

Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

Regressão não linear no desdobramento da interação em
experimentos com mais de um fator

Alessandra dos Santos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestra
em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica

Piracicaba
2013

Alessandra dos Santos
Licenciatura em Matemática

**Regressão não linear no desdobramento da interação em
experimentos com mais de um fator**

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientadora:
Prof^ª Dr^ª **TACIANA VILLELA SAVIAN**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestra
em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica

**Piracicaba
2013**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP

Santos, Alessandra dos

Regressão não linear no desdobramento da interação em experimentos com mais de um fator / Alessandra dos Santos. - - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2013.
83 p: il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2013.

1. Análise de variância 2. Curvas de crescimento 3. Delineamento experimental
4. Modelos não lineares 5. Ovinos I. Título

CDD 636.3085
S237r

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte - O autor"

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho...

A minha família, que sempre me apoiou independente das dificuldades e compreenderam os motivos de minha ausência.

Aos meus professores, amigos e colegas de profissão que acreditaram na minha capacidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida e oportunidade de concluir esta nova etapa de estudos.

Aos professores do LCE/ESALQ/USP, que estiveram presente neste tempo de curso, transmitindo seus conhecimentos e compartilhando suas experiências. Em especial a professora Dra. Taciana Villela Savian, não só pela constante orientação em trabalhos, mas sobretudo pela sua amizade, respeito e dedicação.

A minha família como um todo, que de forma muito especial me incentivou com muito amor e carinho, dando apoio e suporte a cada dia.

Aos amigos de Londrina que mesmo na distância tiveram paciência e me apoiaram.

Aos colegas de departamento que auxiliaram em muitas pesquisas e incentivaram a caminhada. Em especial aos amigos: Jaqueline Raminelli, Elisângela Oliveira, Natália Martins, Simone Sartório, Simone Silmara Werner, Marina Maestre, Maria Cristina Martins, Thiago Gentil Ramires, Gabriel Bruno Lemos, Guilherme Biz, Lucas Santana e Tiago Santana. Estes vivenciaram comigo muitas alegrias, problemas, estudos, festas e acima de tudo me ajudaram com suas partilhas e companheirismo.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela bolsa de mestrado concedida.

A todos os professores e profissionais da educação que estiveram presente em minha vida, em particular a professora Dra. Vanderli Marino Melen da Universidade Estadual de Londrina, dpto. de Estatística, que com respeito, carinho e dedicação a profissão me incentivou e inspirou a continuar os estudos.

E a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito obrigado!

*“Se a riqueza é um bem desejável na vida,
que há de mais rico que a sabedoria que tudo criou?
Se a inteligência do homem consegue operar,
o que, então, mais que a sabedoria, é artífice dos seres?
E se alguém ama a justiça,
seus trabalhos são virtudes;
ela ensina a temperança e a prudência,
a justiça e a força:
não há ninguém que seja mais útil aos homens na vida.
Se alguém deseja uma vasta ciência,
ela sabe o passado e conjectura o futuro;
conhece as sutilezas oratórias e resolve os enigmas;
prevê os sinais e os prodígios,
e o que tem que acontecer no decurso das idades e dos tempos.
Portanto, resolvi tomá-la por companheira de minha vida,
cuidando que ela será para mim uma boa conselheira.”*

Sabedoria 8,5-9

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	17
1 INTRODUÇÃO	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1 Experimentos	21
2.1.1 Análise de variância com mais de um fator	22
2.1.1.1 Experimentos com medidas repetidas no tempo	27
2.1.2 Regressão	28
2.1.2.1 Métodos de estimação dos parâmetros em regressão não linear	32
2.1.2.2 Comparação de modelos não lineares	36
2.1.2.3 Modelos não lineares para crescimento animal	36
3 MATERIAL E MÉTODOS	39
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	45
4.1 Análise exploratória dos dados e pressuposições do modelo	45
4.2 Análise de variância com correção G-G	50
4.3 Regressão não linear	51
4.3.1 Diagnóstico dos modelos	54
4.4 Desdobramento em regressão não linear	56
4.5 Igualdade de parâmetros	58
5 CONCLUSÕES	63
REFERÊNCIAS	65
APÊNDICES	71
ANEXOS	75

RESUMO

Regressão não linear no desdobramento da interação em experimentos com mais de um fator

Em experimentos que envolvam um fator quantitativo e um qualitativo, é aconselhável que, se detectado efeito significativo da interação entre os fatores na análise de variância, recorra-se a análise de regressão no desdobramento da mesma, no entanto nem sempre a utilização de modelos de regressão linear é a forma mais adequada para avaliar o efeito do fator quantitativo. Neste trabalho é apresentada a forma de ajuste de um modelo de regressão não linear em um experimento com medida repetida no tempo. No experimento considerou-se o ganho de peso, em quilos, de ovinos, machos e fêmeas, da raça Santa Inês em doze idades diferentes. Conduzido como parcela subdividida, pois fator tempo não foi aleatorizado, a análise variância necessita de correção dos graus de liberdade devido à condição de esfericidade não satisfeita. A correção de Geisser e Greenhouse (G-G) foi utilizada para os efeitos da interação e do tempo. O teste F na análise de variância apresentou resultado significativo para interação entre os fatores e, no desdobramento da interação, para avaliação do efeito do fator tempo em cada nível do fator sexo foi proposto o ajuste do modelo Gompertz bem como um teste de aderência para o modelo. Após o ajuste do modelo aos dados de peso de ovinos também foi considerado no estudo a comparação dos parâmetros das curvas de machos e fêmeas. Pela análise proposta foi possível concluir que o modelo univariado, com esquema de parcelas subdivididas, pode ser utilizado em experimentos de crescimento animal, porém sua aplicação está sujeita a verificação da condição de esfericidade. Também foi verificado que incorporar, no desdobramento de interações, o ajuste do modelo Gompertz é um procedimento viável e permitiu avaliar a real qualidade de ajuste do modelo aos dados. Com a comparação dos parâmetros das curvas ajustadas verificou-se que ovinos machos e fêmeas apresentam valores estatisticamente iguais para os parâmetros α e γ , ambos relacionados com o peso ao nascer dos animais. O peso máximo esperado para fêmea (40,7kg) é estatisticamente inferior ao encontrado para os machos (57,3kg), no entanto, sua taxa de crescimento (0,011kg/dia para fêmeas) é superior (0,007kg/dia para machos), ou seja, as fêmeas atingem o peso de estabilização mais rapidamente que os machos.

Palavras-chave: Parcela subdividida, Correção de Geisser Greenhouse, Teste de aderência; Modelo Gompertz

ABSTRACT

Nonlinear regression in the unfolding of the interaction in experiments with more than one factor

In experiments involving a qualitative and a quantitative factor, it is advisable that if a significant interaction is detected between factors in the analysis of variance, one should perform regression analysis of the splitting factors. However, the use of linear regression models is not always the most appropriate way to assess the effect of the quantitative factor. This paper presents a way to fit a nonlinear regression model in an experiment with repeated measurements over time. In the experiment, the weight gain of male and female Santa Inês breed sheep, in pounds, in twelve different ages is measured. Conducted in a split-plot design, as the time factor was not randomized, the analysis of variance requires correction of the degrees of freedom, as the sphericity condition is not satisfied. The Greenhouse and Geisser correction (G-G) was used for the purposes of interaction and time. The F test in the analysis of variance showed a significant result for the interaction between the factors and the splitting of the interaction. In order to evaluate the effect of the time factor at each level of the gender factor, a Gompertz model was proposed, as well as a test of model adherence. After fitting the model to the data, a comparison study of the parameters for males and females was also made. For the proposed analysis, we concluded that the univariate model, with split-plot design, can be used in experiments of animal growth, but its application is prone to verification of the sphericity condition. They also found that the incorporation of the splitting of interactions, by adjusting the Gompertz model, is a viable procedure and allowed to evaluate the real quality of fit. By comparing the fitted parameter values, it was found that males and females have statistically identical values for the parameters α and γ , both related to the birth weight of the animals. The maximum weight expected for a female (40.7 kg) is statistically lower than that found for the males (57.3 kg), however, their growth rate (0.011 kg / day for females) is greater than the males' (0.007 kg / day for males), i.e., females reach weight stabilization faster than males.

Keywords: Split-plot; Geisser Greenhouse correction; Adhesion test; Gompertz model

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Croqui do experimento fatorial 2×3 inteiramente casualizado, com 3 repetições	23
Figura 2 - Croqui do experimento parcela subdividida com 2 níveis do fator principal, 3 níveis do fator secundário e 3 repetições.	25
Figura 3 - Dispersão dos valores amostrados, conforme tempo e sexo	45
Figura 4 - Box-plot dos valores amostrados, (a) tempo versus peso e (b) sexo versus peso	46
Figura 5 - Normal-plot dos resíduos da subparcela	47
Figura 6 - Resíduo dos valores amostrados, (a) com relação ao tempo, (b) com relação aos tratamentos	48
Figura 7 - Box-plot dos resíduo amostrados versus tratamentos	48
Figura 8 - Ajuste do modelo Gompertz aos pesos médios de ovinos machos e fêmeas	54
Figura 9 - Gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados (a e b) e resíduo versus resíduo defasado , sendo: (a) e (c) machos e (b) e (d) fêmeas	55
Figura 10 - Normal Plot dos resíduos (a) para machos (b) para fêmeas	56
Figura 11 - Ajuste do modelo gompertz com parâmetros α e γ iguais para os sexo. .	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quadro da ANOVA Fatorial com o desdobramento	24
Tabela 2 - Quadro da ANOVA parcela subdividida com o desdobramento	26
Tabela 3 - Alguns modelos não-lineares	31
Tabela 4 - Esquema da análise de variância relativa ao teste da hipótese de modelo completo versus reduzido.	44
Tabela 5 - Valores médios, variância e desvio padrão do peso (kg) dos ovinos.	46
Tabela 6 - Quadro da ANOVA com correção G-G para os dados de peso de ovinos	50
Tabela 7 - Quadro da ANOVA com desdobramento da interação tempo dentro de sexo utilizando a correção G-G	51
Tabela 8 - Processo iterativo de Gauss Newton para ajuste do modelo Gompertz aos dados de ganho de peso de ovinos (machos e fêmeas)	52
Tabela 9 - Estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz com os respectivos erros padrão, significância e intervalo de 95% de confiança.	53
Tabela 10 -Desdobramento da ANOVA em regressão não linear	57
Tabela 11 -Parâmetros dos modelos Gompertz reduzidos e somas de quadrados residual.	59
Tabela 12 -Esquema da análise de variância relativa ao teste de H_{01} , H_{02} , H_{03} e H_{04} , modelo completo versus reduzido	59
Tabela 13 -Estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz completo e modelo proposto 3, com erros padrão, significância e intervalo de 95% de confiança para o modelo 3	61
Tabela 14 -Valores amostrados do peso de ovinos (Kg).	77

1 INTRODUÇÃO

Aos pesquisadores existem diversos testes estatísticos que possibilitam inferir num conjunto de dados. No entanto, para cada estudo de caso, é necessário que se tenha conhecimentos sobre o experimento como um todo: delineamento, tipos de fatores, variável resposta, etc., tendo de forma clara o objetivo do estudo (BERTOLDO, et. al. 2008).

A análise de variância ou ANOVA, é uma técnica que permite a comparação de vários grupos em um estudo, em que a variabilidade da variável resposta é decomposta e atribuída a fatores de interesse ditos “controlados”, e fatores ao acaso, chamados erros experimentais. Por exigências do modelo matemático, o experimento deve ser instalado com aleatorização e repetição dos fatores de interesse e as unidades experimentais devem ser homogêneas para que o efeito do fator ao acaso seja o menor possível, supondo que estes erros tenham normalidade, homocedasticidade e independência. Um dos principais objetivos ao se aplicar esta técnica, quando se tem mais de um fator de interesse, é verificar se o efeito da interação é significativo, ou seja, a existência de diferença significativa na variável resposta conforme relação da combinação dos níveis dos fatores.

No entanto nem sempre as condições e pressuposições são atendidas sendo necessário outras técnicas e/ou modelos mais complexos. É o caso de experimentos com medidas repetidas no tempo. Este não apresenta aleatorização do fator tempo e portanto, espera-se, por diversos estudos já realizados, que exista uma correlação não nula entre as medidas e uma heterocedasticidade das variâncias nas diversas ocasiões. Assim o experimento com mais de um fator que inclua o efeito tempo (não aleatorizado) é realizado como um experimento bloqueado, em que sorteia-se o(s) fator(es) aplicado(s) e a cada nível do tempo observa-se a variável de interesse, sendo chamado de experimento em parcela subdividida, pois sua estrutura é caracterizada por fator(es) principal(is) e fator secundário (tempo).

A diferença para um experimento fatorial é que com a aleatorização principal tem-se um erro experimental referente as parcelas e um outro erro experimental secundário referente a todas as observações ou subparcelas. Este segundo erro, além das pressuposições básicas, deve atender a condição de esfericidade, ou seja, a matriz de covariância deve satisfazer a condição de simetria composta. Isto porque, dependendo da heterogeneidade de variâncias encontrada na matriz, o poder do teste pode estar di-

minuído, não sendo válido seus resultados. Portanto, quando não satisfeita a condição de esfericidade, na análise univariada, é indicado que se faça correções nos graus de liberdade das causas de variação dos efeitos que contém o fator tempo, para que o teste seja aproximado e não gere resultados falsos.

Detectado efeito significativo da interação dos fatores, é aconselhável que se explore mais as combinações dos fatores detalhando os resultados encontrados. Para isto, como os níveis do fator tempo são variáveis quantitativas, pode-se fazer o desdobramento da interação utilizando a técnica de regressão. Esta técnica, investiga e modela o comportamento da variável resposta em todo o intervalo de estudo, sendo possível obter mais informações do que se fosse realizado um teste de comparações múltiplas nas combinações dos fatores.

Para tal, existem dois tipos de modelos de regressão: os lineares e os não-lineares. O mais comum dentro da ANOVA é encontrar experimentos que desdobrem a interação em regressão linear, porém esta nem sempre é a mais adequada. A que se observar o conjunto de dados fazendo uma análise exploratória e verificando estudos anteriores. Se a variável resposta com relação ao fator desdobrado apresenta assíntotas, os níveis do fator tempo forem maiores que a quantidade de parâmetros do modelo, pode-se pensar na regressão não-linear. Esta, apesar da complexidade de estimação na dependência de métodos iterativos, modela melhor os dados de crescimento e a maioria de seus parâmetros representam fenômenos reais biológicos.

Diante do exposto, o presente estudo teve como objetivo principal considerar o ajuste de um modelo de regressão não-linear aos dados de crescimento de ovinos, machos e fêmeas, da raça Santa Inês, provenientes de um experimento em parcela subdividida, em que foi realizado teste de aderência referente ao modelo não-linear Gompertz.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção são apresentados aspectos da análise de delineamentos experimentais e teoria de modelos de regressão não-linear bem como uma revisão de trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento desses assuntos em aplicações referentes ao crescimento animal.

2.1 Experimentos

Em praticamente todos os campos de investigação são realizados experimentos para descobrir algo sobre um determinado processo ou sistema. Formalmente, define-se um experimento como um teste ou uma série de testes em que as alterações propositais são feitas para as variáveis de entrada de um processo ou sistema, para que se observe e identifique as razões para as mudanças que podem ser observadas na resposta de saída (MONTGOMERY, 2005).

Segundo Vieira (2006), a técnica de experimentação só se difundiu a pouco mais de um século com a formalização da estatística. A autora define um experimento, ou estudo experimental, como um procedimento planejado com base em uma hipótese, objetivando provocar fenômenos em condições controladas, observando e analisando os seus resultados e/ou efeitos. Estes estudos são constituídos basicamente por um conjunto de unidades experimentais sobre as quais são aplicados os tratamentos, de forma casualizada, a partir das quais obtém-se os dados experimentais.

As informações de pesquisas podem ser classificadas utilizando os seguintes termos técnicos:

- Unidade experimental ou parcela: unidade física ou biológica utilizada para conduzir um experimento. Pode ser constituída, por exemplo, de uma pessoa, um animal, um espaço, ou um vaso.
- Variável: condição ou característica medida ou observada no experimento. Se numérica, é chamada de quantitativa, caso contrário é considerada qualitativa ou nominal.
- Variável resposta: variável dependente, de interesse no estudo e observada dentro das classes dos fatores.

- Variável explicativa ou preditora: variável independente, vista como fator do experimento e cujo efeito deseja-se medir ou comparar. Portanto, deve ser analisado como possível argumento de variação e esta pode ser quantitativa ou qualitativa.
- Níveis de um fator ou tratamentos: caracterização do fator, ou seja, as categorias que formam o fator e constituem os procedimentos que estão sendo comparados no experimento.
- Delineamento experimental: é o plano a ser utilizado na experimentação e implica na forma como os tratamentos serão aplicados nas parcelas e em um amplo entendimento das análises a serem feitas quando todos os dados estiverem disponíveis. Os principais tipos de delineamentos são: inteiramente casualizado (DIC), casualizado em blocos (DBC) ou em quadrado latino (DQL).

2.1.1 Análise de variância com mais de um fator

A análise de variância ou ANOVA (*Analysis Of Variance*), é uma técnica estatística desenvolvido por Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962). Esta, por meio de testes de igualdades de efeitos, verifica se fatores produzem mudanças sistemáticas em alguma variável de interesse. Utilizado para avaliar os dados obtidos, tanto de um estudo observacional como de um estudo experimental, abordando várias questões simultaneamente.

Segundo Devore (2006), a ANOVA refere-se a um conjunto de situações experimentais e procedimentos estatísticos para a análise de respostas quantitativas de unidades experimentais. Banzatto e Kronka (2006), afirmaram que esta técnica consiste na decomposição da variância total e dos graus de liberdade em parte atribuídas a causas conhecidas e independentes (fatores controlados), e a uma porção residual de origem desconhecida e natureza aleatória (fatores não controlados).

De acordo com Montgomery e Runger (2003), se a pesquisa consiste em investigar dois ou mais fatores de interesse em todas as combinações possíveis dos níveis dos fatores simultaneamente, tem-se um experimento fatorial. A grande vantagem deste tipo de experimento é o estudo da interação dos diferentes níveis dos fatores em questão.

Um exemplo seria admitir um experimento para avaliar simultaneamente a influência de dois fatores, A e B, com 2 e 3 níveis respectivamente, totalizando 6 trata-

mentos. Considerando que cada tratamento seja repetido 3 vezes, seriam necessárias 18 parcelas para a instalação do experimento e um possível croqui de instalação pode ser visualizado na Figura 1.

AB ₂₁	AB ₁₃	AB ₁₁	AB ₁₂	AB ₂₁	AB ₂₂
AB ₁₂	AB ₂₃	AB ₂₂	AB ₁₃	AB ₂₃	AB ₂₁
AB ₁₁	AB ₁₃	AB ₁₁	AB ₂₂	AB ₂₃	AB ₁₂

Figura 1 - Croqui do experimento fatorial 2×3 inteiramente casualizado, com 3 repetições

Partindo de um experimento instalado em um delineamento inteiramente casualizado, em que as parcelas ou unidades experimentais são consideradas homogêneas, o modelo estatístico é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk}; \quad (1)$$

sendo que: $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; μ é uma constante inerente a todas as observações; α_i é o efeito do i -ésimo nível do fator A; β_j é o efeito do j -ésimo nível do fator B; $(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre os fatores A e B; e_{ijk} é o erro experimental associado à parcela (ijk) , e devem seguir normalidade, homogeneidade de variância e independência, ou seja, $e_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$.

O total de parâmetros no modelo (eq.1) é dado por: $p = 1 + a + b + s$. Em que 1 é o número de parâmetros associados à constante μ , a e b é o número de parâmetros correspondente ao fator A e B respectivamente e s é o número de parâmetros associado à combinação dos níveis do fator A com os níveis do fator B.

Esse modelo também pode ser escrito na forma matricial como:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}} + \underset{\sim}{\mathbf{e}},$$

em que: $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$, o vetor de dimensão $(abk) \times 1$ das observações da variável em estudo; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\theta}}$ é o vetor de dimensão $p \times 1$ dos parâmetros; $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ é a matriz de delineamento de dimensão $(abk) \times p$, do delineamento; $\underset{\sim}{\mathbf{e}}$ é o vetor de dimensão $(abk) \times 1$ dos erros experimentais.

Na Tabela 1 encontra-se a generalização de uma análise de variância para um experimento fatorial com dois fatores (A e B) com a e b níveis respectivamente e r repetições, cujas hipóteses principais são:

H_0 : não há diferença significativa nos efeitos das combinações dos fatores (interação AB).

H_a : há pelo uma combinação dos fatores cujo efeito difere significativamente dos demais.

Em notação científica, tem-se:

$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \dots = (\alpha\beta)_{1b} = (\alpha\beta)_{21} = \dots = (\alpha\beta)_{ab}$$

H_a : pelo menos um $(\alpha\beta)_{ij}$ diferente dos demais, tal que $i = 1, 2, \dots, a$ e $j = 1, 2, \dots, b$.

Testa-se então a variabilidade do efeito da interação com relação ao efeito residual, esperando que o nível descritivo do valor de F calculado $\left(\frac{QMA \times B}{QMRes}\right)$ corresponda a um valor menor ou igual ao nível de significância assumido. Caso isso seja satisfeito podemos afirmar que há efeito significativo, ou seja, rejeita-se a hipótese de nulidade (H_0) e faz-se o estudo do desdobramento da interação. Se o contrário acontecer, parte-se para a análise unifatorial, verificando se um único fator por vez tem diferença significativa em seus níveis.

Tabela 1 - Quadro da ANOVA Fatorial com o desdobramento

F.V.	g.l.	SQ	QM	F
FATOR A	$(a - 1)$	SQA	$\frac{SQA}{(a-1)}$	$\frac{QMA}{QMRes}$
FATOR B	$(b - 1)$	SQB	$\frac{SQB}{(b-1)}$	$\frac{QMB}{QMRes}$
A \times B	$(a - 1)(b - 1)$	$SQA \times B$	$\frac{SQA \times B}{[(a-1)(b-1)]}$	$\frac{QMA \times B}{QMRes}^*$
A:B1	$(a - 1)$	$SQA : B_1$	$\frac{SQA:B_1}{(a-1)}$	$\frac{QMA:B_1}{QMRes}$
A:B2	$(a - 1)$	$SQA : B_2$	$\frac{SQA:B_2}{(a-1)}$	$\frac{QMA:B_2}{QMRes}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A: B _b	$(a - 1)$	$SQA : B_b$	$\frac{SQA:B_b}{(a-1)}$	$\frac{QMA:B_b}{QMRes}$
Trat	$(ab - 1)$	$SQA + SQB + SQA \times B$	$\frac{(SQTrat)}{(ab-1)}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}^*$
Res	$ab(r - 1)$	$SQTot - SQTrat$	$\frac{(SQTot - SQTrat)}{(ab(r-1))}$	
Total	$(abr - 1)$	$SQTot$		

* teste F resulta em diferença significativa.

Muito semelhante ao fatorial, são os experimentos em parcelas subdivididas, pois estes também apresentam mais de um fator. No entanto, Gomes (1990) aponta que a estrutura desses experimentos é caracterizada por tratamentos principais (ou primários) nas parcelas e estas, por sua vez, são divididas em subparcelas que receberão os tratamentos secundários.

Segundo Jones e Nachtsheim (2009) um experimento em parcela subdividida é um experimento bloqueado, onde os próprios blocos servem como unidades experimentais (parcelas inteiras) para um subconjunto dos fatores (parcelas subdivididas).

No exemplo citado anteriormente, se o tratamento principal fosse constituído pelo fator A, e o tratamento secundário fosse constituído pelo fator B, teríamos uma divisão do espaço experimental em seis parcelas (dois níveis do fator A com três repetições). Com a aleatorização dos níveis do fator A nas parcelas e em seguida cada parcela seria subdividida em três novas partes, ou subparcelas, nas quais são aleatorizados os níveis do fator B. Um possível croqui para o experimento em parcela subdividida pode ser visualizado na Figura 2.

A ₂	A ₁	A ₁	A ₂	A ₂	A ₁
B ₁ B ₃ B ₂	B ₂ B ₃ B ₁	B ₁ B ₂ B ₃	B ₃ B ₂ B ₁	B ₃ B ₁ B ₂	B ₁ B ₃ B ₂

Figura 2 - Croqui do experimento parcela subdividida com 2 níveis do fator principal, 3 níveis do fator secundário e 3 repetições.

O modelo estatístico no caso de parcelas subdivididas é muito parecido com o modelo para experimentos fatoriais, entretanto, devido a divisão das parcelas em subparcelas, este apresenta um erro específico para o(s) fator(es) aleatorizado(s) nas parcelas e um erro associado à subparcela. O modelo em questão pode ser escrito como:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{(i)k} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{(ij)k}; \quad (2)$$

sendo que: $i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; μ é uma constante inerente a todas as observações; α_i é o efeito do i -ésimo nível do fator A; $e_{(i)k}$ é o erro experimental referente ao i -ésimo nível do fator A na k -ésima repetição; β_j é o efeito do j -ésimo nível do fator B; $(\alpha\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre os fatores A e B; $\varepsilon_{(ij)k}$ é o erro experimental associado ao i -ésimo nível do fator A do j -ésimo nível do fator B na k -ésima repetição, tal que $e_{(i)k} \sim NID(0, \sigma_1^2)$ e $\varepsilon_{(ij)k} \sim NID(0, \sigma^2)$.

O esquema da análise de variância para um experimento em parcela subdividida com o fator A (a níveis) nas parcelas, B (b níveis) nas subparcelas e r repetições pode ser visualizado na Tabela 2.

Tabela 2 - Quadro da ANOVA parcela subdividida com o desdobramento

F.V.	g.l.	SQ	QM	F
FATOR A	$(a - 1)$	SQA	$\frac{SQA}{a-1}$	$\frac{QMA}{QMRes(parc)}$
Res. parc.	$a(r - 1)$	SQPar-SQA	$\frac{SQRes(parc)}{a(r-1)}$	
Parcelas	$ar - 1$	SQPar		
FATOR B	$(b - 1)$	SQB	$\frac{SQB}{b-1}$	$\frac{QMB}{QMRes(sub)}$
A \times B	$(a - 1)(b - 1)$	SQ A \times B	$\frac{SQA \times B}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{QMA \times B}{QMRes(sub)}$ *
A:B ₁	$(a - 1)$	SQ A:B ₁	$\frac{SQA:B_1}{a-1}$	$\frac{QMA:B_1}{QMRes(sub)}$
A:B ₂	$(a - 1)$	SQ A:B ₂	$\frac{SQA:B_2}{a-1}$	$\frac{QMA:B_2}{QMRes(sub)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A:B _b	$(a - 1)$	SQ A:B _b	$\frac{SQA:B_b}{(a-1)}$	$\frac{QMA:B_b}{QMRes(sub)}$
Res. sub.	$a(b - 1)(r - 1)$	SQTot-SQPar-SQB-SQ(A \times B)	$\frac{SQRes(sub)}{a(b-1)(r-1)}$	
Total	$(abr - 1)$	SQTot		

* teste F resulta em diferença significativa.

Espera-se que o quadrado médio do resíduo da subparcela seja menor que o quadrado médio do resíduo da parcela ($QMRes(sub.) < QMRes(par.)$), pois o $\varepsilon_{(ij)k}$ apresenta um maior número de graus de liberdade do que o $e_{(i)k}$. A grande vantagem é possibilitar a obtenção de uma estimativa de maior precisão para os tratamentos que estão na subparcela.

Em casos mais complexos, se conveniente, as subparcelas podem ser divididas em novas subparcelas, porém, cada subdivisão gera um novo resíduo como apresentado no caso anterior. Além disso, pode-se aplicar a idéia de fatorial com parcela subdividida no caso de três fatores ou mais. (GOMES, 1990).

Campos (1984), afirma que existem dois tipos de experimentos quanto a estruturação das subparcelas, sendo um referente as parcelas subdivididas no espaço, quando em cada parcela há uma subdivisão em diversas partes, cada uma delas constituindo as subparcelas, e o outro referente a parcelas subdivididas no tempo em que as amostras são tomadas periodicamente em cada parcela.

2.1.1.1 Experimentos com medidas repetidas no tempo

A análise de medidas repetidas é uma técnica de análise de variância na qual são examinadas as variações globais e individuais ao longo do tempo. Esta, exige a definição de pelo menos um fator intra-indivíduos, o qual vai indicar as variáveis que contem as medidas repetidas (NEMEC, 1996).

Stell e Torrie (1980) sugerem que este é um tipo de experimento em parcela subdividida, o que pressupõe que o erro da parcela (fator tratamento) e o erro da subparcela (tempo e a interação tempo por tratamento), tem distribuição normal, sejam independentes e identicamente distribuídos, com variâncias constantes (as mesmas feitas na análise usual). No entanto, Fernandez (1991), alerta para um resultado inválido no caso dos erros terem uma matriz de covariâncias que não possua variâncias homogêneas, pois isto pode gerar um inflacionamento na probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela corresponde à verdade (probabilidade do erro tipo I). Huynh e Feldt (1970) mostraram que o teste F com relação à parcela, tem distribuição F exata, mas, com relação a subparcela, isso só acontecerá se a matriz de covariâncias dos erros (Σ) satisfizer a condição de simetria composta (VIEIRA et al., 2007), ou seja,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 + \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma^2 + \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma^2 + \sigma_1^2 \end{pmatrix}_{t \times t} \quad (3)$$

em que: σ^2 é a variância associada à subparcela, ou intra-indivíduos, σ_1^2 é a variância associada à parcela, ou entre indivíduos, e t é o número de níveis do fator tempo.

A condição de simetria composta implica que a variável aleatória seja igualmente correlacionada e tenha variâncias iguais, considerando as diferentes ocasiões, ou seja, se $\sigma_{jj'} = \frac{\sigma_j^2 + \sigma_{j'}^2}{2} - \lambda$, e $\sigma_{jj} = \sigma_j^2$, λ é uma constante positiva e $j = (1, \dots, t)$. Então as variâncias da diferença entre pares de erros são todas iguais, o que valida a análise de variância de parcelas subdivididas no tempo. Esta condição necessária e suficiente é denominada Huynh-Feldt (H-F).

De acordo com Malheiros (2004), na prática, em uma mesma unidade experimental, as observações tomadas aos longo do tempo são correlacionadas e essas correlações são menores para tempos mais distantes, sendo variável a estrutura da matriz Σ .

Para verificar a condição de simetria composta da matriz, Mauchly (1940) propôs um teste que verifica se uma população normal multivariada apresenta variâncias iguais e as correlações nulas. Se a população satisfizer a condição, esta é chamada de esférica.

O teste de esfericidade utiliza a condição de H-F para a matriz de covariâncias das medidas repetidas dos indivíduos requeridos nos $(t-1)$ contrastes ortogonais normalizados, verificando se:

$$\mathbf{M}_{(t-1) \times t} \sum \mathbf{M}'_{t \times (t-1)} = \lambda \mathbf{I}_{(t-1)} \quad (4)$$

em que: \mathbf{M} é a matriz de coeficientes dos contrastes ortogonais normalizados e \mathbf{I} é a matriz identidade.

Alguns autores, como Box (1954), Geisser e Greenhouse (1958) e Huynh e Feldt (1976), sugerem algumas correções nos graus de liberdade para o fator tempo e para a interação entre tratamentos e tempo, possibilitando que esses testes possam ser usados, de forma aproximada, mesmo quando a condição de esfericidade da matriz \sum não seja satisfeita.

Malheiros (2004), trabalhando com dados simulados, concluiu que tanto para efeito de tempo como para a interação, tratamento \times tempo, a correção de Huynh e Feldt para os testes F da análise da variância foram imprecisos. Já com a correção de Greenhouse e Geisser, os resultados foram precisos, independente da estrutura da matriz de covariâncias e dos dados serem balanceados ou não. Em um trabalho anterior, Littell, et al. (1998), também relataram este resultado. Independente do tipo de matriz de covariância associada aos resíduos, os experimentos em que um dos fatores em estudo é o tempo, ou seja, um fator quantitativo, tem-se como um dos objetivos descrever o comportamento da variável resposta ao longo dos níveis desse fator sendo a técnica de regressão a mais recomendada para cumprimento do objetivo.

2.1.2 Regressão

Segundo Demétrio e Zocchi (2011) é comum encontrar experimentos que envolvam uma mistura de fatores, quantitativos e qualitativos, e em geral, para este tipo de experimento, há interesse em saber como uma determinada relação entre variáveis pode mudar de acordo com o outro fator. Vieira (2006), apresenta a técnica como sendo uma equação que melhor descreve o fenômeno.

A grande vantagem da regressão é fazer previsões por meio da equação que representa os dados e, com isso, analisar possíveis intervalos de crescimento, decréscimo, pontos de máximo e mínimo, entre outras características do modelo ajustado ¹ para diversas áreas.

O termo regressão foi utilizado pela primeira vez, por Sir Francis Galton (1822-1911), que propôs a “Lei de Regressão Universal” em seu livro *Natural Inheritance*, publicado em 1889. Ele, em seus estudos em fenômenos de hereditariedade, mostrou que quando casais altos ou baixos tem filhos, as alturas dessas crianças tendem a regredir ou reverter para a altura média mais típica das pessoas do mesmo sexo. Portanto utilizamos a mesma terminologia embora os dados não envolvam os mesmos fenômenos (VIEIRA, 2006).

Genericamente, podemos descrever um conjunto de dados empíricos como:

$$y_i = f(X_i, \theta) + \varepsilon_i; \quad (5)$$

em que: i é o nível do fator, $i = \{1, 2, \dots, n\}$; y_i é a variável dependente, ou variável resposta; X_i é uma variável preditora não aleatória, considerada independente; θ é um conjunto de parâmetros ou também denominados coeficientes de regressão; $f(X_i, \theta)$ é uma função que inclui a variável independente e os parâmetros, e ε_i é o erro aleatório.

Nesta construção do modelo, quanto melhor estiver ajustada o modelo aos dados, mais rigorosamente a função descreverá o experimento em estudo, pois diminuirá os erros aleatórios, que devem ser independentes e com distribuição normal (média zero e variância constante $\sigma^2 I$).

Uma maneira alternativa de formular o modelo dado pela expressão (eq. 5), é escrever o valor esperado da variável aleatória Y condicional em função dos valores da variável preditora X_i , tal que:

$$E[Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \Leftrightarrow \hat{y} = f(X; \hat{\theta})$$

em que: $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é o conjunto de variáveis predictoras, tal que $n \in N$.

Alguns exemplos de funções são:

I) $y = ax + b$

II) $y = ax^2 + b$

¹desde que estejam dentro do intervalo de pesquisa dos dados

$$\text{III) } y = bx^a$$

$$\text{IV) } y = ax_1 + bx_2 + c$$

$$\text{V) } y = x^a + b$$

em que: a , b e c são parâmetros ou coeficientes de regressão; x , x_1 e x_2 são variáveis preditoras e y é a variável resposta.

Oliveira (2004) classifica os modelos de regressão em três grupos: lineares, linearizáveis ou intrinsecamente não lineares. Essa separação refere-se a forma que os parâmetros estão dispostos no modelo.

Nos exemplos I, II e IV, apresentados anteriormente, tem-se funções de regressão linear, pois a variável resposta é expressa como função linear dos coeficientes de regressão, apesar de I ser uma função linear, II ser quadrática e IV ser bivariada (duas variáveis preditoras: x_1 e x_2). Já as funções III e V tem o parâmetro a não linear em relação a y .

Se aplicar logaritmo natural a ambos do lados da equação III por meio de propriedades matemáticas, tem-se que: $y = bx^a \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(b) + a \cdot \ln(x)$, admitindo $y^* = \ln(y)$; $b^* = \ln(b)$ e $x^* = \ln(x)$ a função passa a assumir a forma linear: $y^* = ax^* + b^*$. Portanto, há uma transformação que possibilita reescrever a função na forma linear, sendo assim classificado como linearizável ².

No exemplo V não há transformação matemática que possibilite a linearização, e é então denominada função intrinsecamente não linear. Estes dois últimos casos são consideradas funções não lineares, admitindo o erro aditivo tem-se os modelos não lineares.

Por definição, um modelo de regressão não linear tem pelo menos um de seus parâmetros apresentando não-linearidade (MAZUCHELI e ACHCAR, 2002). Pode-se verificar tal suposição por meio da derivada parcial da função a qual se depender do parâmetro derivável ou de qualquer outro é considerado um modelo não linear, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} f(X, \theta) = g(\theta), \quad (6)$$

em que: $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^t$, p é o número de parâmetros, $k = 1, 2, \dots, p$ e $g(\theta)$ é uma função que depende de pelo menos um dos parâmetros.

²Isto só foi possível por não ter assumido o erro aditivo no modelo, o que é considerado uma falha.

Segundo Galbo, et al. (1989), a maioria dos fenômenos reais, sejam eles físicos, químicos ou biológicos é melhor representado por modelos não lineares, pois seus parâmetros apresentam explicações biológicas, visto que na maioria das situações partem de equações diferenciais. No entanto a estimação dos coeficientes de regressão (θ) não é tão simples. Pode-se utilizar a minimização da soma de quadrados do resíduo (MQ) ou a máxima verossimilhança (MV), para se obter um sistema de equações normais não-linear, entretanto estes não apresentam uma forma explícita para o vetor de parâmetros estimados ($\hat{\theta}$), dependendo então de processos iterativos.

Draper e Smith (1998) apontam que, quanto maior o número de parâmetros envolvidos no modelo, maior é a dificuldade na solução das equações normais. Para agravar, podem existir múltiplas soluções correspondentes aos vários valores estacionários das equações normais. Isso corresponde a encontrar, no processo de estimação, mínimos ou máximos locais para os parâmetros e não o global, resultando em um dos grandes problemas da regressão não linear, pois conseguir a convergência do modelo é algo complexo em muitos casos. Na Tabela 3, são apresentados alguns modelos comumente utilizados em estudos biológicos.

Tabela 3 - Alguns modelos não-lineares

Modelo	Componente sistemático
Gallant	$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 \exp(\gamma x_3)$
Von-Bertalanffy	$\alpha \{1 - \exp[-\gamma(x - \sigma)]\}$
Mitscherlich	$\alpha [1 - 10^{-\gamma(x-\sigma)}]$
Logístico	$\alpha / \{1 + \exp(\beta - \gamma x)\}$
Gompertz	$\alpha \exp\{-\exp(\beta - \gamma x)\}$
Richards	$\alpha / [\{1 + \exp(\beta - \gamma x)\}^{1/\sigma}]$
Michaelis-Menten	$\alpha x / (\gamma + x)$

No modelo Gallant, x_1 e x_2 representam dois tratamentos e x_3 o tempo que afeta exponencialmente a média da variável resposta. No modelo Von-Bertalanffy, frequentemente usado na área ecológica para explicar o comprimento de peixes, α é o comprimento máximo esperado para a espécie, γ é a taxa média de crescimento e σ é um valor nominal em que o comprimento do peixe é zero. O modelo Mitscherlich, usado na agricultura, tem α como produção máxima esperada, γ é o coeficiente de eficácia do adubo

e σ é o teor de nutriente existente no solo sem adubação. Nos modelos, logístico, Gompertz e Richards, α refere-se a assíntota superior, γ é a taxa média de crescimento e β está relacionado com o intercepto. O parâmetro σ que aparece no modelo Richards é utilizado para aumentar a flexibilidade no ajuste do modelo aos dados. No modelo Michaelis-Menten, usado no estudo de velocidade de reações, x é a concentração do substrato, α é a velocidade máxima de reação e γ é a constante de Michaelis. (CORDEIRO, PRUDENTE e DEMÉTRIO, 2009)

É importante ressaltar que, embora as letras utilizadas para designar cada um dos parâmetros coincidam nos diferentes modelos, existem variações quanto às suas interpretações. Em alguns casos, a interpretação dos parâmetros é direta, mas, em outros, é necessário recorrer à dedução da equação para uma compreensão exata de sua relação com os fenômenos fisiológicos subjacentes (FORNI, 2007).

2.1.2.1 Métodos de estimação dos parâmetros em regressão não linear

Na estimação dos parâmetros, deseja-se que os desvios dos valores observados em relação aos estimados sejam mínimos, o que equivale a minimizar o comprimento do vetor de erros (ε).

Considerando o modelo de regressão não linear, em sua forma matricial:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta) + \underset{\sim}{\varepsilon}, \quad (7)$$

em que: $\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ vetor das variáveis observadas; $\underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)$ vetor da função não linear; $\underset{\sim}{\varepsilon}$ vetor dos erros aleatórios, todos os vetores de dimensão $(n \times 1)$.

A estimativa para $\underset{\sim}{\theta}$ é dada pelo vetor que minimiza a soma de quadrados do resíduo $S(\underset{\sim}{\theta})$, dada por:

$$\begin{aligned} S(\underset{\sim}{\theta}) = \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\varepsilon} &= [\underset{\sim}{\mathbf{Y}} - \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)]^T [\underset{\sim}{\mathbf{Y}} - \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)] \\ &= [\underset{\sim}{\mathbf{Y}}^T - \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)^T] [\underset{\sim}{\mathbf{Y}} - \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)] \\ &= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^T \underset{\sim}{\mathbf{Y}} - \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^T \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta) - \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)^T \underset{\sim}{\mathbf{Y}} + \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)^T \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta) \\ &= \underset{\sim}{\mathbf{Y}}^T \underset{\sim}{\mathbf{Y}} - 2\underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)^T \underset{\sim}{\mathbf{Y}} + \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta)^T \underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

Este método de estimação é conhecido como mínimos quadrados ordinários. Draper & Smith (1998) afirmam que, para encontrar as estimativas ($\underset{\sim}{\hat{\theta}}$), é necessário

derivar $S(\theta)$ com relação ao vetor de parâmetros θ , o que fornece “p” equações normais.

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-\partial 2\mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{Y}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{-\partial 2\mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{Y}}{\partial \theta} &= \frac{-\partial 2\mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} = -2\mathbf{Y}^T \mathbf{Z} \\ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} = 2\mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)^T \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (10)$$

em que: $\mathbf{Z} = (\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta)) / \partial \theta$ é a matriz de derivadas parciais, em que cada coluna é formada pela derivada da função linear em relação aos parâmetros.

Da eq. 10 em 9 tem-se a eq. 11.³

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, \hat{\theta})^T \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Z} \Leftrightarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \hat{\theta}) = \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \quad (11)$$

Segundo Silva (2009), em geral, os modelos de regressão básicos assumem que os erros são independentes, entretanto, em experimentos em que a variável regressora é uma medida de tempo, pode ocorrer correlação residual devido a esse fator. A consequência do uso do método dos mínimos quadrados ordinários, nestes casos, é a subestimação da variância e do verdadeiro desvio padrão dos coeficientes de regressão, podendo ser completamente ineficiente os estimadores dos coeficientes e invalidando os intervalos de confiança e testes usando as distribuições t e F (MAZZINI, 2001; MAZZINI, et al, 2005).

Para Bates e Watts (1988) sempre que o tempo ou distância estiver envolvido como um fator numa análise de regressão é prudente checar a suposição da independência dos erros. Caso essa suposição seja violada, outros métodos de estimação devem ser utilizados, tais como: mínimos quadrados ponderados e mínimos quadrados generalizados.

Quando constata-se heterogeneidade de variâncias, o método dos mínimos quadrados ponderados fornecem estimadores não tendenciosos e de mínima variância

³ $f(X, \theta)$ e X são funções de θ , e em geral, não existe uma forma fechada para a solução. Esta solução de mínimos quadrados ordinários é garantida, pois $\frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta^2} > 0$

(HOFFMAN & VIEIRA, 1998). Supondo que $\varepsilon \sim N(0, \mathbf{V}\sigma^2)$, em que V é uma matriz diagonal, positiva definida, que representa as variâncias associadas a cada ε_i , com $E(\varepsilon) = 0$ e

$$E(\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\varepsilon}) = V\sigma^2 = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_n \end{bmatrix} \sigma^2 \quad (12)$$

O fato de serem nulos os elementos fora da diagonal principal da matriz V significa que é válida a pressuposição de independência das várias observações, isto é, $E(\varepsilon_i, \varepsilon_h) = 0$ para $i \neq h$. Por este método, é possível determinar uma matriz diagonal Λ , cujos elementos são dados por $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{V_i}}$, ou seja:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (13)$$

desta forma, tem-se que:

$$\Lambda\Lambda = V^{-1} \text{ e } V = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1}. \quad (14)$$

Pré-multiplicando cada um dos termos de um modelo de regressão não linear (eq.7) por Λ , obtém-se erros homocedástico (eq.15).

$$\Lambda\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \Lambda\mathbf{f}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \theta) + \Lambda\underset{\sim}{\varepsilon} \quad (15)$$

Já os mínimos quadrados generalizados, conforme apresentado por Crocci (1984), são mais eficientes do que o método dos quadrados mínimos ponderados e ordinários, na presença de heterogeneidade de variâncias e autocorrelação residual.

Supondo-se que $\varepsilon \sim N(0, W\sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva definida, que representa as variâncias e covariâncias dos erros e, admitindo-se que os erros sejam autocorrelacionados na forma de um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem, AR (1), ou seja,

$$\varepsilon_i = \phi_1\varepsilon_{(i-1)} + u_i, \quad (16)$$

em que, u_i é o ruído branco, $E(u_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma_u^2$ e $E(u_i u_{(i-h)}) = 0$ para $h \neq 0$. Nessas condições, $Var(\varepsilon) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2}$ e $Cov(\varepsilon_i \varepsilon_h) = \frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2} \phi_1^h$.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^{i-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^{i-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{i-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{i-1} & \phi_1^{i-2} & \phi_1^{i-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A relação $\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{(i-1)} + u_i$, mostra que o erro da observação relativa a um período está relacionado com o erro da observação anterior. Se $\phi_1 > 0$, diz-se que os erros estão positivamente autocorrelacionados e, se $\phi_1 < 0$, há autocorrelação negativa. Para o caso em que $\phi_1 = 0$, pode-se aplicar mínimos quadrados ordinários, ou seja, os erros são independentes (SAVIAN, 2005). Outros métodos possíveis para incorporar correlações são o de médias móveis (MA), auto-regressivo de médias móveis (ARMA) e modelos mistos.

Gallant (1987) afirma que os métodos dos mínimos quadrados são utilizados na estimação dos parâmetros em modelos de regressão não lineares, da mesma maneira que em modelos lineares. No entanto, em modelos não lineares, geralmente, o sistema de equações normais, não possui forma fechada, isto é, não possui solução analítica. Assim, a obtenção das estimativas dos parâmetros é realizada via método numérico iterativo. Na literatura existem vários métodos numéricos iterativos, como por exemplo, o método de Newton, método Newton-Raphson, método Gauss-Newton, algoritmo EM, entre outros.

O método de Gauss Newton modificado utiliza o resultado de mínimos quadrados em uma sucessão de passos, convertendo o problema de uma regressão não linear para uma série de regressões lineares. Para isso, faz-se uma expansão da função não linear em série de Taylor até primeiro grau e depois minimiza a soma de quadrados residual.

O sucesso na utilização do algoritmo de Gauss-Newton, como método iterativo, depende da escolha apropriada da função resposta e de bons valores iniciais. Embora existam algumas orientações gerais para determinação de valores iniciais, o processo de escolha é um procedimento decidido pelo pesquisador. Várias alternativas para a determinação desses valores são apresentadas em Draper e Smith (1998) e Gallant (1987).

Estimado os parâmetros, tem-se um modelo para cada nível do fator qualitativo e pode-se pensar em igualdade entre efeitos dos parâmetros e até mesmo em modelos com efeitos idênticos.

2.1.2.2 Comparação de modelos não lineares

Segundo Regazzi e Silva (2004), em análise de regressão, com muita frequência deseja-se saber se um conjunto de equações são idênticas, ou seja, se o fenômeno em estudo pode ser representado por uma única equação. Para modelos não lineares, Bates e Watts (1988), apresentaram o teste assintótico baseado na razão de verossimilhança como no caso de modelos lineares, cuja hipóteses são:

H_0 : O efeito do modelo completo é igual ao efeito do modelo reduzido.

H_a : há diferença significativa entre os efeitos dos modelos propostos.

A aproximação da estatística F, do teste de modelo completo versus reduzido, é dada por:

$$F_0 = \frac{(S_p - S_f)/(v_f - v_p)}{S_f/v_f} \sim F_\alpha((v_f - v_p); v_f),$$

em que: S é a soma de quadrados residuais, v é o número de graus de liberdade, f representa o modelo completo e p o modelo reduzido.

O teste a um nível de significância α , consiste em rejeitar H_0 se $F_0 \geq F_\alpha((v_f - v_p); v_f)$. Souza (1998) ressalta que para modelos de regressão não-linear esta análise é aproximada, porque a razão entre os quadrados médios não tem uma distribuição F exata. Regazzi e Silva (2004) compararam, com dados simulados, esta estatística F com a aproximação dada pela estatística de qui-quadrado, concluindo que ambas as aproximações podem ser utilizadas na comparação de modelos não-lineares.

2.1.2.3 Modelos não lineares para crescimento animal

Segundo Malhado, et al. (2008), curvas de crescimento podem ser utilizadas para descrever o crescimento do animal ao longo do tempo, auxiliando no estabelecimento de programas alimentares e na definição da idade ótima de abate. Modelos matemáticos não-lineares, desenvolvidos empiricamente para relacionar peso e a idade, têm-se mostrado adequados para descrever a curva de crescimento em diferentes animais. Esses modelos permitem que conjuntos de informações em séries de peso por idade sejam condensados num pequeno número de parâmetros, para facilitar a interpretação e o entendimento do fenômeno (OLIVEIRA et al., 2000)

De acordo com Freitas (2005), entre as várias aplicações das curvas de crescimento na produção animal, destacam-se: resumir em três ou quatro parâmetros as

características de produção, pois alguns parâmetros dos modelos não-lineares utilizados possuem interpretação biológica; avaliar o perfil de resposta de tratamento ao longo do tempo; estudar interações de respostas das subpopulações ou tratamentos com o tempo e identificar em uma população os animais mais pesados em idades mais jovens.

Os ovinos são ruminantes com alta capacidade para se alimentarem exclusivamente de pastagem e produzirem proteína de alto valor biológico. O tempo necessário para que um cordeiro atinja o peso de abate é muito importante. Quando mais cedo for atingido esse peso, menores são as despesas e a probabilidade de morte dos animais (PACHECO e QUIRINO, 2008)

Segundo informações do IBGE em 2010, no Brasil, o efetivo de ovinos era de 17,4 milhões de cabeças, o que representou um aumento de 3,4% comparado com 2009. A maior quantidade de ovinos se encontra na região nordeste, 56,7% do total nacional.

Portanto, com a expansão do mercado da carne ovina no Brasil, são necessárias pesquisas que determinem o peso de abate dos grupos genéticos mais adequados às condições locais, visando máxima eficiência produtiva e econômica para atender as exigências do consumidor (FURUSHO-GARCIA et al., 2004).

Em um sistema de produção de ovinos e caprinos, as características relacionadas ao crescimento são medidas repetidamente em intervalos pré-definidos e apresenta relação direta com a quantidade e qualidade da carne, produto final da exploração. A forma mais rotineira e de baixo custo para se medir o crescimento é pelo aumento de peso em um determinado período de tempo, embora medidas de altura também possam ser utilizadas para descrever o crescimento dos animais (LAWRENCE & FOWLER, 1997).

O ajuste de dados de peso-idade de cada animal ou de um grupo de animais permite obter informações descritivas da curva de crescimento e de prognósticos futuros para animais do mesmo grupo racial sob a mesma situação ambiental. Portanto, a função que é utilizada para descrever o crescimento do animal tanto pra fins de exigência nutricional, como para seleção genética, é de extrema importância (FITZHUGH Jr., 1976).

As funções não-lineares com parâmetros biologicamente interpretáveis, desenvolvidas empiricamente para relacionar peso e idade, são úteis em estudos de crescimento, pois fornecem informações importantes sobre as variações genética e ambiental que ocorrem entre as avaliações consecutivas dos animais. Entre essas funções não-lineares, as mais utilizadas na modelagem da curva de crescimento são: a de Brody (BRODY, 1945),

a de Von Bertalanffy (VON BERTALANFFY, 1957), a de Richards (RICHARDS, 1959), a Logística (NELDER, 1961) e a de Gompertz (LAIRD, 1965).

Na prática, a dúvida que surge é com respeito a qual modelo utilizar para descrever adequadamente o crescimento corporal de ovinos e caprinos. McMANUS et al. (2003), estudando curvas de crescimento de ovinos Bergamácia criados no Distrito Federal, recomendaram que o modelo Logístico deve ser preferido aos de Richards e Brody. Santos et al. (2003) e Guedes et al. (2004), por sua vez, compararam diversos modelos no estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês e verificaram que o de Gompertz proporcionou resultados mais adequados.

SARMENTO et al. (2006) relatam que apesar do bom ajuste, o modelo de Richards apresenta problemas quanto à convergência no processo iterativo e não recomendam o ajuste do mesmo visto que a diferença em qualidade de ajuste não supera a dificuldade em atingir convergência, possivelmente por esse modelo apresentar um parâmetro a mais. Dificuldade de convergência com o modelo Richards também foi relatada por Braccini Neto, et al. (1996), evidenciando que, apesar da maior flexibilidade, por não fixar o ponto de inflexão, esse modelo apresenta maiores dificuldades no processo iterativo em seu ajustamento.

Identificado o modelo que melhor se ajustou ao padrão de crescimento, os parâmetros que o descrevem devem ser estudados, identificando-se os fatores que podem influenciá-los, como raça, sexo, tipo de nascimento, época e ano de nascimento e idade da mãe ao parto, possibilitando ajustes no padrão de crescimento. Silva & Araújo (2000) e Fernandes, Buchanan e Selaive-Villarroel (2001) verificaram que os efeitos de sexo, tipo de parto, ano de nascimento e idade da mãe ao parto são importantes fontes de variação na descrição do crescimento de ovinos deslanados.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Neste trabalho foram utilizados dados experimentais de peso (em Kg) de sete ovinos machos e sete fêmeas da raça Santa Inês, instalado segundo um delineamento inteiramente casualizado, em que os fatores sexo e idade do animal estavam arranjados segundo um esquema de parcela subdividida, sendo aleatorizados nas parcelas os sexos e nas subparcelas os tempos de medidas de peso em dias (0,30,60,90,120,150,180,210,240,270,300,330).

Um modelo estatístico adequado para este tipo de experimento é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + s_i + e_{(i)k} + t_j + st_{ij} + \varepsilon_{(ij)k} \quad (18)$$

em que: y_{ijk} refere-se ao peso do k -ésimo animal, do i -ésimo sexo, no j -ésimo tempo; μ é uma constante inerente a todas as observações; s_i é o efeito do i -ésimo sexo; $e_{(i)k}$ é o erro associado as parcelas; t_j é o efeito do j -ésimo tempo de mensuração do peso; st_{ij} é o efeito da interação entre o i -ésimo sexo e j -ésimo tempo; $\varepsilon_{(ij)k}$ é o erro experimental associado às subparcelas; $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \dots, 12$ e $k = 1, 2, \dots, 7$. Os erros, por suposição, são independentes e identicamente distribuídos de uma Normal com média zero e variância constante.

As pressuposições em relação ao modelo foram avaliadas por meio de análises gráficas e testes estatísticos, sendo que a normalidade dos resíduos foi verificada pela inspeção gráfica do Normal Plot e pelo teste de Shapiro Wilk (1965), a homogeneidade de variâncias dos resíduos pelos gráficos de dispersão e box plot, do fator tempo e tratamento com relação aos resíduos, e teste de Bartlett (1937). Já a esfericidade foi analisada na matriz de variâncias e covariâncias e por meio do teste de Mauchly (1940).

Como as avaliações de peso dos animais foram realizadas ao longo do tempo, espera-se que a pressuposição de esfericidade não seja satisfeita. Portanto, como artifício para análise, há de se fazer a correção nos graus de liberdade. A técnica de correção utilizada será a de Geisser e Greenhouse, dada por:

$$\hat{G} = \frac{[tr(\mathbf{M}\Sigma\mathbf{M}')]^2}{(j-1)tr(\mathbf{M}\Sigma\mathbf{M}')^2}$$

em que: \mathbf{M} é a matriz de coeficientes dos contrastes ortogonais, sobre j medidas repetidas e Σ matriz de covariâncias.

Assim, por meio de soluções univariadas aproximadas, os testes F 's para os fatores tempo e sexo \times tempo têm distribuições aproximadas F centrais, com $(j-1)\hat{G}$

e $i(k-1)(j-1)\hat{G}$; $(g-1)(j-1)\hat{G}$ e $i(k-1)(j-1)\hat{G}$ graus de liberdade ajustados, respectivamente. Sendo que as somas de quadrado das fontes de variação são dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned}
\text{SQSexo} &= \frac{\sum_{i=1}^2 (y_{i..})^2}{jk} - \text{correção} \\
\text{SQErro.parc} &= \text{SQParcela} - \text{SQSexo} \\
\text{SQParcela} &= \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^7 y_{i.k}^2}{j} - \text{correção} \\
\text{SQTempo} &= \frac{\sum_{j=1}^{12} y_{.j}^2}{ik} - \text{correção} \\
\text{SQSexo} \times \text{Tempo} &= \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{12} y_{ij.}^2}{k} - \text{correção} - \text{SQSexo} - \text{SQTempo} \\
\text{SQErro.sub} &= \text{SQTotal} - \text{SQParcela} - \text{SQTempo} - \text{SQSexo} \times \text{Tempo} \\
\text{SQTotal} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^7 y_{ijk}^2 - \text{correção} \\
\text{SQSexo:Tempo} &= \text{SQSexo} \times \text{Tempo} + \text{SQTempo} \\
\text{SQTempo:Sexo}_i &= \frac{\sum_{j=1}^{12} y_{ij.}^2}{k} - \text{correção} \\
\text{correção} &= \frac{(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^7 y_{ijk})^2}{ijk}
\end{aligned}$$

O quadrado médio para cada fonte de variação é dado pelo quociente da soma de quadrado com relação aos graus de liberdade, e os testes referentes ao fator sexo, tempo e interação é dado respectivamente pelo quociente do quadrado médio do fator sexo pelo quadrado médio do erro da parcela, quadrado médio do fator tempo pelo quadrado médio do erro da subparcela e quadrado médio da interação pelo quadrado médio do erro da subparcela. As análises serão apresentadas como na Tabela 2 (página 26).

Para o estudo dos níveis do fator tempo em cada um dos sexos ajustou-se o modelo não-linear Gompertz, considerando um intercepto, descrito pela seguinte expressão:

$$\bar{y}_{ij.} = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i) \exp\{-\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij.})\} + e_{ij.} \quad (19)$$

sendo: $\bar{y}_{ij.}$ o peso médio dos animais do i -ésimo sexo no j -ésimo tempo; $x_{ij.}$ é o tempo de avaliação do peso, em dias; α_i representa o peso assintótico quando $x_{ij.}$ tende a menos infinito; β_i é o valor de estabilização do peso em relação ao tempo; γ_i está relacionado

com o intercepto, ou seja, com o peso ao nascimento, e τ_i taxa média de crescimento; e_{ij} é o erro experimental.

Para o modelo apresentado na eq.19, verifica-se que se $x_{ij} = 0 \Rightarrow \hat{y}_{ij} = \hat{\alpha}_i + (\hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i) \exp\{-\exp(\hat{\gamma}_i)\}$, sendo uma estimativa para o peso dos animais recém nascidos.

Para a obtenção dos valores iniciais dos parâmetros, necessário ao processo iterativo, considerou-se α_i e β_i como valores mínimos e máximos de pesagem, respectivamente, para cada sexo. Por propriedades matemáticas também observa-se a seguinte relação entre os parâmetros.

$$\begin{aligned} \lim_{x_{ij} \rightarrow -\infty} (\alpha_i + (\beta_i - \alpha_i) \exp\{-\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij})\}) &= \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i).0 = \alpha_i \\ \lim_{x_{ij} \rightarrow \infty} (\alpha_i + (\beta_i - \alpha_i) \exp\{-\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij})\}) &= \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i).1 = \beta_i \end{aligned} \quad (20)$$

Na prática não tem-se $x_{ij} \rightarrow -\infty$, pois x_{ij} é o tempo de avaliação do peso. Portanto espera-se que para $x_{ij} \rightarrow 0$, $(\hat{\beta}_i - \hat{\alpha}_i) \exp\{-\exp(\hat{\gamma}_i)\} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{y}_{ij} \rightarrow \hat{\alpha}_i$.

Os valores iniciais para os parâmetros γ_i e τ_i foram obtidos por meio da linearização da função Gompertz, como se segue:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{ij} = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i) \exp\{-\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij})\} &\Leftrightarrow \frac{\bar{y}_{ij} - \alpha_i}{(\beta_i - \alpha_i)} = \exp\{-\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij})\} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\bar{y}_{ij} - \alpha_i}{(\beta_i - \alpha_i)}\right) = -\exp(\gamma_i - \tau_i x_{ij}) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(-\ln\left(\frac{\bar{y}_{ij} - \alpha_i}{(\beta_i - \alpha_i)}\right)\right) = \gamma_i - \tau_i x_{ij} \\ &\Leftrightarrow Y_{ij}^* = \gamma_i + (-\tau_i)x_{ij}. \end{aligned} \quad (21)$$

Portanto, α_i^0 será o valor mínimo de \bar{y}_{ij} ; β_i^0 o valor máximo de \bar{y}_{ij} ; γ_i^0 e τ_i^0 , o intercepto e coeficiente angular, respectivamente, do modelo linear de Y_{ij}^* em função de x_{ij} , ou seja,

$$\underset{\sim}{\theta^0} = \begin{bmatrix} \alpha_i^0 \\ \beta_i^0 \\ \gamma_i^0 \\ \tau_i^0 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss Newton, utiliza a expansão da função não linear em série de Taylor até o termo de primeira ordem da função, $f(X_i, \theta)$ em torno do vetor θ^0 , ou seja:

$$\underset{\sim}{\mathbf{f}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, \underset{\sim}{\theta}) \approx \underset{\sim}{f}(X, \theta^0) + \frac{f'(X, \theta^0)(\underset{\sim}{\theta} - \underset{\sim}{\theta^0})}{1!} = \underset{\sim}{f}(X, \theta^0) + Z(\underset{\sim}{\theta} - \underset{\sim}{\theta^0})$$

em que:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{X}, \theta^0) = \mathbf{Z} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij}, \theta)}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij}, \theta)}{\partial \beta_i} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij}, \theta)}{\partial \gamma_i} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ij}, \theta)}{\partial \tau_i} \end{array} \right]$$

Tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_{ij}, \theta)}{\partial \alpha_i} &= 1 - \exp\{-\exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij})\} \\ \frac{\partial f(x_{ij}, \theta)}{\partial \beta_i} &= \exp\{-\exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij})\} \\ \frac{\partial f(x_{ij}, \theta)}{\partial \gamma_i} &= -(\beta_i^0 - \alpha_i^0) \exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij}) \exp\{-\exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij})\} \\ \frac{\partial f(x_{ij}, \theta)}{\partial \tau_i} &= (\beta_i^0 - \alpha_i^0) x_{ij} \exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij}) \exp\{-\exp(\gamma_i^0 - \tau_i^0 x_{ij})\} \end{aligned}$$

Pelo método dos mínimos quadrados (eq. 11), e expansão de Taylor (1ª ordem), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{Z}^T (\mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta^0) + \mathbf{Z}(\theta - \theta^0)) \approx \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta^0) + \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}(\theta - \theta^0) \approx \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}(\theta - \theta^0) \approx \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Z}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta^0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}(\theta - \theta^0) \approx \mathbf{Z}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\mathbf{X}, \theta^0)) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}(\hat{\Delta}) \approx \mathbf{Z}^T (\mathbf{e}) \\ &\Leftrightarrow \hat{\Delta} \approx (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T (\mathbf{e}) \end{aligned}$$

Estimado $\hat{\Delta}$ para o vetor $\hat{\theta}^0$, tem-se que que:

$$\hat{\Delta} = \hat{\theta} - \theta^0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \hat{\Delta} + \theta^0$$

No entanto, para que este se aproxime do verdadeiro parâmetro, este processo é repetido w vezes, de tal forma que: $\hat{\theta}^{w+1} = \hat{\theta}^w + \lambda \hat{\Delta}$, $SQE(\hat{\theta}^w + \lambda \hat{\Delta}) < SQE(\hat{\theta}^w)$, e λ é uma constante qualquer.

Em geral, considera-se que o processo iterativo atingiu a convergência quando:

- O vetor de estimativas dos parâmetros não se altera mais dentro de uma precisão pré-estipulada (L), tal que este valor é muito pequeno.

$$\|\hat{\theta}^{w+1} - \hat{\theta}^w\| < L \approx 0 \quad (22)$$

- O vetor de estimativas dos resíduos também for muito pequeno, não se alterando.

$$\|\tilde{\mathbf{e}}^{w+1} - \tilde{\mathbf{e}}^w\| < L \quad (23)$$

- Excede o número de iterações pré-determinado, ou seja, w é muito grande.
- Verifica-se uma “quase ortogonalidade” entre o vetor do resíduos e as diagonais da matriz \mathbf{Z}^T .

$$\|\tilde{\mathbf{e}}^w \mathbf{Z}^T\| < \mathbf{L} \quad (24)$$

Se $\|\tilde{\mathbf{e}}^w \mathbf{Z}^T\| = \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{w+1} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^w$, ou seja, a solução é exata.

A qualidade de ajuste do modelo Gompertz aos dados de pesagem de ovinos será verificada pelo teste para a falta de ajuste, ou teste de aderência dentro da análise de variância. Para realização deste teste é necessário que se verifique as seguintes relações entre somas de quadrados (SQ):

$$\text{SQ}(\text{Sexo}_i:\text{Tempo}) = \text{SQ}(\text{Modelo Corrigido}_i) + \text{SQ}(\text{Desvios de Regressão}_i)$$

$$\text{SQ}(\text{Modelo Corrigido}_i) = \text{SQ}(\text{Modelo}_i) - \text{SQ}(\text{Constante}_i) = \text{SQ}(\text{Regressão}_i)$$

$\text{SQ}(\text{Constante}_i) = k \cdot \bar{y}_{i..} \cdot \sum_j \bar{y}_{ij}$. Isso corresponde a ajustar um modelo de médias, ou seja, $\bar{y}_{ij} = \alpha_i$.

$$\text{SQ}(\text{Modelo}_i) = \text{SQ}(\text{Parâmetros}_i) = k \cdot (\sum_j \bar{y}_{ij}^2 - \sum_j (\bar{y}_{ij} - \hat{y}_{ij})^2).$$

$\bar{y}_{i..}$ é o peso médio para o i -ésimo sexo e \bar{y}_{ij} é o peso médio dos k animais do i -ésimo sexo e j -ésimo tempo.

Além disso, testes T para a hipótese de nulidade das estimativas dos parâmetros são realizados, dados pela estatística:

$$T_{\text{calc}} = \frac{\hat{\theta}_i}{\sqrt{\text{var}(\hat{\theta}_i)}} \quad (25)$$

em que: $\hat{\theta}_i = \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i, \hat{\tau}_i, i = 1, 2$ e $\text{var}(\hat{\theta}_i)$ é a variância da estimativa. Verificando assim, a significância destes parâmetros e se seus intervalos de confiança indicam estimativas parecidas para ambos os sexos.

Ao analisar os modelos para cada sexo, pode ser que exista parâmetros com efeitos parecidos nas curvas apresentadas. Portanto faz-se uso da técnica de comparação de parâmetros, teste F, modelo completo versus reduzido, verificando a possibilidade de

redução da soma de quadrado residual e diminuição do número de parâmetros a serem estimados, visando o melhor ajuste aos dados.

O esquema da análise é verificado na Tabela 4, onde são apresentados o número de graus de liberdade e soma de quadrados do modelo completo (este admite uma curva específica para macho e outra específica para fêmea, ou seja, parâmetros diferentes para cada sexo); do modelo reduzido (considera a igualdade de alguns parâmetros entre os sexos); a redução obtida conforme os modelos a serem testados (H_0); juntamente do resíduo e total do modelo completo, estes, além dos graus de liberdade e soma de quadrados, tem o quadrado médio e o teste F (REGAZZI e SILVA, 2004).

Tabela 4 - Esquema da análise de variância relativa ao teste da hipótese de modelo completo versus reduzido.

Fonte de variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	$F_{calculado}$
Parâmetro (completo)	c	SQ_1		
Parâmetro (reduzido)	$c - r$	SQ_2		
Redução (H_0)	r	$SQ_3 = SQ_1 - SQ_2$	$QM_1 = SQ_3/r$	QM_1/QM_2
Resíduo	$n - c$	$SQ_4 = SQ_5 - SQ_1$	$QM_2 = SQ_4/n - c$	
Total	n	$SQ_5 = Y'Y$		

em que: c é o número de parâmetros do modelo completo, r é o número de parâmetros com efeitos supostamente iguais, n é o número de observações.

A implementação das análises deste trabalho foram realizadas nos softwares R (R Development Core Team, 2011) e SAS (Statistical Analysis System, 2002), nas versões 2.13.2 e 9.0, respectivamente. A programação está disponibilizada nos anexos e para todos os testes realizados considerou-se o nível nominal de significância de 5%.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Análise exploratória dos dados e pressuposições do modelo

Pelo gráfico de dispersão (Figura 3), observa-se o crescimento dos animais conforme o sexo. Nota-se que os valores de pesagem das fêmeas, em geral, são inferiores a pesagem dos machos. Em relação a variação dos pesos verifica-se, por meio da Figura 4(a), que há uma diferença na dispersão dos dados em função do tempo, sendo que os animais quando mais novos, apresentam pesos semelhantes e a medida que a idade avança a variabilidade das pesagens também aumentam, isso pode ser decorrente ao efeito do ambiente, visto que inicialmente todos tem efeito genético parecido. Além disso, na Figura 4 (b), os valores de peso das fêmeas são, como um todo, menos dispersos quando comparado ao peso dos machos, porém a mediana é praticamente a mesma para ambos os sexos. Os valores de média, variância e desvio padrão, para cada tempo de pesagem, podem ser observados na Tabela 5. Verifica-se nesta tabela, em ambos os sexo, o aumento na variabilidade das pesagens em função do tempo de avaliação, bem como uma ligeira inferioridade dos pesos médios das fêmeas em relação ao peso médio dos machos.

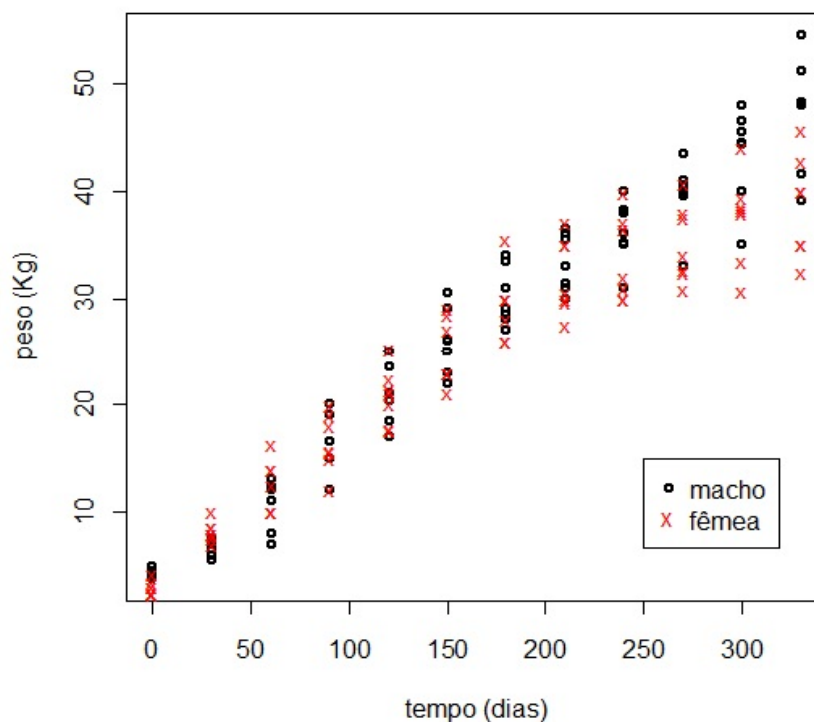


Figura 3 - Dispersão dos valores amostrados, conforme tempo e sexo

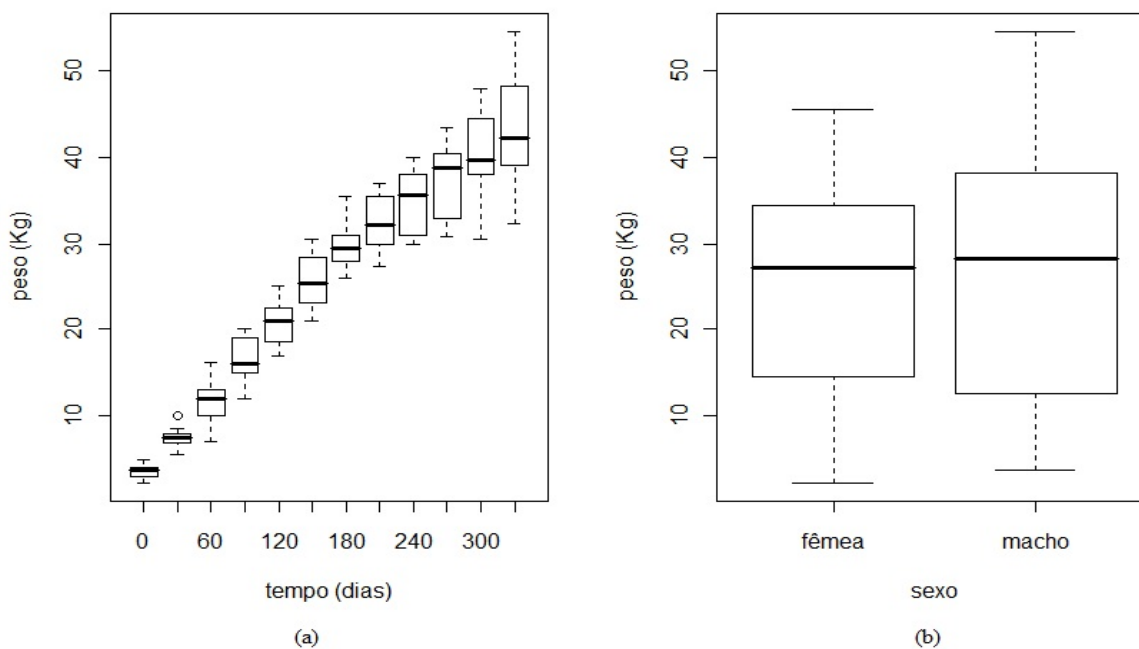


Figura 4 - Box-plot dos valores amostrados, (a) tempo versus peso e (b) sexo versus peso

Tabela 5 - Valores médios, variância e desvio padrão do peso (kg) dos ovinos.

Tratamentos	macho			fêmea		
	variância	média	desvio padrão	variância	média	desvio padrão
0	0,17	4,14	0,41	0,46	2,99	0,68
30	0,61	6,74	0,78	0,90	8,21	0,95
60	5,47	10,74	2,34	6,14	12,39	2,48
90	7,16	16,30	2,68	7,36	16,44	2,71
120	7,57	20,91	2,75	7,24	20,74	2,69
150	9,21	25,96	3,04	10,04	24,93	3,17
180	7,56	30,14	2,75	10,56	29,36	3,25
210	7,04	33,34	2,65	12,69	32,07	3,56
240	8,60	36,21	2,93	15,78	33,77	3,97
280	10,29	39,63	3,21	13,04	35,16	3,61
300	19,89	43,40	4,46	18,53	37,46	4,30
330	30,39	47,70	5,51	22,48	38,69	4,74

Ainda na Tabela 5, verifica-se que até 280 dias os machos apresentam uma menor variabilidade dos pesos quando comparado as fêmeas e que esse comportamento se inverte nas duas próximas pesagens.

A suposição de normalidade abrange as seguintes hipótese:

H_0 : Os erros da subparcela seguem distribuição normal.

H_a : Os erros da subparcela não seguem distribuição normal.

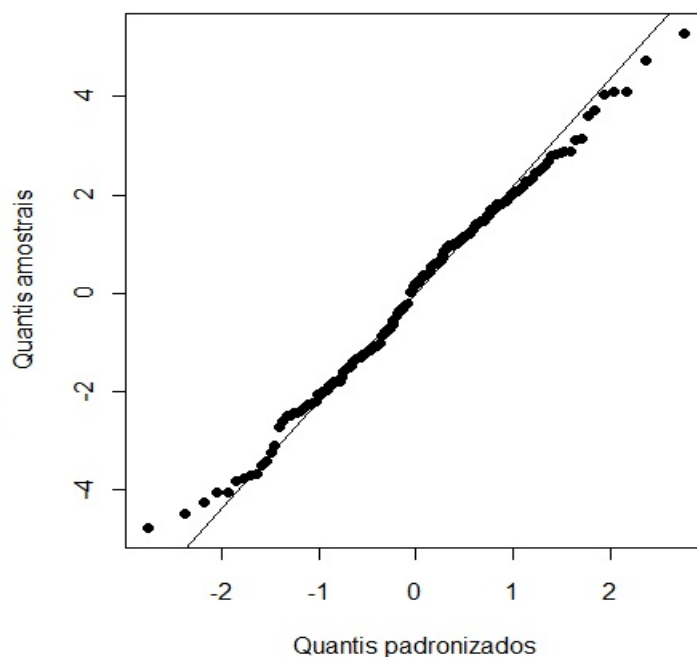


Figura 5 - Normal-plot dos resíduos da subparcela

Analisando o gráfico normal-plot (Figura 5), observa-se que a distribuição dos resíduos aparentemente não difere da distribuição normal. Pelo teste de Shapiro-Wilk comprovamos este resultado, uma vez que a estatística do teste é de 0,992, o que representa um valor descritivo (valor p) de: 0,4695, sendo este superior ao nível de significância de 0,05. Portanto, não se rejeita a hipótese nula, ou seja, os erros seguem distribuição normal.

Observa-se na Figura 6 a dispersão dos resíduos, que estão compreendidos entre -4,5 e 4,5, o que é um pouco acima do esperado ao nível de 5% de significância. No box-plot (Figura 7), verifica-se melhor essa dispersão com relação aos tratamentos, nota-se valores discrepantes e uma certa heterogeneidade, o que era de se esperar, visto que um dos fatores é o tempo.

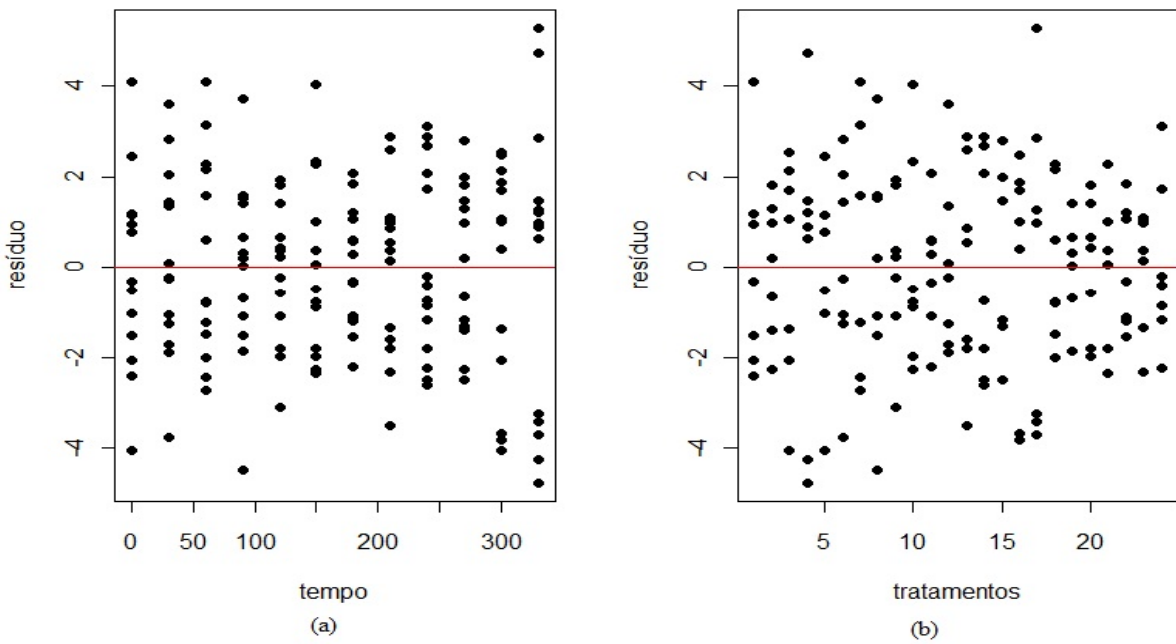


Figura 6- Resíduo dos valores amostrados, (a) com relação ao tempo, (b) com relação aos tratamentos

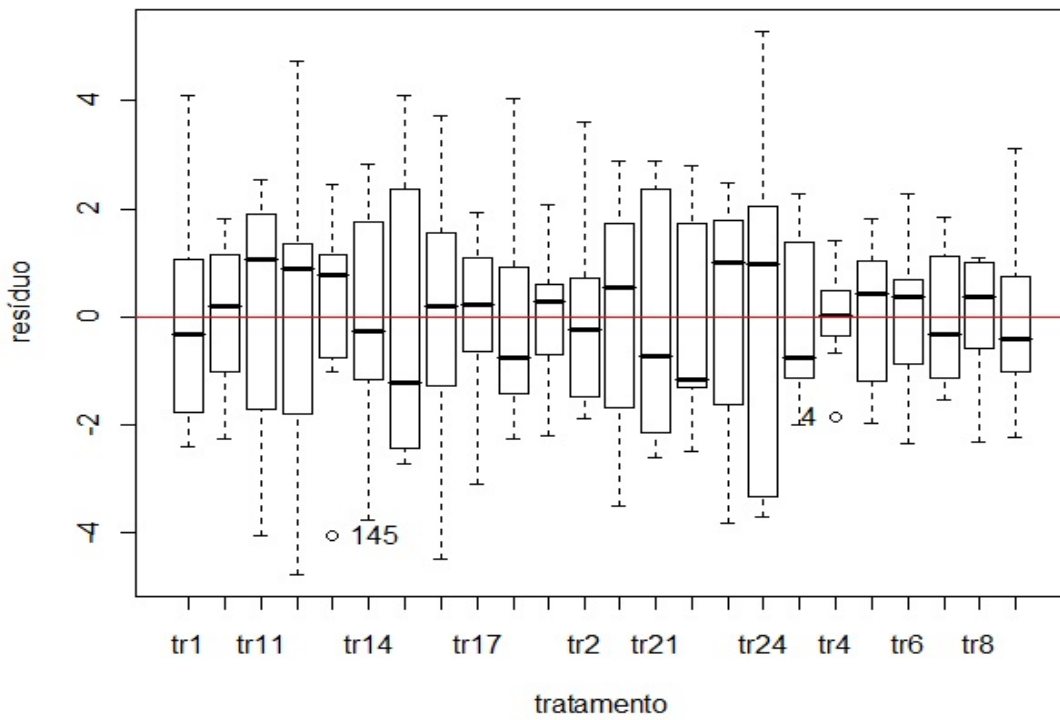


Figura 7- Box-plot dos resíduo amostrados versus tratamentos

Para a homocedasticidade ou homogeneidade de variâncias, tem-se as hipóteses:

H_0 : As variâncias residuais são homogêneas.

H_a : As variâncias residuais não são homogêneas.

Realizando o teste de Bartlett, com a hipótese nula de igualdade de variâncias entre os tratamentos (sexo \times tempo), temos a estatística do teste de 24,0606, o que corresponde ao valor descritivo de 0,4005. Portanto não se rejeita a hipótese de nulidade, ou seja, não há evidências para não aceitar a homocedasticidade.

A matriz de variâncias e covariância dos valores amostrados com relação ao tempo ($\sigma_{tt'}$) é dada por:

$$\sigma_{tt'} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,65} & -0,36 & -0,46 & -0,02 & 0,26 & 0,60 & 0,56 & 0,74 & 1,08 & 1,74 & 2,21 & 3,38 \\ -0,36 & \mathbf{1,28} & 2,12 & 1,63 & 1,06 & 0,72 & 0,12 & -0,72 & -1,42 & -1,82 & -1,76 & -2,35 \\ -0,46 & 2,12 & \mathbf{6,09} & 4,47 & 2,60 & 3,54 & 1,78 & -0,03 & -0,62 & -0,27 & 0,92 & -0,94 \\ -0,02 & 1,63 & 4,47 & \mathbf{6,71} & 5,97 & 6,68 & 4,42 & 2,16 & 1,96 & 2,36 & 4,17 & 4,73 \\ 0,26 & 1,06 & 2,60 & 5,97 & \mathbf{6,84} & 6,85 & 5,71 & 3,76 & 4,22 & 4,40 & 6,43 & 7,97 \\ 0,60 & 0,72 & 3,54 & 6,68 & 6,85 & \mathbf{9,17} & 6,87 & 4,42 & 4,61 & 5,50 & 8,42 & 8,72 \\ 0,56 & 0,12 & 1,78 & 4,42 & 5,71 & 6,87 & \mathbf{8,53} & 7,78 & 7,89 & 8,23 & 10,13 & 11,21 \\ 0,74 & -0,72 & -0,03 & 2,16 & 3,76 & 4,42 & 7,78 & \mathbf{9,54} & 10,20 & 10,05 & 10,26 & 12,21 \\ 1,08 & -1,42 & -0,62 & 1,96 & 4,22 & 4,61 & 7,89 & 10,20 & \mathbf{12,86} & 13,31 & 14,17 & 16,73 \\ 1,74 & -1,82 & -0,27 & 2,36 & 4,40 & 5,50 & 8,23 & 10,05 & 13,31 & \mathbf{16,15} & 19,55 & 23,81 \\ 2,21 & -1,76 & 0,92 & 4,17 & 6,43 & 8,42 & 10,13 & 10,26 & 14,17 & 19,55 & \mathbf{27,24} & 33,25 \\ 3,38 & -2,35 & -0,94 & 4,73 & 7,97 & 8,72 & 11,21 & 12,21 & 16,73 & 23,81 & 33,25 & \mathbf{46,28} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Os valores das covariâncias, elementos fora da diagonal principal da matriz (eq. 26), para o fator tempo, não aleatorizado, revelam uma possível existência de correlação. Verifica-se no teste de esfericidade que a estatística do teste de Mauchly é muito pequena ($W=0$), o que resulta em um nível descritivo de $3,121 \cdot 10^{-11}$. Portanto não é satisfeita a condição de esfericidade do modelo, sendo que a análise em parcela subdividida deve ser realizada com a correção dos graus de liberdade das causas de variação referentes a subparcela. O fator de correção dos graus de liberdade obtido pelo método de Geisser e Greenhouse (G-G) é dado por $\hat{G} = 0,2719$.

Como já citado anteriormente, este resultado já era esperado, e é visto também em outros experimentos, tais como na área agrônômica com análise de cana-de-açúcar (FREITAS, et. al.,2008) e biomédica com testes de coagulação (PARK, CHO E KI, 2009).

4.2 Análise de variância com correção G-G

Satisfeita as condições da ANOVA e verificada a necessidade de correção dos graus de liberdade, temos o modelo:

$$y_{ijk} = \mu + s_i + e_{ik} + t_j + st_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (27)$$

Com as hipóteses:

$$H_0: (st)_{11} = (st)_{12} = \dots = (st)_{112} = (st)_{21} = \dots = (st)_{212} = 0$$

H_a : existe pelo menos um efeito $(st)_{ij}$ que difere dos demais, tal que $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \dots, 12$.

Pela Tabela 6, pode-se verificar que a variância associada à interação (tempo:sexo) é 6,53 vezes superior a variância devido ao acaso, ou a variância residual associada a subparcela, isso corresponde a um nível descritivo de 0,0012, o que indica haver diferença significativa entre a combinação dos fatores, rejeitando a hipótese nula. Este resultado também foi verificado por Costa Jr. et al. (2006), que pesquisou o efeito da interação sexo e tempo (3 idades diferente) tanto para o peso corporal quanto para as medidas morfométricas desta raça.

Tabela 6 - Quadro da ANOVA com correção G-G para os dados de peso de ovinos

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calc}	valor p
Sexo	1	154,68	154,68	2,50 ^{n.s.}	0,140
Erro parcela	12	741,31	61,77		
Tempo	11 $\hat{G} = 2,99$	27192,60	9094,51	470,58*	< 0,001
Tempo:sexo	11 $\hat{G} = 2,99$	377,60	126,29	6,53*	0,001
Erro subparcela	132 $\hat{G}=35,90$	693,90	19,32		
Total	167	29160,14			

$\hat{G} = 0,272$; n.s = não significativo; * = difere significativamente.

Uma vez verificado um efeito significativo da interação entre os fatores, o próximo passo consiste em realizar o desdobramento do fator tempo dentro de cada nível do fator sexo, testando as seguintes hipóteses:

H_{01} : $(st)_{11} = (st)_{12} = \dots = (st)_{112} = 0$, ou seja, não há efeito significativo do peso nos ovinos machos com relação aos tempos.

H_{a1} : existe pelo menos um $(st)_{1j}$ que difere dos demais.

H_{02} : $(st)_{21} = (st)_{22} = \dots = (st)_{212} = 0$, ou seja, não há efeito significativo do peso nos ovinos fêmeas com relação aos tempos.

H_{a2} : existe pelo menos um $(st)_{2j}$ que difere dos demais.

Assim, por meio da Tabela 7, verifica-se que os desdobramentos avaliando o efeito do fator tempo em cada um dos sexos também foram significativos. Era de se esperar dado o comportamento dos dados no gráfico de dispersão (Figura 3).

Tabela 7 - Quadro da ANOVA com desdobramento da interação tempo dentro de sexo utilizando a correção G-G

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calc}	valor p
Sexo:tempo	$22\hat{G} = 5,98$	27570,30	4607,33	238,40*	< 0,001
Tempo:sexo-macho	$11\hat{G} = 2,99$	16346,70	5467,12	282,89*	< 0,001
Tempo:sexo-fêmea	$11\hat{G} = 2,99$	11223,60	3753,71	194,23*	< 0,001
Erro (B)	$132\hat{G}=35,90$	693,90	19,32		

$\hat{G} = 0,272$; n.s = não significativo; * = difere significativamente.

Avaliar o efeito do fator tempo sobre a variável resposta, ganho de peso de ovinos dada sua natureza quantitativa, pode ser feita de forma mais adequada por meio de modelos de regressão. Em geral, os dados sugerem o tipo de modelo a ser ajustado. Uma inspeção mais detalhada do gráfico de dispersão (Figura 3) demonstra uma evolução do ganho de peso dos animais até aproximadamente 280 dias. A partir deste tempo de pesagem os incrementos em peso tendem a diminuir, sendo este comportamento mais evidente para fêmeas.

Santos, et al. (2001), estudando o crescimento de ovinos da raça Santa Inês desde o nascimento, mostraram que, em condições ambientais adequadas, a curva descrita é do tipo sigmóide, havendo aceleração da sua velocidade até que a puberdade seja atingida, diminuindo gradativamente até a maturidade.

4.3 Regressão não linear

Na Tabela 8 visualiza-se a evolução do processo iterativo de Gauss Newton com as respectivas estimativas dos parâmetros e somas de quadrados dos resíduos a cada

iteração até que tenha sido constatado a convergência. Verifica-se que para dados de ganho de peso de ovinos machos foram necessários 11 iterações enquanto para as fêmeas foram necessárias apenas 5 iterações para que a convergência fosse atendida.

O modelo Gompertz ajustado aos dados de pesagem para machos e fêmeas são dados, respectivamente, pelas expressões que se seguem.

$$\hat{y}_{1j} = -13,106 + (67,233 + 13,106) \exp\{-\exp(0,461 - 0,005x_{1j})\} \quad (28)$$

$$\hat{y}_{2j} = -5,171 + (42,542 + 5,171) \exp\{-\exp(0,545 - 0,009x_{2j})\} \quad (29)$$

Tabela 8 - Processo iterativo de Gauss Newton para ajuste do modelo Gompertz aos dados de ganho de peso de ovinos (machos e fêmeas)

	iterações	SQRes	α_i	β_i	γ_i	τ_i
machos	w=0	52,844310	3,142800	48,700000	1,443450	0,012441
	w=1	18,450020	2,038303	50,545462	1,127071	0,009772
	w=2	13,659270	-0,087507	53,471895	0,911429	0,008052
	w=3	12,558920	-2,730482	56,730841	0,760427	0,006936
	w=4	11,415670	-5,408612	59,744804	0,655842	0,006221
	w=5	10,789920	-10,085135	64,622674	0,514563	0,005316
	w=6	9,607043	-12,570273	66,781821	0,470601	0,005090
	w=7	9,586901	-13,015614	67,152015	0,462925	0,005048
	w=8	9,586855	-13,086520	67,215718	0,461391	0,005039
	w=9	9,586853	-13,101643	67,229352	0,461049	0,005037
	w=10	9,586853	-13,105003	67,232381	0,460973	0,005036
w=11	9,586853	-13,105719	67,233035	0,460957	0,005036	
fêmeas	w= 0	12,765050	1,985714	39,685714	1,175555	0,013037
	w= 1	9,816208	-0,507196	41,284765	0,700564	0,009383
	w= 2	3,691503	-4,581052	42,493662	0,553803	0,008952
	w= 3	3,346712	-5,159436	42,540293	0,546022	0,008936
	w= 4	3,346697	-5,170697	42,542748	0,545597	0,008934
	w= 5	3,346697	-5,170959	42,542781	0,545584	0,008933

As estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz ajustado aos pesos de

ovinos machos e fêmeas são apresentados na Tabela 9, bem como os respectivos erros padrão, significância dos parâmetros e intervalos de 95% de confiança. Verifica-se que os parâmetros α_i e γ_i não são significativos para o modelo, isso é aceitável, pois no tempo inicial o peso é muito pequeno.

Pela dedução do modelo gompertz ⁴, γ_i está relacionado com o peso ao nascer dos animais ($\hat{y}_{0.0}$), logo: $\gamma_i \approx 0$. Verifica-se, ainda na Tabela 9, que o valor máximo esperado para o peso dos animais, ou seja, o peso assintótico (β_i) é de aproximadamente 67,2 Kg para os machos, enquanto que para as fêmeas é de 42,5Kg. Porém a taxa de crescimento é maior para as fêmeas, sendo de 0,09, o que significa que elas atingem esta estabilização máxima mais rápido que os machos.

Tabela 9 - Estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz com os respectivos erros padrão, significância e intervalo de 95% de confiança.

Parâm.	Estimativas	Erro padrão	T _{calc}	Pr(> t)	IC-95%
α_1	-13,106	18,685	-0,701	0,503	[-42,89; 19,39]
β_1	67,233	14,419	4,663*	0,001	[41,23; 93,51]
γ_1	0,461	0,443	1,041	0,328	[-0,27; 1,28]
τ_1	0,005	0,002	2,316*	0,049	[0,001; 0,009]
α_2	-5,171	5,010	-1,032	0,332	[-16,72; 6,38]
β_2	42,543	1,605	26,502*	0,000	[38,84; 46,24]
γ_2	0,545	0,238	2,287	0,051	[-0,004; 1,09]
τ_2	0,009	0,001	7,351*	0,000	[0,006; 0,012]

Observa-se na Figura 8 o ajuste do modelo Gompertz para cada sexo.

⁴Dedução do modelo encontra-se no apêndice A, página 73.

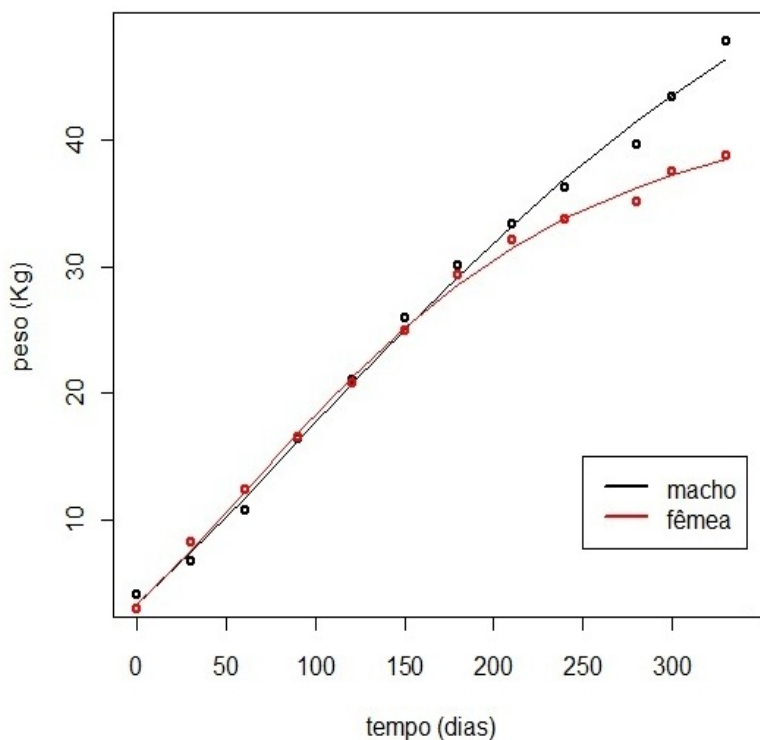


Figura 8 - Ajuste do modelo Gompertz aos pesos médios de ovinos machos e fêmeas

4.3.1 Diagnóstico dos modelos

Ajustando o modelo Gompertz ao peso médio dos animais, observa-se pela Figura 9(a) e (b) que os resíduos padronizados versus valores ajustados, para machos e fêmeas, respectivamente, apresentam uma aleatorização em torno do valor zero (eixo das abscissas), indicando que não há evidências de violação da pressuposição de homogeneidade de variâncias. Ainda nessas figuras, verifica-se, aparentemente, um comportamento cíclico dos resíduos o que poderia indicar uma violação da pressuposição de independência dos resíduos. Gráficamente, a forma mais adequada para verificar essa última pressuposição é por meio da avaliação dos resíduos em um tempo j versus resíduos no tempo $j - 1$. Na Figura 9 (c) e (d) é apresentado o gráfico de resíduos no tempo t em função do tempo defasado onde não se verifica nenhuma tendência dos resíduos tanto para machos como para as fêmeas, ou seja, não há indícios que exista autocorrelação residual. Além disso, os resíduos concentram-se numa faixa entre $[-2; 2]$, o que é aceitável ao nível de significância de 5%, não evidenciando a presença de pontos atípicos ou inconsistente.

A homocedasticidade dos resíduos é satisfeita pelo teste de Bartlett, cuja estatística é de 2,788 o que corresponde ao nível descritivo de 0,095.

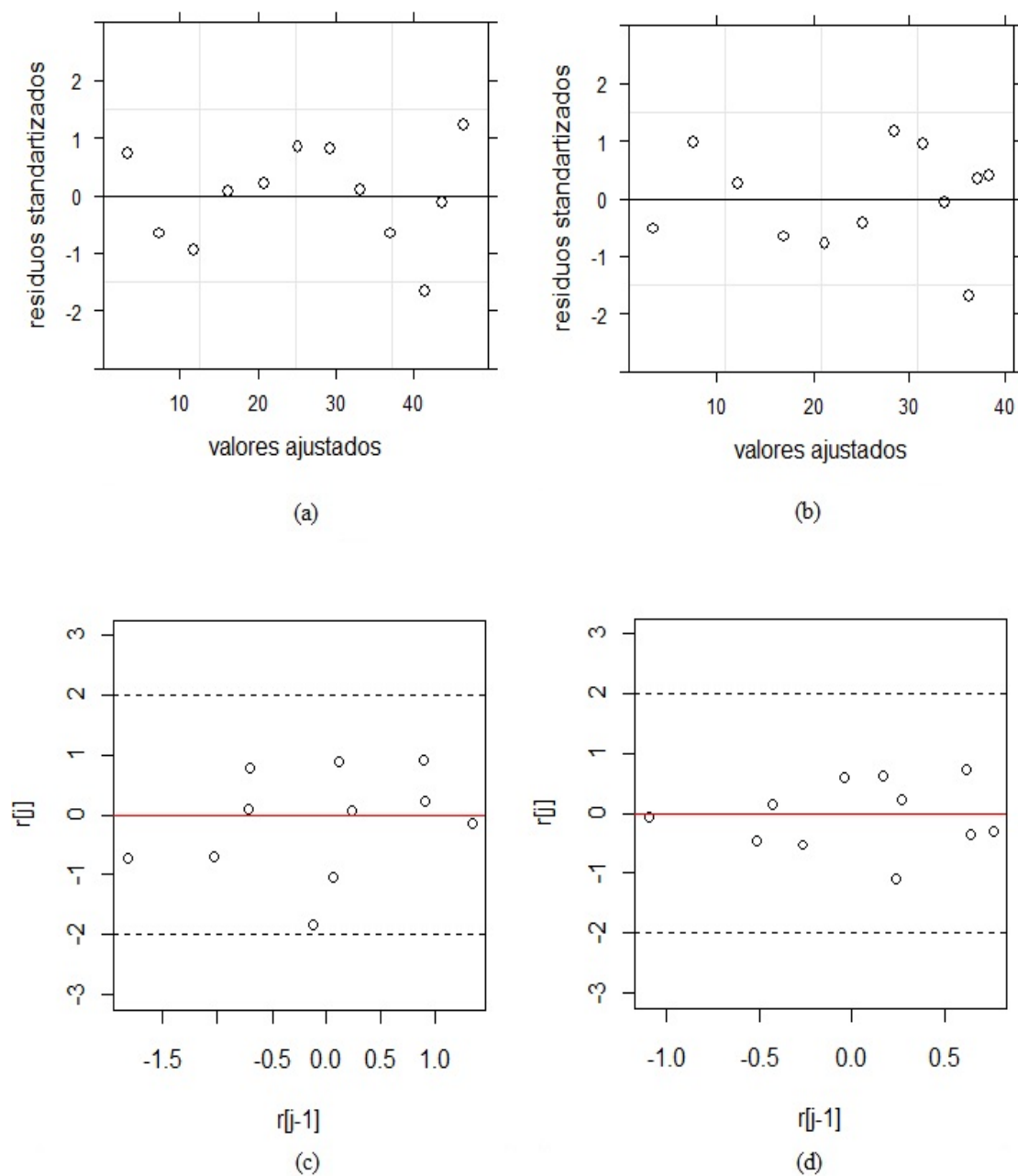


Figura 9- Gráfico dos resíduos padronizados versus valores ajustados (a e b) e resíduo versus resíduo defasado, sendo: (a) e (c) machos e (b) e (d) fêmeas

Em relação a pressuposição de normalidade dos resíduos, verifica-se na Figura 10(a e b) o Normal Plot dos resíduos para machos e fêmeas, respectivamente. Nota-se que, no geral, os quantis amostrais estão próximos dos quantis da distribuição Normal padronizada. Este comportamento demonstra que não há evidências para rejeição da hipótese de normalidade dos resíduos, o que foi confirmado pelo teste de Shapiro Wilk,

que resultou nas estatísticas $W_1 = 0,9602$, para machos, e $W_2 = 0,9579$, para fêmeas, sendo o nível descritivo de 0,7872 e 0,7534 respectivamente.

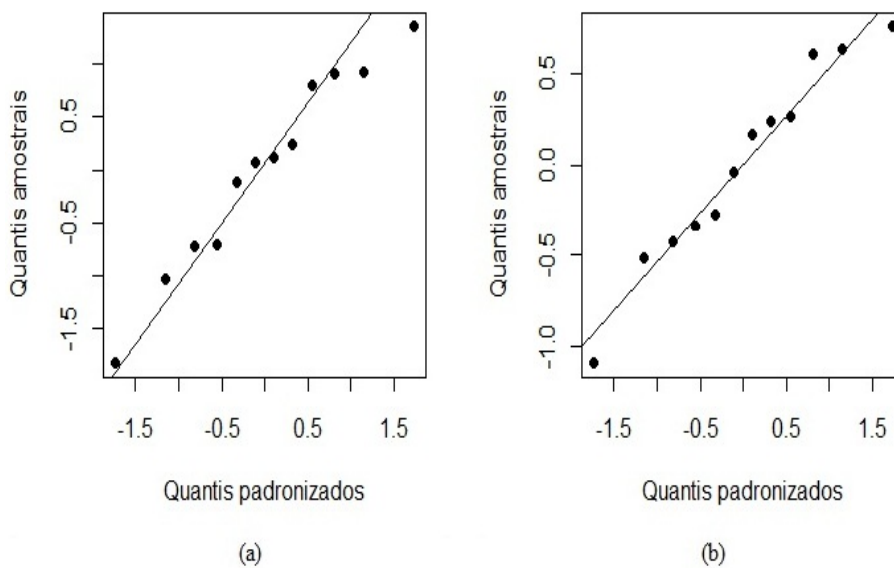


Figura 10 - Normal Plot dos resíduos (a) para machos (b) para fêmeas

4.4 Desdobramento em regressão não linear

Na Tabela 10 é apresentada a análise de variância para o experimento em parcela subdividida considerando no desdobramento da interação entre os fatores (sexo \times tempo) o ajuste do modelo de regressão não linear proposto, ou seja, o modelo de Gompertz, em que para o sexo macho tem-se as seguintes hipóteses:

H_{01} : O modelo não é significativo.

H_{a1} : O modelo ajustado para os ovinos machos é significativo.

H_{02} : Não há falta de ajustamento do modelo para machos, ou seja, desvios de regressão são significativos.

H_{a2} : Há falta de ajustamento para o modelo do sexo macho.

As mesmas hipóteses são testadas no desdobramento da interação do tempo dentro do sexo fêmea em regressão não linear.

Por meio dos resultados da análise de variância (Tabela 10), é possível verificar que o modelo Gompertz (modelo corrigido) é significativo para o ajuste dos dados de peso dos animais de ambos os sexos, sendo que a variabilidade associada ao modelo Gompertz para os machos, é 1032,31 vezes superior a variabilidade atribuída ao

acaso do resíduo da subparcela, e para as fêmeas, a razão entre as variabilidade associadas ao modelo e ao acaso é da ordem de 710,26 vezes. Além disso, nota-se que os desvios de regressão não são significativos, ou seja, não há evidências para se rejeitar a hipótese de nulidade que diz não haver falta de ajuste do modelo.

Tabela 10 - Desdobramento da ANOVA em regressão não linear

C.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F _{calc}	valor p
Sexo	1	154,68	154,68	2,50 n.s.	0,140
Erro parcela	12	741,31	61,77	—	
Sexo:tempo	22 \hat{G} = 5,98	27570,30	4607,33	238,40*	< 0,001
Macho:Tempo	11 \hat{G} = 2,99	16346,70	5467,12	282,89*	< 0,001
Modelo não corrigido	4 \hat{G} =1,09	74244,83	68264,83	—	
Constante	1 \hat{G} =0,27	57965,23	213185,80	—	
Modelo corrigido	3 \hat{G} =0,81	16279,60	19950,49	1032,31*	< 0,001
Desvios de regressão	8 \hat{G} =2,17	67,10	30,84	1,59 n.s.	0,210
Fêmea:Tempo	11 \hat{G} = 2,99	11223,60	3753,71	194,23*	< 0,001
Modelo não corrigido	4 \hat{G} =1,09	61005,63	56091,97	—	
Constante	1 \hat{G} =0,27	49805,49	183175,80	—	
Modelo corrigido	3 \hat{G} =0,81	11200,14	13725,66	710,26*	< 0,001
Desvios de regressão	8 \hat{G} =2,17	23,46	10,78	0,56 n.s.	0,590
Erro subparcela	132 \hat{G} =35,90	693,90	19,32		

\hat{G} = 0,272; n.s = não significativo; * = difere significativamente.

Em alguns estudos de curvas de crescimento são comparados os modelos não-lineares e segundo Sarmento, et al. (2006) e Guedes, et al. (2004), Gompertz é um modelo que se ajusta bem aos dados. No entanto, não são encontrados trabalhos com curvas de crescimento animal que façam o teste da falta de ajuste como uma forma de verificar a qualidade de ajuste do modelo. Savian, et al. (2007), com experimento de degradabilidade ruminal, apresentou o teste para a falta de ajuste do modelo não linear de Orskov & McDonald considerando um experimento em faixas. Gomes (1990) também apresentou o teste para a falta de ajuste para o modelo de Mitscherlich considerando um experimento de adubação segundo um esquema fatorial. No trabalho, o autor, obteve as estimativas dos parâmetros com base a deduções conhecidas e não em processos iterativos.

4.5 Igualdade de parâmetros

Com o ajuste dos modelos para machos e fêmeas (eq.28 e eq. 29, respectivamente) e teste de significância dos parâmetros (Tabela 7) pode-se pensar em algumas possibilidade, no que se refere a igualdade dos parâmetros das curvas de machos e fêmeas. Essas possibilidades podem ser traduzidas por meio das seguintes hipóteses:

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

$$H_{02}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \text{ e } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

$$H_{03}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \text{ e } \tau_1 = \tau_2 = \tau.$$

$$H_{04}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta \text{ e } \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

O que implica respectivamente em:

$$\text{Modelo1: } \hat{y}_{ij} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta}_i - \hat{\alpha}) \exp\{-\exp(\hat{\gamma}_i - \hat{\tau}_i x_{ij})\}.$$

$$\text{Modelo2: } \hat{y}_{ij} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta}_i - \hat{\alpha}) \exp\{-\exp(\hat{\gamma} - \hat{\tau}_i x_{ij})\}..$$

$$\text{Modelo3: } \hat{y}_{ij} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta}_i - \hat{\alpha}) \exp\{-\exp(\hat{\gamma} - \hat{\tau} x_{ij})\}.$$

$$\text{Modelo4: } \hat{y}_{ij} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta} - \hat{\alpha}) \exp\{-\exp(\hat{\gamma} - \hat{\tau}_i x_{ij})\}.$$

Pelas suposições das hipótese, tem-se alguns modelos reduzidos quando comparados com o modelo completo proposto(eq. 25). Estes são apresentados na Tabela 11, com as respectivas estimativas dos parâmetros e somas de quadrados dos resíduos.

Pelo teste F de modelo completo versus reduzido (Tabela 12) não se rejeitam as hipótese: H_{01} e H_{02} . Portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e pelo intervalo de confiança apresentado na Tabela 9, estes eram considerados estatisticamente iguais a zero. Já pela rejeição da hipótese H_{03} e não convergência da H_{04} , juntamente com a análise dos intervalos de confiança (Tabela 9) e gráfico de ajuste (Figura 8) tem-se que o valor máximo esperado e a taxa de crescimento são realmente diferentes em relação ao sexo do animal, ou seja, os machos atingem pesos assintóticos significativamente superiores que as fêmeas, porém elas atingem seu peso máximo com uma taxa de crescimento maior, o que implica que estabilizam seu peso mais rápido que os machos.

Tabela 11 - Parâmetros dos modelos Gompertz reduzidos e somas de quadrados residual.

Parâmetros	Estimativas dos parâmetros				
	modelo completo	modelo 1	modelo 2	modelo 3	modelo 4
α_1	-13,106	—	—	—	—
β_1	67,233	63,387	57,348	51,107	—
γ_1	0,461	0,592	—	—	—
τ_1	0,005	0,006	0,007	—	—
α_2	-5,171	—	—	—	—
β_2	42,543	43,245	40,672	46,463	—
γ_2	0,545	0,415	—	—	—
τ_2	0,009	0,008	0,011	—	—
α	—	-8,190	-0,776	-1,797	—
β	—	—	—	—	—
γ	—	—	0,861	0,779	—
τ	—	—	—	0,008	—
SQRes	12,933	13,151	17,794	40,643	não converge

Tabela 12 - Esquema da análise de variância relativa ao teste de H_{01} , H_{02} , H_{03} e H_{04} , modelo completo versus reduzido

Fonte de variação	GL	SQ	QM	F_{calc}	valor p
Parâmetro (completo)	8	8705,503			
Parâmetro (reduzido H_{01})	7	8705,285			
Redução (H_{01})	1	0,218	0,218/1	0,269 ^{n.s.}	0,611
Parâmetro (reduzido H_{02})	6	8700,643			
Redução (H_{02})	2	4,860	4,860/2	3,006 ^{n.s.}	0,078
Parâmetro (reduzido H_{03})	5	8677,793			
Redução (H_{03})	3	27,710	27,710/3	11,426*	0,000
Parâmetro (reduzido H_{04})	5	não converge			
Redução (H_{04})	3				
Resíduo	16	12,933	12,933/16		
Total	23	8718,436			

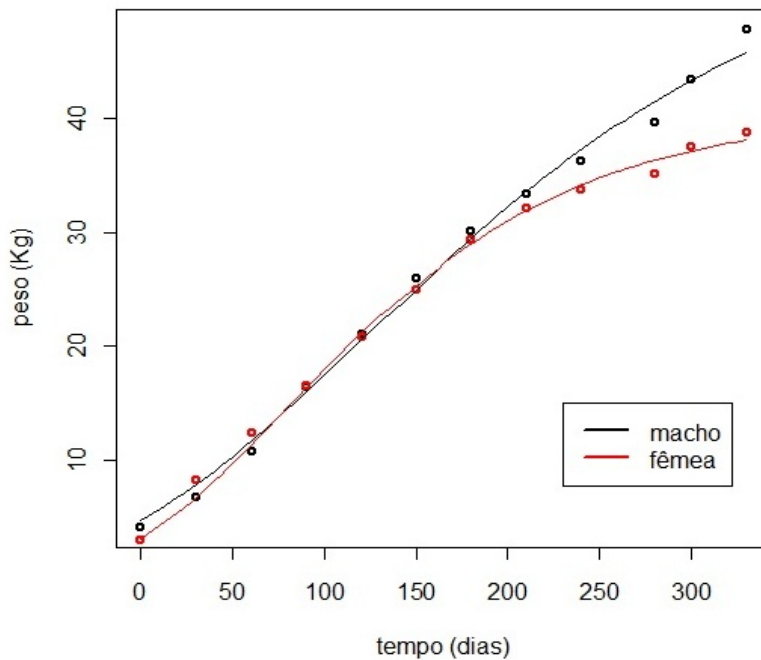


Figura 11 - Ajuste do modelo gompertz com parâmetros α e γ iguais para os sexo.

Portanto, podemos representar o peso estimado pelo modelo 3 com os parâmetros e somas quadráticas apresentados na Tabela 12, cujas equações individuais são apresentada em eq.29, para machos, e eq.30, para fêmeas.

$$\hat{y}_{1j} = -0,776 + (57,348 + 0,776)\exp\{-\exp(0,861 - 0,007x_{1j})\} \quad (30)$$

$$\hat{y}_{2j} = -0,776 + (40,672 + 0,776)\exp\{-\exp(0,861 - 0,011x_{2j})\} \quad (31)$$

Nota-se que as estimativas para a estabilização do peso final foram mais próximas do valor médio amostrado para 330 dias, ou seja, para essa idade os animais machos apresentam peso médio de 47,70 Kg e estimado em 45,18 Kg pelo modelo 3, para as fêmeas o peso médio é de 38,69 Kg enquanto o estimado é de 38,15 Kg. Pode-se notar na Tabela 13, que os intervalos de confiança dos parâmetros diminuíram quando comparados com o ajuste de modelos sem parâmetros comum, além disso, o parâmetro γ , relacionado com o peso ao nascer dos animais, passa a ser significativo para essa configuração do modelo.

Tabela 13 - Estimativas dos parâmetros do modelo Gompertz completo e modelo proposto 3, com erros padrão, significância e intervalo de 95% de confiança para o modelo 3

Parâm.	Estimativas do modelo		Erro padr.	T _{calc}	Pr(> t)	IC-95%
	completo	3				
α_1	-13,106	0,776	2,075	-0,374	0,712	[-5,13;3,58]
β_1	67,233	57,348	3,774	15,195	0,000*	[49,42;65,28]
γ_1	0,461	0,861	0,122	7,025	0,000*	[0,60;1,12]
τ_1	0,005	0,007	0,001	7,668	0,000*	[0,005; 0,009]
α_2	-5,171	0,776	2,075	-0,374	0,712	[-5,13;3,58]
β_2	42,543	40,672	1,166	34,888	0,000*	[38,22; 43,12]
γ_2	0,545	0,861	0,122	7,025	0,000*	[0,60;1,12]
τ_2	0,009	0,011	0,001	13,432	0,000*	[0,009; 0,012]

5 CONCLUSÕES

A análise dos dados do referido experimento permitiu as seguintes conclusões:

- i) O modelo univariado com esquema de parcelas subdivididas pode ser utilizado em experimentos de crescimento de ovinos da raça Santa Inês, onde são avaliados tempo e sexo, porém, sua aplicação está sujeita a verificação de esfericidade e caso não satisfeita deve-se recorrer a técnicas de correção dos graus de liberdade.
- ii) Para a raça Santa Inês, encontram-se efeitos significativos na comparação dos tempos combinados com o sexo e a combinação peso por tempo apresenta comportamento sigmoidal.
- iii) Incorporar o ajuste do modelo não linear no desdobramento da interação da análise de variância é bastante viável e permite verificar se realmente o modelo proposto explica bem o conjunto de dados.
- iv) O modelo não-linear gompertz é indicado para estudar as curvas de crescimento de ovinos, pois fornecem bons ajustes e interpretação prática dos parâmetros.
- v) Comparando os modelos proposto para cada sexo, tem-se que o valor máximo esperado (β_i) e a taxa de crescimento (τ_i) são diferentes. Ou seja, os machos são significativamente maiores em peso médio que as fêmeas, porém elas atingem seu peso máximo mais rapidamente, o que implica que estabilizam seu peso mais rápido que os machos.

REFERÊNCIAS

- BANZATTO, D. A.; KRONKA, S. N. **Experimentação agrícola**. 4. Ed. Jaboticabal: Funep, 2006. 237 p.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John Wiley, 1988. 365p.
- BERTOLDO, J. G.; COIMBRA, J. L. M.; GUIDOLIN, A. F.; MANTOVANI, A.; VALE, N. M. do. Problemas relacionados com o uso de testes de comparação de médias em artigos científicos. **Revista Biotemas**, Lavras, v.21, n.2, p. 145-153, jun., 2008.
- BOX, G. E. P. Some theorems on quadratic forms applied to the study of analysis of variance problems. **Ann. Math Stat.**, v.25, n.2, p.290-302, 1954.
- BRACCINI-NETO, J.; DIONELLO, N. J. L.; SILVEIRA Jr., P.; BONGALHARDO, D. C.; XAVIER, E. G. Análise de curvas de crescimento de aves de postura. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.25, n.6, p. 1062-1073, 1996.
- BRODY, S. **Bioenergetics and growth**: with special reference to the efficiency complex of domestic animals. New York: Hafner, 1945. 1023 p.
- CAMPOS, H. **Estatística aplicada a experimentação com cana de açúcar**. São Paulo, Fundação de Estudos Agrários Luiz de Queiroz, 1984. 292p.
- CORDEIRO, G. M.; PRUDENTE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revisão de modelos normais não-lineares. **Revista Brasileira de Biometria**. São Paulo, v.27, n.3, p.360-393, 2009.
- COSTA Jr., G. da S.; CAMPELO, J. E. G.; AZEVÊDO, D. M. M. R.; MARTINS Filho, R.; CAVALCANTE, R. R.; LOPES, J. B.; OLIVEIRA, M. E. de. Caracterização morfométrica de ovinos da raça Santa Inês criados nas microrregiões de Teresina e Campo Maior, Piauí. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.35, n.6, p.2260-2267, 2006.
- CROCCI, A.J.; **Modelo autorregressivo, para análise de experimentos com vacas em lactação**. 1984. 86 p. Tese (Doutorado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1984.
- DEMÉTRIO, C. G. B.; ZOCCHI, S. S. **Modelos de Regressão**. Piracicaba: ESALQ, 2011. 197 p.
- DEVORE, Jay L.. **Probabilidade e estatística**: para engenharia e ciências. 'Tradução de' MGS Language Services e Joaquim Pinheiro Nunes da Silva. 6. ed. São Paulo: Pioneira Thomson, 2006.
- DRAPER, N. R.; SMITH, H.; **Applied regression analysis**. 3. ed. New York: John Wiley, 1998. p.706.
- FERNANDES, A.A.O.; BUCHANAN, D; SELAIVE-VILLAROEL, A. B. Avaliação dos fatores ambientais no desenvolvimento corporal de cordeiros deslançados da raça Morada Nova. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.30, n.5, p.1460-1465, 2001.

FERNANDEZ, G. C. J. Repeated measure analysis of line-source sprinkler experiments. **HortScience**, Alexandria, v.26, n.4, p.339-342, 1991.

FITZHUGH Jr., H. A. Analysis of growth curves and strategies for altering their shapes. **Journal of Animal Science**, Champaign, v.42, n.4, p. 1036-1051, 1976.

FORNI, S. **Análise da curva de crescimento de bovinos da raça Nelore, utilizando modelos não-lineares em análises bayesianas**. 2007. 65p. Tese (Doutorado em Zootecnia) - Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias/UNESP, Jaboticabal, 2007.

FREITAS, A.R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, v.34, n.3, p.786-795, 2005.

FREITAS, E. G. de; BARBIN, D.; BARBOSA, G. V. de S.; CARNEIRO, M. S.; BASSINELLO, A. I. Modelo univariado aplicado a dados longitudinais de cana de açúcar. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v.26, n.2, p.93-106, 2008.

FURUSHO-GARCIA, I. F.; PEREZ J.R.O.; BONAGURIO, S.; LIMA, A.L.; QUINTÃO; F.A. Estudo dos cortes da carcaça de cordeiros Santa Inês Puros e Cruzas Santa Inês com Textil, Ile de France e Bergamácia. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.33, n.2, p.453-462, 2004.

GALBO, A. G.; SILVA, W. L. C.; TORRES, A. C. Ajuste de função não linear de crescimento. **Revista Brasileira de Fisiologia Vegetal**. Campinas, v.1, n.1, p. 9-18, 1989.

GALLANT, A. R.; **Nonlinear statistical models**. New York: John Wiley, 1987. 610 p.

GEISSER, S. GREENHOUSE, S. W. An extension of Box's results on the use of the F distribution in multivariate analysis. **Ann. Mathem. Stat.**, An. Arbor, v.29, p. 855-91, 1958.

GOMES, F. P. **Curso de estatística experimental**. 13^a ed. Piracicaba, SP: 1990. 468p.

GUEDES, M. H. P.; MUNIZ, J. A.; PEREZ, J. R. O.; SILVA, F. F. e; AQUINO, L. H. de; SANTOS, C. L. dos. Estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças Santa Inês e Bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. **Ciência Agrotec.**, Lavras, v.28, n.2, p.381-388, mar./abr., 2004.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S.; **Análise de regressão: uma introdução à econometria**. São Paulo: Hucitec, 1998.

HUYNH, H.; FELDT, L. S. Condition under which mean square ratios in repeated measurements designs have exact F-distributions. **Journal of the American Statistical Association**, v.65, n.332, p.1582-1589, dez. 1970.

HUYNH, H.; FELDT, L. S. Estimation of the Box correction for degrees of freedom from sample data in the randomized block and split-plot designs. **J. Educ. Assoc.**, v.1, p.69-82, 1976.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **Produção da Pecuária Municipal 2010**. Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/noticia_visualiza.php?id_noticia=2002&id_pagina=1>. Acesso em: 26 mai. 2012.

JONES, B.; NACHTSHEIM, C.J. Split-plot designs: what, why, and how. **Journal of Quality Technology**, v.41, n.4, p.340-361, out. 2009.

LAIRD, A. K. Dynamics of relative growth. **Growth**, v.29, n. 9, p. 249-263, 1965.

LAWRENCE, T.L.J.; FOWLER, V.R. **Growth of farm animals**. New York: CAB International, 1997. 330p.

LITTELL, R.C.; HENRY, P.R.; AMMERMAN, C.B. Statistical analysis of repeated measures data using SAS procedures. **Journal Animal Science**, Champaign, v.76, p.1216-1231, 1998.

MALHADO, C. H. M.; CARNEIRO, P. L. S.; SANTOS, P. F.; AZEVEDO, D. M. M.; SOUZA, J. C. de; AFFONSO, P. R. M. Curvas de crescimento em ovinos mestiços Santa Inês x Texel criados no Sudoeste do Estado da Bahia. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, v.9, n.2, p.210-218, 2008.

MALHEIROS, E. B. Precisão de testes F univariados usados em experimentos com medidas repetidas no tempo, quando a condição de esfericidade da matriz de covariâncias não é verificada. **Rev. Mat. Estat.**, São Paulo, v.22, n.2, p.23-29, 2004.

MAUCHLY, J. W. Significance test for sphericity of a normal n-variate distribution. **Annals of Mathematical Statistics**, Beachwood, OH, v.11, n.2, p. 204-209, 1940.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. Algumas considerações em regressão não linear. **Acta Scientiarum**. Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.

MAZZINI, A. R. A. Análise da curva de crescimento de machos Hereford considerando heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros. 2001, 94 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2001.

MAZZINI, A.R. de A.; MUNIZ, J.A.; SILVA, F.F. e; AQUINO, L.H. de. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autorregressivos. **Ciência Rural**, v.35, p.422-427, 2005.

McMANUS, C.; EVANGELISTA, C.; FERNANDES, L. A. C.; MIRANDA, R. M. de; MORENO-BERNAL, F. E.; SANTOS, N. R. dos. Curvas de crescimento de Ovinos Bergamácia Criados no Distrito Federal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, v.32, n.5, p. 1207-1212, 2003.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 6th ed. New York: J. Wiley Sons. 2005. 643 p.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidades para engenheiros**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos - LTC, 2003.

NELDER, J. A. The fitting of a generation of the logistic curve. **Biometrics**, Washington, v. 17, p. 89-110, 1961.

NEMEC, A. F. L. **Analysis of repeated measures and time series: an introduction with forestry examples**. Victoria, B.C.: Biometric Information Handbook, 1996, n.6. 83p.

NOGUEIRA, M. C. S. **Experimentação Agronômica I - conceito, planejamento e análise estatística**. Piracicaba: ESALQ, 2007. 479 p.

OLIVEIRA, H.N.; LÔBO, R.B.; PEREIRA C.S. Comparação de modelos não lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v.35, n.9, p.1843-1851,2000.

OLIVEIRA, M. Mendes. **Modelos de regressão não-lineares**. 2004. Disponível em: <http://www.fep.up.pt/disciplinas/2E103/nlin.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2012.

PACHECO, A.; QUIRINO, C. R. Estudo das características de crescimento em ovinos. **Pubvet**, v.2, n.29, 2008.

PARK, E.; CHO, M.; KI, C.-S. Correct use of repeated measures analysis of variance. **Review General Laboratory Medicine**. Korean, v.29, p.1-9, 2009.

R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria. 2011.

REGAZZI, A. J.; SILVA, C. H. O. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. **Rev. Mat. Est.**, São Paulo, v.22, n.3, p.33-45, 2004.

RICHARDS, J. F. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, p. 290-301, 1959.

SANTOS, C.L. dos; PÉREZ, J.R.O; MUNIZ, J.A.; GERASEEV, L. C.; SIQUEIRA, E. R. Desenvolvimento relativo dos tecidos ósseo, muscular e adiposo dos cortes da carcaça de cordeiros Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.30, n.2, p.487-492, 2001.

SANTOS, C. L.; PÉREZ, J. R. O.; MUNIZ, J. A.; LUZ, A. O. Parâmetros da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. In: REUNIÃO ANUAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ZOOTECNIA, 40., 2003, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: Sociedade Brasileira de Zootecnia, 2003. CD-ROM.

SARMENTO, J. L. R.; REGAZZI, A. J.; SOUSA, W. H.; TORRES, R. de A.; BREDÁ, F. C.; MENEZES, G. R. de O. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.35, p. 435-442, 2006.

SAS Institute INC.SAS/STATTM **SAS user's guide for windows environment**. 6.11 ed. Cary : SAS Institute, 2002.

SAVIAN, T. V. **Estimação dos parâmetros no modelo para degradabilidade in situ de Mertens e Loften**. 2005. 55 p. Dissertação (Mestrado em Agronomia/Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2005.

SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A.; AQUINO, L. H. de; BANYS, V. L.; FERREIRA, D. F. Degradability study of neutral detergent fiber of coast cross (*Cynodon dactylon* × *Cynodon nlemfunensis*). **Ciências agrotec.**, Lavras, v. 31, n.4, p. 1184-1190, jul./ago., 2007.

SILVA, F. de L. **Curvas de crescimento e produtividade de vacas Nelore e cruzadas, de diferentes tipos biológicos, em sistema de produção intensiva**. 2009. 87 p. Dissertação

(Mestrado em Ciências/Ciência Animal e Pastagens). Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” (ESALQ/USP), Piracicaba, 2009.

SILVA, F.L.R.; ARAÚJO, A.M. Características de reprodução e de crescimento de ovinos mestiços Santa Inês, no Ceará. **Revista Brasileira de Zootecnia**. Viçosa, v.29, n.6, p.1712-1720. 2000.

SOUZA, G. S. **Introdução aos modelos de regressão linear e não linear**. Brasília: Serviço de Produção de Informação, 1998. 505p.

STELL, R. G. D. & TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics a biometrical approach**. 2 ed. New York, McGrawHill Book, 1980. 633p.

VIEIRA, F. T. P. de A.; SILVA, J. A. A. da; FERREIRA, R. L. C.; CRUZ, M. A. O. M. da; FERRAZ, I. Uma abordagem multivariada em experimento silvipastoril com *Leucaena Leucocephala* (LAM.) de wit to no agreste de Pernambuco. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v. 17, n.4, p. 333-342, out./dez., 2007.

VIEIRA, S. **Análise de variância (ANOVA)**. São Paulo: Atlas, 2006. 204 p.

VON BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quartely Review of Biology**, v.32, p. 217-230, 1957.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Modelo Gompertz.

Neste modelo, admite-se que a taxa do crescimento (dy/dx , tal que $y = f(x)$) é proporcional ao valor presente (y) com o logaritmo do complemento para alcançar a taxa máxima teórica ($\ln(\beta) - \ln(y)$). Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \tau y (\ln(\beta) - \ln(y)) \\ &= \tau y (\ln(\beta/y))\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \tau y \ln(\beta/y) &\Leftrightarrow \frac{dy}{y \ln(\beta/y)} = \tau dx \\ &\Leftrightarrow \int_{y_0}^y \frac{1}{y \ln(\beta/y)} dy = \int_0^x \tau dx\end{aligned}$$

Seja $z = \ln(\beta/y) \Rightarrow dz = \frac{y}{\beta} \frac{-\beta}{y^2} dy = -\frac{1}{y} dy$.

Então:

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^y \frac{1}{y \ln(\beta/y)} dy &= - \int \frac{1}{z} dz \\ &= -\ln(z) \\ &= -\ln(\ln(\beta/y)) \Big|_{y_0}^y \\ &= -\ln(\ln(\beta/y)) + \ln(\ln(\beta/y_0)) \\ &= -(\ln(\ln(\beta/y)) - \ln(\ln(\beta/y_0)))\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\ln(\ln(\beta/y)) - \ln(\ln(\beta/y_0)) &= -\tau x \\ \ln(\ln(y/\beta)^{-1}) &= \ln(\ln(\beta/y_0)) - \tau x \\ -\ln(y/\beta) &= \exp(\ln(\ln(\beta/y_0)) - \tau x) \\ \ln(y/\beta) &= -\exp(\ln(\ln(\beta/y_0)) - \tau x) \\ y/\beta &= \exp\{-\exp(\ln(\ln(\beta/y_0)) - \tau x)\} \\ y &= \beta \exp\{-\exp(\ln(\ln(\beta/y_0)) - \tau x)\}\end{aligned}$$

Admitindo $\gamma = \ln(\ln(\beta/y_0))$, tem-se:

$$y = \beta \exp\{-\exp(\gamma - \tau x)\} \quad (32)$$

Por isso, dizemos que γ está relacionado com o intercepto (y_0).

Este é um modelo de curva sigmóide parecido com o modelo Logístico, porém, este não apresenta simetria com relação ao ponto de inflexão.

ANEXOS

ANEXO A - Conjunto de dados

Tabela 14 - Valores amostrados do peso de ovinos (Kg).

sexo	tempo	1	2	3	4	5	6	7
macho	0	3,80	4,90	4,50	3,80	4,10	4,00	3,90
	30	6,90	7,30	7,50	6,50	7,50	5,50	6,00
	60	12,00	11,00	12,30	13,00	12,00	7,90	7,00
	90	16,50	20,00	15,00	16,60	19,00	15,00	12,00
	120	21,00	25,00	18,50	20,30	23,60	21,00	17,00
	150	26,20	30,50	23,00	26,00	29,00	25,00	22,00
	180	31,00	33,50	28,00	29,00	34,00	28,50	27,00
	210	36,50	36,00	31,40	31,00	35,50	33,00	30,00
	240	40,00	38,30	35,20	35,00	36,00	38,00	31,00
	270	43,50	40,50	40,00	39,80	41,00	39,60	33,00
	300	48,00	44,30	44,50	45,50	46,50	40,00	35,00
	330	54,50	51,20	48,00	48,30	51,20	41,60	39,10
fêmea	0	2,50	3,50	2,40	2,30	3,00	3,00	4,20
	30	8,00	10,00	8,00	7,50	8,50	8,50	7,00
	60	14,00	16,20	12,50	10,00	10,00	14,00	10,00
	90	18,00	19,90	15,00	15,70	15,50	19,00	12,00
	120	21,00	22,40	17,50	20,00	21,40	25,20	17,70
	150	29,00	27,00	21,00	23,00	23,00	28,50	23,00
	180	30,00	28,00	26,00	30,00	26,00	35,50	30,00
	210	30,50	30,00	29,60	35,00	27,40	37,00	35,00
	240	32,00	31,00	30,00	37,00	30,00	39,90	36,50
	270	34,00	32,40	30,80	37,50	32,70	40,70	38,00
	300	38,50	33,50	30,60	38,20	38,00	44,00	39,40
	330	35,00	35,00	32,40	40,00	42,80	45,60	40,00

ANEXO B - Programação (R)

```

# pacotes utilizados
require(nlstools)
require(car)
require(nlme)
require(dae)
require(lattice)
dados=read.csv("ovinos.csv",h=T,sep=';')
attach(dados)
## variáveis: tempo, animal, trat, sexo, peso.

#####
###                               Análise descritiva                               ###
#####

plot(peso[1:84]~tempo[1:84],ylab="peso (Kg)",xlab="tempo (dias)",cex=0.8,lwd=2,
     bty="l")
points(peso[85:168]~tempo[1:84],col="red",lwd=2,cex=0.8)
legend(250,15,c("macho","fêmea"),lty=c(1,1),lwd=c(2,2),col= c("black","red"))
boxplot(peso~tempo,ylab="peso (Kg)",xlab="tempo (dias)",bty="l")
Boxplot(peso~sexo,ylab="peso (Kg)",xlab="sexo",bty="l",id.n=Inf)
interaction.plot(tempo,sexo,peso, lwd=2,xlab="tempo (dias)",bty="l",ylab="peso
médio (kg)")

# media, variância e erro padronizado
Var_t<-  tapply(peso,tempo,var)
Var_s<-  tapply(peso,sexo,var)
Var_trat<- tapply(peso,trat,var)

Media_t<-  tapply(peso,tempo,mean)
Media_s<-  tapply(peso,sexo,mean)
Media_trat<- tapply(peso,trat,mean)

Desvio_pad_t<- sqrt(Var_t)
Desvio_pad_s<- sqrt(Var_s)
Desvio_pad_trat<- sqrt(Var_trat)

V_t<- data.frame(Var_t, Media_t, Desvio_pad_t); V_t
V_s<- data.frame(Var_s, Media_s, Desvio_pad_s); V_s
V_trat<- data.frame(Var_trat, Media_trat, Desvio_pad_trat)

#####
###                               Ajuste do modelo: parcela subdividida                               ###
#####

mod=aov(peso~tempo*sexo+Error(sexo/animal))

# pressuposições:
res <- resid.errors(mod)
plot(as.numeric(tempo), res, xlab="tempo",ylab="resíduo",pch = 16,bty="l")
abline(h=0,col="red")

```

```

plot(as.numeric(trat), res, xlab="tratamentos",ylab="resíduo",pch = 16,bty="l")
abline(h=0,col="red")
##normalidade
qqnorm(res, pch=16,main="normal plot",xlab= "Quantis padronizados", ylab =
"Quantis amostrais"); qqline(res)
Boxplot(res~trat,xlab="tratamento",ylab="resíduo", id.n=Inf)
abline(h=0,col="red")
shapiro.test(res)
##homocedasticidade
bartlett.test(res~trat)
## esfericidade
p=matrix(peso,ncol=12,byrow=T);p
sig=cov(p)
s=rep(c(0,1),each=7);s
mod1=lm(p~s)
mauchly.test(mod1,X=~1)#### não satisfeito.

## análise de variância e desdobramentos
summary(mod)

#Desdobramento da interação: sexo dentro do tempo
mod1=aov(peso~sexo/tempo +Error(sexo/animal))
summary(mod1)
summary(mod1,split=list('sexo:tempo'=list(femea=c(1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21),
macho=c(2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22))))

#####
###                               Ajuste do modelo: Gompertz                               ###
#####
macho=c(4.1428,6.74286,10.74286,16.3,20.9143,25.957,30.14286,33.34286,36.2143,
39.6286,43.4,47.7)
femea=c( 2.985714,8.214286,12.385714,16.442857,20.742857,24.928571,29.357143,
32.071429,33.771429,35.157143,37.457143,38.685714)
tempo=c(0,30,60,90,120,150,180,210,240,280,300,330)

fit.gomp=function(x,y)
{
#estimação dos parâmetros iniciais
a= min(y)-1
b=max(y)+1
log(-log((y-a)/(b-a),base=exp(1)),base=exp(1))
Y=log(-log((y-a)/(b-a),base=exp(1)),base=exp(1))
mod=lm(Y~x)
t=-coef(mod)[2]
g=coef(mod)[1]
# processo iterativo p/ estimação dos parâmetros que minimizam o resíduo
flg=nls(y~alfa+(beta-alfa)*exp(-exp(gama-x*tau)),
start=list(alfa=a,beta=b,gama=g,tau=t))
}

#ajuste curva para machos

```



```

fit.gomp(tempo,macho)
#mostrar estimação e gráficos dos ajustes
ajuste=predict(fit.gomp(tempo,macho));ajuste
print(summary(fit.gomp(tempo,macho)))
plot(fit.gomp(tempo,macho))
plot(macho~tempo)
lines(ajuste~tempo,col=2)
r1=residuals(fit.gomp(tempo,macho))
pacf(r1)
plot(r1[-1], r1[-length(resid(fit.gomp(tempo,macho)))])) # plot de  $e_{\{t\}} \sim e_{\{t-1\}}$ 
abline(h=0, lty=2, lwd=1)
cor(r1[-1], r1[-length(resid(fit.gomp(tempo,macho)))]))
qqnorm(r1, pch=16,main="normal plot-macho",xlab= "Quantis padronizados",
ylab = "Quantis amostrais",);
qqline(r1)
shapiro.test(r1) # teste normalidade

#Desdobramento da ANOVA
SQTotal=sum(macho^2);SQTotal
SQRes=sum((macho-ajuste)^2);SQRes
SQModelo= rep*(SQTotal-SQRes);SQModelo
Corr=rep*mean(macho)*(sum(macho));Corr
SQReg=SQModelo-Corr;SQReg
SQReg=rep*(sum((ajuste-mean(macho))^2));SQReg
Desvio=SQt.macho-SQReg;Desvio
pf(1.595,2.176,35.891,lower=F)
pf(1032.31,0.816,35.891,lower=F)

#ajuste curva para femeas
fit.gomp(tempo,femea)
ajuste2=predict(fit.gomp(tempo,femea));ajuste2
print(summary(fit.gomp(tempo,femea)))
plot(fit.gomp(tempo,femea))
r2=residuals(fit.gomp(tempo,femea))
pacf(r2)
plot(r2[-1], r2[-length(resid(fit.gomp(tempo,femea)))])) # plot de  $e_{\{t\}} \sim e_{\{t-1\}}$ 
abline(h=0, lty=2, lwd=1)
cor(r2[-1], r2[-length(resid(fit.gomp(tempo,femea)))]))
qqnorm(r2, pch=16,main="normal plot-fêmea",xlab= "Quantis padronizados",
ylab = "Quantis amostrais",);
qqline(r2)
shapiro.test(r2) # teste normalidade
res=c(r1,r2);res
sex=as.factor(c(rep(0,12),rep(1,12)));sex
bartlett.test(res~sex) # teste de homocedasticidade

#Desdobramento da ANOVA
SQTotal=sum(femea^2);SQTotal
SQRes=sum((femea-ajuste2)^2);SQRes
SQModelo= rep*(SQTotal-SQRes);SQModelo
Corr=rep*mean(femea)*(sum(femea));Corr

```

```

SQReg=SQModelo-Corr;SQReg
SQReg=rep*(sum((ajuste2-mean(femea))^2));SQReg
Desvio=SQt.femea-SQReg;Desvio
pf(710.26,0.816,35.891,lower=F)
pf(0.56,2.176,35.891,lower=F)

# Análise gráfica
plot(macho~tempo,ylab="peso (Kg)",xlab="tempo (dias)",cex=0.8,lwd=2,bty="l",
main="Ajuste-modelo gompertz")
lines(ajuste~tempo)
points(femea~tempo,col="red",lwd=2,cex=0.8)
lines(ajuste2~tempo,col="red")
legend(250,15,c("macho","fêmea"),lty=c(1,1),lwd=c(2,2),col=c("black","red"))

#####
###          Comparação dos modelos: completo versus reduzido          ###
#####

Y=c(macho, femea);Y
X=c(tempo,tempo);X
m=c(rep(c(1),times=12),rep(c(0),times=12))
f=c(rep(c(0),times=12),rep(c(1),times=12))

#modelo completo
gomp=nls(Y~alfa*m+(beta1*m-alfa1*m)*exp(-exp(gama1*m-X*tau1*m))+
        alfa2*f+(beta2*f-alfa2*f)*exp(-exp(gama2*f-X*tau2*f)),
start=list(alfa1=0,beta1=67,gama1=0.46,tau1=0.005,alfa2=0,beta2=42,gama2=0.5,
tau2=0.009))
summary(gomp)
SQRes= sum((Y- predict(gomp))^2);SQRes
SQTotal=sum(femea^2);SQTotal
SQModelo= (SQTotal-SQRes);SQModelo

#admitindo alfa1=alfa2=alfa
gomp1=nls(Y~alfa*m+(beta1*m-alfa*m)*exp(-exp(gama1*m-X*tau1*m))+
        alfa*f+(beta2*f-alfa*f)*exp(-exp(gama2*f-X*tau2*f)),
start=list(alfa=0,beta1=67,gama1=0.46,tau1=0.005,beta2=42,gama2=0.5, tau2=0.009))
summary(gomp1)
SQRes1= sum((Y- predict(gomp1))^2);SQRes1
SQRed1=SQRes1 - SQRes;SQRed1
Fcalc= ((SQRes1 - SQRes)/1)/(SQRes/16);Fcalc
pf(Fcalc,1,16,lower=F)

#admitindo alfa1=alfa2=alfa e gama1=gama2=gama
gomp2=nls(Y~alfa*m+(beta1*m-alfa*m)*exp(-exp(gama*m-X*tau1*m))+
        alfa*f+(beta2*f-alfa*f)*exp(-exp(gama*f-X*tau2*f)),
start=list(alfa=0,beta1=67,gama=0.46,tau1=0.005,beta2=42, tau2=0.009))
summary(gomp2)
SQRes2= sum((Y- predict(gomp2))^2);SQRes2
SQRed2=SQRes2 - SQRes;SQRed2
Fcalc= ((SQRes2 - SQRes)/2)/(SQRes/16);Fcalc

```

```
pf(Fcalc,2,16,lower=F)

#para alfa1=alfa2=alfa, gama1=gama2=gama e tau1=tau2=tau
gomp3=nls(Y~alfa*m+(beta1*m-alfa*m)*exp(-exp(gama*m-X*tau*m))+
          alfa*f+(beta2*f-alfa*f)*exp(-exp(gama*f-X*tau*f)),
start=list(alfa=0,beta1=67,gama=0.46,tau=0.007,beta2=42))
summary(gomp3)
SQRes3= sum((Y- predict(gomp3))^2);SQRes3
SQRed3=SQRes3 - SQRes;SQRed3
Fcalc= ((SQRes3 - SQRes)/3)/(SQRes/16);Fcalc
pf(Fcalc,3,16,lower=F)
```

ANEXO C - Programação (SAS)

```

data aula;
input Individuo Sex Y1 Y2 Y3 Y4 Y5 Y6 Y7 Y8 Y9 Y10 Y11 Y12;
cards;
1 1 3.80 6.90 12.00 16.50 21.00 26.20 31.00 36.50 40.00 43.50 48.00 54.50
2 1 4.90 7.30 11.00 20.00 25.00 30.50 33.50 36.00 38.30 40.50 44.30 51.20
3 1 4.50 7.50 12.30 15.00 18.50 23.00 28.00 31.40 35.20 40.00 44.50 48.00
4 1 3.80 6.50 13.00 16.60 20.30 26.00 29.00 31.00 35.00 39.80 45.50 48.30
5 1 4.10 7.50 12.00 19.00 23.60 29.00 34.00 35.50 36.00 41.00 46.50 51.20
6 1 4.00 5.50 7.90 15.00 21.00 25.00 28.50 33.00 38.00 39.60 40.00 41.60
7 1 3.90 6.00 7.00 12.00 17.00 22.00 27.00 30.00 31.00 33.00 35.00 39.10
8 2 2.50 8.00 14.00 18.00 21.00 29.00 30.00 30.50 32.00 34.00 38.50 35.00
9 2 3.50 10.00 16.20 19.90 22.40 27.00 28.00 30.00 31.00 32.40 33.50 35.00
10 2 2.40 8.00 12.50 15.00 17.50 21.00 26.00 29.60 30.00 30.80 30.60 32.40
11 2 2.30 7.50 10.00 15.70 20.00 23.00 30.00 35.00 37.00 37.50 38.20 40.00
12 2 3.00 8.50 10.00 15.50 21.40 23.00 26.00 27.40 30.00 32.70 38.00 42.80
13 2 3.00 8.50 14.00 19.00 25.20 28.50 35.50 37.00 39.90 40.70 44.00 45.60
14 2 4.20 7.00 10.00 12.00 17.70 23.00 30.00 35.00 36.50 38.00 39.40 40.00
;
proc glm;
class sex;
model y1-y12 = sex / nouni;
manova h=sex / printe;
repeated tempo 12 (0 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330) polynomial /
summary printe;
lsmeans sex;
run;

```