Universidade de São Paulo

Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Distribuições em série de potências modificadas inflacionadas e distribuição Weibull binomial negativa

Cristiane Rodrigues

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba

2011

Cristiane Rodrigues

Bacharel em Matemática

Distribuições em série de potências modificadas inflacionadas e distribuição Weibull binomial negativa

Orientadora:

Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ **CLARICE GARCIA BORGES DEMÉTRIO**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP

Rodrigues, Cristiane
Distribuições em série de potências modificadas inflacionadas e distribuição Weibull binomial negativa / Cristiane Rodrigues. - - Piracicaba, 2011.
109 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2011.
Bibliografia.

1. Distribuição binomial 2. Distribuição de Poisson 3. Distribuições (Probabilidade) 4. Estatística 5. Verossimilhança I. Título

CDD 519.532
R696d

Dedicatória

À ***Deus***

Aos meus pais,

Joâo José Rodrigues e Sonia Aparecida Vitti Rodrigues, *pelo exemplo de vida que foram, por sempre acreditarem em mim e por muitas vezes renunciarem aos próprios sonhos para que eu pudesse realizar o meu.*

”A satisfação reside no esforço, não no resultado obtido.
O esforço total é a plena vitória.”
(Mohandas Gandhi)

“ Algumas pessoas significam mais do que palavras possam dizer,
pensamentos possam imaginar ou sentimentos possam expressar...
Saudades...”

AGRADECIMENTOS

A toda a minha família, em especial aos meus pais João José Rodrigues e Sonia Aparecida Vitti Rodrigues, o incentivo, a valorização de minhas decisões pessoais e profissionais, a ajuda em todos os momentos e a alegria de tê-los ao meu lado sempre.

Aos meu irmãos Fernando e Leandro (*in memorian*), a minha cunhada Thatiana, a minha prima Ana Paula e a minha amiga Maria Amélia, que de alguma forma contribuiram para que eu prossegui-se os meus estudos e pelo divertimento, alegria e tudo que passamos juntos durante nossas vidas.

Ao meu querido Northon, companheiro de vida, pelo amor, carinho, paciência e incentivo, por me apoiar e ter ficado ao meu lado em todos os momentos, felizes ou não. Obrigada.

À Prof^{a}. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, a compreensão, a paciência, a exigência, e, principalmente, a orientação na elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro, a idéia do trabalho, toda colaboração e as sugestões que contribuíram no meu crescimento e na minha formação acadêmica.

Ao Prof. Dr. Edwin Moisés Marcos Ortega, a colaboração dispensada ao trabalho.

À Profª Dra. Roseli Aparecida Leandro, pela formação.

Ao conselho do programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, as secretárias Solange de Assis Paes Sabadin e Luciane Brajão e aos técnicos em informática Jorge Alexandre Wiendl e Eduardo Bonilha, os auxílios permanentes.

À Elizabeth Mie Hashimoto, um agradecimento especial pela ajuda no desenvolvimento deste trabalho, pela amizade e pelos conselhos.

À Rodrigo Rosseto Pescim e Mariana Ragasi Urbano, pela ajuda.

Aos colegas de estudo do mestrado, a amizade, o companheirismo e a paciência, principalmente, dos amigos Glaucia, Lilian, Josiane, Adriana, Pedro, Everton.

Aos amigos da UNESP - Rio Claro, toda nossa história durante os anos de

graduação.

À CNPq pelo auxílio financeiro prestado.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO

Distribuições em série de potências modificadas inflacionadas e distribuição Weibull binomial negativa

Neste trabalho, alguns resultados, tais como, função geradora de momentos, relações de recorrência para os momentos e alguns teoremas da classe de distribuições em séries de potências modificadas (MPSD) proposta por Gupta (1974) e da classe de distribuições em séries de potências modificadas inflacionadas (IMPSD) tanto em um ponto diferente de zero como no ponto zero são apresentados. Uma aplicação do Modelo Poisson padrão, do modelo binomial negativo padrão e dos modelos inflacionados de zeros para dados de contagem, ZIP e ZINB, utilizando-se as técnicas dos MLG's, foi realizada para dois conjuntos de dados reais juntamente com o gráfico normal de probabilidade com envelopes simulados. Também foi proposta a distribuição Weibull binomial negativa (WNB) que é bastante flexível em análise de dados positivos e foram estudadas algumas de suas propriedades matemáticas. Esta é uma importante alternativa para os modelos Weibull e Weibull geométrica, sub-modelos da WNB. A demostração de que a densidade da distribuição Weibull binomial negativa pode ser expressa como uma mistura de densidades Weibull é apresentada. Fornecem-se, também, seus momentos, função geradora de momentos, gráficos da assimetria e curtose, expressões explícitas para os desvios médios, curvas de Bonferroni e Lorenz, função quantílica, confiabilidade e entropia, a densidade da estatística de ordem e expressões explícita para os momentos da estatística de ordem. O método de máxima verossimilhança é usado para estimar os parâmetros do modelo. A matriz de informação esperada é derivada. A utilidade da distribuição WNB está ilustrada na análise de dois conjuntos de dados reais.

Palavras-chave: Distribuição em série de potências modificadas inflacionadas; Modelos inflacionados de zero; Distribuição Weibull binomial negativa; Função geradora de momentos; Maxima verossimilhança

ABSTRACT

Inflated modified power serie distribution and Weibull negative binomial

In this paper, some result such as moments generating function, recurrence relations for moments and some theorems of the class of modified power series distributions (MPSD) proposed by Gupta (1974) and of the class of inflated modified power series distributions (IMPSD) both at a different point of zero as the zero point are presented. The standard Poisson model, the standard negative binomial model and zero inflated models for count data, ZIP and ZINB, using the techniques of the GLM's, were used to analyse two real data sets together with the normal plot with simulated envelopes. The new distribution Weibull negative binomial (WNB) was proposed. Some mathematical properties of the WNB distribution which is quite flexible in analyzing positive data were studied. It is an important alternative model to the Weibull, and Weibull geometric distributions as they are sub-models of WNB. We demonstrate that the WNB density can be expressed as a mixture of Weibull densities. We provide their moments, moment generating function, plots of the skewness and kurtosis, explicit expressions for the mean deviations, Bonferroni and Lorenz curves, quantile function, reliability and entropy, the density of order statistics and explicit expressions for the moments of order statistics. The method of maximum likelihood is used for estimating the model parameters. The expected information matrix is derived. The usefulness of the new distribution is illustrated in two analysis of real data sets.

Keywords: Inflated modified power series distribution; Zero inflated models; Weibull negative binomial distribution; Moment generating function; Maximum likelihood

1 INTRODUÇÃO

A estatística utiliza-se das teorias probabilísticas para explicar a frequência da ocorrência de eventos, tanto em estudos observacionais quanto em um experimento para modelar a aleatoriedade e a incerteza de forma a estimar ou possibilitar a previsão de fenômenos, conforme o caso, ou seja, tenta-se aprender mais sobre aquilo que se pode observar. Isto requer o planejamento das observações de forma a controlar a sua variabilidade (concepção do experimento), sumarização da coleção de observações, inferência estatística - obter um consenso sobre o que as observações dizem sobre o mundo que se observa. Dado que o objetivo da estatística é a produção da melhor informação possível a partir dos dados disponíveis, alguns autores sugerem que a estatística é um ramo da teoria da decisão.

Em estatística, uma distribuição de probabilidade descreve a chance que uma variável pode assumir ao longo de um espaço de valores. Ela é uma função cujo domínio são os valores da variável e cuja imagem são as probabilidades de a variável assumir cada valor do domínio. O conjunto imagem desse tipo de função está sempre restrito ao intervalo entre 0 e 1. Uma distribuição de probabilidade pode ser discreta ou contínua.

A distribuição discreta descreve quantidades aleatórias (dados de interesse) que podem assumir valores particulares e os valores são finitos. Por exemplo, o número de ocorrências de tempestades com granizo.

A distribuição contínua representa quantidades aleatórias contínuas que podem tomar um número infinito de valores. Por exemplo, a temperatura, a pressão, a precipitação ou qualquer elemento medido numa escala contínua é uma variável aleatória contínua.

A distribuição de probabilidades pode ser representada por um histograma de probabilidades, similar ao histograma de frequências em que a escala vertical representa probabilidades, em lugar das frequências relativas.

As distribuições de probabilidade podem ser usadas para calcular intervalos de confiança para os parâmetros, calcular regiões críticas para os testes de hipótese, estudos de simulação com números aleatórios, etc.

A existência de diversas distribuições de probabilidade, cada uma com suas características, facilita a sumarização dos dados e fornece análises mais precisas.

Nesse trabalho, tem-se como objetivo revisar a classe de distribuições em série de

potências modificadas (MPSD), a classe de distribuições em série de potências modificadas inflacionadas (IMPSD), a classe de distribuições em série de potências modificadas inflacionadas no ponto zero e introduzir uma nova distribuição de probabilidade, a distribuição Weibull binomial negativa (WNB). Dois conjuntos de dados reais serão usados como aplicações de algumas distribuições pertencentes a classe IMPSD no ponto zero. Dois conjuntos de dados reais serão usados como aplicações da distribuição WNB para mostrar sua superioridade em relação aos submodelos Weibull e Weibull geometrica (WG).

Referências

Distribuição de probabilidade. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: pt.wikipedia.org/wiki/Distribuição_de_probabilidade. Acesso em: 22 mar. 2011.

_____. Disponível em: www.dca.iag.usp.br/www/material/morales/Climatologia1/Aula_4_DistribuiçõesdeProbabilidade_08-08-2010.pdf. Acesso em: 22 mar. 2011.

Estatística. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: pt.wikipedia.org/wiki/Estatística. Acesso em: 15 mar. 2011.

NIST/SEMATECH. **Statistical Methods - Probability Distributions**. 2010. Disponível em: www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda36.htm. Acesso em: 22 mar. 2011.

2 DISTRIBUIÇÕES EM SÉRIE DE POTÊNCIAS MODIFICADAS INFLACIONADAS

Resumo

Neste trabalho, alguns resultados, tais como, função geradora de momentos, relações de recorrência para os momentos, estimação e alguns teoremas da classe de distribuições em séries de potências modificadas (MPSD) proposta por Gupta (1974) são apresentados. Importantes distribuições desta classe são binomial, binomial negativa, Poisson, Borel, Consul. A classe de distribuições em séries de potências modificadas inflacionadas (IMPSD) tanto em um ponto diferente de zero como no ponto zero são introduzidas juntamente com alguns resultados e propriedades. As distribuições Poisson inflacionada em zero (ZIP) e binomial negativa inflacionada em zero (ZINB) são exemplos de distribuição pertencentas a classe de IMPSD no ponto zero. Na prática, não é raro encontrar conjuntos de dados de contagem que apresentem uma alta freqüência de valores "zero", acima da freqüência esperada pelo modelo. Neste trabalho, será abordada uma aplicação do Modelo Poisson padrão, do modelo binomial negativo padrão e dos modelos inflacionados de zeros para dados de contagem, ZIP e ZINB, utilizando-se as técnicas dos MLG's para dois conjuntos de dados reais. Após a realização dos ajustes e escolha do melhor modelo por meio dos critérios de seleção: AIC, CAIC e BIC, uma análise gráfica para verificar a adequabilidade dos modelos é realizada utilizando o gráfico normal de probabilidade com envelope simulado.

Palavras-chave: Distribuições em série de potências modificadas inflacionadas; Modelos inflacionados de zero; Dados de contagem

Abstract

In this paper, some result such as moments generating function, recurrence relations for moments, estimation and some theorems of the class of modified power series distributions (MPSD) proposed by Gupta (1974) are presented. Important distributions in this class are binomial, negative binomial, Poisson, Borel, Consul. The class of inflated modified power series distributions (IMPSD) both at a different point of zero as the zero point are

introduced along with some results and properties. The zero-inflated Poisson (ZIP) and zero inflated negative binomial (ZINB) are examples of distributions belonging to the class IMPSD at the zero point. In practice, it is usual to find sets of count data showing a high frequency of values to zero, above the expected frequency by the model. This paper will show an application of the standard Poisson model, the standard negative binomial model and zero inflated models for count data, ZIP and ZINB, using the techniques of the GLM's for two real data set. After completion of the settings and choose the best model through the selection criteria: AIC, CAIC and BIC, a graphical analysis to check the suitability of the models is performed using normal plots with simulated envelopes.

Keywords: Inflated modified power series distribution; Zero inflated models; Count data

2.1 Introdução

Uma ampla classe de variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades discretas pode ser derivada de determinadas séries de potências.

Seja $g(\theta)$ uma função positiva que admite uma expansão em série de potências, com coeficientes não negativos para valores não negativos de θ menores do que o raio de convergência da série de potências:

$$g(\theta) = \sum_{z=0}^{\infty} a_z \theta^z.$$

Noack (1950) definiu uma variável aleatória Z tomando valores z inteiros não negativos com probabilidade

$$\mathrm{P}(Z = z) = \frac{a_z \theta^z}{g(\theta)} \qquad z = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

e chamou a distribuição de probabilidade discreta (1) de uma distribuição em série de potências (PSD).

Patil (1962) notou que o conjunto de valores que a variável aletória Z pode assumir não precisa necessariamente ser o conjunto de todos os inteiros não negativos $N = 0, 1, 2, ...$ Seja T um subconjunto arbitrário não nulo de N. Define-se a função geradora

$$f(\theta) = \sum_{x \epsilon T} a_x \theta^x$$

com $a_x > 0$; $\theta \geq 0$ e tal que $f(\theta)$ é positiva, finita e diferenciável. Desse modo, pode-se definir a variável aleatória X tomando valores inteiros não negativos em T com probabilidade

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{a_x \theta^x}{f(\theta)} \qquad x \epsilon T \subset N. \tag{2}$$

A distribuição (2) foi chamada por Patil (1962) uma distribuição em série de potências generalizadas (*GPSD*). Pode-se notar que a *GPSD* reduz-se a *PSD* quando T é o conjunto de todos os inteiros não negativos.

Gupta (1974) definiu uma nova classe de distribuições, a distribuição em série de potências modificadas (*MPSD*), que é uma generalização da família de *GPSD*. Substituindo θ^x em (2) por $[\phi(\theta)]^x$ e assumindo que $f(\theta)$ é uma função analítica e positiva ou que $h(\theta)$ possui uma expansão em série de potência em torno de $\phi(\theta)$, em que $\phi(\theta)$ é outra função analítica e positiva, tem-se a função densidade de probabilidade de uma *MPSD* dada por:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{a_x [\phi(\theta)]^x}{h(\theta)}, \qquad x \epsilon T \subset N. \tag{3}$$

A função de série correspondente é

$$h(\theta) = \sum_{x \epsilon T} a_x [\phi(\theta)]^x. \tag{4}$$

Além disso, a classe de *MPSD* é exponencial linear, assim como a classe de *GPSD*, e pode ser escrita na forma

$$\mathrm{P}(X = x) = \exp\{x \log[\phi(\theta)] - \log[h(\theta)] + \log[a_x]\}.$$

Essa classe de *MPSD* inclui várias distribuições importantes, tais como, binomial, binomial negativa, binomial negativa generalizada, Poisson, Poisson generalizada, Borel, Consul, Borel-Tanner, entre outras.

Em algumas aplicações, tem-se que considerar uma população mista composta por dois grupos de indivíduos. Os indivíduos do primeiro grupo seguem uma distribuição simples, enquanto os do segundo grupo são observados com frequência significativamente maior do que pode ser esperado com base na distribuição simples. Esse fenômeno aleatório é bem descrito por uma distribuição de probabilidade inflacionada. Pandey (1964-65) descreveu uma situação com uma distribuição de Poisson inflacionada na qual lidava com os número de flores

nas plantas de *Primula veris*. Ele revelou que o número excessivo de plantas com oito flores implica na utilização da distribuição de Poisson inflacionada no ponto oito (poder-se-ia ter qualquer outro valor).

Considerar-se-ão duas máquinas, uma das quais (máquina I) é perfeita e não produz qualquer item defeituoso e outra (máquina II) que produz itens defeituosos de acordo com uma distribuição de Poisson. Observam-se os dados da produção conjunta das duas máquinas sem saber se o item foi produzido pela máquina I ou pela máquina II. Nesse caso, o número observado de zeros (item defeituoso) está inflacionado.

Yip (1988) descreveu uma situação utilizando uma distribuição de Poisson inflacionada para lidar com o número de insetos por folha. Lambert (1992) considerou modelos de regressão de Poisson inflacionados de zero, no qual ela diz: "Uma interpretação é que, alterações não observadas no meio ambiente causam o processo de mover-se aleatoriamente para trás e para frente entre um estado perfeito no qual os defeitos são extremamente raros e um estado imperfeito no qual os defeitos são possíveis, mas não inevitáveis ".

Pode-se também encontrar a distribuição inflacionada (qualquer ponto diferente de zero) no seguinte problema de filas. Sejam duas filas, uma das quais é infinitamente longa (fila A) e outra (fila B) começando com um cliente. Observa-se o número conjunto de clientes atendidos em um período agitado dessas duas filas, sem saber qual deles é servido. Nesse caso, o número observado de clientes atendidos em um período agitado é inflacionado no ponto a ($a \neq 0$). Esse exemplo mostra que as investigações das distribuições discretas inflacionadas no ponto s, não apenas igual a 0, parece ser útil.

Gupta, Gupta e Tripathi (1995) consideraram distribuições inflacionadas no ponto zero. Murat e Szynal (1998) estenderam os resultados de Gupta, Gupta e Tripathi (1995) para as distribuições discretas inflacionadas em qualquer ponto s.

2.2 Distribuições em Série de Potências Modificadas (*MPSD*)

2.2.1 Média e Variância

Diferenciando a expressão (4) com relação a θ,

$$h'(\theta) = \sum_{x \epsilon T} a_x x[\phi(\theta)]^{x-1}\phi'(\theta) = \frac{h(\theta)\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\mathrm{E}[X].$$

Portanto,

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \frac{h'(\theta)\phi(\theta)}{h(\theta)\phi'(\theta)}.$$

Então,

$$\mu h(\theta) = \sum_{x\epsilon T} x a_x (\phi(\theta))^x. \tag{5}$$

Diferenciando a expressão (5) com relação a θ, tem-se

$$\frac{d\mu}{d\theta} h(\theta) + \mu h'(\theta) = \sum_{x\epsilon T} \frac{x^2 a_x [\phi(\theta)]^x \phi'(\theta)}{\phi(\theta)} = \frac{\mathrm{E}[X^2] h(\theta)\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}.$$

Assim, $\mathrm{E}[X^2] = \dfrac{d\mu}{d\theta}\dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)} + \mu \dfrac{h'(\theta)\phi(\theta)}{h(\theta)\phi'(\theta)} = \dfrac{d\mu}{d\theta}\dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)} + \mu^2$. Portanto,

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mu^2 = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu}{d\theta}.$$

2.2.2 Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória (v.a.) tendo uma *MPSD*. Pode-se escrever sua função geradora de momentos na forma:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}[e^{tX}] = \sum_{x\epsilon T} \frac{[(e^t - 1 + 1)^x] a_x [\phi(\theta)]^x}{h(\theta)} \\ &= \sum_{x} \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} \frac{a_x [\phi(\theta)]^x (e^t - 1)^{x-i}}{h(\theta)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+i}{i} \frac{y! a_{y+i} (\phi(\theta))^{y+i} (e^t - 1)^y}{h(\theta) y!}. \end{aligned}$$

Expandindo $(e^t - 1)^y$ como uma série de potências em t, Gupta e Singh (1981) obtiveram a função geradora de momentos para a *MPSD* como

$$M_X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{y+i}{i} \frac{y! a_{y+i} [\phi(\theta)]^{y+i} S(s,y)}{h(\theta) y!},$$

em que $S(s,y) = \dfrac{1}{y!} \displaystyle\sum_{r=0}^{y} (-1)^{y-r} \binom{y}{r} r^s$, $y = 0, 1, 2, ..., s$, é o número de Stirling de segunda espécie.

2.2.3 Relações de Recorrência para os Momentos

2.2.3.1 Momentos não Centrais

Por definição

$$\mu'_r = \frac{1}{h(\theta)} \sum_{x \epsilon T} x^r a_x [\phi(\theta)]^x \tag{6}$$

é o r-ésimo momento não central de uma *MPSD*.

Diferenciando a equação (6) com relação a θ, obtém-se

$$\frac{d\mu'_r}{d\theta} = \frac{1}{h(\theta)} \sum_{x \epsilon T} x^r a_x x [\phi(\theta)]^{x-1} \phi'(\theta) - \frac{h'(\theta)}{h^2(\theta)} \sum_{x \epsilon T} x^r a_x [\phi(\theta)]^x$$

ou

$$\begin{aligned} \phi(\theta) \frac{d\mu'_r}{d\theta} &= \phi'(\theta)\mu'_{r+1} - \phi'(\theta) \frac{\phi(\theta)h'(\theta)}{\phi'(\theta)h(\theta)} \mu'_r \\ &= \phi'(\theta)\mu'_{r+1} - \phi'(\theta)\mu'_r \mu'_1. \end{aligned}$$

Portanto, a relação de recorrência entre os momentos não centrais de uma *MPSD* é dada por:

$$\mu'_{r+1} = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)} \frac{d\mu'_r}{d\theta} + \mu'_r \mu'_1 \qquad r = 0, 1, 2, ... \quad . \tag{7}$$

2.2.3.2 Momentos Centrais

Tem-se que

$$\mu_r = \frac{1}{h(\theta)} \sum_{x \epsilon T} (x - \mu'_1)^r a_x (\phi(\theta))^x \tag{8}$$

é o r-ésimo momento central de uma *MPSD*.

Diferenciando a equação (8) com relação a θ, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_r}{d\theta} &= \frac{1}{h(\theta)} \sum_{x \epsilon T} (x - \mu'_1)^r a_x x [\phi(\theta)]^{x-1} \phi'(\theta) \\ &- \frac{d\mu'_1}{d\theta} \frac{1}{h(\theta)} \sum_{x \epsilon T} r (x - \mu'_1)^{r-1} a_x [\phi(\theta)]^x \\ &- \frac{h'(\theta)}{h^2(\theta)} \sum_{x \epsilon T} (x - \mu'_1)^r a_x [\phi(\theta)]^x \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \phi(\theta) \frac{d\mu_r}{d\theta} &= \frac{\phi'(\theta)}{h(\theta)} \sum_x \left\{ (x - \mu'_1)^r a_x [\phi(\theta)]^x \left[x - \frac{\phi(\theta)h'(\theta)}{\phi'(\theta)h(\theta)} \right] \right\} - r\phi(\theta) \frac{d\mu'_1}{d\theta} \mu_{r-1} \\ &= \phi'(\theta)\mu_{r+1} - r\phi(\theta)\mu_{r-1} \frac{d\mu'_1}{d\theta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_{r+1} = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\Big[\frac{d\mu_r}{d\theta} + r\frac{d\mu_1'}{d\theta}\mu_{r-1}\Big]. \tag{9}$$

Observando que $\mu_1 = 0$ e $\mu_0 = 1$, para $r = 1$ em (9) obtém-se

$$\mu_2 = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_1'}{d\theta}.$$

Logo, a relação de recorrência entre os momentos centrais de uma *MPSD* é dada por

$$\mu_{r+1} = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_r}{d\theta} + r\mu_2\mu_{r-1} \qquad r = 1, 2, 3, ... \quad .$$

2.2.3.3 Momentos Fatoriais

$$\mathrm{E}[X^{[r]}] = \mu^{[r]} = \frac{1}{h(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x \tag{10}$$

é o r-ésimo momento fatorial de uma *MPSD*.

Diferenciando a equação (10) com relação a θ, obtém-se

$$\frac{d\mu^{[r]}}{d\theta} = \frac{1}{h(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x x[\phi(\theta)]^{x-1}\phi'(\theta) - \frac{h'(\theta)}{h^2(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x$$

Lembrando que $x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)$, obtém-se $x^{[r]}x = x^{[r+1]} + rx^{[r]}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu^{[r]}}{d\theta} &= \frac{1}{h(\theta)}\sum_{x\epsilon T}[x^{[r+1]} + rx^{[r]}]a_x[\phi(\theta)]^{x-1}\phi'(\theta) - \frac{h'(\theta)}{h^2(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x \\
&= \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)h(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r+1]}a_x[\phi(\theta)]^x + r\frac{\phi'(\theta)}{h(\theta)\phi(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x - \frac{h'(\theta)}{h^2(\theta)}\sum_{x\epsilon T} x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x \\
&= \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\mu^{[r+1]} + \Big[r\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} - \frac{h'(\theta)}{h(\theta)}\Big]\mu^{[r]}.
\end{aligned}$$

Desse modo, a relação de recorrência entre os momentos fatoriais de uma *MPSD* é dada por

$$\begin{aligned}
\mu^{[r+1]} &= \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_{[r]}}{d\theta} - \Big(r - \frac{\phi(\theta)h'(\theta)}{\phi'(\theta)h(\theta)}\Big)\mu^{[r]} \\
&= \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_{[r]}}{d\theta} - (r - \mu^{[1]})\mu^{[r]} \\
&= \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_{[r]}}{d\theta} + \mu^{[r]}\mu^{[1]} - r\mu^{[r]} \qquad r = 1, 2, 3, ... \quad .
\end{aligned}$$

2.2.3.4 Momentos Negativos

Sejam X uma variável aleatória com distribuição $MPSD$, $\phi(0) = 0$ e k um número não negativo tal que $k + x \neq 0$ para $x \epsilon T$. O r-ésimo momento negativo de X é dado por

$$M(r,k) = \mathrm{E}[(x+k)^{-r}] = \sum_{x \epsilon T} \frac{a_x[\phi(\theta)]^x}{(x+k)^r h(\theta)}. \tag{11}$$

Diferenciando (11), com relação a θ, obtém-se,

$$\begin{aligned} M'(r,k) &= \sum_{x \epsilon T} \frac{a_x}{(x+k)^r} \frac{[\phi(\theta)]^x}{h(\theta)} \Big[x \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} - \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} \Big] \\ &= \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} M(r-1,k) - \Big[\frac{k\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} + \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} \Big] M(r,k). \end{aligned} \tag{12}$$

A relação (12) fornece uma equação diferencial linear simples

$$M'(r,k) + M(r,k) \Big[\frac{k\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} + \frac{h'(\theta)}{h(\theta)} \Big] = \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} M(r-1,k). \tag{13}$$

Multiplicando (13) pelo fator $h(\theta)[\phi(\theta)]^k$ e integrando em relação a θ, de 0 a θ, Kumar e Consul (1979) obtiveram a relação de recorrência entre momentos negativos sucessivos dada por

$$M(r,k) = \frac{1}{h(\theta)[\phi(\theta)]^k} \int_0^\theta M(r-1,k)\phi'(\theta)h(\theta)[\phi(\theta)]^{k-1} \quad d\theta, \tag{14}$$

em que $r = 1, 2, 3, ...$, e $M(0,k) = \mathrm{E}[(X+k)^0] = 1$.

De (14) obtém-se,

$$M(1,k) = \mathrm{E}[(X+k)^{-1}] = \frac{\int_0^\theta \phi'(\theta)h(\theta)[\phi(\theta)]^{k-1} \quad d\theta}{h(\theta)[\phi(\theta)]^k}.$$

2.2.3.5 Momentos Incompletos

Seja X uma variável aleatória definida sobre um conjunto de números reais com função de distribuição $F(\cdot)$. O r-ésimo momento incompleto de X é

$$\mu'_r(t) = \int_{-\infty}^t x^r dF(x).$$

O r-ésimo momento incompleto para uma $MPSD$ é dado por

$$\mu'_r(t) = \sum_{x=1}^t \frac{x^r a_x[\phi(\theta)]^x}{h(\theta)}. \tag{15}$$

Diferenciando ambos os lados de (15) com relação a θ, Tripathi, Gupta e Gupta (1986) obtiveram uma relação de recorrência entre os momentos incompletos

$$\mu'_{r+1}(t) = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu'_r}{d\theta} + \mu'_1\mu'_r(t).$$

O r-ésimo momento fatorial incompleto de uma $MPSD$ é

$$\mu^{[r]}(t) = \sum_{x=1}^{t} \frac{x^{[r]}a_x[\phi(\theta)]^x}{h(\theta)} \quad t \geq r \quad e \quad r = 1, 2, 3, ... \quad . \tag{16}$$

Diferenciando ambos os lados de (16) com relação a θ, Tripathi, Gupta e Gupta (1986) obtiveram a relação de recorrência entre momentos fatoriais incompletos para uma $MPSD$

$$\mu^{[r+1]}(t) = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu'^{[r]}(t)}{d\theta} + \mu^{[r]}(t)(\mu - r), \quad t \geq r \quad \text{e} \quad r = 1, 2, 3, ... \quad .$$

2.2.4 Relação entre Momentos não centrais e Cumulantes

Noack (1950) provou que existe uma relação geral entre os momentos não centrais e os cumulantes κ_j, $j = 1, 2, 3, ...$, para qualquer distribuição de probabilidade discreta, dada por

$$\mu'_r = \sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \mu'_{r-j}\kappa_j \qquad r = 1, 2, 3, ... \quad . \tag{17}$$

Diferenciando (17) com relação a θ, vem

$$\frac{d\mu'_r}{d\theta} = \sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \Big(\frac{d\mu'_{r-j}}{d\theta}\kappa_j + \mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}\Big). \tag{18}$$

Combinando (7), (17) e (18), obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r+1} \binom{r}{j-1} \mu'_{r+1-j}\kappa_j &= \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\Big\{\sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \Big[\frac{d\mu'_{r-j}}{d\theta}\kappa_j + \mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}\Big]\Big\} \\
&+ \Big[\sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \mu'_{r-j}\kappa_j\Big]\mu'_1 \\
&= \sum_{j=1}^{r} \binom{r-1}{j-1} \Big\{\Big[\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu'_{r-j}}{d\theta} + \mu'_1\mu'_{r-j}\Big]\kappa_j + \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}\Big\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\kappa_{r+1} &= \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\sum_{j=1}^{r}\binom{r-1}{j-1}\mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}\\ &+ \sum_{j=1}^{r}\Big[\binom{r-1}{j-1}\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu'_{r-j}}{d\theta}+\binom{r-1}{j-1}\mu'_1\mu'_{r-j}-\binom{r}{j-1}\mu'_{r+1-j}\Big]\kappa_j.\end{aligned}$$

Fazendo uso, novamente, da equação (7) e simplificando a expressão resultante, Gupta (1974) obteve

$$\kappa_{r+1} = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\sum_{j=1}^{r}\binom{r-1}{j-1}\mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}\Big[\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j-1}-\sum_{j=1}^{r}\binom{r-1}{j-1}\Big]\mu'_{r+1-j}\kappa_j.$$

Portanto, a relação entre momentos não centrais e cumulantes de uma *MPSD* é dada por

$$\kappa_{r+1} = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\sum_{j=1}^{r}\binom{r-1}{j-1}\mu'_{r-j}\frac{d\kappa_j}{d\theta}-\sum_{j=2}^{r}\binom{r-1}{j-2}\mu'_{r+1-j}\kappa_j.$$

2.2.5 Estimação

A classe *MPSD* como definida em (3) pode ter muitos parâmetros desconhecidos, além do parâmetro θ, mas, neste trabalho, apenas o parâmetro θ é considerado desconhecido. Portanto, devem ser encontrados estimadores para θ.

2.2.5.1 Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV)

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da classe *MPSD* (3) e seja $\bar{x}$ a média amostral. A função de verossimilhança $L = L(\theta)$ é expressa como

$$L = \prod_{i=1}^{n}\Big[\frac{a_{x_i}[\phi(\theta)]^{x_i}}{h(\theta)}\Big].$$

Diferenciando o logaritmo da função de verossimilhança, $\log(L)$, em relação a θ, obtém-se

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{d\theta} = n\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}[\bar{x}-\mu(\theta)] = 0,$$

que é uma equação não linear e tem solução

$$\bar{x} = \mu(\theta). \tag{19}$$

Se $\mu(\theta)$ for inversível, o EMV de θ, obtido pela inversão de (19), é igual a

$$\hat{\theta} = \mu^{-1}(\theta).$$

Se $\mu(\theta)$ não for inversível, pode-se resolver (19) iterativamente utilizando o método de Newton-Raphson. O viés, $b(\hat{\theta})$, do EMV do parâmetro θ (HALDANE; SMITH, 1956) é expresso como

$$b(\hat{\theta}) = -\frac{1}{2n}\frac{B_1}{A_1^2}, \tag{20}$$

em que

$$A_1 = \sum_{x\epsilon T}\frac{1}{\mathrm{P}(X=x)}\Big(\frac{d\mathrm{P}(X=x)}{d\theta}\Big)^2 \quad \text{e} \quad B1 = \sum_{x\epsilon T}\frac{1}{\mathrm{P}(X=x)}\Big(\frac{d\mathrm{P}(X=x)}{d\theta}\Big)\Big(\frac{d^2\mathrm{P}(X=x)}{d\theta^2}\Big).$$

Para a classe de *MPSD*, tem-se

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{x\epsilon T}\frac{1}{\mathrm{P}(X=x)}\Big[\frac{d}{d\theta}\mathrm{P}(X=x)\Big]^2 \\ &= \sum_{x\epsilon T}\frac{1}{\mathrm{P}(X=x)}\Big[x\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} - \frac{h'(\theta)}{h(\theta)}\Big]^2 \\ &= \Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^2\sum_{x\epsilon T}(x-\mu_1')^2\mathrm{P}(X=x) \\ &= \Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^2\mu_2. \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{x\epsilon T}\frac{1}{\mathrm{P}(X=x)}\Big[\frac{d}{d\theta}\mathrm{P}(X=x)\Big]\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}\mathrm{P}(X=x)\Big] \\ &= \sum_{x\epsilon T}\Big[x\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} - \frac{h'(\theta)}{h(\theta)}\Big]^3\mathrm{P}(X=x) \\ &+ \sum_{x\epsilon T}\Big[x\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)} - \frac{h'(\theta)}{h(\theta)}\Big]\Big\{x\frac{\phi(\theta)\phi''(\theta)-[\phi'(\theta)]^2}{[\phi(\theta)]^2} - \frac{h(\theta)h''(\theta)-[h'(\theta)]^2}{[h(\theta)]^2}\Big\}\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_{x\epsilon T}\Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^3(x-\mu_1')^3\mathrm{P}(X=x) \\ &+ \sum_{x\epsilon T}\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}(x-\mu_1')x\frac{\phi(\theta)\phi''(\theta)-[\phi'(\theta)]^2}{[\phi(\theta)]^2}\mathrm{P}(X=x) \\ &= \Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^3\mu_3 + \Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^3\sum_{x\epsilon T}(x-\mu_1')^2\mathrm{P}(X=x)\frac{\phi(\theta)\phi''(\theta)-[\phi'(\theta)]^2}{[\phi(\theta)]^2} \\ &= \Big[\frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)}\Big]^3\Big\{\mu_3 + \frac{\phi(\theta)\phi''(\theta)-[\phi'(\theta)]^2}{[\phi(\theta)]^2}\mu_2\Big\}, \end{aligned} \tag{22}$$

em que $\mu_3 = \dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\dfrac{d\mu_2}{d\theta}$.

Substituindo (21) e (22) em (20), o viés de $\hat{\theta}$ (CONSUL; FAMOYE, 2006) é

$$b(\hat{\theta}) = -\frac{1}{n\mu_2^2}\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\Big\{\mu_3 + \frac{\phi(\theta)\phi''(\theta) - [\phi'(\theta)]^2}{[\phi'(\theta)]^2}\mu_2\Big\}.$$

O EMV $\hat{\theta}$ é não viesado quando $b(\hat{\theta}) = 0$, isto é, $B_1 = 0$, ou seja

$$\mu_3 = \frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\mu_2}{d\theta} = -\frac{\phi(\theta)\phi''(\theta) - [\phi'(\theta)]^2}{[\phi'(\theta)]^2}\mu_2. \tag{23}$$

Da equação (23) vem

$$\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{d\theta} = -\frac{\phi''(\theta)}{\phi'(\theta)} + \frac{\phi'(\theta)}{\phi(\theta)},$$

e integrando com relação a θ, obtém-se

$$\log\mu_2 = -\log(\phi'(\theta)) + \log(\phi(\theta)) + \log(k) = \log\Big(\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}k\Big).$$

Portanto,

$$\mu_2 = k\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}, \tag{24}$$

em que k é uma constante que não depende de θ.

Uma condição necessária e suficiente para o EMV $\hat{\theta}$ de θ ser não viesado é que (24) seja válida.

A variância assintótica de $\hat{\theta}$ é dada por Gupta (1975)

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{\dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}}{n\dfrac{d\mu}{d\theta}}.$$

Seja $\psi = \omega(\theta)$ uma função um a um de θ, então o EMV de ψ é

$$\hat{\psi} = \omega(\hat{\theta}).$$

Gupta (1975) obteve o viés e a variância assintótica de $\hat{\psi}$, dados, respectivamente por

$$b(\hat{\psi}) = -\frac{1}{2n\mu_2^2}\frac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\frac{d\psi}{d\theta}\left\{\mu_3 + \mu_2\left[1 - \frac{\phi(\theta)\phi''(\theta)}{[\phi'(\theta)]^2} + \frac{\dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\dfrac{d^2\psi}{d\theta^2}}{\dfrac{d\psi}{d\theta}}\right]\right\}$$

e

$$\mathrm{Var}(\hat{\psi}) = \frac{\dfrac{\phi(\theta)}{\phi'(\theta)}\left(\dfrac{d\mu}{d\theta}\right)^2}{(n\mu_2)}$$

2.2.5.2 Estimador Não Viesado de Variância Mínima

Sejam $I^r = \{r, r+1, r+2, ...\}$, em que r é um inteiro não negativo e T tal que $T \subset I^0$, isto é, T é um subconjunto dos inteiros não negativos.

Seja também, $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n, com $X_i \sim$ *MPSD*. Então $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística suficiente e completa para θ em (3) e a distribuição de Y (KUMAR; CONSUL, 1980) é, igualmente, uma *MPSD* dada por

$$\mathrm{P}(Y = y) = \frac{b(n, y)[\phi(\theta)]^y}{[h(\theta)]^n}, \quad y \epsilon D_n,$$

em que

$$D_n = [y | y = \sum x_i, x_i \epsilon T, i = 1, 2, ..., n] \quad \text{e} \quad b(n, y) = \sum a_{x_1} a_{x_2} ... a_{x_n}. \tag{25}$$

O somatório se estende sobre todas as n-uplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de inteiros $x_i \epsilon T$ sobre a condição de que $\sum_{i=1}^{n} x_i = y$.

Se $l(\theta)$ é uma função de θ dada e existe algum inteiro positivo n tal que

$$l(\theta)[h(\theta)]^n = \sum_{i \epsilon E_n} c(n, i)[\phi(\theta)]i,$$

em que $c(n, i) \neq 0$ para $i \epsilon E_n \subset I^0$, então escreve-se $l(\theta) \epsilon L(n, \phi(\theta), h(\theta))$.

Kumar e Consul (1980) dão uma condição necessária e suficiente para a função $l(\theta)$ admitir um único estimador não viesado de variância mínima.

Teorema 1 *A função $l(\theta)$ do parâmetro θ na classe de MPSD (3) tem um estimador não viesado de variância mínima se e somente se existe um inteiro positivo n tal que $l(\theta) \epsilon L(n, \phi(\theta), h(\theta))$ e $E_n \subset D_n$, em que D_n é definido em (25) e $E_n \subset I^0$, e o estimador não viesado de variância mínima $f(y)$ de $l(\theta)$, quando estimável, é dado por*

$$f(y) = \begin{cases} c(n, y)/b(n, y), & y \in E_n, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Estimadores não viesados de variância mínima de θ e algumas funções $l(\theta)$ foram obtidas por Gupta (1977) e por Kumar e Consul (1980) para alguns membros da classe *MPSD*. Gupta e Singh (1982) obtiveram o estimador não viesado de variância mínima para a função de probabilidade em (3) como

$$\mathrm{P}(X = x|Y = \sum^{n} x_i = y) = \begin{cases} a_x b(n-1, y-x)/b(n,y), & \text{y } \epsilon \text{ (n-1)[T]+x,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.2.5.3 Estimação Intervalar

Famoye e Consul (1989) consideraram o problema da estimação intervalar para θ na classe *MPSD*. Intervalos de confiança (θ_l, θ_u) para θ em pequenas amostras são obtidos resolvendo as seguintes equações

$$\sum_{x=y}^{\infty} \frac{a_x[\phi(\theta)]^x}{[h(\theta_l)]^n} = \frac{1}{2}\alpha \tag{26}$$

e

$$\sum_{x=0}^{y} \frac{a_x[\phi(\theta)]^x}{[h(\theta_u)]^n} = \frac{1}{2}\alpha, \tag{27}$$

em que $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Quando as funções $\phi(\theta)$, $h(\theta)$ e a_x são conhecidas, as equações (26) e (27) podem ser resolvidas numericamente usando o método iterativo de Newton-Raphson.

Intervalos de confiança para θ em grandes amostras podem ser obtidos usando-se a estatística

$$W = (\bar{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma,$$

que tem distribuição que converge, estocasticamente, para a distribuição normal com média zero e variância unitária. O limite superior θ_u e o limite inferior θ_l são as soluções das equações

$$\bar{x} - \frac{\phi(\theta)h'(\theta)}{\phi'(\theta)h(\theta)} \pm z_{\alpha/2}\Big[\frac{\phi(\theta)}{n\phi'(\theta)}\frac{d\mu}{d\theta}\Big]^{1/2} = 0, \tag{28}$$

em que $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico para a tabela de probabilidade da normal.

O resultado em (28) é baseado em uma estatística única $\bar{X}$. Famoye e Consul (1989) também fornecem um intervalo de confiança para θ baseado em duas estatísticas, a média amostral $\bar{X}$ e a variância amostral S^2. Um intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ bilateral para θ em grandes amostras é obtido por

$$1 - \alpha = \mathrm{P}\Big\{\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \frac{\phi(\theta)h'(\theta)}{\phi'(\theta)h(\theta)} < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big\}. \tag{29}$$

Uma vantagem de (29) sobre (28) é que a desigualdade em (29) pode frequentemente ser resolvida algebricamente para θ e o resultado pode, portanto, ser expresso na forma

$$1 - \alpha = \mathrm{P}(\theta_l < \theta < \theta_u),$$

em que (θ_l, θ_u) é um intervalo de confiança $100(1-\alpha)\%$ para θ.

2.2.6 Algumas Propriedades

Teorema 2 *Uma condição necessária e suficiente para a variância de uma variável aleatória tendo MPSD ser igual à média para todos os valores de θ é*

$$h(\theta) = \exp\left\{k\theta + d + \int \log[\phi'(\theta)] \quad d\theta\right\},$$

em que $k > o$ e k e d são constantes arbitrárias.

Teorema 3 *Uma MPSD com $h(0) = 1$ tem a média igual à variância se e somente se esta é Poisson.*

Teorema 4 *Uma MPSD tem a variância maior do que a média se e somente se*

$$h(\theta) = \exp\left\{P(\theta) + R\theta + Q + \int \log[\phi'(\theta)] \quad d\theta\right\},$$

em que Q e R são constantes arbitrárias e $P(\theta)$ juntamente com suas derivadas é uma função crescente monótona e positiva de θ.

Teorema 5 *Uma MPSD tem a variância menor do que a média se e somente se*

$$h(\theta) = \exp\left\{A(\theta) + B\theta + C + \int \log[\phi'(\theta)] \quad d\theta\right\},$$

em que B e C são constantes arbitrárias e $A(\theta)$ juntamente com suas derivadas são funções decrescentes monótonas de θ.

As provas dos teoremas 2 a 5 podem ser encontradas em Gupta (1974).

2.2.7 Algumas Distribuições Pertencentes à Classe *MPSD*

2.2.7.1 Poisson

A distribuição de Poisson foi descoberta por Siméon-Denis Poisson e publicada, conjuntamente com a sua teoria da probabilidade, em 1838 em "Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile" (Inquérito sobre a probabilidade em julgamentos sobre matérias criminais e civis). O trabalho concentrava-se em certas variáveis aleatórias N que representavam, entre outras coisas, o número de ocorrências discretas (por vezes chamadas de "chegadas") que ocorriam durante um intervalo de tempo especificado.

A distribuição de Poisson surge em conexão com os processos de Poisson. Ela se aplica aos vários fenômenos de natureza discreta (isto é, aqueles que podem assumir os valores $0, 1, 2, 3, ...$ durante um determinado período de tempo ou numa dada área), sempre que a probabilidade do fenômeno acontecer seja constante no tempo ou no espaço. A principal característica dessa distribuição é que a variância é igual a média dos dados.

Alguns exemplos de eventos que podem ser modelados com a distribuição de Poisson incluem o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central por minuto, número de clientes chegando ao caixa de um supermercado, número de peças defeituosas substituídas num veículo durante o primeiro ano de vida, número de requisições para um servidor de computador em um intervalo de tempo t, número de falhas em componentes por unidade de tempo, número de acidentes com automóveis em uma determinada estrada, número de raizes emitidas por um explante, número de espécies em um "quadrat", etc.

A função de probabilidade da distribuição Poisson é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!},$$

sendo que $x = 0, 1, ...$ e $\theta > 0$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = e^{\theta}, \quad \phi(\theta) = \theta \quad \text{e} \quad a_x = \frac{1}{x!}.$$

2.2.7.2 Binomial

Quando uma moeda é lançada, o resultado é cara ou coroa, quando um mágico adivinha a carta escolhida de um baralho, pode estar certo ou errado. Em cada um desses exemplos, um evento tem dois resultados possíveis, mutuamente exclusivos. Por conveniência, um dos resultados pode ser rotulado de "sucesso" e o outro resultado "fracasso".

A distribuição binomial é a distribuição de probabilidade discreta que representa o número de sucessos (ou fracassos) em uma sequência de m experimentos independentes, em que, cada sucesso (ou fracasso), tem probabilidade θ de ocorrer. Cada repetição do experimento, também, é chamada de ensaio de Bernoulli. Na verdade, quando $m = 1$, a distribuição binomial é uma distribuição de Bernoulli.

Segundo Johnson, Kemp e Kotz (2005), a distribuição binomial é uma das mais antigas. Essa distribuição foi obtida por James Bernoulli (em seu tratado Ars Conjectandi, publicado em 1713), para o caso $p = r/(r + s)$, sendo r e s inteiros positivos. Pascal tinha, anteriormente, considerado o caso $p = 12$. Em seu ensaio, publicado, postumamente, em 1764, Bayes removeu a restrição racional sobre p, considerando a posição de uma bola rolada aleatoriamente em relação a uma segunda bola também rolada aleatoriamente n vezes.

A função de probabilidade da distribuição binomial é

$$\mathrm{P}(X = x) = \binom{m}{x}\left(\frac{\theta}{m-\theta}\right)^{x}\left(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\right)^{-m},$$

sendo que $x = 0, 1, ..., m$, $0 < \theta < m$ e $m > 0$ conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \left(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\right)^{m}, \quad \phi(\theta) = \frac{\theta}{m-\theta} \quad \text{e} \quad a_x = \binom{m}{x}.$$

2.2.7.3 Binomial Negativa

Segundo Jain e Consul (1971) embora algumas formas dessa distribuição tenham sido estudadas anteriormente, foram os trabalhos de Greenwood e Woods (1919), Greenwood e Yule (1920) e Newbold (1926, 1927) em análise estatística do número de acidentes sobre um período de tempo que deram contribuições significativas para o uso da distribuição binomial negativa. Nesses trabalhos, foi encontrado que a variância dos dados era significativamente

maior do que média o que era contrário à expectativa de que os dados tivessem uma distribuição de Poisson. A responsabilidade de um indivíduo estar envolvido em um acidente depende das circunstâncias que o meio-ambiente oferece, de suas qualidades psico-fisiológicas, de sua reação perante situações de perigo e por sua experiência de acidentes que ocorreram anteriormente. O fator de responsabilidade inerente a um ser humano é, entretanto, um fenomeno variável. Portanto, cada indivíduo tem um grau de propensão a acidentes, que é representado por diferentes valores do parâmetro em uma distribuição de Poisson. A suposição de que o parâmetro da distribuição Poisson varia, proporcionalmente, ao qui-quadrado levou Greenwood e Yule (1920) à distribuição binomial negativa.

A distribuição binomial negativa, também, conhecida como distribuição de Pascal ou distribuição de Polya foi talvez a primeira distribuição, considerada em estatística, cuja variância é maior do que a média, e indica o número de tentativas necessárias para se obter m sucessos de igual probabilidade ao final de x experiências.

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}\Big(\frac{\theta}{m+\theta}\Big)^{x}\Big(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\Big)^{m},$$

sendo que $x = 0, 1, ...,$ $\theta > 0$ e $m > 0$ conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \Big(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\Big)^{-m}, \quad \phi(\theta) = \frac{\theta}{m+\theta} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}.$$

2.2.7.4 Poisson Generalizada

Segundo Consul e Jain (1973), observou-se que em uma população de variável com distribuição supostamente de Poisson, a probabilidade da ocorrência de um acontecimento não permanece constante e as mudanças com o tempo e/ou ocorrências anteriores, resultam na desigualdade da média e da variância nos dados. Por exemplo, em uma série de grandes amostras relativas às investigações de suicídio tomadas em anos sucessivos, os membros da população não são, igualmente, expostos ao risco e à tentação de cometer suicídio, portanto, varia de ano para ano, por exemplo, sendo maior nos anos de depressão do comércio (KENDALL; STUART, 1963). Em problemas de acidentes de trabalho, tempo e, talvez, os fatores de

aprendizagem trazem mudanças no ambiente e na responsabilidade pessoal dos indivíduos. Os indivíduos têm, portanto, diferentes graus de taxas de acidentes que podem ser representados por diferentes valores do parâmetro θ na distribuição de Poisson. A distribuição de Poisson, portanto, tem sido considerada com diferentes valores do parâmetro θ. Greenwood e Yule (1920) assumiram que θ na distribuição de Poisson segue uma distribuição gama.

Algumas misturas e distribuições compostas também foram consideradas. Entre essas distribuições estão (CONSUL; JAIN, 1973): Poisson dupla, Poisson log-normal, Poisson-geométrica, Poisson-binomial negativa, Poisson modificada, Poisson-Pascal, quasi-Poisson, Poisson mista, Poisson-binomial, Poisson retangular e Poisson multivariada. A maioria dessas distribuições foram desenvolvidos na tentativa de explicar a desigualdade da média e da variância nos dados numéricos observados em diferentes domínios. No entanto, a existência de tão grande variedade de distribuições discretas faz com que os pesquisadores enfrentem um dilema tanto quanto particular para explicar o padrão observado no seu problema.

A distribuição de Poisson generalizada tem um parâmetro adicional que foi obtido como uma forma de limitação de um determinado modelo. Essa distribuição tem uma série de propriedades simples e úteis e é eficiente para modelar conjuntos de dados com diferentes situações de variância em relação à média. Consul e Jain (1973) descrevem situações em que a variância é maior do que (superdispersão), igual a (equidispersão), ou menor do que (subdispersão) a média, de acordo com o segundo parâmetro (β) ser positivo, zero ou negativo.

A função de probabilidade da distribuição Poisson generalizada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}\Big(\frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta}\Big)^{x} e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}},$$

sendo que $x = 0, 1, ...,$ $\theta > 0$ e $\beta \geq 0$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, \quad \phi(\theta) = \frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}.$$

2.2.7.5 Borel

A distribuição de Borel foi, inicialmente, utilizada para representar o problema de fluxos de veículos em sentidos opostos em uma estrada, quando essa só comporta, em

determinado trecho, um veículo de cada vez. Entretanto, pode ser aplicada a outras situações envolvendo fluxo de objetos, como por exemplo, artigos produzidos em uma fábrica, o fluxo de pedestres em uma via com as mesmas características da estrada, entre outros (BOREL, 1942).

O modelo de Borel satisfaz as propriedades de subdispersão e superdispersão. Há superdispersão quando $\theta > (\sqrt{5}+1)/2$ e subdispersão quando $\theta < (\sqrt{5}+1)/2$.

A função de probabilidade da distribuição Borel é

$$\mathrm{P}(X=x) = \frac{x^{x-1}}{x!}\frac{\left[\left(1-\frac{1}{\theta}\right)e^{-1+\dfrac{1}{\theta}}\right]^x}{\left(1-\dfrac{1}{\theta}\right)},$$

sendo que $x = 1, 2, ...$ e $\theta > 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta}, \quad \phi(\theta) = \left(1-\frac{1}{\theta}\right)e^{-1+\dfrac{1}{\theta}} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{x^{x-1}}{x!}.$$

2.2.7.6 Consul

Suponha que uma fila é iniciada com um membro e tem número de chegadas com distribuição binomial e tempo de atendimento constante. A distribuição de Consul (CONSUL; FAMOYE, 2006) representa a probabilidade que exatamente x membros sejam atendidos antes que a fila se encerre.

Um importante problema em estudos de epidemias é encontrar a distribuição de probabilidade do número total de infectados, $N(u)$, em qualquer parte do habitat, sendo as pessoas infectadas a partir de uma única pessoa infectada em cada local, u, até o momento da extinção da epidemia. Nesse caso, supondo $X_0 = 1$ com probabilidade um e o número de novas pessoas infectadas, entre as suscetíveis, tendo distribuição binomial, o número de pessoas suscetíveis é finito, m, como utilizado por Kumar (1981). Se o processo de infecção continua assim, indefinidamente, a variável aleatória, número de pessoas infectadas, em dado momento, segue o modelo de Consul.

A função de probabilidade da distribuição Consul é

$$\mathrm{P}(X=x) = \frac{\Gamma(\beta x+1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}\left[\frac{(1-\theta^{-1})(\beta-1+\theta^{-1})^{\beta-1}}{\beta^{\beta}}\right]^x \frac{1}{\dfrac{\theta-1}{\theta(\beta-1)+1}},$$

sendo que $x = 1, 2, ...,$ $\theta > 1$ e $\beta \geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta(\beta - 1) + 1}, \quad \phi(\theta) = \frac{(1 - \theta^{-1})(\beta - 1 + \theta^{-1})^{\beta - 1}}{\beta^{\beta}} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{\Gamma(\beta x + 1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}.$$

2.2.7.7 Binomial Negativa Generalizada

A distribuição binomial negativa generalizada (*GNBD*) foi definida e estudada por Jain e Consul (1971). O modelo *GNBD* foi considerado útil em muitos campos tais como passeio aleatório, teoria das filas, processos de ramificação, reação de polimerização em química e para dados de contagem em que a variância é muito maior do que a média dos dados (superdispersão) e tem-se uma quantidade excessiva de zeros. A distribuição binomial negativa generalizada recebeu também a atenção de muitos pesquisadores, tais como, Consul e Shenton (1973), Kumar e Consul (1979, 1980), Consul (1989), Consul e Famoye (1986, 1995), entre outros (CONSUL; FAMOYE, 2006).

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa generalizada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{m\Gamma(m + \beta x)}{x!\Gamma(m + \beta x - x + 1)} \left\{ \left(\frac{\theta}{m + \beta\theta} \right) \left(\frac{m + (\beta - 1)\theta}{m + \beta\theta} \right)^{\beta - 1} \right\}^{x} \left(\frac{m + (\beta - 1)\theta}{m + \beta\theta} \right)^{m},$$

sendo que $x = 0, 1, ...,$ $\theta > 0$ e $m > 0$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \left(\frac{m + (\beta - 1)\theta}{m + \beta\theta} \right)^{-m}, \quad \phi(\theta) = \left(\frac{\theta}{m + \beta\theta} \right) \left(\frac{m + (\beta - 1)\theta}{m + \beta\theta} \right)^{\beta - 1}$$

e

$$a_x = \frac{m\Gamma(m + \beta x)}{x!\Gamma(m + \beta x - x + 1)}.$$

2.2.7.8 Borel-Taner

A distribuição de Borel-Tanner foi obtida por Borel (1942), para o caso $m = 1$ e por Tanner (1953) para valores inteiros de m. Tabelas da função de distribuição acumulada são dadas por Haight e Breuer (1960). Essa distribuição descreve o número total de clientes atendidos antes que uma fila seja esvaziada. Supondo que é fila única, a chegada dos clientes

tem distribuição de Poisson (com taxa constante) e o tempo de atendimento de cada cliente é constante.

Outra propriedade interessante dessa distribuição é a definição do domínio. A maioria das distribuições discretas são definidas sobre algum subconjunto finito dos inteiros (binomial, hipergeométrica,...) ou sobre todos os inteiros não negativos (Poisson, binomial negativa,...). No caso da distribuição Borel-Tanner é necessário truncar o domínio, e assim avaliá-la para qualquer inteiro positivo começando em um ponto $m \geq 1$.

A função de probabilidade da distribuição Borel-Tanner é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}\Big[\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)e^{-1+\dfrac{m}{\theta}}\Big]^x\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)^{-m},$$

sendo que $x = m, m+1, ...,$ $\theta > 1$ e $m \geq 1$ um inteiro conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)^m, \quad \phi(\theta) = \Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)e^{-1+\dfrac{m}{\theta}} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}.$$

2.2.7.9 Delta-Binomial

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Consul. Então $Y = \sum X_i$ tem distribuição delta-binomial (CONSUL; FAMOYE, 2006).

A função de probabilidade da distribuição delta-binomial é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{m\Gamma(\beta x + 1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x + m + 1)}\frac{\Big[\beta^{-\beta}(1 - \dfrac{m}{\theta})(\beta - 1 + \dfrac{m}{\theta})^{\beta-1}\Big]^x}{\Big[\dfrac{\theta - m}{\theta(\beta-1)+m}\Big]^m},$$

sendo que $x = m, m+1, ...,$ $\theta > m$ um inteiro conhecido, $m \geq 1$ e $\beta \geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \Big[\frac{\theta - m}{\theta(\beta-1)+m}\Big]^m, \quad \phi(\theta) = \beta^{-\beta}\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\Big(\beta - 1 + \frac{m}{\theta}\Big)^{\beta-1}$$

e

$$a_x = \frac{m\Gamma(\beta x + 1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x + m + 1)}.$$

2.2.7.10 Geeta

As distribuições de probabilidades discretas, série logarítmica, Pareto discreta e Yale têm um parâmetro simples de forma "L-shaped"e, portanto, não são muito versáteis para atender às necessidades dos complexos e modernos conjuntos de dados.

A distribuição de Geeta tem dois parâmetros "L-shaped"e é definida sobre todos os números inteiros positivos, sendo assim muito mais versátil do que os outros modelos "L-shaped", como os citados.

A distribuição de Geeta pode representar a probabilidade de que exatamente x membros sejam atendidos antes que uma fila se encerre, se a fila é iniciada com um membro, tem número de chegadas com distribuição binomial negativa e tempo constante.

Consul (1990) fornece algumas propriedades, relações de recorrência, momentos e estimadores da distribuição Geeta.

A função de probabilidade da distribuição de Geeta é

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{\Gamma(\beta x-1)}{x!\Gamma(\beta x-x)}\Big[\Big(\frac{\theta-1}{\beta\theta-1}\Big)\Big(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta-1}\Big)^{\beta-1}\Big]^{x}\Big(\frac{\theta-1}{\beta\theta-1}\Big)^{-1},$$

sendo que $x=1,2,...,\ \theta\geq 1$ e $\beta>1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta)=\frac{\theta-1}{\beta\theta-1},\quad \phi(\theta)=\Big(\frac{\theta-1}{\beta\theta-1}\Big)\Big(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta-1}\Big)^{\beta-1}\quad \text{e}\quad a_x=\frac{\Gamma(\beta x-1)}{x!\Gamma(\beta x-x)}.$$

2.2.7.11 Geeta-m

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Geeta. Então, $Y=\sum X_i$ tem distribuição Geeta-m (CONSUL; FAMOYE, 2006).

A função de probabilidade da distribuição Geeta-m é

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{m\Gamma(\beta x-m)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x-x)}\Big[\Big(\frac{\theta-m}{\beta\theta-m}\Big)\Big(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta-m}\Big)^{\beta-1}\Big]^{x}\Big(\frac{\theta-m}{\beta\theta-m}\Big)^{-m},$$

sendo que $x=m,m+1,...,\ \theta\geq 1$ e $\beta>1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$

e a_x são

$$h(\theta) = \Big(\frac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)^m, \quad \phi(\theta) = \Big(\frac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)\Big(\frac{(\beta - 1)\theta}{\beta\theta - m}\Big)^{\beta - 1}$$

e

$$a_x = \frac{m\Gamma(\beta x - m)}{x(x - m)!\Gamma(\beta x - x)}.$$

2.2.7.12 Haight

A distribuição de Haight é um caso especial da distribuição de Geeta quando $\beta = 2$ (CONSUL; FAMOYE, 2006). Em teoria das filas, a distribuição de Haight representa a probabilidade de que exatamente x membros da fila sejam atendidos antes que a primeira fila se encerre, começando com um membro, sendo $1 - \theta^{-1}$ a intensidade do tráfego, com chegadas segundo a distribuição de Poisson e tempo de atendimento exponencial negativo. Se o tempo de atendimento é constante, a distribuição será Borel-Tanner.

A função de probabilidade da distribuição de Haight é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{(2x - 2)!}{x!(x - 1)!}\Big[\frac{\theta(\theta - 1)}{(2\theta - 1)^2}\Big]^x \Big(\frac{\theta - 1}{2\theta - 1}\Big)^{-1},$$

sendo que $x = 1, 2, ...$ e $\theta \geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *MPSD*, as funções $h(\theta)$, $\phi(\theta)$ e a_x são

$$h(\theta) = \frac{\theta - 1}{2\theta - 1}, \quad \phi(\theta) = \frac{\theta(\theta - 1)}{(2\theta - 1)^2} \quad \text{e} \quad a_x = \frac{(2x - 2)!}{x!(x - 1)!}.$$

A Tabela 1 lista as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e a_x, bem como o suporte A_s para as distribuições apresentadas na secção 2.2.7.

Tabela 1 - Funções $h(\theta)$,$\phi(\theta)$ e a_x e o suporte, A_s de algumas distribuições da classe *MPSD*

Distribuição	$h(\theta)$	$\phi(\theta)$	a_x	A_s
1.Poisson	e^{θ}	θ	$\frac{1}{x!}$	{0,1,2,... }
2.Binomial	$\left(1+\frac{\theta}{m-\theta}\right)^m$	$\frac{\theta}{m-\theta}$	$\binom{m}{x}$	{0,1,2,...,m }
3.Binomial Negativa	$\left(1-\frac{\theta}{m+\theta}\right)^{-m}$	$\frac{\theta}{m+\theta}$	$\frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}$	{0,1,2,... }
4.Poisson Genaralizada	$e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}$	$\frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta}$	$\frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}$	{0,1,2,... }
5.Borel	$1-\frac{1}{\theta}$	$\left(1-\frac{1}{\theta}\right)e^{-1+\frac{1}{\theta}}$	$\frac{x^{x-1}}{x!}$	{1,2,... }
6.Consul	$\frac{\theta-1}{\theta(\beta-1)+1}$	$\frac{(1-\theta^{-1})(\beta-1+\theta^{-1})^{\beta-1}}{\beta^{\beta}}$	$\frac{\Gamma(\beta x+1)}{x!\Gamma(\beta x-x)}$	{1,2,... }
7.Binomial Negativa Gen.	$\left(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\right)^{-m}$	$\left(\frac{\theta}{m+\beta\theta}\right)\left(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\right)^{\beta-1}$	$\frac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x-x+1)}$	{0,1,2,... }
8.Borel-Tanner	$\left(1-\frac{m}{\theta}\right)^m$	$\left(1-\frac{m}{\theta}\right)e^{-1+\frac{m}{\theta}}$	$\frac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}$	{m,m+1,... }
9.Delta-Binomial	$\left[\frac{\theta-m}{\theta(\beta-1)+m}\right]^m$	$\beta^{-\beta}\left(1-\frac{m}{\theta}\right)\left(\beta-1+\frac{m}{\theta}\right)^{\beta-1}$	$\frac{m\Gamma(\beta x+1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x-x+m+1)}$	{m,m+1,... }
10.Geeta	$\frac{\theta-1}{\beta\theta-1}$	$\left(\frac{\theta-1}{\beta\theta-1}\right)\left(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta-1}\right)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta x-1)}{x!\Gamma(\beta x-x)}$	{1,2,... }
11.Geeta-m	$\left(\frac{\theta-m}{\beta\theta-m}\right)^m$	$\left(\frac{\theta-m}{\beta\theta-m}\right)\left(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta-m}\right)^{\beta-1}$	$\frac{m\Gamma(\beta x-m)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x-x)}$	{m,m+1,... }
12.Haight	$\frac{\theta-1}{2\theta-1}$	$\frac{\theta(\theta-1)}{(2\theta-1)^2}$	$\frac{(2x-2)!}{x!(x-1)!}$	{1,2,... }

2.3 Distribuições em Série de Potências Modificadas Inflacionadas (*IMPSD*)

2.3.1 Função de Probabilidade

Uma variável aleatória X é dita ter uma distribuição em série de potências modificadas inflacionadas (*IMPSD*) no ponto s se

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+(1-\phi)a(x)[g(\theta)]^x/f(\theta), & x=s;\\ (1-\phi)a(x)[g(\theta)]^x/f(\theta), & x\neq s,\end{cases} \tag{30}$$

em que, $0<\phi<1$, x é um inteiro não negativo,

$$f(\theta)=\sum_x a(x)(g(\theta))^x \tag{31}$$

e $g(\theta)$ são funções positivas, finitas e diferenciáveis, e os coeficiente $a(x)$ são não negativos e não dependem de θ.

Sejam $G_X(t)$ a função geradora de probabilidade de uma variável aleatória X com *IMPSD* no ponto s e $G_Y(t)$ a função geradora de probabilidade de um variável aleatória Y com *MPSD*. Murat e Szynal (1998) mostram que

$$G_X(t)=\begin{cases}\phi t^s+(1-\phi)G_Y(t), & x=s;\\ (1-\phi)G_Y(t), & x\neq s.\end{cases}$$

2.3.2 Média e Variância

Como na seção (2.2), considerar-se-á novamente Y uma variável aleatória com *MPSD*, definida por (3), e X uma variável aleatória com *IMPSD*, definida por (30).

Diferenciando a equação (31) em relação a θ, obtém-se

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sum_x a(x)x[g(\theta)]^{x-1}g'(\theta) \\ &= \sum_x xa(x)\frac{[g(\theta)]^x}{g(\theta)}g'(\theta) \\ &= \frac{g'(\theta)}{g(\theta)}\sum_x xa(x)[g(\theta)]^x \\ &= \frac{g'(\theta)}{g(\theta)}f(\theta)\sum_x x\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} = \sum_x x\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}. \tag{32}$$

Para $x \neq s$ tem-se que $\mathrm{P}(X = x) = (1-\phi)\dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}$. Multiplicando e dividindo o lado direito da equação (32) por $(1-\phi)$ vem

$$\underbrace{\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}}_{\mathrm{E(Y)}} = \frac{1}{(1-\phi)}\underbrace{\sum_x x\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)}_{\mathrm{E(X)}}. \tag{33}$$

Logo para $x \neq s$, $\mathrm{E}(X) = (1-\phi)\mathrm{E}(Y)$.

Para $x = s$, tem-se que $\mathrm{P}(X = x) = \phi + (1-\phi)\dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}$. De (33), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} &= \frac{1}{(1-\phi)}\Big\{\sum_x x\Big[\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi-\phi\Big]\Big\} \\ &= \frac{1}{(1-\phi)}\Big\{\sum_x x\Big[\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi\Big]-\sum_x x\phi\Big\}. \end{aligned}$$

$\sum_x x\phi = \phi\sum_x x = \phi\sum_s s = \phi s$. Isso ocorre, pois $x = s$ e s é um número inteiro não negativo e conhecido. Assim,

$$\underbrace{\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}}_{\mathrm{E(Y)}} = \frac{1}{(1-\phi)}\Big\{\underbrace{\sum_x x\Big[\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi\Big]}_{\mathrm{E(X)}}-\phi s\Big\}.$$

Logo para $x = s$, $\mathrm{E}(X) = \phi s + (1-\phi)\mathrm{E}(Y)$.

Portanto, a média para a classe *IMPSD* é dada por

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = \begin{cases} \phi s + (1-\phi)\mathrm{E}(Y), & x = s; \\ (1-\phi)\mathrm{E}(Y), & x \neq s. \end{cases}$$

Encontrar-se-á, agora, uma expressão para a variância da classe *IMPSD*.

Para $x \neq s$, tem-se $\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_x x \dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)$. Assim,

$$\mu_X f(\theta) = \sum_x x a(x)[g(\theta)]^x (1-\phi). \tag{34}$$

Diferenciando a equação (34) em relação a θ, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_X}{d\theta} f(\theta) + \mu_X f'(\theta) &= \sum_x x a(x) x [g(\theta)]^{x-1}(1-\phi) g'(\theta) \\ &= f(\theta)\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} \underbrace{\sum_x x^2 \frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)}_{\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \frac{d\mu_X}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + \frac{\mu_X}{(1-\phi)} \underbrace{\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}(1-\phi)}_{\mu_X} \\ &= \frac{d\mu_X}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + \frac{1}{(1-\phi)}\mu_X^2. \end{aligned}$$

Lembrando que $\mathrm{E}(Y) = \mu = \dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)}\dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}$, $\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{d\mu}{d\theta}\dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}$ e, para $x \neq s$, $\mu_X = (1-\phi)\mu$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 \\ &= \frac{d\mu_X}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + \frac{1}{(1-\phi)}\mu_X^2 - \mu_X^2 \\ &= \frac{d[\mu_X]}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + [\mu_X]^2\frac{\phi}{(1-\phi)} \\ &= \frac{d[(1-\phi)\mu]}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + (1-\phi)^2\mu^2\frac{\phi}{(1-\phi)} \\ &= (1-\phi)\frac{d\mu}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)} + (1-\phi)\mu^2\phi \\ &= (1-\phi)[\mathrm{Var}(Y) + \phi(\mu_1')^2]. \end{aligned}$$

Para $x = s$, tem-se $\mu_X = \mathrm{E}(X) = \sum_x x\Big\{\dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi\Big\}$. Assim

$$\mu_X f(\theta) = \sum_x \{x[a(x)[g(\theta)]^x(1-\phi)+\phi f(\theta)]\}. \tag{35}$$

Diferenciando a equação (35) em relação a θ, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_X}{d\theta}f(\theta)+\mu_X f'(\theta) &= \sum_x x(a(x)x[g(\theta)]^{x-1}(1-\phi)g'(\theta)+\phi f'(\theta)) \\
&= f(\theta)\frac{g'(\theta)}{g(\theta)}\sum_x x^2\Big[\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi-\phi\Big]+\phi f'(\theta)\sum_x x \\
&= f(\theta)\frac{g'(\theta)}{g(\theta)}\Big\{\underbrace{\sum_x x^2\Big[\frac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}(1-\phi)+\phi\Big]}_{\mathrm{E(X^2)}}-\phi\sum_x x^2\Big\}+\phi f'(\theta)\sum_x x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$E(X^2) = \frac{d\mu_X}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}+\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}(\mu_X-\phi\sum_x x)+\phi\sum_x x^2.$$

Lembrando que, para $x = s$, $\mu_X = \phi s + (1-\phi)\mu$, que $\sum_x x = \sum_s s = s$ e $\sum_x x^2 = \sum_s s^2 = s^2$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2)-\mu_X^2 \\
&= \frac{d[\mu_X]}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}+\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}(\mu_X-\phi\sum_x x)+\phi\sum_x x^2-\mu_X^2 \\
&= \frac{d[\mu(1-\phi)+\phi s]}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}+\mu([\mu_X]-\phi s)+\phi s^2-\mu_X^2 \\
&= (1-\phi)\underbrace{\frac{d\mu}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}}_{\mathrm{Var(Y)}}+\underbrace{\frac{d(\phi s)}{d\theta}\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}}_{0}+\mu([\mu(1-\phi)+\phi s]-\phi s)+\phi s^2-[\mu_X]^2 \\
&= (1-\phi)\mathrm{Var}(Y)+\mu^2(1-\phi)+\phi s^2-[\mu^2(1-\phi)^2+2\mu(1-\phi)\phi s+\phi^2 s^2] \\
&= (1-\phi)[\mathrm{Var}(Y)+\phi(\mu_1')^2]+\phi s[s+2\mu(1-\phi)+\phi s].
\end{aligned}$$

Portanto, a variância para a classe *IMPSD* é dada por

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} (1-\phi)[\mathrm{Var}(Y)+\phi(\mu_1')^2]+\phi s[s+2\mu(1-\phi)+\phi s], & x = s; \\ (1-\phi)[\mathrm{Var}(Y)+\phi(\mu_1')^2], & x \neq s. \end{cases}$$

2.3.3 Relações de Recorrência para os Momentos

Sejam μ'_r, μ_r e $\mu^{[r]}$, os momentos, não centrais, centrais e fatoriais, respectivamente, da classe *MPSD* e m'_r, m_r e $m^{[r]}$, os momentos, não centrais, centrais e fatoriais, respectivamente, da classe *IMPSD*.

Murat e Szynal (1998) dão as expresões apresentadas em 2.3.3.1 a 2.3.3.3, para os momentos da classe *IMPSD* em função dos momentos da classe *MPSD* e exibem, também, as relações de recorrência para os momentos não centrais, centrais e fatoriais da classe *IMPSD*.

2.3.3.1 Momentos não Centrais

$$m'_r = \phi s^r + (1-\phi)\mu'_r,$$

é o r-ésimo momento não central de uma *IMPSD* e a relação de recorrência entre os momentos não centrais de uma *IMPSD* é

$$m'_{r+1} = \frac{g(\theta)}{g'(\theta)}\frac{dm'_r}{d\theta} + \frac{m'_1 m'_r}{1-\phi} - \frac{\phi s}{1-\phi}[m'_r + s^{r-1}(m'_1 - s)].$$

2.3.3.2 Momentos Centrais

$$m_r = (1-\phi)\phi(s-\mu'_1)[(1-\phi)^{r-1} - (-\phi)^{r-1}] + (1-\phi)\sum_{j=2}^{r}\binom{r}{j}[\phi(\mu'_1 - s)]^{r-j}\mu_j, \quad r \geq 1,$$

é o r-ésimo momento central de uma *IMPSD*.

A relação de recorrência entre os momentos centrais de uma *IMPSD* é dada por

$$m_{r+1} = \frac{g(\theta)}{g'(\theta)}\left[\frac{dm_r}{d\theta} + r\frac{dm'_1}{d\theta}m_{r-1}\right] - \frac{\phi(s-m'_1)}{1-\phi}m_r + \frac{\phi}{1-\phi}(s-m'_1)^{r-1}.$$

2.3.3.3 Momentos Fatoriais

$$m^{[r]} = \phi s^{[r]} + \phi\mu^{[r]},$$

é o r-ésimo momento fatorial de uma *IMPSD*.

A relação de recorrência entre os momentos fatoriais de uma *IMPSD* é dada por

$$m^{[r+1]} = \frac{g(\theta)}{g'(\theta)}\frac{dm^{[r]}}{d\theta} - \Big[r - \frac{m_1'}{1-\phi}\Big]m^{[r]} + \frac{\phi}{1-\phi}[s^{[r]}(s-m_1') + sm^{[r]}].$$

2.3.4 Distribuição da Soma de Variáveis *IMPSD*

Considere a seguinte função de probabilidade

$$\mathrm{P}(X=x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)a(x)(g(\theta))^x/f(\theta), & x = s; \\ (1-\phi)a(x)[g(\theta)]^x/f(\theta), & x = s+1, s+2, ... \quad , \end{cases} \tag{36}$$

em que, $s \geq 0$, $f(\theta) = \sum_x a(x)(g(\theta))^x$ e $g(\theta)$ são funções positivas, finitas e diferenciáveis, e os coeficientes $a(x)$ são não negativos e não dependem de θ.

Teorema 6 *Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de (36) e $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. A distribuição de Z_n é dada por*

$$P(Z_n = z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-\phi)^i\phi^{n-i}\frac{a_i(is)[g(\theta)]^{is}}{[f(\theta)]^i}, & z = ns; \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-\phi)^i\phi^{n-i}\frac{a_i(z-(n-i)s)[g(\theta)]^{z-(n-i)s}}{[f(\theta)]^i}, & z = ns+1, ns+2, ... \quad , \end{cases}$$

em que $a_0(0) = 1, a_i(x)$ é o coeficiente de $[g(\theta)]^x$ em $[f(\theta)]^i$.

A fórmula da função de distribuição de Z_n dada no Teorema 6, tem como caso particular a fórmula dada por Gupta, Gupta e Tripathi (1995) para a *IMPSD* com $s = 0$. A prova desse Teorema é feita por indução matemática e pode ser encontrada em Murat e Szynal (1998).

2.3.5 Estimação de Máxima Verossimilhança

Assumindo $\lambda = (1-\phi)\Big[1 - \dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}\Big]$, (30) pode ser escrita na forma

$$\mathrm{P}(X=x) = \begin{cases} 1-\lambda, & x = s; \\ \dfrac{\lambda a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta) - a(s)[g(\theta)]^s}, & x \neq s, \quad x\epsilon N \cup \{0\}; \quad 0 < \phi < 1. \end{cases} \tag{37}$$

Sejam $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de (37) e n_i o número de observações iguais a i tal que $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i$. A função de verossimilhança pode ser escrita como

$$L = \prod_{i=0}^{\infty} [\mathrm{P}(X = i)]^{n_i}.$$

Assim, o logaritmo do função de verossimilhança é

$$\log(L) = n_s \log(1-\lambda) + \sum_{i=0; i\neq s}^{\infty} n_i \log\Big[\frac{\lambda(i)[g(\theta)]^i}{f(\theta) - a(s)[g(\theta)]^s}\Big]. \tag{38}$$

Derivando a expressão (38) em relação a λ e em relação a θ, obtêm-se, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(L) = -\frac{n_s}{1-\lambda} + \sum_{i=0; i\neq s}^{\infty} \frac{n_i}{\lambda} = -\frac{n_s}{1-\lambda} + \frac{n-n_s}{\lambda},$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L) = \frac{g'(\theta)}{g(\theta)} \sum_{i=0; i\neq s}^{\infty} i n_i - \frac{f'(\theta) - sa(s)[g(\theta)]^{s-1} g'(\theta)}{f(\theta) - a(s)[g(\theta)]^s}(n - n_s).$$

O estimador de máxima verossimilhança (MURAT; SZYNAL, 1998), $\hat{\lambda}$ de λ, é obtido a partir de

$$\hat{\lambda} = \frac{n - n_s}{n}.$$

Já o estimador de máxima verossimilhança (MURAT; SZYNAL, 1998), $\hat{\theta}$ de θ, pode ser obtido por técnicas numéricas de

$$\frac{\mu(\hat{\theta}) f(\hat{\theta}) - sa(s)[g(\hat{\theta})]^s}{f(\hat{\theta}) - a(s)[g(\hat{\theta})]^s} = \frac{1}{n - n_s} \sum_{i=0; i\neq s}^{\infty} i n_i,$$

em que $\mu(\theta) = \mu_1'$ é a média da classe MPSD.

2.3.6 Algumas Distribuições Pertencentes à Classe *IMPSD*

2.3.6.1 Poisson Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Poisson inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, & x = s; \\ (1-\phi)\dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...$ e $\theta > 0$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = e^{\theta}, \quad g(\theta) = \theta \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{1}{x!}.$$

2.3.6.2 Binomial Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição binomial inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\binom{m}{x}\left(\frac{\theta}{m-\theta}\right)^{x}\left(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\right)^{-m}, & x = s; \\ (1-\phi)\binom{m}{x}\left(\frac{\theta}{m-\theta}\right)^{x}\left(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\right)^{-m}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ..., m$, $0 < \theta < m$ e $m > 0$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \left(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\right)^{m}, \quad g(\theta) = \frac{\theta}{m-\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \binom{m}{x}.$$

2.3.6.3 Binomial Negativa Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}\left(\frac{\theta}{m+\theta}\right)^{x}\left(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\right)^{m}, & x = s; \\ (1-\phi)\frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}\left(\frac{\theta}{m+\theta}\right)^{x}\left(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\right)^{m}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...$, $\theta > 0$ e $m > 0$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\right)^{-m}, \quad g(\theta) = \frac{\theta}{m+\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}.$$

2.3.6.4 Poisson Generalizada Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Poisson generalizada inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}\left(\frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta}\right)^{x} e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, & x = s; \\ (1-\phi)\frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}\left(\frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta}\right)^{x} e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...,$ $\theta > 0$, $\beta \geq 0$ conhecido e $|\beta\theta| < 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, \quad g(\theta) = \frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}.$$

2.3.6.5 Borel Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Borel inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\dfrac{x^{x-1}}{x!}\dfrac{\left[\left(1-\dfrac{1}{\theta}\right)e^{-1+\dfrac{1}{\theta}}\right]^x}{\left(1-\dfrac{1}{\theta}\right)}, & x = s; \\ (1-\phi)\dfrac{x^{x-1}}{x!}\dfrac{\left[\left(1-\dfrac{1}{\theta}\right)e^{-1+\dfrac{1}{\theta}}\right]^x}{\left(1-\dfrac{1}{\theta}\right)}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 1, 2, ...$ e $\theta > 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta}, \quad g(\theta) = \left(1-\frac{1}{\theta}\right)e^{-1+\dfrac{1}{\theta}} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{x^{x-1}}{x!}.$$

2.3.6.6 Consul Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Consul inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\dfrac{\Gamma(\beta x+1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}\left[\dfrac{(1-\theta^{-1})(\beta-1+\theta^{-1})^{\beta-1}}{\beta^\beta}\right]^x \dfrac{1}{\frac{\theta-1}{\theta(\beta-1)+1}}, & x = s; \\ (1-\phi)\dfrac{\Gamma(\beta x+1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}\left[\dfrac{(1-\theta^{-1})(\beta-1+\theta^{-1})^{\beta-1}}{\beta^\beta}\right]^x \dfrac{1}{\frac{\theta-1}{\theta(\beta-1)+1}}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 1, 2, ...,$ $\theta > 1$ e $\beta \geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \frac{\theta-1}{\theta(\beta-1)+1}, \quad g(\theta) = \frac{(1-\theta^{-1})(\beta-1+\theta^{-1})^{\beta-1}}{\beta^\beta} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{\Gamma(\beta x+1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}.$$

2.3.6.7 Binomial Negativa Generalizada Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa generalizada inflacionada é

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+(1-\phi)\dfrac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x-x+1)}\Big\{\Big(\dfrac{\theta}{m+\beta\theta}\Big)\Big(\dfrac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{\beta-1}\Big\}^{x}\Big(\dfrac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{m}, & x=s;\\ (1-\phi)\dfrac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x-x+1)}\Big\{\Big(\dfrac{\theta}{m+\beta\theta}\Big)\Big(\dfrac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{\beta-1}\Big\}^{x}\Big(\dfrac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{m}, & x\neq s\end{cases}$$

sendo que $x=0,1,...,$ $0<\theta<1$, $|\beta\theta|<1$ e $\beta=0$ ou $\beta\geq 1$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta)=\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{-m},\quad g(\theta)=\Big(\frac{\theta}{m+\beta\theta}\Big)\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{\beta-1}$$

e

$$a(x)=\frac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x-x+1)}.$$

2.3.6.8 Borel-Taner Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Borel-Tanner inflacionada é

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+(1-\phi)\dfrac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}\Big[\Big(1-\dfrac{m}{\theta}\Big)e^{-1+\dfrac{m}{\theta}}\Big]^{x}\Big(1-\dfrac{m}{\theta}\Big)^{-m}, & x=s;\\ (1-\phi)\dfrac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}\Big[\Big(1-\dfrac{m}{\theta}\Big)e^{-1+\dfrac{m}{\theta}}\Big]^{x}\Big(1-\dfrac{m}{\theta}\Big)^{-m}, & x\neq s\end{cases}$$

sendo que $x=m,m+1,...,$ $\theta>1$ e $m\geq 1$, um inteiro conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta)=\Big(1-\frac{m}{\theta}\Big)^{m},\quad g(\theta)=\Big(1-\frac{m}{\theta}\Big)e^{-1+\dfrac{m}{\theta}}\quad\text{e}\quad a(x)=\frac{mx^{x-m-1}}{(x-m)!}.$$

2.3.6.9 Delta-Binomial Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição delta-binomial inflacionada é

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+(1-\phi)\dfrac{m\Gamma(\beta x+1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x-x+m+1)}\dfrac{\Big[\beta^{-\beta}(1-\dfrac{m}{\theta})(\beta-1+\dfrac{m}{\theta})^{\beta-1}\Big]^{x}}{\Big[\dfrac{\theta-m}{\theta(\beta-1)+m}\Big]^{m}}, & x=s;\\ (1-\phi)\dfrac{m\Gamma(\beta x+1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x-x+m+1)}\dfrac{\Big[\beta^{-\beta}(1-\dfrac{m}{\theta})(\beta-1+\dfrac{m}{\theta})^{\beta-1}\Big]^{x}}{\Big[\dfrac{\theta-m}{\theta(\beta-1)+m}\Big]^{m}}, & x\neq s\end{cases}$$

sendo que $x = m, m+1, ...,$ $\theta > m$, $m \geq 1$, um inteiro conhecido e $\beta \geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \Big[\frac{\theta - m}{\theta(\beta - 1) + m}\Big]^m, \quad g(\theta) = \beta^{-\beta}\Big(1 - \frac{m}{\theta}\Big)\Big(\beta - 1 + \frac{m}{\theta}\Big)^{\beta-1}$$

e

$$a(x) = \frac{m\Gamma(\beta x + 1)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x + m + 1)}.$$

2.3.6.10 Geeta Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição de Geeta inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\dfrac{\Gamma(\beta x - 1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}\Big[\Big(\dfrac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}\Big)\Big(\dfrac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - 1}\Big)^{\beta-1}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}\Big)^{-1}, & x = s; \\ (1-\phi)\dfrac{\Gamma(\beta x - 1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}\Big[\Big(\dfrac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}\Big)\Big(\dfrac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - 1}\Big)^{\beta-1}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}\Big)^{-1}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = 1, 2, ...,$ $\theta \geq 1$ e $\beta > 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \frac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}, \quad g(\theta) = \Big(\frac{\theta - 1}{\beta\theta - 1}\Big)\Big(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - 1}\Big)^{\beta-1} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{\Gamma(\beta x - 1)}{x!\Gamma(\beta x - x)}.$$

2.3.6.11 Geeta-m Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição Geeta-m inflacionada é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\dfrac{m\Gamma(\beta x - m)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x)}\Big[\Big(\dfrac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)\Big(\dfrac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - m}\Big)^{\beta-1}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)^{-m}, & x = s; \\ (1-\phi)\dfrac{m\Gamma(\beta x - m)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x)}\Big[\Big(\dfrac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)\Big(\dfrac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - m}\Big)^{\beta-1}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)^{-m}, & x \neq s \end{cases}$$

sendo que $x = m, m+1, ...,$ m conhecido, $\theta \geq 1$ e $\beta > 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \Big(\frac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)^m, \quad g(\theta) = \Big(\frac{\theta - m}{\beta\theta - m}\Big)\Big(\frac{(\beta-1)\theta}{\beta\theta - m}\Big)^{\beta-1}$$

e

$$a(x) = \frac{m\Gamma(\beta x - m)}{x(x-m)!\Gamma(\beta x - x)}.$$

2.3.6.12 Haight Inflacionada

A função de probabilidade da distribuição de Haight inflacionada é

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+(1-\phi)\dfrac{(2x-2)!}{x!(x-1)!}\Big[\dfrac{\theta(\theta-1)}{(2\theta-1)^2}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta-1}{2\theta-1}\Big)^{-1}, & x=s;\\ (1-\phi)\dfrac{(2x-2)!}{x!(x-1)!}\Big[\dfrac{\theta(\theta-1)}{(2\theta-1)^2}\Big]^x\Big(\dfrac{\theta-1}{2\theta-1}\Big)^{-1}, & x\neq s\end{cases}$$

sendo que $x=1,2,...$ e $\theta\geq 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta)=\frac{\theta-1}{2\theta-1},\quad g(\theta)=\frac{\theta(\theta-1)}{(2\theta-1)^2}\quad \text{e}\quad a(x)=\frac{(2x-2)!}{x!(x-1)!}.$$

2.4 Distribuições em Série de Potências Modificadas Inflacionadas (*IMPSD*) no ponto $s=0$

Todos os resultados exibidos na seção 2.3 são válidos para o caso em que o ponto de inflação é zero. A seguir, são apresentadas mais especificamente, as propriedades dessa classe *IMPSD* no ponto $s=0$.

2.4.1 Função de Probabilidade

Uma variável aleatória X tem uma distribuição em série de potências modificadas inflacionadas (*IMPSD*) no ponto $s=0$ se

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\phi+\dfrac{(1-\phi)a(0)}{f(\theta)}, & x=0;\\ \dfrac{(1-\phi)a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}, & x\neq 0,\end{cases}\tag{39}$$

em que, $0<\phi<1$, $f(\theta)=\sum_x a(x)[g(\theta)]^x$ e $g(\theta)$ são funções positivas, finitas e diferenciáveis, e os coeficientes $a(x)$ são não negativos e não dependem de θ.

2.4.2 Relações entre *MPSD* e *IMPSD* no ponto zero

Sejam Y uma variável aleatória com *MPSD*, X uma variável aleatória com *IMPSD* no ponto zero, $G_X(t)$ a função geradora de probabilidade da variável aleatória X

e $G_Y(t)$ a função geradora de probabilidade da variável aleatória Y. Têm-se as seguintes relações dadas por Gupta, Gupta e Tripathi (1995)

1. $\mathrm{E}(X) = (1-\phi)\mathrm{E}(Y)$
2. $\mathrm{Var}(X) = (1-\phi)[\mathrm{Var}(Y) - \phi(\mu_1')^2]$
3. $G_X(t) = \phi + (1-\phi)G_Y(t)$

2.4.3 Distribuição da Soma de Variáveis *IMPSD* no ponto zero

Teorema 7 *Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de (39) e $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$.*

A distribuição de Z_n é dada por

$$P(Z_n = z) = \begin{cases} \left[\phi + \dfrac{(1-\phi)a(0)}{f(\theta)}\right]^n, & z = 0; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (1-\phi)^i \phi^{n-i} \frac{a_i(z)[g(\theta)]^z}{[f(\theta)]^i}, & z \neq 0, \end{cases}$$

em que $a_i(z) = \displaystyle\sum_{y=0}^{z} a_{i-1}(z-y)$ *e* $a_1(z) = a(z)$.

A fórmula da função de distribuição de Z_n e a prova, feita por indução matemática, do Teorema 7, são dadas por Gupta, Gupta e Tripathi (1995) para a *IMPSD* com $s = 0$.

2.4.4 Estimação de Máxima Verossimilhança e Inferência

Assumindo $\lambda = (1-\phi)\Big(1 - \dfrac{a(0)}{f(\theta)}\Big)$, (39) pode ser escrita na forma

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} 1 - \lambda, & x = 0; \\ \dfrac{\lambda}{1 - a(0)/f(\theta)} \dfrac{a(x)[g(\theta)]^x}{f(\theta)}, & x \neq 0. \end{cases} \tag{40}$$

Sejam $X_1, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória de (40) e n_i o número de observações iguais a i tal que $n = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} n_i$. A função de verossimilhança pode ser escrita como

$$L = \prod_{i=0}^{\infty} [\mathrm{P}(X = i)]^{n_i}.$$

Assim, o logaritmo do função de verossimilhança é

$$\log(L) = n_0 \log(1-\lambda) + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \log\Big[\frac{\lambda}{1-a(0)/f(\theta)} \frac{a(i)[g(\theta)]^i}{f(\theta)}\Big]. \tag{41}$$

Derivando a expressão (41) em relação a λ e a θ, obtêm-se, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(L) = -\frac{n_0}{1-\lambda} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{\lambda},$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L) = \frac{f'(\theta)(n-n_0)}{f(\theta)-a(0)} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} i n_i\Big)\frac{g'(\theta)}{g(\theta)}.$$

O estimador de máxima verossimilhança (MURAT; SZYNAL, 1998), $\hat{\lambda}$ de λ, é obtido a partir de

$$\hat{\lambda} = \frac{n-n_0}{n}.$$

Já o estimador de máxima verossimilhança (MURAT; SZYNAL, 1998), $\hat{\theta}$ de θ, pode ser obtido por técnicas numéricas de

$$\frac{\mu(\hat{\theta})}{1-a(0)/f(\hat{\theta})} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i n_i}{n-n_0},$$

em que $\mu(\theta)$ é a média da classe MPSD.

Para a estimação por intervalo e testes de hipóteses sobre os parâmetros em $\boldsymbol{\eta} = (\lambda, \theta)$, obtém-se a matriz de informação esperada

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \kappa_{\lambda,\lambda} & \kappa_{\lambda,\theta} \\ \kappa_{\theta,\lambda} & \kappa_{\theta,\theta} \end{bmatrix}.$$

Sob certas condições que são satisfeitas para os parâmetros no interior do espaço paramétrico, mas não sobre a fronteira, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta})$ é $\mathrm{N}_4(0, \mathbf{K}(\boldsymbol{\eta})^{-1})$. A estimativa do vetor de parâmetros da distribuição assintótica normal multivariada $\mathrm{N}_4(0, n^{-1}\mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\eta}})^{-1}), \hat{\boldsymbol{\eta}}$, pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros e para as funções de taxa de falha e de sobrevivência. A normalidade assintótica também é útil para testar a qualidade do ajuste, por exemplo, da distribuição Poisson generalizada inflacionada em zero e comparar essa distribuição com alguns de seus sub-modelos especiais utilizando um dos três testes estatísticos assintoticamente

equivalentes, isto é, estatística da razão de verossimilhança (RV), estatística escore (E) e a estatística de Wald (W).

Um intervalo de confiança assintótico, com coeficiente de confiança $1-\gamma$, para cada parâmetro η_i é dado por

$$\text{ICA}(\eta_i,(1-\gamma)) = (\hat{\eta}_i - z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\eta_i,\eta_i}}, \hat{\eta}_i + z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\eta_i,\eta_i}}),$$

em que $\hat{\kappa}^{\eta_i,\eta_i}$ é o i-ésimo elemento da diagonal da matriz $n^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\eta})^{-1}$ estimado em $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ para $i = 1, \cdots, 4$ e $z_{\gamma/2}$ é o quantil $1-\gamma/2$ da distribuição normal padrão.

Quando existe a necessidade de comparação entre dois modelos encaixados é interessante estudar os principais critérios de seleção de modelos utilizados na literatura.

Dentre os principais critérios de seleção de modelos utilizados em programas computacionais estão o critério de informação de Akaike - AIC (AKAIKE, 1974), o critério de informação bayesiano - BIC (SCHWARZ, 1978) e o critério de informação de Akaike corrigido - CAIC (BOZDOGAN, 1987), os quais são baseados no valor do logaritmo da função de verossimilhança do modelo e dependem do número de observações n e do número de parâmetros p e são dados por $AIC = -2\log L(\boldsymbol{\theta}) + 2p$, $BIC = -2\log L(\boldsymbol{\theta}) + p\log(n)$ e $CAIC = AIC + 2\dfrac{p(p+1)}{n-p-1}$.

Valores menores de AIC, BIC e CAIC indicam modelos mais apropriados.

2.4.5 Algumas Distribuições Pertencentes à Classe *IMPSD* no ponto $s = 0$

2.4.5.1 Poisson Inflacionada em $s = 0$ (ZIP)

A função de probabilidade da distribuição Poisson inflacionada em $s = 0$ é

$$\text{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)e^{-\theta}, & x = 0; \\ (1-\phi)\dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, & x \neq 0 \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...$ e $\theta > 0$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, com $s = 0$, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = e^{\theta}, \quad g(\theta) = \theta \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{1}{x!}.$$

2.4.5.2 Binomial Inflacionada em $s = 0$ (ZIB)

A função de probabilidade da distribuição binomial inflacionada em $s = 0$ é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\Big(1 + \dfrac{\theta}{m-\theta}\Big)^{-m}, & x = 0; \\ (1-\phi)\dbinom{m}{x}\Big(\dfrac{\theta}{m-\theta}\Big)^{x}\Big(1 + \dfrac{\theta}{m-\theta}\Big)^{-m}, & x \neq 0 \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ..., m$, $0 < \theta < m$ e $m > 0$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, com $s = 0$, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \Big(1 + \frac{\theta}{m-\theta}\Big)^{m}, \quad g(\theta) = \frac{\theta}{m-\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \binom{m}{x}.$$

2.4.5.3 Binomial Negativa Inflacionada em $s = 0$ (ZINB)

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa inflacionada em $s = 0$ é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\Big(1 - \dfrac{\theta}{m+\theta}\Big)^{m}, & x = 0; \\ (1-\phi)\dfrac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}\Big(\dfrac{\theta}{m+\theta}\Big)^{x}\Big(1 - \dfrac{\theta}{m+\theta}\Big)^{m}, & x \neq 0 \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...$, $\theta > 0$ e $m > 0$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, com $s = 0$, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \Big(1 - \frac{\theta}{m+\theta}\Big)^{-m}, \quad g(\theta) = \frac{\theta}{m+\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}.$$

2.4.5.4 Poisson Generalizada Inflacionada em $s = 0$

A função de probabilidade da distribuição Poisson generalizada inflacionada em $s = 0$ é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, & x = 0; \\ (1-\phi)\dfrac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}\Big(\dfrac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta}\Big)^{x} e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...$, $\theta > 0$, $\beta \geq 0$, conhecido e $|\beta\theta| < 1$.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, com $s = 0$, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = e^{-\theta(1+\beta\theta)^{-1}}, \quad g(\theta) = \frac{\theta e^{-\beta\theta(1+\beta\theta)^{-1}}}{1+\beta\theta} \quad \text{e} \quad a(x) = \frac{(1-\beta x)^{x-1}}{x!}.$$

2.4.5.5 Binomial Negativa Generalizada Inflacionada em $s = 0$

A função de probabilidade da distribuição binomial negativa generalizada inflacionada em $s = 0$ é

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} \phi + (1-\phi)\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^m, & x = 0; \\ (1-\phi)\frac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x - x + 1)}\Big\{\Big(\frac{\theta}{m+\beta\theta}\Big)\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{\beta-1}\Big\}^x\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^m, & x \neq 0 \end{cases}$$

sendo que $x = 0, 1, ...,$ $0 < \theta < 1$, $|\beta\theta| < 1$ e $\beta = 0$ ou $\beta \geq 1$, conhecido.

Para mostrar que essa distribuição pertence à classe *IMPSD*, com $s = 0$, as funções $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $a(x)$ são

$$f(\theta) = \Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{-m}, \quad g(\theta) = \Big(\frac{\theta}{m+\beta\theta}\Big)\Big(\frac{m+(\beta-1)\theta}{m+\beta\theta}\Big)^{\beta-1}$$

e

$$a(x) = \frac{m\Gamma(m+\beta x)}{x!\Gamma(m+\beta x - x + 1)}.$$

2.5 Aplicações

Nesta seção, são apresentados dois conjuntos de dados, um relacionado ao número de artigos publicados por doutorandos e outro a fisiologia e bioquímica de plantas, para ilustrar as distribuições inflacionadas em zero.

2.5.1 Dados do número de artigos publicados por doutorandos

A fim de verificar quais variáveis influenciam o número de artigos publicados por 915 estudantes de doutorado em bioquímica em seus três últimos anos, uma pesquisa foi conduzida observando-se o sexo (sex= $0, 1$) dos mesmos, se eram ou não casados (casam= $0, 1$), o número de filhos menores do que cinco anos (kids5) e o número de artigos publicados pelo orientador (ment). Os valores observados ("bioChemist") podem ser encontrados na library pscl do software estatístico R (R Development Core Team, 2008).

A esses dados foram ajustados os modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB (RIDOUT; DEMÉTRIO; HINDE, 1998), considerando-se diferentes preditores lineares para $\log(\lambda)$ e para $\log(\omega/1-\omega)$.

Na Tabela 2 são apresentados os valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC, para esses modelos. Verifica-se que os modelos, ZINB com modelo-$\log(\lambda)$ e modelo-$\log(\omega/1-\omega)$ iguais ao modelo (2) e ZINB com modelo-$\log(\lambda)$ igual ao modelo (2) e o modelo-$\log(\omega/1-\omega)$ igual ao modelo (4), poderiam ser escolhidos como os melhores modelos por terem os menores valores das estatísticas AIC e BIC, respectivamente. Os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed do SAS versão 9.2.

As Figuras 1 e 2 exibem os gráficos normais de probabilidade com envelopes simulados para os modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB, com preditores lineares $\log(\lambda) = sex + casam + kids5 + ment$ e $\log(\omega/1-\omega) = ment$. Pode-se notar que os modelos binomial negativo e ZINB são os que melhores se ajustam aos dados e pelo princípio da parcimônia opta pelo modelo binomial negativo.

Assim, se forem considerados os critério AIC e CAIC opta-se pelo modelo ZINB e se for considerado o critério BIC opta-se pelo modelo binomial negativo.

2.5.2 Dados de regeneração de plantas transgênicas

A cana-de-açúcar tem baixa taxa reprodutiva pela dificuldade de florescimento. Devido a características genéticas e fisiológicas, os programas de melhoramento são longos e laboriosos. Alternativamente, aplicações modernas da biotecnologia visam contribuir para o desenvolvimento de novos cultivares.

A metodologia de cultura de tecidos a partir de discos de folhas imaturas para o estabelecimento da cultura de calos embriogênicos e regeneração de plantas a partir dos calos embriogênicos e diretamente, a partir de folhas imaturas foi estudada por Barboza (2010).

O conjunto de dados da Tabela 3 refere-se a uma parte do estudo de Barboza (2010), em que a variedade RB835089 de cana-de-açucar, foi utilizada. A fim de verificar quais variáveis influenciavam o número de plantas regeneradas uma pesquisa foi conduzida em que concentrações (5, 8 e 10 mg/L) do hormônio 2,4-D foram testadas, com 5 dias no escuro, para o estabelecimento de calos altamente embriogênicos e para a indução da desdiferenciação celular

Tabela 2 - Resultados do ajuste dos modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB para os dados "bioChemist"considerando-se para $\log(\lambda)$ e $\log(\omega/1-\omega)$ um dos preditores lineares (1)sex*casam*kids5*ment, (2)sex+casam+kids5+ment, (3)sex+ment, (4)ment e (5)constante

	Modelos					
Distribuição	$\log(\lambda)$	$\log(\omega/1-\omega)$	-2logL	AIC	CAIC	BIC
Poisson	(1)	0	3293.1	3325.1	3325.7	3402.2
	(2)	0	3302.3	3312.3	3312.4	3336.4
Binomial Negativa	(1)	0	3118.2	3152.2	3152.9	3234.1
	(2)	0	3122.1	3134.1	3134.2	3163.0
ZIP	(1)	(5)	3234.8	3268.8	3269.4	3350.7
	(1)	(2)	3198.4	3240.4	3241.4	3341.6
	(1)	(3)	3201.5	3239.5	3240.3	3331.1
	(1)	(4)	3201.8	3237.8	3238.6	3324.5
	(2)	(5)	3241.6	3253.6	3253.7	3282.5
	(2)	(2)	3209.6	3229.6	3229.8	3277.8
	(2)	(3)	3211.3	3227.3	3227.5	3265.9
	(2)	(4)	3211.5	3225.5	3225.6	3259.2
ZINB	(1)	(5)	3118.2	3154.2	3155.0	3240.9
	(1)	(2)	3093.3	3137.3	3138.5	3243.4
	(1)	(3)	3098.7	3138.7	3139.6	3235.1
	(1)	(4)	3110.8	3148.8	3149.6	3240.3
	(2)	(5)	3122.1	3136.1	3136.2	3169.8
	(2)	(2)	3100.0	3122.0	3122.3	3175.0
	(2)	(3)	3104.1	3122.1	3122.3	3165.4
	(2)	(4)	3106.5	3122.5	3122.7	3161.1

nos discos foliares antecedendo a regeneração de plantas; meios de cultura com a adição dos hormônios BAP (0.1, 0.5, 1, 2, 3 e 5 mg/L) e NAA (0 e 0.1 mg/L) também foram testados.

(a) (b)

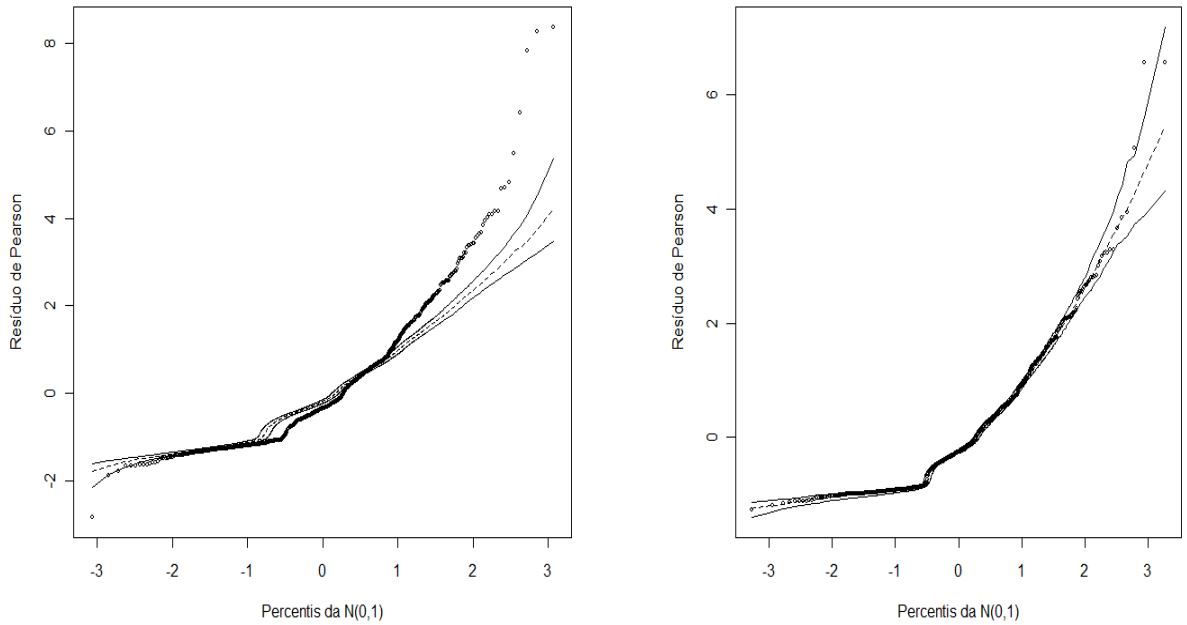

Figura 1 - Gráfico normal de probabilidade com envelope simulado para os resíduos de Pearson nos modelos (a) Poisson (b) binomial negativo

A esses dados foram ajustados os modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB, considerando-se diferentes preditores lineares para $\log(\lambda)$ e para $\log(\omega/1-\omega)$.

Na Tabela 4, são apresentados os valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para esses modelos. Verifica-se que os modelos, ZINB com modelo-$\log(\lambda)$ completo e modelo-$\log(\omega/1-\omega)$ igual ao modelo (2) e ZINB com modelo-$\log(\lambda)$ igual ao modelo (2) e modelo-$\log(\omega/1-\omega)$ igual ao modelo (3), poderiam ser escolhidos como os melhores modelos por terem os menores valores das estatísticas AIC e BIC, respectivamente. Os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed do SAS versão 9.2.

As Figuras 3 e 4 exibem os gráficos normais de probabilidade com envelopes simulados para os modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB, com preditores lineares $\log(\lambda) = BAP + NAA + CE$ e $\log(\omega/1-\omega) = BAP + NAA$. Pode-se notar que o modelo ZINB é o que melhor se ajusta aos dados.

Assim, se todos os critérios, AIC, CAIC e BIC, forem considerados opta-se pelo

(a) (b)

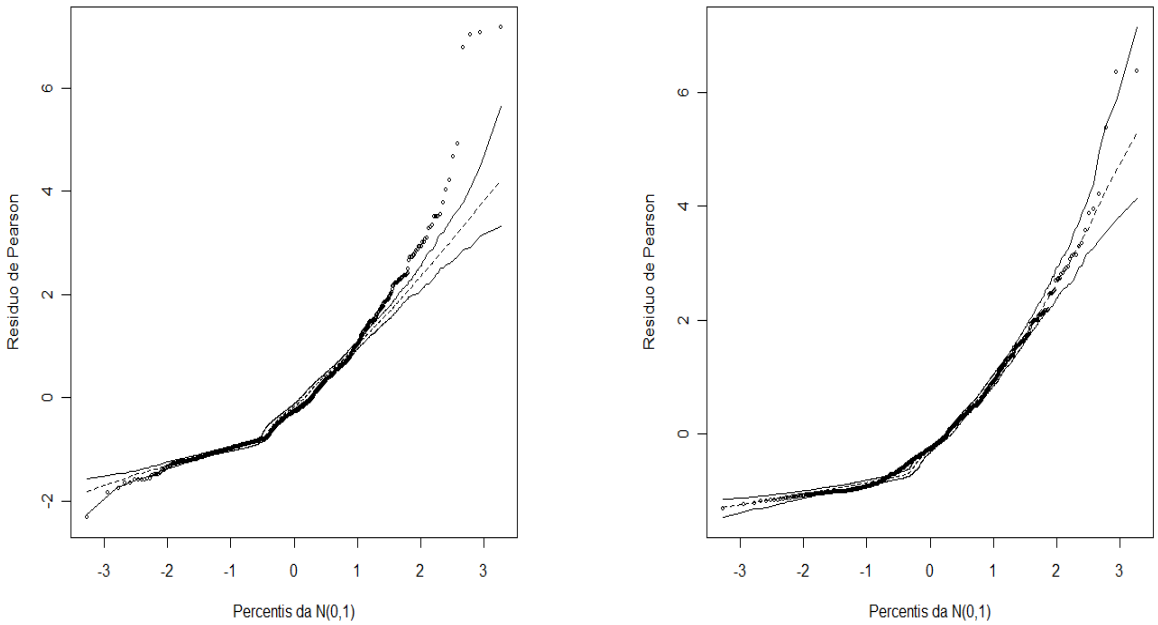

Figura 2 - Gráfico normal de probabilidade com envelope simulado para os resíduos de Pearson nos modelos (a) ZIP (b) ZINB

modelo ZINB.

2.6 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar a classe de distribuições em séries de potência modificada (MPSD) e a classe de distribuições em séries de potência modificada inflacionada (IMPSD) em um ponto diferente de zero e especificamente no ponto zero. Nessas classes, foram apresentados alguns resultados como função geradora de momentos, relação de recorrência para os momentos, relações entre MPSD e IMPSD e alguns teoremas. Os modelos Poisson e binomial negativo pertencem à classe MPSD e os modelos ZIP e ZINB pertencem à classe IMPSD no ponto zero. Para ilustrar o estudo, dois conjuntos de dados de contagem com excesso de zeros foram analisados, dentro da metodologia dos MLG's, utilizando os modelos Poisson padrão, binomial negativa padrão, ZIP e ZINB. O método da

Tabela 3 - Número de plantas regeneradas (P.reg) para as concentrações de 2,4-D com 5 dias no escuro, BAP e NAA

NAA 0									NAA 0,1								
BAP	CE	P.reg	BAP	CE	P.reg	BAP	CE	P.reg	BAP	CE	P.reg	BAP	CE	P.reg	BAP	CE	P.reg
0,1	5	18	1	5	0	3	5	0	0,1	5	0	1	5	34	3	5	6
0,1	5	19	1	5	0	3	5	0	0,1	5	22	1	5	0	3	5	0
0,1	5	17	1	5	14	3	5	7	0,1	5	0	1	5	0	3	5	0
0,1	5	16	1	5	10	3	5	3	0,1	5	0	1	5	0	3	5	0
0,1	5	15	1	5	0	3	5	3	0,1	5	0	1	5	0	3	5	9
0,1	5	21	1	5	11	3	5	0	0,1	5	44	1	5	19	3	5	0
0,1	5	19	1	5	0	3	5	3	0,1	5	0	1	5	23	3	5	0
0,1	5	20	1	5	0	3	5	2	0,1	5	18	1	5	0	3	5	12
0,1	8	36	1	8	0	3	8	0	0,1	8	12	1	8	0	3	8	0
0,1	8	42	1	8	43	3	8	0	0,1	8	26	1	8	0	3	8	0
0,1	8	43	1	8	0	3	8	14	0,1	8	0	1	8	0	3	8	0
0,1	8	42	1	8	34	3	8	0	0,1	8	0	1	8	0	3	8	23
0,1	8	37	1	8	32	3	8	15	0,1	8	27	1	8	38	3	8	17
0,1	8	36	1	8	0	3	8	0	0,1	8	10	1	8	42	3	8	0
0,1	8	48	1	8	0	3	8	0	0,1	8	0	1	8	0	3	8	0
0,1	8	37	1	8	0	3	8	12	0,1	8	0	1	8	37	3	8	0
0,1	10	2	1	10	1	3	10	0	0,1	10	1	1	10	0	3	10	3
0,1	10	0	1	10	0	3	10	0	0,1	10	2	1	10	0	3	10	0
0,1	10	0	1	10	4	3	10	0	0,1	10	0	1	10	0	3	10	0
0,1	10	1	1	10	0	3	10	0	0,1	10	0	1	10	5	3	10	0
0,1	10	1	1	10	1	3	10	2	0,1	10	0	1	10	0	3	10	0
0,1	10	2	1	10	0	3	10	0	0,1	10	0	1	10	0	3	10	0
0,1	10	0	1	10	0	3	10	0	0,1	10	0	1	10	0	3	10	0
0,1	10	3	1	10	0	3	10	0	0,1	10	0	1	10	0	3	10	0
0,5	5	8	2	5	0	5	5	11	0,5	5	15	2	5	0	5	5	0
0,5	5	11	2	5	0	5	5	0	0,5	5	0	2	5	0	5	5	0
0,5	5	6	2	5	0	5	5	0	0,5	5	0	2	5	12	5	5	0
0,5	5	8	2	5	0	5	5	10	0,5	5	12	2	5	0	5	5	0
0,5	5	9	2	5	0	5	5	0	0,5	5	27	2	5	0	5	5	11
0,5	5	7	2	5	7	5	5	13	0,5	5	0	2	5	0	5	5	0
0,5	5	9	2	5	9	5	5	5	0,5	5	0	2	5	0	5	5	0
0,5	5	7	2	5	0	5	5	0	0,5	5	11	2	5	14	5	5	0
0,5	8	28	2	8	0	5	8	0	0,5	8	0	2	8	0	5	8	0
0,5	8	0	2	8	26	5	8	0	0,5	8	43	2	8	0	5	8	1
0,5	8	34	2	8	12	5	8	0	0,5	8	0	2	8	0	5	8	0
0,5	8	0	2	8	0	5	8	17	0,5	8	82	2	8	0	5	8	0
0,5	8	0	2	8	29	5	8	0	0,5	8	0	2	8	30	5	8	0
0,5	8	29	2	8	0	5	8	15	0,5	8	0	2	8	0	5	8	0
0,5	8	0	2	8	0	5	8	0	0,5	8	39	2	8	0	5	8	3
0,5	8	0	2	8	11	5	8	0	0,5	8	0	2	8	0	5	8	0
0,5	10	2	2	10	0	5	10	0	0,5	10	2	2	10	0	5	10	0
0,5	10	0	2	10	0	5	10	0	0,5	10	1	2	10	0	5	10	0
0,5	10	0	2	10	0	5	10	0	0,5	10	0	2	10	0	5	10	0
0,5	10	0	2	10	0	5	10	0	0,5	10	0	2	10	0	5	10	2
0,5	10	0	2	10	2	5	10	0	0,5	10	3	2	10	2	5	10	1
0,5	10	4	2	10	0	5	10	0	0,5	10	0	2	10	0	5	10	0
0,5	10	0	2	10	0	5	10	0	0,5	10	0	2	10	0	5	10	0
0,5	10	0	2	10	0	5	10	0	0,5	10	0	2	10	0	5	10	0

máxima verossimilhança foi usado para estimar os parâmetros dos modelos. A utilidade das distribuições inflacionadas foi mostrada pelos menores valores obtidos nos critérios AIC, BIC e

Tabela 4 - Resultados do ajuste dos modelos Poisson, binomial negativo, ZIP e ZINB para os dados da Tabela 3 considerando-se para $\log(\lambda)$ e $\log(\omega/1-\omega)$ um dos preditores lineares (1)BAP*NAA*CE, (2)BAP+NAA+CE, (3)BAP+NAA e (4)constante

	Modelos					
Descrição	$\log(\lambda)$	$\log(\omega/1-\omega)$	-2logL	AIC	CAIC	BIC
Poisson	(1)	0	3313.4	3337.4	3338.6	3381.4
	(2)	0	3341.6	3351.6	3351.8	3369.9
Binomial Nigativa	(1)	0	1139.2	1165.2	1166.6	1212.9
	(2)	0	1144.9	1156.9	1157.2	1178.9
ZIP	(1)	(4)	1103.9	1129.9	1131.2	1177.5
	(1)	(1)	1070.9	1118.9	1123.5	1206.8
	(1)	(2)	1076.2	1110.2	1112.4	1172.4
	(2)	(4)	1138.0	1150.0	1150.3	1172.0
	(2)	(1)	1104.7	1138.7	1140.9	1200.9
	(2)	(2)	1110.9	1130.9	1131.7	1167.5
	(2)	(3)	1116.0	1132.0	1132.5	1161.3
ZINB	(1)	(4)	996.9	1024.9	1026.4	1076.2
	(1)	(1)	965.3	1015.3	1020.3	1106.9
	(1)	(2)	970.3	1006.3	1008.8	1072.2
	(2)	(4)	1012.3	1026.3	1026.7	1051.9
	(2)	(1)	979.7	1015.7	1018.2	1081.6
	(2)	(2)	985.8	1007.8	1008.7	1048.1
	(2)	(3)	989.6	1007.6	1008.2	1040.5

CAIC. Ou seja, essas distribuições podem ser usadas mais efetivamente para proporcionar um melhor ajuste do que os modelos padrões, para dados com excesso de zeros. Além dos critérios de seleção a superioridade dos modelos inflacionados em zero foi mostrada por meio de uma análise gráfica utilizando gráficos normais de probabilidade com envelopes simulados.

(a) (b)

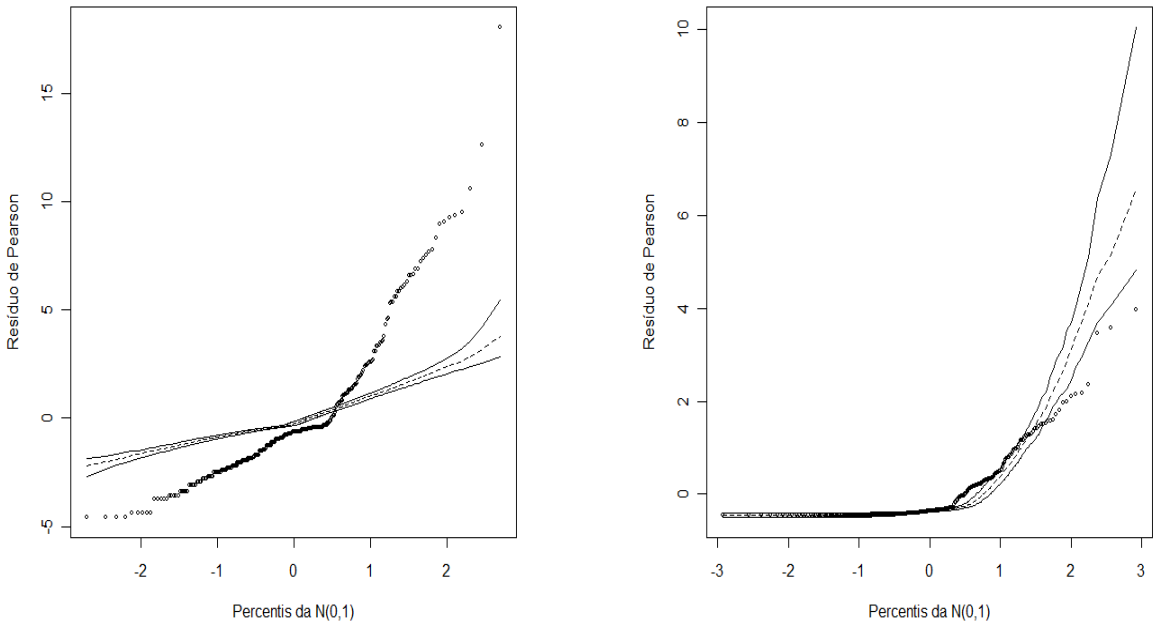

Figura 3 - Gráfico normal de probabilidades com envelope simulado para os resíduos de Pearson nos modelos (a) Poisson (b) binomial negativo

2.6.1 Trabalhos futuros

Como possíveis trabalhos futuros podem-se considerar os seguintes temas de pesquisa:

1. Explorar a análise de diagnóstico dos modelos inflacionados de zeros.

2. Desenvolver um estudo sobre inferência e teoria assintótica em modelos não-lineares em séries de potência modificada.

3. Considerar uma abordagem bayesiana para os modelos não-lineares generalizados em série de potências.

(a) (b)

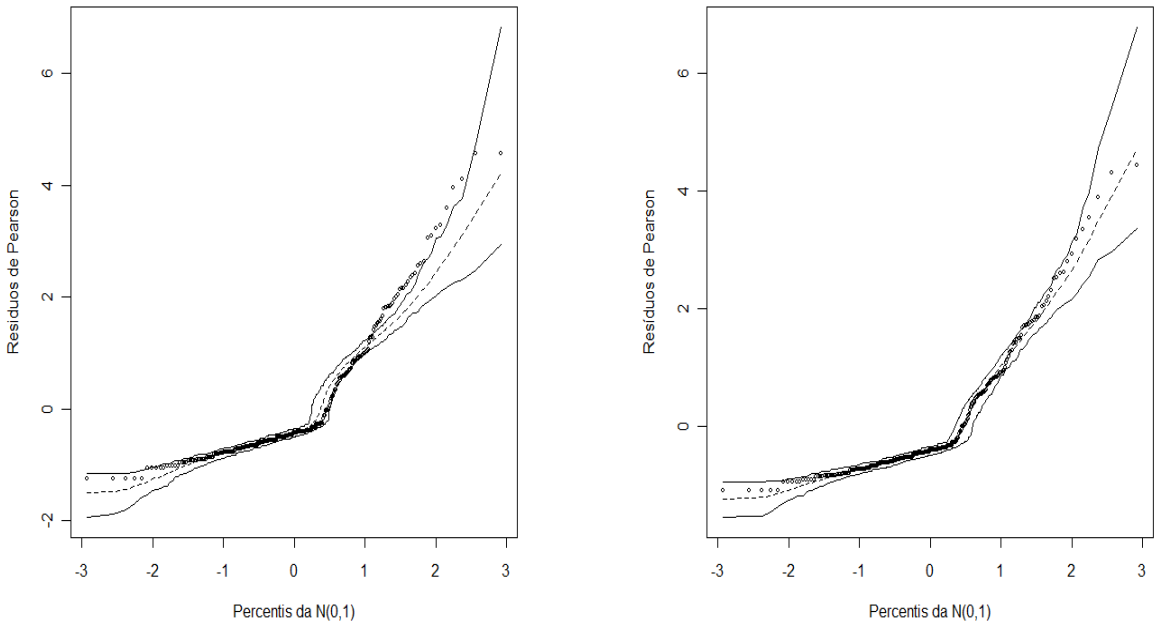

Figura 4 - Gráfico normal de probabilidades com envelope simulado para os resíduos de Pearson nos modelos (a) ZIP (b) ZINB

Referências

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.19, n.6, p.716-723, Dec. 1974.

BOREL, E. Sur l'emploi du théorème de bernoulli pour faciliter le calcul d'un infinité de coefficients. **Comptes Rendus, Académie des Sciences, Series A**, Paris, v.214, p.452–456, 1942.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrica**, Berlin, v.52, p.345-370, 1987.

CONSUL, P. C. On the differences of two generalized negative binomial variates. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, v.18, p.673–690, 1989.

CONSUL, P. C.; FAMOYE, F. On the unimodality of the generalized negative binomial distribution. **Statistica Neerlandica**, Netherland, v.40, p.141–144, 1986.

_____. On the generalized negative binomial distribution. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, v.24, p.459–472, 1995.

_____. **Lagrangian probability distributions**. Boston: Birkhäuser, 2006.

CONSUL, P. C.; SHENTON, L. R. Some interesting properties of lagrangian distributions. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, v.2, p.263–272, 1973.

FAMOYE, F.; CONSUL, P. C. Confidence interval estimation in the class of modified power series distributions. **Statistics**, Berlin, v.20, p.141-148, 1989.

GREENWOOD, M.; WOOD, H.M. **The incidence of industrial accidents upon individuals**: with special reference to multiple accidents. London: Industrial Fatigue Research Board, Medical Research Committee, 1919. (Report n.4).

GREENWOOD, M.; YULE, G.U. An inquiry into the nature of frequency distributions representative of multiple happenings with particular reference to the occurrence of multiple attacks of disease or of repeated accidents. **Journal of the Royal Statistical Society**, London, v.83, p.255-279, 1920.

GUPTA, P.L.; GUPTA, R.C.; TRIPATHI, R.C. Inflated modified power series distributions with applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.24, p.2355—2374, 1995.

GUPTA, P.L.; SINGH, J. On the moments and factorial moments of a MPSD. In: TAILLIE,C.; PATIL,G.P.; BALDESSARI,B.A. (Ed) **Statistical distributions in scientific work**. Dordrecht: Reidel, 1981. v.4, p.189-195.

GUPTA, R.C. Modified power series distribution and some of its applications. **Sankhyã, Serie B**, Calcutta, v.36, p.288-298, 1974.

_____. Maximum-likelihood estimation of a modified power series distribution and some of its applications. **Communications in Statistics**, New York, v.4, p.687–697, 1975.

_____. Minimum variance unbiased estimation in a modified power series distribution and some of its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.6, p.977-991, 1977.

GUPTA, R.C.; SINGH, J. Estimation of probabilities in the class of modified power series distributions. **Mathematische Operationforschung und Statistik, series Statistics**, New Jersey, v.13, p.71–77, 1982.

HAIGHT, F.A.; BREUER, M.A. The Borel-Tanner distribution. **Biometrika**, Washington, v.47, p.145–150, 1960.

HALDANE, J.B.S.; SMITH, S.M. The sampling distribution of a maximum likelihood estimate. **Biometrika**, Washington, v.43, p.96-103, 1956.

JAIN, G.C.; CONSUL, P.C. A Generalized Negative Binomial Distribution. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Philadelphia, v.21, p.501-513, 1971.

JOHNSON, N.L.; KEMP, A.W.; KOTZ, S. **Univariate discrete distributions**. 3rd ed. New York: John Wiley, 2005.

KENDALL, M. G.; STUART, A. **The advanced theory of statistics**. 6th ed, London: Charles Griffen, 1963. v.1.

KUMAR, A. Some applications of lagrangian distributions in queueing theory and epidemiology. **Communications Statistics -, Theory and Methods**, New York, v.10, p.1429–1436, 1981.

KUMAR, A.; CONSUL, P.C. Negative moments of a modified power series distribution and bias of the maximum likelihood estimator. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.8, p.151-166, 1979.

_____. Minimum variance unbiased estimation for modified power series distribution. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.9, p.1261—1275, 1980.

LAMBERT, D. Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing. **Technometrics**, Alexandria, v.34, p.1-14, 1992.

MONTOYA, A.G.M. **Inferência e diagnóstico em modelos para dados de contagem com excesso de zeros**. 2009. 117p. Dissertação (Mestrado em Estatística) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

MURAT, M.; SZYNAL, D. Non-zero inflated modified power series distributions. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.27, p.3047—3064, 1998.

NEWBOLD, E.M. **Contribution to the study of the human factor in the causation of accidents**. London: Industrial Fatigue Research Board, Medical Research Committee, 1926. (Report n.34.

_____. Practical applications to the statistics of repeated events particularly of industrial accidents. **Journal of the Royal Statistical Society**, New York, v.90, p.487-547, 1927.

NOACK, A. A class of random variables with discrete distributions. **The Annals of Mathematical Statistics**, Berlin, v.21, p.127-132, 1950.

PATIL, G.P. Certain properties of the generalized power series distribution. **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, Tokyo, v.14, p.179-182, 1962.

RIDOUT, M.S.; DEMÉTRIO, C.G.B.; HINDE, J.P. Models for count data with many zeros. In: INTERNATIONAL BIOMETRICS CONFERENCE, 19., 1998, Cape Town. **Invited Papers**... Cape Town, 1998. p. 179-192.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, Mar. 1978.

TANNER, J. A problem of interference between two queues. **Biometrika**, Washington, v.40, p.58–69, 1953.

TRIPATHI, R.C.; GUPTA, P.L.; Gupta, R.C. Incomplete moments of modified power series distributions with applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.15, p.999—1015, 1986.

YIP, P. Inference about the mean of a Poisson distribution in the presence of a nuisance parameter. **Australian Journal of Statistics**, Sydney, v.30, p.299-306, 1988.

3 DISTRIBUIÇÃO WEIBULL-BINOMIAL NEGATIVA

Resumo

Neste trabalho, desenvolveu-se a distribuição Weibull binomial negativa e algumas de suas propriedades matemáticas são estudadas. Essa é uma importante alternativa para análise de dados positivos, tendo os modelos Weibull, Weibull Poisson e Weibull geométrica como sub-modelos. É mostrado que a função densidade da distribuição Weibull binomial negativa (WNB) pode ser expressa como uma mistura de densidades Weibull. Fornecem-se também seus momentos e uma expressão de forma fechada para a função geradora de momentos. Gráficos da assimetria, assimetria de Bowley, curtose e Curtose de Moors são exibidos. São obtidas expressões explícitas para os desvios médios, curvas de Bonferroni e Lorenz, função quantílica, confiabilidade e entropia. A densidade da estatística de ordem da Weibull binomial negativa também pode ser expressa em termos de uma mistura infinita da densidade Weibull. Obtêm-se expressões explícitas para os momentos da estatística de ordem. O método da máxima verossimilhança é usado para estimar os parâmetros do modelo. A matriz de informação esperada é derivada. A utilidade da nova distribuição está ilustrada na análise de dois conjuntos de dados reais.

Palavras-chave: Distribuição Weibull; Distribuição Weibull binomial negativa; Função geradora de momentos; Matriz de informação; Maxima verossimilhança

Abstract

In this article we study some mathematical properties of the Weibull negative binomial distribution which is quite flexible in analyzing positive data. It is an important alternative model to the Weibull, Weibull Poisson and Weibull geometric distributions since it contains all of them as special sub-models. We demonstrate that the Weibull negative binomial density can be expressed as a mixture of Weibull densities. We provide their moments and a closed form expression for it moment generating function. Plots of the skewness, Bowley skewness, kurtosis and Moors kurtosis are given. Explicit expressions are also derived for the mean deviations, Bonferroni and Lorenz curves, quantile function, reliability and entropy. The

density of the Weibull negative binomial order statistics can also be expressed in terms of an infinite mixture of Weibull densities. We obtain explicit expressions for the moments of order statistics. The method of maximum likelihood is used for estimating the model parameters. The expected information matrix is derived. The usefulness of the new distribution is illustrated in two analysis of a real data set.

Keywords: Information matrix; Maximum likelihood; Moment generating function; Weibull negative binomial distribution; Weibull distribution

3.1 Introdução

A distribuição Weibull é um modelo muito popular e tem sido usado extensivamente nas últimas décadas para a modelagem de dados em análise de sobrevivência, engenharia de confiabilidade, análise de falhas, engenharia industrial para representar fabricação e prazos de entrega, previsão do tempo para descrever as distribuições de velocidade do vento, modelo de canais com comunicações sem fio e em seguros para modelar o tamanho da alegações de resseguros. Em hidrologia, a distribuição Weibull é aplicada a eventos extremos, como precipitações e vazões.

Seguindo a idéia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições, introduzir-se-ão e estudar-se-ão várias propriedades matemáticas da distribuição Weibull binomial negativa (WNB). A distribuição Weibull representa apenas um sub-modelo especial da distribuição WNB. Fornecer-se-á, também, uma descrição detalhada de algumas propriedades estruturais da distribuição proposta com a esperança de que ela vai atrair aplicações mais amplas em engenharia de confiabilidade e, em outras áreas da investigação.

Seja $W_1, ...W_Z$ uma amostra aleatória da distribuição com densidade

$$f(\omega, a, b) = ab\omega^{b-1}e^{(-a\omega^b)}, \tag{42}$$

$a, b \in I\!R_+$, $\omega = 0, 1, \cdots$. Z é uma variável binomial negativa truncada em zero com função de probabilidade

$$\mathrm{P}(z; s, \beta) = \frac{\beta^z \binom{s+z-1}{z}}{(1-\beta)^{-s} - 1}, \tag{43}$$

$z \in I\!N$, $\beta \in (0,1)$ e $s > 0$. Z e W's são independentes. Define-se $X = min(W_1, ...W_Z)$. Quer-se encontrar a função densidade de probabilidade marginal de X.

Integrando a expressão (42) de $-\infty$ a ω, obtém-se a função de distribuição acumulada de W, $F_W(w; a, b)$,

$$F_W(\omega; a, b) = \int_{-\infty}^{\omega} f(t; a, b)dt = \int_0^{\omega} abt^{b-1}e^{(-at^b)}dt = a\int_0^{\omega} e^{(-at^b)}(bt^{b-1})dt.$$

Considerando $k = t^b$, será feita uma mudança de variável na integral. Assim,

$$F_W(\omega; a, b) = a\int_0^{\omega^b} e^{(-ak)}dt = 1 - e^{-a\omega^b}. \tag{44}$$

Sabe-se que $W_1, ...W_Z$ é uma amostra aleatória, isto é, $W_1, ...W_Z$ são independente e identicamente distribuídas (iid). Utilizando a distribuição do mínimo para variáveis iid e a expressão (44), obtém-se a função de distribuição acumulada de X, $F_X(x)$

$$F_X(x) = 1 - [1 - F_W(x)]^z = 1 - [1 - 1 + e^{-ax^b}]^z = 1 - e^{-ax^b z} = F_X(x|z; a, b). \tag{45}$$

Diferenciando a expressão (45) em relação a x, obtém-se a função densidade de probabilidade de X condicionada a $Z; a, b$,

$$f(x|z; a, b) = \frac{\partial F_X}{\partial x}(x|z; a, b) = azbx^{b-1}e^{-azx^b}. \tag{46}$$

Fazendo uso das expressões (46) e (43) e do fato que X e Z são independentes, obtém-se a função densidade de probabilidade conjunta de (X,Z),

$$f(x, z; a, b, s, \beta) = f(x|z; a, b).\mathrm{P}(z; s, \beta) = azbx^{b-1}e^{-azx^b}\frac{\beta^z\binom{s+z-1}{z}}{(1-\beta)^{-s} - 1}. \tag{47}$$

Somando a expressão (47) para z variando de 1 a ∞, obtém-se a função densidade de probabilidade marginal de X, $f(x; \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta} = (a, b, s, \beta)$,

$$\begin{aligned}
f(x; \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{z=1}^{\infty} f(x, z; a, b, s, \beta) \\
&= \sum_{z=1}^{\infty} azbx^{b-1}e^{-azx^b}\frac{\beta^z\binom{s+z-1}{z}}{(1-\beta)^{-s} - 1} \\
&= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s} - 1]}\sum_{z=1}^{\infty} ze^{-azx^b}\beta^z\binom{s+z-1}{z} \\
&= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s} - 1]}s\sum_{z=1}^{\infty}(e^{-ax^b}\beta)^z\binom{s+z-1}{z-1}.
\end{aligned}$$

Considerando-se $k = z - 1$, para fazer uma mudança de variável no somatório, tem-se

$$\begin{aligned} f(x;\boldsymbol{\theta}) &= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} s \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ax^b}\beta)^{k+1} \binom{(s+1)+k-1}{k} \\ &= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} s e^{-ax^b}\beta \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ax^b}\beta)^{k} \frac{(s+1)}{[(s+1)+k]} \binom{(s+1)+k}{k} \\ &= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} s e^{-ax^b}\beta \sum_{k=0}^{\infty} \{(e^{-ax^b}\beta)[1-(e^{-ax^b}\beta)^{1-1}]\}^{k} \frac{(s+1)}{[(s+1)+k]} \binom{(s+1)+k}{k}. \end{aligned} \tag{48}$$

Usando a expansão de Lagrange (CONSUL; FAMOYE, 2006), com $\alpha = e^{-ax^b}\beta$, $n = s + 1$ e $l = 1$, isto é,

$$(1-\alpha)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+kl} \binom{n+kl}{k} [\alpha(1-\alpha)^{l-1}]^k. \tag{49}$$

obtém-se a fdp marginal de X,

$$f(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} s e^{-ax^b}\beta [1-e^{-ax^b}\beta]^{-(s+1)}. \tag{50}$$

Na sequência a distribuição de X, expressão (50), será referenciada como a distribuição Weibull binomial negativa (WNB), que é um nome habitual para distribuições obtidas por meio da operação de composição (mistura) na literatura. Na Figura 5, gráficos da função densidade da distribuição WNB são apresentados para alguns valores selecionados do vetor $\boldsymbol{\theta} = (a, b, s, \beta)$. Para todos os valores dos parâmetros, a função densidade (50) tende a zero quando $x \to \infty$.

Integrando a equação (50), de zero a x, obtém-se, a função de distribuição acumulada da distribuição WNB (com quatro parâmetros positivos e $x > 0$),

$$F(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{[(1-\beta)^{-s} - (1-e^{-ax^b}\beta)^{-s}]}{[(1-\beta)^{-s}-1]}. \tag{51}$$

A função taxa de falha da distribuição WNB pode ser expressa como

$$\tau(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{abx^{b-1}e^{-ax^b}\beta s(1-e^{-ax^b}\beta)^{-(s+1)}}{[(1-e^{-ax^b}\beta)^{-s}-1]}. \tag{52}$$

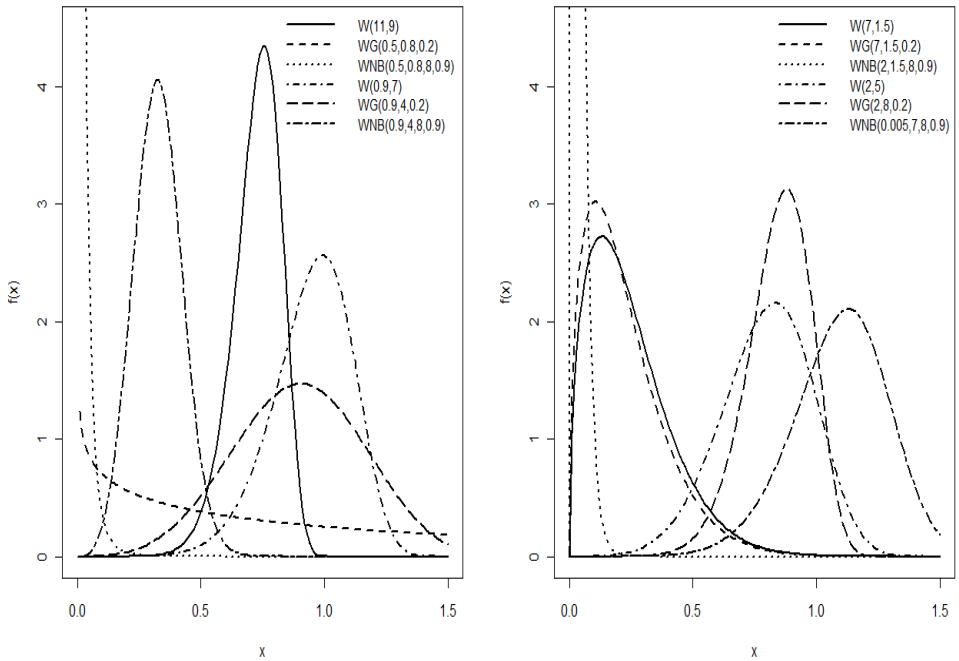

Figura 5 - Gráficos da função densidade (50) para alguns valores dos parâmetros

Na Figura 6, são apresentados gráficos para a função de risco para alguns valores do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (a, b, s, \beta)$.

Se X é uma variável aleatória com função densidade (50), escreve-se $X \sim WNB(a, b, s, \beta)$. A função densidade WNB (50) pode ser amplamente aplicada em muitas áreas da engenharia e biologia. Estudar-se-ão algumas propriedades estruturais dessa distribuição, pois ela estende várias distribuições, anteriormente, consideradas na literatura. De fato, quando $s = 1$ e $\beta \to 0$, a distribuição Weibull com parâmetros a e b é, claramente, um sub-modelo especial. Se $s = 1$, $b = 1$ e $\beta \to 0$, obtém-se a distribuição exponencial. A distribuição WNB, também, contém as distribuições exponencial Poisson (EP) (KUS, 2007) e Weibull Poisson (WP) (BERETA et al., 2010) como sub-modelos quando $\beta = \lambda/s$, $s \to \infty$ e, no segundo caso, juntamente com $b = 1$. Para $s = 1$ a equação (50) se torna a distribuição Weibull geométrica (WG) (SOUZA et al., 2010).

O restante do trabalho é organizado como se segue. Demostra-se na seção 3.2 que a função densidade da distribuição WNB pode ser expressa como uma mistura da função

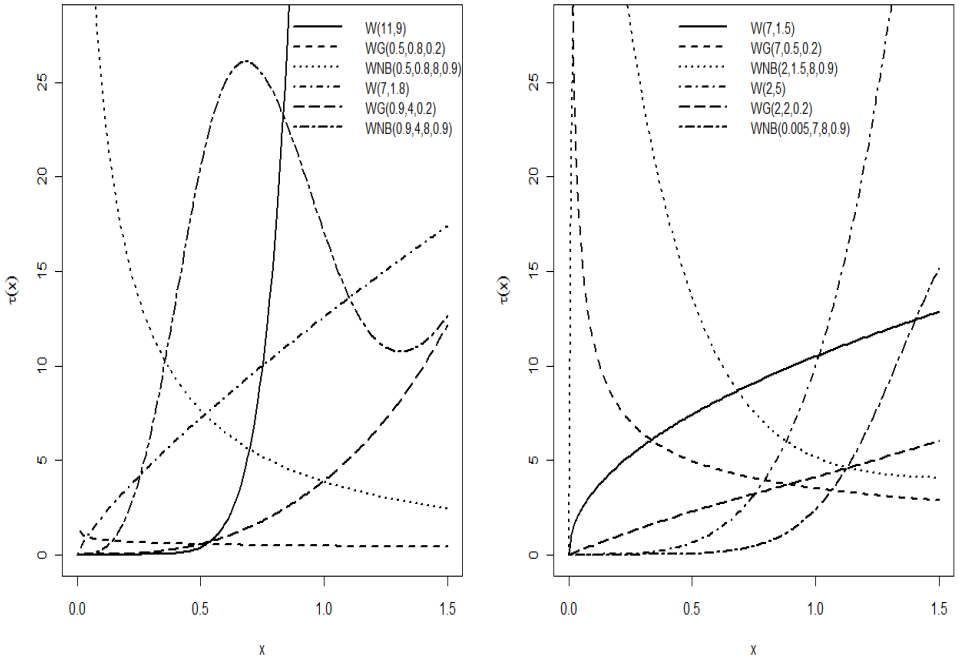

Figura 6 - Gráficos da função de risco (52) para alguns valores dos parâmetros

densidade da Weibull. Este resultado é importante para fornecer propriedades matemáticas do novo modelo diretamente das propriedades da distribuição Weibull. Algumas propriedades matemáticas são consideradas nas seções 3.3 a 3.7. Essas incluem, simulação, assimetria e curtose, função geradora de momentos, desvios médios e Curvas de Bonferroni e Lorenz. Na seção 3.8, demostra-se que a densidade da estatística de ordem da WNB é uma combinação linear de densidades Weibull. Formas fechadas para os momentos das estatística de ordem da WNB são obtidas na seção 3.9. A confiabilidade e a entropia de Rényi são investigadas nas seções 3.10 e 3.11, respectivamente. Estimação pelo método da máxima verossimilhança e inferencia estão presentes nas seções 3.12 e 3.13, respectivamente. A análise de dois conjuntos de dados reais é dada na seção 3.14.

3.2 Expansão para a função densidade

A fdp (50) e a fda (51) são simples de calcular usando qualquer software estatístico.

Pode-se escrever a fdp da distribuição WNB, dada pela expressão (50), como uma mistura de distribuições Weibull, partindo da equação (48)

$$
\begin{aligned}
f(x;\boldsymbol{\theta}) &= \frac{abx^{b-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} s \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ax^b}\beta)^{k+1} \binom{(s+1)+k-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+1} \frac{s}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \beta^{k+1} \binom{s+k}{k} abx^{b-1} e^{-a(k+1)x^b} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{s}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \binom{s+k}{k} \frac{\beta^{k+1}}{k+1}}_{\omega_k} \underbrace{a(k+1)bx^{b-1}e^{-a(k+1)x^b}}_{f(x,a(k+1),b)} \qquad (53) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k f(x, a(k+1), b),
\end{aligned}
$$

em que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \binom{s+k}{k} \frac{\beta^{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{k+1} \binom{s+k}{k} \beta^{k+1} \\
&= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{s+(k+1)} \binom{s+(k+1)}{(k+1)} \beta^{k+1} \\
&= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{s+(k+1)} \binom{s+(k+1)}{(k+1)} [\beta(1-\beta)^{1-1}]^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Usando a expansão (49), com $\alpha = \beta$, $n = s$ e $l = 1$, e fazendo uma mudança de variável no somatório, $m = k+1$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k &= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s}{s+m} \binom{s+m}{m} [\beta(1-\beta)^{1-1}]^m \right\} \\
&= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{s}{s+m} \binom{s+m}{m} [\beta(1-\beta)^{1-1}]^m \right] - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \{[(1-\beta)^{-s}] - 1\} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Integrando a equação (53), de zero a x, obtém-se, a função de distribuição acu-

mulada da distribuição WNB, escrita como mistura da fda da distribuição Weibull

$$F(x;\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \quad G_{a(k+1),b}(x), \tag{54}$$

em que $G_{a(k+1),b}(x) = \int_0^x g_{a(k+1),b}(t)/dt$ é a fda da distribuição Weibull com parâmetro de escala $a(k+1)$ e parâmetro de forma b and ω_k é dado em (53).

Os momentos ordinário, central, inverso e fatorial da distribuição WNB podem ser obtidos em termos dos momentos da distribuição Weibull. Por exemplo, o r-ésimo momento da distribuição Weibull com parâmetros a e b é $\mu'_r = \Gamma(r/b+1)a^{-r/b}$. Então, pode-se obter, imediatamente, da equação (53), o r-ésimo momento generalizado da distribuição WNB.

$$E(X^r) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \left[\frac{\Gamma(r/b+1)}{[a(k+1)]^{r/b}}\right] = \frac{\Gamma(r/b+1)}{a^{r/b}} \frac{s}{[(1-\beta)^{-s}-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k}{k} \frac{\beta^{k+1}}{(k+1)^{r/b+1}}. \tag{55}$$

As fórmulas relacionadas com a distribuição WNB tornam-se gerenciáveis, como é mostrado no restante deste trabalho, e com o uso de recursos do computador moderno com capacidade analítica e numérica, podem-se transformar em ferramentas adequadas que compõem o arsenal de estatística aplicada. Espera-se que os resultados gerais no trabalho façam o modelo WNB atrair ainda mais aplicações em confiabilidade, biologia, engenharia e estatística.

3.3 Função Quantílica

Simular dados da distribuição WNB é simples. Note que a inversa da fda correspondente à equação (51) é

$$Q(u) = F^{-1}(u;\boldsymbol{\theta}) = \left\{\log\left[\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\{[1-(1-\beta)^{-s}]u + (1-\beta)^{-s}\}^{1/s}}\right)\right]^{-1/a}\right\}^{1/b}. \tag{56}$$

Teorema 8 *Se X é uma variável aleatória com função de distribuição acumulada contínua $F_X(x)$, então, $U = F_X(X)$ é uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$. Reciprocamente, se U é uniformemente distribuída no intervalo $(0,1)$, então, $X = F_X^{-1}(U)$ tem função de distribuição acumulada $F_X(\cdot)$*

Pelo Teorema 8 podem-se gerar variáveis aleatórias da WNB por

$$X = \left\{\log\left[\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\{[1-(1-\beta)^{-s}]u + (1-\beta)^{-s}\}^{1/s}}\right)\right]^{-1/a}\right\}^{1/b},$$

em que u é uniformemente distribuída sobre o intervalo $(0, 1)$.

Para isto foi desenvolvido um programa no software estatístico R (R Development Core Team, 2008), o qual pode ser visto no apêndice B.

3.4 Assimetria e Curtose

Numa distribuição estatística, a assimetria é o quanto sua curva de frequência se desvia ou afasta da posição simétrica. Podem-se caracterizar as distribuições de frequência em: assimétrica à direita ou positiva, assimétrica à esquerda ou negativa e assimetria nula ou simétrica. Essa medida pode ser definida por

$$\text{Assimetria}(X) = \frac{\mathrm{E}(X^3) - 3\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^2) + 2\mathrm{E}^3(X)}{\mathrm{Var}^2(X)} \tag{57}$$

Curtose é o grau de achatamento de uma distribuição em relação à distribuição normal padrão. São três os tipos curvas de distribuição no que se refere à curtose: leptocúrtica, mesocúrtica e platicúrtica. Essa medida pode ser definida por

$$\text{Curtose}(X) = \frac{\mathrm{E}(X^4) - 4\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^3) + 6\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}^2(X) - 3E^4(X)}{\mathrm{Var}^2(X)} \tag{58}$$

Gráficos das medidas (57) and (58) são dados nas Figuras 3.4 e 3.4. Ambas, a assimetria e a curtose, crescem com s para β fixo e com β para s fixo.

Assimetria de Bowley (KENNEY; KEEPING, 1962) é baseada nos quartis

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{Q}(3/4) - 2\mathrm{Q}(1/2) + \mathrm{Q}(1/4)}{\mathrm{Q}(3/4) - \mathrm{Q}(1/4)} \tag{59}$$

e a curtose de Moors (MOORS, 1998) é baseada nos octis

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{Q}(7/8) - \mathrm{Q}(5/8) + \mathrm{Q}(3/8) - \mathrm{Q}(1/8)}{\mathrm{Q}(6/8) - \mathrm{Q}(2/8)} \tag{60}$$

em que $\mathrm{Q}(u)$ representa a função quantílica, dada em (56).

Essas medidas são menos sensíveis a pontos extremos e existem mesmo para distribuições sem momentos.

Gráficos das medidas (59) e (60) são dados nas Figuras 3.4 e 3.4. Para β fixo, quando s aumenta, a assimetria de Bowley e a curtose de Moors crescem, inicialmente, até um máximo e, então, decrescem. O comportamento de ambas as medidas quando β aumenta depende do valor fixo de s.

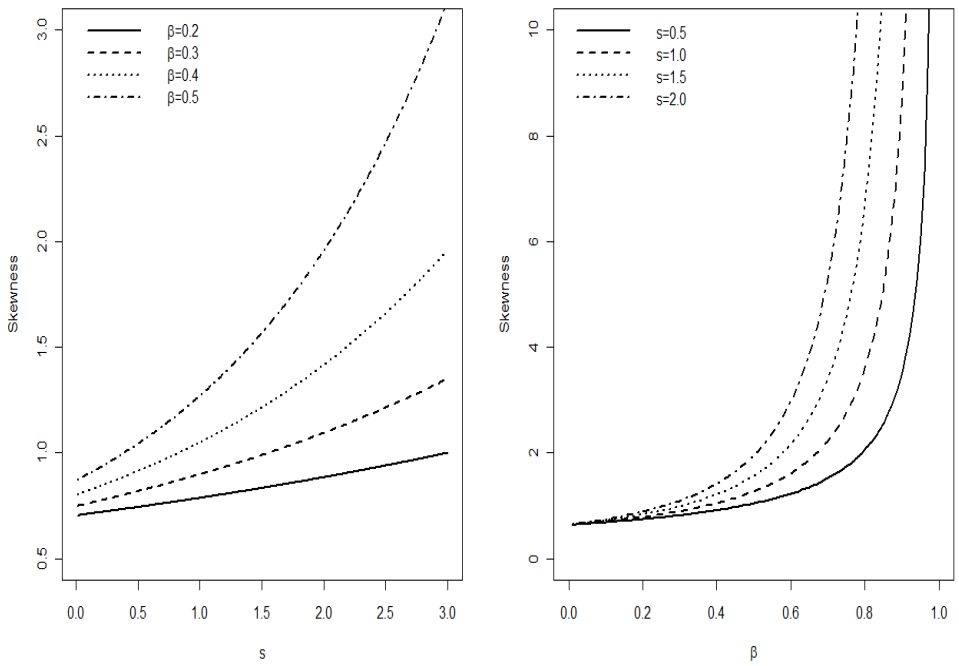

Figura 7 - Gráficos dos valores dos coeficientes de assimetria da distribuição WNB para $a = 0.3$, $b = 1.4$, como função de s e alguns valore de β e como função de β e alguns valores de s

3.5 Função Geradora de Momentos

Seja $X \sim \text{WNB}(a, b, s, \beta)$. A fgm de X, $M(t) = E[\exp(tX)]$, é dada por

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} E(X^r), \tag{61}$$

em que $E(X^r)$ é dada por (55).

Substituindo a equação (55) na equação (61) tem-se

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \omega_k \frac{t^r}{r!} \frac{\Gamma(r/b+1)}{[a(k+1)]^{r/b}}.$$

Duas expressões com formas fechadas serão derivadas para a fgm de X.

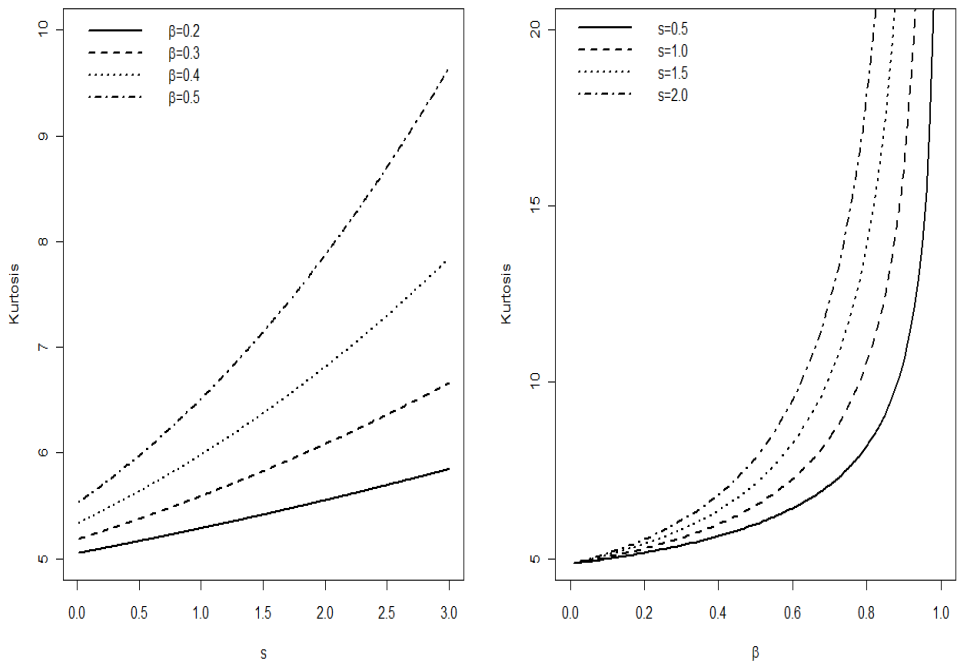

Figura 8 - Gráficos dos valores dos coeficientes de curtose da distribuição WNB para $a = 0.3$, $b = 1.4$, como função de s e alguns valore de β e como função de β e alguns valores de s

$$
\begin{aligned}
M(t) &= \frac{a\,b\,s\,\beta}{[(1-\beta)^{-s}-1])}\int_0^\infty \exp(tx)x^{b-1}\exp(-ax^b)\left[1-\beta\exp\left(-ax^b\right)\right]^{-(s+1)}dx \\
&= \frac{a\,b\,s\,\beta}{[(1-\beta)^{-s}-1])}\int_0^\infty \exp(tx)x^{b-1}\exp(-ax^b)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k}{k}(\beta\,\exp\left(-ax^b\right))^k dx \\
&= \frac{a\,b\,s\,\beta}{[(1-\beta)^{-s}-1])}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k}{k}\beta^{k+1}\int_0^\infty \exp(tx)x^{b-1}\exp[-a(k+1)x^b]dx. \qquad (62)
\end{aligned}
$$

Da função G-Meijer definida por

$$
G_{p,q}^{m,n}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+t\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-t\right)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+t\right)\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma\left(1-b_j-t\right)}x^{-t}dt, \qquad (63)
$$

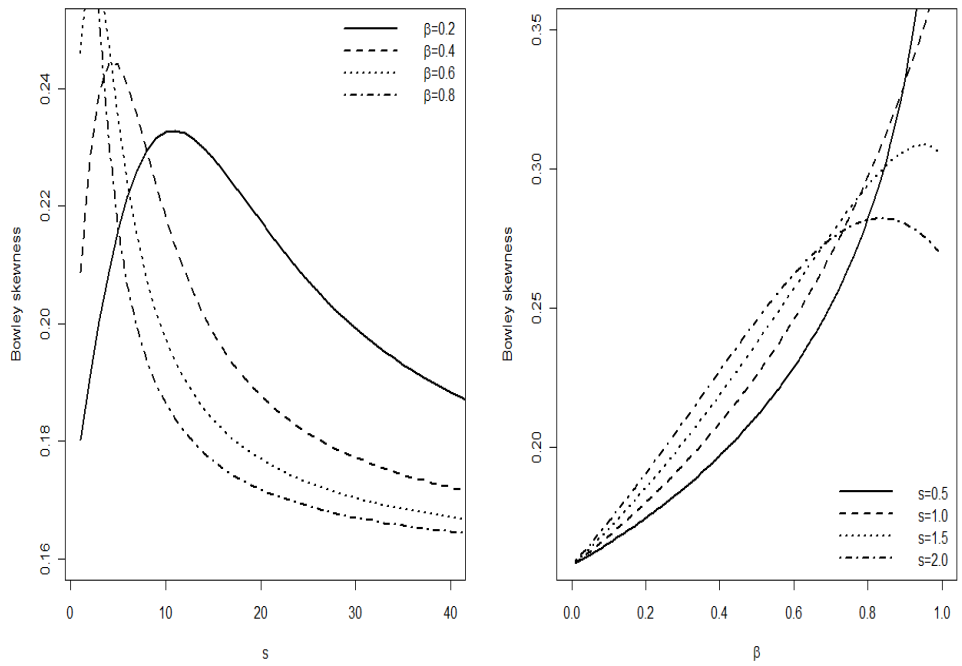

Figura 9 - Gráficos dos valores da assimetria de Bowley da distribuição WNB para $a = 0.3$, $b = 1.4$, como função de s e alguns valore de β e como função de β e alguns valores de s

e do resultado $\exp\{-g(x)\} = G_{0,1}^{1,0}(g(x) \mid \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix})$ para $g(\cdot)$ uma função arbitrária, a integral da equação (62) pode ser escrita como

$$I = \int_0^\infty x^{b-1} \exp[lx - a(k+1)x^b]dx = \int_0^\infty x^{b-1} \exp(lx)\, G_{0,1}^{1,0}\left(a(k+1)x^b \middle| \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \right) dx.$$

Assumindo que $b = p/q$, onde $p \geq 1$ e $q \geq 1$ são co-primos inteiros e usando a equação (2.24.1.1) dada em Prudnikov *et al.* (1986, volume 3), obtém-se

$$I \;=\; \frac{p^{b-1/2}(-l)^{-b}}{(2\pi)^{(p+q)/2-1}} G_{q,p}^{p,q}\left(\frac{\{[a(k+1)]^{b^{-1}}b\}^q p^p}{(-l)^p q^q} \middle| \begin{matrix} \frac{1-b}{p}, \frac{2-b}{p}, \ldots, \frac{p-b}{p} \\ 0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q} \end{matrix} \right). \tag{64}$$

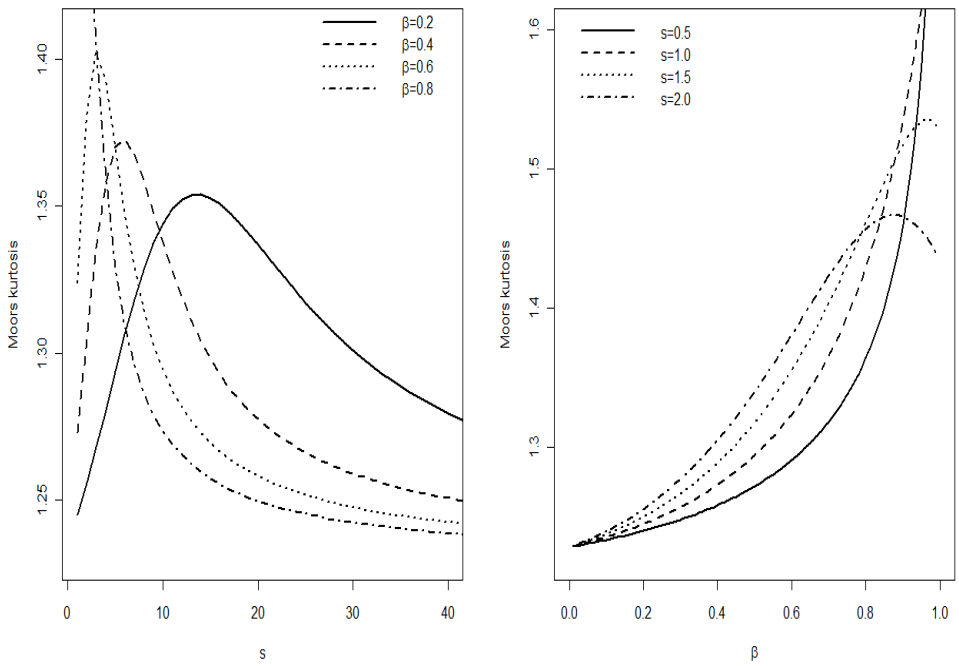

Figura 10 - Gráficos dos valores da curtose de Moors da distribuição WNB para $a = 0.3$, $b = 1.4$, como função de s e alguns valore de β e como função de β e alguns valores de s

Das equações (62), (63) e (64), vem

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{a\,b\,s\,p^{b-1/2}(-t)^{-b}}{[(1-\beta)^{-s}-1](2\pi)^{(p+q)/2-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{k+1}}{\binom{s+k}{k}} \\ &\times G^{p,q}_{q,p}\left(\frac{\{[a(k+1)]^{b^{-1}}b\}^q p^p}{(-t)^p q^q} \middle| \begin{array}{c} \frac{1-b}{p}, \frac{2-b}{p}, \ldots, \frac{p-b}{p} \\ 0, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q} \end{array} \right). \end{aligned} \tag{65}$$

Note que a condição $b = p/q$ na equação (65) não é restritiva já que todo número real pode ser aproximado por um número racional.

Outra representação para a integral I pode ser obtida usando a função hiper-

geométrica generalizada de Wright, definida por

$$ {}_p\Psi_q \left[\begin{array}{c} (\alpha_1, A_1), \cdots, (\alpha_p, A_p) \\ (\beta_1, B_1), \cdots, (\beta_q, B_q) \end{array} ; x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\alpha_j + A_j\, n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(\beta_j + B_j\, n)} \frac{x^n}{n!}. $$

Assim,

$$ \begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l^j}{j!} \int_0^{\infty} x^{j+b-1} \exp\left\{ - \left[(a(k+1))^{b^{-1}} x \right]^b \right\} dx \\ &= \frac{1}{ba\,(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(l/[a(k+1)]^{b^{-1}})^j}{j!} \Gamma\left(\frac{j}{b} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{ba\,(k+1)} {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (1, 1/b) \\ - \end{array} ; \frac{l}{[a(k+1)]^{b^{-1}}} \right] \end{aligned} \tag{66} $$

desde que $b > 1$. Combinando as expressões (62) e (66) produz-se a segunda representação para a fgm

$$ M(t) = \frac{s}{[(1-\beta)^{-s} - 1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{k+1}}{(k+1)} \binom{s+k}{k} {}_1\Psi_0 \left[\begin{array}{c} (1, 1/b) \\ - \end{array} ; \frac{t}{[a(k+1)]^{b-1}} \right] \tag{67} $$

desde que $b > 1$. Claramente, fórmulas especiais para a fgm das distribuições Weibull, Weibull geométrica and Weibull Poisson podem ser obtidas, diretamente, a partir das equações (65) e (67) substituindo os parâmetros conhecidos.

3.6 Desvios Médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média (no caso de uma distribuição simétrica) ou em relação à mediana (no caso de uma distribuição assimétrica). Se X é uma variável aleatória com distribuição WNB com média $\mu = \mathrm{E}[X]$ e mediana M, então, o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por

$$ \delta_1(X) = \int_0^{\infty} |x - \mu|\, f(x) dx \;\text{ e }\; \delta_2(X) = \int_0^{\infty} |x - M|\, f(x) dx. $$

As medidas $\delta_1(X)$ and $\delta_2(X)$ podem ser calculadas, usando-se as relações

$$\begin{aligned}
\delta_1(X) &= \int_0^\infty |x-\mu|\, f(x)dx \\
&= \int_0^\mu (\mu - x)f(x)dx + \int_\mu^\infty (x-\mu)f(x)dx \\
&= \int_0^\mu \mu f(x)dx - \int_0^\mu xf(x)dx + \int_\mu^\infty xf(x)dx - \int_\mu^\infty \mu f(x)dx \\
&= \mu\int_0^\mu f(x)dx - \left[\mu - \int_\mu^\infty xf(x)dx\right] + \int_\mu^\infty xf(x)dx - \mu\int_\mu^\infty f(x)dx \\
&= \mu F(\mu) - \mu + \int_\mu^\infty xf(x)dx + \int_\mu^\infty xf(x)dx - \mu[1-F(\mu)] \\
&= \mu F(\mu) - \mu + 2\int_\mu^\infty xf(x)dx - \mu + \mu F(\mu) \\
&= 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2\int_\mu^\infty xf(x)dx \qquad (68)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta_2(X) &= \int_0^\infty |x-M|\, f(x)dx \\
&= \int_0^M (M - x)f(x)dx + \int_M^\infty (x-M)f(x)dx \\
&= \int_0^M Mf(x)dx - \int_0^M xf(x)dx + \int_M^\infty xf(x)dx - \int_M^\infty Mf(x)dx \\
&= M\int_0^M f(x)dx - \left[\mu - \int_M^\infty xf(x)dx\right] + \int_M^\infty xf(x)dx - M\int_M^\infty f(x)dx \\
&= MF(M) - \mu + \int_M^\infty xf(x)dx + \int_M^\infty xf(x)dx - M(1-F(M)) \\
&= 2MF(M) - M - \mu + 2\int_M^\infty xf(x)dx \\
&= M(2F(M)-1) - \mu + 2\int_M^\infty xf(x)dx \\
&= 2\int_M^\infty xf(x)dx - \mu.
\end{aligned}$$

Calculando a integral na equação (68) pode-se obter o desvio médio para a distribuição WNB, em que a função densidade é dada pela equação (53). Então,

$$\begin{aligned}
\int_\mu^\infty xf(x)dx &= \int_\mu^\infty x\sum_{k=0}^\infty \omega_k e^{-a(k+1)x^b} a(k+1)bx^{b-1}dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \omega_k \int_\mu^\infty xe^{-a(k+1)x^b} a(k+1)bx^{b-1}dx. \qquad (69)
\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $v = a(k+1)x^b$ na integral da equação (69) e a função gama incompleta complementar, encontra-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mu}^{\infty} xf(x)dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \int_{a(k+1)\mu^b}^{\infty} \left[\frac{v}{a(k+1)}\right]^{1/b} e^{-w} dv \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \int_{a(k+1)\mu^b}^{\infty} v^{(1/b+1)-1} e^{-w} dv \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \Gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)\mu^b\right).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\int_{M}^{\infty} xf(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \Gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)M^b\right).$$

Assim, conclui-se que

$$\delta_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \Gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)\mu^b\right),$$

e

$$\delta_2(X) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \Gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)M^b\right) - \mu.$$

3.7 Curvas de Bonferroni e Lorenz

As curvas de Bonferroni e Lorenz são amplamente aplicadas não só em economia para o estudo da renda e da pobreza, mas também em outros campos como em confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para uma variável aleatória X com função inversa da função acumulada dada por $F^{-1}(.)$, as curvas de Bonferroni e Lorenz são definidas por

$$B(p) = \frac{1}{p\mu}\int_0^q xf(x)dx \ \text{ e } \ L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^q xf(x)dx,$$

respectivamente, em que $\mu = E(X)$ e $q = F^{-1}(p;\theta)$ é calculada por (56). Da equação (50) e usando a função gama incompleta, tem-se

$$\int_0^q xf(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \int_0^q xa(k+1)bx^{b-1}e^{-a(k+1)x^b}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)q^b\right).$$

Portanto, as curvas de Bonferroni e Lorenz são dadas por

$$B(p) = \frac{1}{p\mu}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \gamma\left(\frac{1}{b}+1, a(k+1)q^b\right)$$

e

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{[a(k+1)]^{1/b}} \gamma \left(\frac{1}{b} + 1, a(k+1) q^b \right),$$

respectivamente.

3.8 Estatística de Ordem

A função densidade $f_{i:n}(x)$ da i-ésima estatística de ordem para $i = 1, \ldots, n$, com $X_1, \ldots, X_n$ seguindo uma distribuição WNB, é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} \{1 - F(x)\}^{n-i},$$

em que $f(x)$ é a fdp (50), $F(x)$ é a fda (51) and $B(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ é a função beta. Da expansão binomial, vem

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^j \{1 - F(x)\}^{n+j-i}.$$

Usando $u = \exp(-ax^b)$, pode-se escrever de (50) e (51)

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{a\,b}{B(i, n-i+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m \, (m+1) \, x^{b-1} \, u^{m+1} \\ &\times \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \, u^{k+1} \right)^{n+j-i}. \end{aligned}$$

Usar-se-á a equação de Gradshteyn e Ryzhik (2000, Seção 0.314) para uma série de potência elevada a um expoente inteiro. Para qualquer inteiro positivo j, tem-se

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \, x^i \right)^j = \sum_{i=0}^{\infty} c_{j,i} \, x^i, \tag{70}$$

cujos coeficientes $c_{j,i}$ (para $i = 1, 2, \ldots$) são facilmente obtidos da equação de recorrência

$$c_{j,i} = (i a_0)^{-1} \sum_{m=1}^{i} (j\,m - i + m) \, a_m \, c_{j,i-m} \tag{71}$$

e $c_{j,0} = a_0^j$. Os coeficientes $c_{j,i}$ vêm, diretamente, de $c_{j,0}, \ldots, c_{j,i-1}$ e, portanto, de $a_0, \ldots, a_i$. Eles podem ser dados, explicitamente, em termos dos a_i's, embora isso não seja necessário para

programar numericamente a expansão em qualquer software algébrico ou numérico. Usando (70), segue que

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{ab}{B(i,n-i+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m \, (m+1) \, x^{b-1} \, u^{m+1} \\ &\times \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} u^{n+j-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n+j-i,k} \, u^k \right), \end{aligned}$$

em que, as constantes $c_{n+j-i,k}$ são determinadas a partir das equações (53) e (71) como

$$c_{n+j-i,k} = (k\omega_0)^{-1} \sum_{l=1}^{k} [l \, (n+j-1) - k + l] \, \omega_l \, c_{n+j-i,k-l},$$

com $c_{n+j-i,0} = \omega_0^{n+j-i}$. Portanto, $c_{n+j-i,k}$ pode ser calculado de $c_{n+j-i,0}, \ldots, c_{n+j-i,k-1}$ e, de $\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}$. Pela combinação dos termos, obtém-se

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j \, (m+1) \binom{i-1}{j} \omega_m \, c_{n+j-i,k}}{(m+1+n+j-i+k) \, B(i,n-i+1)} \\ &\times a \, b \, (m+1+n+j-i+k) \, x^{b-1} \, u^{m+1+n+j-i+k}. \end{aligned} \tag{72}$$

Colocando $\delta_{k,m,j} = a \, (m+1+n+j-i+k)$ na expressão (72), vem

$$f_{i:n}(x) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j \, (m+1) \binom{i-1}{j} \omega_m \, c_{n+j-i,k}}{(m+1+n+j-i+k) \, B(i,n-i+1)} \, b \, \delta_{k,m,j} \, x^{b-1} e^{-a\lambda_{k,m,j} x^b},$$

e, então,

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \eta(k,m,j) \, g_{\delta_{k,m,j},b}(x), \tag{73}$$

cujos coeficientes $\eta(k,m,j)$ são facilmente obtidos de

$$\eta(k,m,j) = \frac{(-1)^j \, (m+1) \binom{i-1}{j} c_{n+j-i,k} \, \omega_m}{(m+1+n+j-i+k) \, B(i,n-i+1)}.$$

A equação (73) revela que a função densidade da estatística de ordem da WNB pode ser expressa como uma combinação linear infinita de pesos da densidade Weibull. Pode-se, assim, derivar algumas medidas matemáticas da estatística de ordem da WNB, diretamente, dessas quantidades referentes à distribuição Weibull.

3.9 Momentos da estatística de ordem

Os momentos da estatística de ordem da WNB podem ser escritos diretamente em termos dos momentos da distribuição Weibull, a partir da combinação linear obtida em (73). Tem-se

$$\mathrm{E}(X_{i:n}^r) = \Gamma(f/b+1) \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \eta(k,m,j)\, (\delta_{k,m,j})^{-r/b} \tag{74}$$

em que $\delta_{k,m,j}$ e $\eta(k,m,j)$ são definidos na seção 3.8.

Alternativamente, obtém-se outra expressão de forma fechada para esses momentos, usando um resultado devido a Barakat and Abdelkader (2004) aplicado a distribuições independentes e identicamente distribuidas (i.i.d.)

$$\mathrm{E}(X_{i:n}^r) = r \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} I_j(r), \tag{75}$$

em que

$$I_j(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \{1 - F(x)\}^j dx.$$

A integral pode ser escrita como

$$I_j(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k u^{k+1} \right)^j dx.$$

Portanto,

$$I_j(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} \int_0^{\infty} x^{r-1} \exp\{-a(k+j)x^b\} dx,$$

com $c_{j,k} = (k\,\omega_0)^{-1} \sum_{m=1}^{k} (j\,m - k + m)\, \omega_m\, c_{j,k-m}$ e $c_{j,0} = \omega_0^j$.

Colocando $y = a(j+k)x^b$, obtem-se

$$I_j(r) = b^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [a(j+k)]^{-r/b}\, c_{j,k} \int_0^{\infty} y^{r/b-1} \exp(-y) dy,$$

e então

$$I_j(r) = b^{-1}\, a^{-r/b}\, \Gamma(r/b) \sum_{k=0}^{\infty} (j+k)^{-r/b}\, c_{j,k}.$$

Da equação (75), tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_{i:n}^{r}) &= r\, b^{-1}\, a^{-r/b}\, \Gamma(r/b) \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j-n+i-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (j+k)^{-r/b}\, c_{j,k}. \end{aligned} \tag{76}$$

Pode-se calcular os momentos da estatística de ordem da WNB de três modos diferentes: i) a partir da equação (74), a qual envolve duas somas infinitas e uma soma finita, mas nenhuma função complicada; ii) a partir da equação (76), a qual envolve somente duas somas, uma infinita e outra finita, mas contém a função gamma incompleta; ou iii) por integração numérica direta. Os momentos da estatística de ordem da WNB listados na tabela 5 estão de acordo com os três métodos.

Tabela 5 - Momentos da estatística de ordem da WNB para $n = 5$, $a = 4$, $b = 2$, $\beta = 0.8$ e $s = 3$

eatatística de ordem	$X_{1:5}$	$X_{2:5}$	$X_{3:5}$	$X_{4:5}$	$X_{5:5}$
$r = 1$	0.294022	0.481234	0.674377	0.930862	1.451229
$r = 2$	0.112577	0.269695	0.513943	0.982929	2.558717
$r = 3$	0.052002	0.172134	0.439308	1.182069	5.581500
$r = 4$	0.027881	0.123392	0.419637	1.631341	15.08906
Variância	0.026128	0.038109	0.059160	0.116426	0.452652
Assimetria	0.837768	0.762007	0.898139	1.267313	1.820482
Curtose	3.945583	4.059123	4.717588	6.474108	8.371872

3.10 Confiabilidade

No contexto de confiabilidade, o modelo de resistência-tensão descreve a vida de um componente o qual tem uma variável resistência X_1 que é submetida à variável tensão X_2. O componente falha no instante em que a tensão aplicada excede a resistência, e o componente funcionará satisfatoriamente quando $X_1 > X_2$. Portanto, $R = Pr(X_2 < X_1)$ é a

medida do componente confiabilidade. A confiabilidade tem muitas aplicações, especialmente, em conceitos de engenharia tais como estruturas, deterioração de motores de foguete, fadiga estática de componentes cerâmicos e falha por fadiga de estruturas de aeronave. Encontrar-se-á R quando X_1 e X_2 têm distribuições independentes WNB(a_1, b, s_1, β_1) e WNB(a_2, b, s_2, β_2) com o mesmo parâmetro de forma b. A densidade de X_1 e a fda de X_2 são obtidas das equações (50) e (51) como

$$f_1(x) = a_1\, b\, x^{b-1} \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)\, \omega_{1r}\, u_1^{r+1} \quad \text{and} \quad F_2(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{2j}\, u_2^{j+1},$$

em que $u_i = \exp(-a_i x^b)$ para $i = 1, 2$ e as constantes ω_{1r} e ω_{2j} são obtidos de (53) com os parâmetros correspondentes das distribuições X_1 e X_2, respectivamente. Tem-se que

$$R = \int_0^{\infty} f_1(x) F_2(x) dx,$$

e, então,

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} bx^{b-1} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \omega_{1r}\, a_1 (r+1)\, u_1^{r+1} \right) \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{2j}\, u_2^{j+1} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} bx^{b-1} \sum_{r=0}^{\infty} \omega_{1r}\, a_1 (r+1)\, u_1^{r+1} dx - \int_0^{\infty} bx^{b-1} \sum_{r=0}^{\infty} \omega_{1r}\, a_1 (r+1)\, u_1^{r+1} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{2j}\, u_2^{j+1} dx \\ &= 1 - \sum_{r,j=0}^{\infty} \omega_{1r}\, \omega_{2j}\, a_1 (r+1) \int_0^{\infty} bx^{b-1} \exp\{-[a_1(r+1) + a_2(j+1)]x^b\} dx. \end{aligned}$$

Usando $\int_0^{\infty} b\, x^{b-1} \exp(-\mu x^b) dx = \mu^{-1}$, obtém-se

$$R = 1 - \sum_{r,j=0}^{\infty} \frac{(r+1)\, a_1\, \omega_{1r}\, \omega_{2j}}{[a_1(r+1) + a_2(j+1)]}.$$

3.11 Entropia

A entropia de uma variável aleatória X com densidade $f(x)$ é uma medida da variação da incerteza. Uma medida de entropia é a chamada entropia de Rényi definida por

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho} \log \left\{ \int f(x)^{\rho} dx \right\}, \tag{77}$$

em que $f(x)$ é a fdp de X, $\rho > 0$ e $\rho \neq 1$. Para uma variável aleatória X com distribuição WNB, tem-se

$$\int_0^\infty f(x)^\rho dx = \frac{a^\rho\, b^\rho\, s^\rho}{[(1-\beta)^{-s}-1]^\rho} \int_0^\infty x^{\rho(b-1)}\, \beta^\rho\, e^{-ax^b\rho}\, (1-\beta\, e^{-ax^b})^{-\rho(s+1)} dx. \tag{78}$$

Usando a expansão de Lagrange (49) em (78), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)^\rho dx &= \frac{a^\rho\, b^\rho\, s^\rho}{[(1-\beta)^{-s}-1]^\rho} \sum_{k=0}^\infty \binom{\rho(s+1)+k-1}{k} \beta^{\rho+k} \int_0^\infty x^{\rho(b-1)}\, e^{-ax^b(\rho+k)} dx \\ &= \frac{a^{\rho-1}\, b^{\rho-1}\, s^\rho\, \Gamma(\rho-\rho/b+1/b)}{[(1-\beta)^{-s}-1]^\rho} \sum_{k=0}^\infty \frac{\binom{\rho(s+1)+k-1}{k} \beta^{\rho+k}}{(\rho+k)[a(\rho+k)]^{\rho+(1-\rho)/b-1}},\end{aligned}$$

e, então,

$$\int_0^\infty f(x)^\rho dx = \nu \sum_{k=0}^\infty \binom{\rho(s+1)+k-1}{k} \frac{\beta^{\rho+k}}{(\rho+k)^{\rho(1-b^{-1})+b^{-1}}}, \tag{79}$$

em que

$$\nu = \frac{s^\rho\, a^{(\rho-1)/b}\, b^{\rho-1}\, \Gamma(\rho-\rho/b+1/b)}{[(1-\beta)^{-s}-1]^\rho}. \tag{80}$$

Substituindo (79) e (80) em (77), vem

$$\begin{aligned}I_R(\rho) &= \frac{1}{1-\rho}\Bigg\{\rho\log(s) + (\rho-1)\left[b^{-1}\log(a)+\log(b)\right] + \log[\Gamma(\rho-\rho/b+1/b)] \\ &- \rho\log[(1-\beta)^{-s}-1] + \log\left[\sum_{k=0}^\infty \binom{\rho(s+1)+k-1}{k} \frac{\beta^{\rho+k}}{(\rho+k)^{\rho-\rho/b+1/b}}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

3.12 Estimação

Considerar-se-á a estimação dos parâmetros do modelo da distribuição WNB pelo método da máxima verossimilhança. Suponha que $X_1, ..., X_n$ é uma amostra aleatória de (50) e $\boldsymbol{\theta} = (a, b, s, \beta)^T$ é o vetor dos parâmetros. O logaritmo da função de verossimilhança (LL), $\log L = \log\{L(a, b, s, \beta)\}$, para os quatro parâmetros é

$$\begin{aligned}\log\{L(a,b,s,\beta)\} &= n\log(a) + n\log(b) + (b-1)\sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &- a\sum_{i=1}^n x_i^b + n\log(\beta) + n\log(s) \\ &- (s+1)\sum_{i=1}^n \log(1-\beta e^{-ax_i^b}) - \log[(1-\beta)^{-s}-1].\end{aligned}$$

Segue que os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) são as soluções simultâneas das equações:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^b + (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \beta e^{-ax_i^b}}{1-\beta e^{-ax_i^b}} = \frac{n}{a},$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^b \log(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) + (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{a x_i^b \log(x_i)\beta e^{-ax_i^b}}{1-\beta e^{-ax_i^b}} = \frac{n}{b},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1-\beta e^{-ax_i^b}) = \frac{n}{s} + \frac{(1-\beta)^{-s}\log(1-\beta)}{[(1-\beta)^{-s}-1]},$$

e

$$(s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-ax_i^b}}{1-\beta e^{-ax_i^b}} = \frac{s(1-\beta)^{-(s+1)}}{[(1-\beta)^{-s}-1]} - \frac{n}{\beta}.$$

3.13 Inferência

Para estimação intervalar e testes de hipóteses dos parâmetros do modelo necessita-se da matriz de informação. A matriz de informação observada 4×4, $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$, é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \kappa_{a,a} & \kappa_{a,b} & \kappa_{a,s} & \kappa_{a,\beta} \\ \kappa_{b,a} & \kappa_{b,b} & \kappa_{b,s} & \kappa_{b,\beta} \\ \kappa_{s,a} & \kappa_{s,b} & \kappa_{s,s} & \kappa_{s,\beta} \\ \kappa_{\beta,a} & \kappa_{\beta,b} & \kappa_{\beta,s} & \kappa_{\beta,\beta} \end{bmatrix},$$

cujos elementos são

$$\kappa_{a,a} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} = \frac{n}{a^2} - (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{[(x_i^b)^2 \beta e^{-ax_i^b}]}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2}$$

$$\kappa_{b,a} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial b \partial a} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^b \log(x_i) - (s+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^b \log(x_i)\beta e^{-ax_i^b} \frac{(1-\beta e^{-ax_i^b} - a x_i^b)}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2}$$

$$\kappa_{s,a} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial s \partial a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b \beta e^{-ax_i^b}}{(1-\beta e^{-ax_i^b})}, \quad \kappa_{\beta,a} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial a} = (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^b e^{-ax_i^b}}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2}$$

$$\kappa_{b,b} = -\frac{\partial^2 \ell}{\partial b^2} = \frac{n}{b^2} + a\sum_{i=1}^{n} x_i^b [\log(x_i)]^2 + (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{[\log(x_i)]^2 a\beta x_i^b e^{-ax_i^b}[1 - a x_i^b - \beta e^{-ax_i^b}]}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2}$$

$$\kappa_{s,b} = -\frac{\partial^2\ell}{\partial s\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{ax_i^b\log(x_i)\beta e^{-ax_i^b}}{(1-\beta e^{-ax_i^b})}, \quad \kappa_{\beta,b} = -\frac{\partial^2\ell}{\partial\beta\partial b} = (s+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{ax_i^b\log(x_i)e^{-ax_i^b}}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2}$$

$$\kappa_{s,s} = -\frac{\partial^2\ell}{\partial s^2} = \frac{n}{s^2} - \frac{[\log(1-\beta)]^2(1-\beta)^{-s}}{[(1-\beta)^{-s}-1]^2}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta,s} &= -\frac{\partial^2\ell}{\partial\beta\partial s} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-ax_i^b}}{(1-\beta e^{-ax_i^b})} \\ &- \frac{(1-\beta)^{-(s+1)}[s\log(1-\beta)-1][(1-\beta)^{-s}-1]+[(1-\beta)^{-s}\log(1-\beta)]^2}{[(1-\beta)^{-s}-1]^2}\end{aligned}$$

$$\kappa_{\beta,\beta} = -\frac{\partial^2\ell}{\partial\beta^2} = \frac{n}{\beta^2} - (s+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(e^{-ax_i^b})^2}{(1-\beta e^{-ax_i^b})^2} + \frac{s(1-\beta)^{-s-2}[-(s+1)+(1-\beta)^{-s}]}{[(1-\beta)^{-s}-1]^2}$$

Sob certas condições que são satisfeitas para os parâmetros no interior do espaço paramétrico, mas não sobre a fronteira, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ é $\mathrm{N}_4(0, \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$. A estimativa do vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ da distribuição assintótica normal multivariada $N_4(0, n^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros e para as funções de taxa de falha e de sobrevivência.

A normalidade assintótica também é útil para testar a qualidade do ajuste da distribuição WNB e comparar essa distribuição com alguns de seus sub-modelos especiais utilizando um dos três testes estatísticos assintoticamente equivalentes, isto é, estatística da razão de verossimilhança (RV), estatística escore (E) e a estatística de Wald (W).

Um intervalo de confiança assintótico, com coeficiente de confiança $1-\gamma$, para cada parâmetro θ_i é dado por

$$\mathrm{AIC}(\theta_i, (1-\gamma)) = (\hat{\theta}_i - z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\theta_i,\theta_i}}, \hat{\theta}_i + z_{\gamma/2}\sqrt{\hat{\kappa}^{\theta_i,\theta_i}}),$$

em que $\hat{\kappa}^{\theta_i,\theta_i}$ é o i-ésimo elemento da diagonal da matriz $n^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ estimado em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para $i = 1, \cdots, 4$ e $z_{\gamma/2}$ é o quantil $1-\gamma/2$ da distribuição normal padrão.

Dentre os principais critérios de seleção de modelos utilizados em programas computacionais estão o critério de informação de Akaike - AIC (AKAIKE, 1974), o critério de informação bayesiano - BIC (SCHWARZ, 1978) e o critério de informação de Akaike corrigido - CAIC (BOZDOGAN, 1987), os quais são baseados no valor do logaritmo da função de verossimilhança do modelo e dependem do número de observações n e do número de parâmetros p e são dados por $AIC = -2\log L(\boldsymbol{\theta}) + 2p$, $BIC = -2\log L(\boldsymbol{\theta}) + p\log(n)$ e $CAIC = AIC + 2\dfrac{p(p+1)}{n-p-1}$.

Valores menores de AIC, BIC e CAIC indicam modelos mais apropriados.

3.14 Aplicações e Resultados

3.14.1 Dados de Clorpirifós

O Clorpirifós é um inseticida largamente utilizado em ambientes domésticos e age por contato e ingestão. Nos insetos, interfere na transmissão dos impulsos nervosos, levando-os à paralisia e morte.

Os dados apresentados na Tabela 6 são referentes a um estudo realizado no Chile pela Drª Fernanda Cavieres da Universidade de Valparaíso, Chile, que estabeleceu o clorpirifós como provável causa de malformação congênita, que pode ser evitada pelo ácido fólico. Uma das variáveis que foram medidas no estudo foi a altura de um feto de rato (em milímetros). As distribuições WNB, WG e Weibull foram ajustadas aos dados pelo método da máxima verossimilhança, os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed no SAS. Para obter as estimativas dos parâmetros, foram usadas as seguintes reparametrizações $a = \lambda^b$ e $\beta = \exp(\beta_0)/1 + \exp(\beta_0)$, com isso garantiu-se uma convergência rápida, e que o parâmetro β estimado estivesse no intervalo $(0, 1)$.

Na Tabela 7 são apresentadas as EMVs (correspondentes erros padrões estão entre parenteses) dos parâmetros referentes aos modelos WNB, WG e Weibull e ainda os valores das seguintes estatísticas: AIC, BIC e CAIC. Os resultados indicam que os modelos WNB e WG tem os menores valores das estatísticas AIC e BIC respectivamente, dentre os modelos ajustados, e, portanto, poderiam ser escolhidos como os melhores modelos.

A fim de avaliar se o modelo é adequado, a Figura 11a mostra o gráfico da função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimadas das distribuições, WBN, WG e Weibull. Além disso, a Figura 11b exibe o histograma dos dados e as distribuições ajustadas WBN, WG e Weibull. Conclui-se que as distribuições WBN e WG oferecem um bom ajuste para esses dados.

3.14.2 Dados de transceptor de comunicação de bordo

Comunicação e navegação são as principais funções do rádio-transceptor na aeronave. Os sistemas de comunicação compreendem basicamente transmissão e recepção em

Tabela 6 - Dados Clorpirifós

Observações	Tempo	Observações	Tempo	Observações	Tempo
1	3.40	37	4.00	73	4.20
2	3.40	38	4.00	74	4.20
3	3.50	39	4.00	75	4.20
4	3.50	40	4.00	76	4.30
5	3.50	41	4.00	77	4.30
6	3.50	42	4.00	78	4.30
7	3.50	43	4.00	79	4.30
8	3.60	44	4.00	80	4.30
9	3.60	45	4.00	81	4.30
10	3.60	46	4.00	82	4.30
11	3.60	47	4.00	83	4.30
12	3.60	48	4.00	84	4.30
13	3.60	49	4.00	85	4.30
14	3.70	50	4.00	86	4.30
15	3.70	51	4.00	87	4.30
16	3.70	52	4.00	88	4.40
17	3.70	53	4.00	89	4.40
18	3.70	54	4.00	90	4.40
19	3.80	55	4.10	91	4.50
20	3.80	56	4.10	92	4.50
21	3.80	57	4.10	93	4.50
22	3.80	58	4.10	94	4.50
23	3.80	59	4.10	95	4.50
24	3.80	60	4.10	96	4.60
25	3.80	61	4.10	97	4.60
26	3.80	62	4.10	98	4.60
27	3.80	63	4.10	99	4.60
28	3.80	64	4.10	100	4.60
29	3.80	65	4.10	101	4.60
30	3.90	66	4.10	102	4.60
31	3.90	67	4.20	103	4.70
32	3.90	68	4.20	104	4.70
33	3.90	69	4.20	105	4.70
34	3.90	70	4.20	106	4.70
35	4.00	71	4.20	107	4.80
36	4.00	72	4.20		

fonia entre o avião e a terra ou outro avião. Receptores são utilizados no avião como auxílio à navegação em diversas aplicações, para resolver automaticamente os problemas de navegação durante todo o vôo.

Tabela 7 - EMVs dos parâmetros do modelo para os dados de clorpirifós, os correspondentes erros padrões (dados entre parênteses) e as medidas AIC, CAIC e BIC

Modelo	λ	b	s	β_0	AIC	CAIC	BIC
WBN	0.2160	29.8851	0.0975	6.6848	72.0	72.4	82.7
	(0.0034)	(9.3921)	(0.1618)	(3.4928)			
WG	0.2186	19.2622	2.0752	1	73.4	73.6	81.4
	(0.0062)	(2.0679)	-	(0.8898)			
Weibull	0.2366	0.0018			79.9	80.0	85.2
	(0.0018)	(0.9562)	-	-			

(a) (b)

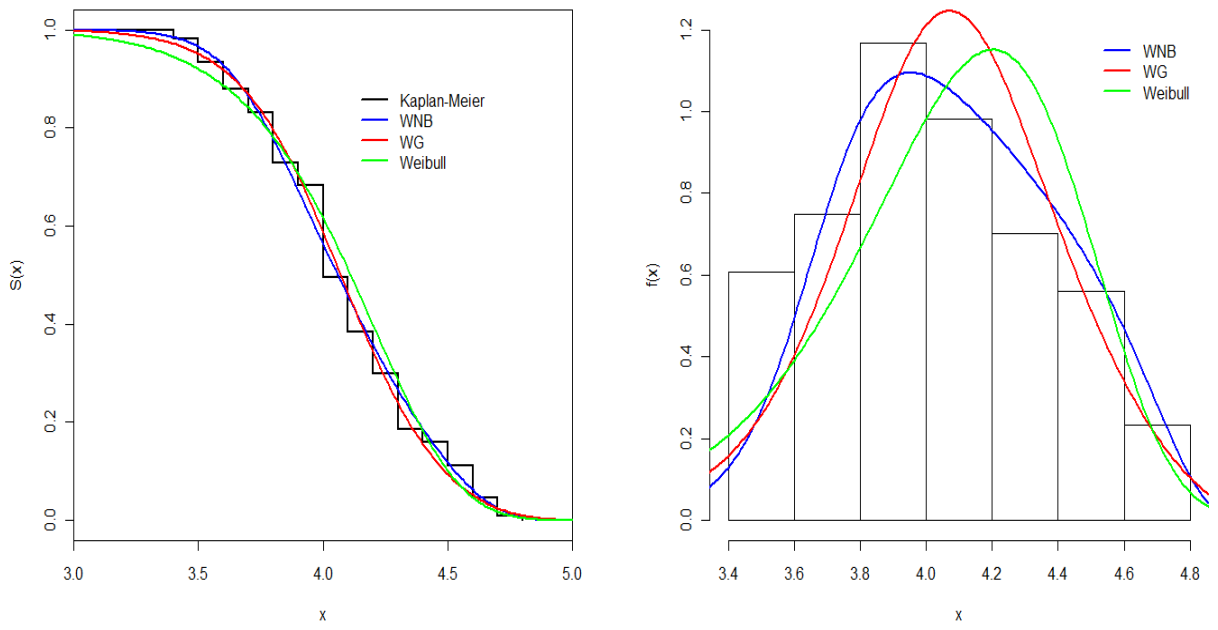

Figura 11 - (a) Funções de sobrevivência estimadas para as distribuições WBN, WG e Weibull com sobrevivência empírica para os dados de clorpirifós (b) Densidade estimada para os modelos WBN, WG e Weibull para os dados de clorpirifós

A operação segura da aeronave depende em alto grau do desempenho satisfatório dos sistemas de comunicação e navegação, que por seu turno, está diretamente ligado à perícia daqueles que fazem a sua manutenção.

Os órgãos federais, responsáveis pela segurança da aviação, recomendam uma inspeção das instalações do rádio-transceptor a intervalos regulares. Essas inspeções incluem um exame visual da fixação dos componentes, condições da fiação, ligações à massa, amortecedores, prateleiras e estruturas de suporte. Além disso, um teste funcional é comumente executado para verificar se o equipamento está operando adequadamente e se não está interferindo na operação de outros sistemas.

O conjunto dos dados apresentados na Tabela 3.14.2, representa os tempos de falha (em horas) para um transceptor de comunicação de bordo.

Tabela 8 - Tempo (h) de falha para um transceptor de comunicação de bordo

Observações	Tempo	Observações	Tempo
1	0.2	24	2.0
2	0.3	25	2.0
3	0.5	26	2.2
4	0.5	27	2.5
5	0.5	28	3.0
6	0.5	29	3.0
7	0.6	30	3.3
8	0.6	31	3.3
9	0.7	32	4.0
10	0.7	33	4.0
11	0.7	34	4.5
12	0.8	35	4.7
13	0.8	36	5.0
14	1.0	37	5.4
15	1.0	38	5.4
16	1.0	39	7.0
17	1.0	40	7.5
18	1.1	41	8.8
19	1.3	42	9.0
20	1.5	43	10.3
21	1.5	44	22.0
21	1.5	45	24.5
23	1.5		

Esses dados foram analisados por Von Alven (1964) que utilizou a distribuição log-normal com dois parâmetros. Chhikara e Folks (1977) utilizaram a distribuição gaussiana inversa com dois parâmetros. Recentemente, os dados foram novamente analisados em Koutrouvelis et al. (2005) usando a distribuição gaussiana inversa com três parâmetros. As distribuições WNB, WG e Weibull foram ajustadas aos dados pelo método da máxima verossimilhança e os cálculos foram realizados utilizando a subrotina NLMixed no SAS.

Na Tabela 9 são apresentadas as EMVs (correspondentes erros padrões estão entre parênteses) dos parâmetros referentes aos modelos WNB, WG e Weibull e ainda os valores das seguintes estatísticas: AIC, BIC e CAIC. Os resultados indicam que o modelo WNB tem os menores valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, dentre os modelos ajustados, e, portanto, pode ser escolhido como o melhor modelo.

Tabela 9 - EMVs dos parâmetros do modelo para os dados aéreos, os correspondentes erros padrões (dados entre parênteses) e as medidas AIC, CAIC e BIC

Modelo	λ	b	s	β_0	AIC	CAIC	BIC
WBN	0.0445	3.4176	0.1295	12.9327	201.1	202.1	208.4
	(0.0131)	(1.4064)	(0.0951)	(6.4066)			
WG	0.0530	1.4669	0	3.3368	203.6	204.2	209.1
	(0.0468)	(0.2084)	-	(1.6851)			
Weibull	0.2952	0.8896			208.7	209.0	212.3
	(0.0525)	(0.0960)	-	-			

A estatística RV para testar as hipóteses $H_0\colon s = 1$ versus $H_1\colon H_0$ não é verdadeira, isto é, para comparar os modelos de regressão WBN e WG, é dada por $w = 2\{-96.55 - (-98.80)\} = 4.50$ (p-valor= 0.0339), o que indica que o modelo WBN é superior ao modelo WG, em termos do modelo ajustado.

A fim de avaliar se o modelo é adequado, a Figura 12a mostra o gráfico da função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimada das distribuições, WBN, WG e Weibull. Além disso, a Figura 12b exibe o histograma dos dados e as distribuições ajustadas WBN, WG e Weibull.

Concluí-se que a distribuição WBN fornece um bom ajuste para esses dados.

(a) (b)

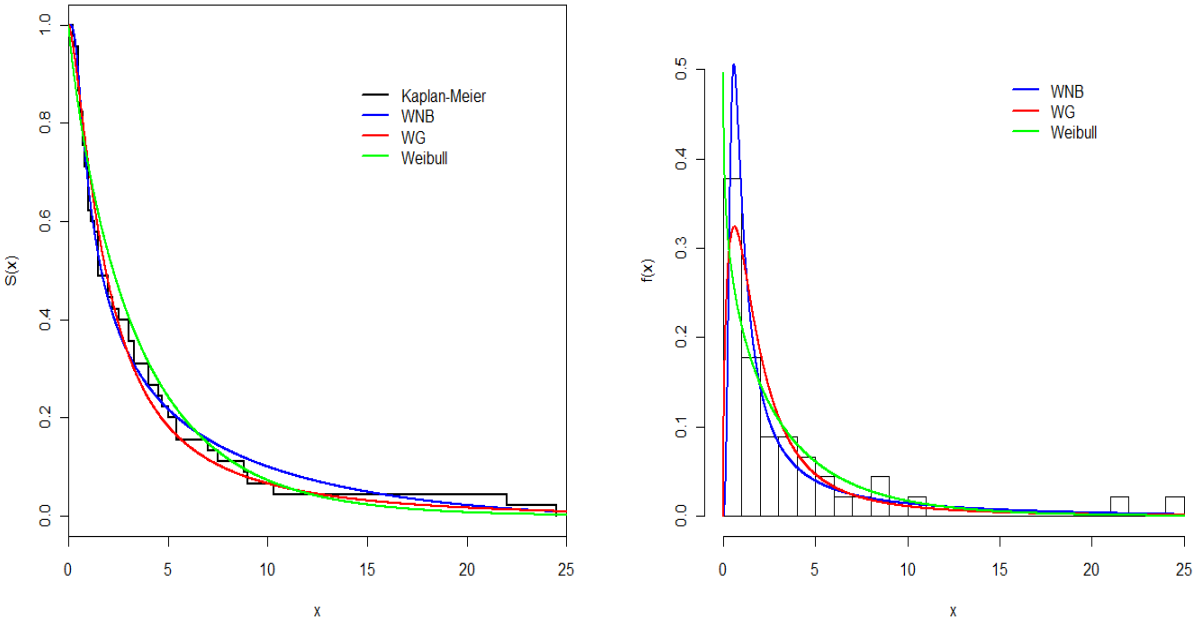

Figura 12 - (a) Funções de sobrevivência estimada para os ajustes das distribuições WBN, WG and Weibull com sobrevivência empírica para os dados aéreos (b) Densidade estimada para os modelos WBN, WG e Weibull para os dados aéreos

3.15 Conclusões

Seguindo a idéia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições foi proposta a distribuição Weibull-binomial negativa (WNB) que é uma extensão da distribuição Weibull-Geometrica (WG) e da distribuição Weibull. O estudo de algumas de suas propriedades matemáticas e estatísticas foi realizado. A nova distribuição é um modelo importante para a análise de dados de sobrevivência por causa da ampla utilização da distribuição de Weibull e do fato de que a generalização em vigor prevê meios de sua extensão contínua de ainda situações mais complexas. Fornece-se uma descrição detalhada de algumas propriedades estruturais da distribuição proposta com a esperança de que ela atraia aplicações

mais amplas em engenharia de confiabilidade, e em outras áreas de pesquisa. A função densidade da WNB pode ser expressa como uma mistura de funções de densidade Weibull. Este resultado permite obter expressões para os momentos e para a função geradora de momentos. A fdp das estatísticas de ordem da distribuição WNB pode ser escrita em termos de uma combinação linear infinita de funções de densidade Weibull. Calcularam-se os desvios médios, as curvas de Bonferroni e Lorenz, a confiabilidade e a entropia Renyi e duas representações para os momentos das estatísticas de ordem. O método da máxima verossimilhança foi usado para estimar os parâmetros do modelo e obteve-se a matriz de informação observada. A utilidade da nova distribuição foi ilustrada na análise de dois conjuntos de dados reais usando as estatísticas AIC, BIC e CAIC, mostrando assim que esta distribuição pode ser usada mais efetivamente para proporcionar um melhor ajuste do que outros sub-modelos em termos de confiabilidade, biologia, engenharia e estatística.

3.15.1 Trabalhos futuros

Como possíveis trabalhos futuros podem-se considerar os seguintes temas de pesquisa:

1. Desenvolver um modelo de regressão da distribuição Weibull binomial negativa para dados com observações censuradas.

2. Propor um método de estimação para os parâmetros da distribuição Weibull binomial negativa para dados com observações censuradas

3. Desenvolver uma análise de diagnóstico (influência local e análise de resíduos) para o modelo Weibull binomial negativo

Referências

ADAMIDIS, K.; LOUKAS, S. A life time distribution with decreasing failure rate. **Statistics & Probability Letters**, Amsterdam, v.39, p.35-42, 1998.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.19, n.6, p.716-723, Dec. 1974.

BARAKAT, H.M.; ABDELKADER, Y.H. Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables. **Statistical Methods and Applications**, New York, v.13, p.15-26, 2004.

BARRETO-SOUZA, W.; MORAIS, A.L.; CORDEIRO, G.M. The Weibull geometric distribution. **Journal of Statistical Computation & Simulation**, New York, v.00, No.00, p.1-14, 2010.

BERETA, E.M.P.; LOUZADA-NETO, F.; FRANCO, M.A.P. A distribuição Weibull-Poisson. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 19., 2010, São Pedro.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaikes information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrica**, Berlin, n.52, p.345-370, 1987.

CHHIKARA, R.S.; FOLKS, J.L. The Inverse Gaussian distribution as a lifetime model. **Technometrics**, Alexandria, v.19, p.461–468, 1977

CONSUL, P.C.; FAMOYE, F. **Lagrangian probability distributions**. Boston: Birkhäuser, 2006.

GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. **Table of integrals, series, and products**. San Diego: Academic Press, 2000. 634p.

KENNEY, J.F.; KEEPING, E.S. **Mathematics of statistics**. 3rd ed. New Jersey: Princeton, 1962. Part 1, p.101-102.

KOUTROUVELISA I. A.; CANAVOSB G. C.; MEINTANISC S. G. Estimation in the three-parameter inverse Gaussian distribution. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdam, v.49, p.1132-1147, 2005.

KUS, C. A new lifetime distribution. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdam, v.51, p.4497-4509, 2007.

MOORS, J.J.A. A quantile alternative for kurtosis. **Journal of the Royal Statistical Society Ser. D., The Statistician**, Abingdon, v.37, p.25-32, 1998.

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Y.A. and MARICHEV, O.I. **Integrals and series**. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1996. v.1-3.

SCHWARZ, G. Estimating the dimensional of a model. **Annals of Statistics**, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, Mar. 1978.

VON ALVEN W.H. **Reliability engineering by ARINC**. New Jersey: Prentice-Hall, 1964.

APÊNDICE

APÊNDICE

A: Programas no software R para o modelo ZIP (obtidos em Montaya (2009))

A1: Estimativa dos parâmetros do modelo ZIP usando algoritmo EM

```
EM.ZIP <-function(bb,B,G){
n <-nrow(bb)
aa <-matrix(0,n,1)
aa[bb > 0] <-1
beta <-as.vector(glm(bb ~ B - 1, family = poisson)$coeff)
gama <-as.vector(glm(cbind(aa, 1 - aa) ~ G - 1, family = binomial)$coeff)
teta <-c(beta, gama)
criterio <-sqrt(teta%*%teta)
cont <-0
while(criterio > 0.00000001){
    cont <-cont + 1
    z <-(1 + exp(-G%*%gama - exp(B%*%beta)))^(-1)
    z[bb > 0] <-0
    beta <-as.vector(glm(bb ~ B - 1, family = poisson, weights = 1 - z)$coeff)
    gama <-as.vector(glm(z ~ G - 1, family = binomial)$coeff)
    param <-teta
    teta <-c(beta, gama)
    criterio <-sqrt((teta - param)%*%(teta - param))
    print(cont)
    }
return(teta)
}
```

A2: Gerar dados do modelo ZIP

```
Est.amostraZIP <-function(B,G,beta,gama){
n <-nrow(B)
amostra <-matrix(0,n,1)
for(i in 1 : n){
    lambda <-exp(B[i,]%*%beta)
    p <-exp(G[i,]%*%gama)/(1 + exp(G[i,]%*%gama))
    amostra[i] <-if(rbinom(1,1,p) == 1) 0 else rpois(1,lambda)
    }
return(amostra)
}
```

A3: Gerar envelope simulado para modelo ZIP

$n < -nrow(B)$ #bb: vetor de dados
$p1 < -ncol(B)$ #B, G: matrizes de planejamento
$q1 < -ncol(G)$ #B modela a média e G o parâmetro zero inflado
$residuos < -resid(fm_zip2, type = \text{“}pearson\text{”})$ #Calculo dos residuos
$e < -matrix(0, n, 100)$
$theta < -EM.ZIP(bb, B, G)$
$beta < -theta[1 : p1]$
$gama < -theta[(p1 + 1) : (p1 + q1)]$
$for(i\ in\ 1 : 100)\{$
$\quad nresp < -Est.amostraZIP(B, G, beta, gama)$
$\quad zip2.1 < -zeroinfl(nresp \sim as.factor(sex) + as.factor(casam) + as.numeric(kids5) +$
$as.numeric(ment)|as.numeric(ment),\ data = biochemists.dat,\ dist = \text{“}poisson\text{”})$
$\quad fit < -resid(zip2.1, type = \text{“}pearson\text{”})$
$e[, i] < -sort(fit)\}$
$e1 < -numeric(n)$
$e2 < -numeric(n)\ for(i\ in\ 1 : n)\{$
$eo < -sort(e[i,])$
$e1[i] < -(eo[2] + eo[3])/2$
$e2[i] < -(eo[97] + eo[98])/2\}$
$med < -apply(e, 1, mean)$
$faixa < -range(residuos, e1, e2)$
$par(pty = \text{“}s\text{”})$
$qqnorm(residuos, xlab = \text{“}PercentisdaN(0, 1)\text{”}, ylab = \text{“}ResiduodePearson\text{”}, ylim = faixa, pch =$
$1, cex = .5, type = \text{“}p\text{”}, col = \text{“}blue\text{”}, main = \text{“”})$
$par(new = T)$
$qqnorm(e1, main = \text{“”}, axes = F, xlab = \text{“”}, ylab = \text{“”}, type = \text{“}l\text{”}, ylim = faixa, lty = 1)$
$par(new = T)$
$qqnorm(e2, main = \text{“”}, axes = F, xlab = \text{“”}, ylab = \text{“”}, type = \text{“}l\text{”}, ylim = faixa, lty = 1)$
$par(new = T)$
$qqnorm(med, main = \text{“”}, axes = F, xlab = \text{“”}, ylab = \text{“”}, type = \text{“}l\text{”}, ylim = faixa, lty = 2, col =$
$\text{“}red\text{”})$

B: Programa no software R para simular dados da distribuição Weibull binomial negativa

Simulação 1

```
rm(list=ls(all=TRUE))
set.seed(45)
a=0.5
b=1.5
s=1
beta=0.2
v <- runif(10000, 0, 1)
x <- log(1/beta * (1 - 1/(1 - (1 - beta^-s)) * v + (1 - beta)^-s^1/s))^1/a^1/b
f <- density(x)
hist(x, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```

Simulação 2

```
set.seed(45)
a=0.9
b=2
s=4
beta=0.3
```

$v < -runif(10000, 0, 1)$

$x < -log(1/beta * (1 - 1/(1 - (1 - beta^{-s})) * v + (1 - beta)^{-s^{1/s}}))^{1/a^{1/b}}$

$f < -density(x)$

```
hist(x, freq=FALSE, main=, ylab="f(x)", xlab="x")
lines(f, col="red")
```