

**Universidade de São Paulo  
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”**

**Simulações de pesos espaciais para o modelo STARMA e  
aplicações**

**Guilherme Biz**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor  
em Ciências. Área de concentração: Estatística e Expe-  
rimentação Agronômica

**Piracicaba  
2014**

Guilherme Biz  
Bacharel em Matemática

**Simulações de pesos espaciais para o modelo STARMA e aplicações**

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:

Prof. Dr. **VITOR AUGUSTO OZAKI**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências.  
Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

**Piracicaba**  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP**

Biz, Guilherme

Simulações de pesos espaciais para o modelo STARMA e aplicações / Guilherme  
Biz. - - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - -  
Piracicaba, 2014.  
101 p: il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2014.

1. Autorregressivo 2. Médias móveis 3. Espaço-temporal 4. Pesos espaciais  
5. Previsões 6. Temperatura I. Título

CDD 519.5  
B625s

**"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte -O autor"**

## Dedicatória

*Aos meus pais,*

**Valdir Roberto Biz e**

**Aparecida Sandra Zanfrilli Biz.**

*À minha irmã,*

**Milena Biz.**

*À minha esposa,*

**Claudia Aparecida Dellantonia Biz.**

*Com amor, DEDICO.*



## AGRADECIMENTOS

A toda minha família que sempre esteve ao meu lado, compreendendo minhas ausências e me dando forças para seguir em frente.

A meu orientador, Prof. Dr. Vitor Augusto Ozaki, por todos os ensinamentos, conselhos, compreensão, paciência e confiança depositada. Fatores essenciais para que o trabalho fosse realizado.

A todos professores do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, pela dedicação e competência em lecionar, pela amizade e pela formação que me proporcionaram.

A todos os funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, por todo auxílio fornecido durante este período.

A todos os amigos, em especial, Cássio Dessotti, Eduardo Monteiro, Rodrigo Pescim, Ezequiel Bautista, Maurício Lordelo, Edilan Quaresma, Pedro Henrique Ramos, Paula Fonte Sanches, Elton Pereira, Mariana Ragassi e Ricardo Olinda, que contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

A todos os alunos de mestrado e doutorado, em especial, Raphael Dias, Italo Frazão, Gabriel Avancini, Débora Godoi, Marina Maestre, Elias Medeiros, Simone Werner, Ana Julia Righetto, Thiago Gentil, Djair Durand, Lucas Santana, Alessandra Santos, Natália Martins, Maria Martins, Ricardo Klein, Luiz Ricardo Nakamura, Elizabeth Hashimoto e Iuri Ferreira, que direta ou indiretamente, contribuíram positivamente para que este trabalho fosse realizado.

Aos amigos de trabalho da Universidade Estadual de Londrina, pela amizade e apoio.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa concedida.

Enfim, um agradecimento a todos que, de uma forma ou outra, contribuíram para realização deste trabalho.

**Muito obrigado!**



## SUMÁRIO

RESUMO . . . . .	9
ABSTRACT . . . . .	11
1 INTRODUÇÃO . . . . .	13
Referências . . . . .	15
2 O MODELO STAR NO CONTEXTO DE DIFERENTES ESTRUTURAS DE DEPENDÊNCIA ESPACIAL . . . . .	17
Resumo . . . . .	17
Abstract . . . . .	17
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Modelos ARMA . . . . .	18
2.3 Modelos STARMA . . . . .	19
2.4 Revisão de Literatura . . . . .	23
2.5 Escolha da matriz de pesos $\mathbf{W}$ . . . . .	26
2.6 Estimação do modelo STARMA . . . . .	28
2.7 Metodologia . . . . .	29
2.8 Resultados e Discussões . . . . .	30
2.9 Conclusões . . . . .	34
Referências . . . . .	34
3 APLICAÇÃO DO MODELO STARIMA PARA DADOS DE TEMPERATURAS MÍNIMAS MENSAIS . . . . .	37
Resumo . . . . .	37
Abstract . . . . .	37
3.1 Introdução . . . . .	38
3.2 Metodologia . . . . .	40
3.2.1 Identificação . . . . .	43
3.2.2 Estimação . . . . .	46
3.2.3 Diagnóstico . . . . .	50
3.2.4 Previsões . . . . .	52
3.3 Descrições dos Dados . . . . .	53
3.4 Resultados e Discussões . . . . .	53
3.5 Conclusões . . . . .	68



Referências . . . . . 68  
ANEXOS . . . . . 71

## RESUMO

### Simulações de pesos espaciais para o modelo STARMA e aplicações

A modelagem de processos espaço-temporais é de suma importância para dados climatológicos, visto que o clima sofre influência temporal e espacial. A classe de modelos STARMA, autorregressivo e de médias móveis espaço-temporal, adequa-se a esses processos, porém, não há, na literatura, um estudo sobre o melhor método para quantificar a dependência espacial, e não é sabido se há uma diferença entre os métodos para esses modelos. Logo, neste trabalho, é realizado um estudo de simulações do modelo STAR, utilizando-se diferentes formas para obter os pesos espaciais. Após concluir as simulações é realizado o ajuste de um modelo STARIMA para um conjunto de dados de médias mensais de temperaturas mínimas diárias coletadas em uma mesorregião localizada no Oeste do Estado do Paraná. Este trabalho é separado em dois artigos e ambos são realizados utilizando-se o programa R. O primeiro é o estudo de simulações, chegando-se à conclusão de que o método para determinar a dependência espacial interfere no resultado da modelagem e depende da região em estudo. No segundo artigo, conclui-se que o inverso da distância é a melhor opção para a matriz de pesos e um modelo STARIMA sazonal tem o melhor ajuste para o conjunto de dados em questão.

Palavras-chave: Autorregressivo; Médias móveis; Espaço-temporal; Pesos espaciais; Previsões; Temperatura



## ABSTRACT

### Simulations of spatial weights for STARMA model and applications

Process modeling spatio-temporal is of great importance for climatological data, once that the climate undergoes spatial and temporal influence. The class of models STARMA, autoregressive models and spatio-temporal moving averages, are suitable to the these processes, however, for these models, there is not a study about the best method to quantify the spatial dependence, and/or it is not known whether there is a difference between the methods for these models. In this thesis, a study simulations of the STAR model using different forms for the spatial weights is performed. After the simulation procedure, the STARIMA model is fitted to the real dataset of monthly mean daily minimum temperatures collected in a mesoregion located to the west of the state of Paraná. This thesis is separated into two papers and both are performed using the statistical software R. The first one is the simulation study that concludes that the method for determining the spatial dependence interferes with results of the modeling and depends on the region under study. In the second paper, it is concluded that the inverse distance is the best option for the weight matrix and a seasonal STARIMA model has the best fit for the data set.

Keywords: Autoregressive; Moving-average; Space-time; Spatial weights; Forecasting; Temperature data



## 1 INTRODUÇÃO

A metodologia de Box e Jenkins (1970) tem se mostrado útil em análise estatística para séries temporais. O método de Box e Jenkins, como é chamado, consiste na busca de um modelo ARIMA (autorregressivo integrado e de médias móveis) que represente o processo estocástico gerador de uma série temporal, a partir de um modelo ARMA aplicável a séries temporais estacionárias, expandindo-se este conceito para séries temporais não estacionárias. Essa metodologia consiste em três etapas iterativas, que são: identificação do modelo candidato, estimação dos parâmetros e diagnóstico dos pressupostos.

Esses modelos são univariados, ou seja, são aplicados apenas em uma série de dados, porém, frequentemente há diferentes séries temporais em diversas regiões no espaço. Uma desvantagem dos modelos univariados é que as séries temporais devem ser analisadas uma a uma. Para analisar várias regiões ao mesmo tempo, pode-se utilizar a modelagem multivariada para séries temporais. Entretanto, devem-se considerar as relações entre diferentes regiões obtendo-se maiores informações sobre os dados em análise. Esta dependência sistemática entre as observações de cada região e as observações de regiões vizinhas é chamada de correlação espacial.

Modelos que tentam explicar séries temporais e a dependência espacial são denominados modelos espaço-temporais. Logo, com o intuito de analisar dados correlacionados, tanto no tempo quanto no espaço, pode-se utilizar a classe de modelos autorregressivos integrados e de médias móveis espaço-temporal (STARIMA). Para o procedimento de ajuste de um modelo espaço-temporal, utilizam-se também os três estágios iterativos do método Box e Jenkins, incluindo-se a parte espacial, demonstrado por Pfeifer e Deutsch (1980a).

Foi por meio de uma série de artigos de Pfeifer e Deutsch (1980a, 1980b, 1980c, 1980d, 1981a e 1981b) e Deutsch e Pfeifer (1981) que essa classe de modelos foi se estruturando e então, outros pesquisadores, como Rao e Antunes (2004), Giacinto (2006) e Borovkova, Lopuhaä e Ruchjana (2008) trouxeram melhorias para o modelo, melhorias na estimação dos parâmetros e diferentes campos de aplicação.

No entanto, para essa classe de modelo, que vem desde 1980 obtendo algumas melhorias e utilizando algumas formas de representar a dependência espacial, nenhum autor enfatizou a melhor forma para se modelar a dependência sistemática de cada região junto

ao modelo, dificultando a aplicação dessa metodologia em problemas reais comumente encontrados por climatologistas, atuários e economistas, por exemplo.

O método para determinar a dependência espacial, que originou o modelo, é o de contiguidade espacial ou vizinhos espaciais, em que são determinadas várias ordens de vizinhos, ou seja, há vizinhos de 1º grau, 2º grau e assim por diante. Para cada uma delas, acrescenta-se um ou mais termos no modelo, indicando-se a dependência sistemática desta ordem. Outro método utilizado é a potência do inverso da distância euclidiana, em que há apenas um termo no modelo que explica a dependência espacial como um todo, não existindo vizinhos de 1º ou 2º grau, e sim, uma ponderação espacial de acordo com a distância em uma única matriz.

Para a classe de modelos STARMA, o método para o cálculo da(s) matriz(es) de pesos pode dispensar a identificação da ordem dos vizinhos espaciais, pois, se utilizar o inverso da distância euclidiana, há apenas uma matriz. No entanto, se utilizar o método de contiguidade, a identificação da ordem dos vizinhos se faz necessária, visto que há mais de uma matriz indicando a ordem da vizinhança.

Pelo exposto, a variação da ordem de vizinhos espaciais, ocasionada pelo método do cálculo da(s) matriz(es), pode resultar em um modelo mais parcimonioso. Porém, para verificar qual o método de escolha dos pesos resulta em melhores ajustes e, se há diferença nos resultados dos ajustes utilizando diferentes matriz de pesos, deve-se realizar um estudo de simulação de ajuste de modelos com diferentes matrizes de pesos espaciais, o que é apresentado neste trabalho.

O ajuste de modelo espaço-temporal para dados de temperatura é de grande importância para a pesquisa, já que a temperatura interfere em diversos setores econômicos, por exemplo, na agricultura, com implicações no crédito e seguro rural, como mostraram Carnelutti, Maluf e Matzenauer (2008). A análise de séries temporais é indicada para dados de temperatura, Chichie e Bayer (2012), e adicionar a parte espacial ao modelo pode trazer melhores resultados (RAO; ANTUNES, 2004). Os autores fizeram esta comparação de modelos, em dados de temperatura no Reino Unido nos anos de 1951 até 1969, obtendo um melhor ajuste, por meio do modelo espaço-temporal.

Seguindo esta linha de pesquisa, neste trabalho é apresentado o ajuste de um modelo STARMA a dados de temperatura e aplicam-se às contribuições obtidas nas simulações. Para isto, devem-se realizar as etapas do ajuste do modelo com as diferentes

matrizes de pesos espaciais. Além de ilustrar a metodologia para o ajuste do modelo STARMA, são realizadas previsões da temperatura, que contribuem com pesquisadores nas tomadas de decisões.

Nesse contexto, este trabalho tem por objetivos descrever a metodologia e analisar o modelo com diferentes formas de dependência espacial, com o intuito de verificar qual apresenta melhores resultados; implementar computacionalmente a classe de modelos STARMA utilizando o programa R (2013) e analisar dados de temperaturas baseando-se na proposta apresentada por Pfeifer e Deutsch (1980a).

As análises deste trabalho são realizadas no programa R (2013), e as funções são implementadas, visto que não há pacotes apropriados para a realização de tais análises.

Este trabalho está estruturado em dois artigos da seguinte forma: O primeiro descreve o modelo STARMA no contexto de diferentes formas de dependência espacial, para que se verifique qual a melhor forma de obter os pesos espaciais. O segundo artigo apresenta a metodologia utilizada para o ajuste do modelo com as contribuições do primeiro artigo e a aplicação ao conjunto de dados reais sobre a temperatura mínima de uma mesorregião localizada no Oeste do Estado do Paraná.

## Referências

BOROVKOVA, S.; LOPUHAÄ, H.P.; RUCHJANA, B. N. Consistency and asymptotic normality of the least squares estimators in generalized STAR models. **Statistica Neerlandica**, Malden, v. 62, p. 482-508, 2008.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. São Francisco: Holden-Day, 1970. 537 p.

CARGNELUTTI, A.; MALUF, J. R. T.; MATZENAUER, R. Coordenadas geográficas na estimativa das temperaturas máxima e média decendiais do ar no Estado do Rio Grande do Sul. **Ciências Rural**, Santa Maria, v. 38, p. 2448-2456, 2008.

CHECHI, L.; BAYER, F. M. Modelos univariados de séries temporais para previsão das temperaturas médias mensais de Erechim, RS. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 16, n. 12, p. 1321-1329, 2012.

DEUTSCH, S. J.; PFEIFER, P. E. Space-Time ARMA Modeling with Contemporaneously Correlated Innovations. **Technometrics**, Nova York, v. 23, n. 4, p. 401-409, 1981.

GIACINTO, V. D. A Generalized space-time ARMA model with an application to regional unemployment analysis in Italy. **International Regional Science Review**, Londres, v. 29, p. 159-198, 2006.



- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A Three-Stage Iterative Procedure fo Space-Time Modeling. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 1, pp. 35-47, 1980a.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Identification and Interpretation of First Order Space-Time ARMA Models. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 3, p. 397-408, 1980b.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A STARIMA Model-Building Procedure with Application to Description and Regional Forecasting. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, v. 5, n. 3, p. 330-349, 1980c.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Independence and sphericity tests for the residuals of space-time ARIMA models. **Communications in Statistics. Simulation and Computation**, Nova York, v. 9, p. 533-549, 1980d.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function. **Journal of the Royal Statistical Society**, Atlanta, v. 43, n. 1, p. 28-33, 1981a.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function of Contemporaneously Correlated Variables. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Atlanta, v. 40, n. 1, p. 133-136, 1981b.
- R Development Core Team. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, Disponível em: <http://www.R-project.org/>. Acesso em: 16 maio 2013.
- RAO, T. S.; ANTUNES, A. M. C. Spatio-Temporal modelling of temperature time series: A comparative Study. In: BRILLINGER, D. R.; ROBINSON, E. A.; SCHOENBERG, F. P. (Ed.) **Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems**. Nova York : Springer, 2004. p. 123-150.

## 2 O MODELO STAR NO CONTEXTO DE DIFERENTES ESTRUTURAS DE DEPENDÊNCIA ESPACIAL

### Resumo

Existe um vasto campo para o ajuste de modelos espaço-temporais, em particular, a classe de modelos autorregressivos e de médias móveis espaço-temporais (STARMA), e na literatura nota-se uma ausência de métodos de determinação de matrizes que quantifiquem a dependência espacial, para este modelo, sempre deixando esta etapa a cargo do pesquisador e de acordo com a região de estudo. Sendo assim, neste trabalho é realizado um estudo de simulação utilizando-se o modelo STAR, com diferentes formas de matrizes de pesos espaciais, com objetivo de verificar possíveis diferenças dos ajustes e seleção dos modelos. Para a realização do estudo de simulações foi utilizado o programa R (2013). Após a análise dos resultados, verificou-se que as matrizes de pesos interferem diretamente nos resultados. Isto indica que a escolha do método para determinar as matrizes de pesos espaciais depende da área em estudo, sem a conclusão de um método que sempre traga melhores resultados.

Palavras-chave: Autorregressivo; Médias móveis; Espaço-temporal; Pesos espaciais

### Abstract

There is vast field for spatio-temporal modeling, in particular the class of models space-time autoregressive and moving-average (STARMA), and in the literature notes a lack of methods for the determination of matrices that quantify the spatial dependence, for this model, always leaving this step the position of the researcher and according to the study region. Therefore, in this paper is performed a simulation study using the STAR model with different forms of spatial weight matrices in order to verify possible differences among the settings and model selection. For the simulations study was used the software R (2013). After analyzing the results, it was verified that the weights of the matrix interfered directly in the results. This indicates that the choice of method for determining the spatial weights of the matrices depends on the area of study without completion of a method that always brings better results.

Keywords: Autoregressive; Moving-average; Space-time; Spatial weights

### 2.1 Introdução

A classe de modelos autorregressivo e de médias móveis espaço-temporais, STARMA, é caracterizada pela dependência linear defasada tanto no espaço quanto no

tempo. Os processos, nos quais é possível realizar o ajuste desta classe de modelos espaço-temporais, são caracterizados por uma variável aleatória observada em  $N$  locais fixos no espaço e, em cada local,  $T$  observações no tempo, em que as dependências entre as  $N$  séries temporais são sistematicamente relacionadas de acordo com a localização da região de estudo.

Uma série hierárquica de matrizes de pesos, especificadas pelo pesquisador antes de analisar os dados, é o mecanismo básico para incorporar as características físicas relevantes do sistema para a formação do modelo. Cada uma das  $N$  séries temporais é simultaneamente modelada por meio de uma combinação linear das observações anteriores, levando-se em consideração as influências de locais vizinhos. Os modelos univariados ARIMA refletem a ideia básica de que o passado recente exerce maior influência do que o passado distante. Nos modelos STARMA, além de o passado recente exercer maior influência, considera-se também que locais próximos exercem maior influência do que locais mais distantes, por meio da especificação das matrizes de pesos.

Esta classe de modelos surgiu nos anos 70, denominados modelos espaço-temporais autorregressivos de médias móveis pelos trabalhos de Cliff et al. (1975); Cliff e Ord (1975); Martin e Oeppen (1975). Mas foi em 1980, pelos artigos de Pfeifer e Deutsch, que houve crescimento de estudos nessa classe de modelos espaço-temporais. Pfeifer e Deutsch (1980a) aplicaram a metodologia utilizada para análise de séries temporais univariadas, apresentada por Box e Jenkins (1970), para os processos espaço-temporais. A base metodológica para essa classe de modelos consiste no método iterativo de identificar o modelo, estimar os parâmetros e diagnosticar o ajuste do modelo escolhido.

No histórico da aplicação dessa classe de modelo, há diferentes formas para determinar as matrizes de pesos espaciais, e os autores sempre enfatizaram que a elaboração da estrutura espacial depende da região em estudo. Contudo, o objetivo principal deste trabalho é estudar o processo STAR no contexto de diferentes estruturas de dependência espacial, ou seja, verificar se existe um melhor método para determinar a(s) matriz(es) de pesos espaciais.

## 2.2 Modelos ARMA

O conjunto de dados em que se pode ajustar um modelo ARMA são amostras de uma única variável aleatória, coletados em um mesmo local, e em diferentes tempos igual-

mente espaçados. Os modelos ARMA são mais utilizados nas áreas econômicas, sociais e climáticas, já que as observações são autocorrelacionadas e influenciam na evolução do processo.

Os modelos ARMA, apresentados por Box e Jenkins (1970), são caracterizados por depender de valores passados e/ou dos erros passados. Um processo autorregressivo e de médias móveis, denotado por ARMA(p,q), é definido por

$$Z(t) = \phi_1 Z(t-1) + \dots + \phi_p Z(t-p) + \epsilon(t) - \theta_1 \epsilon(t-1) - \dots - \theta_q \epsilon(t-q), \quad (2.1)$$

em que,  $\phi_p$  é o parâmetro autorregressivo de ordem  $p$ ,  $\theta_q$  é o parâmetro de médias móveis de ordem  $q$  e  $\epsilon(t)$  é um ruído branco, ou seja,  $\epsilon(t)$  são independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância  $\sigma_\epsilon^2$ .

Dentro do modelo ARMA, tem-se dois casos particulares, quando  $q = 0$  ou  $p = 0$ . Quando  $q = 0$ , tem-se o modelo autorregressivo, denotado por AR(p), em que o processo depende apenas de valores passados. O modelo AR(p) é definido como:

$$Z(t) = \phi_1 Z(t-1) + \dots + \phi_p Z(t-p) + \epsilon(t). \quad (2.2)$$

Quando  $p = 0$ , tem-se o modelo de médias móveis, denotado por MA(q), em que o processo depende apenas de erros aleatórios passados. O modelo MA(q) é definido como:

$$Z(t) = \epsilon(t) - \theta_1 \epsilon(t-1) - \dots - \theta_q \epsilon(t-q). \quad (2.3)$$

### 2.3 Modelos STARMA

O modelo STARMA, apresentado por Cliff et al. (1975), Cliff e Ord (1975), Martin e Oeppen (1975) e Pfeifer e Deutsch (1980a), é semelhante ao modelo para séries temporais que depende de valores passados e dos erros locais, porém acrescenta-se a dependência de locais vizinhos com várias ordens espaciais. Para ajustar um modelo da classe STARMA, os processos devem ser descritos por observações  $z_i(t)$  de uma única variável aleatória  $Z_i(t)$  que estão disponíveis em  $N$  locais fixos no espaço ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), sobre  $T$  períodos ( $t = 1, 2, \dots, T$ ), sendo que as dependências entre os  $N$  locais estão sistematicamente relacionadas.

Uma pressuposição para utilização do modelo STARMA é que a dependência entre

as observações de cada região e as observações de regiões vizinhas tem que ser a mesma para todos os locais.

Para auxiliar nesta modelagem espaço-temporal, define-se o operador de defasagem espacial, isto é, determina-se uma região vizinha, levando-se em consideração o peso espacial denotado por  $L^{(l)}$ , em que  $l$  é a ordem da defasagem ou, neste caso, vizinhança. Ou seja,

$$L^{(0)}z_i(t) = z_i(t),$$

$$L^{(l)}z_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)}z_j(t),$$

em que  $w_{ij}^{(l)}$  é um conjunto de pesos com  $\sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)} = 1$  para todo  $i$ , e  $w_{ij}^{(l)}$  é diferente de zero somente se os locais  $i$  e  $j$  forem vizinhos da  $l$ -ésima ordem.

Matricialmente,  $\mathbf{W}^{(l)}$  é a matriz que representa os pesos  $w_{ij}^{(l)}$ , com dimensão quadrada  $N \times N$  com cada linha somando um. Seja  $\mathbf{z}(t)$  um vetor coluna  $N \times 1$  de observações  $z_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , então,

$$L^{(0)}\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{z}(t) = \mathbf{I}_N\mathbf{z}(t),$$

$$L^{(l)}\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^{(l)}\mathbf{z}(t) \quad \text{para } l > 0.$$

Empiricamente, a especificação dos pesos  $w_{ij}^{(l)}$  é definida pelo pesquisador, de acordo com a área de estudo, e devem refletir uma ordem hierárquica de vizinhos espaciais, em que vizinhos de primeira ordem são os vizinhos “mais próximos” do local de interesse; vizinho de segunda ordem são os vizinhos “mais distantes” do que vizinhos de primeira ordem, porém mais próximos que vizinhos de terceira ordem, e assim, sucessivamente. Pode-se observar, por meio da Figura 2.1, as quatro primeiras ordens de vizinhos espaciais em duas dimensões desenvolvidas por Pfeifer e Deutsch (1980a). Uma forma de calcular a matriz de pesos é utilizar o inverso da distância euclidiana, definida por Rao e Antunes (2004). Porém, atualmente, não há estudos que possam evidenciar qual a melhor maneira de definir a matriz de pesos espaciais, visto que, autores determinam a matriz de pesos espaciais de forma empírica. Quando se utilizam as matrizes de pesos, conforme apresentado na Figura 2.1, cada ordem espacial pode aumentar parâmetros no modelo, e caso seja utilizado o inverso da distância euclidiana, para calcular a matriz de pesos, a maior defasagem espacial é 1, podendo diminuir o número de parâmetros.

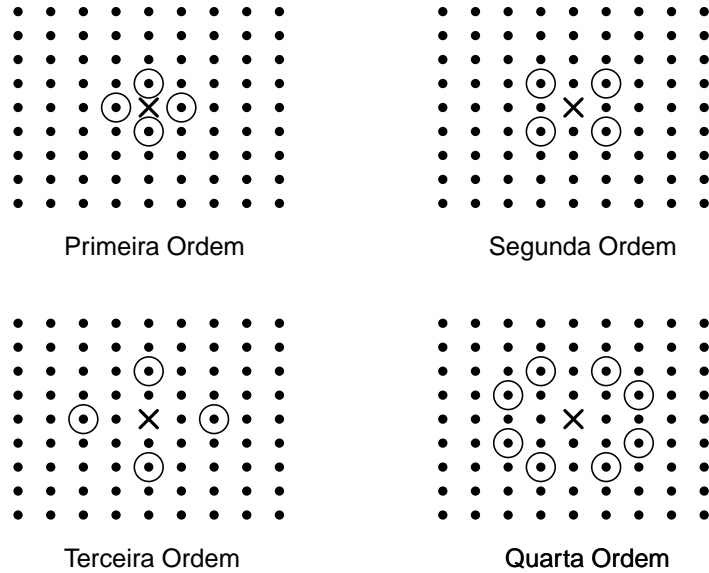


Figura 2.1 - Ordem espacial para sistemas de duas dimensões apresentado por Pfeifer e Deutsch (1980a)

Sendo assim, neste trabalho, realiza-se um estudo de simulação com diferentes maneiras de definir as matrizes de pesos espaciais, com a finalidade de verificar qual o melhor método ou se esses métodos influenciam o ajuste do modelo.

O modelo STARMA( $p_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p}, q_{m_0, m_1, \dots, m_q}$ ) é definido como

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (2.4)$$

em que  $p$  é a ordem autorregressiva,  $q$  é a ordem de médias móveis,  $\lambda_k$  é a ordem espacial do  $k$ -ésimo termo autorregressivo,  $m_k$  é a ordem espacial do  $k$ -ésimo termo de médias móveis,  $\phi_{kl}$  e  $\theta_{kl}$  são parâmetros associados ao modelo e o  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  são os erros aleatórios que seguem uma distribuição normal multivariada com  $E[\boldsymbol{\epsilon}(t)] = \mathbf{0}$  e

$$E[\boldsymbol{\epsilon}(t)\boldsymbol{\epsilon}(t+s)'] = \begin{cases} \mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N, & \text{se } s = 0 \\ \mathbf{0}, & \text{c.c} \end{cases}. \quad (2.5)$$

Semelhante aos modelos para séries temporais, pode-se obter modelos separados, isto é, modelos com a parte autorregressiva ou apenas a parte de médias móveis. No

caso de permanecer unicamente a parte autorregressiva, tem-se o modelo espaço-temporal autorregressivo STAR, em que,  $q = 0$  e o modelo  $\text{STAR}(p_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p})$  é dado por:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t). \quad (2.6)$$

Para os modelos que contêm apenas a parte de médias móveis, denomina-se espaço-temporal de médias móveis STMA, em que  $p = 0$ , e esse modelo de forma geral  $\text{STMA}(q_{m_0, m_1, \dots, m_q})$  é definido por:

$$\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\epsilon}(t) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t-k). \quad (2.7)$$

Ressalta-se que essa classe de modelos STARMA representa processos estacionários, ou seja, a média e estrutura de covariância de  $\mathbf{z}(t)$  não mudam com o tempo. Caso essa condição de estacionariedade não seja atendida, pode-se utilizar o modelo espaço-temporal autorregressivo integrado de médias móveis, STARIMA, apresentado por Pfeifer e Deutsch (1980c).

Para que o processo seja estacionário, é necessário que todos os possíveis valores de  $x_\mu$  que satisfaçam a equação

$$\det \left[ x_\mu^p I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{p-k} \right] = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário ( $|x_\mu| < 1$ ), ou seja, determinará uma região de possíveis valores de  $\phi_{kl}$  que irá resultar em um processo estacionário.

Para que  $\mathbf{z}(t)$  seja expressa como combinação linear ponderada de observações passadas, com pesos que convergem para zero, é necessário que todos os possíveis valores de  $x_\mu$  que satisfaçam a equação

$$\det \left[ x_\mu^q I - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{q-k} \right] = 0,$$

estejam dentro do círculo unitário ( $|x_\mu| < 1$ ), então o modelo é dito invertível. Todos os modelos STAR são invertíveis e todos os modelos STMA são estacionários.

Para determinar um modelo STARMA que melhor se ajuste a um conjunto de dados, devem-se seguir as três fases iterativas: identificação, estimação e diagnóstico,

apresentadas por Pfeifer e Deutsch (1980a).

## 2.4 Revisão de Literatura

No trabalho de Pfeifer e Deutsch (1980a), o modelo STARMA foi aplicado para dados de crimes ocorridos na cidade de Boston. Os referidos autores concluíram que a criminalidade apresentava uma tendência crescente, chegando a um modelo que dependia de erros aleatórios passados e de vizinhos próximos. Vale ressaltar que, neste artigo, os autores trabalharam com um conjunto de dados não estacionários, porém não deram ênfase à parte da diferenciação dos dados para torná-los estacionários.

No mesmo ano, Pfeifer e Deutsch (1980b) apresentaram a identificação e estimação dos modelos de primeira ordem, STAR(1<sub>1</sub>) e STMA(1<sub>1</sub>). Nesse artigo, os autores explicaram o que ocorre com as funções de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e as funções de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF) para os modelos STAR, STMA e STARMA. Por meio de um estudo de simulação, foram apresentadas detalhadamente as características da STACF e STPACF para os modelos STAR(1<sub>1</sub>) e STMA(1<sub>1</sub>), com todas as possíveis combinações de valores dos parâmetros.

Dando continuidade ao estudo, Pfeifer e Deutsch (1980c) mostraram o procedimento para conjuntos de dados não estacionários, ou seja, acrescentaram a parte integrada ao modelo STARMA. Os autores aplicaram essa metodologia a um conjunto de dados sobre propriedades rurais com tratores em 25 estados nos Estados Unidos. O modelo final foi um STARIMA, que foi comparado com modelos obtidos nos trabalhos de Casetti e Semple (1969) e Cliff e Ord (1975), chegando-se à conclusão de que o modelo STARIMA ajustado apresentou melhor desempenho.

A principal ferramenta para a identificação e diagnóstico dos modelos STARMA é a função de autocorrelação espaço-temporal. Pfeifer e Deutsch (1981a) apresentaram um cálculo aproximado da variância da STACF de um processo ruído branco, que é utilizado no diagnóstico dos resíduos. Os resíduos de um modelo ajustado devem estar de acordo com os pressupostos apresentados na Equação (2.5), em que  $\epsilon(t)$  é o vetor de erros aleatórios que seguem a distribuição normal multivariada com  $\mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$  sendo a matriz de variâncias dos erros,  $\sigma^2$  a variância dos erros de cada local e,  $\mathbf{I}_N$  uma matriz identidade de ordem  $N$ . Se os resíduos apresentam estrutura correlativa significativa, o modelo candidato não é aceito e esse modelo é atualizado para lidar com as deficiências



observadas. Como o diagnóstico dos resíduos é realizado por meio da STACF dos resíduos calculados, é necessário conhecer a variância das STACF e assim obter o intervalo de confiança, porém em muitas situações de modelagem, os pressupostos de independência e homogeneidade da variância dos resíduos não são realísticos, resultando-se numa matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . A partir desse problema, Pfeifer e Deutsch (1981b) calcularam a variância da STACF para uma matriz de variâncias e covariâncias  $\mathbf{G}$  geral.

Deutsch e Pfeifer (1981) apresentaram um novo cálculo para a função de autocorrelação quando  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , ou seja, um novo ciclo iterativo, pois dependerá de  $\mathbf{G}$ . Como exemplo, os referidos autores analisaram dados da altura do rio Mohank, nos Estados Unidos, em seis lugares diferentes, coletados duas vezes por ano durante o período de 1967 até 1976, e foi ajustado um modelo STMA(1<sub>1</sub>). Nesse mesmo artigo, os autores analisaram o mesmo conjunto de dados apresentados por Pfeifer e Deutsch (1980a) sobre criminalidades na cidade de Boston, e, como resultado, obtiveram o mesmo modelo do artigo anterior, porém com diferentes estimativas para os parâmetros, já que com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$  o método de estimação é diferente do usual.

Após um tempo em desuso, a aplicação dessa classe de modelos retornou por meio do artigo de Epperson (1993). O referido autor aplicou o modelo STARMA em frequências gênicas para os padrões e as taxas de migração, propondo a utilização dessa classe de modelos na identificação, descrição e interpretação dos processos subjacentes à processos históricos reais.

No final do século XX, Garrido (2000) estimou a relação do tráfego de caminhões em diferentes trajetos, que ligam México-Texas e Texas-México, por meio dos modelos autorregressivos integrado de médias móveis espaço-temporais, o autor estimou o impacto que a mudança no volume de um trajeto implica sobre todos os outros trajetos.

Ao fazerem uma revisão dessa classe de modelos, Rao e Antunes (2004) utilizaram o inverso da distância euclidiana para calcular a matriz de pesos espacial e propuseram uma aproximação inicial para estimativas dos parâmetros do modelo. O procedimento de modelagem foi testado com dados simulados no software MATLAB, e o desempenho de previsão do modelo STARIMA foi comparado com os modelos univariados ARIMA. Esta comparação foi realizada com dados reais de temperatura média mensal, coletados em estações meteorológicas localizadas no Reino Unido. O modelo estimado pelos autores foi

um modelo sazonal e eles concluíram que obtiveram melhores previsões que os modelos univariados ARIMA sazonal destinado para cada estação.

Sartoriz (2004) estimou a correlação de homicídios na cidade de São Paulo. O autor também fez análises univariadas e observou o crescimento de homicídios. No entanto, ao analisar os dados por meio dos modelos espaço-temporais, o referido autor obteve melhores resultados, tendo em vista a existência de dependência espacial. Na conclusão, o autor alertou os órgãos públicos da necessidade de prestarem atenção a uma região com criminalidade crescente, e também a suas regiões vizinhas.

Com a ideia de propor um estudo sobre tráfegos em rodovias, Kamarianakis e Prastacos (2005) aplicaram o modelo STARIMA para dados da velocidade relativa nas estradas de Atenas, Grécia, nos anos de 2001 e 2002, com a finalidade de obter previsões em curto prazo, ajudando o centro de controle de tráfego urbano. Os autores concluíram que o modelo STARIMA apresenta ter praticidade e boas previsões para rodovias em Atenas.

Uma das pressuposições para utilizar o modelo STARMA é que as observações devem ser homogêneas para diferentes locais. Por ter essa restrição, Giacinto (2006) apresenta os modelos STARMAG, autorregressivo e de médias móveis generalizado espaço-temporais, como sendo extensão da classe de modelos STARMA, com objetivo de utilizar o modelo quando os dados apresentam heterogeneidade e, com isso, melhorar a capacidade do modelo em capturar as características espaciais. Esse caso é exatamente o problema apresentado por Pfeifer e Deutsch (1981b). O autor analisou os dados trimestrais da taxa de desemprego em vinte regiões na Itália, nos anos de 1977 a 2001. Como os dados não apresentaram estacionariedade, foi necessária a primeira diferença, e, a partir deste, o autor concluiu a análise com o ajuste de um modelo STARG.

Baseando-se no modelo apresentado por Giacinto (2006), Borovkova, Lopuhaä e Ruchjana (2008) apresentaram o estimador de mínimos quadrados em modelos generalizados com consistência e normalidade assintótica. Foi realizado um estudo de simulação que se fundamentou no modelo GSTAR. Apesar de os autores utilizarem uma sigla diferente do modelo, em relação ao modelo apresentado por Giacinto (2006), o GSTAR pertence a uma sub-classe dos modelos STARMAG. Os autores aplicaram esta metodologia a um conjunto de dados das séries de produção mensal de chá na região ocidental da ilha de Java, localizada na Indonésia.

Pelo fato de Kamarisanakis e Prastacos (2005) terem obtido bons resultados para previsões de tráfego na cidade de Atenas, Lin et al. (2009) e Ding et al. (2011) analisaram séries de tráfegos das rodovias nas cidades de Xangai e Pequim, respectivamente. A pesquisa de Lin et al. (2009) resultou em um modelo STARIMA, obtendo boas previsões em curto prazo em que foi utilizado o software MATLAB. O trabalho de Ding et al. (2011) também resultou em um modelo STARIMA e mostraram que o modelo espaço-temporal tem melhores desempenhos se comparado aos tradicionais modelos ARIMA.

## 2.5 Escolha da matriz de pesos $\mathbf{W}$

A escolha da matriz de pesos espaciais é o elemento chave para a maioria dos modelos de regressão em que é necessária uma representação da estrutura espacial. No trabalhos de Pfeifer e Deutsch (1980a), o método para determinar a matriz de pesos espaciais consiste no uso de uma ordem hierárquica para os vizinhos espaciais, conforme apresentado na Figura 2.1. Nas pesquisas de Rao e Antunes (2004) é relatado que a escolha da matriz depende da área em estudo e do tipo de pesquisa. Além disso, os autores indicam a utilização da covariância entre diferentes locais, para que seja determinada a matriz de pesos espaciais, no entanto, é utilizado o inverso da distância euclidiana para determinar esta dependência espacial. Quando é utilizado o inverso da distância euclidiana, quantifica-se a dependência local em uma única matriz de pesos e os modelos STARMA ficam restrito a apenas uma defasagem espacial. Isso pode simplificar os modelos, já que é utilizada apenas uma “ordem” de vizinhos espaciais.

Como existem vários métodos para calcular a matriz de pesos espaciais, deve-se determinar um modelo mais parcimonioso, entretanto, na literatura, não há estudos de qual forma de cálculo da matriz de pesos leva a melhores ajustes para os modelos STARMA. Neste trabalho são realizados estudos de simulações com diferentes métodos para determinar os pesos espaciais e para diferentes modelos, com o objetivo de verificar se há um método melhor para calcular a matriz de pesos espaciais e se a escolha da matriz influencia nos resultados das modelagens.

No trabalho de Getis e Adstadt (2004), é apresentada toda a natureza da matriz de pesos espaciais e algumas formas para determiná-la. Neste trabalho, os autores, por meio de um modelo espacial proposto, realizaram algumas simulações com 8 diferentes formas de  $\mathbf{W}$  e comentaram que é melhor colocar alguma matriz de pesos espaciais razoável do

que supor independência, manifestando-se que os melhores resultados são obtidos quando se leva em consideração a distância entre as observações.

Diferentes métodos para determinar  $\mathbf{W}$  são apresentados no trabalho de Smith (2013) e são separados em dois tópicos: pesos baseados na distância e pesos baseados em fronteiras. Para determinar a matriz de pesos espaciais, baseando-se na distância, pode-se utilizar os métodos: k vizinhos mais próximos, distância radial, potência da distância e exponencial negativa das distâncias. Para os métodos baseados em fronteiras, têm-se, pesos por contiguidade espacial (vizinhos espaciais), pesos por compartilhamento de fronteira e uma combinação entre distâncias e fronteiras.

Com base em alguns métodos apresentados por Smith (2013), neste trabalho são utilizados os métodos de pesos calculados pela potência do inverso da distância e pesos por contiguidade espacial. A matriz de pesos por contiguidade espacial é igual a apresentada por Pfeifer e Deutsch (1980a), para o modelo STARMA, e ilustrada na Figura 2.1. Nesse caso, devem-se obter várias matrizes de pesos espaciais, pois cada uma indica a ordem dos vizinhos para seguir uma ordem hierárquica. Na matriz de primeira ordem, é atribuído o valor 1 para vizinhos de primeira ordem, que são os vizinhos que têm fronteiras em comum, e 0 caso contrário. Para a matriz de segunda ordem, é atribuído valor 1 para vizinhos de segunda ordem, que são os vizinhos “mais distantes” do que vizinhos de primeira ordem, porém mais próximos do que vizinhos de terceira ordem, e 0 caso contrário. O número de matrizes segue sucessivamente, até a ordem que o pesquisador determinar, e, então, as matrizes são dimensionadas de tal forma que cada linha some 1.

As ponderações para este caso, são:

$$w_{ij}^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{n_i^{(l)}}, & \text{para vizinhos } i \text{ e } j \text{ de } l\text{-ésima ordem} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}, \quad (2.8)$$

em que  $n_i^{(l)}$  é o número de vizinhos da  $l$ -ésima ordem do local  $i$ . Desta maneira, cada linha da matriz soma 1, ou seja,  $\sum_{i=1}^N w_{ij}^{(l)} = 1$ .

Para matrizes de pesos calculadas pela potência negativa da distância euclidiana, acredita-se que o efeito espacial diminua com a distância e, neste caso, utiliza-se apenas uma matriz com os pesos espaciais, diferente dos pesos por contiguidade espacial, em que cada ordem espacial é representada por uma matriz. Os pesos são calculados pela função

de potências negativas das distâncias:

$$w_{ij}^{(1)} = \begin{cases} d_{ij}^{-\alpha}, & \text{para } i \neq j \\ 0, & \text{para } i = j \end{cases}, \quad (2.9)$$

em que  $d_{ij}$  é a distância euclidiana dos vizinhos  $i$  e  $j$ ,  $\alpha$  é algum expoente positivo e os elementos são dimensionados de tal modo que  $\sum_{i=1}^N w_{ij}^{(1)} = 1$ . Quanto maior o valor de  $\alpha$ , menor a dependência espacial, e quanto menor o valor de  $\alpha$ , maior a dependência espacial. Para este trabalho são utilizados  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 5$ ,

## 2.6 Estimação do modelo STARMA

As estimativas que garantem boas propriedades para  $\Phi$  e  $\Theta$ , são obtidas pelo método de máxima verossimilhança (PFEIFER; DEUTSCH 1980a). Como o modelo STARMA tem erros que são ruído branco, então

$$\epsilon' = [\epsilon(1), \epsilon(2), \dots, \epsilon(T)]$$

segue uma distribuição normal multivariada com vetor de médias  $\mathbf{0}$  e matriz de variâncias e covariâncias igual a  $\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$ . A função densidade de probabilidade conjunta é:

$$\begin{aligned} f(\epsilon | \Phi, \Theta, \sigma^2) &= (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} |\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \epsilon' \mathbf{I} \epsilon \right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{NT}{2}} \exp \left\{ -\frac{S(\Phi, \Theta)}{2\sigma^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que  $S(\Phi, \Theta) = \epsilon' \mathbf{I} \epsilon = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \epsilon_i^2(t)$  é a soma de quadrado dos erros.

Sendo assim, encontrar os valores que maximizam a função de verossimilhança é equivalente a calcular os parâmetros  $\Phi$  e  $\Theta$  que minimizam a soma de quadrados  $S(\Phi, \Theta)$ , e, por fim, a estimativa de  $\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{NT}$ .

O modelo STAR( $p_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p}$ ) pode ser escrito na forma linear  $\mathbf{z} = \mathbf{X}\Phi + \epsilon$ , em que  $\mathbf{z}$  é o vetor com as observações,  $\Phi$  é o vetor de parâmetros,  $\epsilon$  os erros e  $\mathbf{X}$  é uma matriz estocástica, em vez de fixo em amostras repetidas. Dessa forma as variáveis explicativas não são independentes dos resíduos e os resultados clássicos das estimativas dos mínimos quadrados dos parâmetros não seguem diretamente. No entanto, utilizam-se os resultados da regressão clássica com o conhecimento empírico de que eles são aproximados

(PFEIFER; DEUTSCH 1980a).

Para a seleção de modelos, ou determinar a ordem deles, pode-se utilizar o critério de informação bayesiano (BIC) e/ou o erro quadrático médio de previsão. Neste trabalho será utilizado apenas o BIC por não ser realizado previsões com o modelo.

Rao e Antunes (2004) fazem uma modificação no critério utilizado para a seleção de modelos de séries temporais multivariados, que tem a forma  $\ln(|\hat{\mathbf{G}}|) + m\frac{\ln(T)}{T}$ , em que  $m$  é o número de parâmetros do modelo e  $\hat{\mathbf{G}}$  é a estimativa da matriz de variâncias e covariâncias residuais. O critério modificado indicado pelos autores é:

$$NT\ln(\hat{\sigma}^2) + 2(p + q)\ln(T) \quad (2.11)$$

em que,  $\hat{\sigma}^2$  é a estimativa da variância residual,  $p$  e  $q$  são as ordens autorregressivas e médias móveis do modelo, respectivamente.

## 2.7 Metodologia

Nesta seção, por meio de simulações, com auxílio do programa R (2013), avaliam-se várias etapas da construção dos modelos STAR com a matriz de pesos espaciais  $\mathbf{W}$ . Em cada etapa, será pré-definido um modelo e, por meio dele, serão geradas 1000 amostras com 16 locais e, cada local, com 70 observações. Para cada amostra, são ajustados seis diferentes modelos. Todas as simulações são realizadas por meio de um grid regular, quatro por quatro, contendo 16 locais, e 70 observações no tempo igualmente espaçados. Os modelos utilizados são: STAR(1<sub>1</sub>), em que são utilizados quatro diferentes matrizes de pesos espaciais, sendo: vizinhos espaciais, como apresentado na Equação (2.8), inverso da distância euclidiana, inverso da distância euclidiana ao quadrado e inverso da distância euclidiana elevado a cinco, conforme apresentado na equação (2.9); o modelo STAR(1<sub>2</sub>), utilizando-se vizinhos espaciais para determinar as matrizes de pesos; e o modelo STAR(1<sub>3</sub>), que também utiliza o método de vizinhos espaciais.

Para melhor compreensão, será definida aqui uma notação para os modelos utilizados com as matrizes de pesos espaciais. Os modelos  $STAR(1_1)^{d^{-1}}$ ,  $STAR(1_1)^{d^{-2}}$  e  $STAR(1_1)^{d^{-5}}$  estão representado o modelo  $STAR(1_1)$ , com diferentes matrizes de pesos espaciais, calculadas pela potência negativa da distância, com  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 5$ , respectivamente, conforme definido na Equação (2.9). O modelo  $STAR(1_1)^c$  representa

o modelo  $STAR(1_1)$  com a matriz de pesos espaciais determinado pela contiguidade espacial, apresentado na Equação (2.8). Os modelos  $STAR(1_2)$  e  $STAR(1_3)$  sempre têm a matriz de pesos espaciais determinada pelo método de contiguidade espacial, apresentada na Equação (2.8).

## 2.8 Resultados e Discussões

Para o modelo  $STAR(1_1)^{d-1}$ , com a matriz de pesos espaciais sendo o inverso da distância, foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.1. Nota-se que as médias das estimativas dos parâmetros que mais se aproximaram dos valores utilizados nas simulações são do modelo  $STAR(1_1)^{d-1}$ , sendo exatamente o modelo utilizado nas simulações.

Tabela 2.1 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_1)^{d-1}$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d-1}$	0,2987 (0,029)	0,4788 (0,067)	—	—	0,9985 (0,045)
$STAR(1_1)^{d-2}$	0,3025 (0,028)	0,4138 (0,076)	—	—	1,0010 (0,044)
$STAR(1_1)^{d-5}$	0,3140 (0,030)	0,2728 (0,067)	—	—	1,0090 (0,045)
$STAR(1_1)^c$	0,3183 (0,031)	0,2266 (0,061)	—	—	1,0130 (0,045)
$STAR(1_2)$	0,3110 (0,029)	0,2056 (0,053)	0,0969 (0,041)	—	1,0050 (0,045)
$STAR(1_3)$	0,3063 (0,029)	0,1922 (0,049)	0,0886 (0,038)	0,0750 (0,042)	1,0010 (0,044)

Para o modelo  $STAR(1_1)^{d-2}$ , com a matriz de pesos espaciais sendo o inverso da distância ao quadrado, também foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.2. Para esse caso, as médias das estimativas dos parâmetros do modelo  $STAR(1_1)^{d-2}$ , que foi o utilizado nas simulações, também se apresentaram mais próximos dos utilizados nas simulações, porém, o modelo  $STAR(1_1)^{d-1}$  também apresentou médias das estimativas dos parâmetros próximos dos reais.

Para o modelo  $STAR(1_1)^{d-5}$ , com a matriz de pesos espaciais sendo o inverso da distância elevado a cinco, foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a

Tabela 2.2 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_1)^{d-2}$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d-1}$	0,2984 (0,028)	0,5268 (0,058)	—	—	1,0050 (0,043)
$STAR(1_1)^{d-2}$	0,2975 (0,028)	0,4874 (0,063)	—	—	1,0010 (0,042)
$STAR(1_1)^{d-5}$	0,3064 (0,028)	0,3500 (0,057)	—	—	1,0070 (0,042)
$STAR(1_1)^c$	0,3111 (0,029)	0,2990 (0,055)	—	—	1,0120 (0,043)
$STAR(1_2)$	0,3042 (0,028)	0,2771 (0,049)	0,0932 (0,041)	—	1,0050 (0,042)
$STAR(1_3)$	0,3008 (0,028)	0,2668 (0,047)	0,0870 (0,039)	0,0577 (0,040)	1,0020 (0,042)

$\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.3. Para esse caso, ficou evidente, como na Tabela 2.1, que o mesmo modelo utilizado nas simulações apresentou as médias das estimativas dos parâmetros mais próximas dos verdadeiros valores.

Tabela 2.3 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_1)^{d-5}$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d-1}$	0,3154 (0,028)	0,5960 (0,047)	—	—	1,0330 (0,043)
$STAR(1_1)^{d-2}$	0,3011 (0,029)	0,6126 (0,053)	—	—	1,0110 (0,044)
$STAR(1_1)^{d-5}$	0,2989 (0,028)	0,4940 (0,046)	—	—	0,9987 (0,042)
$STAR(1_1)^c$	0,3029 (0,028)	0,4402 (0,045)	—	—	1,0000 (0,043)
$STAR(1_2)$	0,2993 (0,028)	0,4272 (0,045)	0,0473 (0,038)	—	0,9979 (0,043)
$STAR(1_3)$	0,2984 (0,028)	0,4250 (0,045)	0,0462 (0,037)	0,0090 (0,038)	0,9970 (0,043)

Para o modelo  $STAR(1_1)^c$ , com a matriz de pesos espaciais sendo calculada pelo método da contiguidade espacial, foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.4. Os modelos  $STAR(1_2)$  e  $STAR(1_1)^c$  apresentaram as médias das estimativas dos parâmetros mais próximos dos valores utilizados nas simulações, e, como anteriormente, o modelo utilizado nas simulações apresentou-se com as médias das estimativas mais próximas dos reais.

Para o modelo  $STAR(1_2)$ , com a matriz de pesos espaciais sendo determinada pelo



Tabela 2.4 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_1)^c$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = 0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,5$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d^{-1}}$	0,3228 (0,027)	0,6182 (0,047)	—	—	1,0590 (0,043)
$STAR(1_1)^{d^{-2}}$	0,3034 (0,030)	0,6554 (0,056)	—	—	1,0280 (0,046)
$STAR(1_1)^{d^{-5}}$	0,2955 (0,027)	0,5473 (0,046)	—	—	1,0040 (0,043)
$STAR(1_1)^c$	0,2982 (0,026)	0,4966 (0,043)	—	—	1,0010 (0,043)
$STAR(1_2)$	0,2979 (0,027)	0,4963 (0,045)	-0,0018 (0,037)	—	1,000 (0,043)
$STAR(1_3)$	0,2974 (0,027)	0,4957 (0,045)	-0,0017 (0,037)	-0,0013 (0,035)	0,9995 (0,043)

método de contiguidade espacial, foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a  $\phi_{10} = -0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,3$ ,  $\phi_{12} = 0,3$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.5. Os modelos  $STAR(1_2)$  e  $STAR(1_3)$  se apresentaram próximos, pois o parâmetro  $\phi_{13}$  apresenta média das estimativas estatisticamente igual a zero. Nota-se que os outros parâmetros, de ambos os modelos, apresentaram-se próximo aos valores utilizados nas simulações.

Tabela 2.5 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_2)$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = -0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,3$ ,  $\phi_{12} = 0,3$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d^{-1}}$	-0,3264 (0,032)	0,7664 (0,057)	—	—	1,0390 (0,047)
$STAR(1_1)^{d^{-2}}$	-0,3219 (0,031)	0,6768 (0,079)	—	—	1,0300 (0,046)
$STAR(1_1)^{d^{-5}}$	-0,3238 (0,032)	0,4007 (0,057)	—	—	1,0450 (0,046)
$STAR(1_1)^c$	-0,3280 (0,033)	0,2946 (0,050)	—	—	1,0580 (0,048)
$STAR(1_2)$	-0,3012 (0,028)	0,2975 (0,046)	0,2985 (0,036)	—	0,9970 (0,043)
$STAR(1_3)$	-0,3008 (0,028)	0,2970 (0,047)	0,2982 (0,036)	0,0008 (0,036)	0,9962 (0,043)

Para o modelo  $STAR(1_3)$ , com a matriz de pesos espaciais sendo determinado pelo método de contiguidade espacial, foram utilizados, nas simulações, os parâmetros iguais a  $\phi_{10} = -0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,2$ ,  $\phi_{12} = 0,2$ ,  $\phi_{13} = -0,25$  e  $\sigma^2 = 1$ . Os resultados das estimativas, de cada modelo ajustado, são apresentados na Tabela 2.6. Nesse caso, as médias das estimativas das variâncias se apresentaram distante de 1, que foi o utilizado nas simulações. O modelo  $STAR(1_2)$  apresentou as médias das estimativas próximas ao

utilizado nas simulações para os parâmetros  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  e  $\phi_{12}$ .

Tabela 2.6 - Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados a amostras de simulações realizadas por meio do modelo  $STAR(1_3)$  com os verdadeiros valores  $\phi_{10} = -0,3$ ,  $\phi_{11} = 0,2$ ,  $\phi_{12} = 0,2$ ,  $\phi_{13} = -0,25$  e  $\sigma^2 = 1$

Modelos ajustado	Médias e desvios padrões das estimativas dos parâmetros				
	$\hat{\phi}_{10}$	$\hat{\phi}_{11}$	$\hat{\phi}_{12}$	$\hat{\phi}_{13}$	$\hat{\sigma}^2$
$STAR(1_1)^{d^{-1}}$	-0,3633 (0,031)	0,3962 (0,047)	—	—	1,552 (0,063)
$STAR(1_1)^{d^{-2}}$	-0,3587 (0,030)	0,4091 (0,076)	—	—	1,540 (0,062)
$STAR(1_1)^{d^{-5}}$	-0,3594 (0,031)	0,2737 (0,047)	—	—	1,539 (0,063)
$STAR(1_1)^c$	-0,3638 (0,032)	0,1961 (0,040)	—	—	1,549 (0,064)
$STAR(1_2)$	-0,3317 (0,025)	0,2163 (0,044)	0,2389 (0,038)	—	1,485 (0,056)
$STAR(1_3)$	-0,2983 (0,022)	0,1991 (0,039)	0,1997 (0,030)	-0,2479 (0,032)	1,428 (0,052)

Com os resultados das médias das estimativas dos parâmetros obtidos nas simulações, fica claro que os modelos utilizados nas simulações são os mesmos que apresentaram as estimativas dos parâmetros “mais próximas” dos utilizados na geração dos dados, levando à conclusão prévia de que as matrizes de pesos espaciais interferem no modelo e nas estimativas de seus parâmetros.

Nas Tabelas 2.1 a 2.6, observa-se que todos os modelos utilizados nas simulações das amostras apresentam médias das estimativas dos parâmetros com menor desvio em relação aos verdadeiros valores utilizados nas simulações. Isso evidencia que o método, como a matriz de pesos espaciais é calculada, pode trazer menores erros das estimativas dos parâmetros, ou seja, o pesquisador deve quantificar a dependência espacial de acordo com a região em estudo, comprovando a afirmação de Rao e Antunes (2004).

Por meio da Tabela 2.7, para cada uma das simulações, utilizando-se o Critério de Informação Bayesiano (BIC), são apresentados os resultados das simulações e o número de vezes que o modelo obteve o melhor ajuste. Pode-se observar que os melhores modelos ajustados são os mesmos utilizados nas simulações. Dentre os melhores modelos, segundo o critério BIC, o que apresentou menor porcentagem com 69,3%, nas simulações, foi o modelo  $STAR(1_1)$ , com a matriz de pesos espaciais sendo o inverso da distância elevado a cinco. Já o modelo  $STAR(1_3)$ , com matriz de pesos determinada pelo método de vizinhos espaciais até a terceira ordem, apresentou 100% do melhor ajuste quando utilizado o mesmo modelo para simulações.

A redução das matrizes de pesos espaciais, para tornar o modelo mais parcimonioso,

não traz resultados favoráveis, visto que, quando é utilizado o modelo com três matrizes de pesos,  $STAR(1_3)$ , nas simulações, a ideia de fixar em uma matriz de pesos nos modelos ajustados, não trouxe melhorias seguindo o Critério de Informação Bayesiano. Contudo, verifica-se que a escolha das matrizes de pesos espaciais interfere, também, na etapa de seleção do modelo espaço-temporal.

Tabela 2.7 - Melhores modelos ajustados, segundo critério de informação bayesiano (BIC), para cada uma das seis simulações

Melhores modelos	Modelos utilizados nas simulações					
	$STAR(1_1)^{d-1}$	$STAR(1_1)^{d-2}$	$STAR(1_1)^{d-5}$	$STAR(1_1)^c$	$STAR(1_2)$	$STAR(1_3)$
$STAR(1_1)^{d-1}$	774	159	0	0	0	0
$STAR(1_1)^{d-2}$	218	731	31	0	3	0
$STAR(1_1)^{d-5}$	6	100	693	181	0	0
$STAR(1_1)^c$	2	9	275	819	0	0
$STAR(1_2)$	0	1	1	0	995	0
$STAR(1_3)$	0	0	0	0	2	1000

## 2.9 Conclusões

Os resultados comprovam que o método como é calculada a(s) matriz(es) de pesos espaciais influencia no ajuste de um modelo STAR. Esta influência é diretamente relacionada com as estimativas dos parâmetros, e isso resulta na qualidade da modelagem.

A escolha do método para determinar a dependência espacial não deve se basear no conhecimento empírico, e sim adotar meios que descreverão a real relação entre os locais em estudo.

Contudo, o pesquisador deve verificar diferentes meios para formular a(s) matriz(es), de acordo com cada região em estudo. Por exemplo, buscar métodos que quantifiquem a dependência espacial e utilizem estruturas de covariâncias, de maneira que represente melhor a dependência espacial e resulte num melhor ajuste de um modelo STARMA.

## Referências

normality of least squares estimators in generalized STAR models. **Statistica Neerlandica**, Malden, v. 62, p. 482-508, 2008.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. São Francisco: Holden-Day, 1970. 537 p.

CASETTI, E.; SEMPLE, R. k. Concerning the testing of spatial diffusion hypotheses. **Geographical Analysis** 1, Athens, v. 4, p. 254-259, 1969.

CLIFF, A. D.; HAGGETT, P.; ORD, J. K.; BASSETT, K. A.; DAVIES, R. B. Elements of spatial structure: A quantitative approach. **Cambridge University Press**, Nova York, 1975.

CLIFF, A. D.; ORD, J. K. Space-time modelling with an application to regional forecasting. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, n. 64, p. 119-128, mar. 1975.

DEUTSCH, S. J.; PFEIFER, P. E. Space-Time ARMA Modeling with Contemporaneously Correlated Innovations. **Technometrics**, Nova York, v. 23, n. 4, p. 401-409, 1981.

DING, Q.; WANG, X.; ZHANG, X. e SUN, Z. Forecasting Traffic Volume with Space-Time ARIMA Model. **Advanced Materials Research**, Switzerland, v. 156-157, p. 979-983, 2011.

EPPERSON, Bryan K. Spatial and space-time correlation systems of subpopulations with genetic drift and migration. **Genetics**, Bethesda, v. 133, p. 711-727, 1993.

GARRIDO, Rodrigo A. Spatial interaction between the truck flows through the Mexico-Texas border. **Transportation Research Part A**, Oxford, v. 34, p. 23-33, 2000.

GETIS, A.; ALDSTADT, J. Constructing the Spatial Weights Matrix Using a Local Statistic. **Geographical Analysis**, Athens, v.36, n. 2, p. 90-104, abr. 2004.

GIACINTO, V. D. A Generalized space-time ARMA model with an application to regional unemployment analysis in Italy. **International Regional Science Review**, Londres, v. 29, p. 159-198, 2006.

KAMARIANAKIS, Y. I.; PRASTACOS, P. P. Space-Time Modeling of Traffic Flow. **Computer e Geosciences**, Hellas, v. 31, p. 119-133, 2005.

LIN, S.L.; HUANG, H.Q.; ZHU, D.Q.; WANG, T.Z. The application of Space-Time ARIMA model on traffic flow forecasting. In: PROCEEDINGS OF THE EIGHTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, 2009, Baoding. **Resumo...** Baoding: IEEE, 2009. p. 3408-3412.

MARTIN, R.L.; OEPPEN, J.E. The identification of regional forecasting models using space-time correlation functions. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, n. 66, p. 95-118, 1975.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A Three-Stage Iterative Procedure for Space-Time Modeling. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 1, p. 35-47, 1980a.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Identification and Interpretation of First Order Space-Time ARMA Models. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 3, p. 397-408, 1980b.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A STARIMA Model-Building Procedure with Application to Description and Regional Forecasting. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, v. 5, n. 3, p. 330-349, 1980c.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function. **Journal of the Royal Statistical Society**, Atlanta, v. 43, n. 1, p. 28-33, 1981a.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function of Contemporaneously Correlated Variables. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Atlanta, v. 40, n. 1, p. 133-136, 1981b.

R Development Core Team. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, Disponível em: <http://www.R-project.org/>. Acesso em: 16 maio 2013.

RAO, T. S.; ANTUNES, A. M. C. Spatio-Temporal modelling of temperature time series: A comparative Study. In: BRILLINGER, D. R.; ROBINSON, E. A. e SCHOENBERG, F. P. (Ed.) **Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems**. Nova York : Springer, 2004. p. 123-150.

SARTORIS, A. STARMA Models for Crime in the City of Sao Paulo. In: WORKSHOP ON SPATIAL ECONOMETRICS, Kiel, 2004, Alemanha. **Resumo...** Kiel: JEL, 2004. 17 p.

SMITH, Tony E. **Spatial Weight Matrices**. Disponível em: [http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra\\_materials/](http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra_materials/). Acesso em: 24 jan. 2013.

### 3 APLICAÇÃO DO MODELO STARIMA PARA DADOS DE TEMPERATURAS MÍNIMAS MENSAIS

#### Resumo

O clima tem grande influência nas culturas agrícolas e a temperatura é uma das principais variáveis que afetam seu desenvolvimento e sua produtividade final. A modelagem de dados de temperatura tem se tornado frequente, e este trabalho utiliza a classe de modelos autorregressivos integrados e de médias móveis espaço-temporais (STARIMA), para um conjunto de dados de temperaturas mínimas diárias coletadas na mesorregião Oeste do estado do Paraná, por ser um dos maiores produtores de grãos do país. Utilizando-se as etapas iterativas do método de Box e Jenkins (1970) para análise de séries temporais, concluiu-se que o modelo espaço-temporal STARIMA(1<sub>1</sub>, 0, 1) × (1, 1, 1)<sub>12</sub> sazonal foi o mais adequado. É importante ressaltar que, o método para determinar a dependência espacial que trouxe melhores resultados foi o inverso da distância euclidiana, a matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos, **G**, não apresentou esfericidade, e o programa computacional utilizado é o R (2013).

Palavras-chave: Autorregressivo; Médias móveis; Espaço-temporal; Pesos espaciais; Sazonal; Temperatura; Previsões

#### Abstract

The climate has great influence in agriculture and the temperature is one of the main variables which affect its development and the final productivity. The modeling of temperature data has become common, and in this paper we use the class of space-time autoregressive integrated moving average models (STARMA), for a daily minimum temperatures data set collected in the mesoregion western of the state of Paraná, since it is one of the largest grain producers in the country. Using the iterative stages of the method of Box and Jenkins (1970) for time series analysis, it was concluded that the space-time model STARIMA (1<sub>1</sub>, 0, 1) × (1, 1, 1)<sub>12</sub> seasonal was the most appropriate. Importantly, the method for determining the spatial dependence that brought better results was the inverse of the Euclidean distance, the matrix of variances and covariances of the residuals, **G**, not presented sphericity, and the computer program used is R (2013).

Keywords: Autoregressive, Moving-average; Space-time; Spatial weights; Forecasting; Temperature data

### 3.1 Introdução

A modelagem de dados climatológicos se tornou frequente, visto que o clima intervém nas características biogeográficas, fenômenos geomorfológicos, hidrológicos, e resulta em uma influência sobre a economia mundial.

Segundo Chechie e Bayer (2012), a análise de séries temporais aplicada a dados climatológicos atrai interesse especial, haja vista a interferência direta do clima em muitas áreas, determinando o sucesso ou fracasso de vários empreendimentos.

Cargnelutti, Maluf e Matzenauer (2008) apontam que o estudo de variáveis climáticas traz informações essenciais para o zoneamento de culturas agrícolas, indicação de épocas de semeadura, irrigação, determinação de potencial de produtividade, zoneamento de risco climático, crédito e seguro agrícola.

A temperatura é, dentre os elementos climáticos, uma das que promove maiores efeitos diretos e significativos sobre muitos processos fisiológicos que ocorrem em plantas e animais. ( Medeiros et al 2005)

A classe de modelos espaço-temporais autorregressivos e de médias móveis (STARMA) têm mostrado maior utilidade para explicar a incerteza em sistemas que apresentam uma complexa variabilidade nas escalas temporal e espacial. O processo com representação STARMA é uma extensão multivariada dos modelos ARMA para séries temporais univariadas, sendo que, além de modelar a evolução de uma série simples através do tempo, considera-se a evolução temporal das séries em um contexto espacial.

Chechie e Bayer (2012) indicaram a análise de séries temporais para dados de temperaturas, já que esses processos apresentam dependência entre as observações, e a metodologia de análise exposta capta esta correlação. Porém, a temperatura também sofre influências de regiões vizinhas, e a classe de modelos STARMA também leva em conta esta dependência espacial, trazendo-lhes melhores resultados de previsões, como mostraram Rao e Antunes (2004).

O modelo espaço-temporal autorregressivo e de médias móveis foi formulado nos anos 70 nos artigos de Cliff et al. (1975), Cliff e Ord (1975) e Martin e Oeppen (1975), mas, foi no início dos anos 80, com uma série de artigos de Phillip E. Pfeifer e Suart Jay Deutsch, que houve um aprimoramento de novos métodos para melhor ajustar o modelo, por exemplo, Pfeifer e Deutsch (1980a, 1980b, 1980c, 1980d, 1981a, 1981b), Deutsch e Pfeifer (1981).

Durante anos houve uma ausência de referências desse modelo, e uma aplicação com dados climatológicos foi realizada com Rao e Antunes (2004). Os respectivos autores utilizaram a classe de modelo STARMA para modelar a temperatura média mensal no Reino Unido, comparando-se com os modelos ARMA univariados, que levaram à conclusão de que o modelo STARMA apresentou melhores resultados. Nesse artigo, os autores modificaram o método para determinar as matrizes de pesos espaciais, apresentado por Pfeifer e Deutsch (1980a), pois utilizaram o inverso da distância euclidiana, resultando em apenas uma matriz com os pesos espaciais.

Como forma de melhorar e expandir os processos passíveis desta modelagem, Giancinto (2006) apresentou os modelos STARMAG, autorregressivo e de médias móveis generalizado espaço-temporal, que podem ser ajustados à dados que apresentam heterogeneidade. Borovkova, Lopuhaä e Puchjana (2008) aprimoraram o modelo apresentado por Giancinto (2006) e o denominaram GSTAR.

Houve inúmeros trabalhos com aprimoramentos e aplicações do modelo STARMA ao decorrer dos anos, dentre eles destacam-se Kamarianakis e Prastacos (2005), Lin et al. (2009) e Ding et al. (2011), porém a aplicação para dados climatológicos só foi apresentada por Rao e Antunes (2004) e Monroy (2013). No trabalho de Monroy (2013), foi utilizado o modelo espaço-temporal autorregressivo e de médias móveis com estrutura de longa dependência (modelo STARFIMA) e aplicado em dados de concentração diária de  $SO_2$  e  $PM_{10}$  da região da Grande Vitória.

Diante do exposto, percebe-se a relevância do estudo de modelos estatísticos de previsão no setor agrícola, sendo assim, o objetivo deste trabalho é fazer o ajuste de um modelo espaço-temporal e as previsões 6 passos a frente, aplicados às médias mensais de temperatura mínima diária numa mesorregião no Oeste do Estado do Paraná.



### 3.2 Metodologia

O método proposto pelos artigos de Pfeifer e Deutsch para determinar o melhor modelo espaço-temporal segue a forma do método de Box e Jenkins. Esse método é separado em três etapas, sendo que na primeira etapa, identificação, deve-se determinar qual a ordem espacial e temporal  $(p, q, \lambda, m)$ , recomendando-se qual forma dos modelos (STAR, STMA e STARMA) é mais apropriada. Para estabelecer os valores de  $(p, q, \lambda, m)$ , são utilizados a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF).

O modelo STARIMA sazonal de ordem  $(p_\lambda, d, q_m) \times (P_\Lambda, D, Q_M)_S$  expressa  $\mathbf{z}(t)$ , um vetor  $N \times 1$  de observações até o tempo  $t$ , como uma combinação linear ponderada das observações passadas e erros, ambos defasados no espaço e tempo:

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S)\phi_{p,\lambda}(B)\nabla_S^D\nabla^d\mathbf{z}(t) = \Theta_{Q,M}(B^S)\theta_{q,m}(B)\boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (3.1)$$

em que,

$$\begin{aligned} \phi_{p,\lambda}(B) &= \mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}_l B^k, \\ \nabla^d &= (\mathbf{I} - B)^d, \\ \theta_{q,m}(B) &= \mathbf{I} - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}_l B^k, \\ \Phi_{P,\Lambda}(B^S) &= \mathbf{I} - \sum_{k=1}^P \sum_{l=0}^{\Lambda_k} \Phi_{kl} \mathbf{W}_l B^{kS}, \\ \nabla_S^D &= (\mathbf{I} - B^S)^D \quad e \\ \Theta_{Q,M}(B^S) &= \mathbf{I} - \sum_{k=1}^Q \sum_{l=0}^{M_k} \Theta_{kl} \mathbf{W}_l B^{kS}. \end{aligned}$$

Para simplificar a apresentação do modelo, deixando-o de forma mais usual, e retirando as partes integrada e sazonal, o modelo STARMA( $p_{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p}, q_{m_0, m_1, \dots, m_q}$ ) é definido como:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{z}(t)$  são observações de uma única variável aleatória  $Z_i(t)$  que estão disponíveis em  $N$  locais fixos no espaço ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), sobre  $T$  períodos ( $t = 1, 2, \dots, T$ ),  $p$  é a

ordem autorregressiva,  $q$  é a ordem de médias móveis,  $\lambda_k$  é a ordem espacial do  $k$ -ésimo termo autorregressivo,  $m_k$  é a ordem espacial do  $k$ -ésimo termo de médias móveis,  $\phi_{kl}$  é o parâmetro autorregressivo na defasagem temporal  $k$  e defasagem espacial  $l$ ,  $\theta_{kl}$  é o parâmetros de médias móveis na defasagem temporal  $k$  e defasagem espacial  $l$  e o  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  são os erros aleatórios que seguem uma distribuição normal multivariada com  $E[\boldsymbol{\epsilon}(t)] = \mathbf{0}$  e

$$E[\boldsymbol{\epsilon}(t)\boldsymbol{\epsilon}(t+s)'] = \begin{cases} \mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N, & \text{se } s = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

É importante ressaltar que a classe de modelos STARMA representa processos estacionários, ou seja, a média e a estrutura de covariâncias de  $\mathbf{z}(t)$  não mudam com o tempo. Para que o processo seja estacionário, é necessário que todos possíveis valores de  $x_\mu$  que satisfaçam a equação:

$$\det \left[ x_\mu^p I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{p-k} \right] = 0$$

estejam dentro do círculo unitário ( $|x_\mu| < 1$ ), ou seja, determinará uma região de possíveis valores de  $\phi_{kl}$  que irá resultar em um processo estacionário.

Para que o  $\mathbf{z}(t)$  seja expresso com combinação linear ponderada de observações passadas, com pesos que convergem para zero, é necessário que todos possíveis valores de  $x_\mu$  que satisfaçam a equação:

$$\det \left[ x_\mu^q I - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} x_\mu^{q-k} \right] = 0$$

estejam dentro do círculo unitário ( $|x_\mu| < 1$ ), então o modelo é dito invertível. Todos os modelos STAR são invertíveis e todos os modelos STMA são estacionários.

Antes de iniciar as etapas iterativas para o ajuste do modelo, deve-se determinar a forma da matriz de dependência espacial. A matriz é fixa durante o processo de modelagem, porém, há diferentes métodos para o cálculo. É apresentado no artigo anterior que a matriz de pesos influencia na qualidade do ajuste e é necessário utilizar o método que melhor represente a dependência espacial da região em estudo.

Neste trabalho são utilizados dois métodos para quantificar a matriz de pesos espaciais, apresentados por Smith (2013): contiguidade espacial e potência negativa das

distâncias euclidianas.

Pelo método de contiguidade espacial, as ponderações são calculadas por:

$$w_{ij}^{(l)} = \begin{cases} \frac{1}{n_i^{(l)}}, & \text{para vizinhos } i \text{ e } j \text{ de } l\text{-ésima ordem} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}, \quad (3.3)$$

em que,  $n_i^{(l)}$  é o número de vizinhos da  $l$ -ésima ordem do local  $i$  e este cálculo resulta em matrizes, em que, cada linha soma 1.

Para determinar os pesos espaciais, é utilizada a função de potência negativa das distâncias, dada por:

$$w_{ij}^{(1)} = \begin{cases} d_{ij}^{-\alpha}, & \text{para } i \neq j \\ 0, & \text{para } i = j \end{cases}, \quad (3.4)$$

e os elementos são dimensionados de tal modo que  $\sum_{i=1}^N w_{ij}^{(1)} = 1$ . Dessa forma, a máxima ordem espacial é um, em que  $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{I}_N$  e  $\mathbf{W}^{(1)}$  é determinado por (3.4). O valor de  $\alpha$  é positivo e deve-se notar que quanto maior o valor de  $\alpha$ , menor a dependência espacial, e quanto menor o valor de *alpha*, maior a dependência espacial.

Para determinar um modelo STARMA que melhor explique um conjunto de dados, devem-se seguir as três fases iterativas: identificação, estimação e diagnóstico, apresentadas por Deutsch e Pfeifer (1980a).

Para o processo de modelagem, deve-se ter auxílio de alguns recursos computacionais e, neste trabalho, é utilizado o programa R (2013). Na etapa de identificação do modelo, foi implementada a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF). Na etapa de estimação, são ajustados diferentes modelos, e as estimativas dos parâmetros, de cada modelo, são estimadas pela função “optim”, que é um método iterativo de otimização.

Para o diagnóstico, são calculados os intervalos de confiança para a STACF, os testes de hipóteses para os parâmetros e o teste quanto à esfericidade de  $\mathbf{G}$ .

Por fim, para a seleção de modelos, foi implementado o critério de informação bayesiano e, com isso, concluiu-se qual matriz de pesos apresentou melhores resultados. Com o modelo ajustado, são implementados os cálculos de previsões de origem  $t$  e horizonte  $h$ .

### 3.2.1 Identificação

O método de identificação envolve resumir e categorizar os dados para fornecer informações, e assim determinar uma classe de modelos que melhor corresponda ao processo observado.

Para identificar modelos espaço-temporal, deve-se combinar a covariância entre todos os pares possíveis de locais. Essa covariância é chamada de função de autocovariância espaço-temporal, em que a função expressa a covariância entre pontos defasados tanto no espaço quanto no tempo. Utilizando-se o operador de defasagem espacial, a covariância média ponderada entre a  $l$ -ésima ordem de vizinhos de qualquer local e as  $k$ -ésimas ordens de vizinhos do mesmo local no tempo e  $s$  defasagens para o futuro é

$$\gamma_{lk}(s) = E \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{N} \right\}, \quad (3.5)$$

em que,  $\gamma_{lk}(s)$  é a covariância espaço-temporal entre vizinhos da  $l$ -ésima e  $k$ -ésima ordem, no tempo de defasagem  $s$ . Matricialmente, a função de covariância espaço-temporal, definida na Equação (3.5) pode ser definida como:

$$\gamma_{lk}(s) = E \left\{ \frac{[\mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t)]' [\mathbf{W}^{(k)} \mathbf{z}(t+s)]}{N} \right\} \quad (3.6)$$

que é equivalente a

$$\gamma_{lk}(s) = tr \left\{ \frac{\mathbf{W}^{(k)'} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{\Gamma}(s)}{N} \right\}, \quad (3.7)$$

em que,  $tr \{.\}$  é o traço de uma matriz e  $\mathbf{\Gamma}(s) = E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+s)']$ . Um estimador para  $\mathbf{\Gamma}(s)$  é  $\hat{\mathbf{\Gamma}}(s) = \sum_{t=1}^{T-s} \frac{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t+s)'}{T-s}$  e substituindo em (3.7) obtém-se a estimativa  $\hat{\gamma}_{lk}(s)$ .

Note que para  $k = 0$  e  $l = 0$ , tem-se

$$\gamma_{00}(s) = \frac{1}{N} tr \{ \mathbf{\Gamma}(s) \}$$

que é a autocovariância média da  $s$ -ésima defasagem para todos locais  $N$ .

Caso  $l = 1$  e  $k = 0$ , tem-se

$$\gamma_{10}(s) = \frac{1}{N} tr \{ \mathbf{W}^{(1)} \mathbf{\Gamma}(s) \}$$

que é a covariância média de todos os locais e seus respectivos vizinhos de primeira ordem,  $s$  defasagens no tempo.

Uma propriedade importante da covariância espaço-temporal é que

$$\gamma_{lk}(s) = \gamma_{kl}(-s), \quad (3.8)$$

pois isso ocorre devido ao  $tr [AB] = tr [BA]$  e  $\mathbf{\Gamma}(s) = \mathbf{\Gamma}(-s)'$ .

A definição de autocorrelação espaço-temporal é diferente da autocorrelação de séries temporais univariadas. Para a autocorrelação espaço-temporal existem varias combinações que podem ser usadas para o cálculo. (MARTIN; OEPPEN, 1975). Uma definição para a autocorrelação entre vizinhos da  $l$ -ésima e  $k$ -ésima ordem e  $s$  defasagens no tempo é

$$\rho_{lk}(s) = \frac{\gamma_{lk}(s)}{[\gamma_{ll}(0)\gamma_{kk}(0)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.9)$$

Essa definição é preferida porque a estimativa amostral da variância tem-se mostrado relativamente constante para todas as defasagens espaciais (PFEIFER ; DEUTSCH 1980a).

As estimativas amostrais dos coeficientes de autocorrelação espaço-temporal é dado por:

$$\hat{\rho}_{lk}(s) = \frac{\hat{\gamma}_{lk}(s)}{[\hat{\gamma}_{ll}(0)\hat{\gamma}_{kk}(0)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{\left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (L^{(l)} z_i(t))^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (L^{(k)} z_i(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.10)$$

Observa-se que fixando os vizinhos de  $k$ -ésima ordem ( $k = 0$ ), obtendo a função de autocorrelação, variando os vizinhos de  $l$ -ésima ordem e escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\hat{\rho}_{l0}(s) = \frac{T}{(T-s)} \frac{\sum_{t=1}^{T-s} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \mathbf{z}(t+s)}{\left( \sum_{t=1}^T [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)] \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'(t) \mathbf{z}(t) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.11)$$

Se  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , ou seja, os erros não satisfazerem a condição de esfericidade, as estimativas amostrais dos coeficientes de autocorrelação espaço-temporal são calculadas por:

$$\hat{\rho}_{l0}(s) = \frac{T}{(T-s)} \frac{\sum_{t=1}^{T-s} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \hat{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{z}(t+s)}{\left( \sum_{t=1}^T [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)]' \hat{\mathbf{G}}^{-1} [\mathbf{W}_l \mathbf{z}(t)] \sum_{t=1}^T \mathbf{z}'(t) \hat{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{z}(t) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.12)$$

em que  $\hat{\mathbf{G}} = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t) \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'(t)}{T}$ .

Por meio da função de autocorrelação amostral estimada, deve-se determinar um modelo candidato, porém não é fácil determinar qual ordem este modelo deve seguir. Para resolver este problema, utiliza-se a função de autocorrelação parcial espaço-temporal. O sistema para o cálculo da STPACF é análogo às equações de Yule-Walker para séries temporais univariadas. Multiplica-se ambos os lados do modelo geral  $STAR(k_{\lambda}, \lambda, \dots)$  por  $[\mathbf{W}^{(h)} \mathbf{z}(t-s)]'$ ,

$$\mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)'} \mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)'} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-j) + \mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)'} \boldsymbol{\epsilon}(t).$$

Aplica-se a esperança e divide-se por N ambos os lados, tem-se que

$$\gamma_{h0}(s) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \gamma_{hl} \mathbf{z}(s-j), \quad (3.13)$$

pois  $E[\mathbf{z}(t-s)' \boldsymbol{\epsilon}(t)] = 0$ , para  $s > 0$ . Logo, para  $s = 1, 2, \dots, k$  e  $h = 0, 1, 2, \dots, \lambda$  obtém-se o sistema apresentado na Figura 3.1.

A ordem espacial,  $\lambda$  do sistema, é determinada pelo pesquisador, e, com isso,  $\phi'_{kl}$ , obtido resolvendo-se o sistema apresentado na Figura 3.1, para  $l = 0, 1, \dots, \lambda$  e  $k = 1, 2, \dots$  é chamado de função de autocorrelação parcial espaço-temporal de ordem espacial  $\lambda$ . O pesquisador deve escolher  $\lambda$  tão grande quanto a ordem máxima espacial por hipótese de qualquer modelo, mas se  $\lambda$  é alto, segundo Pfeifer e Deutsch (1980a) 3 ou 4, obtém-se grandes sistemas, e, para obter um sistema moderado,  $\lambda = 2$  é o suficiente. As estimativas  $\hat{\phi}_{kl}$  são calculadas a partir do sistema de Equações (3.13), substituindo-se o teórico  $\gamma_{hl}(s)$  por suas estimativas  $\hat{\gamma}_{hl}(s)$  sucessivamente para  $l = 0, 1, \dots, \lambda$  e  $k = 1, 2, \dots$ .

Cada um dos processos STARMA é caracterizado por distintos STACF e STPACF, análogo a séries temporais univariadas. Nos modelos autorregressivos univariados, a função de autocorrelação decai exponencialmente e a função de autocorrelação parcial

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c}
 \gamma_{00}^{(1)} \\
 \gamma_{10}^{(1)} \\
 \vdots \\
 \gamma_{\lambda 0}^{(1)}
 \end{array} \right\} s=1 \\
 \\
 \left. \begin{array}{c}
 \gamma_{00}^{(2)} \\
 \gamma_{10}^{(2)} \\
 \vdots \\
 \gamma_{\lambda 0}^{(2)} \\
 \vdots \\
 \gamma_{00}^{(k)} \\
 \gamma_{10}^{(k)} \\
 \vdots \\
 \gamma_{\lambda 0}^{(k)}
 \end{array} \right\} s=2 \\
 \\
 \left. \begin{array}{c}
 \gamma_{00}^{(k)} \\
 \gamma_{10}^{(k)} \\
 \vdots \\
 \gamma_{\lambda 0}^{(k)}
 \end{array} \right\} s=k
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \gamma_{00}^{(0)} & \gamma_{01}^{(0)} \cdots \gamma_{0\lambda}^{(0)} & \gamma_{00}^{(-1)} & \gamma_{01}^{(-1)} \cdots \gamma_{0\lambda}^{(-1)} \\
 \hline
 \gamma_{10}^{(0)} & \gamma_{11}^{(0)} \cdots \gamma_{1\lambda}^{(0)} & \gamma_{10}^{(-1)} & \gamma_{11}^{(-1)} \cdots \gamma_{1\lambda}^{(-1)} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 \gamma_{\lambda 0}^{(0)} & \gamma_{\lambda 1}^{(0)} \cdots \gamma_{\lambda\lambda}^{(0)} & \gamma_{\lambda 0}^{(-1)} & \gamma_{\lambda 1}^{(-1)} \cdots \gamma_{\lambda\lambda}^{(-1)} \\
 \hline
 \end{array}
 & \cdots & (1-k) & \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & \\
 \hline
 & (1) & (0) & (2-k) \\
 \hline
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 \end{array}
 & \cdots & (0) & \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & \\
 \hline
 & (k-1) & (k-2) & \cdots (0) \\
 \hline
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \phi_{10} \\
 \phi_{11} \\
 \vdots \\
 \phi_{1\lambda} \\
 \\
 \phi_{20} \\
 \phi_{21} \\
 \vdots \\
 \phi_{2\lambda} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \\
 \phi_{k0} \\
 \phi_{k1} \\
 \vdots \\
 \phi_{k\lambda}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.1 - Sistema para o cálculo das STPACF

corta após o lag  $p$ , já os processos  $STAR(p_{\lambda_1, \dots, \lambda_p})$  exibem uma função de autocorrelação espaço-temporal que diminuem gradativamente tanto para espaço quanto para o tempo, e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal que corta após o lag  $p$  no tempo e lag  $\lambda_p$  no espaço. Para modelos de médias móveis univariadas, a função de autocorrelação corta após o lag  $q$  e a função de autocorrelação parcial decai exponencialmente ao longo do tempo, já o modelo  $STMA(q_{m_1, \dots, m_k})$  tem uma função de autocorrelação espaço-temporal que corta após o lag temporal  $q$  e o lag espacial  $m_q$ , e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal que decai gradativamente, espacialmente e temporalmente. Para o modelo STARMA, tanto a STACF quanto STPACF apresentam um decaimento gradativo no tempo e no espaço.

Para fins de exibição, são apresentados na Tabela 3.4 os comportamentos teóricos das STACF e STPACF para os modelos STAR, STMA e STARMA.

### 3.2.2 Estimação

Com um modelo candidato escolhido na fase de identificação, parte-se para a estimação dos parâmetros do modelo STARMA. Os vetores de parâmetros a serem estimados são  $\Phi = [\phi_{10}, \phi_{11}, \dots, \phi_{1\lambda}, \dots, \phi_{p0}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{p\lambda_p}]$  e  $\Theta = [\theta_{10}, \theta_{11}, \dots, \theta_{1m}, \dots, \theta_{q0}, \theta_{q1}, \dots, \theta_{qm_q}]$ ,

Tabela 3.1 - Características teóricas das STACF e STPACF para os possíveis modelos da classe STARMA

Modelos	FACST	FACPST
STAR( $p_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ )	Decai gradativamente	$\phi_{sl} = 0$ para $s > p$ , e $l > \lambda_p$
STMA( $q_{m_1 \dots m_q}$ )	$\rho_{l0}(s) = 0$ para $s > q$ , e $l > m_q$	Decai gradativamente
STARMA ( $p_{\lambda_1 \dots \lambda_p}, q_{m_1 \dots m_q}$ )	Decai gradativamente	Decai gradativamente

sendo as estimativas obtidas pelo método de máxima verossimilhança.

Por definição os erros  $\boldsymbol{\epsilon}' = [\epsilon_1(1), \dots, \epsilon_1(T), \dots, \epsilon_N(1), \dots, \epsilon_N(T)]$  são ruídos branco, isto é, seguem uma distribuição normal multivariada com média zero e matriz de variâncias e covariâncias igual a  $\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$ . Portanto a função densidade de probabilidade conjuntada é escrita como

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\epsilon} | \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}, \sigma^2) &= (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} |\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{I} \boldsymbol{\epsilon}\right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{TN}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{TN}{2}} \exp\left\{-\frac{S(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta})}{2\sigma^2}\right\}, \end{aligned}$$

em que,  $S(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}) = \boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{I} \boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \epsilon_i^2(t)$ .

Encontrar os valores dos parâmetros que maximizam a função de verossimilhança equivale a obter os valores de  $\boldsymbol{\Phi}$  e  $\boldsymbol{\Theta}$  que minimizam  $S(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta})$  e o problema se reduz a estimativas de mínimos quadrados de  $\boldsymbol{\Phi}$  e  $\boldsymbol{\Theta}$ . Para calcular o mínimo de  $S(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta})$ , deve-se conhecer  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ , que são erros aleatórios não observáveis calculados a partir das quantidades observáveis  $\mathbf{z}(t)$  por métodos recursivos utilizando-se o modelo STARMA. Logo,

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{z}(t) - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) + \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t-k)$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Deve-se destacar que  $\mathbf{z}(t)$  e  $\boldsymbol{\epsilon}(t)$  são desconhecidos para  $t < 1$  e esses valores iniciais precisam ser calculados se não houver um conhecimento a priori. Rao e Antunes (2004) indicam usar as médias para os valores iniciais, ou seja,  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$  e se  $\mu = 0$  então  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$  para  $t < 1$ . Assim, para qualquer escolha dos parâmetros  $S(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta})$  e dos valores iniciais  $(\mathbf{z}_*, \boldsymbol{\epsilon}_*)$ , um conjunto de valores dos erros pode ser calculado sucessivamente, dado



um conjunto de observações  $\mathbf{z}(t)$  particular. Com isso, o logaritmo neperiano da função de verossimilhança associado aos valores dos parâmetros  $(\Phi, \Theta, \sigma^2)$  condicionais sobre a escolha de  $\mathbf{z}_*$  e  $\epsilon_*$  é:

$$l_*(\Phi, \Theta, \sigma^2) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{TN}{2} \sigma^2 - \frac{S_*(\Phi, \Theta)}{2\sigma^2}.$$

Portanto, os estimadores de máxima verossimilhança condicional de  $(\Phi, \Theta, \sigma^2)$  são os valores  $(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$  que minimizam  $S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$  e a estimativa de  $\sigma^2$  é  $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{TN}$ .

Esse procedimento é também equivalente a achar os valores  $(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$  que minimizam  $tr(\mathbf{M})$ , em que  $M = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}(t)\hat{\epsilon}'(t)}{T}$ .

Se o pressuposto de esfericidade de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , não for atendido, na parte de diagnóstico e  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , deve-se obter os valores dos parâmetros que minimizam  $|\mathbf{M}|$ . Para maiores detalhes, ver Deutsch e Pfeifer (1981).

O modelo STAR tem a forma linear, podendo ser escrito na forma  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$ , e se baseando na teoria de regressão linear, as estimativas de seus parâmetros podem ser calculadas facilmente. Os intervalos de confiança para as estimativas dos parâmetros do modelo STAR podem ser calculadas utilizando:

$$\frac{(\Phi - \hat{\Phi})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\Phi - \hat{\Phi})}{\frac{KS_*(\hat{\Phi})}{TN-K}} \sim F_{(K, TN-K)}$$

em que  $K$  é o número de parâmetros do modelo. Note que esse cálculo do intervalo de confiança é resultado da teoria de regressão linear, mas, deve-se destacar que as variáveis explicativas, nesse caso, não seguem a suposição de independência. “A matriz  $\mathbf{X}$  é estocástica, em vez de fixo em amostras repetidas” (PFEIFER; DEUTSCH 1980a). Mas, utiliza-se o resultado da regressão linear para o modelo STAR, pois essa estimativa é aproximada, segundo Pfeifer e Deutsch (1980a).

Para os modelos STMA e STARMA, que são não lineares, as estimativas dos parâmetros não são tão simples de serem calculadas, pois deve-se utilizar técnicas de otimização não linear.

Como os modelos STMA e STARMA são não lineares, o cálculo dos intervalos de confiança dos parâmetros é mais complicado de determinar. Isso se deve ao fato de que a soma de quadrados  $S(\Phi, \Theta)$  e correspondentemente a função de verossimilhança não ser

simétrica, o que não resulta em uma expressão algébrica definida para um intervalo de confiança exata.

Segundo Pfeifer e Deutsch (1980a), para contornar esse problema, utiliza-se uma função de verossimilhança aproximada, que resulta em uma região de confiança aproximada. Essa aproximação parte de fazer uma expansão, em séries de Taylor, da soma de quadrados  $S(\Phi, \Theta)$  sobre as estimativas de mínimos quadrados.

$$S(\Phi, \Theta) = S(\delta_*) \approx S(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})' \mathbf{Q} (\delta - \hat{\delta})$$

em que  $\delta' = (\Phi', \Theta')$  e  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 S(\delta)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right]_{\hat{\delta}}$ , para  $i=1,2,\dots,K$ ,  $j=1,2,\dots,K$ , sendo  $K$  a dimensão de  $\delta$ , ou o número de parâmetros.

Sabe-se que

$$S(\delta) = \sum_{t=1}^T \epsilon(t)' \epsilon(t)$$

portanto,

$$\frac{\partial S(\delta)}{\partial \delta_i} = \sum_{t=1}^{TN} 2\epsilon(t)' \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \delta_i} \Big|_{\hat{\delta}} = 0$$

e

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 S(\delta)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right]_{\hat{\delta}} = \sum_{t=1}^T \epsilon(t)' \frac{\partial^2 \epsilon(t)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \Big|_{\hat{\delta}} + \sum_{t=1}^T \frac{\partial \epsilon(t)'}{\partial \delta_i} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \delta_j} \Big|_{\hat{\delta}}$$

Como  $\frac{\partial^2 \epsilon(t)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \Big|_{\hat{\delta}}$  é uma função de  $\epsilon$  ocorridos antes do tempo  $T$  e espera-se que  $E[\epsilon(t)\epsilon(t-k)'] = 0$ , para  $k \geq 1$ , então a matriz  $\mathbf{Q}$  pode ser escrita como  $\mathbf{Q} = X'X$ , em que

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon(1)}{\partial \delta_1} \Big|_{\hat{\delta}} & \frac{\partial \epsilon(1)}{\partial \delta_2} \Big|_{\hat{\delta}} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(1)}{\partial \delta_k} \Big|_{\hat{\delta}} \\ \frac{\partial \epsilon(2)}{\partial \delta_1} \Big|_{\hat{\delta}} & \frac{\partial \epsilon(2)}{\partial \delta_2} \Big|_{\hat{\delta}} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(2)}{\partial \delta_k} \Big|_{\hat{\delta}} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon(T)}{\partial \delta_1} \Big|_{\hat{\delta}} & \frac{\partial \epsilon(T)}{\partial \delta_2} \Big|_{\hat{\delta}} & \cdots & \frac{\partial \epsilon(T)}{\partial \delta_k} \Big|_{\hat{\delta}} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a soma de quadrados é aproximada por:

$$S(\delta) \approx S(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})' \mathbf{Q} (\delta - \hat{\delta}). \quad (3.14)$$

e o intervalo com  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança para  $[\Phi, \Theta]' = \delta$  é obtido por:

$$S(\delta) = S(\hat{\delta}) + \frac{k}{TN - K} S(\hat{\delta}) F_{K, TN-K, \alpha} \quad (3.15)$$

em que  $F_{K, TN-k, \alpha}$  são os valores da distribuição F com K e TN-K graus de liberdade. A matriz  $\mathbf{Q}$  deve ser estimada numericamente e  $S(\boldsymbol{\delta})$  deve ser substituída pela soma de quadrados condicional  $S_*(\boldsymbol{\delta})$  quando a função de verossimilhança condicional é usada.

Segundo Rao e Antunes (2004), o intervalo de confiança para  $\sigma^2$  é calculado usando

$$\frac{S_*(\boldsymbol{\delta})}{(\sigma^2 | \mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(T))} \sim \chi_{TN-K}^2.$$

Todo o processo de estimação se realiza quando considerarem conhecidas as ordem  $(p, q, \lambda_p, m_q)$  do modelo a ser estimado e ainda assumindo o modelo STARMA ser estacionário e invertível. Para determinar a melhor ordem do modelo, utiliza-se o critério de informação bayesiano, e para modelos multivariados tem a forma  $\ln(|\hat{\mathbf{G}}|) + m \frac{\ln(T)}{T}$ , em que,  $m$  é o número de parâmetros e  $\hat{\mathbf{G}}$  é a estimativa da matriz de covariância residual. Para o modelo STARMA, Rao e Antunes (2004) mostraram que a ideia é escolher as ordens  $p$  e  $q$  que minimizam  $NT \ln(\hat{\sigma}^2) + 2(p+q) \ln(T)$ , sendo  $\hat{\sigma}^2$  a estimativa da variância residual.

### 3.2.3 Diagnóstico

O objetivo da fase de diagnóstico é determinar se os resíduos estão de acordo com os pressupostos do modelo. Se o modelo ajustado for adequado, os resíduos devem ser ruído branco, isto é, devem ser independentes com distribuição normal multivariada com média zero e matriz de variância e covariância igual a  $\sigma^2 \mathbf{I}$ .

Para testar se os resíduos são independentes, basta calcular a função de autocorrelação espaço-temporal amostral e testar se alguns dos valores estimados são diferentes de zero. Para isto, calcula-se o intervalo de confiança para a STACF e Pfeifer e Deutsch (1981a) indicam utilizar

$$\text{var}(\hat{\rho}_{10}(s)) \approx \frac{1}{N(T-s)},$$

em que  $\hat{\rho}_{10}(s)$  é a função de autocorrelação espaço-temporal do resíduo do modelo ajustado. Se os resíduos não são independentes, o termo dependente é identificado e o modelo é atualizado. Se o teste sobre a esfericidade de  $\mathbf{G}$  for significativo e,  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , a variância da função de autocorrelação espaço-temporal também é recalculada, e é dada por :

$$\text{var}(\hat{\rho}_{10}(s)) \approx \frac{1}{(T-s)} \frac{\text{tr} [\mathbf{W}'_l \mathbf{G} \mathbf{W}_l \mathbf{G}]}{\text{tr} [\mathbf{G}] \text{tr} [\mathbf{W}'_l \mathbf{W}_l \mathbf{G}]}.$$

Para saber se  $\mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , os resíduos também devem seguir as pressuposições

$$E[\boldsymbol{\epsilon}(t)\boldsymbol{\epsilon}(t+s)'] = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{I}_N & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

Este pressuposto deve ser testado e, Pfeifer e Deutsch (1980d) indicam como fazer este teste. Caso não seja cumprido, um modelo diferente deve ser usado, considerando uma forma mais geral da matriz, apresentado por Deutsch e Pfeifer (1981). Se, durante o diagnóstico,  $\mathbf{G}$ , é considerado apropriado, então o modelo ajustado é considerado apropriado. Se for inapropriado a condição sobre a esfericidade de  $\mathbf{G}$ , o procedimento de modelagem requer uma re-identificação do modelo candidato STARMA e que sejam seguidos os procedimentos dos três estágios, com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , para o ajuste do modelo.

O procedimento do teste quanto a  $\mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}$  foi mostrado por Pfeifer e Deutsch (1980c) e, para realizá-lo, define-se que:

$$\mathbf{M} = \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t)\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'(t)}{T}$$

e é testado se  $\mathbf{M} = \mathbf{G}$  é uma matriz diagonal. Define-se também  $v = \frac{|\mathbf{M}|}{\prod_{i=1}^N M_{ii}}$  e tem-se uma aproximação da estatística  $H = -m \ln(v)$  que segue uma distribuição  $\chi^2$  com  $f = \frac{N(N-1)}{2}$  graus de liberdade, em que,  $m = T - \frac{(2N+11)}{6}$ . Rejeitando-se a hipótese nula de  $\mathbf{G} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , o procedimento de ajuste de um modelo STARMA volta para a parte inicial de identificação, agora com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ .

Os vetores de parâmetros estimados devem ser testados se  $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0}$ , e são utilizados os intervalos de confiança de cada parâmetro. Pode-se também testar se um particular  $\phi_{kl}$  ou  $\theta_{kl}$  é igual a zero e, para isso, deve-se fixar os outros parâmetros sem interesse de teste. Para este, tem-se que  $\hat{\boldsymbol{\delta}}$  é a estimativa de mínimos quadrados do vetor de parâmetros completo, e  $\hat{\boldsymbol{\delta}}^*$  a estimativa de mínimos quadrados do vetor de parâmetros com  $\delta_k$  igual a zero. Portanto, a hipótese a ser testada é se  $\delta_k = 0$ , utilizando-se a estatística

$$\frac{(TN - K) [S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}}^*) - S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}})]}{S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}})} \sim F_{1, TN-K}. \quad (3.16)$$

Caso algum parâmetro estimado seja estatisticamente igual a zero, deve-se removê-lo do modelo, e um modelo mais simples será considerado como um novo modelo

candidato, voltando à fase de estimação.

O ciclo iterativo é feito nos três estágios de modelagem, identificação, estimação e diagnóstico, até determinar um modelo que seja aprovado na fase de diagnóstico, isto é, até que os resíduos sejam considerados ruído branco e todos os parâmetros sejam significativos.

### 3.2.4 Previsões

Até o momento, foi vista a metodologia de construção de um particular modelo sazonal STARIMA( $p_\lambda, d, q_m$ )  $\times$  ( $P_\Lambda, D, Q_M$ ) $_S$ , que segue o ciclo iterativo de identificação, estimação e diagnóstico. Porém, há alguns casos em que se deseja utilizar o modelo identificado e estimado para fazer previsões, ou seja, prever valores  $\mathbf{z}(t+h)$ ,  $h \geq 1$ , utilizando-se as observações ...,  $\mathbf{z}(t-2)$ ,  $\mathbf{z}(t-1)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ , até o instante  $t$ , que é chamado origem das previsões, conforme apresentado por Morettin e Tolo (2006) para os modelos de séries temporais ARIMA.

Para realizar previsões, serão denotadas as previsões de origem  $t$  e horizonte  $h$  por  $\hat{\mathbf{z}}_t(h)$  e assumir que  $\mathbf{z}(t)$  é estacionário e invertível, logo, deseja-se obter:

$$\hat{\mathbf{z}}_t(h) = E[\mathbf{z}(t+h) | \mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t-1), \dots]. \quad (3.17)$$

Para um modelo STARMA( $p_{\lambda_p}, q_{m_q}$ ), utilizando-se a Equação (3.2), as previsões de origem  $t$  e horizonte  $h$  são dadas por:

$$\hat{\mathbf{z}}_t(h) = E \left[ \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \hat{\phi}_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t+h-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \hat{\theta}_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t+h-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t+h) \right] \quad (3.18)$$

e deve-se levar em conta que:

$$E[\mathbf{z}(t+k)] = \hat{\mathbf{z}}_t(k), \quad k > 0,$$

$$E[\mathbf{z}(t+k)] = \mathbf{z}(t+k), \quad k \leq 0,$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}(t+k)] = \mathbf{0}, \quad k > 0,$$

$$E[\boldsymbol{\epsilon}(t+k)] = \boldsymbol{\epsilon}(t+k), \quad k \leq 0,$$

em que  $\epsilon(t+k) = \mathbf{z}(t+k) - \hat{\mathbf{z}}(t+k)$ .

### 3.3 Descrições dos Dados

O conjunto de dados utilizado neste trabalho foi fornecido pelo grupo GESER - Gestão de Seguros e Riscos, da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”. Esses dados são séries temporais de médias mensais de temperaturas mínimas diárias, coletadas em 17 estações de uma mesorregião localizada no Oeste do Estado do Paraná. Cada estação é composta por 147 médias mensais de temperaturas mínimas diárias, nas quais foram computadas desde fevereiro de 2000 até abril de 2012.

Como as estações estão distribuídas de forma aleatória, os locais das amostras formam um grade irregular. Com isso, a forma para determinar a ordem de vizinhos espaciais difere da apresentada na Figura 2.1. Nesse caso, no método de contiguidade espacial, fica a cargo do pesquisador como determinar as ordens dos vizinhos, e, então, utiliza-se a Equação (3.3) para o cálculo da matriz de pesos. Deve-se também utilizar outros métodos para o cálculo da dependência espacial, e, então, optar pelo método que apresentar melhores resultados. Neste trabalho é utilizado também o método da potência negativa da distância, como apresentado na Equação (3.4), com  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 5$ .

Por meio desse conjunto de dados, tem-se o objetivo de determinar a melhor forma de obter as ordens e pesos de vizinhos espaciais, realizar o ajuste de um modelo STARMA e obter previsões até o horizonte 6 para as médias mensais das temperaturas mínimas diárias.

### 3.4 Resultados e Discussões

Inicialmente, é apresentada a análise exploratória dos dados, mostrando a área de estudo para determinar a ordem dos vizinhos espaciais. É mostrada na Figura 3.2, a localização das estações meteorológicas, e observa-se um grade irregular, que dificulta a determinação da ordem dos vizinhos espaciais.

Para escolha da matriz de pesos espaciais, foram utilizados dois diferentes métodos, contiguidade espacial e potência negativa da distância euclidiana, apresentados nas Equações (3.3) e (3.4). Para utilizar o método da contiguidade espacial, Equação (3.3), devem-se determinar as ordens de vizinhança para cada estação, como apresentado na

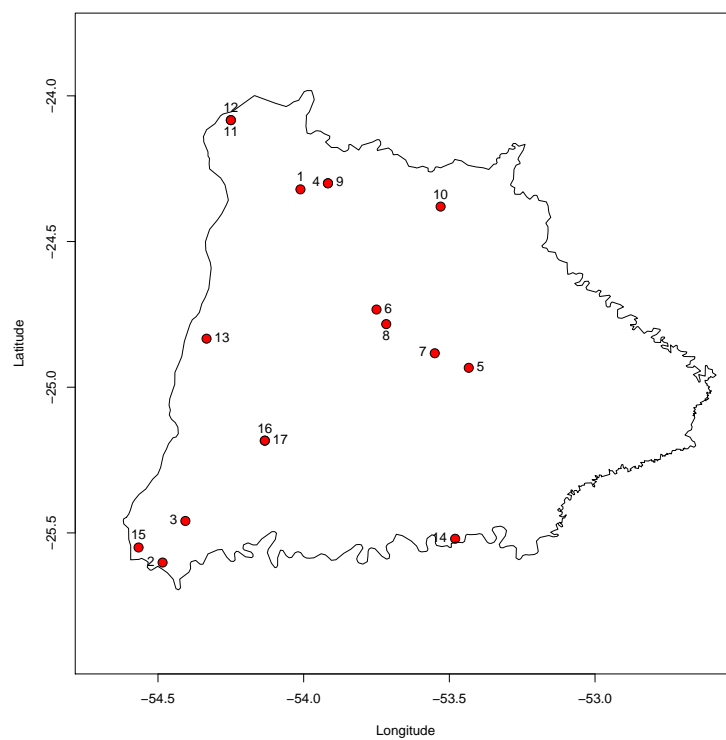


Figura 3.2 - Localização geográfica das estações meteorológicas localizadas no Oeste do Estado do Paraná

Tabela 3.2. A escolha aqui foi visual, e, com estes resultados, calculam-se as matrizes de pesos espaciais até a terceira ordem pela Equação (3.3).

Tabela 3.2 - Estações meteorológicas e suas respectivas ordens de vizinhanças

Estações	Ordem espacial		
	1	2	3
1	4 e 9	11 e 12	10
2	3 e 15	—	16 e 17
3	2	15,16 e 17	—
4	1 e 9	—	10, 11 e 12
5	7	—	6, 8 e 14
6	8	7	5,10,13,16 e 17
7	5	6 e 8	—
8	6	7	5, 10 e 13
9	1 e 4	—	10, 11 e 12
10	—	—	1, 4, 6, 8 e 9
11	12	1	4 e 9
12	11	1	4 e 9
13	—	16 e 17	6 e 8
14	—	—	5
15	2	3	16 e 17
16	17	3 e 13	2, 6, 8 e 15
17	16	3 e 13	2, 6, 8 e 15

Para o método da potência negativa da distância, deve-se determinar a distância de cada estação, e, então, utilizar a Equação (3.4) para determinar a matriz de pesos espaciais.

Como o método do inverso da distância representou melhor a dependência espacial, verificada após as análises na etapa de seleção de modelos que utilizou o critério de informação bayesiano (BIC), serão apresentados os resultados apenas deste método.

Dando continuidade às análises, podem-se observar, por meio da Figura 3.3, as 17 séries temporais referentes a cada estação. Nesta Figura 3.3, observa-se que as séries apresentam estacionariedade, o que é comprovada pelo teste de Dickey Fuller<sup>1</sup> e variância constante. Aparentemente, também se observa que os dados apresentam sazonalidade.

<sup>1</sup>Teste utilizado para determinar se o polinômio autorregressivo apresenta uma raiz sobre o círculo unitário, ou seja, se o processo apresenta ser estacionário. Para maiores detalhes ver Morettin e Tolo (2006).



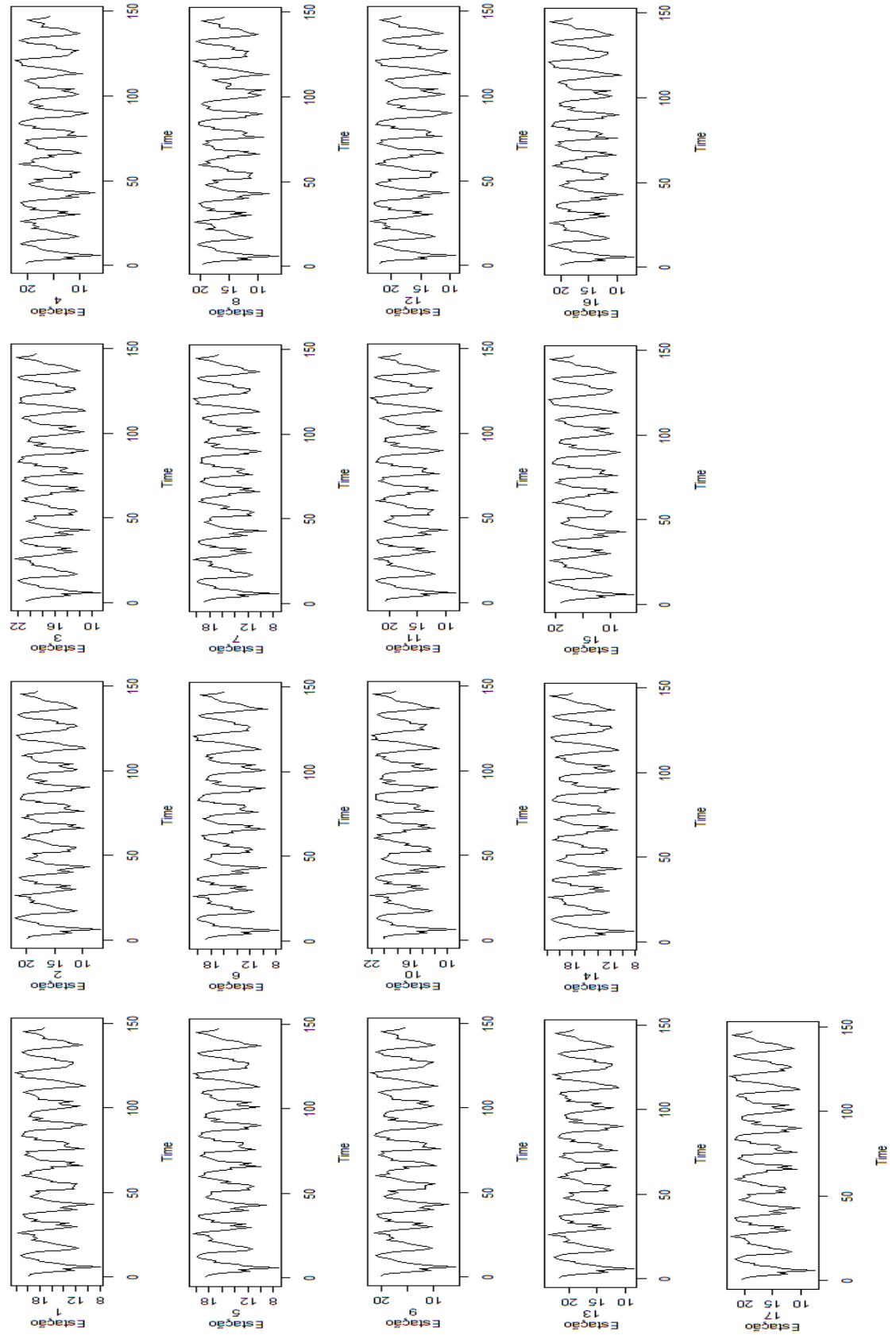


Figura 3.3 - Séries temporais das médias mensais das temperaturas mínimas diárias observadas nas 17 estações meteorológicas

A característica senoidal apresentada pela função de autocorrelação espaço-temporal (STACF), na Figura 3.4, comprova que os dados apresentam sazonalidade. Nota-se que os lags sazonais são de ordem 12, e, para eliminar esta sazonalidade, deve-se fazer uma diferença sazonal. Considerando-se  $z_i(t)$  como os dados originais em cada local  $i$ , as séries com as diferenças sazonais serão determinadas como  $x_i(t) = z_i(t) - z_i(t - 12)$ . Ao realizar essa diferença, cada local terá uma nova série temporal com 12 observações a menos, totalizando 135 observações, ilustrada na Figura 3.5.

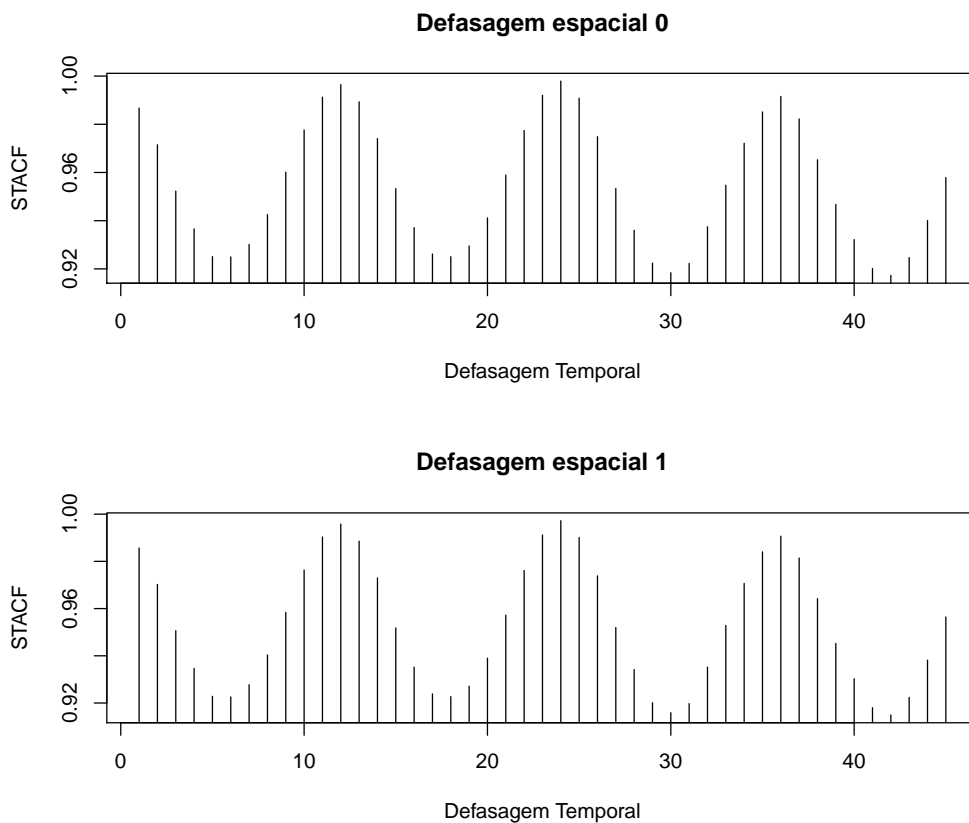


Figura 3.4- Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordem espaciais

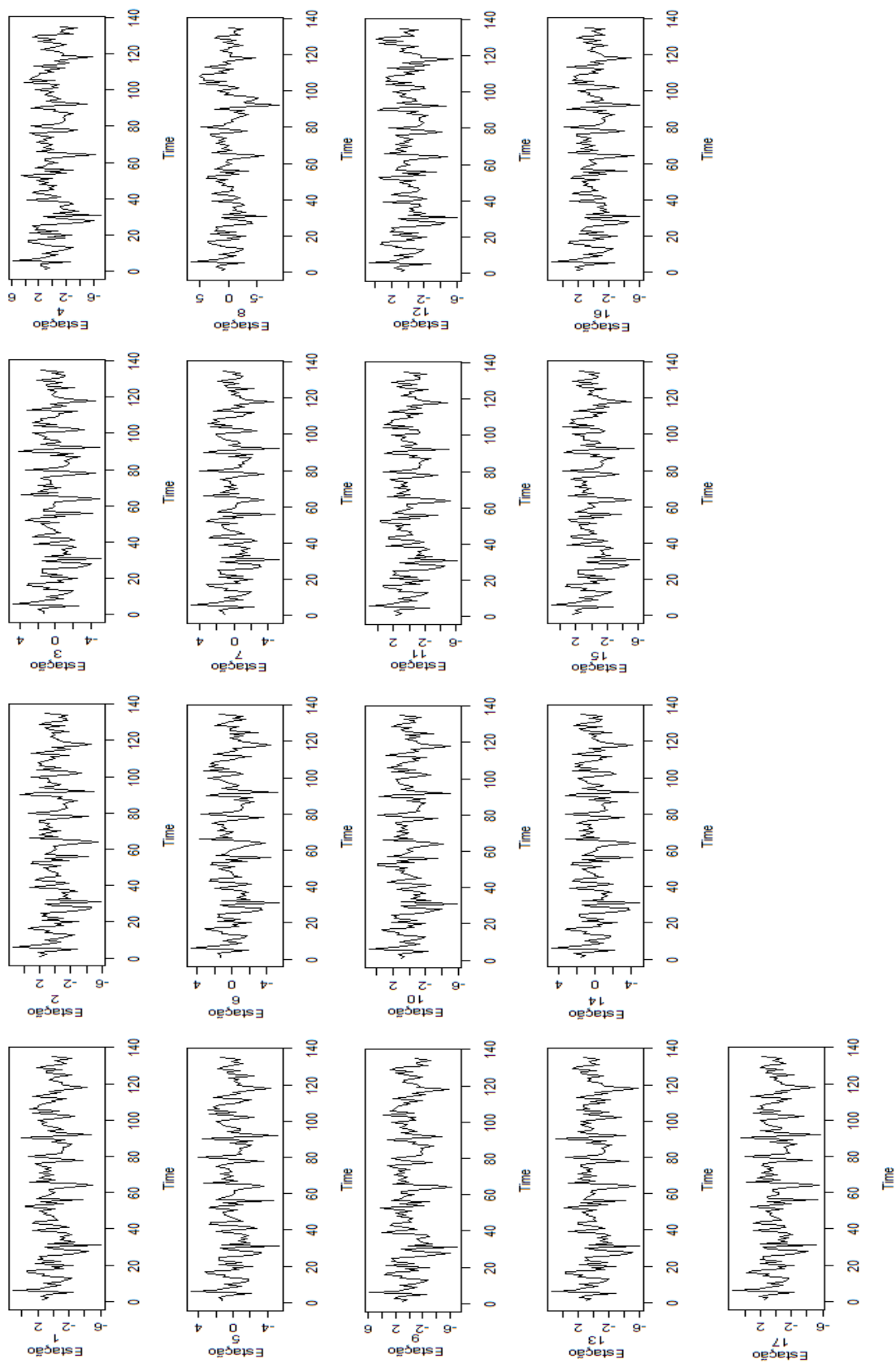


Figura 3.5 - Séries temporais das 17 estações com uma diferença sazonal

Ao inspecionar a função de autocorrelação espaço-temporal (STACF) e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (STPACF), apresentadas nas Figuras 3.6 e 3.7, das séries com uma diferença sazonal, é visto que um modelo STARIMA sazonal poderá ser apropriado. Pelas STACF, nota-se que os lags 1 e 12 apresentam valores significativos, ou seja,  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{11}$  e  $\Theta_{10}$ . Pela STPACF, nota-se que os lags 1 e 12 apresentam valores significativos, ou seja,  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  e  $\Phi_{10}$ .

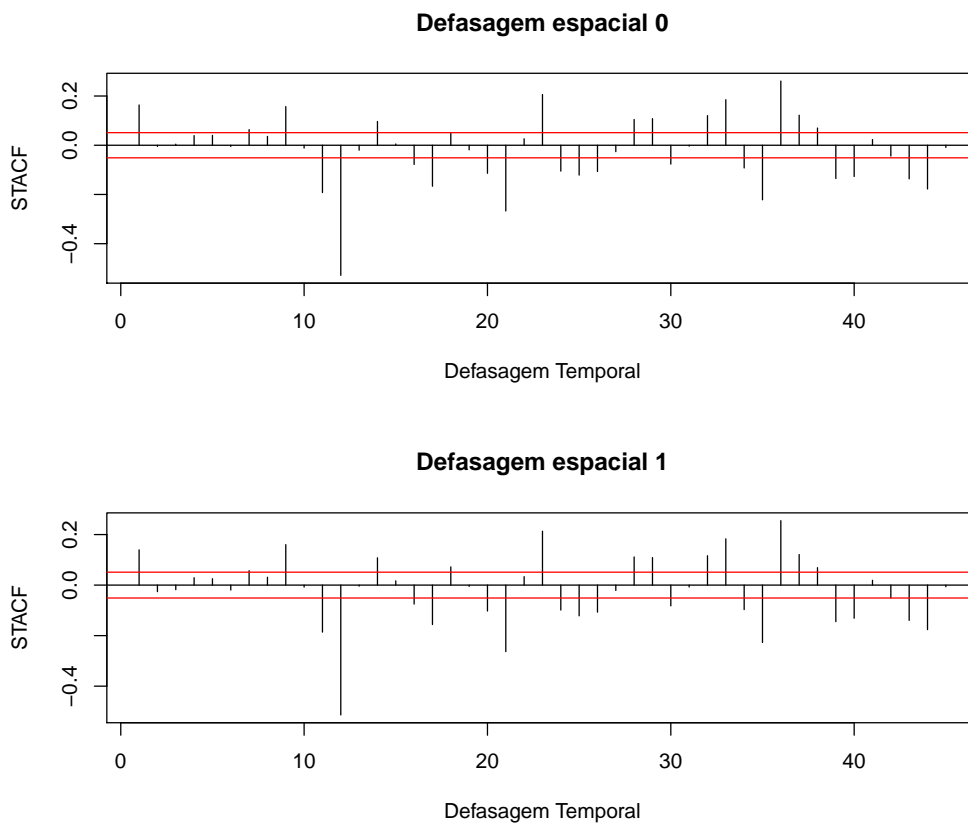


Figura 3.6 - Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal

Com base nessa visualização, escolhe-se um modelo candidato, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = \phi_{10}\mathbf{x}(t-1) + \phi_{11}\mathbf{W}^{(1)}\mathbf{x}(t-1) + \Phi_{10}\mathbf{x}(t-12) - \theta_{10}\boldsymbol{\epsilon}(t-1) - \theta_{11}\mathbf{W}^{(1)}\boldsymbol{\epsilon}(t-1) - \Theta_{10}\boldsymbol{\epsilon}(t-12) + \boldsymbol{\epsilon}(t),$$

o modelo candidato é o STARIMA(1<sub>1</sub>, 0, 1<sub>1</sub>) × (1, 1, 1)<sub>12</sub> Sazonal. Nota-se que, mesmo apresentando alguns termos significativos em ambos STACF e STPACF, esses não são adicionados no modelo candidato, pois parte-se de um modelo mais simples, acreditando-se que este possa controlar os outros termos significativos apresentados nas Figuras 3.6 e

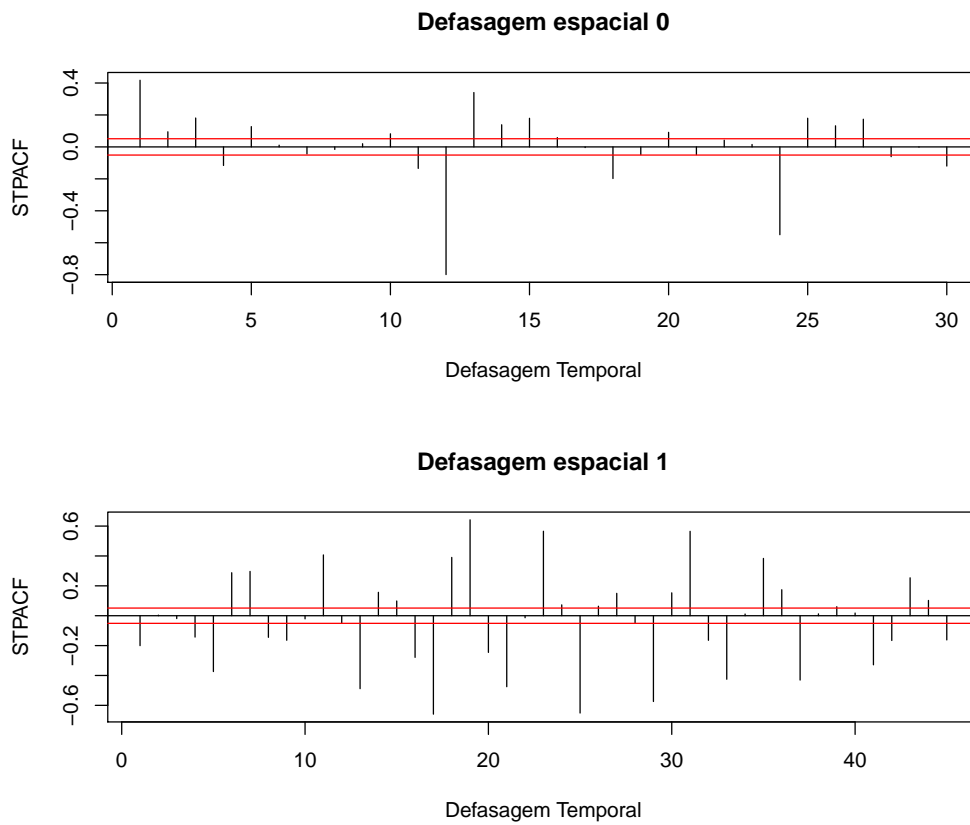


Figura 3.7 - Função de autocorrelação parcial espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal

3.7 que não estão no modelo candidato.

O procedimento para as estimativas dos parâmetros do modelo foi descrito na seção 3.2.2 e é aplicado quando se assume que os erros  $\epsilon$  são normalmente distribuídos com média zero e matriz de variâncias e covariâncias igual a  $\sigma^2\mathbf{I}$ , obtendo-se as estimativas dos parâmetros do modelo candidato:  $\phi_{10} = 0,5770$ ,  $\phi_{11} = -0,4080$ ,  $\theta_{10} = 0,1404$ ,  $\theta_{11} = -0,0818$ ,  $\Phi_{10} = -0,0852$  e  $\Theta_{10} = 0,7126$ .

Ao verificar se os parâmetros são significativos, pelo teste de hipótese descrito em (3.16), conclui-se que o termo  $\theta_{11}$  é não significativo, com o valor do teste igual a 1,036 e o valor tabelado igual a  $F_{0,95;1;2289} = 3,8455$ . Portanto, retira-se o parâmetro  $\theta_{11}$  do modelo. Tem-se, então, um novo modelo STARIMA(1<sub>1</sub>, 0, 1)  $\times$  (1, 1, 1)<sub>12</sub> sazonal, e as estimativas dos parâmetros são iguais a:  $\phi_{10} = 0,5221$ ,  $\phi_{11} = -0,3514$ ,  $\theta_{10} = 0,0599$ ,  $\Phi_{10} = -0,0870$  e  $\Theta_{10} = 0,7121$ .

Pelo critério de informação bayesiano, esse foi o modelo que melhor se ajustou aos dados, com o valor 2153,778. Todos os parâmetros desse modelo são significativos diante dos testes realizados. Para o mesmo modelo, porém utilizando os pesos espaciais determinado pela equação (3.3), o valor do BIC é 2167,948, o que confirma que utilizar o inverso da distância euclidiana apresenta melhores resultados para este conjunto de dados.

O teste sobre a esfericidade de  $\mathbf{G}$ , matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos, é realizado e é possível constatar que esta matriz não é diagonal, o valor do teste é igual a  $H=7242,119$  e o valor tabelado é  $\chi_{0,95;136}^2 = 164,22$ . Com isso, as STACF e STPACF devem ser recalculadas e, conseqüentemente, volta-se à parte inicial de identificar um modelo candidato, seguir as etapas de estimativas dos parâmetros considerando-se  $\mathbf{G} \neq \sigma^2\mathbf{I}_N$ , e, então, os diagnósticos.

Na Figura 3.8, é apresentada a STACF com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2\mathbf{I}_N$  e constata-se que os lags 1 e 12, na defasagem espacial 0, são significativos, ou seja, os termos  $\theta_{10}$  e  $\Theta_{10}$ .

Na Figura 3.9, é apresentada a STPACF com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2\mathbf{I}_N$  e constata-se que os lags 1 e 12, na defasagem espacial 0, são significativos e, na defasagem espacial 1, o lag 1 é significativo, ou seja, os termos  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{11}$  e  $\Phi_{10}$ . Note que é o mesmo modelo selecionado anteriormente, STARIMA(1<sub>1</sub>, 0, 1)  $\times$  (1, 1, 1)<sub>12</sub> sazonal.

Re-estimando os parâmetros do modelo, com  $\mathbf{G}$  não diagonal, as estimativas são:

$$\phi_{10} = 0,6104, \quad \phi_{11} = -0,0306, \quad \theta_{10} = 0,0828, \quad \Phi_{10} = 0,0670 \quad \text{e} \quad \Theta_{10} = 0,7731. \quad (3.19)$$

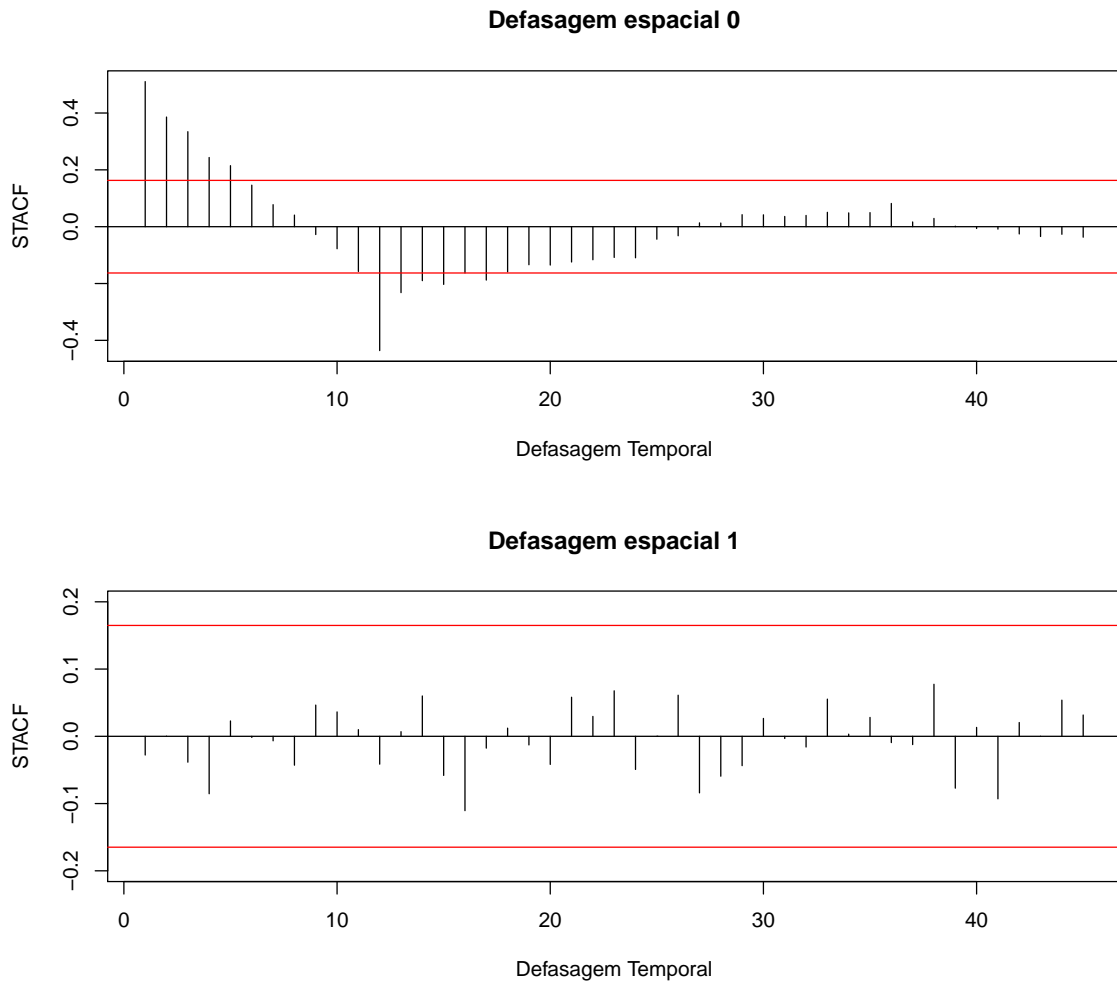


Figura 3.8 - Função de autocorrelação espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$

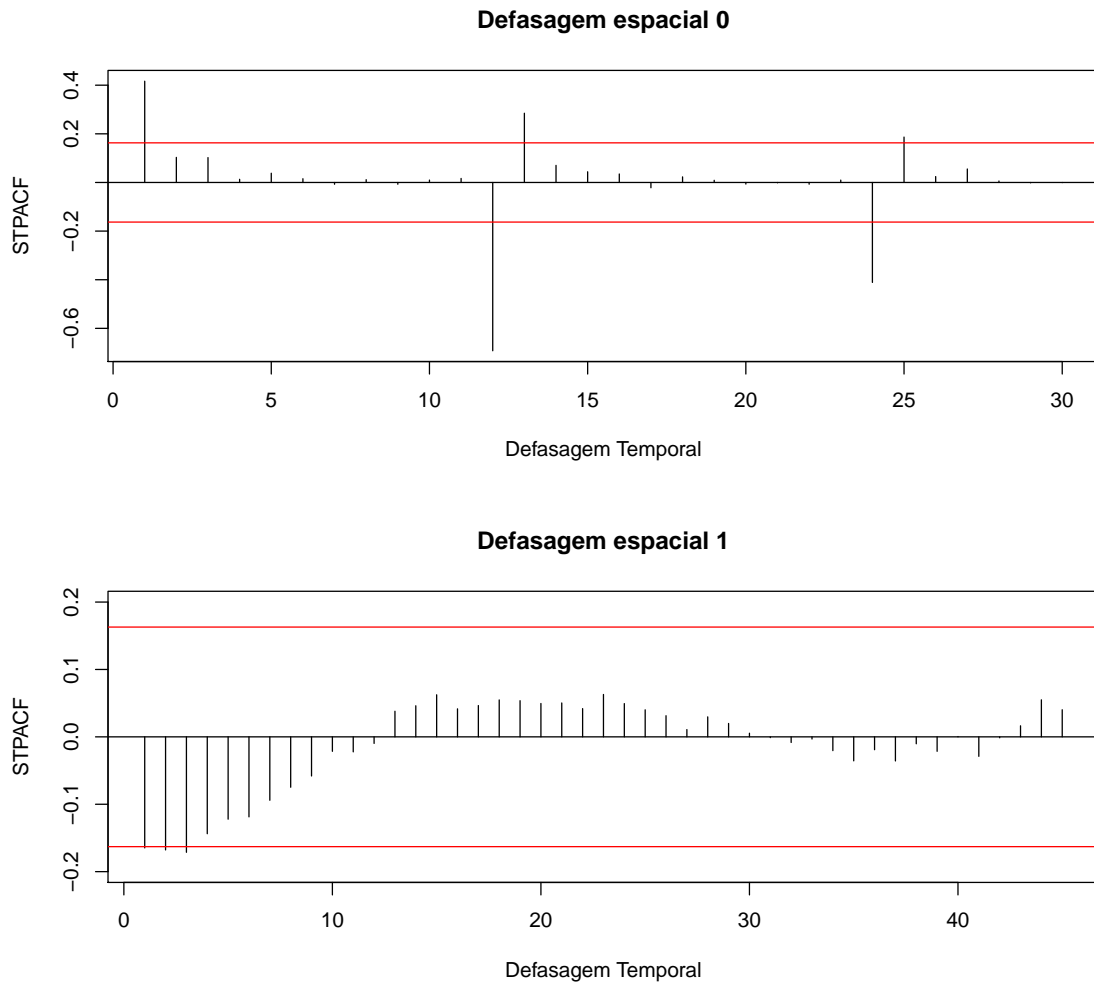


Figura 3.9 - Função de autocorrelação parcial espaço-temporal para diferentes ordens espaciais das séries com uma diferença sazonal com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$



A função de autocorrelação STACF dos resíduos, utilizando  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ , é apresentada na Figura 3.10, e indica que, por não estar correlacionado, o pressuposto dos erros é satisfeito. Contudo, após todas as etapas para o ajuste de um modelo espaço-temporal, concluí-se que o melhor modelo ajustado é o STARIMA(1<sub>1</sub>, 0, 1) × (1, 1, 1)<sub>12</sub> com  $\mathbf{G} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$  com as estimativas dos parâmetros apresentado em (3.19).

Os resultados obtidos neste trabalho se assemelham aos encontrados por Rao e Antunes (2004), em que, não há esfericidade de  $\mathbf{G}$  e os processos apresentam sazonalidade. Cabe lembrar que, no presente trabalho, buscou-se o melhor modelo com o uso do critério de informação bayesiano (BIC), porém, levou-se em consideração a significância dos parâmetros ajustados. Além disso, foram utilizadas diferentes formas para determinar os pesos espaciais, e a que apresentou melhores resultados foi com o uso do inverso da distância euclidiana.

Caso algum termo não seja controlado na fase de diagnóstico, o modelo é atualizado nessa fase de identificação, indicando outro modelo. É importante ressaltar que vários modelos podem adequar-se aos dados, e, pelo critério de informação bayesiano, o pesquisador deve escolher o melhor modelo, não se esquecendo de utilizar o modelo mais parcimonioso.

Após determinar o melhor modelo ajustado, pode-se utilizá-lo para fazer previsões de um horizonte  $h$ . Para este trabalho, são realizadas as previsões que utilizam os horizontes de 1 à 6, por uma escolha arbitrária, e estão apresentadas na Tabela 3.3, indicando cada local e os horizontes. Também são apresentadas na Figura 3.11 as 17 séries temporais e suas previsões.

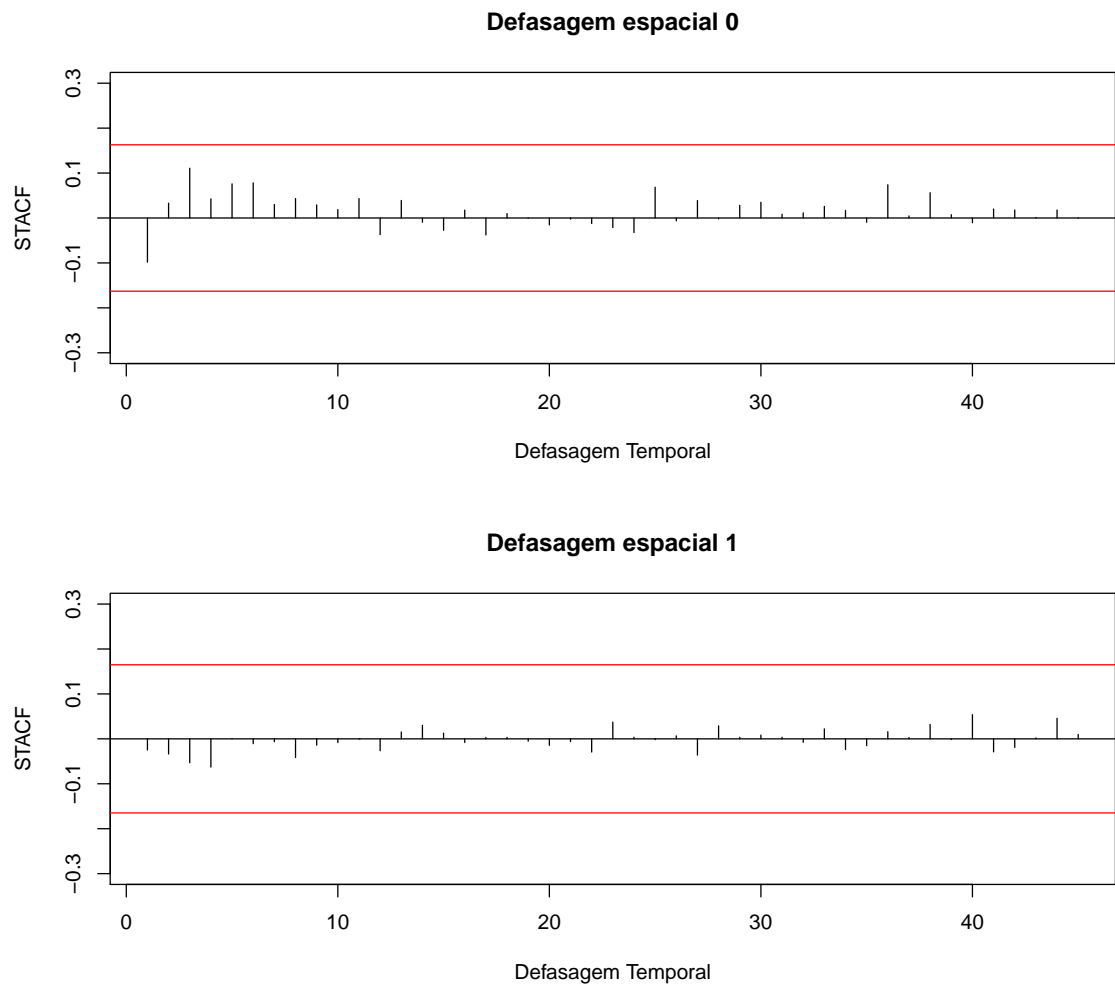


Figura 3.10 - Função de autocorrelação espaço-temporal do resíduos para diferentes ordens espaciais

Tabela 3.3 - Previsões de temperaturas médias mínimas mensais de uma mesorregião localizada ao oeste do Estado do Paraná, utilizando o modelo sazonal  $\text{STARIMA}(1_1, 0, 1) \times (1, 1, 1)_{12}$

Estações	Horizonte $h$					
	1	2	3	4	5	6
1	13,59	14,38	11,68	12,11	15,59	15,36
2	13,40	14,03	10,85	11,28	15,02	14,72
3	14,12	15,59	12,32	12,77	15,78	15,78
4	12,34	12,70	10,54	9,30	14,23	14,09
5	12,43	13,99	11,44	11,69	14,48	14,28
6	12,60	14,26	11,68	12,22	14,45	14,35
7	12,38	13,97	11,28	11,39	14,43	14,37
8	12,04	13,43	11,56	10,91	14,62	14,06
9	12,07	12,39	10,37	9,28	14,15	14,11
10	13,96	15,97	13,26	13,08	15,88	15,92
11	14,21	14,75	12,40	11,76	16,28	15,93
12	13,45	13,74	10,29	9,67	14,65	14,31
13	14,21	14,74	11,83	12,25	15,81	15,37
14	13,48	14,50	11,32	11,54	15,36	14,77
15	12,13	12,28	9,54	9,36	13,75	13,66
16	13,44	13,93	11,03	11,21	15,02	14,96
17	13,48	15,17	11,42	12,38	15,44	15,61



Figura 3.11 - Séries temporais das médias mensais das temperaturas mínimas diárias observadas nas 17 estações meteorológicas e previsões a um horizonte 6

### 3.5 Conclusões

Com base nos resultados apresentados do ajuste do modelo autorregressivo integrado e de médias móveis espaço-temporal utilizando a matriz de pesos espaciais calculada pelo método do inverso da distância euclidiana, conclui-se que estes modelos são uma ferramenta alternativa de previsão.

Desta maneira, a classe de modelos STARMA é indicada como um importante método de modelagem para pesquisadores da área de climatologia, economia, entre outros, uma vez que estes modelos captam a dependência espacial, temporal e sazonal. Ademais, sugere-se o modelo STARMA como uma metodologia alternativa para instituições e/ou empresas que necessitem realizar previsões baseadas em processos que tenham dependência espacial e/ou temporal.

Para pesquisas futuras podem ser consideradas matrizes de dependência espacial que melhor descrevam os processos climáticos, por exemplo, determinar a(s) matriz(es) de pesos espaciais por meio de matriz de similaridade.

### Referências

- BOROVKOVA, S.; LOPUHAÄ, H.P.; RUCHJANA, B. N. Consistency and asymptotic normality of least squares estimators in generalized STAR models. **Statistica Neerlandica**, Malden, v. 62, p. 482-508, 2008.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. São Francisco: Holden-Day, 1970. 537 p.
- CARGNELUTTI, A.; MALUF, J. R. T.; MATZENAUER, R. Coordenadas geográficas na estimativa das temperaturas máxima e média decendiais do ar no Estado do Rio Grande do Sul. **Ciências Rural**, Santa Maria, v. 38, p. 2448-2456, 2008.
- CHECHI, L.; BAYER, F. M. Modelos univariados de séries temporais para previsão das temperaturas médias mensais de Erechim, RS. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 16, n. 12, p. 1321-1329, 2012.
- CLIFF, A. D.; HAGGETT, P.; ORD, J. K.; BASSETT, K. A.; DAVIES, R. B. **Elements of spatial structure: A quantitative approach**. Nova York: Cambridge University Press, 1975.
- CLIFF, A. D.; ORD, J. K. Space-time modelling with an application to regional forecasting. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, n. 64, p. 119-128, mar. 1975.
- DEUTSCH, S. J.; PFEIFER, P. E. Space-Time ARMA Modeling with Contemporaneously Correlated Innovations. **Technometrics**, Nova York, v. 23, n. 4, p. 401-409, 1981.

- DING, Q.; WANG, X.; ZHANG, X.; SUN, Z. Forecasting Traffic Volume with Space-Time ARIMA Model. **Advanced Materials Research**, Switzerland, v. 156-157, p. 979-983, 2011.
- GIACINTO, V. d. A Generalized space-time ARMA model with an application to regional unemployment analysis in Italy. **International Regional Science Review**, Londres, v. 29, p. 159-198, 2006.
- KAMARIANAKIS, Y. I.; PRASTACOS, P. P. Space-Time Modeling of Traffic Flow. **Computer e Geosciences**, Hellas, v. 31, p. 119-133, 2005.
- LIN, S.L.; HUANG, H.Q.; ZHU, D.Q.; WANG, T.Z. The application of Space-Time ARIMA model on traffic flow forecasting. In: PROCEEDINGS OF THE EIGHTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, Baoding, 2009, **Resumo...** Baoding, 2009. p. 3408-3412.
- MARTIN, R.L.; OEPPEN, J.E. The identification of regional forecasting models using space-time correlation functions. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, n. 66, p. 95-118, 1975.
- MEDEIROS, S. S.; CECÍLIO, R. A.; MELO JUNIOR, J. C. F.; SILVA JUNIOR, J. L. C. Estimativa e espacialização das temperaturas do ar mínimas, médias e máximas na Região Nordeste do Brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 9, n. 2, p. 247-255, 2005.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, **Análise de séries temporais**. São Paulo: Blucher; 2006. 538 p.
- MONROY, N. A. J. **Modelo ARFIMA Espaço-Temporal em Estudos de Poluição do Ar**. 2013. p. 80. Tese (Doutorado em Engenharia Ambiental)-Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A Three-Stage Iterative Procedure fo Space-Time Modeling. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 1, p. 35-47, 1980a.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Identification and Interpretation of First Order Space-Time ARMA Models. **Technometrics**, Nova York, v. 22, n. 3, p. 397-408, 1980b.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A STARIMA Model-Building Procedure with Application to Description and Regional Forecasting. **Transactions of the Institute of British Geographers**, Nova York, v. 5, no. 3, p. 330-349, 1980c.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Independence and sphericity tests for the residuals of space-time ARIMA models. **Communications in Statistics. Simulation and Computation**, Nova York, p. 533-549, 1980d.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function. **Journal of the Royal Statistical Society**, Atlanta, v. 43, n. 1, p. 28-33, 1981a.
- PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. Variance of the Sample Space-Time Correlation Function of Contemporaneously Correlated Variables. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Atlanta, v. 40, n. 1, p. 133-136, 1981b.
- R Development Core Team. **R: A language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, Disponível em: <http://www.R-project.org/>. Acesso em: 16 maio 2013.

RAO, T. S.; ANTUNES, A. M. C. Spatio-Temporal modelling of temperature time series: A comparative Study. In: BRILLINGER, D. R.; ROBINSON, E. A.; SCHOENBERG, F. P. (Ed.) **Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems**. Nova York : Springer, 2004. p. 123-150.

SMITH, T. E. **Spatial Weight Matrices**. Disponível em: <[http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra\\_materials/](http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra_materials/)>. Acesso em: 24 jan. 2013.

**ANEXOS**





## ANEXO A - Algoritmos implementados

### Calculando matrizes de pesos espaciais

Cálculo das matrizes de pesos pelo método de contiguidade espacial, para 16 locais, até a quarta ordem de vizinhança.

```
n=16
x=rep(1:4,each=4)
y=rep(1:4,4)
X=data.frame(x,y)
M1=ifelse(as.matrix(dist(X))<=1,ifelse(as.matrix(dist(X))>0,1,0),0)
m1=M1/rowSums(M1)
M2=ifelse(as.matrix(dist(X))<2,ifelse(as.matrix(dist(X))>1,1,0),0)
m2=M2/rowSums(M2)
M3=ifelse(as.matrix(dist(X))<=2,ifelse(as.matrix(dist(X))>1.5,1,0),0)
m3=M3/rowSums(M3)
M4=ifelse(as.matrix(dist(X))<2.8,ifelse(as.matrix(dist(X))>2,1,0),0)
m4=M4/rowSums(M4)
wc=list(diag(n),m1,m2,m3,m4)
```

Cálculo da matriz de pesos, pelo método do inverso da distância euclidiana, para 16 locais.

```
n=16
x=rep(1:4,each=4)
y=rep(1:4,4)
X=data.frame(x,y)
M=as.matrix(1/dist(X))
m=M/rowSums(M)
wd=list(diag(n),m)
```

Cálculo da matriz de pesos, pelo método do inverso da distância euclidiana ao quadrado, para 16 locais.

```
n=16
x=rep(1:4,each=4)
y=rep(1:4,4)
X=data.frame(x,y)
M=as.matrix(1/dist(X)^2)
m=M/rowSums(M)
wdd=list(diag(n),m)
```

Cálculo da matriz de pesos, pelo método do inverso da distância euclidiana elevado a cinco, para 16 locais.

```
n=16
x=rep(1:4,each=4)
y=rep(1:4,4)
X=data.frame(x,y)
M=as.matrix(1/dist(X)^5)
m=M/rowSums(M)
wD=list(diag(n),m)
```

### Modelo STAR(1<sub>1</sub>), STAR(1<sub>2</sub>) e STAR(1<sub>3</sub>)

Função de um modelo STAR(1<sub>1</sub>) para realizar a otimização e obter as estimativas dos parâmetros.

```
esti.fun=function(theta,y){
phi1=theta[1]
phi11=theta[2]
a=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
a[,1]=y[,1]
a[,2:tt]=y[,2:tt]-phi1*y[,1:(tt-1)]-phi11*w[[2]]**y[,1:(tt-1)]
S=sum(a^2)
return(S)
}
```

Função de um modelo STAR(1<sub>2</sub>) para realizar a otimização e obter as estimativas dos parâmetros.

```
esti.conti2=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi12=theta[3]
a=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
a[,1]=y[,1]
a[,2:tt]=y[,2:tt]-phi10*y[,1:(tt-1)]-phi11*w[[2]]**y[,1:(tt-1)]-
phi12*w[[3]]**y[,1:(tt-1)]
S=sum(a^2)
return(S)
}
```

Função de um modelo STAR(1<sub>3</sub>) para realizar a otimização e obter as estimativas dos parâmetros.

```
esti.conti3=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi12=theta[3]
phi13=theta[4]
a=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
a[,1]=y[,1]
a[,2:tt]=y[,2:tt]-phi10*y[,1:(tt-1)]-phi11*w[[2]]**y[,1:(tt-1)]-
phi12*w[[3]]**y[,1:(tt-1)]-phi13*w[[4]]**y[,1:(tt-1)]
S=sum(a^2)
return(S)
}
```

**Simulação de dados pelo modelo STAR(1<sub>1</sub>) com matriz de pesos sendo o inverso da distância e estimação dos parâmetros de todos os modelos**

```
w=wd
tt=70
y=list()
for(j in 1:1000){
z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
```

```

phi10=.3
phi11=.5
a=t(mvrnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]**z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]**z[, (i-1)]+a[,i]}
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')
source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL
estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]**
y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]**y[[i]][,1:(tt-1)]-
estc3$par[4]*w[[4]]**y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]**
y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]**y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]**
y[[i]][,1:(tt-1)]

```

```

prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]
ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]**%
y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wdd
estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]**%
y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]**%
y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))
}

```

```

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

Simulação de dados pelo modelo STAR( $1_1$ ) com matriz de pesos sendo o inverso da distância ao quadrado e estimação dos parâmetros de todos os modelos

```

w=wdd
tt=70
y=list()
for(j in 1:1000){
z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
phi10=.3
phi11=.5
a=t(mvrnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]%*%z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]%*%z[, (i-1)]+a[,i]}
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')
source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL
estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]%*%
y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]-
estc3$par[4]*w[[4]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
  upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]%*%
  y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3],s=45,t=tt,n=n))>
  (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
  upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]%*%
  y[[i]][,1:(tt-1)]
prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2],s=45,t=tt,n=n))>
  (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
  upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]
ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]%*%
  y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
  (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

w=wdd
estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
  upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]%*%
  y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
  (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
  upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]%*%
  y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
  (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

```

```

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))
}

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

**Simulação de dados pelo modelo STAR<sub>(1)</sub> com matriz de pesos sendo o inverso da distância elevado a cinco e estimação dos parâmetros de todos os modelos**

```

w=wD
tt=70
y=list()
for(j in 1:1000){
z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
phi10=.3
phi11=.5
a=t(mvrnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]*z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]*z[, (i-1)]+a[,i]}
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')
source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL

```



```

estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
            upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]%*%
            y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]-
            estc3$par[4]*w[[4]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4],s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
            upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]%*%
            y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3],s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]%*%
            y[[i]][,1:(tt-1)]
prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2],s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]
ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]%*%
            y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wdd

```

```

estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]**%
            y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]**%
            y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))
}

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

**Simulação de dados pelo modelo STAR( $1_1$ ) com matriz de pesos determinada pela contiguidade espacial e estimação dos parâmetros de todos os modelos**

```

w=wc
tt=70
y=list()
for(j in 1:1000){

```

```

z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
phi10=.3
phi11=.5
a=t(mvrnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]**z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]**z[, (i-1)]+a[,i]}
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')
source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL
estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]**%
y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]-
estc3$par[4]*w[[4]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]**%
y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3],s=45,t=tt,n=n))>
(2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]**%

```

```

      y[[i]][,1:(tt-1)]
prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2],s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
      upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]
ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]*%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wdd
estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
      upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]*%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
      upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]*%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))

```

```

}

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

### Simulação de dados pelo modelo STAR( $1_2$ ) com matriz de pesos determinada pela contiguidade espacial e estimação dos parâmetros de todos os modelos

```

w=wc
tt=70
y=list()
for(j in 1:1000){
z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
phi10=-.3
phi11=.3
phi12=.3

a=t(mvrnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]**z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]**z[, (i-1)]+phi12*w[[3]]**
z[, (i-1)]+a[,i]}
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')
source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL
estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]**%

```

```

        y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]-
        estc3$par[4]*w[[4]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4],s=45,t=tt,n=n))>
        (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
        upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]%*%
        y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]%*%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3],s=45,t=tt,n=n))>
        (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
        upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]%*%
        y[[i]][,1:(tt-1)]
prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2],s=45,t=tt,n=n))>
        (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
        upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]
ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]%*%
        y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
        (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wdd
estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
        upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]%*%
        y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
        (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
        upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)

```

```

eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]**%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))
}

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

**Simulação de dados pelo modelo STAR(1<sub>3</sub>) com matriz de pesos determinada pela contiguidade espacial e estimação dos parâmetros de todos os modelos**

```

w=wc
tt=100
y=list()
for(j in 1:1000){
z=matrix(0,nrow=n,ncol=(tt+1))
phi10=-.3
phi11=.2
phi12=.2
phi13=-.25
a=t(mvnorm(tt+1,rep(0,n),diag(n)))
z[,1]=a[,1]
for(i in 2:(tt+1)){
z[,i]=phi10*w[[1]]**z[, (i-1)]+phi11*w[[2]]**z[, (i-1)]+phi12*w[[3]]**%
      z[, (i-1)]+phi13*w[[4]]**z[, (i-1)]+a[,i]
y[[j]]=z[, -1]}

source('Fun_Star(1_3).r')

```

```

source('Fun_Star(1_1).r')
source('Fun_Star(1_2).r')
source('Facst.r')

res=NULL
pre=NULL
estimawc3=NULL
estimawc2=NULL
estimawc1=NULL
estimawd=NULL
estimawdd=NULL
estimawD=NULL

for(i in 1:1000){
w=wc
estc3=optim(c(0,0,0,0),esti.conti3,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1,-1),
            upper=c(1,1,1,1))
ec3=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec3[,1]=y[[i]][,1]
ec3[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc3$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[2]*w[[2]]**%
            y[[i]][,1:(tt-1)]-estc3$par[3]*w[[3]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]-
            estc3$par[4]*w[[4]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec3=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec3,w=wc[1:4]),s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc2=optim(c(0,0,0),esti.conti2,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1,-1),
            upper=c(1,1,1))
ec2=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec2[,1]=y[[i]][,1]
ec2[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc2$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[2]*w[[2]]**%
            y[[i]][,1:(tt-1)]-estc2$par[3]*w[[3]]**%y[[i]][,1:(tt-1)]
prec2=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec2,w=wc[1:3]),s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

estc1=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
ec1=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ec1[,1]=y[[i]][,1]
ec1[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estc1$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estc1$par[2]*w[[2]]**%
            y[[i]][,1:(tt-1)]
prec1=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ec1,w=wc[1:2]),s=45,t=tt,n=n))>
            (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wd
estd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
            upper=c(1,1))
ed=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
ed[,1]=y[[i]][,1]

```



```

ed[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estd$par[2]*w[[2]]%%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
pred=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=ed,w=wd,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wdd
estdd=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
      upper=c(1,1))
edd=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
edd[,1]=y[[i]][,1]
edd[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estdd$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estdd$par[2]*w[[2]]%%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
predd=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=edd,w=wdd,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

w=wD
estD=optim(c(0,0),esti.fun,method="L-BFGS-B",y=y[[i]],lower=c(-1,-1),
      upper=c(1,1))
eD=matrix(0,nrow=n,ncol=tt)
eD[,1]=y[[i]][,1]
eD[,2:tt]=y[[i]][,2:tt]-estD$par[1]*y[[i]][,1:(tt-1)]-estD$par[2]*w[[2]]%%
      y[[i]][,1:(tt-1)]
preD=ifelse(sum(ifelse(abs(facst(y=eD,w=wD,s=45,t=tt,n=n))>
      (2*sqrt(1/(n*30))),1,0))>=1,1,0)

pre=rbind(pre,cbind(prec3,prec2,prec1,pred,predd,preD))
estimawc3=rbind(estimawc3,cbind(t(estc3$par),estc3$value))
estimawc2=rbind(estimawc2,cbind(t(estc2$par),estc2$value))
estimawc1=rbind(estimawc1,cbind(t(estc1$par),estc1$value))
estimawd=rbind(estimawd,cbind(t(estd$par),estd$value))
estimawdd=rbind(estimawdd,cbind(t(estdd$par),estdd$value))
estimawD=rbind(estimawD,cbind(t(estD$par),estD$value))

resc3=n*tt*log(estc3$value/(n*tt))+2*4*log(tt)
resc2=n*tt*log(estc2$value/(n*tt))+2*3*log(tt)
resc1=n*tt*log(estc1$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resd=n*tt*log(estd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resdd=n*tt*log(estdd$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
resD=n*tt*log(estD$value/(n*tt))+2*2*log(tt)
res=rbind(res,cbind(resc3,resc1,resc2,resd,resdd,resD))
}

dim(res)
melhor=matrix(0,1000,6)
for(i in 1:1000){
for(j in 1:6){
melhor[i,j]=ifelse(res[i,j]==min(res[i,]),1,0)}
colnames(melhor)=c("conti3","conti1","conti2","dist","dist2","dist5")
colSums(melhor)
colSums(pre)

```

## Função de autocorrelação espaço-temporal

Para fazer o cálculo das autocorrelações espaço-temporal por meio desta função, deve-se ter:  $y$  - como a variável resposta com  $N$  linhas que são os locais, e  $t$  colunas que são as observações no tempo;  $s$  - sendo o número de autocorrelação a ser calculada;  $w$  - uma lista com as matrizes de pesos espaciais, sendo a primeira uma matriz identidade.

```

facst=function(y,w,s,n,t){
  guarda=NULL
  gama0=NULL
  dados=y-mean(y)
  ##### Construindo o Gama para s=0####
  for(i in 1:t){
    ga=as.matrix(as.matrix(dados[,i])%*%t(as.matrix(dados[,i])))
    guarda=c(guarda,list(ga))
  }
  soma=list(Reduce('+',guarda)/(t))
  gama0=c(gama0,soma)
  ##### Construindo o Gama para s positivos####
  guarda=NULL
  gamap=NULL
  for(s in 1:s){
    for(i in 1:(t-s)){
      ga=as.matrix(as.matrix(dados[,i])%*%t(as.matrix(dados[,i+s])))
      guarda=c(guarda,list(ga))
    }
    soma=list(Reduce('+',guarda)/(t-s))
    gamap=c(gamap,soma)
  }
  guarda=NULL
  ##### Construindo o Gama para s negativos #####
  gaman=NULL
  for(s in 1:s){
    ga=t(gamap[[s]])
    gaman=c(list(ga),gaman)
  }
  ##### Determinando uma lista com todos os gamas juntos####
  gama=c(gaman,gama0,gamap)
  ### Calculando as covariancias
  gamalk=NULL
  gama11=NULL
  gama1k=NULL
  for(k in 1:length(w)){
    for(l in 1:length(w)){
      for(i in 1:((2*s)+1)){
        gama1=sum(diag(t(w[[k]])%*%w[[l]]%*%gama[[i]]))/n
        gama11=rbind(gama11,gama1,deparse.level=0)
      }
      gama1k=cbind(gama1k,gama11,deparse.level=0)
      gama11=NULL
    }
  }
  gamalk=cbind(gamalk,gama1k,deparse.level=0)

```

```

    gamalk=NULL
}
#####Calculando a função de autocorrelação#####
corr=matrix(0,s,length(w))
for(l in 1:length(w)){
corr[,l]=gamalk[(s+2):((2*s)+1),l]/(sqrt(gamalk[(s+1),(1+(l-1)*length(w))]*
    gamalk[(s+1),1]))
}
return(corr)
}

```

### Função de autocorrelação generalizado espaço-temporal

```

facstg=function(y,w,s,G){
t=dim(y)[2]
n=dim(y)[1]
corr=matrix(0,s,length(w))
for(l in 1:length(w)){
for(i in 1:s){
corr[i,l]=(t/(t-i))*sum(diag(t(w[[1]]**y[,1:(t-i)])**solve(G)**y[(1+i):t]))/
    sqrt(sum(diag(t(w[[1]]**y)**solve(G)**(w[[1]]**y)))*
sum(diag(t(y)**solve(G)**y)))
}}
return(corr)
}

```

### Função de autocorrelação parcial espaço-temporal

Para fazer o cálculo das autocorrelações parciais espaço-temporal por meio desta função, deve-se ter:  $y$  - como a variável resposta com  $N$  linhas que são os locais, e  $t$  colunas que são as observações no tempo;  $s$  - sendo o número de autocorrelação a ser calculada;  $w$  - uma lista com as matrizes de pesos espaciais, sendo a primeira uma matriz identidade.

```

facpst=function(y,w,s,t,n){
guarda=NULL
gama0=NULL
dados=y-mean(y)
##### Contruindo o Gama para s=0####
for(i in 1:t){
    ga=as.matrix(as.matrix(dados[,i])**t(as.matrix(dados[,i])))
    guarda=c(guarda,list(ga))
}
soma=list(Reduce('+',guarda)/(t))
gama0=c(gama0,soma)
##### Construindo o Gama para s positivos####
guarda=NULL
gamap=NULL
for(s in 1:s){
    for(i in 1:(t-s)){
        ga=as.matrix(as.matrix(dados[,i])**t(as.matrix(dados[,i+s])))
        guarda=c(guarda,list(ga))
    }
}

```

```

        soma=list(Reduce('+',guarda)/(t-s))
        gamap=c(gamap,soma)
    guarda=NULL
}
#### Construindo o Gama para s negativos ####
gaman=NULL
for(s in 1:s){
    ga=t(gamap[[s]])
    gaman=c(list(ga),gaman)
}
#### Determinando uma lista com todos os gamas juntos####
gama=c(gaman,gama0,gamap)
### Calculando as covariancias
gamalk=NULL
gama11=NULL
gama1k=NULL
for(k in 1:length(w)){
    for(l in 1:length(w)){
        for(i in 1:((2*s)+1)){
            gama1=sum(diag(t(w[[k]])*%*%w[[l]])*%*%gama[[i]]))/n
            gama11=rbind(gama11,gama1,deparse.level=0)
        }
        gama1k=cbind(gama1k,gama11,deparse.level=0)
        gama11=NULL
    }
    gamalk=cbind(gamalk,gama1k,deparse.level=0)
    gama1k=NULL
}
##### Construindo o sistema de equações para calculo da stpacf
#-----
vetor=NULL
for(i in (s+2):(2*s+1)){
    vet=matrix(gamalk[i,1:length(w)],ncol=1)
    vetor=rbind(vetor,vet,deparse.level=0)
}
dim(vetor)
#Matriz s=0
ma1=NULL
ma=NULL
for(i in 1:s){
    for(o in 1:s){
        m0=matrix(gamalk[(i+o),],length(w),length(w))
        ma1=rbind(ma1,m0)
    }
    ma=cbind(ma1,ma)
    ma1=NULL
}
###Calculando os valores das stpacf, ou seja, os phi's####
phi=solve(ma)*%*%vetor
facpst=matrix(phi,s,length(w),byrow=T)
return(facpst)

```

}

### Função de autocorrelação parcial generalizado espaço-temporal

```

facpstg=function(y,w,G,s){
t=dim(y)[2]
n=dim(y)[1]
gamma=matrix(0,(s+1),1)
gammalk=NULL
for(k in 1:length(w)){
for(l in 1:length(w)){
for(i in 1:(s+1)){gamma[i,]=(1/(n*(t-i+1)))*sum(diag(t(w[[l]]**y[,1:(t-i+1)])**%
solve(G)**(w[[k]]**y[,i:t]))}
}
gammalk=cbind(gammalk,gamma)}}
#####Construindo o vetor de gammas #####
vetor=NULL
for(j in 2:(s+1)){
vetor=rbind(vetor,as.matrix(gammalk[j,1:length(w)]))}
##### Construindo a matriz de gammas #####
teste=seq(1,length(w)^2,by=length(w))
vetorll=matrix(0,(s*length(w)),length(w))
for(j in 1:length(teste))
vetorll[,j]=as.matrix(c(t(gammalk[1:s,teste[j]:(j*length(w))])))
guarda=matrix(0,(length(w)*(s-1)),length(w))
for(j in 1:length(w))
guarda[,j]=as.matrix(c(t(gammalk[s:2,(teste-1+j)])))
tudo=rbind(guarda,vetorll)
ma=NULL
matr=NULL
for(j in 1:s){
ma=tudo[(length(w)*(s-j)+1):((length(w)*2*s)-length(w)*j),]
matr=cbind(matr,ma)}
##### Calculando os valores das stpacfg #####
phi=solve(matr)**vetor
facpstg=matrix(phi,s,length(w),byrow=T)
return(facpstg)
}

```

### ANEXO B - Programas utilizado para ajuste de dados de temperatura

Os dadosf, que são os dados finais para análise, estão como vetor coluna seguindo do primeiro tempo, passando por todos locais e depois indo para outro tempo. Deve-se observar qual é a ordem de vizinhos, para determinar como fica a matriz de pesos.

```

y=dadosf
n=length(estacao)
t=147
dados=matrix(y,n,t)
rownames(dados)=1:17
str(dados)

```

Análise descritiva descritiva dos dados de temperatura.

```
par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
ts.plot(dados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}
```

```
par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
boxplot(dados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}
```

```
par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
hist(dados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}
```

Construção da matriz de pesos  $W$  em que as coordenadas estão em utm.

```
latlog=data.frame(latitude,longitude)
SP <- SpatialPoints(latlog,proj4string=CRS("+proj=longlat +zone=22"))
dist.utm=spTransform(SP, CRS("+proj=utm"))
M=as.matrix(1/dist(dist.utm@coords))
m=M/rowSums(M)
wd=list(diag(n),m)

##### Construindo W usando contiguidade espacial #####
#####Primeira ordem
w1=c(0,0,0,1/2,0,0,0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0)
w2=c(0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,0,0)
w3=c(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w4=c(1/2,0,0,0,0,0,0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0)
w5=c(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w6=c(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)
w7=c(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w8=c(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w9=c(1/2,0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w10=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w11=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0)
w12=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0)
w13=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w14=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w15=c(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
w16=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)
w17=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0)
wp=matrix(c(w1,w2,w3,w4,w5,w6,w7,w8,w9,w10,w11,w12,w13,w14,w15,w16,w17),
          17,17,byrow=T)

#####Segunda ordem
ws1=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,1/2,0,0,0,0,0)
ws2=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws3=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/3,1/3,1/3)
ws4=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws5=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws6=c(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws7=c(0,0,0,0,0,1/2,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws8=c(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
```

```

ws9=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws10=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws11=c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws12=c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws13=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,1/2)
ws14=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws15=c(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
ws16=c(0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,0,0,0)
ws17=c(0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,0,0,0)
ws=matrix(c(ws1,ws2,ws3,ws4,ws5,ws6,ws7,ws8,ws9,ws10,ws11,ws12,ws13,ws14,
            ws15,ws16,ws17),17,17,byrow=T)

```

```
##### Terceira Ordem
```

```

wt1=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)
wt2=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,1/2)
wt3=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt4=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/3,1/3,1/3,0,0,0,0,0)
wt5=c(0,0,0,0,0,1/3,0,1/3,0,0,0,0,0,1/3,0,0,0)
wt6=c(0,0,0,0,1/5,0,0,0,0,1/5,0,0,1/5,0,0,1/5,1/5)
wt7=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt8=c(0,0,0,0,1/3,0,0,0,0,1/3,0,0,1/3,0,0,0,0)
wt9=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/3,1/3,1/3,0,0,0,0,0)
wt10=c(1/5,0,0,1/5,0,1/5,0,1/5,1/5,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt11=c(0,0,0,1/2,0,0,0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt12=c(0,0,0,1/2,0,0,0,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt13=c(0,0,0,0,0,1/2,0,1/2,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt14=c(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
wt15=c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,1/2)
wt16=c(0,1/4,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0)
wt17=c(0,1/4,0,0,0,1/4,0,1/4,0,0,0,0,0,0,1/4,0,0)
wt=matrix(c(wt1,wt2,wt3,wt4,wt5,wt6,wt7,wt8,wt9,wt10,wt11,wt12,wt13,wt14,
            wt15,wt16,wt17),17,17,byrow=T)

```

```
wc=list(diag(n),wp,ws,wt)
```

```
##### Fazendo STFAC #####
```

```

source('Facst.r')
source('Facpst.r')
source('Facstg.r')
source('Facpstg.r')

```

```
G=diag(n)
```

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
plot(facst(y=dados,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")
```

```
plot(facst(y=dados,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,2],type="h")
```

```
plot(facstg(y=dados,G,s=45,w=wd)[,1],type="h", ylab=c("STACF"),
```

```
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 0")
```

```
plot(facstg(y=dados,G,s=45,w=wd)[,2],type="h", ylab=c("STACF"),
```

```
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 1")
```

```
plot(facst(y=dados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")
```

```

plot(facst(y=dados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,2],type="h")
plot(facst(y=dados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,3],type="h")
plot(facst(y=dados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,4],type="h")

#####Fazendo as diferenças de lag 12 nos dados #####

ndados=matrix(0,17,135)
for(i in 1:17){
ndados[i,]=diff(dados[i,],lag=12)}

t=135

##### Análise descritiva com dados diferenciados ###3
par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
ts.plot(ndados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}

par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
boxplot(ndados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}

par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
hist(ndados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]))}

##### Fazendo STFAC e STFACP com os dados diferenciados #####

par(mfrow=c(2,2))
plot(facst(y=ndados,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wd,s=30,t=t,n=n)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facst(y=ndados,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,2],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,2],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")

par(mfrow=c(4,2))
plot(facst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")

```



```

abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,2], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,2], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,3], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,3], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,4], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
plot(facpst(y=ndados,w=wc,s=45,t=t,n=n)[,4], type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)), col="red")

##### Com a função generalizada #####
par(mfrow=c(2,2))
plot(facstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,1], type="h", ylab=c("STACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 0")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wd,s=30)[,1], type="h", ylab=c("STPACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 0")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
plot(facstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,2], type="h", ylab=c("STACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 1")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,2], type="h", ylab=c("STPACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 1")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)), col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)), col="red")

```

```

par(mfrow=c(4,2))
plot(facstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,2],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,2],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,3],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,3],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,4],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wc,s=45)[,4],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*60)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*60)),col="red")

```

Função de um modelo STARMA(1<sub>1</sub>, 0, 1)x(1, 1, 1)<sub>12</sub> para realizar a otimização e obter as estimativas dos parâmetros.

```

##### Modelo 15 #####
S=NULL
fun15=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
theta10=theta[3]
PHI10=theta[4]
THETA10=theta[5]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=t)
a[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*wd[[2]]%*%y[,i-1]+theta10*a[,i-1]
}
for(i in 13:135){

```

```

a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*wd[[2]]**y[,i-1]+theta10*a[,i-1]-
      PHI10*y[,i-12]+THETA10*a[,i-12]}
#S=sum(a^2)
S=det(a**t(a))
return(S)
}

```

Realizando a estimação dos parâmetros.

```

mod15=optim(c(0,0,0,0,0),fun15,method="L-BFGS-B",y=ndados,lower=c(-1,-1,-1,-1,-1),
           upper=c(1,1,1,1,1))

```

```
mod15
```

```
nlm(fun15,c(0.5,0,0,0,0),y=ndados)
```

```
##### Calculando os erros#####
```

```

y=ndados
emod15=matrix(0,nrow=n,ncol=t)
emod15[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
emod15[,i]=y[,i]-mod15$par[1]*y[,i-1]-mod15$par[2]*wd[[2]]**y[,i-1]+
            mod15$par[3]*emod15[,i-1]
}
for(i in 13:t){
emod15[,i]=y[,i]-mod15$par[1]*y[,i-1]-mod15$par[2]*wd[[2]]
            **y[,i-1]+mod15$par[3]*emod15[,i-1]-mod15$par[4]*
            y[,i-12]+mod15$par[5]*emod15[,i-12]}
sum(emod15^2)

```

```
##### Calculando as STACF dos erros #####
```

```

par(mfrow=c(2,2))
plot(facst(y=emod15,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,1],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)),col="red")
plot(facst(y=emod15,w=wd,s=45,t=t,n=n)[,2],type="h")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt(1/(n*90)),col="red")
abline(h=-2*sqrt(1/(n*90)),col="red")
#####3 Calculando as STFAC dos erros pela Generalizada #####
plot(facpstg(y=emod15,G,w=wd,s=45)[,1],type="h",ylim=c(-.3,.3))
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
            sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G))))*(1/t)),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
            sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G))))*(1/t)),col="red")
plot(facpstg(y=emod15,G,w=wd,s=45)[,2],type="h",ylim=c(-.3,.3))
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[2]])**G**wd[[2]]**G))/(sum(diag(G))*
            sum(diag(t(wd[[2]])**wd[[2]]**G))))*(1/t)),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[2]])**G**wd[[2]]**G))/(sum(diag(G))*

```

```

sum(diag(t(wd[[2]])**wd[[2]]**G)))*(1/t)),col="red")

##### Calculando as STACFG dos erros #####
G=(emod15**t(emod15))/t

par(mfrow=c(2,2))
plot(facstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,1],type="h",ylab=c("STACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 0")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,2],type="h",ylim=c(-.2,.2),ylab=c("STACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 1")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[2]])**G**wd[[2]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[2]])**wd[[2]]**G)))*(1/t))),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[2]])**G**wd[[2]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[2]])**wd[[2]]**G)))*(1/t))),col="red")
plot(facpstg(y=ndados,G,w=wd,s=30)[,1],type="h",ylab=c("STPACF"),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 0")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")
plot(facstg(y=ndados,G,w=wd,s=45)[,2],type="h",ylab=c("STPACF"), ylim=c(-.2,.2),
      xlab=c("Defasagem Temporal"), main="Defasagem espacial 1")
abline(h=0)
abline(h=2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")
abline(h=-2*sqrt((sum(diag(t(wd[[1]])**G**wd[[1]]**G))/(sum(diag(G))*
sum(diag(t(wd[[1]])**wd[[1]]**G)))*(1/t))),col="red")

#### Cálculo do BIC #####
sigma2mod15=sum(emod15^2)/(n*t)
sigma2mod15

Bicmod15=n*t*log(sigma2mod15)+2*(5)*log(t)
Bicmod15

Teste de hipótese
##### Modelo 8 e 7 #####
((t*n-4)*(sum(emod7^2)-sum(emod8^2)))/(sum(emod8^2))

##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-4)

```

```

##### Modelo 15 e 16 #####
((t*n-5)*(sum(emod16^2)-sum(emod15^2)))/(sum(emod15^2))
##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-5)

##### Modelo 16 e 7 #####
((t*n-4)*(sum(emod7^2)-sum(emod16^2)))/(sum(emod16^2))
##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-4)

##### Modelo 15 e 8 #####
(t*n-5)*(sum(emod8^2)-sum(emod15^2))/sum(emod15^2)
##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-5)

##### Modelo 14 e 15 #####
(t*n-6)*(sum(emod15^2)-sum(emod14^2))/sum(emod14^2)
##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-6)

##### Modelo 9 e 18 #####
(t*n-5)*(sum(diag(t(emod18)%*emod18))-sum(diag(t(emod9)%*solve(G)%*emod9)))/sum(diag(t(emod9)%*solve(G)%*emod9))
##### valor tabelado
qf(.95,1,t*n-6)

##### testando modelo 14 com o 9 após reestimar #####
(t*n-6)*(sum(diag(t(emod9)%*solve(G)%*emod9))-sum(diag(t(emod14)%*solve(G)%*emod14)))/(sum(diag(t(emod14)%*solve(G)%*emod14)))

##### testando modelo 14 com o 15 após reestimar #####
(t*n-6)*(sum(diag(t(emod15)%*solve(G)%*emod15))-sum(diag(t(emod14)%*solve(G)%*emod14)))/(sum(diag(t(emod14)%*solve(G)%*emod14)))

##### Testando se G=D #####

G=(emod15%*t(emod15))/t
V=det(G)/prod(diag(G))
h=-m*log(V)
h
f=n*(n-1)/2
f
qchisq(.95,f)

##### Previsões 6 passos a frente #####
#####1 passo
previsoes=mod15$par[1]*ndados[,135]+mod15$par[2]*wd[[2]]%*ndados[,135]-
mod15$par[3]*emod15[,135]+mod15$par[4]*ndados[,124]-
mod15$par[5]*emod15[,124]
previsoes
realpre=previsoes+dados[,124]

```

```

realpre

#####2 passos
previsoes2=mod15$par[1]*previsoes+mod15$par[2]*wd[[2]]**previsoes+
            mod15$par[4]*ndados[,125]-
            mod15$par[5]*emod15[,125]
previsoes2
realpre2=previsoes2+dados[,125]
realpre2

#####3 passos
previsoes3=mod15$par[1]*previsoes2+mod15$par[2]*wd[[2]]**previsoes2+
            mod15$par[4]*ndados[,126]-
            mod15$par[5]*emod15[,126]
previsoes3
realpre3=previsoes3+dados[,126]
realpre3

#####4 passos
previsoes4=mod15$par[1]*previsoes3+mod15$par[2]*wd[[2]]**previsoes3+
            mod15$par[4]*ndados[,127]-
            mod15$par[5]*emod15[,127]
previsoes4
realpre4=previsoes4+dados[,127]
realpre4

#####5 passos
previsoes5=mod15$par[1]*previsoes4+mod15$par[2]*wd[[2]]**previsoes4+
            mod15$par[4]*ndados[,128]-
            mod15$par[5]*emod15[,128]
previsoes5
realpre5=previsoes5+dados[,128]
realpre5

#####6 passos
previsoes6=mod15$par[1]*previsoes5+mod15$par[2]*wd[[2]]**previsoes5+
            mod15$par[4]*ndados[,129]-
            mod15$par[5]*emod15[,129]
previsoes6
realpre6=previsoes6+dados[,129]
realpre6

pre=round(cbind(realpre,realpre2,realpre3,realpre4,realpre5,realpre6),2)

##### Gráfico das séries com as previsões #####
par(mfrow=c(5,4))
for(i in 1:17){
  ts.plot(dados[i,],ylab=c("Estação", rownames(dados)[i]),xlim=c(0,155))
  points(148:153,pre[i,],col="red",pch=19)
  lines(147:153,c(dados[i,147],pre[i,]),col="gray",pch=19,lty=3)
}

```