frac{d_c}{D} \right)^2$ condicionado a altura de Pressler será 0,25. Assim, a altura comercial é então substituída pela altura de Pressler, a partir da condição imposta ao intercepto que considera $d_c = 0,5D$ quando $H_c = h_{pr}$, onde h_{pr} é a altura de Pressler (altura em que o diâmetro é metade do *dap*):

$$\beta_0 = \left[\frac{(H - H_c)}{H} \right] - \beta_1(0,25) - \beta_2 D^2 H \quad (5.10)$$

Isolando o termo da eq. 5.9 temos:

$$-\frac{H_c}{H} = -1 + \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{d_c}{D} \right)^2 + \beta_2 D^2 H \Rightarrow H_c = H \left[1 - \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{d_c}{D} \right)^2 + \beta_2 D^2 H \right]$$

Isolando o termo da eq. 5.10

$$\beta_0 = \left[1 - \frac{h_{pr}}{H} \right] - \beta_1(0,25) - \beta_2 D^2 H \Rightarrow h_{pr} = H \left[1 - \beta_0 - \beta_1(0,25) \right]$$

Portanto temos o sistema de equações,

$$H_c = H \left[1 - \beta_0 + \beta_2 D^2 H \right] + \beta_1 H \left(\frac{d_c}{D} \right)^2$$

$$h_{pr} = H \left[1 - \beta_0 + \beta_2 D^2 H \right] + \beta_1 H [-(0,25)]$$

Isolando o termo comum $H \left[1 - \beta_0 + \beta_2 D^2 H \right]$ de ambas equações:

$$H \left[1 - \beta_0 + \beta_2 D^2 H \right] = H_c - \beta_1 H \left(\frac{d_c}{D} \right)^2$$

$$H \left[1 - \beta_0 + \beta_2 D^2 H \right] = h_{pr} - \beta_1 H [-(0,25)]$$

Agora, subtraindo o termo comum e ao igualar as duas equações temos o modelo final proposto (eq. 5.11):

$$h_{pr} - \beta_1 H [-(0,25)] = H_c - \beta_1 H \left(\frac{d_c}{D} \right)^2$$

$$h_{pr} = H_c + \beta_1 \left[\left(\frac{d_c}{D} \right)^2 - 0,25 \right] H \quad (5.11)$$

ANEXOS

Anexo A - Deduções e modificações algébricas dos modelos

Modelo segmentado com o parâmetro restrito algebricamente (*localized taper model*)

As operações descritas aqui são parte integrante de técnicas de restrição algébrica aplicadas para restringir parâmetros do modelo a uma condição específica, neste caso algum diâmetro ou altura da árvore. Isto implica que, a uma árvore qualquer, a curva do modelo deve passar por posições do tronco impostas pelas restrições aplicadas aos parâmetros do modelo. Geralmente na altura a 1,3m e outra a uma altura pré-estabelecida a depender do padrão florestal. Aqui os procedimentos foram adotados por Czaplewski e McClure (1988) e Sabatia e Burkhart (2015), embora outros trabalhos também possuam aproximações do mesmo método. Neste caso o modelo de *taper* utilizado foi o de Max e Burkhart (1976) originalmente proposto:

$$y = \beta_1(x - 1) + \beta_2(x^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x)^2 I_2 + \varepsilon \quad (5.12)$$

Onde y é o diâmetro relativo $\frac{d^2}{D^2}$; x é a razão h/H ; h é a altura da seção relativa do tronco em (m); H , a altura total (m); d , diâmetro com ou sem casca, em cm, na altura h ; D ou dap , diâmetro a 1.3m de altura acima do solo (cm); β_i , coeficientes do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); α_1 e α_2 são os pontos de inflexão de mudança dos sólidos; I_1 e I_2 são as variáveis indicadoras que seguem as condições: $I_1 = 1$ se $x \leq \alpha_1$; $I_2 = 1$ se $x \leq \alpha_2$, caso contrário, retorna zero; ε é o erro aleatório.

O foco é observar diâmetros no intervalo das alturas acima de 1,3m e abaixo do ponto de inflexão superior (ou seja, abaixo do valor do parâmetro α_1). Assim, apenas aos parâmetros β_1 , β_2 e β_3 restrições foram aplicadas. Nenhuma restrição foi imposta ao parâmetro β_4 porque com base no valor encontrado do ponto de inflexão α_2 , em árvores muito pequenas o diâmetro a ser localizado estaria abaixo do dap . Outrossim, restrições também não são aplicadas aos parâmetros α_1 e α_2 devido a problemas de convergência. Duas restrições serão aplicadas aqui: 1) para que a curva passe na altura do dap ; 2) que a curva passe a uma altura qualquer acima do dap e abaixo do ponto de inflexão superior.

Czaplewski e McClure (1988) testaram quatro maneiras de atribuir restrições aos parâmetros. Em seu apêndice exemplifica como condicionar o parâmetro β_3 para obter o dap estimado (\hat{d}_D) igual ao dap observado (D) a 1,3m de altura (h_D); aos parâmetros β_1 e β_2 para obter diâmetros acima dele. Assim, para que isto ocorra devemos observar as condições

$$I_{2,D} = \begin{cases} \hat{d}_D/D = 1 \\ 0, & \text{se } h_D/H \geq \alpha_2 \\ 1, & \text{se } h_D/H < \alpha_2. \end{cases}$$

Ao contrário disto significa que quando $h_D/H < \alpha_1$ ocasionará em $I_{1,D} = 1$ (Ou seja, o dap é naturalmente abaixo do ponto de inflexão superior, α_1). Ao resolver o modelo original na eq. 5.12 para β_3 teremos

$$\beta_3 = [(\hat{d}_D/D)^2 + \beta_1(1 - h_D/H) + \beta_2(1 - h_D^2/H^2) - \beta_4(\alpha_2 - h_D/H)I_{2,D}](\alpha_1 - h_D/H)^{-2}. \quad (5.13)$$

Substituindo β_3 (eq. 5.13) no modelo original (eq. 5.12) fica assim exposto

$$(\hat{d}/D)^2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_3 + W \quad (5.14)$$

em que:

$$X_1 = h/H - 1 + (1 - h_D/H)(\alpha_1 - h_D/H)^{-2}(\alpha_1 - h/H)^2 I_1;$$

$$\begin{aligned}
X_2 &= h^2/H^2 - 1 + (1 - h_D^2/H^2)(\alpha_1 - h_D/H)^{-2}(\alpha_1 - h/H)^2 I_1; \\
X_3 &= (\alpha_1 - h/H)^2 I_2 - (\alpha_2 - h_D/H)^2(\alpha_1 - h_D/H)^{-2}(\alpha_1 - h/H)^2 I_1 I_{2,D}; \\
W &= (\alpha_1 - h/H)^2(\alpha_1 - h_D/H)^{-2} I_1
\end{aligned}$$

Obviamente, com a eq. 5.13 é possível obter valores de β_3 para cada árvore. As expressões apresentadas acima servem tanto para diâmetros com ou sem casca, desde que estes tenham sido diretamente observados; isto torna o termo $(\hat{d}_D/D)^2$ uma constante conhecida. Diâmetros sem casca geralmente são estimados a partir de funções que possuem o *dap* como principal variável independente. O procedimento para inclusão desta expressão e obtê-los pode ser visto no mesmo trabalho.

A outra etapa é aplicar simultaneamente restrições aos parâmetros β_1 para o *dap* e β_2 para que a curva passe por algum diâmetro em alguma altura superior (h_{us} , o indexador *us* significa *upper-stem*). Portanto, as variáveis indicadoras devem seguir as condições

$$\begin{aligned}
I_{1,D} &= \begin{cases} 0, & \text{se } h_D/H \geq \alpha_1 \\ 1, & \text{se } h_D/H < \alpha_1 \end{cases} \\
I_{2,D} &= \begin{cases} 0, & \text{se } h_D/H \geq \alpha_2 \\ 1, & \text{se } h_D/H < \alpha_2 \end{cases} \\
I_{1,us} &= \begin{cases} 0, & \text{se } h_{us}/H \geq \alpha_1 \\ 1, & \text{se } h_{us}/H < \alpha_1 \end{cases} \\
I_{2,us} &= \begin{cases} 0, & \text{se } h_{us}/H \geq \alpha_2 \\ 1, & \text{se } h_{us}/H < \alpha_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Resolvendo simultaneamente o modelo original (eq. 5.12) para o parâmetro β_1 e β_2 resulta em

$$\beta_2 = [\beta_1(h_{us}/H - 1) + \beta_3(\alpha_1 - h_{us}/H)^2 I_{1,us} + \beta_4(\alpha_2 - h_{us}/H)^2 I_{2,us} - (\hat{d}_{us}/D)^2]/(1 - h_{us}^2/H^2) \quad (5.15)$$

$$\beta_1 = \left\{ \begin{aligned} &(\hat{d}_D/D)^2(h_{us}^2/H^2 - 1) + (\hat{d}_D/D)^2(1 - h_D^2/H^2) \\ &+ \beta_3[(h_D^2/H^2 - 1)(\alpha_1 - h_{us}/H)^2 I_{1,us} + (1 - h_{us}^2/H^2)(\alpha_1 - h_D/H)^2 I_{1,D}] \\ &+ \beta_4[(h_D^2/H^2 - 1)(\alpha_2 - h_{us}/H)^2 I_{2,us} + (1 - h_{us}^2/H^2)(\alpha_2 - h_D/H)^2 I_{2,D}] \end{aligned} \right\} / V \quad (5.16)$$

em que, $V = [(1 - h_D/H)(1 - h_{us}^2/H^2) - (1 - h_D^2/H^2)(1 - h_{us}/H)]$. Faremos o mesmo procedimento semelhante ao realizado com o parâmetro β_3 substituindo β_2 e β_1 (eqs. 5.15 e 5.16) no modelo original (eq. 5.12):

$$(\hat{d}/D)^2 = \beta_3 X_6 + \beta_4 X_7 + W_D (\hat{d}_D/D)^2 + W_{us} (\hat{d}_{us}/D)^2 \quad (5.17)$$

Assim, traduzindo as variáveis temos

$$\begin{aligned}
X_6 &= (\alpha_1 - h/H)^2 I_1 + (h/H - 1)[(1 - h_{us}^2/H^2)(\alpha_1 - h_D/H)^2 I_{1,D} - (1 - h_D^2/H^2)(\alpha_1 - h_{us}/H)^2 I_{1,us}]/V \\
&\quad + (h^2/H^2 - 1)[(1 - h_D/H)(\alpha_1 - h_{us}/H)^2 I_{1,us} - (1 - h_{us}/H)(\alpha_1 - h_D/H)^2 I_{1,D}]/V \\
X_7 &= (\alpha_2 - h/H)^2 I_2 + (h/H - 1)[(1 - h_{us}^2/H^2)(\alpha_2 - h_D/H)^2 I_{2,D} - (1 - h_D^2/H^2)(\alpha_2 - h_{us}/H)^2 I_{2,us}]/V \\
&\quad + (h^2/H^2 - 1)[(1 - h_D/H)(\alpha_2 - h_{us}/H)^2 I_{2,us} - (1 - h_{us}/H)(\alpha_2 - h_D/H)^2 I_{2,D}]/V
\end{aligned}$$

$$W_D = [(1 - h/H)(1 - h_{us}^2/H^2) - (1 - h^2/H^2)(1 - h_{us}/H)]/V$$

$$W_{us} = [(1 - h^2/H^2)(1 - h_D/H) - (1 - h/H)(1 - h_D^2/H^2)]/V$$

É importante mencionar que se os diâmetros d_D e d_{us} forem obtidos diretamente, os termos \hat{d}_D/D e \hat{d}_{us}/D serão constantes conhecidas. Ainda, os procedimentos adotados por Czaplewski e McClure (1988) possui a vantagem de ser aplicado por métodos estatísticos simples, como rotinas de minimização não-lineares, embora tenham lançado mão de algoritmo para busca do mínimo global.

O procedimento descrito anteriormente pode ser realizado com métodos estatísticos mais sofisticados, considerando o variação natural árvore-a-árvore. Sabatia e Burkhart (2015) utilizou a seguinte equação de *taper* com efeitos mistos a partir do modelo original (eq. 5.12)

$$y_{ij} = \beta_1(x_{ij} - 1) + [\beta_2 + b_{2i}](x_{ij}^2 - 1) + [\beta_3 + b_{3i}](\alpha_1 - x_{ij})^2 I_1 + [\beta_4 + b_{4i}](\alpha_2 - x_{ij})^2 I_2 + e_{ij} \quad (5.18)$$

em que, y_{ij} é $\frac{d_{ij}^2}{D^2}$; x_{ij} é $\frac{h_{ij}}{H_i}$; os outros termos são comuns aos da eq. 5.12 com a diferença nos indexadores que representam: i é a i -ésima árvore e j é a j -ésima medida no tronco da i -ésima árvore. Os parâmetros β_1 a β_4 e α_1 e α_2 representam os efeitos fixos; os parâmetros b_{2i} , b_{3i} e b_{4i} são os efeitos aleatórios.

Aqui as restrições serão aplicadas aos parâmetros β_2 e β_3 já que o objetivo central é considerar dois diâmetros observados (um na altura do *dap* e um outro a uma altura superior pré-estabelecida). Trabalharemos inicialmente com as estimativas do diâmetro relativo, fruto da equação já ajustada. A partir de uma altura relativa x qualquer, o diâmetro relativo pode ser estimado a partir da expressão:

$$\hat{y} = \beta_1(x - 1) + \beta_2(x^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x)^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x)^2 I_2 \quad (5.19)$$

em que, \hat{y} é o diâmetro relativo estimado; os outros termos já foram descritos anteriormente. Portanto, o diâmetro relativo na altura de 1,3m (\hat{y}_{dap}) bem como um diâmetro relativo em uma altura superior no tronco (\hat{y}_{us}) podem ser estimados por:

$$\hat{y}_{dap} = \beta_1(x_{dap} - 1) + \beta_2(x_{dap}^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x_{dap})^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x_{dap})^2 I_2 \quad (5.20)$$

$$\hat{y}_{us} = \beta_1(x_{us} - 1) + \beta_2(x_{us}^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x_{us})^2 I_2 \quad (5.21)$$

Agora temos dois termos nas equações 5.20 e 5.21 que significam a altura relativa do *dap* (x_{dap}) e a altura relativa a alguma posição do tronco (x_{us}). Como o diâmetro na seção a 1,3m de altura é o próprio *dap*, teremos a razão $\frac{D^2}{D^2}$ que conseqüentemente é igual a 1. Portanto, para obter tanto a seção relativa observada na altura do *dap* (y_{dap}) bem como uma superior (y_{us}) implica que

$$1 = \beta_1(x_{dap} - 1) + \beta_2(x_{dap}^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x_{dap})^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x_{dap})^2 I_2 \quad (5.22)$$

$$y_{us} = \beta_1(x_{us} - 1) + \beta_2(x_{us}^2 - 1) + \beta_3(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 + \beta_4(\alpha_2 - x_{us})^2 I_2 \quad (5.23)$$

Podemos observar que nas eq. 5.22 e 5.23 os parâmetros β_{2i} e β_{3i} são a nível de árvore especificamente, obtidos a partir dos valores de β_2 e β_3 de cada uma. A solução para β_{2i} e β_{3i} podem ser derivadas por relações algébricas lógicas envolvendo as eq. 5.20–5.23.

Na seção superior do tronco as eq. 5.21 e 5.23, respectivamente, a seguinte relação pode ser derivada

$$\hat{y}_{us} - \beta_2(x_{us}^2 - 1) - \beta_3(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 = \beta_1(x_{us} - 1) + \beta_4(\alpha_2 - x_{us})^2 I_2 \quad (5.24)$$

$$y_{us} - \beta_{2i}(x_{us}^2 - 1) - \beta_{3i}(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 = \beta_1(x_{us} - 1) + \beta_4(\alpha_2 - x_{us})^2 I_2 \quad (5.25)$$

Eliminando os termos em comum das eq. 5.24 e 5.25 e igualando as duas expressões temos uma equação com β_{2i} e β_{3i} desconhecidos:

$$y_{us} - \beta_{2i}(x_{us}^2 - 1) - \beta_{3i}(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 = \hat{y}_{us} - \beta_2(x_{us}^2 - 1) - \beta_3(\alpha_1 - x_{us})^2 I_1 \quad (5.26)$$

Os dois últimos procedimentos anteriores devem ser aplicados nas eq. 5.22 e 5.24 que envolvem o diâmetro à altura do peito (*dap*). Isto resulta na seguinte expressão também com β_{2i} e β_{3i} desconhecidos:

$$1 - \beta_{2i}(x_{dap}^2 - 1) - \beta_{3i}(\alpha_1 - x_{dap})^2 I_1 = \hat{y}_{dap} - \beta_2(x_{dap}^2 - 1) - \beta_3(\alpha_1 - x_{dap})^2 I_1 \quad (5.27)$$

Conforme já descrito, a altura do *dap* das árvores precisa estar abaixo do ponto de inflexão superior (α_1). Neste sentido, nas eq. 5.26 e 5.27 o termo I_1 será sempre igual a 1 e pode ser retirado delas. Assim, resolvendo simultaneamente as duas equações para β_{2i} e β_{3i} teremos as funções

$$\hat{\beta}_{2i} = \beta_2 + \left(\frac{(\alpha_1 - x_{us})^2(\hat{y}_{dap} - 1) - (\alpha_1 - x_{us})^2(\hat{y}_{us} - y_{us})}{(x_{us}^2 - 1)(\alpha_1 - x_{dap})^2 - (x_{dap}^2 - 1)(\alpha_1 - x_{us})^2} \right) \quad (5.28)$$

$$\hat{\beta}_{3i} = \beta_3 + \left(\frac{(1 - \hat{y}_{dap}) + (x_{dap}^2 - 1)(\beta_2 - \beta_{2i})}{(\alpha_1 - x_{dap})^2} \right) \quad (5.29)$$

que podem ser usadas para obter β_{2i} e β_{3i} específicos a nível de árvore e assim ter um modelo de *taper* localizado médio de uma população existente, bem como capaz de estimar o *dap* e um diâmetro superior na *i*-ésima árvore.

Incorporando os parâmetros específicos a nível de árvore β_{2i} e β_{3i} na equação 5.19 e rearranjando os termos resulta no modelo localizado

$$\hat{d}_{ij} = D_i \sqrt{\hat{\beta}_1(x_{ij} - 1) + \hat{\beta}_{2i}(x_{ij}^2 - 1) + \hat{\beta}_{3i}(\hat{\alpha}_1 - x_{ij})^2 I_1 + \hat{\beta}_4(\hat{\alpha}_2 - x_{ij})^2 I_2} \quad (5.30)$$

em que: \hat{d}_{ij} é o diâmetro estimado na *j*-ésima altura relativa da *i*-ésima árvore (x_{ij}); D_i é o *dap* da *i*-ésima árvore; $\hat{\beta}_{2i}$ e $\hat{\beta}_{3i}$ são os coeficientes específicos da *i*-ésima árvore, obtidos a partir das eq. 5.28 e 5.29; o restante são termos já conhecidos e descritos ao longo do texto. Os coeficientes $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_4$, $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ são os mesmos obtidos a partir do modelo de efeito misto com a eq. 5.18.

As duas abordagens foram escolhidas para exemplificar a mesma técnica em momentos distintos, embora sejam semelhantes. Ambos trabalhos não restringem o parâmetro β_4 pelas razões já mencionadas. A escolha em restringir o parâmetro β_1 deve ser guiada pela observação da variação natural deste parâmetro a nível de árvore, algo que foi considerado no trabalho de Sabatia e Burkhart (2015).

Modelo de expoente-variável com parâmetro restrito algebricamente

O procedimento para localização do modelo de expoente-variável é mais simples que a restrição imposta ao modelo segmentado descrito anteriormente. A explicação aqui terá como exemplo o modelo de expoente-variável de Kozak (2004), embora o mesmo procedimento possa ser aplicado a modelos mais antigos do mesmo autor. A expressão original do modelo é:

$$d_i = \alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2} X_i^{\beta_1 z^4 + \beta_2 [1/e^{D/H}] + \beta_3 X_i^{0.1} + \beta_4 [1/D] + \beta_5 H^{Q_1} + \beta_6 X_i} + \varepsilon_i \quad (5.31)$$

onde, d_i é o diâmetro com ou sem casca, em cm, na altura da secção h_i ; z é a razão h_i/H ; β_i , coeficientes do modelo ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$); Q_i , a expressão $[1-(h_i/H)^{1/3}]$; X_i , significa $[1-(h_i/H)^{1/3}]/(1-p^{1/3})$; p é $1,3/H$. Os demais termos já foram descritos anteriormente.

Diferentemente do modelo segmentado, em que a localização dos parâmetros fornecem perfis individuais do tronco, a restrição aplicada ao parâmetro possui significado sobre o padrão das árvores do povoamento para um determinado produto de interesse no sortimento. Obviamente, a escolha da posição do tronco para aplicar a imposição se dá de maneira arbitrária, a partir da análise exploratória dos diâmetros nas alturas das secções obtidos na cubagem. Para exemplificar, o procedimento será o mesmo exposto por McTague et al. (2020) que aplica a condição $d_i = d_{5m}$ se $h_i = h_{5m}$ e rearranja o modelo para obter o parâmetro α_0 :

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{d_{5m}}{D^{\hat{\alpha}_1} H^{\hat{\alpha}_2} X_{5m}^{\left[\hat{\beta}_1 z_{5m}^4 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{e^D/H} + \hat{\beta}_3 X_{5m}^{0,1} + \hat{\beta}_4 \frac{1}{D} + \hat{\beta}_5 H^{Q_{5m}} + \hat{\beta}_6 X_{5m} \right]}} \quad (5.32)$$

Por fim, para obter o modelo localizado ou customizado para uma árvore de interesse basta substituir o termo α_0 da eq. 5.31 pela eq. 5.32. Assim, o modelo de *taper* será forçado a estimar o mesmo valor observado de d_{5m} quando a altura da secção do tronco for h_{5m} , ou seja, 5 metros.

Modelo de expoente e forma-variável com interruptores numéricos (*numerical switches*)

Os modelos de *taper* com interruptores numéricos possuem a premissa básica de atribuir funções de ligação que determinam as mudanças dos sólidos do tronco. Esses interruptores são funções comumente usadas em processos ecológicos como o crescimento de plantas. No trabalho pioneiro de Valentine e Gregoire (2001) essas funções servem para alternar entre um neiloide a um parabolóide e transitar para um cone a partir da altura da base da copa até o topo. Além desta capacidade de atribuir funções aos pontos de união entre as expressões que representam cada sólido do tronco, com uma equação já ajustada é possível obter as estimativas da altura da base da copa sem a necessidade de coletá-la novamente. Neste trabalho, a variável dependente usada é a área seccional nas alturas relativas do tronco a invés do diâmetro, justificada por atribuir menor erro nas estimativas de volume. O modelo final proposto foi:

$$g_i = g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_1 + S_1(h_i)} \left(\frac{H - h_i}{H - h_{bc}} \right)^{\alpha_2 S_2(h_i)} + \varepsilon_i \quad (5.33)$$

em que: g_i é a área seccional na altura h_i ; g_{h_D} a área seccional na altura do *dap* (h_D ou 1,37m); H a altura total; h_i a altura da seção i do tronco; h_{bc} a altura da base da copa; α_1 e α_2 são os estimadores ou parâmetros de forma do modelo e; $S_1(h_i)$ e $S_2(h_i)$ são os interruptores numéricos.

Duas expressões foram usadas como referência para obter os interruptores numéricos da eq. 5.33, uma para desligar o processo de transição e outra para habilitá-lo (Figura Anexo 4). A expressão que desliga o processo transitório ($S_1(h_i)$) assume valores entre 1 e 0, mas nunca exatamente igual a zero. Quando $S_1(h_i, \eta) = 0,5$, independentemente do valor de η , a constante λ indica se a mudança em S_1 será gradativa ou abrupta dentro do intervalo no domínio h_i/η (Figura Anexo 4a). A expressão que liga o processo transitório S_2 pode ser traduzida como o complemento de S_1 , em que $S_2(h_i) = 1 - S_1(h_i)$ bem como $S_2(h_i, \eta) = 0,5$ (Figura Anexo 4b).

Para representar os diferentes sólidos e aplicar as restrições aos pontos de união, foi usado o modelo básico sugerido por Ormerod (1973) que é um modelo de expoente-variável com um único parâmetro de forma no expoente. Assumindo-se que o segmento intermediário é um parabolóide quadrático, o parâmetro de forma α_1 será igual a 1. Portanto, a expressão que representa esta região pode ser descrita como:

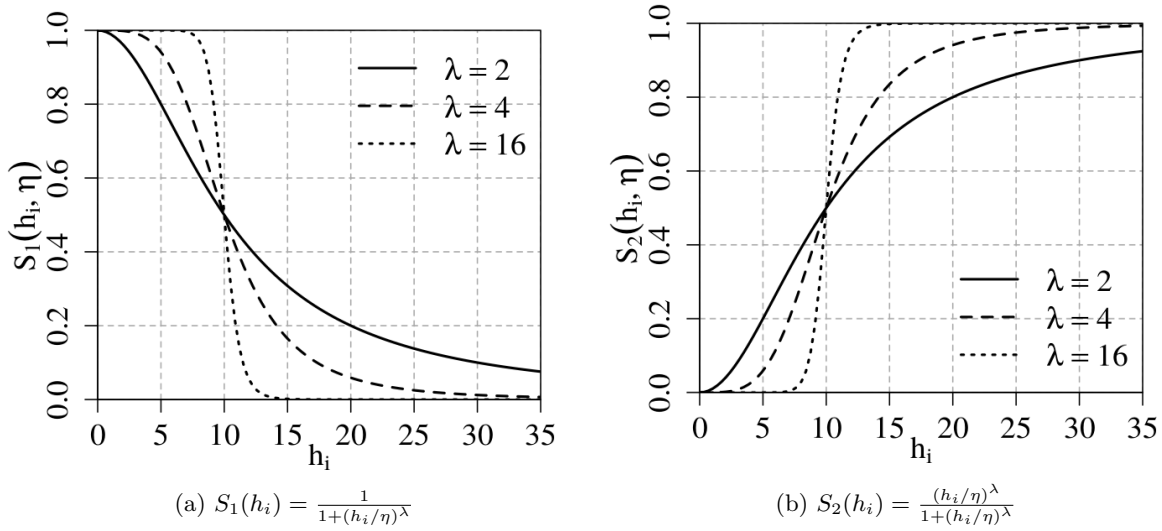


Figura Anexo 4: Funções dos interruptores numéricos: (a) é o interruptor que desliga o processo de transição; (b) interruptor que liga o processo de transição, com diferentes valores de λ e η igual a 10. Os símbolos λ e η são constantes da função.

Fonte: adaptado de Valentine e Gregoire (2001)

$$g_i = g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_1}, \quad 1,37 \leq h_i \leq h_{bc} \quad (5.34)$$

considerando que a região intermediária está localizada entre a altura do *dap* (1,37m) e a altura da base da copa (h_{bc}). Para o topo, espera-se que o perfil assemelhe-se a um cone. Assim, a expressão para área seccional nesta parte do tronco é:

$$g_i = g_{h_{bc}} \left(\frac{H - h_i}{H - h_{bc}} \right)^{\alpha_3}, \quad h_{bc} \leq h_i \leq H \quad (5.35)$$

em que $\alpha_3 \approx 2$. É importante mencionar que a eq. 5.35 necessita da área seccional do tronco na altura da base da copa ($g_{h_{bc}}$). Como dificilmente será uma medida conhecida, ela pode ser facilmente estimada a partir da eq. 5.34 culminando na expressão

$$g_{h_{bc}} \approx g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_1} \quad (5.36)$$

Substituindo a expressão acima no termo da eq. 5.35, temos

$$g_i = g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{H - h_i}{H - h_{bc}} \right)^{\alpha_2} \quad (5.37)$$

em que: $\alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_1$. Como nem sempre é possível obter a altura da base da copa, os autores sugerem uma expressão adicional para estimá-la. Ao assumirmos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, quando $h_i = h_{bc}$, a eq. 5.35 fornece a expressão $g_{h_{bc}} = \theta_4(H - h_{bc})$, onde $\theta_4 = g_{h_{bc}}/(H - h_{bc})^2$. Ao substituir o mesmo termo na eq. 5.36 e rearranjá-la para isolar a altura da base da copa teremos

$$h_{bc} = H - \frac{g_{h_D}}{\theta_4(H - h_D)}. \quad (5.38)$$

Por fim, para obter a expressão da base do tronco e assumindo que ela se assemelha a um neiloide, temos

$$g_i = g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_0 + \alpha_1}, \quad \alpha_0 > 1; 0 \leq h_i \leq 1, 37 \quad (5.39)$$

A expressão acima somente assumirá um neiloide se $\alpha_0 + \alpha_1 > 2$. Neste sentido, é natural supor que o valor de α_0 deve variar a nível de árvore. Portanto, com a eq. 5.39 devemos isolar o termo α_0 com base no tamanho do tronco, ou seja, a partir de sua altura total. Ao considerar $h_i = 0$, podemos obter a área seccional igual a zero (g_0) a partir da expressão:

$$g_0 = g_{h_D} \left(\frac{H}{H - h_D} \right)^{\alpha_0 + \alpha_1}$$

Quando a área seccional g_0 é desconhecida os autores sugerem substituí-la por um parâmetro (nesse caso $\theta_1 = g_0$). Após isto basta substituir g_0 por θ_1 e resolver a equação para isolar o termo α_0 na expressão anterior. Isso gera uma expressão do parâmetro mais complexa. Para simplificar, os autores concluem que a expressão $\alpha_0 = \theta_1 H$ funciona equivalentemente bem se comparado a expressão mais complexa.

As três funções para cada parte do tronco (eq. 5.34; 5.35 e 5.39) serviram como base para incluir os interruptores $S_1(h_i)$ e $S_2(h_i)$ relatados anteriormente. As expressões dos interruptores foram modificadas para considerar a transição dos sólidos do tronco (S_5 e S_6), em que a eq. 5.41 interrompe a transição enquanto que eq. 5.42 habilita a transição. A etapa determinística do modelo tem como esperança matemática a área seccional g_i na altura h_i ($E[g_i]$) em função da área seccional na altura do *dap* (g_{h_D}), altura da base da copa (h_{bc}) e a altura total (H):

$$E[g_i] = g_{h_D} \left(\frac{H - h_i}{H - h_D} \right)^{\alpha_1 + S_5(h_i)} \left(\frac{H - h_i}{H - h_{bc}} \right)^{\alpha_2 S_6(h_i)} \quad (5.40)$$

em que:

$$S_5(h_i) = \frac{\alpha_0}{1 + [h_i/(\theta_3 H)]^{\lambda_1}}, \quad 0 < \theta_3 < \frac{h_{bc}}{H}; \quad \alpha_0 = \theta_1 H \quad (5.41)$$

$$S_6(h_i) = \frac{(h_i/h_{bc})^{\lambda_2}}{1 + (h_i/h_{bc})^{\lambda_2}} \quad (5.42)$$

Os valores do primeiro interruptor numérico $S_5(h_i)$ que, por ter α_0 no numerador, diminuem a partir do valor de α_0 até 0, conforme as alturas h_i aumentam até assumir a altura total (de 0 a H). Se h_i for igual a zero, então $S_5(0)$ será igual a α_0 e $S_6(0)$ inevitavelmente igual a 0. Esta condição é um caso específico da eq. 5.40 que culminará na eq. 5.39 assumindo o formato neiloide. Já a transição do neiloide ao parabolóide, ou seja, da região da base à intermediária do tronco, ocorre quando $S_5(h_i)$ diminui conforme a altura aumenta. O interruptor $S_5(h_i)$ será igual a $\alpha_0/2$ somente quando h_i for igual a $\theta_3 H$. É importante destacar que $\theta_3 H$ representa a altura do ponto de inflexão inferior da curva do modelo. Nessa região a eq. 5.40 será reduzida ao modelo parabólico (eq. 5.34), quando $S_5(h_i)$ for próximo de 0 e $S_6(h_i) \approx 1$ (segmento intermediário entre $\theta_3 H$ e h_{bc}). O segundo interruptor numérico $S_6(h_i)$ é centralizado em h_{bc} conforme ilustra a Figura Anexo 5 e a eq. 5.42. Se a altura h_i estiver localizada entre h_{bc} e H , então é natural supor que $S_5(h_i)$ será próximo de 0, bem como $S_6(h_i)$ será próximo de 1. Assim, a eq. 5.40 se reduzirá ao modelo que representa a forma de um cone (eq. 5.35).

É importante mencionar que os autores obtiveram as estimativas dos parâmetros a partir da abordagem de modelos de efeitos mistos, pela máxima verossimilhança restrita com função para a variância. Todo procedimento descrito aqui considera os parâmetros apenas como efeitos fixos. Associar interruptores numéricos a altura da base da copa traz fundamentos biológicos ao modelo, além de facilitar na interpretação deste atributo da árvore quanto a mudança de forma no tronco.

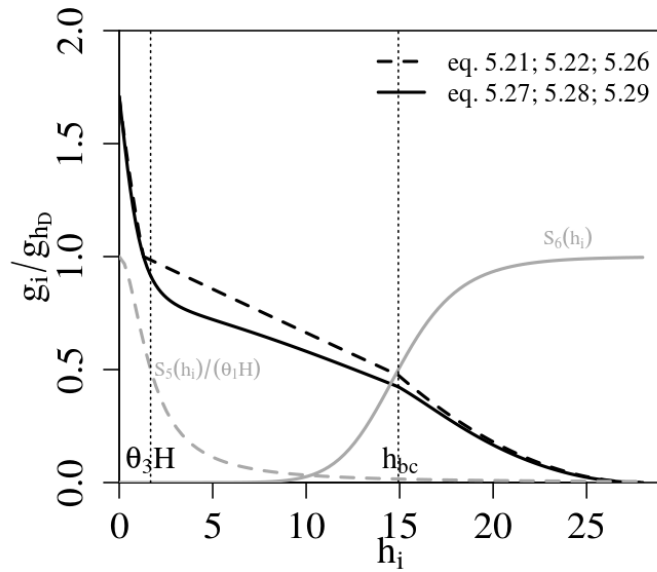


Figura Anexo 5: Perfil do tronco relacionando a área seccional relativa (g_i/g_{h_D}) em função da altura nas diferentes posições (h_i). A linha com tracejado longo em preto é o perfil obtido pelas equações separadamente, sem os interruptores; a linha sólida em preto é o perfil do modelo com os interruptores numéricos. Já as linhas em cinza, a sólida é a função do interruptor $S_6(h_i)$ e a tracejada é $\frac{S_5(h_i)}{(\theta_1 H)}$. Os valores usados foram: $H = 28m$; $h_{bc} = 14,93m$; $\alpha_1 = 1,042$; $\alpha_2 = 0,929$; $\theta_1 = 0,365$; $\theta_3 = 0,06$; $\lambda_1 = 1,895$; $\lambda_2 = 9,052$; $\alpha_0 = \theta_1 H$.

Fonte: adaptado de Valentine e Gregoire (2001)

Um outro trabalho com interruptores numéricos é o de Westfall e Scott (2010). Os autores apresentam uma nova maneira de aplicar a técnica desenvolvida a partir do modelo base de Valentine e Gregoire (2001), em que: 1) Os pontos de união dos segmentos serão estimados a partir dos dados e não pela altura da base da copa; 2) A expressão original foi reformulada para habilitar o uso da altura relativa e facilitar as estimativas dos pontos de união; 3) A função do interruptor $S_6(h_i)$ do modelo base foi modificada e; 4) A variável dependente sugerida é o diâmetro ao quadrado (d_i^2) ao invés da área seccional. O modelo que considera apenas efeitos fixos foi assim proposto:

$$d_i^2 = dap^2 \left(\frac{1,37/H}{\gamma_1} \right)^\psi \left(\frac{1-z}{1-\gamma_1} \right)^{\alpha_1 + S_1} \left(\frac{1-z}{1-\gamma_2} \right)^{\alpha_2 S_2} + \varepsilon_i; \quad S_1 = \frac{\theta_1}{1 + (z/\theta_2)^\lambda}; \quad S_2 = \frac{(z/\beta_1)^{\beta_2 x}}{1 + (z/\beta_1)^{\beta_2 x}} \quad (5.43)$$

em que: $z = h_i/H$, $x = dap/H$. Os parâmetros γ_1 e γ_2 servem para estimar o ponto de união, em substituição a expressão $H - 1,37$ do modelo base. Os pontos de união deverão assumir valores no domínio $[0,1]$ ($0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$). O termo $[(1,37/H)/\gamma_1]^\psi$ foi introduzido para detectar diferenças entre o ponto de união estimado e a altura relativa onde o dap foi medido. Quando γ_1 é maior que $1,37/H$, o valor de d^2 no ponto de união γ_1 é menor que o dap^2 . Portanto, este termo multiplicado pelo dap^2 fornece ao modelo um caráter mais conservador, mantendo sempre d^2 menor que dap^2 . O inverso também é verdadeiro, ou seja, quando γ_1 é menor que $1,37/H$, o valor de d^2 no ponto de união γ_1 é maior que o dap^2 , e o multiplicador resulta em estimativas de d^2 maiores que dap^2 . O termo x na expressão de S_2 mostra-se interessante por habilitar o modelo a incluir outras co-variáveis, aparentemente adimensionais.