**Universidade de São Paulo**
**Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"**

# Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações

**Edleide de Brito**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutora em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

**Piracicaba**
**2014**

Edleide de Brito
Bacharel em Estatística

# Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações

Orientadora:
Profa. Dra. **CLARICE GARCIA BORGES DEMÉTRIO**
Coorientador:
Prof. Dr. **GAUSS MOUTINHO CORDEIRO**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutora em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

**Piracicaba**
**2014**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**
**DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP**

Brito, Edleide de
Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações /Edleide de Brito. - - Piracicaba, 2014.
100 p: il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2014.

1. Distribuição Burr XII 2. Distribuição Gumbel 3. Distribuição Marshall-Olkin 4. Matriz de informação observada 5. Máxima verossimilhança I. Título

CDD 519.532
B862a

# DEDICATÓRIA

*À minha mamãe Arcanja, aos meus irmãos Elisângela e Jorge, ao meu sobrinho Luis Philippe e ao meu amado Angelo.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me fazer crer no Seu amor e na Sua justiça e por ter me guiado e encorajado na busca de mais um sonho.

Agradecimento especial a minha família que, mais uma vez, compreendeu a minha ausência. A minha mamãe Arcanja por ter me apoiado, incondicionalmente, desde o princípio desta jornada e pelas orações e incentivos constantes. Aos meus irmãos Elisângela e Jorge Luís pelo carinho, apoio e incentivo. Obrigada ao meu sobrinho Luis Philippe pelos momentos de carinho e alegria. Obrigada família amada por compreender a minha necessidade de ir em busca deste sonho.

Ao meu querido noivo Angelo, companheiro de vida, agradeço imensamente pelo amor, carinho, paciência e incentivo, por entender minhas prioridades e me apoiar sempre. Obrigada meu Amor.

À Maria Pereira de Jesus (in memorian), minha tia-avó, lembrança sempre presente de alegrias e saudades eternas.

Ao Professor Gauss Cordeiro pela sabedoria, pelo exemplo, pela dedicação, pelo apoio fundamental na minha vida acadêmica e profissional. Agradeço pelos inúmeros ensinamentos e pela confiança depositada em mim. Meu eterno carinho e gratidão.

A minha orientadora Professora Clarice Demétrio pela orientação, confiança, conselhos e apoio em todas as situações. Muito obrigada por tudo, seu apoio foi fundamental para concretizar este sonho.

Aos Professores Audrey Cysneiros, Cristian Villegas e Taciana Villela Savian pelas valiosas sugestões e contribuições durante o exame de qualificação.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP Eduardo Bonilha, Jorge Wiendl e Mayara Segato. Agradecimento especial as secretárias Luciane Brajão e Solange Sabadin por terem me ajudado, principalmente quando eu não estava em Piracicaba.

A todos os colegas do programa de pós-graduação do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, nomeadamente a Ana Patricia Bastos Peixoto, Elizabeth Mie Hashimoto, Mariana Urbano, Renata Alcarde e Simone Sartório.

Aos amigos que conquistei durante minha temporada na Universidade Federal de Pernambuco, nomeadamente, Ana Percontini, Frank Sinatra, Jymmy Barreto, Luz Milena, Manoel Wallace, Poema Isis e Ronaldo Venâncio: obrigada pelos momentos de descontração e aprendizado.

Preciso agradecer especialmente a amiga/irmã que ganhei na temporada recifense: Fernanda Di Bastiani. Muito obrigada pelas palavras tranquilizadoras, pela companhia, por me compreender e me ajudar em momentos cruciais. Friends forever!

A Universidade Federal da Bahia pelo apoio financeiro e aos colegas do Departamento de Estatística pelo incentivo. Agradeço especialmente a amiga Giovana Oliveira pela sua contribuição como co-autora de dois dos artigos e por me tranquilizar quando o desespero aparecia.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação estatística desde a graduação na UFBA, passando pelo mestrado na UFRPE e chegando ao doutorado na ESALQ/USP.

Ao CNPq pela concessão de bolsa de estudos durante parte desta jornada.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que este sonho fosse concretizado. Foi uma jornada longa e cheia de contratempos, mas com a minha fé em Deus e o apoio da família, dos amigos e dos meu orientadores, consegui superar as adversidades. Obrigada a todos!

“Eis o amor de Deus: que guardemos seus mandamentos. E seus mandamentos não são penosos, porque todo o que nasceu de Deus vence o mundo. E esta é a vitória que vence o mundo: a nossa fé.”

I São João, 5:3-4

# SUMÁRIO

# RESUMO


## Algumas novas distribuições: desenvolvimento e aplicações

Nos últimos anos, diversos autores têm concentrado seus esforços na generalização de distribuições de probabilidades obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganho na análise de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas. Neste trabalho, serão apresentadas duas novas distribuições de probabilidade: McGumbel e gama Burr XII; e uma nova família de distribuições de probabilidade: Marshall-Olkin binomial negativa. Algumas propriedades das novas distribuições são apresentadas e o método de máxima verossimilhança foi utilizado para estimar os parâmetros dos modelos propostos.


Palavras-chave: Distribuição Burr XII; Distribuição Gumbel; Distribuição Marshall-Olkin; Matriz de informação observada; Máxima verossimilhança

## ABSTRACT

### The new distributions: development and applications

In recent years, several authors have concentrated their efforts on the generalization of probability distributions obtained in this way more flexibility and hence gain in data analysis and the ability to incorporate a large number of sub-models in the generalized distributions. In this work, two new probability distributions will be presented: MacDonald Gumbel and gamma Burr XII; and a new family of probability distributions: negative binomial Marshall-Olkin. Some properties of the new distributions are presented and the method of maximum likelihood was used to estimate the parameters of the proposed models.

Keywords: Burr XII distribution; Gumbel distribution; Likelihood maximum; Marshall-Olkin distribution; Observed information matrix

# 1 INTRODUÇÃO

Esta tese apresenta duas novas distribuições de probabilidade e uma nova classe de distribuições. Cada distribuição ou classe de distribuição é apresentada na forma de artigo e, portanto, cada capítulo pode ser lido de forma independente.

Alguns tópicos recorrentes nos capítulos posteriores são brevemente apresentados no Capítulo 2.

O Capítulo 3 apresenta a nova distribuição McDonald Gumbel com cinco parâmetros que é uma extensão da distribuição Gumbel. As aplicações realizadas neste artigo mostraram que a nova distribuição pode ser utilizada para selecionar modelos que são casos especiais desta (BRITO *et al.*, 2014).

A distribuição gama Burr XII é introduzida no Capítulo 4. Nesta generalização, adiciona-se um parâmetro extra à distribuição Burr XII proposta por Zimmer, Keats e Wang (1998). A nova distribuição tem suporte nos reais positivos e pode ser utilizada em análise de sobrevivência ou confiabilidade. As aplicações foram realizadas com dados censurados e não-censurados. Vale ressaltar, que as áreas de sobrevivência e confiabilidade, geralmente, apresentam dados censurados. A nova distribuição proposta obteve melhor desempenho do que distribuições conhecidas na literatura, tais como, Weibull, exponencial e log-logística (BRITO *et al.*, 2014).

No Capítulo 5, uma nova classe de distribuições proposta por Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013) é utilizada para compor a classe de distribuições Marshall-Olkin binomial negativa. A aplicação a dados reais mostrou que a nova classe é bastante competitiva com modelos conhecidos e com o mesmo número de parâmetros (BRITO *et al.*, 2014).

**Referências**

BRITO, E. de; PERCONTINI, A.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The Marshall-Olkin negative binomial family: theory and application. **Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica**, Budapest, 2014a. In press.

BRITO, E. de; SILVA, G. O.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The gamma Burr XII distribution: Theory and practice. **Journal of Data Science**, Taipei, 2014b. In press.

BRITO, E. de; SILVA, G. O.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The McDonald Gumbel model. **Communications Statistics, Theory and Methods**, New York, 2014c. In press.

PERCONTINI, A.; CORDEIRO, G. M.; BOURGUIGNON, M. The G-negative binomial family: general properties and applications. **Advances and Applications in Statistics**, India, v. 35, p. 127 –160, 2013.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability analysis. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 30, p. 386–394, 1998.

# 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, serão apresentadas algumas classes de distribuições, as distribuições Gumbel e Burr XII, a família Marshall-Olkin, o método de máxima verossimilhança e alguns critérios para seleção de modelos. Estes tópicos estão relacionados com as novas distribuições e classes de distribuições apresentadas nesta tese.

## 2.1 Análise de sobrevivência

Considere um conjunto de dados cuja variável resposta é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Esse tempo é denotado por tempo de sobrevivência ou tempo de falha e o conjunto de observações por dados de sobrevivência (SILVA, 2008).

Os dados de sobrevivência possuem suporte nos reais positivos, portanto, não é razoável assumir que tem distribuição normal, e, geralmente, apresentam assimetria positiva. Além disso, para alguns elementos em estudo pode não ser conhecido o tempo de interesse exato, mas apenas que ocorre à direita ou à esquerda de um certo valor e nesse caso diz-se que a observação é censurada. As censuras ocorrem pois nem sempre é possível esperar que o evento de interesse ocorra para todos os elementos em teste. A área da estatística que analisa esse tipo de dados é denominada de análise de sobrevivência (na área de saúde) ou confiabilidade (na pesquisa industrial).

Os tipos de censura são: à direita, se o tempo de ocorrência do evento de interesse está à direita do tempo registrado, à esquerda, se o tempo registrado é maior que o tempo de falha, e intervalar, que acontece quando se sabe somente que o evento de interesse ocorreu em um certo intervalo de tempo. Nesta tese, será utilizada a censura à direita, a mais frequente nos dados de sobrevivência.

O tempo de sobrevivência é uma variável aleatória não-negativa e, em geral, contínua. A função taxa de falha (hrf) é utilizada para representar o comportamento da variável tempo de sobrevivência. Esta função tem forma constante, crescente, decrescente ou não-monótona, por exemplo forma de U ou unimodal. Analisando a forma da hrf pode-se definir o modelo probabilístico para o tempo de sobrevivência.

Diversas novas distribuições generalizadas foram propostas recentemente para analisar dados que possuem taxa de falhas não-monótonas, pois as distribuições usuais em análise de sobrevivência possuem taxas de falhas monótonas (exponencial, Weibull e gama).

Uma importante função em análise de sobrevivência é a função de sobrevivência (sf) que é dada por

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x),$$

em que $F(x)$ é a cdf de uma variável aleatória não-negativa. A correspondente função taxa de

falha ou de risco é dada por

$$\tau(x) = \frac{f(x)}{S(x)},$$

em que $f(x) = d\,F(x)/d\,x$. A Figura 2.1 mostra algumas das possíveis formas da função taxa de falha.

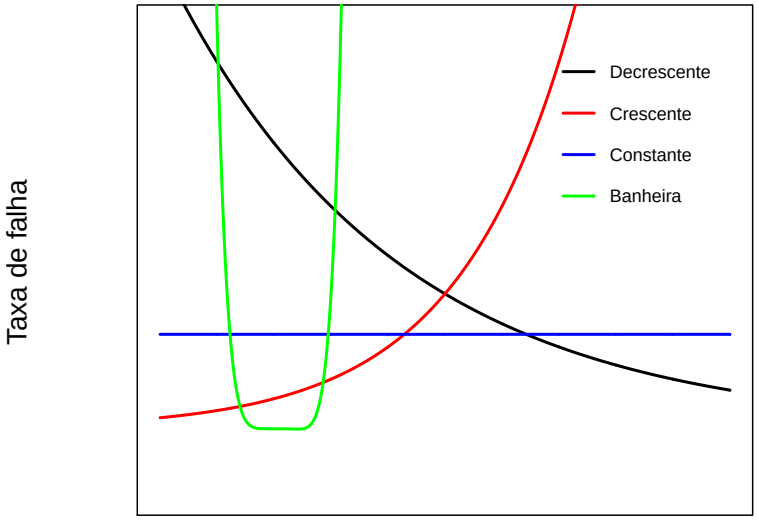



Figura 2.1 – Algumas formas da função taxa de falha

## 2.2 Distribuição Gumbel

A distribuição Gumbel ou distribuição do valor extremo possui uma grande variedade de aplicações que envolvem problemas de engenharia (análise de inundações, fluxo de rede, confiabilidade de *software*, velocidade de ventos, entre outros) e fenômenos naturais (chuvas, velocidade de ventos e poluição do ar, por exemplo). Kotz e Nadarajah (2000) descrevem dezenas de aplicações, tais como, teste de vida acelerado, terremotos e emissões radioativas (para mencionar apenas algumas).

Ao analisar dados de sobrevivência, muitas vezes é conveniente trabalhar com o logaritmo dos dados observados. Assim, se os dados têm distribuição Weibull, a distribuição Gumbel aparece naturalmente quando analisamos o logaritmo das observações (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

De forma geral, a previsão probabilística da ocorrência de eventos extremos é de vital importância para o planejamento das atividades sujeitas a seus efeitos adversos, e uma das formas de analisar esses eventos é utilizar a distribuição Gumbel.

Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição Gumbel, $X \sim$Gumbel$(\mu, \sigma)$, sua função densidade de probabilidade (pdf) é dada por

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma} - \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\} \tag{2.1}$$

e a função distribuição acumulada (cdf) é dada por

$$G(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\} \tag{2.2}$$

em que $x \in I\!R$, $\mu \in I\!R$ e $\sigma > 0$. A moda de $X$ é $\mu$, a mediana é $\mu - \sigma \ln(\ln 2)$, a média é $\mu + \gamma\,\sigma$ e a variância é $\frac{\pi^2}{6}\,\sigma^2$ em que $\gamma$ denota a constante de Euler ($\approx 0,5772$). A distribuição Gumbel com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ é denominada Gumbel padrão. A Figura 2.2 apresenta algumas possíveis formas da fdp (2.1).

## 2.3 Distribuição Burr XII

O sistema Burr de distribuições foi definido por Burr (1942). A distribuição Burr XII (BXII) com três parâmetros, considerada em Zimmer, Keats e Wang (1998), é uma distribuição comumente encontrada para analisar dados de sobrevivência e para modelar fenômenos com funções de risco monótonas e unimodais.

Shao (2004) discutiu o método de estimação por máxima verossimilhança para a distribuição BXII com três parâmetros.

A pdf de uma variável aleatória $X$ com distribuição Burr XII, $X \sim$ BXII$(s, k, c)$ é dada por

$$g(x) = c\,k\,s^{-c}\,x^{c-1}\,\left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k-1},$$

e cdf por

$$G(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k},$$

em que $k > 0$ e $c > 0$ são parâmetros de forma e $s > 0$ é um parâmetro de escala. O momento de ordem $q$ de $X$ é dado por $\mu'_q = E(X^q) = s^q\,k\,B(k - q\,c^{-1}, q\,c^{-1} + 1),\ c\,k > q$. Na Figura 2.3, têm-se algumas formas possíveis para a densidade da Burr XII.

## 2.4 Classes de distribuições generalizadas

Nos últimos anos, diversos autores têm estudado generalizações de distribuições. O crescente interesse em generalizar distribuições ocorreu, principalmente, pelo grande avanço computacional. Uma das razões para generalizar uma distribuição conhecida é porque a sua forma generalizada flexibiliza a distribuição de tal forma que possa modelar mais satisfatoriamente a assimetria em dados observados, pois grande parte das generalizações, envolvem a adição de um ou mais parâmetros de forma à distribuição base. O precursor em generalizar distribuições contínuas foi Amoroso (1925) (gama generalizada). Recentemente, diversas classe de distribuições

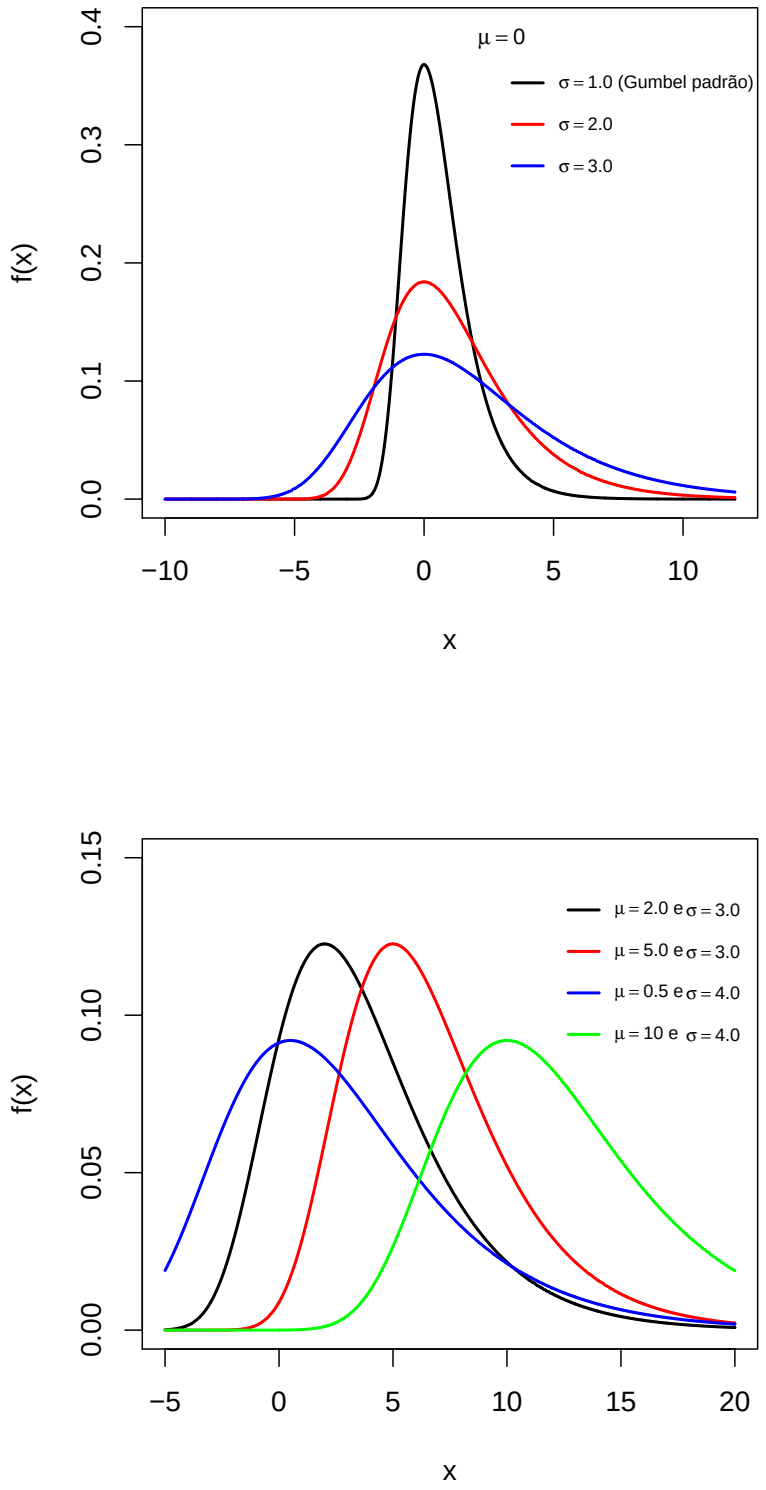



Figura 2.2 – Função densidade da distribuição Gumbel para alguns parâmetros fixos

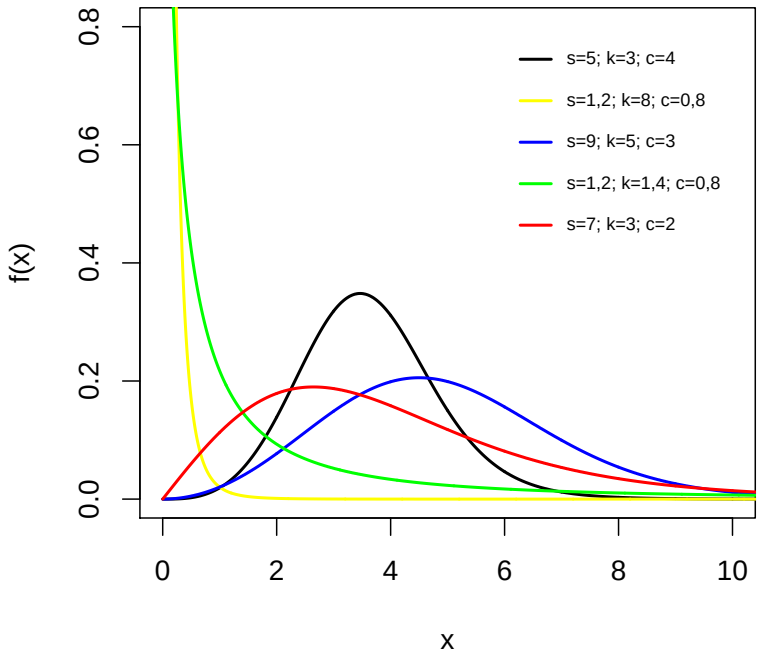



Figura 2.3 – Função densidade da distribuição Burr XII para alguns parâmetros fixos

foram propostas, entre elas, a beta-G por Eugene, Lee e Famoye (2002), a Kumaraswamy-G por Cordeiro e Castro (2011) e a família T-X por Alzaatreh, Lee e Famoye (2013).

Algumas das recentes generalizações utilizadas nesta tese serão apresentadas, brevemente, a seguir.

### 2.4.1 Classe de distribuições exponencializadas

A classe de distribuições exponencializadas foi proposta, inicialmente, por Gompertz (1825). As propriedades e os métodos de estimação dos parâmetros da classe exponencializada (EXP-G) têm sido estudados por diversos autores, tais como, Mudholkar e Srivastava (1993) (Weibull exponencializada), Nadarajah (2011) (exponencial exponencializada), Nadarajah (2005) (Pareto exponencializada), entre outros.

Seja $G(x)$ a cdf de uma distribuição base e $\alpha > 0$ um número real positivo. Então, a cdf de uma variável $X$ com distribuição EXP-G, $X \sim$ EXP-G$(\alpha)$, é dada por

$$F(x) = G(x)^{\alpha}. \tag{2.3}$$

A pdf associada a (2.3) pode ser escrita como

$$f(x) = \alpha\, g(x)\, G(x)^{\alpha-1}, \tag{2.4}$$

em que $g(x) = dG(x)/dx$ é a pdf da distribuição base.

A família EXP-G, tem como caso especial a distribuição base quando $\alpha = 1$. Diversas outras formar de generalizar distribuições, utilizam resultados da EXP-G, pois muitas expansões para as pdf e cdf das novas distribuições são combinações lineares das pdf e cdf da EXP-G. Neste trabalho, será observada a aplicação deste resultado para encontrar diversas propriedades matemáticas das novas distribuições e família proposta.

### 2.4.2 Classe de distribuições Marshall-Olkin

Marshall e Olkin (1997) introduziram um método interessante de adicionar um novo parâmetro a uma distribuição base para obter uma família ampla de distribuições. Entretanto, eles não investigaram propriedades matemáticas gerais dessa família. Propriedades, tais como, momentos e expansões para a função densidade, foram apresentadas por Barreto-Souza, Lemonte e Cordeiro (2013).

Para a cdf $G(x)$ de uma distribuição base, a função de sobrevivência (sf) é dada por $\overline{G}(x) = P(X > x) = 1 - G(x)$. A sf da família Marshall-Olkin (MO) é definida por

$$\overline{F}(x) = \frac{p\,\overline{G}(x)}{1 - \overline{p}\,\overline{G}(x)}, \tag{2.5}$$

em que $x \in I\!R$, $p > 0$ e $\overline{p} = 1 - p$. A cdf e a pdf associada a (2.5) são dadas, respectivamente, por

$$F(x) = \frac{\overline{G}(x)}{1 - \overline{p}\,\overline{G}(x)} \tag{2.6}$$

e

$$f(x) = \frac{p\,g(x)}{[1 - \overline{p}\,\overline{G}(x)]^2}. \tag{2.7}$$

Se $p = 1$, temos que $\overline{F}(x) = \overline{G}(x)$. Uma medida de confiabilidade importante é a taxa de risco de uma distribuição, $\tau(x) = f(x)/\overline{F}(x)$. Nanda e Das (2012) interpretaram que Marshall e Olkin (1997) chamaram $p$ de parâmetro de inclinação, pois para $p \geq 1$ a taxa de risco da família MO é inferior à taxa de risco da distribuição base e para $0 < p < 1$ a taxa de risco da MO é superior a da distribuição base. Diversas distribuições conhecidas foram generalizadas utilizando a proposta de Marshall e Olkin (1997). Por exemplo, as distribuições MO-Weibull (MARSHALL; OLKIN, 1997) e MO-beta (JOSE; ANCY; RISTIĆ, 2009).

### 2.4.3 Classe de distribuições gama

A classe de distribuições gama utilizada nesta tese foi proposta por Zografos e Balakrishnan (2009). Para uma distribuição base com cdf $G(x)$, eles definiram a distribuição gama-G com cdf dada por

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\gamma\left(a, -\log\left[1 - G(x)\right]\right) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{-\log[1-G(x)]} t^{a-1}\,e^{-t}\,dt$$

e pdf por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \{-\log[1 - G(x)]\}^{a-1} g(x),$$

em que $a > 0$ é o parâmetro de forma que flexibiliza a nova distribuição. A classe gama-G inclui a distribuição base como caso especial quando $a = 1$.

Mais recentemente, Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2014) estudaram diversas propriedades matemáticas da gama-G, tais como função quantílica, momentos ordinários e incompletos, função geradora de momentos, desvios médios, curas de Bonferroni e Lorenz, distribuição assintótica de valores extremos, entropias de Shannon e Rényi, confiabilidade e algumas propriedades das estatísticas de ordem. Para demonstrar a aplicabilidade da nova classe, eles utilizaram dados de falha de componentes mecânicos e estimaram por máxima verossimilhança os parâmetros das distribuições gama log-normal, gama log-logística e gama Weibull. Diversas novas distribuições, utilizando a classe gama-G de Zografos e Balakrishnan (2009) foram propostas recentemente, por exemplo, gama Weibull exponencializada (PINHO; CORDEIRO; NOBRE, 2012), Zografos-Balakrishnan log-Logística (RAMOS *et al.*, 2013).

### 2.4.4 Classe de distribuições McDonald

Para qualquer cdf base $G(x)$, Alexander *et al.* (2012) definiram uma nova família de distribuições denominadas beta-gerada generalizada ou McDonald-G (McG). A cdf da McG é dada por

$$F(x) = I_{G^c(x)}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G^c(x)} \omega^{a-1}(1 - \omega)^{b-1} d\omega,$$

em que $I_y(a, b) = B(a, b)^{-1} \int_0^y w^{a-1}(1 - w)^{b-1}\, dw$ é a função razão beta incompleta. E a pdf correspondente é

$$f(x) = \frac{c}{B(a, b)} g(x) G^{ac-1}(x) \left[1 - G^c(x)\right]^{b-1},$$

em que $a, b, c > 0$, $g(x) = dG(x)/dx$ e $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1 - t)^{b-1}\, dt$ é a função beta.

Os três parâmetros de forma $a$, $b$ e $c$ têm como função introduzir assimetria e curtose na nova distribuição e variar o peso das caldas (TAHIR; NADARAJAH, 2014). Cordeiro, Hashimoto e Ortega (2014) mencionaram que os parâmetros $a$ e $b$ são parâmetros de assimetria e relativamente controlam o peso nas caudas, mas não no pico da distribuição, mas o parâmetro $c$ controla o pico.

A classe de distribuições McG inclui como casos especiais a distribuição base quando $a = b = c = 1$, a classe de distribuições exponencializadas para $b = c = 1$, a classe de distribuições estendidas quando $a = c = 1$, a classe de distribuições beta para $c = 1$ e quando $a = 1$ tem-se a classe de distribuições Kumaraswamy.

Alexander *et al.* (2012) estudaram diversas propriedades matemáticas da McG e fizeram aplicações mostrando a eficiência dos modelos McDonald Weibull e McDonald normal. Esta

é uma classe de distribuições recente e que já gerou algumas novas distribuições, tais como: a distribuição McDonald beta invertida (CORDEIRO; LEMONTE, 2012), a McDonald Burr XII (GOMES; da-SILVA; CORDEIRO, 2013), a McDonald Weibull modificada (MEROVCI; ELBATAL, 2013), entre outras.

### 2.4.5 Classe de distribuições binomial negativa

Novos modelos envolvendo a binomial negativa foram propostos recentemente e aplicados em análise de sobrevivência, por exemplo as distribuições Lindley binomial negativa (ZAMANI; ISMAIL, 2010) e exponencial binomial negativa (HAJEBI; REZAEI; NADARAJAH, 2013).

Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013) propuseram a família binomial negativa generalizada (GNB). Eles encontraram diversas propriedades matemáticas da nova família que possui cdf

$$F(x) = \frac{(1-\beta)^{-s} - \{1-\beta[1-G(x)]\}^{-s}}{[(1-\beta)^{-s}-1]},$$

em que $s > 0$, $0 < \beta < 1$, $G(x)$ é a cdf base e $g(x) = dG(x)/dx$. A respectiva pdf é dada por

$$f(x) = \frac{s\,\beta}{[(1-\beta)^{-s}-1]}\, g(x)\, \{1-\beta[1-G(x)]\}^{-s-1}.$$

Esta generalização adiciona dois parâmetros a distribuição base, proporcionando maior flexibilidade a nova distribuição gerada. A distribuição base é um caso especial da GNB quando $s = 1$ e $\beta \to 0$. Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013) utilizaram a Fréchet binomial negativa para demonstrar a flexibilidade da nova classe ao analisar dados reais.

## 2.5 Estimação e inferência

Neste trabalho, a estimação dos parâmetros das distribuições foi feita utilizando-se o método de máxima verossimilhança. Este método é baseado na função de verossimilhança e fornece uma abordagem para a obtenção de estimativas pontuais e intervalares, além da construção de testes de hipóteses.

### 2.5.1 Estimação por máxima verossimilhança

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de observações não-censuradas de tamanho $n$, em que cada $X_i, i = 1, \ldots, n$, possui distribuição função densidade $f(x; \boldsymbol{\theta})$.

A função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é expressa por

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta}).$$

A função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta})$ mostra que a contribuição de cada observação não-censurada é a sua função de densidade, olhada como função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. A contribuição de cada observação censurada não é, contudo, a sua função de densidade (COLOSIMO; GIOLO, 2006). As observações censuradas somente nos informam que o tempo de

falha é maior que o tempo de censura observado e, portanto, que a sua contribuição para $L(\boldsymbol{\theta})$ é a sua função de sobrevivência $S(x)$, olhada como função do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Neste caso, as observações podem ser divididas em dois conjuntos: $F$ denota o conjunto das observações não-censuradas e $C$ denota o conjunto das observações censuradas.

Considere que os tempos de sobrevivência e de censura são independentes e que a censura é a direita e não informativa (sua distribuição não depende dos parâmetros de interesse). Nesse contexto, a função de verossimilhança é expressa por

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i \in C} f(x_i; \boldsymbol{\theta}) \prod_{i \in F} S(x_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de $\boldsymbol{\theta}$ que maximizam $L(\boldsymbol{\theta})$ ou equivalentemente o logaritmo de $L(\boldsymbol{\theta})$, isto é, $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log[L(\boldsymbol{\theta})]$. Eles são encontrados resolvendo-se o sistema de equações

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial\, L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\, \boldsymbol{\theta}} = 0. \tag{2.8}$$

Como, geralmente, esse sistema é não linear, torna-se necessário usar um algoritmo de otimização. Por exemplo, um algoritmo Newton-Raphson ou quase Newton (NOCEDAL; WRIGHT, 2006; PRESS *et al.*, 1992). As estimativas dos parâmetros das distribuições apresentadas nesta tese foram obtidas pela maximização numérica de $\ell(\boldsymbol{\theta})$. O pacote **bbmle** do software estatístico R (R Development Core Team, 2008) foi utilizado para obter as estimativas de máxima verossimilhanças para os vetores de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ das distribuições apresentadas.

A escolha dos valores iniciais é muito importante em todos os procedimentos iterativos para a estimativa dos parâmetros. Neste trabalho, utilizaram-se as estimativas de máxima verossimilhança da distribuição base e o método gráfico para obter os valores iniciais.

Se o tamanho da amostra é grande e sob certas condições de regularidade para a função de verossimilhança, intervalos de confiança e testes de hipóteses podem ser obtidos usando o fato de que a distribuição assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança é a distribuição normal com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariância dada pelo inverso da matriz de informação de Fisher (SEN; SINGER, 1993).

### 2.5.2 Estatísticas AIC, BIC, CAIC, W$^*$ e A$^*$

Dentre os principais critérios de seleção de modelos utilizados em programas computacionais estão o critério de informação de Akaike - AIC (AKAIKE, 1974), o critério de informação de Akaike corrigido - CAIC (BOZDOGAN, 1987) e o critério de informação de Schwarz - BIC (SCHWARZ, 1978), que são baseados no valor do logaritmo da função de verossimilhança do modelo e dependem do número de observações e do número de parâmetros .

O AIC pode ser calculado como

$$\text{AIC} = -2\,\ell(\boldsymbol{\theta}) + 2\,p,$$

em que $p$ é o número de parâmetros estimados do modelo. Observa-se que dentre todos os possíveis modelos considerados, aquele que possuir o menor valor de AIC será considerado o modelo mais adequado. O BIC pode ser expresso por

$$\text{BIC} = -2\ell(\boldsymbol{\theta}) + p\,\log(n).$$

Uma característica do critério BIC é penalizar os modelos com um maior número de parâmetros, caracterizando a seleção de modelos com número menor de parâmetros. O modelo com menor BIC deve ser o escolhido. Bozdogan (1987) propôs a seguinte correção para o AIC

$$\text{CAIC} = AIC + \frac{2\,p\,(p+1)}{n-p-1}.$$

O AIC pode ter um desempenho ruim se existirem muitos parâmetros em comparação com o tamanho da amostra. Segundo Burnham e Anderson (2004), o CAIC deve ser utilizado quando a razão $\frac{n}{p}$ é pequena ($\frac{n}{p} < 40$). A escolha do modelo é igual a do critério AIC.

Outros dois critérios utilizados para selecionar modelos são as modificações das estatísticas de Crámer-Von Mises (W$^*$) e Anderson-Darling (A$^*$) (CHEN; BALAKRISHNAN, 1995). Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ uma estimativa de $\boldsymbol{\theta}$, então

$$W^* = \left(1 + \frac{0,5}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} \left[u_j - \frac{(2\,j-1)}{2\,n}\right]^2 + \frac{1}{2\,n}$$

e

$$\begin{aligned} A^* &= \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2}\right) \\ &\times \left\{-n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(2\,j-1)\,\log(u_j) + (2\,n+1-2\,j)\,\log(1-u_j)\right]\right\}, \end{aligned}$$

em que $u_j = \Phi([y_j - \overline{y}]/s_y)$, $y_j = \Phi^{-1}(v_j)$, $v_j = F\left(x_{(j)}; \hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$, $\Phi(\cdot)$ é a função acumulada da normal padrão e $\Phi^{-1}(\cdot)$ é sua inversa. O modelo com menor valor das estatísticas será considerado o modelo mais adequado.

## Referências

AKAIKE, H. A new look at statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p. 716–722, 1974.

ALEXANDER, C.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; SARABIA, J. M. Generalized beta-generated distributions. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdan, v. 56, p. 1880 – 1897, 2012.

ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **METRON**, Milan, v. 71, p. 63–79, 2013.

AMOROSO, L. Ricerche intorno alla curva dei redditi. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Heidelberg, v. 2, p. 123–159, 1925.

Barreto-Souza, W.; LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M. General results for the Marshall and Olkin's family of distributions. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, Rio de Janeiro, v. 85, p. 3–21, 2013.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 52, p. 345–370, 1987.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. Multimodel inference understanding AIC and BIC in model selection. **Sociological Methods & Research**, London, v. 33, p. 261–304, 2004.

BURR, I. W. Cumulative frequency distribution. **Annals of Mathematical Statistics**, Chicago, v. 13, p. 215–232, 1942.

CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 27, p. 154–161, 1995.

COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de Sobrevivência Aplicada**. São Paulo: Edgar Blücher, 2006. 370p.

CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v. 81, p. 883–898, 2011.

CORDEIRO, G. M.; HASHIMOTO, E. M.; ORTEGA, E. M. M. The McDonald Weibull model. **Statistics**, New York, v.48, p. 256–278, 2014.

CORDEIRO, G. M.; LEMONTE, A. J. The McDonald inverted beta distribution. **Journal of the Franklin Institute**, Philadelphia, v. 349, p. 1174–1197, 2012.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v. 31, p. 497–512, 2002.

GOMES, A. E.; SILVA, C. Q.; CORDEIRO, G. M. Two extended Burr models: Theory and practice. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, New York, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2012.762402>. Acesso em: 23 maio 2014

GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, London, v. 115, p. 513–583, 1825.

HAJEBI, M.; REZAEI, S.; NADARAJAH, S. An exponential-negative binomial distribution. **REVSTAT–Statistical Journal**, Lisboa, v. 11, p. 191–210, 2013.

JOSE, K. K.; ANCY, J.; RISTIĆ, M. M. A Marshall-Olkin beta distribution and its application. **Journal of Probability and Statistical Science**, Taipei, v. 7, p. 173–186, 2009.

KOTZ, S.; NADARAJAH, S. **Extreme Value Distributions:** theory and Applications. London: Imperial College Press, 2000. 196p.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v. 84, p. 641–652, 1997.

MEROVCI, F.; ELBATAL, I. The McDonald modified Weibull distribution: Properties and applications. Ithaca, 2013. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1309.2961v1.pdf>. Acesso em: 23 maio 2014.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. **IEEE Transactions on Reliability**, New York, v. 42, p. 299–302, 1993.

NADARAJAH, S. Exponentiated Pareto distributions. **Statistics**, London, v. 39, p. 255–260, 2005.

NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. **AStA Advances in Statistical Analysis**, New York, v. 95, p. 219–251, 2011.

NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M. The Zografos-Balakrishnan-G family of distributions: Mathematical properties and applications. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, 2014. In press.

NANDA, A. K.; DAS, S. Stochastic orders of the Marshall-Olkin extended distribution. **Statistics & Probability Letters**, Amsterdam, v. 82, p. 295–302, 2012.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 2006. 664 p.

PERCONTINI, A.; CORDEIRO, G. M.; BOURGUIGNON, M. The G-negative binomial family: general properties and applications. **Advances and Applications in Statistics**, India, v. 35, p. 127 –160, 2013.

PINHO, L. G. B.; CORDEIRO, G. M.; NOBRE, J. S. The gamma-exponentiated Weibull distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, Amsterdam, v. 11, p. 379–395, 2012.

PRESS, W. H.; TEULOSKY, S. A.; VENTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in C:** the art of scientific computing. London: Prentice Hall, 1992. 630 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R:** a language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2008. Disponível em: <http://www.R-project.org>. Acesso em: 23 maio 2014.

RAMOS, M. W. A.; CORDEIRO, G. M.; MARINHO, P. R. D.; DIAS, C. R. B.; HAMEDANI, G. G. The Zografos-Balakrishnan log-logistic distribution: Properties and applications. **Journal of Statistical Theory and Applications**, Amsterdam, v. 12, p. 225–244, 2013.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Cleveland, v. 6, p. 461–464, 1978.

SEN, P. K.; SINGER, J. M. **Large Sample Methods in Statistics:** an Introduction with Applications. New York: Chapman and Hall, 1993. 382 p.

SHAO, Q. Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsterdam, v. 45, p. 675–687, 2004.

SILVA, G. O. **Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico beta Weibull modificada**. 2008. 208 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) — Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade São Paulo, Piracicaba, 2008.

TAHIR, M.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuos univariate distributions-Part I: Well-established G-classes. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, 2014. In press.

ZAMANI, H.; ISMAIL, N. Negative binomial-Lindley distribution and its application. **Journal of Mathematics & Statistics**, Adelaide, v. 6, p. 4–9, 2010.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability analysis. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 30, p. 386–394, 1998.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. **Statistical Methodology**, St. Louis, v. 6, p. 344–362, 2009.

# 3 O MODELO MCDONALD GUMBEL

**Resumo**

Neste trabalho, é proposto um novo modelo denominado distribuição McDonald Gumbel, que possui a grande vantagem de se ajustar a dados reais assimétricos as quais distribuições existentes não se ajustam. Este novo modelo possui como casos especiais as distribuições Gumbel, Gumbel exponencializada (PERSSON; RYDÉN, 2010), beta Gumbel (NADARAJAH; KOTZ, 2004), Kumaraswamy Gumbel, entre outras. Obtêm-se os momentos ordinários, as funções quantílica e geradora de momentos e desvios médios. O método de máxima verossimilhança foi utilizado para ajustar a distribuição proposta. A aplicabilidade do novo modelo é ilustrada com dois conjuntos de dados reais (BRITO *et al.*, 2014).

Palavras-chaves: Distribuição Gumbel; Distribuição McDonald; Função geradora de momentos; Função quantílica; Máxima verossimilhança

**Abstract**

We propose a new model called the McDonald Gumbel distribution, the major advantage of which is its ability to fit asymmetric real data that can not be properly adjusted by existing distributions. This model contains as special models the Gumbel, exponentiated Gumbel (PERSSON; RYDÉN, 2010), beta Gumbel (NADARAJAH; KOTZ, 2004), Kumaraswamy Gumbel distributions, among others. We obtain the ordinary moments, quantile and generating functions and mean deviations. The method of maximum likelihood is used to fit the proposed distribution. The applicability of the new model is illustrated by means of two real data sets (BRITO *et al.*, 2014).

Keywords: Gumbel distribution; Maximum likelihood; McDonald distribution; Moment generating function; Quantile function

## 3.1 Introdução

A literatura estatística tem muitas obras com centenas de distribuições univariadas contínuas, ver por exemplo, Johnson, Kotz e Balakrishnan (1995). A distribuição Gumbel, também conhecida como a distribuição de valor extremo tipo I, é amplamente utilizada na engenharia e tem havido uma crescente necessidade em áreas como análise de inundação, rede de fluxo, confiabilidade de software, velocidade de vento, entre outros. Em hidrologia (WAYLEN; WOO, 1982), por exemplo, os estudos ecológicos na agricultura para planejar as atividades sócio-econômicas e tecnológicas usam a distribuição Gumbel. As previsões meteorológicas precisas têm beneficiado a agricultura pois a escolha do cultivar a ser desenvolvido é sensível às variações climáticas e às chuvas.

Neste artigo, apresenta-se um novo modelo chamado de distribuição *McDonald Gumbel* (denotado, de forma abreviada, por "McGu"). Este modelo contém como casos especiais a

distribuição Gumbel e algumas outras distribuições. A distribuição McGu pode ser utilizada para selecionar seus sub-modelos.

O artigo é apresentado como segue. Na Seção 3.2 , introduz-se a distribuição McGu. A Seção 3.3 fornece expansões úteis para as funções de densidade e acumulada . Na Seção 3.4, obtém-se uma expressão de forma fechada para os momentos. As seções 3.5 e 3.6 apresentam as funções geradoras de momentos e quantílica, respectivamente. Os desvios médios e as curvas de Lorenz e Bonferroni são abordadas na Seção 3.7. A entropia de Rényi é apresentada na Seção 3.8. Na Seção 3.9, estuda-se estimação por máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo. Aplicações utilizando dois conjuntos de dados reais são ilustradas na Seção 3.10. A Seção 3.11 finaliza com alguns comentários.

## 3.2 O Modelo McDonald Gumbel

Alexander *et al.* (2012) definiram uma classe de distribuições generalizadas com função densidade de probabilidade (pdf) dada por

$$f(x) = \frac{c}{B\,(a,b)} g(x) G^{ac-1}(x)\,[1 - G^c(x)]^{b-1}\,, \tag{3.1}$$

em que $a, b, c > 0$, $g(x) = dG(x)/dx$ e $B\,(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt$ é a função beta. A família (3.1) é denominada de classe de distribuições McDonald. A classe inclui como casos especiais a família beta generalizada (EUGENE; LEE; FAMOYE, 2002) para $c = 1$ e a família Kumaraswamy generalizada (CORDEIRO; CASTRO, 2011) para $a = 1$.

A função distribuição acumulada (cdf) correspondente a (3.1) é

$$F(x) = I_{G^c(x)}(a,b) = \frac{1}{B\,(a,b)} \int_0^{G^c(x)} \omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1} d\omega, \tag{3.2}$$

em que $I_y(a,b) = B(a,b)^{-1} \displaystyle\int_0^y w^{a-1}(1-w)^{b-1}\,dw$ é a função razão beta incompleta.

A cdf (3.2) pode ser expressa em termos da função hipergeométrica como

$$F(x) = \frac{G^{ac}(x)}{a\,B(a,b)}\,{}_2F_1\,[a, 1-b; a+1; G^c(x)]\,, \tag{3.3}$$

em que

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(c+j)}\,\frac{x^j}{j!}.$$

As propriedades da cdf $F(x)$ gerada de uma distribuição base $G(x)$ em (3.3), podem, em princípio, ser obtidas a partir das propriedades bem estabelecidas da função hipergeométrica. Ver Seção 9.1 de Gradshteyn e Ryzhik (2007).

A cdf $G(x)$ pode ser qualquer cdf de variável contínua e $F(x)$ é a cdf da família McDonald generalizada ("Mc-G"). Se $X$ é uma variável aleatória com função densidade (3.1), pode-se

escrever $X \sim$Mc-G$(a, b, c, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros associado a $G(x)$. Uma grande vantagem dessa classe é a sua capacidade de se ajustar a dados reais assimétricos a que distribuições existentes não se ajustam.

Ao analisar os dados de tempo de vida, muitas vezes é conveniente trabalhar com o logaritmo dos tempos observados. Assim, se os dados seguem a distribuição Weibull, a distribuição Gumbel aparece naturalmente na análise do logaritmo destas observações.

Define-se a distribuição McGu, substituindo $G(x)$ e $g(x)$ em (3.1) como a cdf e pdf da distribuição Gumbel

$$G(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\} \tag{3.4}$$

e

$$g(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma} - \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}, \tag{3.5}$$

respectivamente, em que $x, \mu \in I\!R$ e $\sigma > 0$.

Então, a pdf da McGu é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c}{\sigma\, B\,(a,b)}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma} - ac\,\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\} \\ &\quad \times\left(1-\exp\left\{-c\,\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}\right)^{b-1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que $x \in I\!R$, $\mu \in I\!R$, $\sigma > 0$ e $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Deste ponto em diante, $X \sim$ McGu$(a, b, c, \mu, \sigma)$ indica uma variável aleatória com função de densidade (3.6). Algumas das possíveis formas de (3.6) para alguns valores selecionados dos parâmetros são exibidos na Figura 3.1.

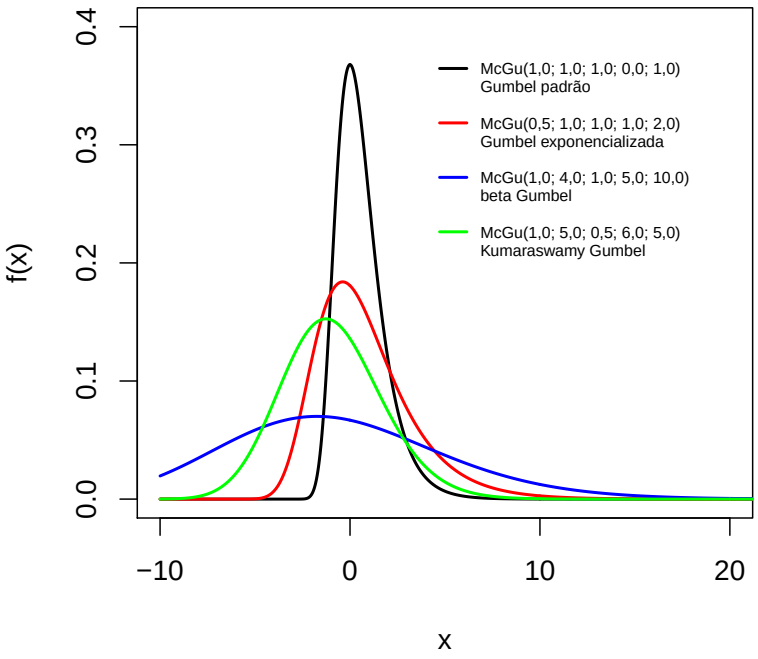
A distribuição McGu contém como casos especiais as distribuições Gumbel (Gu) (JOHNSON; KOTZ; BALAKRISHNAN, 1995) (para $a = b = c = 1$), Gumbel exponencializada (Exp-Gu) (PERSSON; RYDÉN, 2010) (para $b = c = 1$), beta Gumbel (BGu) (NADARAJAH; KOTZ, 2004) para $c = 1$ e Kumaraswamy Gumbel (KwGu) (CORDEIRO; NADARAJAH; ORTEGA, 2012) (para $a = 1$). A distribuição proposta tem dois importantes aspectos: envolve mais parâmetros do que o modelo Gumbel, proporcionando mais flexibilidade e os parâmetros adicionais podem controlar a assimetria, os pesos nas caudas e a entropia no centro da distribuição gerada. A distribuição McGu é um caso especial da família T-X (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013), em que $W(G(x))$ é a distribuição Exp-Gu e $r(t)$ é a fdp da distribuição beta.

A cdf associada a densidade (3.6) é dada por

$$F(x) = I_{\exp\left\{-c\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}}(a,b)\,. \tag{3.7}$$

A distribuição McGu é facilmente simulada pela inversão da cdf (3.7) da seguinte maneira: se $V$ tem distribuição beta com parâmetros $a > 0$ e $b > 0$,

$$X = \mu - \sigma\log\left[-c^{-1}\log(V)\right]$$



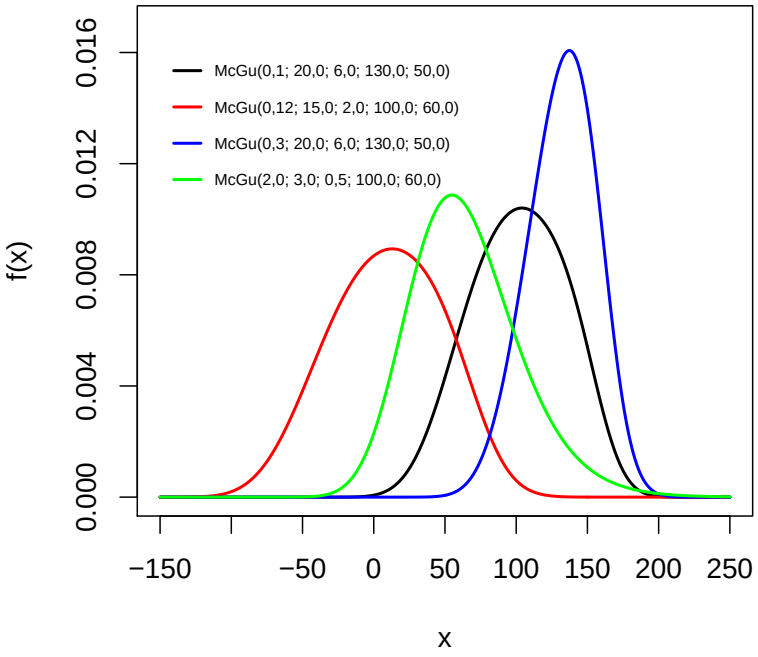




Figura 3.1 – Função densidade da McGu para alguns valores dos parâmetros

(para $c > 0$) tem distribuição McGu$(a, b, c, \mu, \sigma)$. Gráficos comparando as funções densidades exatas da McGu e os histogramas de dois conjuntos de dados simulados com $n = 200$ repetições para valores selecionados dos parâmetros são mostrados na Figura 3.2. Estes gráficos indicam que os valores simulados são consistentes com a distribuição McGu.

A moda de uma distribuição de probabilidade contínua é o valor $x$ em que a pdf tem seu valor máximo. A moda não é necessariamente única, uma vez que a pdf pode ter diversos valores máximos. A moda de uma variável aleatória da distribuição McGu pode ser obtida pela maximização do logaritmo da equação (3.6), isto é

$$\log[f(x)] = \log(c) - \log(\sigma) - \log[B(a,b)] - \frac{(x-\mu)}{\sigma} - a\,c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} + (b-1)\,\log\left[1 - \mathrm{e}^{-c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}\right]. \tag{3.8}$$

Ao derivar a equação (3.8) em relação a $x$ e igualando a zero, a moda de uma variável aleatória da distribuição McGu pode ser obtida como solução da equação

$$\frac{\partial}{\partial x}\log[f(x)] = -\frac{1}{\sigma} + \frac{a\,c}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} - \frac{c\,(b-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma} - c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}}{\sigma\left[1 - \mathrm{e}^{-c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}\right]} = 0. \tag{3.9}$$

A equação (3.9) não pode ser resolvida analiticamente. Entretanto, a moda pode ser calculada numericamente, utilizando um programa de análise estatística. Observe que se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log[f(x)] = -\frac{a\,c}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}} - \frac{c\,(b-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{(2\,x-\mu)}{\sigma}}\left\{c\,\mathrm{e}^{\frac{\mu}{\sigma}} + \mathrm{e}^{\frac{x}{\sigma}}\left[1 - \mathrm{e}^{-c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}\right]\right\}}{\sigma^2\left[1 - \mathrm{e}^{-c\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}}\right]^2},$$

é menor do que zero, qualquer raiz $x$ de (3.9) é uma moda da variável aleatória $x$.

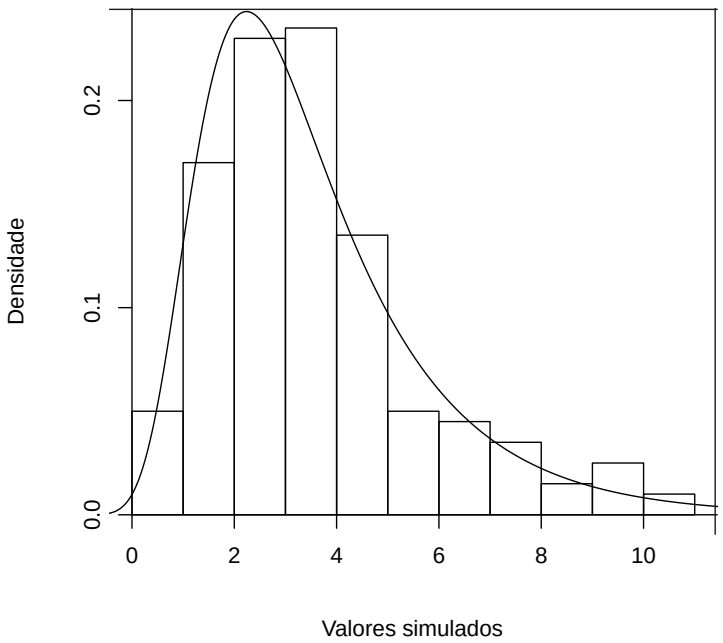
## 3.3 Expansões úteis

Algumas expansões para (3.1) e (3.2) podem ser encontradas utilizando o conceito de distribuições exponencializadas. Para uma cdf $G(x)$ qualquer, define-se uma variável aleatória $Y$ com distribuição G-exponencializada (de forma abreviada"Exp-G") com parâmetro de potência $\alpha > 0$, diz-se $Y \sim$ Exp-G$(\alpha, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros de $G$, se a cdf e a pdf são dadas por

$$H(y) = G^{\alpha}(y) \qquad \text{e} \qquad h(y) = \alpha\,g(y)\,G^{\alpha-1}(y),$$

respectivamente. As propriedades das distribuições exponencializadas têm sido estudadas por diversos autores nos últimos anos. Ver Mudholkar e Srivastava (1993), Gupta, Gupta e Gupta (1998), Gupta e Kundu (2001) e Nadarajah e Gupta (2007) para distribuições Weibull exponencializada, Pareto exponencializada, exponencial exponencializada e gama exponencializada, respectivamente.

(a)




(b)

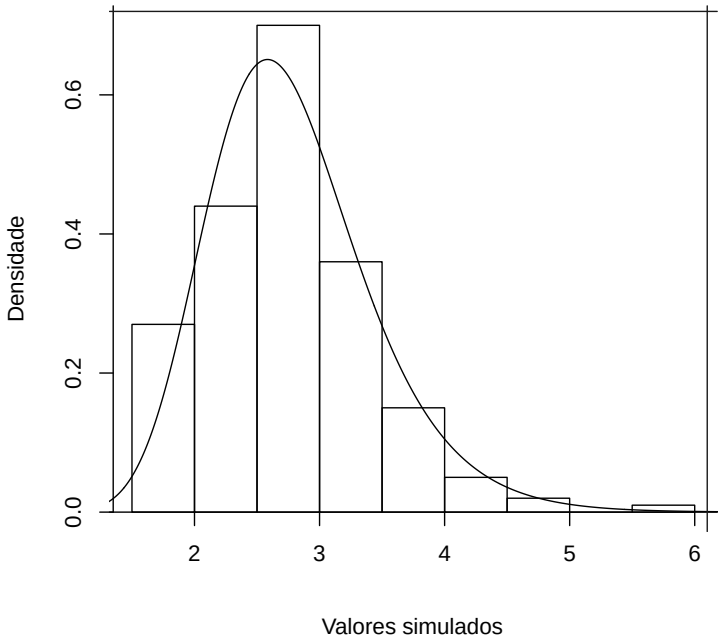



Figura 3.2 – Gráficos da função densidade McGu para dois conjuntos de dados simulados: (a) $a = 1,8; b = 0,5; c = 3,0; \mu = 0; \sigma = 1,0$ e (b) $a = 1,0; b = 2,0; c = 3,0; \mu = 2,0; \sigma = 0,8$

Utilizando a combinação linear apresentada em Alexander *et al.* (2012), pode-se escrever (3.1) como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \, h_{(a+k)c}(x), \tag{3.10}$$

em que $h_{(a+k)c}(x)$ denota a pdf da distribuição Exp-Gu$(c(a+k), \boldsymbol{\theta})$ dada por

$$h_{(a+k)c}(x) = \frac{(a+k)c}{\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right] \exp\left\{-(a+k)c \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}$$

com os coeficientes $w_k$ dados por

$$w_k = \frac{(-1)^k \binom{b-1}{k}}{(a+k)\, B(a,b)}.$$

Claramente, $\sum_{k=0}^{\infty} w_k = 1$. Assim, a função densidade da Mc-Gu pode ser expressa como uma mistura de funções densidades da Exp-Gu. Consequentemente, algumas de suas propriedades matemáticas podem ser obtidas das propriedades conhecidas da distribuição Exp-Gu. Se $b$ é um inteiro positivo, o índice $k$ em (3.10) para em $b-1$. Por integração de (3.10), obtém-se

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \, H_{(a+k)c}(x), \tag{3.11}$$

em que $H_{(a+k)c}(x)$ é a cdf da distribuição Exp-Gu$(c(a+k), \boldsymbol{\theta})$. As equações (3.10) e (3.11) são muito apropriadas para obter algumas propriedades estruturais da distribuição McGu. Os momentos ordinários, centrais, incompletos e fatoriais e a função geradora de momentos (mgf) da distribuição McGu podem ser expressos como uma combinação linear destas quantidades para a distribuição Exp-Gu. As expansões (3.10) e (3.11) são os principais resultados desta seção.

## 3.4 Momentos

A necessidade e a importância dos momentos em qualquer análise estatística especialmente no trabalho aplicado é óbvia. Alguns dos mais importantes recursos e características de uma distribuição podem ser estudados, usando-se os momentos (por exemplo tendência, dispersão, assimetria e curtose). O $r$-ésimo momento de uma variável aleatória Exp-Gu (NADARAJAH; KOTZ, 2004) $Z_a$ com parâmetros $a$, $\mu$ e $\sigma$ é

$$E(Z_a^r) = a\mu^n \sum_{j=0}^{r} \frac{(-1)^j \Gamma(r+1)}{\Gamma(r-j+1)\, j!} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^j \left\{\left(\frac{\partial}{\partial d}\right)^j \left[(a)^{-d}\Gamma(d)\right]\right\}\Bigg|_{d=1}.$$

Da equação (3.10), obtém-se

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \, E\left[Z_{(a+k)c}^r\right],$$

e, então,

$$\mu'_r = c\,\mu^r \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}\,\Gamma(a+b)\,\Gamma(r+1)\,\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^j}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-k)\,\Gamma(r-j+1)\,j!\,k!} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial d}\right)^j [(a+k)c]^{-d}\,\Gamma(d)\right\}\Bigg|_{d=1} \tag{3.12}$$

Os quatro primeiros momentos ordinários de $X$ são dados por

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k\,[\mu + \sigma\gamma + \sigma(a+k)c],$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k\,\left\{6\mu^2 + 12\mu\sigma\gamma + \pi^2\sigma^2 + 6\sigma^2\gamma^2\right. \\ &+ \left. 12\sigma(\mu+\sigma\gamma)\log[(a+k)c] + 6\sigma^2\log^2[(a+k)c]\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{2}\,\left\{2\mu^3 + 6\gamma\sigma\mu^2 + (\pi^2+6\gamma^2)\mu\sigma^2 - \left(\pi^2\gamma + 4\zeta(3) + 2\gamma^3\right)\sigma^3\right. \\ &+ \left(12\gamma\sigma^2\mu + 6\sigma\mu^2 - \sigma^3\pi^2 - 6\sigma^3\gamma^2\right)\log[(a+k)c] \\ &+ \left. 6\sigma^2\,(\mu-\sigma\gamma)\log^2[(a+k)c] - 2\sigma^3\log^3[(a+k)c]\right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(X^4) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{20}\,\left\{20\mu^4 + 80\gamma\sigma\mu^3 - 40\sigma^3\left(\pi^2\gamma + 4\zeta(3) + 2\gamma^3\right) + 20\sigma^2\left(\pi^2+6\gamma^2\right)\right. \\ &+ \left(3\pi^4 + 20\gamma^4 + 160\gamma\zeta(3) + 20\pi^2\gamma^2\right)\sigma^4 + 20\sigma^4\,(4\gamma+1)\log^4[(a+k)c] \\ &+ 40\sigma\left[\left(\pi^2\gamma + 4\zeta(3) + 2\gamma^3\right)\sigma^3 - \left(\pi^2+6\gamma^2\right)\sigma^2\mu + 6\gamma\sigma\mu^2 + 2\mu^3\right]\log[(a+k)c] \\ &+ \left. 20\sigma^2\left(\pi^2\sigma^2 + 6\gamma^2\sigma^2 - 12\gamma\sigma\mu + 6\mu^2\right)\log^2[(a+k)c] - 80\sigma^3\mu\log^3[(a+k)c]\right\}, \end{aligned}$$

em que $\gamma$ denota a constante de Euler e $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ é a função zeta.

As medidas de variância, assimetria e curtose podem ser calculadas utilizando as bem conhecidas expressões. Gráficos de assimetria e curtose para valores selecionados de $a$ e $b$ como função de $c$ para $\mu = 100$ e $\sigma = 50$ são apresentados na Figura 3.3. Para valores crescentes do parâmetro $c$, a assimetria aumenta e a curtose inicialmente decresce para um valor mínimo e depois deste ponto aumenta.

Momentos incompletos são utilizados para medir desigualdades: por exemplo, curvas de Lorenz e Bonferroni e índices de Pietra e Gini. O primeiro momento incompleto da variável aleatória $Z_a$ com parâmetros $a$, $\mu$ e $\sigma$, $\mu'_{Z_a}(t) = \int_{-\infty}^{t} x\,h_a(x)\,dx$, é dado por

$$\mu'_{Z_a}(t) = t\exp\left\{-a\exp\left[-\frac{(t-\mu)}{\sigma}\right]\right\} + \sigma E_i\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}, \tag{3.13}$$

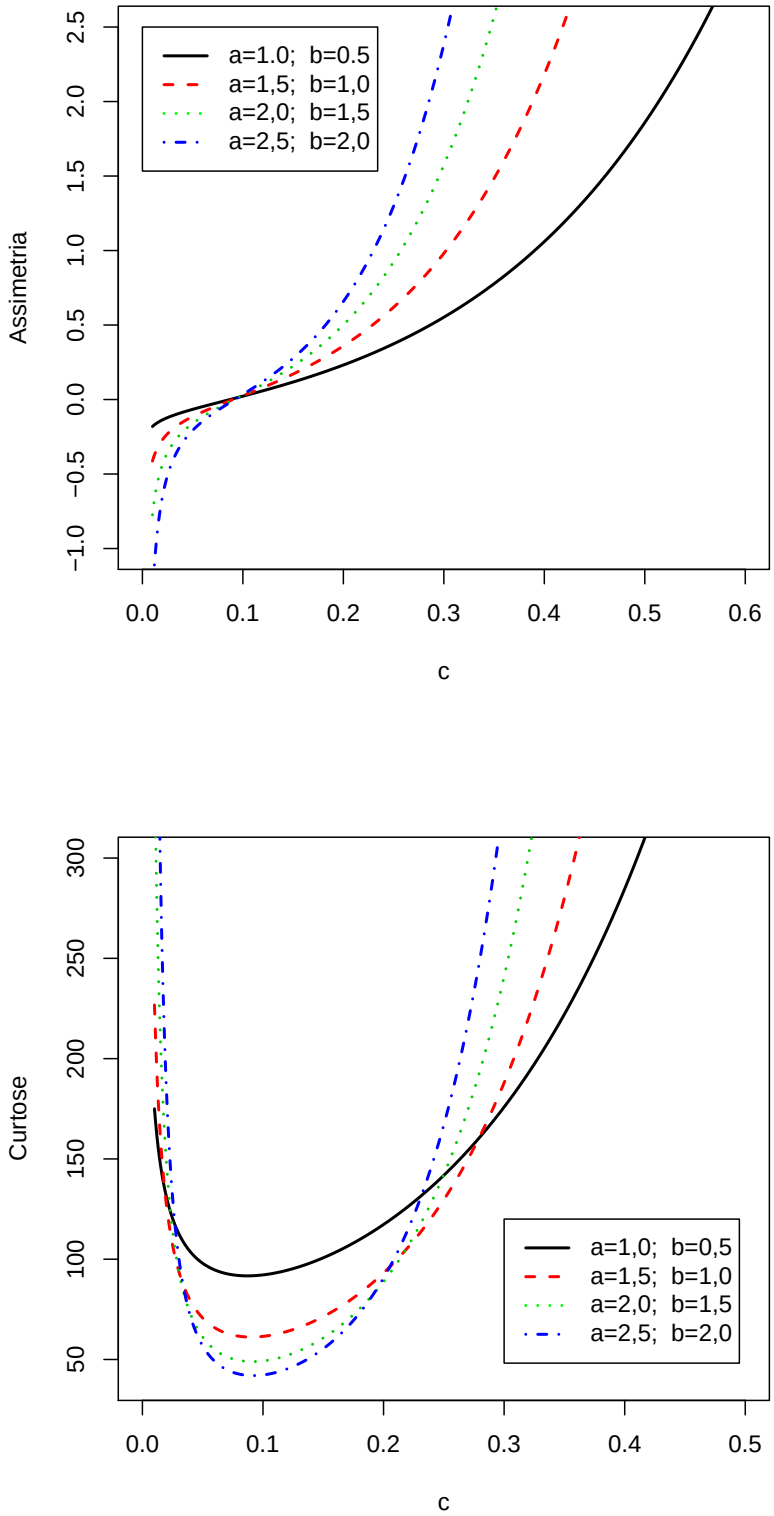



Figura 3.3 – Assimetria e curtose da distribuição McGu como uma função de $c$ para alguns valores de $a$ e $b$ com $\mu = 100$ e $\sigma = 50$

em que $E_i = \int_x^\infty x^{-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$ é a função integral exponencial (para $x > 0$) e pode ser reescrita como

$$E_i = \gamma + \log(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\,k!}.$$

Das equações (3.10) e (3.13), obtém-se

$$\mu'_X(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} w_k \left[\exp\left\{-(a+k)c\exp\left[-\frac{(t-\mu)}{\sigma}\right]\right\} + \sigma E_i\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}\right]. \quad (3.14)$$

## 3.5 Função geradora

A função geradora de momentos (mgf) de uma variável aleatória é uma especificação alternativa de sua distribuição de probabilidade. Diferenciando $M_X(t)$ em relação a $t$ e fazendo $t = 0$ obtém-se o $i$-ésimo momento sobre zero.

Após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever a mgf $M(t) = E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{t\,Z}}\right)$ da variável aleatória $Z_a$, com parâmetros $a$, $\mu$ e $\sigma$, como

$$M_a(t) = \mathrm{e}^{\mu\,t}\,a^{\sigma\,t}\,\Gamma(1-\sigma\,t). \quad (3.15)$$

Então, a mgf de $X$ segue de (3.10) e de (3.15) como

$$M_X(t) = E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{t\,X}}\right) = \mathrm{e}^{\mu\,\mathrm{t}}\,\Gamma(1-\sigma\,\mathrm{t}) \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{w_k}\,[(\mathrm{a}+\mathrm{k})\mathrm{c}]^{\sigma\,\mathrm{t}}.$$

## 3.6 Função quantílica

Funções quantílicas são utilizadas em grande escala na estatística de modo geral e muitas vezes para encontrar representações em termos de tabelas de referências para percentis. A função quantílica (qf) da distribuição McGu, $Q(u) = F^{-1}(u)$, pode ser expressa em termos da qf da distribuição beta. Encontrando a inversa de $F(x) = I_{\left(\exp\left\{-c\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}\right)}(a,b) = u$, obtém-se

$$x = Q(u) = \mu - \sigma\,\log\left\{-c^{-1}\,\log\left[Q_{a,b}(u)\right]\right\}, \quad (3.16)$$

em que $Q_{a,b}(u) = I_u^{-1}(a,b)$ é a qf da beta. A seguinte expansão para $Q_{a,b}(u)$ pode ser encontrada no website wolfram [1]

$$Q_{a,b}(u) = \sum_{i=1}^{4} A_i\,[a\,B\,(a,b)\;u]^{i/a} + O(u^{5/a}),$$

em que os coeficientes são

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \frac{b-1}{a+1}, \qquad A_3 = \frac{(b-1)(a^2+3ab-a+5b-4)}{2(a+1)^2(a+2)}$$

[1] http://functions.wolfram.com/06.23.06.0004.01 - Accessed 26/06/2013.

e

$$A_4 = \frac{(b-1)[a^4 + (6b-1)a^3 + (b+2)(8b-5)a^2 + (33b^2 - 30b + 4)a + 6(31b - 47) + 18]}{3(a+1)^3(a+2)(a+3)}.$$

Para $y \in (0,1)$, tem-se $\log[-k\,\log(y)] = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k^j}{j}\,[1+\log(y)]^j$. Utilizando a expansão binomial, obtém-se

$$\log[-k\,\log(y)] = -\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{j} \frac{k^j}{j}\,\binom{j}{r}\,\log(y)^r. \tag{3.17}$$

Usando as equações 1.512 e 0.314 (para uma série de potência elevada a um inteiro positivo) dada por Gradshteyn e Ryzhik (2007), pode-se reescrever (3.17) como

$$\log[-k\,\log(y)] = -\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^j\,\binom{j}{r}\,d_t}{j}\,(y-1)^{r+t}, \tag{3.18}$$

em que $d_0 = 1$, $d_m = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}[t\,(r+1) - m]\,a_t\,d_{m-t}$ para $m \geq 1$, $r$ é natural e $a_t = \frac{(-1)^t}{t+1}$.

Uma segunda expressão para a qf de $X$ segue de (3.18) como

$$Q(u) = \mu + \sigma \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\binom{j}{r}}{j\,c^j}\,d_t\,[Q_{a,b}(u) - 1]^{r+t}.$$

## 3.7 Desvios médios

Aqui, calculam-se as seguintes medidas: desvios médios e curvas de Lorenz e Bonferroni. Uma medida da dispersão de uma população é dada pelo conjunto de desvios da média e da mediana definidos por $\delta_1(X) = 2\mu_1'\,F(\mu_1') - 2T_1(\mu_1')$ e $\delta_2(X) = \mu_1' - 2T_1(M)$, respectivamente, em que $\mu_1' = E(X)$, a mediana $M = Q(1/2)$ de $X$ é determinada de (3.16), $F(M)$ e $F(\mu_1')$ são obtidos de (3.7) e $T_1(q) = \int_{-\infty}^{q} x\,f(x)dx$ é o primeiro momento incompleto de $X$ calculado de (3.14) como

$$T_1(q) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k\,\frac{(a+k)\,c}{\sigma}\int_q^{\infty} x\,\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}^{(a+k)\,c} dx.$$

Fazendo $t = \exp\left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]$, obtém-se

$$\begin{aligned} T_1(q) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k\,\{\mu + \sigma\,\gamma + \sigma\,\log[(a+k)\,c] + \sigma\,\exp[-(a+k)\,c\,v]\,\log(v) \\ &- \mu\,\exp(-a\,v) + \sigma\,c\,\Gamma[0,(a+k)\,v]\}\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

em que $v = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{q}-\mu}{\sigma}}$, $\gamma$ denota a constante de Euler e $\Gamma(a,z) = \int_z^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{t}^{\mathrm{a}-1}\,dt$ é a função gama incompleta superior. A equação (3.19) é o principal resultado desta seção a partir do qual $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ são imediatamente determinados.

O primeiro momento incompleto $T_1(q)$ pode ser usado para obter as curvas de Lorenz e Bonferroni que são ferramentas fundamentais para a análise de dados em diversas áreas como economia, confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para uma dada probabilidade $\pi$, elas são definidas por $L(\pi) = T_1(q)/\mu_1'$ e $B(\pi) = T_1(q)/(\pi\,\mu_1')$, respectivamente, em que $q = Q(\pi)$ é obtida de (3.16). Em economia, se $\pi$ é a proporção de unidades cuja renda é menor ou igual a $q$, $L(\pi)$ dá a proporção do volume total de renda acumulada com renda menor ou igual a $q$. De modo similar, a curva de Bonferroni $B(\pi)$ dá a razão entre a renda média desse grupo e a renda média da população. A Figura 3.4 apresenta as curvas de Lorenz e Bonferroni para valores selecionados dos parâmetros.

## 3.8 Entropia

A entropia é a medida da incerteza de uma variável aleatória. Duas medidas de entropia muito populares são as entropias de Rényi e de Shannon (RÉNYI, 1961; SHANNON, 1951). A entropia de Rényi de uma variável aleatória $X$ com pdf $f(\cdot)$ é definida como

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho}\,\log\left\{E[f(X)^{\rho-1}]\right\} = \frac{1}{1-\rho}\,\log\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^{\rho}(x)\,dx\right],$$

para $\rho > 0$ e $\rho \neq 1$. A entropia de Rényi é importante em ecologia estatística como índice de diversidade. A entropia de Shannon de uma variável aleatória $X$ é definida como $E\{-\log[f(X)]\}$. Este é o caso especial da entropia de Rényi quando $\rho \to 1$.

Da equação (3.10), pode-se escrever a entropia de Rényi de $X$ como

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho}\,\log\left[\frac{\Gamma(s)}{\sigma^{s-1}\,B\,(a,b)^s}\,\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(a\,s+k)^{-s}\binom{s\,b-s}{k}\right].$$

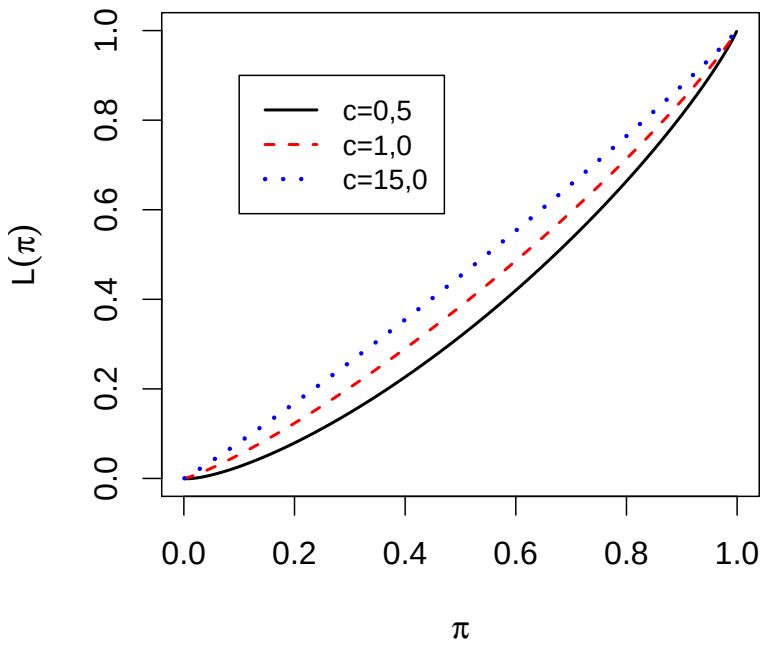
## 3.9 Estimação

Adota-se o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo. O logaritmo da função de verossimilhança, $\ell(\boldsymbol{\theta})$, de uma amostra aleatória $x_1,\ldots,x_n$ de $X$ com pdf (3.6) é dada por

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= n\,\log(c) - n\,\log(\sigma) - n\,\log\left[B\,(a,b)\right] - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{\sigma} - a\,c\,\sum_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right]\\ &+ (b-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\exp\left\{-c\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right]\right\}\right). \qquad (3.20)\end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança pode ser maximizado diretamente utilizando o software R (pacote **bbmle**) ou por solução do sistema de equações não-lineares obtido por derivar (3.20) em relação aos parâmetros do modelo. Esta função requer valores iniciais e, neste trabalho, foram utilizados as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros

(a)




(b)

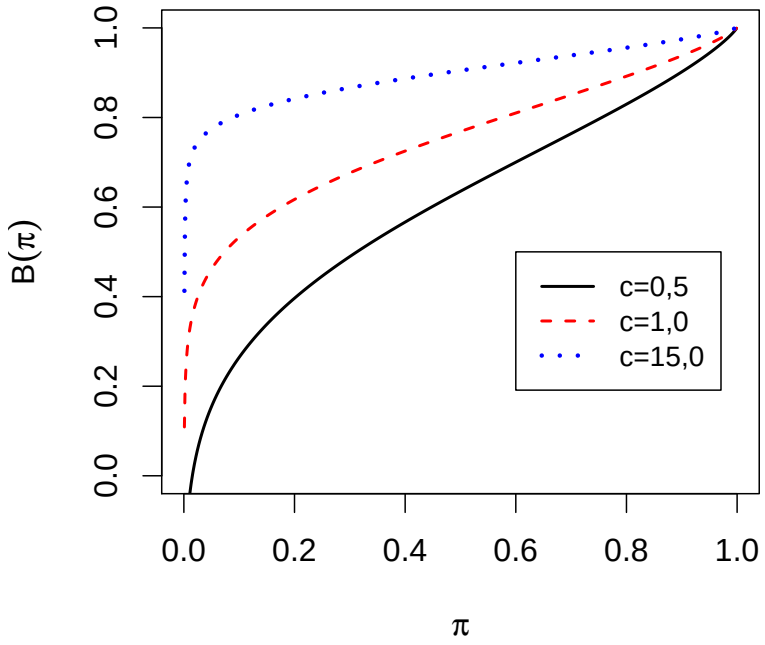



Figura 3.4 – (a) Curvas de Lorenz e (b) Bonferroni para $a = 2,0; b = 4,0; \mu = 10,0$ e $\sigma = 2,0$

da distribuição Gumbel com $a = b = c = 1$. Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$ são dados

por

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = n\left[\psi(a+b)-\psi(a)\right] - c\sum_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right],$$

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = n\left[\psi(a+b)-\psi(b)\right] + \sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}\right),$$

$$\begin{aligned} U_c(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{c} - a\sum_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma}\right] \\ &- (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\exp[-(x_i-\mu)/\sigma]\exp\left(-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right)}{1-\exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\mu(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\sigma} - \frac{ac}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{c\,(b-1)}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\frac{\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\ \exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}}{1-\exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2}\left\{1-ac\exp[-(x_i-\mu)/\sigma]\right\} \\ &+ \frac{c(b-1)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\ \exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}}{1-\exp\left\{-c\exp\left[-(x_i-\mu)/\sigma\right]\right\}}, \end{aligned}$$

em que $\psi(s) = d\log\Gamma(s)/ds$ é a função digama. Para estimação intervalar e testes de hipóteses para os parâmetros do modelo, a matriz de informação observada é requerida. Os $5\times 5$ elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ são dados no Apêndice APÊNDICE A.-

Sob certas condições de regularidade, a distribuição normal multivariada $N_5\left(0, J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}\right)$, em que $J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ é a matriz de informação observada avaliada em $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, pode ser utilizada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros. Para comparar a distribuição McGu com alguns de seus casos especiais, podem-se usar três testes bem conhecidos: a razão de verossimilhança (LR), estatística de Wald e escore de Rao. Ao testar modelos encaixados, estas estatísticas convergem para uma distribuição qui-quadrado com número de graus de liberdade igual a diferença ente os números de parâmetros nos dois modelos.

## 3.10 Aplicações

Nesta seção, apresentam-se duas aplicações utilizando conjunto de dados reais para demonstrar a flexibilidade e aplicabilidade do modelo proposto sobre outros modelos paramétricos. As avaliações numéricas requeridas foram implementadas usando a versão 3.0.0 do R (pacote **bbmle**).

### 3.10.1 Aplicação 1: Dados de vazão mínima

Nesta aplicação, as descargas mínimas de sete dias consecutivos do Rio Cuiabá, Cuiabá, Mato Grosso, Brazil, são analisadas. Estes dados foram analisados anteriormente por Cordeiro, Nadarajah e Ortega (2012). O estudo utiliza a série de dados de 38 anos (Janeiro de 1962 a Outubro de 1999) relatados como vazões mínimas pela estação hidrológica n$^o$ 66260001, instalada no Rio Cuiabá na cidade de Cuiabá. Na Tabela 3.1, é apresentado um resumo descritivo desses dados. Os dados têm assimetria negativa e distribuição platicúrtica.

Tabela 3.1 – Estatísticas descritivas

| Média | Mediana | Des. Pad. | Variância | Assimetria | Curtose | Mín | Máx |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $110,20$ | $115,90$ | $38,38$ | $1473,13$ | $-0,179$ | $-1,149$ | $43,86$ | $186,40$ |

Calculam-se as estimativas de máxima verossimilhança (MLEs) dos parâmetros do modelo e o critério de informação de Akaike (AIC) para comparar as distribuições McGu, KwGu, Exp-Gu e Gu. Os resultados são apresentados na Tabela 3.2. De acordo com o menor valor da estatística AIC, o modelo McGu poderia ser escolhido como o melhor modelo entre os modelos ajustados. Além disso, calculam-se as estatísticas de qualidade de ajuste Cramér-von Mises (W$^*$) e Anderson-Darling (A$^*$), a fim de verificar qual modelo se ajusta melhor aos dados. As estatísticas W$^*$ e A$^*$ são descritas por Chen e Balakrishnan (1995). Em geral, quanto menor os valores dessas estatísticas, melhor o ajuste aos dados. Os valores das estatísticas W$^*$, A$^*$ e a estatística de Kolmogorv-Smirnov (K-S) para os quatro modelos ajustados são dados na Tabela 3.3. Com base nestes valores, o modelo McGu analisa os dados melhor que os outros três modelos.

Tabela 3.2 – Estimativas dos parâmetros para alguns modelos ajustados para os dados de vazão mínima (os erros padrão são dados em parênteses) e os valores da estatística AIC

| Modelo | MLEs | | | | | AIC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $\mu$ | $\sigma$ | |
| Gu | - | - | - | 91,003 | 35,962 | 392,867 |
| | | | | (6,189) | (4,434) | |
| Exp-Gu | 1,001 | - | - | 90,979 | 35,971 | 394,867 |
| | (0,172) | - | - | (0,005) | (4,436) | |
| KwGu | - | 20,068 | 4,052 | 90,906 | 111,885 | 391,883 |
| | - | (33,720) | (1,750) | (0,066) | (51,320) | |
| McGu | 0,112 | 22,723 | 6,544 | 133,103 | 55,699 | 391,065 |
| | (0,098) | (30,870) | (3,210) | (0,290) | (17,438) | |

Os parâmetros adicionais da distribuição McGu são testados utilizando a estatística LR. Os valores da estatística LR são listados na Tabela 3.4. A estatística LR comparando a distribuição McGu com a Gu e com a Exp-Gu tiveram os mesmos valores porque o parâmetro extra estimado para o modelo exp-Gu é aproximadamente um. Neste caso, a distribuição Exp-Gu coincide com

Tabela 3.3 – Estatísticas de qualidade de ajuste para os dados de vazão mínima

| Modelo | W* | $p$-valor | A* | $p$-valor | K-S | $p$-valor |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gumbel | 0,186 | 0,008 | 1,121 | 0,006 | 0,165 | 0,252 |
| Exp-Gu | 0,186 | 0,008 | 1,121 | 0,006 | 0,165 | 0,252 |
| KwGu | 0,104 | 0,098 | 0,645 | 0,093 | 0,138 | 0,464 |
| McGu | 0,073 | 0,257 | 0,468 | 0,250 | 0,131 | 0,530 |

a distribuição Gu. Portanto, para os dados de vazão mínima, rejeitam-se as três hipóteses nulas com base nas estatísticas LR em favor da distribuição McGu.

Tabela 3.4 – Testes LR para os dados de vazão mínima

| Modelos | Hipóteses | Estatística $LR$ | $p$-valor |
|---|---|---|---|
| McGu vs Gu | $H_0 : a = b = c = 1 \; vs \; H_1 : H_0$ é falsa | 7,802 | 0,0225 |
| McGu vs Exp-Gu | $H_0 : b = c = 1 \; vs \; H_1 : H_0$ é falsa | 7,802 | 0,0101 |
| McGu vs KwGu | $H_0 : a = 1 \; vs \; H_1 : H_0$é falsa | 2,705 | 0,0582 |

O histograma dos dados com as densidades ajustadas da Gu, Exp-Gu, KwGu e McGu e o gráfico dos quantis são apresentados na Figuras 3.5. Estes gráficos indicam um razoável ajuste da distribuição McGu. Com base nos testes e nos gráficos, pode-se concluir que a distribuição Mc-Gu é o melhor modelo entre os ajustados a esses dados.

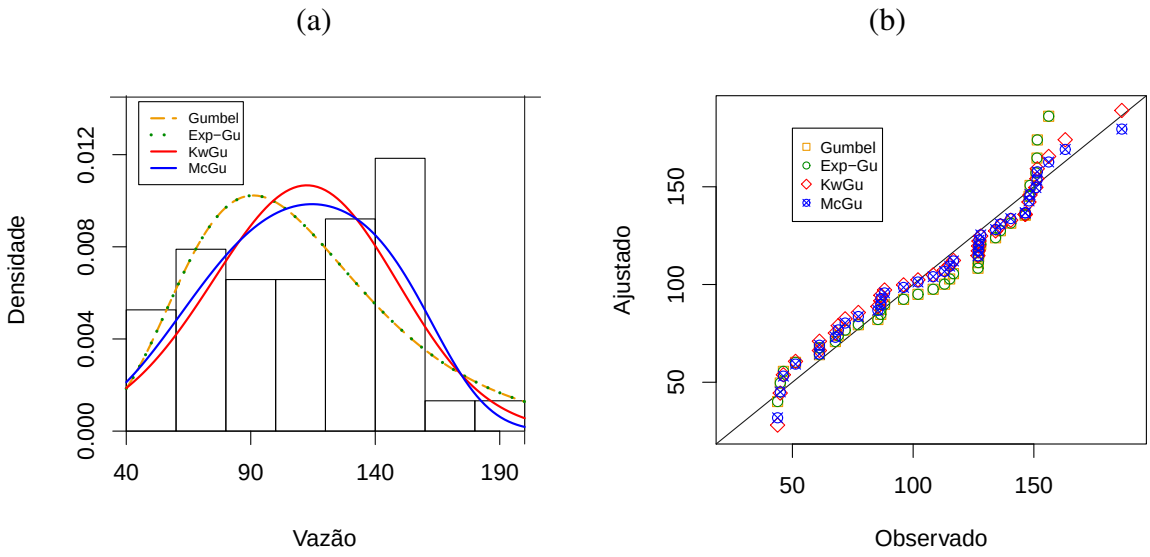



Figura 3.5 – (a) Histograma com densidades ajustadas e (b) gráfico dos quantis para os dados de vazão mínima

### 3.10.2 Aplicação 2: Dados de inundações

Na segunda aplicação, os excessos de picos de cheias (em $m^3/s$) do Rio Wheaton perto de Carcross no Território de Yukon, Canadá, são analisados. Considera-se o conjunto de dados

apresentados em Akinsete, Famoye e Lee (2008). Os dados consistem de 72 inundações entre os anos $1958 - 1984$, arredondados para uma casa decimal. Na Tabela 3.5, apresenta-se um resumo descritivo destes dados. Nota-se que a assimetria e a curtose são positivas.

Tabela 3.5 – Estatísticas descritivas

| Média | Mediana | Des. Pad. | Variância | Assimetria | Curtose | Mín | Máx |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12,20$ | $9,50$ | $12,30$ | $151,22$ | $1,44$ | $2,73$ | $0,10$ | $64,00$ |

Também calculam-se os MLEs e a estatística AIC para os parâmetros das distribuições ajustadas McGu, KwGu, Exp-Gu e Gu para estes dados. Os resultados são apresentados na Tabela 3.6. De acordo com o menor valor da estatística AIC, o modelo McGu poderia ser escolhido como o melhor modelo entre os quatro modelos ajustados. Calculam-se as estatísticas W$^*$, A$^*$ e $K - S$ a fim de verificar qual o modelo que melhor se ajusta a esses dados. Os valores dessas estatísticas para os quatro modelos competitivos são dados na Tabela 3.7, verificando-se que o modelo McGu se ajusta melhor aos dados do que os outros três modelos.

Tabela 3.6 – Estimativas dos parâmetros para alguns modelos ajustados para os dados de inundações (os erros padrão são dados em parênteses) e os valores da estatística AIC

| Modelo | MLEs | | | | | AIC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $\mu$ | $\sigma$ | |
| Gu | - | - | - | 6,969 | 8,189 | 542,872 |
| | | | | (1,009) | (0,818) | |
| Exp-Gu | 0,979 | - | - | 7,145 | 8,190 | 544,872 |
| | (0,055) | - | - | (0,002) | (0,819) | |
| KwGu | - | 0,188 | 0,002 | 14,756 | 2,196 | 529,038 |
| | - | (0,032) | (0,001) | (0,042) | (0,269) | |
| McGu | 0,131 | 0,116 | 0,003 | 15,915 | 1,794 | 517,823 |
| | (0,042) | (0,020) | (<0,001) | (0,010) | (0,081) | |

Tabela 3.7 – Estatísticas de bondade de ajuste para os dados de inundações

| Modeol | W$^*$ | $p$-valor | A$^*$ | $p$-valor | K-S | $p$-valor |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gumbel | 0,275 | <0,001 | 1,875 | <0,001 | 0,158 | 0,054 |
| Exp-Gu | 0,275 | <0,001 | 1,875 | <0,001 | 0,158 | 0,054 |
| KwGu | 0,182 | 0,009 | 1,150 | 0,005 | 0,177 | 0,022 |
| McGu | 0,179 | 0,010 | 0,942 | 0,017 | 0,080 | 0,741 |

Os parâmetros adicionais da distribuição McGu também são testados usando a estatística LR. Na Tabela 3.8, apresentam-se os resultados para esses dados. As estatísticas LR para comparar as distribuições McGu com a Gu e com a Exp-Gu produzem os mesmos valores porque o parâmetro extra do modelo Exp-Gu é aproximadamente um. Portanto, para os dados de inundações, rejeitamos a hipótese nula para os três testes LR em favor da distribuição McGu. O

histograma dos dados com as densidades ajustadas da Gu, Exp-Gu, KwGu e McGu e o gráfico dos quantis são apresentados na Figura 3.6 e indicam um bom ajuste da distribuição McGu. Utilizando os testes e os gráficos, podem-se dizer que a distribuição McGu é o modelo mais adequado entre os modelos utilizados para esses dados.

Tabela 3.8 – Testes LR para os dados de inundações

| Modelos | Hipóteses | Estatística $LR$ | $p$-valor |
|---|---|---|---|
| McGu vs Gu | $H_0 : a = b = c = 1 \; vs \; H_1 : H_0$ é falsa | 33,035 | <0,0001 |
| McGu vs Exp-Gu | $H_0 : b = c = 1 \; vs \; H_1 : H_0$ é falsa | 33,035 | <0,0001 |
| McGu vs KwGu | $H_0 : a = 1 \; vs \; H_1 : H_0$ é falsa | 12,615 | 0,0002 |

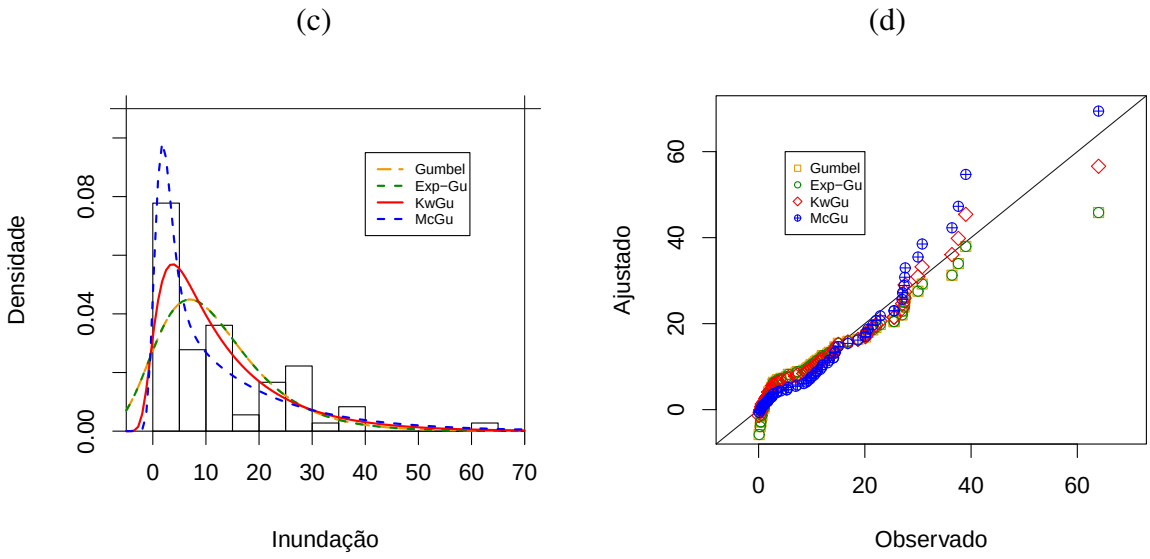



Figura 3.6 – (c) Histograma com densidades ajustadas e (d) gráfico dos quantis para os dados de inundações

## 3.11 Considerações finais

Neste artigo, foram estudadas as propriedades de uma generalização da distribuição Gumbel, denominada de distribuição McDonald Gumbel (McGu), que pode ser bastante flexível em análises de dados reais contínuos em diversas áreas de engenharia. Algumas de suas propriedades estruturais foram obtidas incluindo os momentos e a função geradora de momentos. O método de máxima verossimilhança foi proposto para estimar os parâmetros. A matriz de informação observada é apresentada. Dois conjuntos de dados reais são utilizados para ilustrar a aplicação da nova distribuição.

**Referências**

AKINSETE, A.; FAMOYE, F.; LEE, C. The beta-Pareto distribution. **Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics**, Berlin, v. 42, p. 547–563, 2008.

ALEXANDER, C.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M.; SARABIA, J. M. Generalized beta-generated distributions. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v. 56, p. 1880 – 1897, 2012.

ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **METRON**, Milan, v. 71, p. 63–79, 2013.

BRITO, E. de; SILVA, G. O.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The McDonald Gumbel model. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, 2014. In press.

CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 27, p. 154–161, 1995.

CORDEIRO, G. M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 81, p. 883–898, 2011.

CORDEIRO, G. M.; NADARAJAH, S.; ORTEGA, E. M. M. The Kumaraswamy Gumbel distribution. **Statistical Methods and Aplications**, Roma, v. 21, p. 139–168, 2012.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v. 21, p. 497–512, 2002.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7th ed. San Diego: Academic Press, 2007. 1162 p.

GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by Lehman alternatives. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v. 27, p. 887–904, 1998.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and Weibull distributions. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 43, p. 117–130, 2001.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Univariate Distributions**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1995. 752 p.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. **IEEE Transactions on Reliability**, New York, v. 42, p. 299–302, 1993.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. A generalized gamma distribution with application to drought data. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v. 74, p. 1–7, 2007.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, Amsterdam, p. 323 – 332, 2004.

PERSSON, K.; RYDÉN, J. Exponentiated Gumbel distribution for estimation of return levels of significant wave height. **Journal of Environmental Statistics**, Los Angeles, v. 1, p. 1–12, 2010.

RÉNYI, A. On measures of entropy and information. In: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY, 4., 1961, Berkeley. **Proceedings...** Berkeley: University of California Press, 1961. p. 547-561.

SHANNON, C. E. Prediction and entropy of printed english. **The Bell System Technical Journal**, Short Hills, v. 30, p. 50–64, 1951.

WAYLEN, P.; WOO, M.-K. Prediction of annual floods generated by mixed processes. **Water Resources Research**, Washington, v. 18, p. 1283–1286, 1982.

# 4 DISTRIBUIÇÃO GAMA BURR XII: TEORIA E PRÁTICA


**Resumo**

Uma nova distribuição com quatro parâmetros denominada gama Burr XII é proposta. O novo modelo possui como casos especiais alguns distribuições bem conhecidas e discutidas na literatura, tais como as distribuições logística e Burr XII, entre outras. Obtemos os momentos, momentos incompletos, funções geradora e quantílica, desvios médios, curvas de Bonferroni e Lorenz e confiabilidade. O método de máxima verossimilhança é utilizado para estimar os parâmetros do modelo. Determinamos a matriz de informação observada. Duas aplicações a dados reais demonstram que o novo modelo providencia melhor ajuste que as distribuições Weibull exponencializada e beta Weibull (BRITO *et al.*, 2014).



Palavras-chaves: Distribuição Burr XII; Distribuição gama-G; Matriz de informação observada; Máxima verossimilhança



**Abstract**

We propose a new four-parameter distribution called the gamma Burr XII distribution. The new model contains as special cases some well-known distributions discussed in the literature such as the logistic and Burr XII distributions, among several others. We obtain the moments, incomplete moments, generating and quantile functions, mean deviations, Bonferroni and Lorenz curves and reliability. The method of maximum likelihood is used for estimating the model parameters. We determine the observed information matrix. Two applications to real data demonstrate that the new model provides a better fit than the exponentiated Weibull and beta Weibull distributions (BRITO *et al.*, 2014).



Keywords: Burr XII distribution; Gamma-G distribution; Maximum likelihood; Observed information matrix


## 4.1 Introdução

Zimmer, Keats e Wang (1998) foram pioneiros em propor a distribuição Burr XII (BXII) com três parâmetros com função distribuição acumulada (cdf) e função densidade de probabilidade (pdf) (para $x > 0$) dadas por

$$G(x; s, k, c) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k} \tag{4.1}$$

e

$$g(x; s, k, c) = c\, k\, s^{-c}\, x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k-1}, \tag{4.2}$$

respectivamente, em que $k > 0$ e $c > 0$ são parâmetros de forma e $s > 0$ é um parâmetro de escala. Se $c > 1$, a função densidade é unimodal com moda dada por $x = s\,[(c-1)/(ck+1)]^{1/c}$ e tem forma de "L" se $c = 1$.

A distribuição BXII, tem como sub-modelos as distribuições logística e Weibull e é uma distribuição muito popular para analisar dados de tempo de vida e fenômenos com taxa de falha monótona. Quando se modelam taxas de riscos monótonas, a distribuição Weibull pode ser uma escolha inicial devido a suas formas de densidades assimétricas positiva e negativa. No entanto, ela não fornece um razoável ajuste paramétrico para taxas de falhas não-monótonas, como a forma de banheira ou unimodal, que são comuns em estudos biológicos e de confiabilidade. As curvas em forma de banheira têm porções médias quase planas e as densidades associadas têm uma anti-moda positiva. As taxas de falhas unimodais podem ser observadas na evolução de uma doença cuja mortalidade atinge um pico, após um certo período finito, e depois diminui, gradualmente.

Devido às diferentes formas das distribuições de tempo de vida, diversos modelos têm sido propostos nos últimos anos. Assim, várias generalizações das clássicas distribuições foram desenvolvidas. Uma delas consiste em incorporar uma distribuição a uma família maior por meio da aplicação da transformada da probabilidade integral. Mais recentemente, Zografos e Balakrishnan (2009) e Ristić e Balakrishnan (2012) propuseram uma família de distribuições univariadas geradas por variáveis aleatórias gama. Para uma qualquer cdf $G(x)$ base, $x \in \mathbb{R}$, eles definiram a distribuição $gama - G$ com pdf $f(x)$ e cdf $F(x)$ dadas por

$$f_G(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \left\{-\log[1 - G(x)]\right\}^{a-1} g(x) \tag{4.3}$$

e

$$F_G(x) = \frac{\gamma\left(a, -\log\left[1 - G(x)\right]\right)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{-\log[1-G(x)]} t^{a-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \mathrm{dt}, \tag{4.4}$$

respectivamente, parar $a > 0$, em que $g(x) = dG(x)/dx$, $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}$ e $\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}$ denotam as funções gama e gama incompleta, respectivamente. Algumas de suas propriedades matemáticas foram estudadas por Nadarajah, Cordeiro e Ortega (2014).

Neste artigo, define-se uma nova distribuição com quatro parâmetros, a gama Burr XII (de forma abreviada "GBXII"), pela inserção de (4.1) na equação (4.4). A distribuição acumulada da GBXII é

$$F(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\gamma\left(a, k\, \log\left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]\right)}{\Gamma(a)}, \tag{4.5}$$

enquanto sua pdf (para $x > 0$) pode ser expressa, das equações (4.1), (4.2) e (4.3), como

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) \;=\; \frac{c\, k^a}{s^c\, \Gamma(a)} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k-1} \left\{\log\left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]\right\}^{a-1}, \tag{4.6}$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (a, s, k, c)$. A partir deste ponto, $X \sim$ GBXII$(a, s, k, c)$ denota uma variável aleatória com função densidade (4.6).

A motivação para introduzir a distribuição GBXII é devido à grande utilização da distribuição BXII e o fato da generalização atual proporcionar melhor ajuste a dados em situações mais complexas. A importância de (4.6) é que esta possui como casos especiais várias distribuições bem conhecidas. Claramente, a distribuição BXII é o modelo base para $a = 1$. Para

$s = m^{-1}$ e $k = 1$, a GBXII reduz-se à distribuição gama log-logística (GLL). Para $a = 1$, $s = m^{-1}$ e $k = 1$, ela produz a distribuição log-logística (LL), em que a função de sobrevivência é $S(t; m, c) = [1 + (t\,m)^c]^{-1}$. Para $c = 1$ e $a = c = 1$, tem-se como casos especiais as distribuições gama Pareto tipo II (GPaII) e Pareto tipo II (PaII), respectivamente. Se $k \to \infty$, ela é idêntica à distribuição gama Weibull (GW). Se $k \to \infty$ e adicionalmente $a = 1$, temos a distribuição Weibull.

A distribuição GBXII não somente é apropriada para modelar adequadamente taxas de falhas com forma unimodal, mas também é adequada para testar o ajuste de seus sub-modelos, tais como, as distribuições logística e BXII. Algumas formas possíveis da função densidade (4.6) para selecionados valores dos parâmetros, incluindo distribuições bem conhecidas, são apresentados na Figura 4.1.

A função taxa de risco (hrf) da GBXII (para $x > 0$) é dada por

$$\tau(x; \boldsymbol{\theta}) \;=\; \frac{c\,k^a\,s^{-c}x^{c-1}\left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k-1}\left\{\log\left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]\right\}^{a-1}}{\Gamma(a)-\gamma\left(a, k\,\log\left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]\right)}.$$

Algumas possíveis curvas para taxas de risco da GBXII são mostradas na Figura 4.2 para valores selecionados dos parâmetros.

O artigo é organizado como segue. Na Seção 4.2, encontram-se expansões para a pdf e a cdf da distribuição GBXII. Demonstra-se que a função densidade da GBXII pode ser expressa como uma combinação linear de densidades BXII. Algumas propriedades matemáticas de (4.6) são apresentadas nas Seções 4.3 a 4.6. Na Seção 4.7, investiga-se estimação por máxima verossimilhança e determinam-se os elementos da matriz de informação observada. Na Seção 4.8, duas aplicações para dados reais ilustram a potencialidade do novo modelo. A Seção 4.9 finaliza o artigo com algumas conclusões.

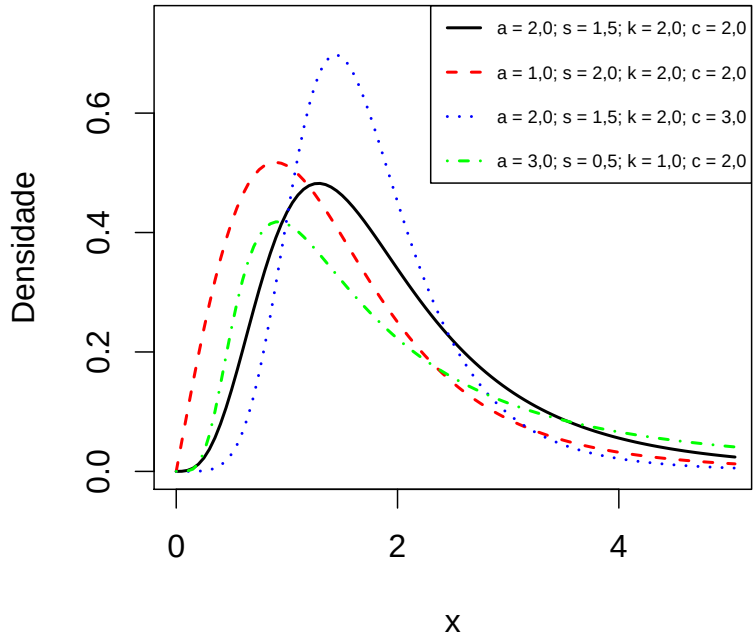
## 4.2 Expansões para a pdf e para a cdf

Algumas expansões para (4.5) e (4.6) podem ser encontradas, utilizando o conceito de distribuições exponencializadas. Para uma cdf $G(x)$ base, define-se uma variável aleatória $Y$ tendo distribuição $G - exponencializada$ (exp-G) com parâmetro de potência $\alpha > 0$. Diz-se que $Y \sim$ exp-G$(\alpha, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros de G, se suas cdf e pdf são dadas por

$$H(y) = G^{\alpha}(y) \qquad \text{e} \qquad h(y) = \alpha\, g(y)\, G^{\alpha-1}(y),$$

respectivamente. As propriedades das distribuições exponencializadas têm sido estudadas por muitos autores recentemente. Ver, Mudholkar e Srivastava (1993) para Weibull exponencializada, Gupta, Gupta e Gupta (1998) para Pareto exponencializada, Gupta e Kundu (2001) para exponencial exponencializada e Nadarajah e Gupta (2007) para gama exponencializada.

Para qualquer parâmetro real $a > 0$, a fórmula a seguir é válida (http:// functions.wolfram.com/



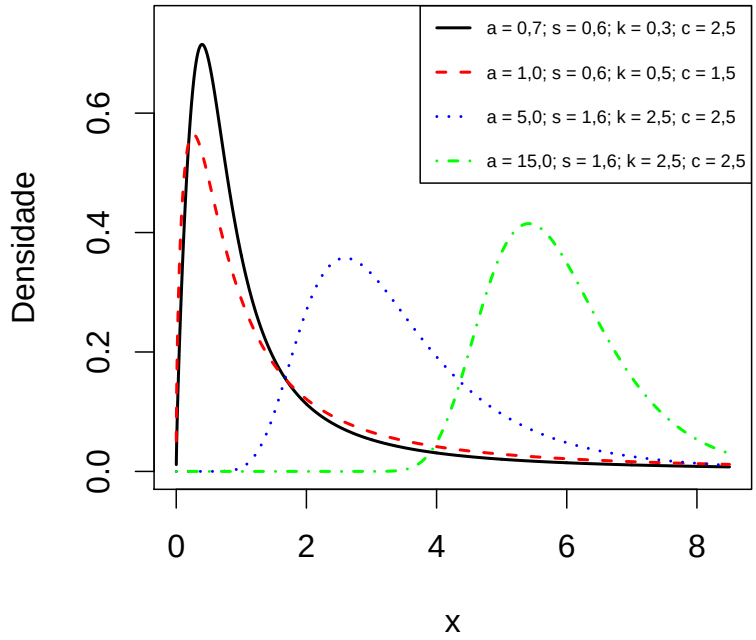




Figura 4.1 – Função densidade da GBXII para alguns valores dos parâmetros

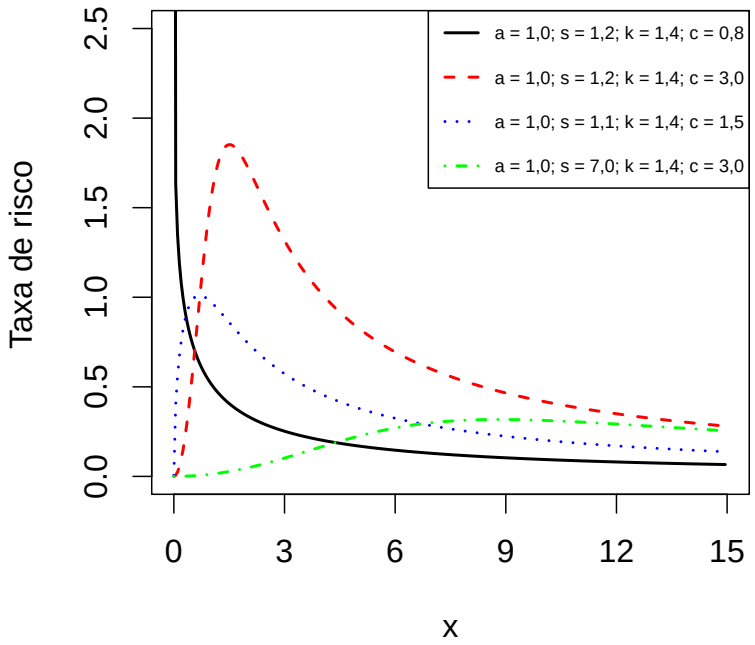



Figura 4.2 – Função taxa de risco da GBXII para alguns valores dos parâmetros

ElementaryFunctions/ Log/ 06/ 01/ 04/ 03/)

$$\{-\log[1-G(x)]\}^{a-1} = (a-1)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+1-a}{i}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{j+i}\binom{i}{j}p_{j,i}}{(a-1-j)}G(x)^{a+i-1},$$

em que as constantes $p_{j,i}$ (para $j \geq 0$) podem ser calculadas recursivamente por

$$p_{j,i} = i^{-1}\sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^m\,[m(j+1)-i]}{m+1}\,p_{j,i-m}$$

para $i = 1, 2, \ldots$ e $p_{j,0} = 1$.

Para uma parâmetro real $a > 0$, define-se

$$b_i = b_i(a) = \frac{\binom{i+1-a}{i}}{(a+i)\Gamma(a-1)}\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^{j+i}\,p_{j,i}}{(a-1-j)}\binom{i}{j}, \tag{4.7}$$

e, então, (4.3) pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, h_{a+i}(x), \tag{4.8}$$

em que $h_{a+i}(x)$ denota a função densidade da exp-G$(a+i)$. Então, a equação (4.4) pode ser expressa como

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \, H_{a+i}(x),$$

em que $H_{a+i}(x)$ denota a cdf de uma exp-G$(a+i)$. Assim, várias propriedades matemáticas da distribuição gama-G podem ser obtidas pelas propriedades já conhecidas da distribuição exp-G.

As propriedades da GBXII, tais como momentos e função geradora, podem ser obtidas das propriedades da distribuição Burr XII exponencializada (EBXII). A distribuição Kumaraswamy Burr XII (KwBXII), recentemente estudada por Paranaíba *et al.* (2013), tem como caso especial a distribuição EBXII e, portanto, seus resultados podem ser aplicadas para a distribuição GBXII.

A cdf e a pdf da distribuição EBXII (para $z > 0$) como parâmetro de potência $a > 0$ são dadas, respectivamente, por

$$H_a(z) = \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{z}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^a$$

e

$$h_a(z) \;=\; a\,c\,k\,s^{-c} z^{c-1} \left[1 + \left(\frac{z}{s}\right)^c\right]^{-k-1} \left\{1 - \left[1 + \left(\frac{z}{s}\right)^c\right]^{-k}\right\}^{a-1}. \tag{4.9}$$

Seja $Z \sim$ EBXII$(a, s, k, c)$ uma variável aleatória com função densidade (4.9). Utilizando a expansão binomial $(1-y)^{a-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{a-1}{i} y^i$ para $|y| < 1$ e equações (4.1) e (4.2), a pdf (4.9) pode ser reescrita como

$$h_a(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \, a \binom{a-1}{l}}{(l+1)} \, g(z; s, (l+1)k, c). \tag{4.10}$$

Aqui, $g(x; s, (l+1)k, c)$ denota a função densidade da BXII com parâmetro de escala $s$ e parâmetros de forma $c$ e $(l+1)k$. A equação (4.10) revela que a função densidade da EBXII é uma combinação linear de densidades da BXII. Seja $w_l = (-1)^l \, a \binom{a-1}{l} / (l+1)$. Utilizando o programa Mathematica, pode-se verificar que $\sum_{l=0}^{\infty} w_l = 1$. Se $a$ é um inteiro, o índice $l$ para em $a-1$. Integrando (4.10) tem-se

$$H_a(z) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l \, G(z; s, (l+1)k, c).$$

Combinando (4.8) e (4.10), a função densidade de $X$ torna-se

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, g(x; s, (l+1)k, c), \tag{4.11}$$

em que o coeficiente $\nu_l$ é dado por

$$\nu_l = \frac{1}{l+1} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \, (a+i) \binom{a+i-1}{l}, \tag{4.12}$$

e $b_i$ é dado por (4.7). Integrando (4.11) tem-se

$$F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, G(x; s, (l+1)k, c). \tag{4.13}$$

As equações (4.11) e (4.13) são os principais resultados desta seção. Assim, algumas propriedades estruturais da GBXII podem ser obtidas das propriedades da BXII.

## 4.3 Momentos e Função Geradora

Algumas das mais importantes características de uma distribuição podem ser obtidas usando momentos (por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose). O $q$-ésimo momento de uma variável aleatória BXII $Z$ com parâmetro de escala $s$ e parâmetros de forma $c$ e $k$ é $E(Z^q) = s^q k \, B\left(k - q\, c^{-1}; q\, c^{-1} + 1\right), \; q < k\, c$ (PARANAÍBA, 2012), em que $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} a \, dt$ é a função beta.

Da equação (4.11), pode-se escrever (para $q < c\, k$)

$$\mu'_q = E(X^q) = k\, s^q \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, (l+1) \, B\left((l+1)k - q\, c^{-1}, q\, c^{-1} + 1\right). \tag{4.14}$$

Gráficos de assimetria e curtose para valores selecionados de $a$ são apresentados na Figura 4.3. Estes gráficos revelam um grande impacto de $k$, $c$ e $a$ na assimetria e curtose de $X$.

Os momentos centrais ($\mu_s$) e os cumulantes ($\kappa_s$) de $X$ podem ser determinados de (4.14) como

$$\mu_s = \sum_{k=0}^{k} (-1)^k \binom{s}{k} \mu_1'^k \, \mu'_{s-k} \qquad \text{and} \qquad \kappa_s = \mu'_s - \sum_{k=1}^{s-1} \binom{s-1}{k-1} \kappa_k \, \mu'_{s-k},$$

respectivamente, em que $\kappa_1 = \mu'_1$. Então, $\kappa_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2$, $\kappa_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu_1'^3$, $\kappa_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu_2'^2 + 12\mu'_2\mu_1'^2 - 6\mu_1'^4$, etc. A assimetria $\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$ e a curtose $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$ podem ser calculadas utilizando os terceiro e quarto cumulantes padronizados.

Para modelos de tempo de vida, geralmente, existe interesse em calcular o $h$-ésimo momento incompleto de $X$ dado por $T_h(y) = \int_0^y x^h \, f(x) dx$. A quantidade $T_h(y)$ pode ser determinada de (4.11) como

$$T_h(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \int_0^y x^h \, g(x; s, (l+1)k, c) \, dx.$$

Utilizando os resultados de Paranaíba *et al.* (2013), tem-se

$$T_h(y) = k\, s^h \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, B_{\frac{s^c}{s^c+y^c}}((l+1)k - h\, c^{-1}, 1 + h\, c^{-1}), \tag{4.15}$$

em que $B_z(a,b) = \int_0^z t^{a-1} \, (1-t)^{b-1} dt$ é a função beta incompleta.

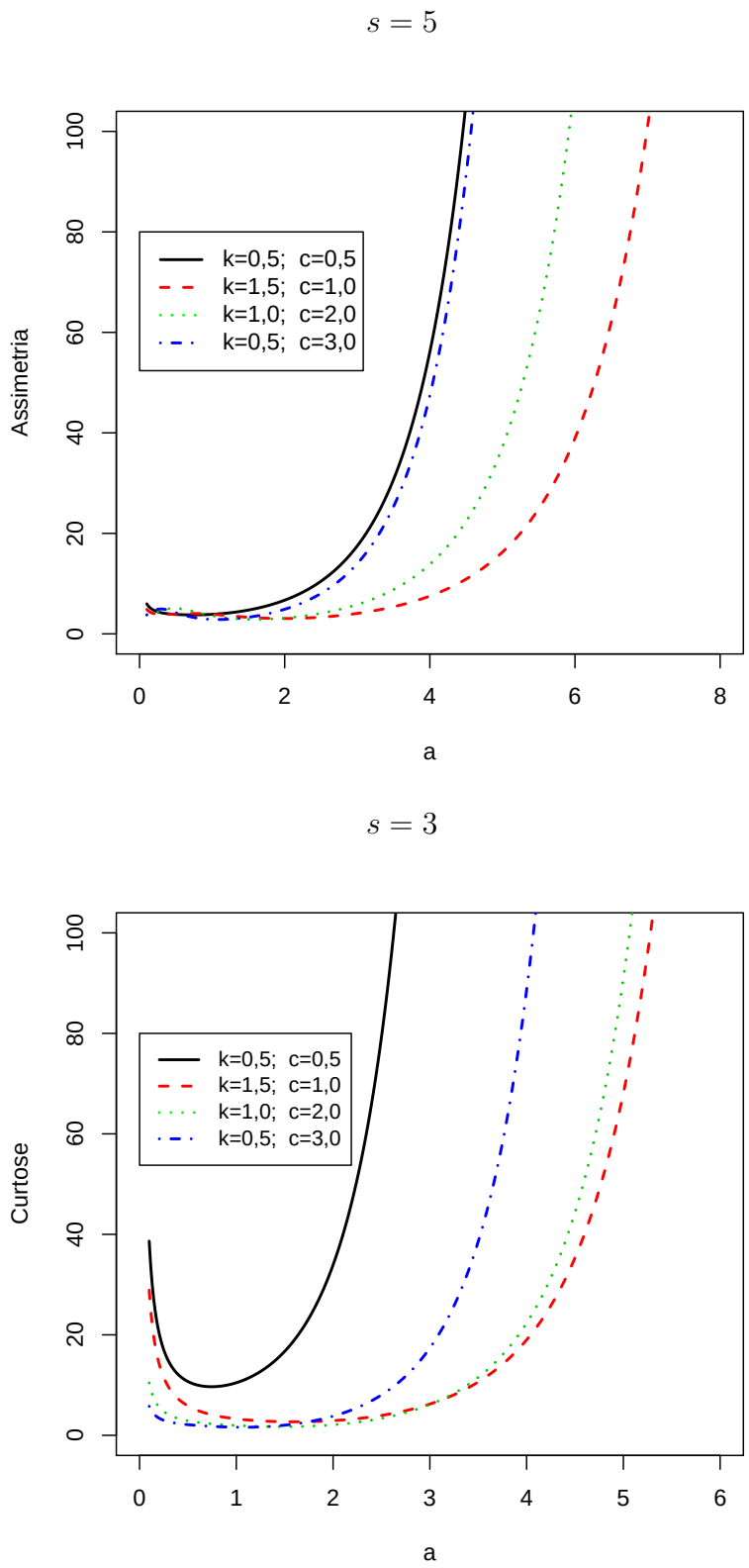



Figura 4.3 – Assimetria e curtose da distribuição GBXII como função de $a$ para alguns valores de $k$ e $c$

Seja $M_k(t)$ a função geradora da distribuição BXII$(s, k, c)$. A função geradora de momentos

(mgf) $M(t)$ de $X$ pode ser obtida de (4.11) como

$$M(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, M_{(l+1)k}(t). \tag{4.16}$$

Paranaíba *et al.* (2013) providenciaram uma representação simples para $M_k(t)$ usando a função Meijer G definida por

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x \,\middle|\, \begin{array}{c} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{array}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(b_j + t\right) \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j - t\right)}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma\left(a_j + t\right) \prod_{j=m+1}^{p} \Gamma\left(1 - b_j - t\right)} x^{-t} dt,$$

em que $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ é a unidade complexa e L denota a região de integração; ver Section 9.3 em Gradshteyn e Ryzhik (2007) para uma descrição desta região. A função Meijer G contém como casos particulares diversas integrais com funções elementares e especiais (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1986). Eles assumem que $t < 0$ e $c = m/k$, em que $m$ e $k$ são inteiros positivos. Utilizando a integral (1) do Apêndice APÊNDICE B, tem-se

$$M_k(t) = m \, I\left(-s\,t, \frac{m}{k} - 1, \frac{m}{k}, -k - 1\right). \tag{4.17}$$

Esta condição não é restritiva uma vez que qualquer número real positivo pode ser aproximado por um número racional. Por isso, para $t < 0$, a função geradora de $X$ segue de (4.16) como

$$M(t) = m \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l \, I\left(-s\,t, \frac{m}{(l+1)k} - 1, \frac{m}{(l+1)k}, -(l+1)k - 1\right). \tag{4.18}$$

As equações (4.14), (4.15) e (4.18) são os principais resultados desta seção.

## 4.4 Função Quantílica

A função quantílica da GBXII, para $0 < u < 1$, $Q(u) = F^{-1}(u)$, pode ser determinada como

$$Q(u) = s\left[\left(\exp\left\{Q^{-1}\left[a, u\,\Gamma(u)\right]\right\}\right)^{-1/k} - 1\right]^{1/c}, \tag{4.19}$$

em que $Q^{-1}(a, u)$ é a função inversa de $Q(a, x) = \int_x^{\infty} w^{a-1} \, \mathrm{e}^{\mathrm{w}} \, \mathrm{dw}$. Assim, segue imediatamente que a mediana $M$ de $X$ é dada por

$$Q(u) = s\left(\left\{\exp\left[Q^{-1}\left(a, \sqrt{\pi}/2\right)\right]\right\}^{-1/k} - 1\right)^{1/c}.$$

## 4.5 Desvios Médios

Aqui, determinam-se as medidas: desvios médios e curvas de Lorenz e Bonferroni. Quantificar a dispersão em uma população pode ser medida, evidentemente, pelo conjunto de desvios da média ou da mediana. Essas medidas são conhecidas como desvios médios em torno da média e da mediana – definidos por

$$\delta_1(X) = 2\mu_1' \, F(\mu_1') - 2T_1(\mu_1') \qquad \text{e} \qquad \delta_2(X) = \mu_1' - 2T_1(M),$$

respectivamente, em que $\mu_1' = E(X)$, a mediana $M$ de $X$ é determinada explicitamente de (4.19) por $M = Q(1/2)$, $F(M)$ e $F(\mu_1')$ são obtidos de (4.5) e $T_1(q) = \int_0^q x\, f(x)dx$ é o primeiro momento incompleto de $X$ dado por (4.15) com $h = 1$. De (4.11) tem-se

$$T_1(q) = c\,k \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\,\nu_l \int_q^{\infty} \left(\frac{x}{s}\right)^c \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-(l+1)k-1} dx.$$

Fazendo $u = (\frac{x}{s})^c$, obtém-se

$$T_1(q) = k\,s \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\,\nu_l \int_{(q/s)^c}^{\infty} u^{1/c}\,(1+u)^{-(l+1)k-1} du.$$

A integral que se segue (para $q > 0$ 1 $k > 0$) é calculada utilizando o Maple

$$\begin{aligned} J(q,r,k) &= \int_q^{\infty} u^r\,(1+u)^{-k} du \\ &= -\left[\frac{{}_2F_1\left[(k,r+1);(2+r);-q\right] q^{r+1}}{(r+1)} + \frac{\Gamma(k-r-1)\pi\csc(\pi r)}{\Gamma(k)\Gamma(-r)}\right], \end{aligned}$$

em que ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica definida por

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,\frac{x^k}{k!}.$$

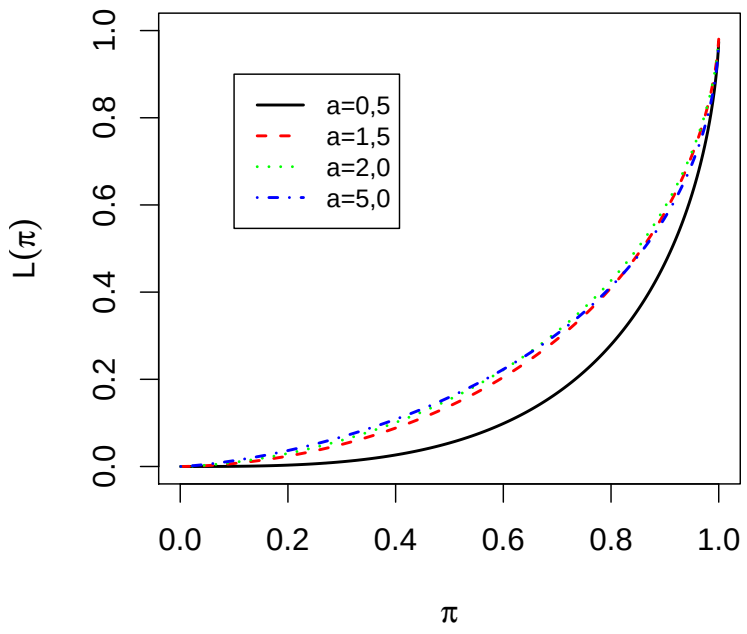
Portanto,

$$T_1(q) = k\,s \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\nu_l\, J\left(\left(\frac{q}{s}\right)^c, \frac{1}{c}, (l+1)k+1\right) \tag{4.20}$$

e as medidas $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ são imediatamente determinadas de (4.20).

A quantidade $T_1(q)$ é utilizada para fazer gráficos das curvas de Lorenz e Bonferroni em áreas como economia, confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para uma dada probabilidade $\pi$, elas são definidas por $L(\pi) = T_1(q)/\mu_1'$ e $B(\pi) = T_1(q)/(\pi\,\mu_1')$, respectivamente, em que $q = Q(\pi)$ é calculada diretamente de (4.19). A Figura 4.4 mostra as curvas de Lorenz e Bonferroni para valores selecionados dos parâmetros. As curvas são crescentes com o aumento dos valores de $\pi$.

$L(\pi)$




$B(\pi)$

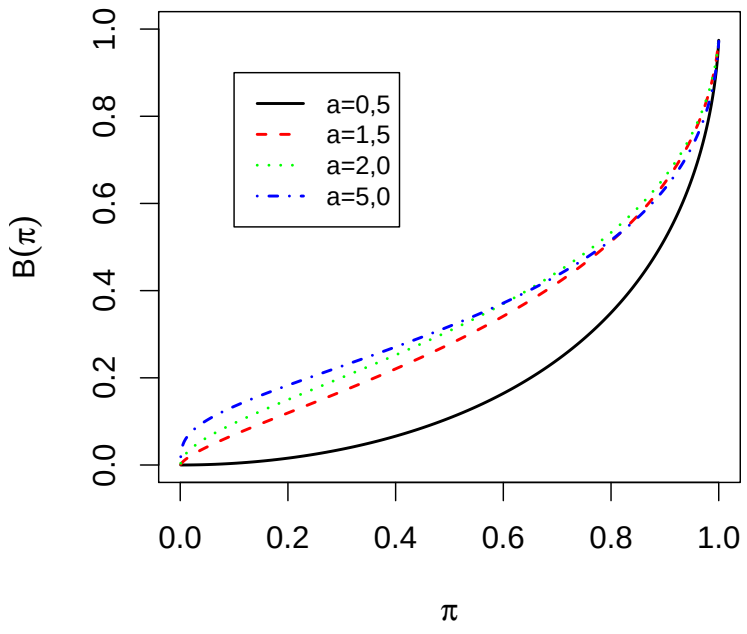



Figura 4.4 – Curvas de Lorenz e Bonferroni para $s = 2, k = 4$ e $c = 1$

## 4.6 Confiabilidade

No contexto de confiabilidade, o modelo força-tensão descreve o tempo de vida de um componente que tem uma força aleatória $X_1$ e é submetido a uma tensão aleatório $X_2$. O componente

falha no instante em que a tensão aplicada a ele excede a força e o componente irá funcionar satisfatoriamente quando $X_1 > X_2$. Assim, $R = Pr(X_2 < X_1)$ é a medida da confiabilidade do componente. Possui muitas aplicações, especialmente nos conceitos de engenharia. A seguir, determina-se a confiabilidade $R = \int_0^\infty f_1(x)\, F_2(x) dx$ quando $X_1$ e $X_2$ são independentes com distribuições GBXII$(a_1, s, k_1, c)$ e GBXII$(a_2, s, k_2, c)$, respectivamente, com o mesmo parâmetro de forma $c$ e mesmo parâmetro de escala $s$.

A pdf de $X_1$ e a cdf de $X_2$ são obtidas das equações (4.11) e (4.13) como

$$f_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l(a_1)\, g(x; s, (l+1)k_1, c)$$

e

$$F_2(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \nu_t(a_2)\, G(x; s, (t+1)k_2, c),$$

respectivamente, em que as quantidades $\nu_l(a_1)$ e $v_t(a_2)$ são calculadas de (4.12). Portanto,

$$R = \sum_{l,t=0}^{\infty} \nu_l(a_1)\, \nu_t(a_2)\; I(c, s, k_1, k_2, l, t),$$

em que

$$I(c, s, k_1, k_2, l, t) = k_1(l+1) \int_0^\infty \frac{c\, x^{c-1}}{s^c} \left\{ 1 - \left[ 1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c \right]^{-k_2(t+1)} \right\} \left[ 1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c \right]^{-k_1(l+1)-1} dx.$$

Fazendo $u = 1 + (x/s)^c$, tem-se

$$I(c, s, k_1, k_2, l, t) \;=\; \frac{k_2(t+1)}{k_1(l+1) + k_2(t+1)},$$

e, então, $R$ pode ser calculada.

## 4.7 Estimação

Seja $T_i$ uma variável aleatória com função densidade (4.6) e $\boldsymbol{\theta} = (a, s, k, c)^T$ o vetor paramétrico. Os dados encontrados em estudos de análise de sobrevivência e em confiabilidade são frequentemente censurados. Um mecanismo de censura aleatória muito simples, e muitas vezes realista, é aquele em que se assume que cada indivíduo $i$ tem um tempo de vida útil $T_i$ e um tempo de censura $C_i$, em que $T_i$ e $C_i$ são variáveis aleatórias independentes. Suponha que os dados consistem de $n$ observações independentes e $X_i = \min(T_i, C_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. A distribuição de $C_i$ não depende de qualquer parâmetro desconhecido de $T_i$. Técnicas paramétricas para esses dados, normalmente, são baseadas em métodos de estimação por verossimilhança e teoria assintótica. O logaritmo da função de verossimilhança com censura $l(\boldsymbol{\theta})$ para os parâme-

tros do modelo é

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= r\,[\log(c)+a\,\log(k)-c\,\log(s)]-n\,\log[\Gamma(a)]+(c-1)\sum_{i\in F}\log(x_i)\\ &\quad-(k+1)\sum_{i\in F}\log\,(u_i)+(a-1)\sum_{i\in F}\log\,[\log\,(u_i)]\\ &\quad+\sum_{i\in C}\log\,\{\Gamma(a)-\gamma\,(a,k\,\log\,[u_i])\},\end{aligned}\tag{4.21}$$

em que $u_i = 1+(x_i/s)^c$, $r$ é o número de falhas e $F$ e $C$ denotam o conjunto de observações não-censuradas e censuradas, respectivamente. As funções escore para os parâmetros do modelo são

$$\begin{aligned}U_a(\boldsymbol{\theta}) &= -n\,\psi(a)+r\,\log(k)+\sum_{i\in F}\log\,[\log\,(u_i)]\\ &\quad+\sum_{i\in C}\left\{\frac{\log[\log(u_i)]\,Q(a,\log[u_i])+G^{3,0}_{2,3}\left(\log[u_i]\,\middle|\,\begin{matrix}1,1\\0,0,a\end{matrix}\right)}{Q\,(a,\log[u_i])}\right\},\end{aligned}$$

$$U_s(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r\,c}{s}-\frac{c\,(a-1)}{s}\sum_{i\in F}\frac{w_i}{\log(u_i)}+\frac{c\,(k-1)}{s}\sum_{i\in F}w_i+\frac{c}{s}\sum_{i\in C}\frac{[\log(u_i-1)]^{a-1}}{u_i\,Q\,(a,\log[u_i])},$$

$$U_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a\,r}{k}-\sum_{i\in F}\log(u_i),$$

e

$$\begin{aligned}U_c(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r}{c}-r\,\log(s)+\sum_{i\in F}\log(x_i)-(k+1)\sum_{i\in F}\frac{v_i}{u_i}+(a-1)\sum_{i\in F}\frac{v_i}{u_i\,\log(u_i)}\\ &\quad-\sum_{i\in C}\frac{v_i\,[\log(u_i)]^{a-1}}{u_i^2\,Q\,(a,\log[u_i])},\end{aligned}$$

em que $u_i = 1+(x_i/s)^c$, $v_i = (x_i\,s^{-1})^c\,\log(x_i\,s^{-1})$, $w_i = (u_i-1)/u_i$ e $\psi(s) = d\log\Gamma(s)/ds$ é a função digama.

O estimador de máxima verossimilhança (MLE) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido pela solução das equações não lineares $U_a(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $U_s(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $U_k(\boldsymbol{\theta}) = 0$ e $U_c(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Essas equações não podem ser resolvidas analiticamente e requerem um programa estatístico com técnicas numéricas iterativas. As avaliações numéricas foram implementadas utilizando o R versão 3.0.0 (pacote **bbmle**). Para estimação intervalar e testes de hipóteses para os parâmetros do modelo, determina-se a matriz de informação observada $4\times 4$ pois sua esperança requer integração numérica. A matriz de informação observada é $J(\boldsymbol{\theta}) = -\{J_{pq}(\boldsymbol{\theta})\}$, em que $p,q = a,s,c$ and $k$. Os elementos $J_{pq}(\boldsymbol{\theta})$ são dados no Apêndice APÊNDICE C.-

## 4.8 Aplicações

Nesta seção, ajustam-se as distribuições GBXII, BXII, log-logística (LL), Weibull exponencializada (EW) e beta Weibull (BW) a dois conjuntos de dados reais. A distribuição BW tem pdf $f(x; a, b, \alpha, \lambda) = [\alpha\,\lambda/B(a, b)]\,x^{\lambda-1}\exp(-b\,\alpha\,x^{\lambda})[1 - \exp(-\alpha x^{\lambda})]^{a-1}$, para $x > 0$. O modelo EW é obtido fazendo $a = 1$. Para estimar os parâmetros destes modelos especiais, adota-se o método de máxima verossimilhança com as avaliações computacionais realizadas utilizando o pacote **bbmle** do R versão 3.0.0.

### 4.8.1 Aplicação 1: Dados de quebra por tensão

Os dados não-censurados de Nichols e Padgett (2006) denotam a quebra por tensão de fibras de carbono (em GPa). A Tabela 4.1 lista os MLEs e correspondentes erros padrão estimados (SEs), os valores do critério de informação de Akaike (AIC), do critério de informação de Akaike corrigido (CAIC) e do critério bayesiano de Schwarz's (BIC) para os dados atuais. Os três critérios de informação auxiliam na classificação dos modelos. Os valores menores desses critérios correspondem à distribuição GBXII, que pode ser escolhido neste caso. Além disso, calculam-se as estatísticas de qualidade de ajuste de Cramér-von Mises ($W^*$) e de Anderson-Darling ($A^*$) a fim de verificar qual modelo ajusta melhor a esses dados. As estatísticas $W^*$ e $A^*$ são descritas por Chen e Balakrishnan (1995). Quanto menor forem os valores dessas estatísticas, melhor será o ajuste. Os valores das estatísticas $W^*$ e $A^*$ para os cinco modelos ajustados são apresentados na Tabela 4.2. Com base nestes valores, o modelo GBXII ajusta-se melhor a esses dados entre os modelos testados e, portanto, poderia ser escolhido como o melhor modelo.

Tabela 4.1 – MLEs, correspondentes SEs (dados entre parênteses) e as estatísticas AIC, BIC e CAIC para a quebra por tensão em fibras de carbono

| Distribuição | $a$ | $s$ | $k$ | $c$ | AIC | CAIC | BIC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BXII | 1 | 18,4087 | 483,4027 | 3,4453 | 178,1370 | 178,5241 | 184,7060 |
| | - | (3,0505) | (0,0342) | (0,3325) | | | |
| GBXII | 0,2190 | 3,4394 | 0,4522 | 12,9981 | 177,5644 | 178,2201 | 186,3230 |
| | (0,1105) | (0,2216) | (0,4182) | (5,8771) | | | |
| Distribuição | $s$ | $m$ | | | | | |
| LL | 2,7109 | 4,8958 | | | 187,2905 | 187,4810 | 191,6698 |
| | (0,1161) | (0,5137) | | | | | |
| Distribuição | $a$ | $b$ | $\alpha$ | $\lambda$ | | | |
| EW | 0,8004 | 1 | 3,9109 | 0,3095 | 177,8894 | 178,2765 | 184,4584 |
| | (0,3534) | - | (1,0688) | (0,0331) | | | |
| BW | 0,7602 | 7,0203 | 4,0690 | 0,1860 | 179,8368 | 180,4925 | 188,5954 |
| | (0,3681) | (0,0016) | (1,2702) | (0,0100) | | | |

O histograma dos dados e as curvas ajustadas das funções densidades da BXII, da LL e da GBXII são apresentadas na Figura 4.5. De fato, pode-se concluir que a distribuição GBXII

Tabela 4.2 – Estatísticas de qualidade de ajuste para a quebra por tensão em fibras de carbono

| Modelo | $W^*$ | $A^*$ |
|---|---|---|
| BXII | 0,0930 | 0,5261 |
| GBXII | **0,0344** | **0,2201** |
| LL | 0,2592 | 1,3924 |
| EW | 0,0858 | 0,5085 |
| BW | 0,0846 | 0,5041 |

fornece o melhor ajuste para estes dados.

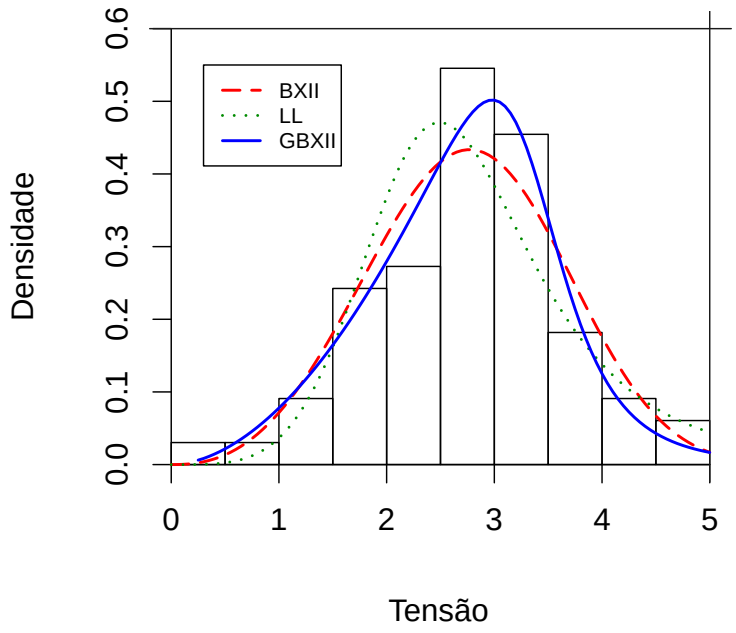



Figura 4.5 – Histograma e funções densidades BXII, LL e GBXII ajustadas para os dados de quebra por tensão em fibras de carbono

### 4.8.2 Aplicação 2: Dados de tempo de remissão

Os dados censurados utilizados representam o tempo de remissão (em meses) de 137 pacientes com câncer e são apresentados em Lee e Wang (2003, Ex. 9.3). A Tabela 4.3 lista os MLEs e correspondentes erros padrão estimados (SEs), os valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC para os modelos ajustados. Os três critérios de informação auxiliam na classificação dos modelos. O menos valor para dois destes critérios corresponde a distribuição GBXII.

Os valores das estatísticas $W^*$ e $A^*$ para os sete modelos ajustados são apresentados na Tabela 4.4. Com base nesses valores, o modelo GBXII mostra um ajuste comparável com o

Tabela 4.3 – MLEs, correspondentes SEs (dados entre parênteses) e as estatísticas AIC, BIC e CAIC para os tempos de remissão

| Distribuição | $a$ | $s$ | $k$ | $c$ | AIC | CAIC | BIC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BXII | 1 | 7,6594 | 1,2166 | 1,6930 | 845,0593 | 845,2398 | 853,8193 |
| | - | (2,8676) | (0,4987) | (0,2379) | | | |
| GBXII | 0,7949 | 11,0549 | 1,3903 | 1,6884 | 844,8096 | 845,1127 | 856,4896 |
| | (0,5623) | (5,1636) | (1,6043) | (0,9278) | | | |
| Distribuição | $s$ | $m$ | | | | | |
| LL | 6,4633 | 1,6900 | | | 843,7586 | 843,8481 | 849,5986 |
| | (0,5699) | (0,1249) | | | | | |
| Distribuição | $\alpha$ | | | | | | |
| Exponencial(E) | 0,1000 | | | | 847,4598 | 847,4894 | 850,3798 |
| | (0,0088) | | | | | | |
| Distribuição | $a$ | $b$ | $\alpha$ | $\lambda$ | | | |
| W | 1 | 1 | 1,0535 | 0,0981 | 848,8293 | 848,9189 | 854,6693 |
| | - | - | (0,0681) | (0,0086) | | | |
| EW | 2,7569 | 1 | 0,6533 | 0,2774 | 844,4500 | 844,6305 | 853,2099 |
| | (1,2681) | - | (0,1396) | (0,1603) | | | |
| BW | 2,6290 | 0,8095 | 0,6791 | 0,3256 | 846,4370 | 846,7400 | 858,1169 |
| | (1,5277) | (1,3766) | (0,2534) | (0,4401) | | | |

ajuste do modelo BXII. O modelo GBXII pode ser escolhido como o melhor modelo entre os ajustados.

Tabela 4.4 – Estatísticas de qualidade de ajuste para os tempos de remissão

| Modelo | W* | A* |
|---|---|---|
| BXII | 0,0235 | 0,1841 |
| GBXII | **0,0208** | **0,1299** |
| LL | 0,0381 | 0,2908 |
| E | 0,1221 | 0,7041 |
| W | 0,1358 | 0,7825 |
| EW | 0,0449 | 0,2839 |
| BW | 0,0447 | 0,2831 |

O histograma dos dados e as curvas ajustadas das funções densidades da BXII e GBXII são apresentados na Figura 4.6. Conclui-se que a distribuição GBXII ajusta-se melhor a esses dados do que a distribuição BXII.

## 4.9 Conclusões

Define-se e estuda-se um novo modelo de tempo de vida com quatro parâmetros denominado distribuição gama Burr XII (GBXII), que estende algumas distribuições de tempo de vida bem conhecidas. A nova distribuição contém como modelos especiais as distribuições logística, Burr XII e Weibull, entre outras. Devido à sua flexibilidade em acomodar diferentes formas da função

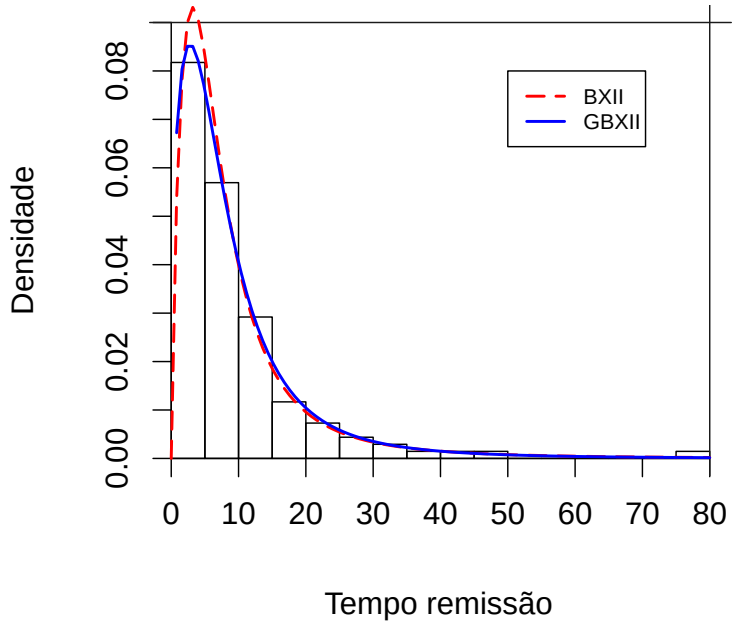



Figura 4.6 – Histograma e funções densidades BXII e GBXII ajustadas para os dados de tempos de remissão

risco, o novo modelo é uma importante distribuição para dados de tempo de vida. Apresenta-se um tratamento matemático da GBXII incluindo uma expansão útil para a sua função densidade. São obtidas expressões de forma fechada para os momentos, momentos incompletos, função geradora e desvios médios, de forma geral para qualquer valor dos parâmetros. Em duas aplicações a dados reais, a nova distribuição ajustou-se melhor aos dados do que modelos de tempo de vida conhecidos.

**Referências**

BRITO, E. de; SILVA, G. O.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The gamma Burr XII distribution: Theory and practice. **Journal of Data Science**, Taipei, 2014. In press.

CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 27, p. 154–161, 1995.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7th ed. San Diego: Academic Press, 2007. 1162 p.

GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by Lehman alternatives. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v. 27, p. 887–904, 1998.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and Weibull distributions. **Biometrical Journal**, Berlin, v. 43, p. 117–130, 2001.

LEE, E. T.; WANG, J. **Statistical Methods for Survival Data Analysis**. 3rd ed. New Jersey: Wiley, 2003. 513p.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. **IEEE Transactions on Reliability**, New York, v. 42, p. 299–302, 1993.

NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E. M. M. The Zografos-Balakrishnan-G family of distributions: Mathematical properties and applications. **Communications Statistics - Theory and Methods**, New York, 2014. In press.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. A generalized gamma distribution with application to drought data. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v. 74, p. 1–7, 2007.

NICHOLS, M. D.; PADGETT, W. J. A bootstrap control chart for Weibull percentiles. **Quality and Reliability Engineering International**, Chichester, v. 22, p. 141–151, 2006.

PARANAÍBA, P. F. **Caracterização e extensões da distribuição Burr XII:** propriedades e aplicações. 2012. 143 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) — Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade São Paulo, Piracicaba, 2012.

PARANAÍBA, P. F.; ORTEGA, E. M. M.; CORDEIRO, G. M.; de Pascoa, M. A. R. The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 83, p. 2117–2143, 2013.

PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV, O. I. **Integrals and Series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. 527 p.

_____. **Integrals and Series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. 619 p.

RISTIĆ, M. M.; BALAKRISHNAN, N. The gamma-exponentiated exponential distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 82, p. 1191–1206, 2012.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability analysis. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 30, p. 386–394, 1998.

ZOGRAFOS, K.; BALAKRISHNAN, N. On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference. **Statistical Methodology**, Amsterdan, v. 6, p. 344–362, 2009.

# 5 FAMÍLIA MARSHALL-OLKIN BINOMIAL NEGATIVA: TEORIA E APLICAÇÃO


**Resumo**

Estudam-se as propriedades matemáticas gerais de um novo gerador de distribuições contínuas com três parâmetros extras denominada família *Marshall-Olkin binomial negativa*. Apresentam-se alguns modelos especiais. A função densidade da nova família pode ser expressa como uma combinação linear de densidades da distribuição base exponencializada. Expressões explícitas para os momentos ordinários e incompletos, para as funções quantílica e geradora, para as curvas de Bonferroni e Lorenz, para as entropias de Shannon e Rényi e estatísticas de ordem, para um modelo base qualquer, são determinadas. Discute-se a estimação dos parâmetros dos modelo por máxima verossimilhança e ilustra-se a importância da nova família por meio de uma aplicação a dados reais, em que um caso especial da família proporciona um melhor ajuste do que outros modelos bem conhecidos com o mesmo número de parâmetros (BRITO *et al.*, 2014).



Palavras-chaves: Desvio médio; Distribuição Marshall-Olkin; Estimação; Função geradora; Momento



**Abstract**

We introduce and study general mathematical properties of a new generator of continuous distributions with three extra parameters called the *Marshall-Olkin negative binomial* family. We present some special models. The family density function can be expressed as a linear combination of exponentiated densities based on the same baseline distribution. Explicit expressions for the ordinary and incomplete moments, quantile and generating functions, Bonferroni and Lorenz curves, Shannon and Rényi entropies and order statistics, which hold for any baseline model, are determined. We discuss the estimation of the model parameters by maximum likelihood and illustrate the importance of the family by means of an application to real data, where one member of the family provides a better fit than other well-known models with the same number of parameters.



Keywords: Estimation; Generating function; Marshall-Olkin distribution; Mean deviation; Moment


## 5.1 Introdução

Distribuições generalizadas têm sido amplamente estudadas em estatística e diversos autores desenvolveram diferentes classes de distribuições. Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013) definiram uma classe de distribuições generalizadas com função distribuição acumulada (cdf) expressa como

$$F(x) = \frac{(1-\beta)^{-s} - \{1-\beta[1-G(x)]\}^{-s}}{[(1-\beta)^{-s} - 1]}, \tag{5.1}$$

em que $s > 0$, $0 < \beta < 1$, $G(x)$ é a cdf base e $g(x) = dG(x)/dx$. A classe de distribuições (5.1) é chamada de *classe G-binomial negativa*. Ela inclui como caso especial a distribuição G quando $s = 1$ e $\beta \to 0$.

Define-se a família *Marshall-Olkin binomial negativa* (MONB) inserindo a cdf da distribuição Marshall-Olkin, dada por $H_{MO}(x)$, no lugar de $G(x)$ na equação (5.1)

$$H_{MO}(x) = \frac{G(x;\boldsymbol{\xi})}{1-(1-p)\,\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})}, \tag{5.2}$$

em que $p > 0$, $\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi}) = 1 - G(x;\boldsymbol{\xi})$ e $G(x;\boldsymbol{\xi})$ é a cdf base, que depende de um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\xi}$. A família (5.2) tem a propriedade que o mínimo da soma de variáveis aleatórias geométricas com distribuição na família também tem como distribuição essa família (MARSHALL; OLKIN, 1997).

Assim, a cdf da MONB é dada por

$$F(x) = \frac{(1-\beta)^{-s} - \left\{1 - \dfrac{p\,\beta\,\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})}{1-(1-p)\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})}\right\}^{-s}}{(1-\beta)^{-s}-1}. \tag{5.3}$$

A função densidade de probabilidade (pdf) correspondente a (5.3) fica reduzida a

$$f(x) = \frac{s\,p\,\beta\,g(x,\boldsymbol{\xi})\,\left[1-(1-p)\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})\right]^{s-1}}{\left[(1-\beta)^{-s}-1\right]\,\left\{1-\left[1-p(1-\beta)\right]\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})\right\}^{s+1}}, \tag{5.4}$$

em que $g(x;\boldsymbol{\xi}) = dG(x;\boldsymbol{\xi})/dx$. A partir daqui, seja $X \sim$ MONB-G$(s,p,\beta,\boldsymbol{\xi})$ uma variável aleatória com pdf (5.4).

A função razão de risco (hrf) de $X$ é dada por

$$\tau(x) = \frac{s\,p\,\beta\,g(x,\boldsymbol{\xi})\,\delta(x,\boldsymbol{\xi})^{-(s+1)}}{\left[1-\overline{p}\,\overline{G}(x,\boldsymbol{\xi})\right]\,\delta(x,\boldsymbol{\xi}) - \left[1-\overline{p}\,\overline{G}(x,\boldsymbol{\xi})\right]^{-s+1}},$$

em que $\delta(x,\boldsymbol{\xi}) = \left\{1-\overline{G}(x,\boldsymbol{\xi})\,\left[1-p\,(1-\beta)\right]\right\}$.

A família MONB-G é bem motivada para aplicações em engenharia e na indústria. Considere que a falha de um dispositivo ocorre devido à presença de um número desconhecido $N$ de defeitos iniciais do mesmo tipo, que podem ser identificados somente depois da falha e são reparados perfeitamente. Seja $X_i$ o tempo para a falha do dispositivo devido ao $i$-ésimo defeito, para $i \geq 1$. Assumindo que os $X_i$'s são variáveis aleatórias e independentes iid de $N$ com distribuição MO-G, então, o tempo para a primeira falha é adequadamente modelado pela família MONB-G. Para os estudos de confiabilidade, a variável aleatória $X = \text{Min}\{X_i\}_{i=1}^{N}$ pode ser usada em um sistema em série com componentes idênticos frequentemente aplicados nas áreas de engenharia e industrial.

O objetivo deste trabalho é obter algumas propriedades matemáticas de (5.4) para qualquer distribuição G base. Na Seção 5.2, apresentam-se alguns casos especiais da nova família. A Seção 5.3 apresenta as expansões para a pdf e a cdf. Na Seção 5.4, determina-se a função

quantílica (qf) de $X$. Expressões explícitas para os momentos ordinários, função geradora de momentos (mgf), desvios médios, entropia de Shannon, entropia de Rényi e estatística de ordem são apresentadas nas Seções 5.5 à 5.8. A estimação dos parâmetros do modelo, utilizando o método de máxima verossimilhança, é descrita na Seção 5.9. Uma aplicação a dados reais é apresentada na Seção 5.10. Finalmente, algumas conclusões são apresentadas na Seção 5.11.

## 5.2 Distribuições especiais MONB-G

A densidade da família MONB (5.4) permite maior flexibilidade nas caudas da distribuição e pode ser aplicada em diversas áreas. A nova família estende várias distribuições bem conhecidas na literatura. Assim, apresentam-se alguns de seus casos especiais. A função densidade (5.4) é melhor empregada quando a cdf $G(x;\boldsymbol{\xi})$ e a pdf $g(x;\boldsymbol{\xi})$ têm expressões analíticas simples.

### 5.2.1 Distribuição Marshall-Olkin binomial negativa gama (MONBGa)

A função distribuição acumulada da gama (para $x > 0$) com parâmetro de forma $a > 0$ e parâmetro de escala $b > 0$ é dada por

$$G(x) = \frac{\gamma(a, x/b)}{\Gamma(a)},$$

em que $\Gamma(a) = \int_0^\infty w^{a-1}\,\mathrm{e}^{-w}dw$ e $\gamma(a,x) = \int_0^x w^{a-1}\,\mathrm{e}^{-w}dw$ são as funções gama e gama incompleta, respectivamente. A função densidade de uma variável aleatória $X$ com distribuição MONBGa reduz-se a

$$f(x;s,p,\beta,a,b) = \frac{s\,p\,\beta\,x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-x/b}\left[p + \frac{(1-p)\,\gamma(a,x/b)}{\Gamma(a)}\right]^{s-1}}{b^a\,\Gamma(a)\,[(1-\beta)^{-s}-1]\,\{p\,(1-\beta) + [1-p\,(1-\beta)\frac{\gamma(a,x/b)}{\Gamma(a)}]\}^{s+1}}.$$

Alguns gráficos da função densidade e da taxa de risco da MONBGa são apresentados na Figura 5.1.

### 5.2.2 Distribuição Marshall-Olkin binomial negativa Fréchet (MONBFr)

Considere a distribuição Fréchet (para $x, a, b > 0$) com cdf e pdf dadas por $G(x) = \exp[-(b/x)^a]$ e $g(x) = a\,b^a\,x^{-a-1}\,\exp[-(b/x)^a]$, respectivamente.

A distribuição MONBFr, para $x > 0$, tem pdf dada por

$$f(x;s,p,\beta,a,b) = \frac{a\,s\,p\,\beta\,b^a\,x^{-a-1}\,\mathrm{e}^{-(b/x)^a}\,[p + (1-p)\,\mathrm{e}^{-(b/x)^a}]^{s-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]\,\{p\,(1-\beta) + [1-p\,(1-\beta)]\,\mathrm{e}^{-(b/x)^a}\}^{s+1}}, \tag{5.5}$$

em que $a > 0$ é um parâmetro de forma e $b > 0$ é um parâmetro de escala. Gráficos de (5.5) e da função taxa de risco para valores selecionados dos parâmetros são mostrados na Figura 5.2.

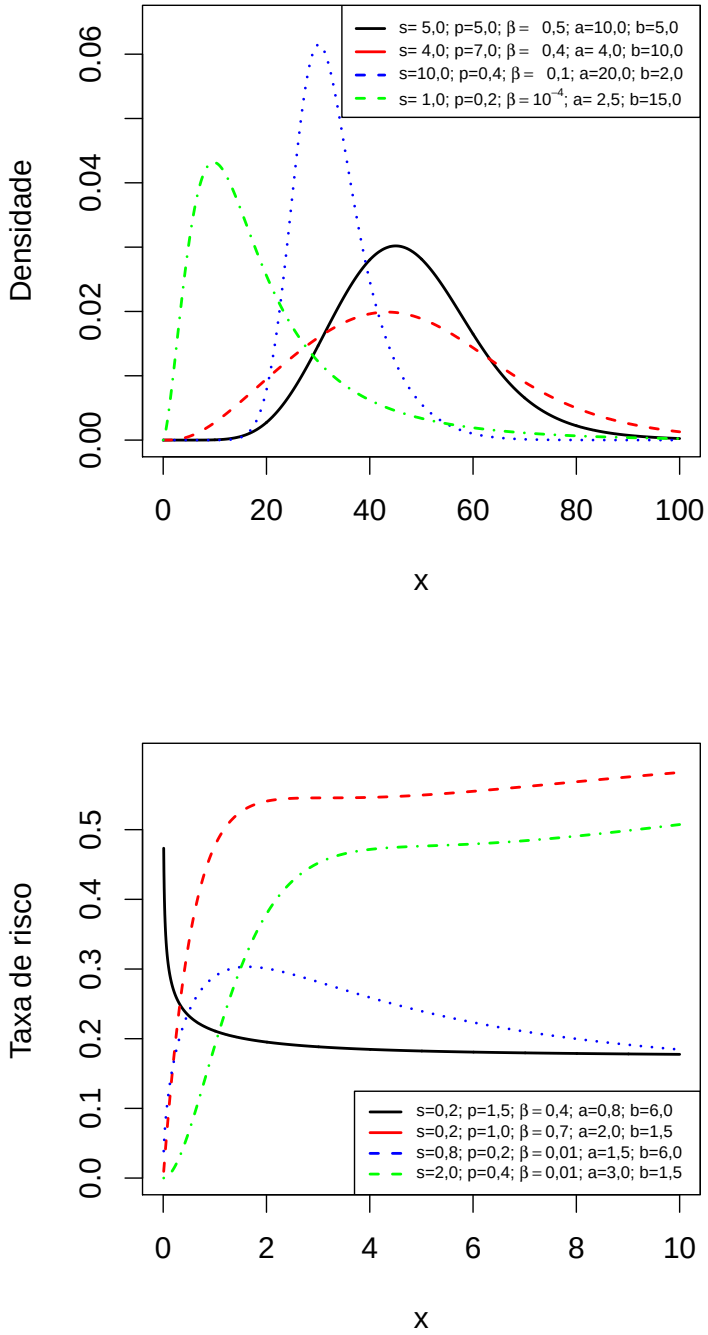



Figura 5.1 – Densidade e taxa de risco da MONBGa para alguns valores dos parâmetros

### 5.2.3 Distribuição Marshall-Olkin binomial negativa log-logística (MONBLL)

A pdf e a cdf da distribuição log-logística (LL) são (para $x, a, b > 0$)

$$g(x) = b\,a^{-b}\,x^{b-1}\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right]^{-2} \quad \text{e} \quad G(x) = 1-\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right]^{-1}.$$

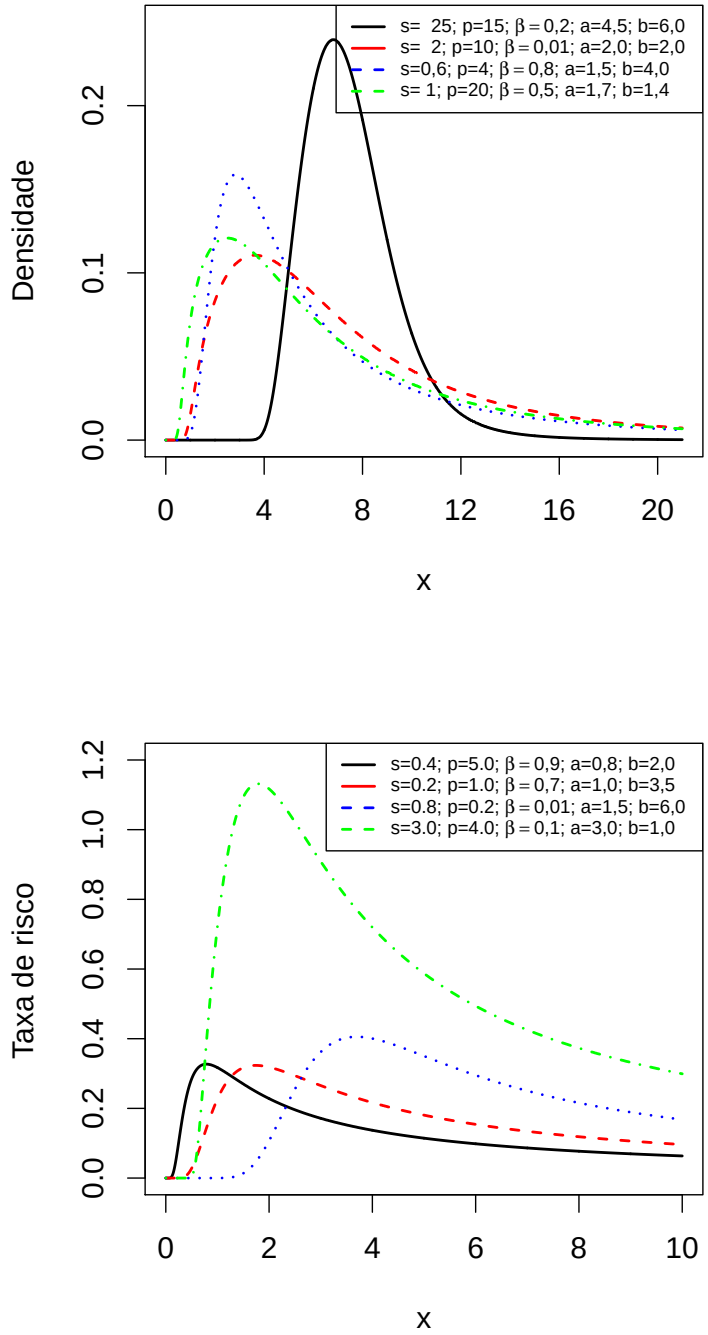



Figura 5.2 – Densidade e taxa de risco da MONBFr para alguns valores dos parâmetros

Inserindo essas expressões em (5.4) tem-se a pdf da MONBLL (para $x > 0$)

$$f(x; s, p, \beta, a, b) = \frac{b\, s\, p\, \beta\, (x/a)^{b-1}\, [p + (x/a)^b]^{s-1}}{a\, [(1-\beta)^{-s} - 1]\, [p\,(1-\beta) + (x/a)^b]^{s+1}}.$$

A distribuição LL surge para $s = 1$, $p = 0$ e $\beta \to 0$. Gráficos da função densidade e da taxa de

risco da MONBLL para alguns valores dos parâmetros são apresentados na Figura 5.3.

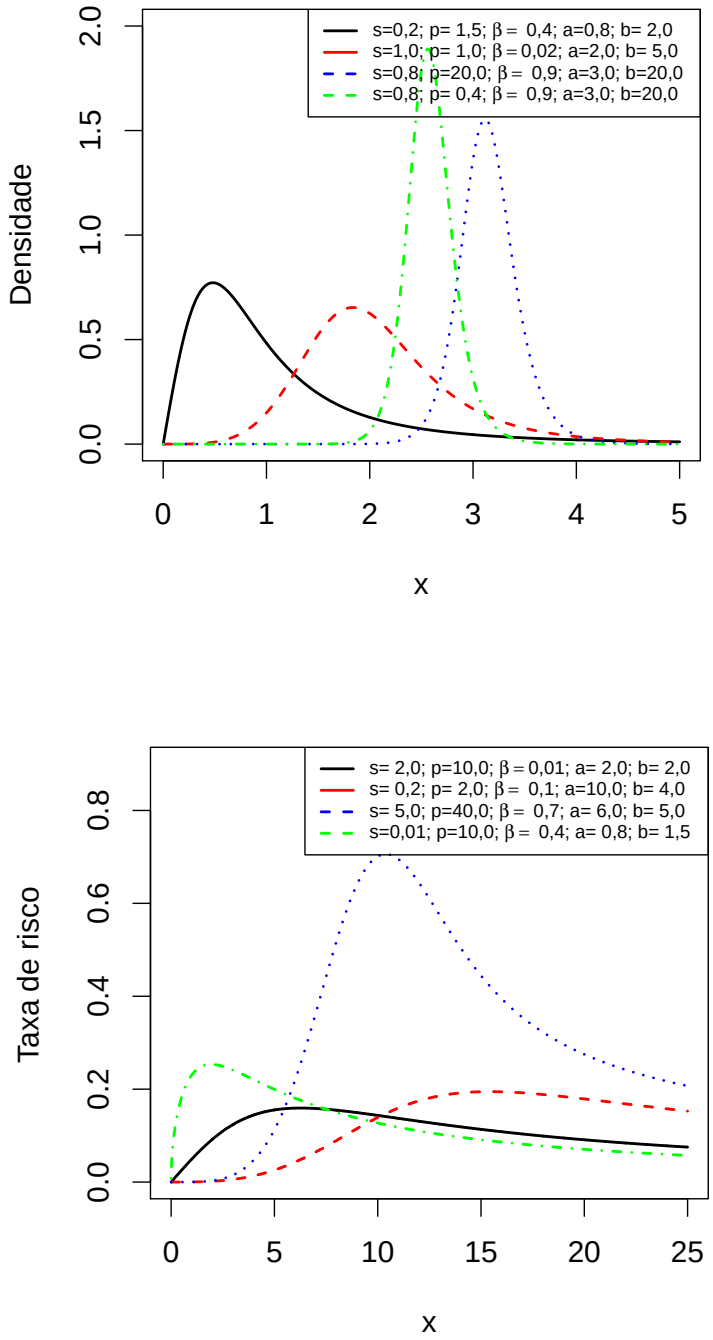



Figura 5.3 – Densidade e taxa de risco da MONBLL para alguns valores dos parâmetros

### 5.2.4 Distribuição Marshall-Olkin binomial negativa Weibull (MONBW)

Se $G(x)$ é a cdf da Weibull com parâmetro de escala $a > 0$ e parâmetro de forma $b > 0$, tem-se $G(x) = 1 - \exp[-(a\,x)^b]$ e a pdf (para $x > 0$) da distribuição MONBW é dada por

$$f(x; s, p, \beta, a, b) = \frac{b\,s\,p\,\beta\,a^b\,\mathrm{e}^{-(a\,x)^b}\,\left[1-(1-p)\,\mathrm{e}^{-(a\,x)^b}\right]^{s-1}}{[(1-\beta)^{-s}-1]\,\left\{1-[1-p\,(1-\beta)]\,\mathrm{e}^{-(a\,x)^b}\right\}^{s+1}}.$$

A Figura 5.4 apresenta algumas possíveis formas da função densidade e da taxa de risco da MONBW.

## 5.3 Expansões úteis

Usando a equação (13) de Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013), expansões para a pdf e cdf da classe MO dadas em Barreto-Souza, Lemonte e Cordeiro (2013) e uma equação para uma série de potência elevada a um inteiro positivo de Gradshteyn e Ryzhik (2007, Seção 0.314), a pdf de $X$, para $p \in (0, 1)$, pode ser expressa como uma combinação linear de funções densidades de G-exponencializadas (abreviadamente exp-G)

$$f(x) = \sum_{j,m,t=0}^{\infty} \gamma_{j,m,t}\,h_{j+m+t+1}(x; \boldsymbol{\xi}), \tag{5.6}$$

em que $h_\alpha(x; \boldsymbol{\xi}) = \alpha\,g(x; \boldsymbol{\xi})\,G^{\alpha-1}(x; \boldsymbol{\xi})$ denota a função densidade da exp-G com parâmetro de potência $\alpha$,

$$\gamma_{j,m,t} = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(j+1)\,(m+1)}{(j+m+t+1)}\,w_{k,j}\,v_{l,m}\,c_{j,t},$$

$$w_{k,j} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^j\,s\,\beta^{k+1}\,(s+1)_k}{(j+1)\,k!\,[(1-\beta)^{-s}-1]}\binom{k}{j},$$

$$v_{l,m} = \sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^{l-m}\,p\,(l+1)\,(1-p)^l}{l-m+1}\binom{l}{m},$$

$c_{j,t} = (t\,b_0^{-1})\,\sum_{n=1}^{t}[n\,(j+1)-t]\,b_n\,c_{j,t-n}$, $t \geq 1$, $b_t = \sum_{r=t}^{\infty} v_{r,t}$, $c_{j,0} = b_0^j$ e $(s)_k = \Gamma(s+k)/\Gamma(s) = s\,(s+1)\ldots(s+k-1)$ é o símbolo de Pochhammer.

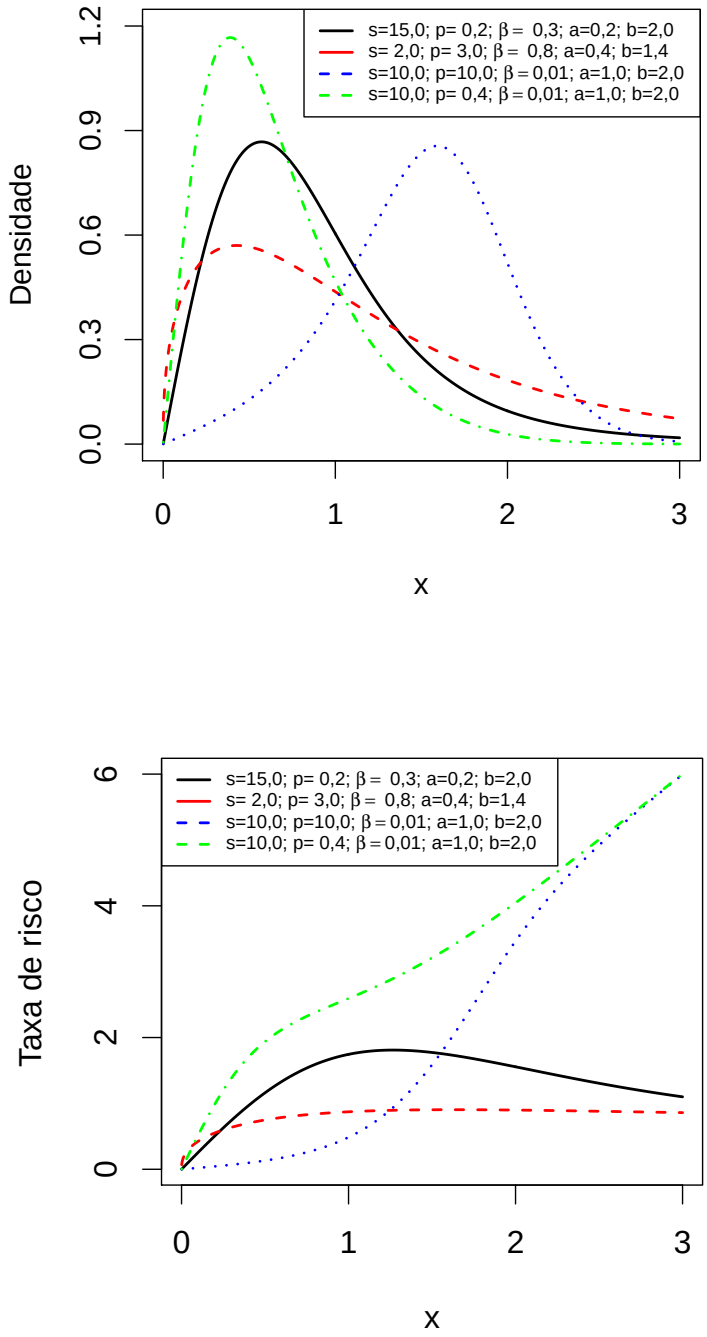
Para $p > 1$, $f(x)$ em (5.4) pode ser expressa de modo semelhante como

$$f(x) = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t}\,h_{j+r+t+1}(x; \boldsymbol{\xi}), \tag{5.7}$$

em que

$$\varphi_{j,r,t} = \frac{(j+1)\,(r+1)}{(r+j+t+1)}\,w_{k,j}\,\nu_r\,d_{j,t},$$

$\nu_r = (1/p)\,[1-(1/p)]^r$, $d_{j,t} = (t\,\nu_0^{-1})\,\sum_{n=1}^{t}[n\,(j+1)-t]\,\nu_n\,d_{j,t-n}$, $t \geq 1$ e $d_{j,0} = \nu_0^j$.




(c) (d)

Figura 5.4 – Densidade e taxa de risco da MONBW para alguns valores dos parâmetros

Por integração de (5.6) e de (5.7), pode-se expressar $F(x)$ como

$$F(x) = \sum_{m,j,s=0}^{\infty} \gamma_{j,m,t}\, H_{j+m+t+1}(x;\boldsymbol{\xi}), \qquad \text{para } p \in (0,1), \tag{5.8}$$

e

$$F(x) = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t}\, H_{j+r+t+1}(x;\boldsymbol{\xi}), \qquad \text{para } p > 1, \tag{5.9}$$

respectivamente. As equações (5.6) e (5.7) revelam que algumas propriedades matemáticas da nova família podem ser obtidas utilizando as propriedades conhecidas das distribuições exp-G. Algumas dessas propriedades serão apresentadas para a equação (5.7), mas resultados similares pode ser obtidos para a equação (5.6).

## 5.4 Função quantílica

A correspondente qf para (5.3) é obtida diretamente da qf associada a $G(x;\boldsymbol{\xi})$ por

$$Q(u) = F^{-1}(x) = G^{-1}\left(1-u^{*};\boldsymbol{\xi}\right), \tag{5.10}$$

em que

$$u^{*} = \frac{1-\left[\overline{\overline{\beta}}-u\left(\overline{\overline{\beta}}-1\right)\right]^{-1/s}}{\beta\, p+\overline{p}\left\{1-\left[\overline{\overline{\beta}}-u\left(\overline{\overline{\beta}}-1\right)\right]^{-1/s}\right\}},$$

$\overline{p} = 1-p$ e $\overline{\overline{\beta}} = (1-\beta)^{-s}$.

Quantis de interesse podem ser obtidos de (5.10) substituindo valores apropriados para $u$. Em particular, a mediana de $X$ é obtida para $u = 0,5$. A motivação para usar medidas baseadas nos quantis é a não-existência da assimetria e da curtose para muitas distribuições generalizadas. Neste caso, pode-se calcular a assimetria de Bowley que tem como base os quartis (KENNEY; KEEPING, 1962)

$$B = \frac{Q(3/4)-2Q(1/2)+Q(1/4)}{Q(3/4)-Q(1/4)}$$

e a curtose de Moors (MOORS, 1988) que é baseada nos octis

$$M = \frac{Q(7/8)-Q(5/8)+Q(3/8)-Q(1/8)}{Q(6/8)-Q(2/8)}.$$

Gráficos da assimetria e curtose da distribuição MONBW, para algumas escolhas de $s$, $\beta$, $a$ e $b$, como função de $p$ são apresentados na Figura 5.5. Os gráficos indicam que há uma grande flexibilidade das curvas de assimetria e curtose para essa distribuição.

## 5.5 Momentos

Uma primeira fórmula para o $q$-ésimo momento de $X$, dada por $\mu_q' = E(X^q)$, segue de (5.7) como

$$\mu_q' = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t}\, E\left(Y_{j+r+t+1}^{q}\right), \tag{5.11}$$

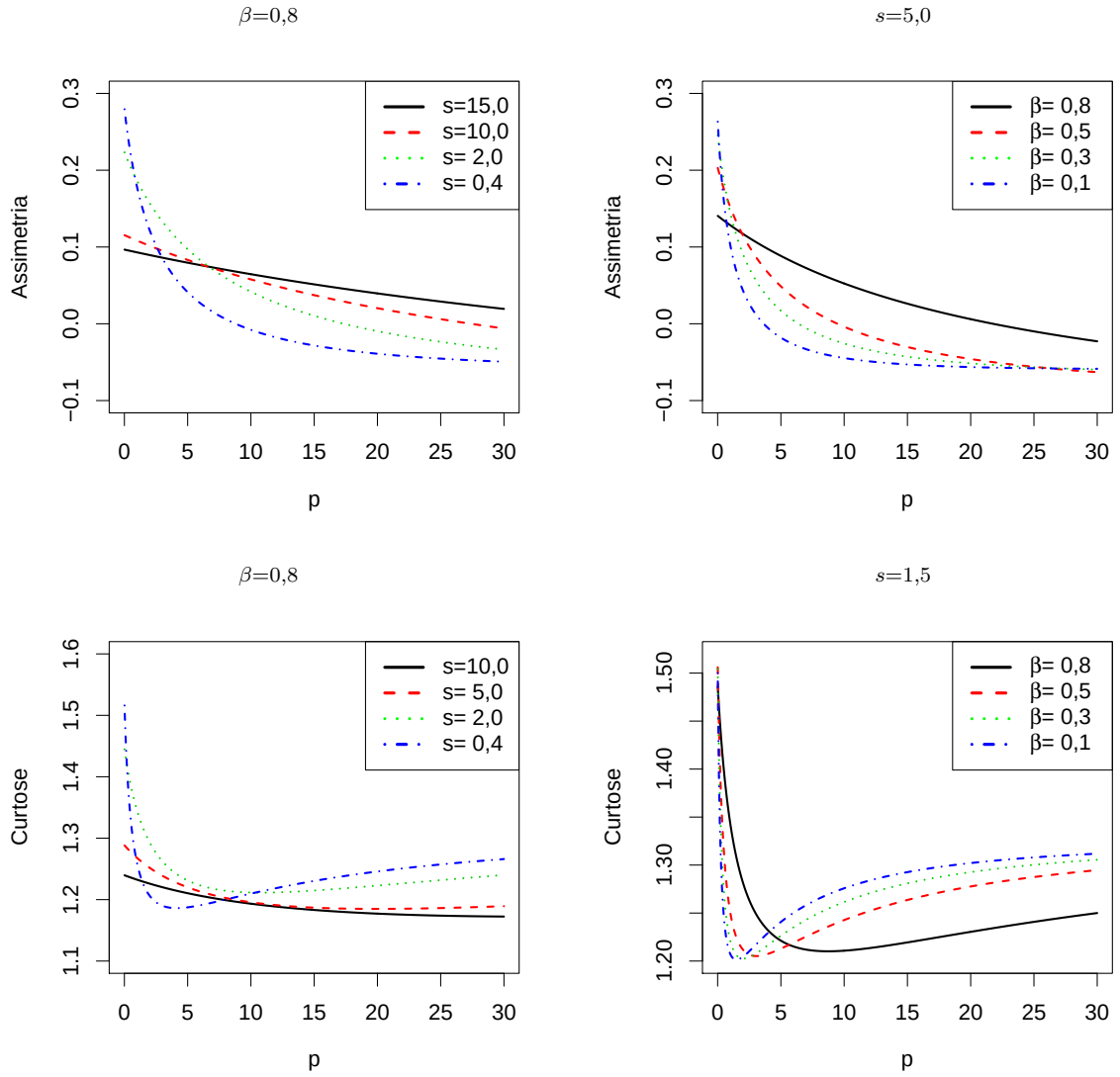



Figura 5.5 – Gráficos de assimetria e curtose da MONBW como função de $p$ para valores selecionados de $s$ e $\beta$ com $a = 5,0$ e $b = 2,0$

em que $E\left(Y_\alpha^q\right)$ é o $q$-ésimo momento de $Y_\alpha \sim$ Exp-G$(\alpha;\boldsymbol{\xi})$. Expressões para os momentos de diversas distribuições exponencializadas são dadas por Nadarajah e Kotz (2006), as quais podem ser utilizadas para obter $E(X^q)$.

Uma segunda fórmula para $\mu_q'$ pode ser derivada de (5.11) em termos da qf da base $Q_G(x;\boldsymbol{\xi}) = G^{-1}(x;\boldsymbol{\xi})$. Obtém-se

$$\mu_q' = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t}\, \tau_q(j,r,t), \tag{5.12}$$

em que $\tau_q(j,r,t)$ é dado por

$$\tau_q(j,r,t) = (j+r+t+1) \int_0^1 Q_G(u;\boldsymbol{\xi})^q\, u^{j+r+t+1}\, du. \tag{5.13}$$

Os momentos ordinários de várias distribuições MONB podem ser determinados diretamente das equações (5.11) e (5.12). Para a distribuição Marshall-Olkin binomial negativa ex-

ponencial (MONBE) (com parâmetro $\lambda > 0$), tem-se

$$\mu'_q = (-1)^q \, \lambda^q \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t} \, \varsigma_{j,r,t,q},$$

em que $\varsigma_{j,r,t,q} = (j+r+t+1) \left. \dfrac{\partial^q}{\partial z^q} B\left(j+r+t+1, z-j-r-t\right) \right|_{z=j+r+t+1}$ e $B(\cdot,\cdot)$ é a função beta.

A mgf $M(t) = E\left(\mathrm{e}^{\mathrm{t\,X}}\right)$ de $X$ segue de (5.7) como

$$M(t) = \sum_{j,r,v=0}^{\infty} \varphi_{j,r,v} \, M_{j+r+v+1}(t;\boldsymbol{\xi}), \tag{5.14}$$

em que $M_\alpha(t;\boldsymbol{\xi})$ é a mgf de $Y_\alpha$. Outra representação para $M(t)$ é obtida de (5.14) como

$$M(t) = \sum_{j,r,v=0}^{\infty} \varphi_{j,r,v} \, \rho_{j,r,v}(t;\boldsymbol{\xi}),$$

em que

$$\rho_{j,r,v}(t;\boldsymbol{\xi}) = (j+r+v+1) \int_0^1 \exp\left[t \, Q_G(u;\boldsymbol{\xi})\right] \, u^{j+r+v} \, du. \tag{5.15}$$

A mgf da distribuição MONBE é dada por (para $\lambda \, t < 1$)

$$M(t) = \sum_{j,r,v=0}^{\infty} (j+r+v+1) \, B(1-\lambda \, t, j+r+v+1).$$

## 5.6 Desvios médios

Os desvios médios sobre a média ($\delta_1$) e sobre a mediana ($\delta_2$) de $X$ podem ser expressos como

$$\delta_1 = E(|X-\mu'_1|) = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2T(\mu'_1) \quad \text{e} \quad \delta_2 = E(|X-M|) = \mu'_1 - 2T(M), \tag{5.16}$$

respectivamente, em que $\mu'_1 = E(X)$, $M = Median(X)$ denota a mediana, $F(\mu'_1)$ segue de (5.3) e $T(z) = \int_{-\infty}^{z} x \, f(x) dx$ é o primeiro momento incompleto de $X$. A mediana $M$ é determinada explicitamente da qf (5.10) por $M = Q(1/2)$.

Fazendo $u = G(x)$ em (5.7) tem-se

$$T(z) = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,t,r} \, T_{j,r,t}(z), \tag{5.17}$$

em que a integral $T_{j,r,t}(z)$ pode ser expressa em termos de $Q(u) = G^{-1}(u)$ por

$$T_{j,r,t}(z) = (j+r+t+1) \int_0^{G(z;\boldsymbol{\xi})} Q_G(u;\boldsymbol{\xi}) \, u^{j+r+t} \, du. \tag{5.18}$$

Os desvios médios de $X$ podem ser calculados das equações (5.16)-(5.18). Por exemplo, os desvios médios do modelo MONBE (com parâmetro $\lambda$) é imediatamente calculado da função

$$T_{j,r,t}(z) = \frac{-\lambda \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{z}}{\lambda}} - 1\right)^{\mathrm{j+r+t+1}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{z}}{\lambda}\,(\mathrm{j+r+t+1})}}{(j+r+t+1)\,(j+r+t+2)} \, \log\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{z}}{\lambda}} + \mathrm{j} + \mathrm{r} + \mathrm{t} + 1\right).$$

Um representação alternativa para $T(z)$ pode ser encontrada de (5.7) como

$$T(z) = \int_{-\infty}^{z} x\, f(x) dx = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} \varphi_{j,r,t}\, J_{j,r,t}(z), \tag{5.19}$$

em que

$$J_{j,r,t}(z) = \int_{-\infty}^{z} x\, h_{j+r+t+1}(x; \boldsymbol{\xi})\, dx. \tag{5.20}$$

A equação (5.20) representa a quantidade básica para calcular os desvios médios das distribuições exp-G. Portanto, os desvios médios da MONB-G dependem somente dos desvios médios da distribuição exp-G.

Uma aplicação simples é fornecida para a distribuição MONBW. A Weibull exponencializada com parâmetro de potência $j^* = j + r + t + 1$ tem função densidade (para $x > 0$) dada por

$$h_{j^*}(x) = j^*\, a\, b^a\, x^{a-1} \exp\{-(b\,x)^a\}[1 - \exp\{-(b\,x)^a\}]^{j^*-1}$$

e, então,

$$\begin{aligned} J_{j,r,t}(z) &= (j+r+t+1)\, a\, b^a \int_0^z x^a \exp\{-(b\,x)^a\}[1 - \exp\{-(b\,x)^a\}]^{j+r+t}\, dx \\ &= (j+r+t+1)\, a\, b^a \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{j+r+t}{k} \int_0^z x^a\, \exp\{-(k+1)(b\,x)^a\} dx. \end{aligned}$$

Pode-se calcular a última integral usando a função gama incompleta, para $\alpha > 0$, $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x w^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{w}}\, \mathrm{dw}$, e, então,

$$J_{j,r,t}(z) = (j+r+t+1)\, a\, b^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{j+r+t}{k}}{(k+1)^{1+a^{-1}}}\, \gamma(1 + a^{-1}, (k+1)(\beta z)^a).$$

As equações (5.17) e (5.19) são os principais resultados desta seção. Uma aplicação dessas equações pode ser a obtenção das curvas de Bonferroni e de Lorenz definidas para uma dada probabilidade $p$ por $B(p) = T(q)/(p\mu_1')$ e $L(p) = T(q)/\mu_1'$, respectivamente, em que $\mu_1' = E(X)$ e $q = F^{-1}(p)$.

## 5.7 Entropias

A entropia de uma variável aleatória $X$ com função densidade $f(x)$ é uma medida da variação da incerteza. A entropia de Shannon é definida por $E\{-\log[f(X)]\}$. Suponha $X \sim$ MONB-G$(s, p, \beta, \boldsymbol{\xi})$. Então,

$$\begin{aligned} E\{-\log[f(X)]\} &= -\log\left[\frac{s\,p\,\beta}{(1-\beta)^{-s} - 1}\right] - E\left\{\log\left[g(X; \boldsymbol{\xi})\right]\right\} \\ &\quad + (s-1) E\left(\log\left\{1 - \left[1 - p\,(1-\beta)\right] \overline{G}(X; \boldsymbol{\xi})\right\}\right) \\ &\quad - (s-1) E\left\{\log\left[1 - (1-p)\, \overline{G}(X; \boldsymbol{\xi})\right]\right\}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

As três esperanças em (5.21) podem ser expressas como

$$E\left\{\log\left[g(X;\boldsymbol{\xi})\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \log[g(x;\boldsymbol{\xi})]\, f(x)\, dx = \sum_{j,r,t=0}^{\infty} j^*\, \gamma_{j,r,t}\, I_{j,r,t},$$

$$E\left(\log\left\{1-[1-p\,\overline{\beta}]\,\overline{G}(X;\boldsymbol{\xi})\right\}\right) = -\sum_{j,r,t=0}^{\infty} j^*\, \gamma_{j,r,t}\,(1-p\,\overline{\beta})\,\Gamma(j^*)\,{}_2\widetilde{F}_1(1,1;j^*+2;1-p\,\overline{\beta}),$$

com $p\,\overline{\beta} \neq 1$ e

$$E\left\{\log\left[1-(1-p)\,\overline{G}(X;\boldsymbol{\xi})\right]\right\} = -\sum_{j,r,t=0}^{\infty} j^*\, \gamma_{j,r,t}\,(1-p)\,\Gamma(j^*)\,{}_2\widetilde{F}_1(1,1;j^*+2;1-p).$$

Aqui, $j^* = j+r+t+1$, $I_{j,r,t} = I_{j,r,t}(u) = \int_0^1 \log\left\{g\left[Q(u;\boldsymbol{\xi})\right]\right\}\, u^{j+r+t}\, du$, $g\left[Q(u;\boldsymbol{\xi})\right]$ é a função densidade aplicada a quantílica e ${}_p\widetilde{F}_q$ é a função hipergeométrica regularizada que é dada por ${}_p\widetilde{F}_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = {}_pF_q(a;b;z)/[\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)]$. Assim, segue a partir da equação (5.21)

$$\begin{aligned} E\{-\log[f(X)]\} &= -\log\left[\frac{s\,p\,\beta}{(1-\beta)^{-s}-1}\right] + \sum_{j,r,t=0}^{\infty} j^*\, \gamma_{j,r,t} \\ &\quad \times \Big\{ I_{j,r,t} - (s-1)\,(1-p\,\overline{\beta})\,\Gamma(j^*)\,{}_2\widetilde{F}_1(1,1;j^*+2;1-p\,\overline{\beta}) \\ &\quad + (s-1)(1-p)\,\Gamma(j^*)\,{}_2\widetilde{F}_1(1,1;j^*+2;1-p)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Outra medida de entropia popular é a entropia de Rényi dada por

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c}\log\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x)dx\right],\ c>0, c\neq 1. \tag{5.23}$$

A integral pode ser expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x)\, dx = \left[\frac{s\,p\,\beta}{(1-\beta)^{-s}-1}\right]^c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x,\boldsymbol{\xi})^c\,\left[1-(1-p)\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})\right]^{c\,(s-1)}}{\left\{1-[1-p(1-\beta)]\,\overline{G}(x;\boldsymbol{\xi})\right\}^{c\,(s+1)}}\, dx,$$

expandindo os binômios e modificando a variável

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c}\log\left\{\left[\frac{s\,p\,\beta}{(1-\beta)^{-s}-1}\right]^c \sum_{i,j=0}^{\infty} \varpi_{i,j}\, J_{i,j}\right\}, \tag{5.24}$$

em que $\varpi_{i,j} = \varpi_{i,j}(c) = (-1)^{i+j}\,[1-p\,(1-\beta)]^i\,(1-p)^j\,\binom{-c\,(s+1)}{i}\binom{c\,(s-1)}{j}$ e $J_{i,j} = J_{i,j}(c,u) = \int_0^1 g[Q(1-u;\boldsymbol{\xi})]^{c-1}\, u^{i+j}\, du$. Para o modelo MONBW com parâmetros $a>0$ e $b>0$, obtém-se

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c}\log\left\{\left[\frac{s\,p\,\beta}{(1-\beta)^{-s}-1}\right]^c \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{(c-1)^k}{k!}\,\varpi_{i,j}\, T_{i,j,k}\right\},$$

em que $T_{i,j,k} = T_{i,j,k}(c,a,b) = (-1)^{\tau}\,\Gamma(1+\tau)\,(i+j+1)^{-(\tau+1)}$ (para $b+a\,k+(a-1)(c-1) > -1$) e $\tau = [a\,k+(a-1)(c-1)]/b$. As equações (5.22) e (5.24) são os principais resultados desta seção.

## 5.8 Estatísticas de ordem

Estatísticas de ordem aparecem em diversas áreas da estatística teórica e prática. A função densidade $f_{i:n}(x)$ da $i$-ésima estatística de ordem $X_{i:n}$, para $i = 1, \ldots, n$, de variáveis aleatórias i.i.d., $X_1, \ldots, X_n$, com qualquer distribuição MONB, é simplesmente dada por

$$f_{i:n}(x) \;=\; \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} f(x)\, F(x)^{j+i-1}.$$

Percontini, Cordeiro e Bourguignon (2013) demonstram que

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} m_{r,k,j}\, h_{r+k+j+i}(x), \tag{5.25}$$

em que

$$m_{r,k,j} = \frac{(-1)^j\, i\,(r+1)\,\omega_{r,k}\,\gamma_{j+i-1,k}}{(r+k+j+i)} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}.$$

Substituindo $h_{r+k+j+i}(x)$ pela densidade da MO-exponencializada com parâmetro $r+k+j+i$ e expandindo os binômios, a densidade da $i$-ésima estatística de ordem da distribuição MONB reduz-se a

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r,k,t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{t} \omega_{r,k,j,i,t,l}\, h_{r+k+j+i+l}(x;\boldsymbol{\xi}), \tag{5.26}$$

em que

$$\omega_{r,k,j,i,t,l} = \frac{(-1)^{l+t}\, p\,(1-p)^t\,(r+k+j+i)}{(r+k+j+i+l)} \binom{r+k+j+i+t}{t} m_{r,k,j}$$

e $h_\alpha(x,\boldsymbol{\xi})$ é a pdf de $Y_\alpha \sim$ Exp-G$(\alpha;\boldsymbol{\xi})$.

O $m$-ésimo momento da estatística de ordem $X_{i:n}$ pode ser expresso como

$$E(X_{i:n}^m) = \sum_{r,k,t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{t} \omega_{r,k,j,i,t,l}\, \tau_m(r,k,j,i,l), \tag{5.27}$$

em que $\tau_m(r,k,j,i,l) = (r+k+j+i+l)\int_0^1 Q_G(u;\boldsymbol{\xi})^m\, u^{r+k+j+i+l}\, du$ podem ser computados numericamente.

A mgf de $X_{i:n}$ podem ser obtidas de (5.26) como

$$M_{i:n}(t) = \sum_{r,k,v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{v} \omega_{r,k,j,i,v,l}\, \rho_{r,k,j,i,l}(t;\boldsymbol{\xi}), \tag{5.28}$$

em que $\rho_{r,k,j,i,l}(t;\boldsymbol{\xi}) = (r+k+j+i+l)\int_0^1 \exp\left[t\, Q_G(u;\boldsymbol{\xi})\right] u^{r+k+j+i+l-1}\, du$ podem ser computadas numericamente. As quantidades $E(X_{i:n}^m)$ e $M_{i:n}(t)$ para a distribuição MONBE com parâmetro $\lambda > 0$ (para $t < \lambda^{-1}$) seguem das equações (5.27) e (5.28) como

$$E(X_{i:n}^m) = m!\,\lambda^m \sum_{r,k,t,v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{t} \omega_{r,k,j,t,l}\, \frac{(-1)^{m+v}}{(v+1)^{m+1}} \binom{r+k+j+i}{v}$$

e

$$M_{i:n}(t) = \sum_{r,k,v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{l=0}^{v} \omega_{r,k,j,v,l}\, B(r+k+j+i+1, 1-\lambda t),$$

respectivamente. Algumas propriedades matemáticas das estatísticas de ordem da MONB incluindo momentos, momentos fatoriais e inversos, mgf, desvios médios e curvas de Bonferroni e de Lorenz podem ser derivadas da equação (5.26) pelas conhecidas propriedades da distribuição Exp-G.

## 5.9 Estimação

Adota-se o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo. O logaritmo da função de verossimilhança, $\ell(\boldsymbol{\theta})$, de uma amostra $x_1, \ldots, x_n$ of $X$ com pdf (5.4) é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= n\left[\log(s) + \log(p) + \log(\beta) - \log\{[(1-\beta)^{-s} - 1]\}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \log\left[g(x_i;\boldsymbol{\xi})\right] - (s+1)\sum_{i=1}^{n} \log\left\{1 - \overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p(1-\beta)]\right\} \\ &+ (s-1)\sum_{i=1}^{n} \log\left[1-(1-p)\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\right], \end{aligned} \tag{5.29}$$

em que $\boldsymbol{\xi}$ é um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos da distribuição base $G(x;\boldsymbol{\xi})$.

A expressão (5.29) pode ser maximizada diretamente usando o software R (pacote **bbmle**) ou pela resolução das equações não-lineares de verossimilhança obtidas pela diferenciação de (5.29). Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$ são dados por

$$\begin{aligned} U_s(\boldsymbol{\theta}) &= n\left[\frac{1}{s} + \frac{\log(1-\beta)}{1-(1-\beta)^s}\right] - \sum_{i=1}^{n} \log\left\{1 - \overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p(1-\beta)]\right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \log\left[1-(1-p)\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_p(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{p} - (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p\,(1-\beta)]} \\ &+ (s-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-(1-p)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{n}{\beta} - \frac{n\,s}{(\beta-1)\,[(1-\beta)^s - 1]} \\ &+ (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{p\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p\,(1-\beta)]} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
U_{\xi_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, g(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\, \xi_j}{g(x_i;\boldsymbol{\xi})} - (s+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{[1-p(1-\beta)]\, \partial\, G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\, \xi_j}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p\,(1-\beta)]} \\
&- (s-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)\, \partial\, G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\, \xi_j}{1-(1-p)\, \overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})},
\end{aligned}
$$

para $j = 1, \ldots, p$. Para estimação intervalar e testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo, a matriz de informação observada é requerida. Os $(p+3) \times (p+3)$ elementos da matriz de informação observada são dados no Apêndice APÊNDICE D.-

Sob certas condições que são satisfeitas para os parâmetros no interior do espaço paramétrico, mas não sobre a fronteira, a distribuição normal multivariada $N_{p+3}(0, J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1})$, em que $J(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ é a matriz de informação observada avaliada em $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros individuais. Para comparar essa distribuição com alguns modelos especiais, podem-se utilizar os três bem-conhecidos testes: estatística da razão de verossimilhança (LR), estatística de Wald e escore de Rao. Para testar modelos encaixados, estas estatísticas convergem para uma distribuição qui-quadrado com número de graus de liberdade igual à diferença entre o número de parâmetros desconhecidos dos dois modelos testados.

## 5.10 Aplicação

Apresenta-se, a seguir, a análise de um conjunto de dados reais com fins ilustrativos. Estes dados de resistência são originalmente descritos por Gupta e Kundu (2010). Os dados representam a medida de resistência em GPa para fibras simples de carbono. Os dados são: 1,901; 2,132; 2,203; 2,228; 2,257; 2,350; 2,361; 2,396; 2,397; 2,445; 2,454; 2,474; 2,518; 2,522; 2,525; 2,532; 2,575; 2,614; 2,616; 2,618; 2,624; 2,659; 2,675; 2,738; 2,740; 2,856; 2,917; 2,928; 2,937; 2,937; 2,977; 2,996; 3,030; 3,125; 3,139; 3,145; 3,220; 3,223; 3,235; 3,243; 3,264; 3,272; 3,294; 3,332; 3,346; 3,377; 3,408; 3,435; 3,493; 3,501; 3,537; 3,554; 3,562; 3,628; 3,852; 3;871; 3,886; 3,971; 4,024; 4,027; 4,225; 4,395; 5,020. Na Tabela 5.1 é apresentado um resumo descritivo desses dados. Têm-se, possivelmente, dados provenientes de distribuição leptocúrtica e com assimetria positiva.

Tabela 5.1 – Estatísticas descritivas

| Média | Mediana | Desvio padrão. | Variância | Assimetria | Curtose | Min | Máx |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3,059$ | $2,996$ | $0,621$ | $0,386$ | $0,648$ | $0,412$ | $1,901$ | $5,020$ |

Foram ajustadas as distribuições MONBGa, MONBFr, MONBLL, MONBW, McDonald Weibull (McW) e beta Burr XII (BBXII) a esses dados. A distribuição McW (CORDEIRO; HASHIMOTO; ORTEGA, 2014) tem pdf (para $x > 0$)

$$
f(x;a,b,c,\lambda,\gamma) = \frac{c\,\gamma\,\lambda^{\gamma}}{B\,(a/c,b)}\, \mathrm{e}^{-(\lambda\,\mathrm{x})^{\gamma}}\, \left[1-\mathrm{e}^{-(\lambda\,\mathrm{x})^{\gamma}}\right]^{\mathrm{a}-1} \left\{1-\left[1-\mathrm{e}^{-(\lambda\,\mathrm{x})^{\gamma}}\right]^{\mathrm{c}}\right\}^{\mathrm{b}-1},
$$

e a distribuição BBXII (PARANAÍBA *et al.*, 2013) tem pdf (para $x \geq 0$)

$$f(x; a, b, s, k, c) = \frac{c\,k\,x^{c-1}}{s^c\,B\,(a,b)\,\left[1+(x/s)^c\right]^{-k\,b-1}}\,\left\{1-\left[1+(x/s)^c\right]^{-k}\right\}^{a-1}.$$

Na Tabela 5.2 são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança (MLEs) e os correspondentes erros padrão estimados (SEs), os valores das estatísticas critério de informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974), critério de informação de Akaike corrigido (CAIC) (BOZDOGAN, 1987) e critério bayesiano de Schwarz's (BIC) (SCHWARZ, 1978) para os dados atuais. Os três critérios de informação indicam uma possível classificação para os modelos. O menor valor desses critérios são para a distribuição MONBFr que pode ser escolhida como mais adequada nesse caso.

Tabela 5.2 – MLEs, correspondentes SEs (dados entre parênteses) e as estatísticas AIC, BIC e CAIC para as resistências medidas em GPA

| Distribuição | $s$ | $p$ | $\beta$ | $a$ | $b$ | AIC | CAIC | BIC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| MONBGa | 12,3033 | 0,4627 | 0,0001 | 26,3423 | 0,1263 | 123,0602 | 124,1128 | 133,7758 |
| | (0,1761) | (4,0827) | (1,3355) | (4,5385) | (0,0276) | | | |
| MONBFr | 19,4494 | 21,9129 | 0,5387 | 3,9315 | 2,9039 | **121,9879** | **123,0405** | **132,7035** |
| | (16,1003) | (28,2683) | (0,4824) | (2,2013) | (0,9094) | | | |
| MONBLL | 7,8028 | 4,8313 | 0,0003 | 2,4950 | 8,6457 | 125,6897 | 126,7423 | 136,4054 |
| | (0,0350) | (110,6903) | (0,3259) | (6,6226) | (0,8903) | | | |
| MONBW | 3,9801 | 0,0282 | 0,0128 | 0,2163 | 8,3418 | 125,0002 | 126,0529 | 135,7159 |
| | (0,0039) | (0,0633) | (0,6311) | (0,0324) | (1,0050) | | | |
| Distribuição | $a$ | $b$ | $c$ | $\lambda$ | $\gamma$ | AIC | CAIC | BIC |
| McW | 76,1084 | 1,6927 | 0,2581 | 1,2688 | 1,0471 | 122,6394 | 123,6920 | 133,3550 |
| | (0,0687) | (3,4804) | (0,0253) | (0,2945) | (0,6390) | | | |
| Distribuição | $a$ | $b$ | $s$ | $k$ | $c$ | AIC | CAIC | BIC |
| BBXII | 27,5702 | 16,3410 | 1,5690 | 0,6566 | 1,9694 | 122,6825 | 123,7351 | 133,3982 |
| | (77,2675) | (6,7441) | (2,4389) | (1,3294) | (2,8207) | | | |

Além disso, são calculadas as estatísticas de qualidade de ajuste de Cramér-von Mises ($W^*$) e de Anderson-Darling ($A^*$) com a finalidade de verificar qual modelo se ajusta melhor a esses dados. As estatísticas $W^*$ e $A^*$ são bem descritas por Chen e Balakrishnan (1995). Quanto menor os valores destas estatísticas, melhor o ajuste aos dados. Os valores das estatísticas $W^*$ e $A^*$ para os cinco modelos ajustados são dados na Tabela 5.3. Com base nestes valores, o modelo MONBFr ajusta-se aos dados melhor do que os outros quatro modelos e, então, pode ser escolhido como o melhor modelo.

Tabela 5.3 – Estatísticas de qualidade de ajuste para os modelos ajustados

| Modelo | $W^*$ | $p$-value | $A^*$ | |
|---|---|---|---|---|
| MONBGa | 0,0615 | 0,3616 | 0,3408 | 0,4961 |
| MONBFr | **0,0476** | 0,5465 | **0,2672** | 0,6873 |
| MONBLL | 0,0889 | 0,1590 | 0,5018 | 0,2066 |
| MONBW | 0,0768 | 0,2280 | 0,4512 | 0,2742 |
| McW | 0,0616 | 0,3609 | 0,3281 | 0,5176 |
| BBXII | 0,0613 | 0,3634 | 0,3287 | 0,5167 |

Estes modelos são não-encaixados e portanto podem ser testados utilizando a estatística LR para modelos não-encaixados (CAMERON; TRIVEDI, 1998, Seção 5.7.2). Os resultados são apresentados na Tabela 5.4. Neste caso, para os dados de resistência medida em GPa, rejeita-se a hipótese nula para os quatro testes LR em favor da MONBFr.

Tabela 5.4 – Testes LR

| Modelos | Estatística $T_{LR,NN}$ | $p$-valor |
|---|---|---|
| MONBFr vs MONBGa | 25,0240 | <0,0001 |
| MONBFr vs MONBLL | 15,3649 | <0,0001 |
| MONBFr vs MONBW | 16,1274 | <0,0001 |
| MONBFr vs McW | 24,2394 | <0,0001 |
| MONBFr vs BBXII | 0,8203 | 0,2060 |

O histograma dos dados e o gráfico das funções densidades ajustadas, MONBFr, McW e BBXII, são apresentados na Figura 5.6. Com base na figura e nos testes, conclui-se que o modelo MONBFr ajusta-se melhor a esses dados.

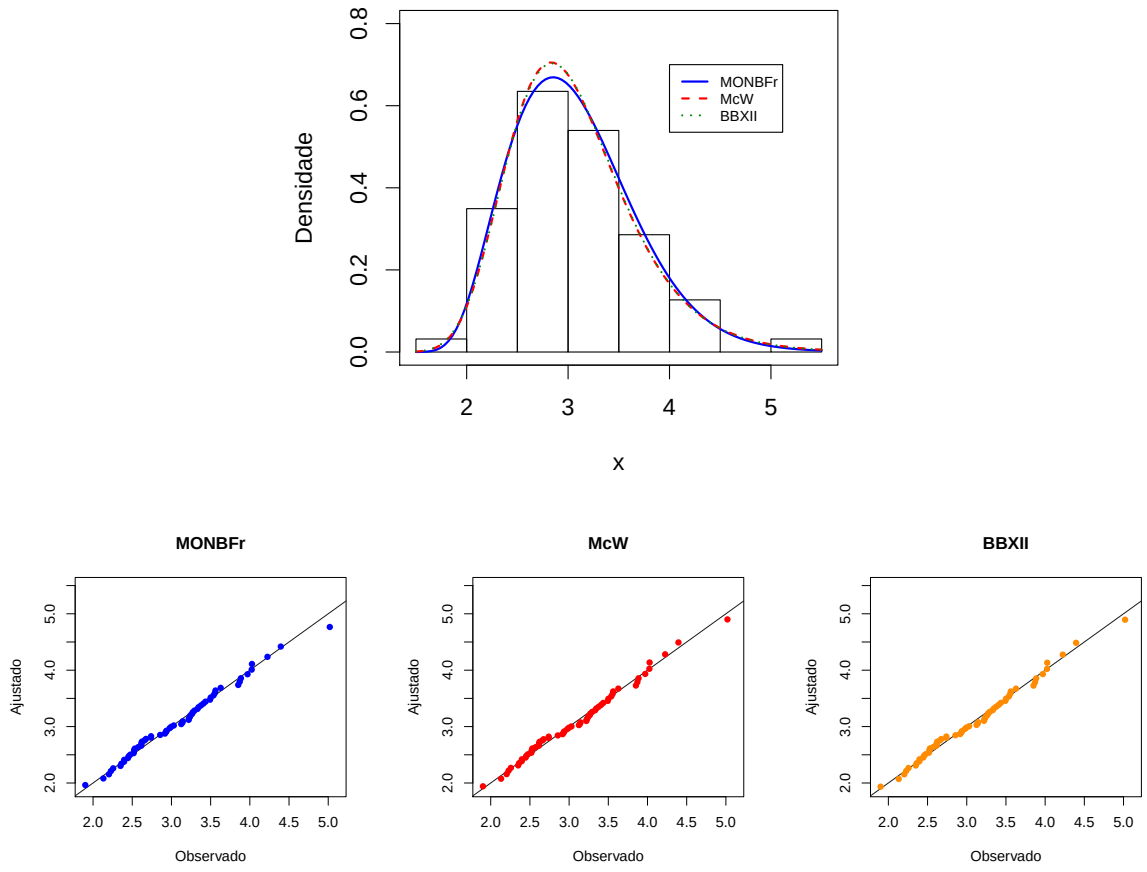



Figura 5.6 – Histograma e gráfico dos quantis para os modelos ajustados com base nas distribuições MONBFr, McW e BBXII aos dados de resistência

## 5.11 Considerações finais

Pela primeira vez, propõe-se a família de distribuições Marshall-Olkin negativa binomial (MONB). A família MONB estende várias distribuições conhecidas, tais como as distribuições normal, Weibull, gama, log-logística e Gumbel. Na verdade, para cada distribuição G, pode-se definir a correspondente distribuição MONB-G usando uma equação simples. Demonstra-se que algumas propriedades matemáticas da distribuição MONB-G podem ser prontamente obtidas a partir das distribuições G-exponenciadas. As expressões explícitas para os momentos ordinários, função geradora, entropias de Rényi e Shannon e estatísticas de ordem são derivadas para qualquer distribuição MONB-G. Discutem-se estimação por máxima verossimilhança e inferência sobre os parâmetros do modelo. Um exemplo com dados reais ilustra a importância e potencialidade da nova família.

## Referências

AKAIKE, H. A new look at statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p. 716–722, 1974.

Barreto-Souza, W.; LEMONTE, A. J.; CORDEIRO, G. M. General results for the Marshall and Olkin's family of distributions. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, Rio de Janeiro, v. 85, p. 3–21, 2013.

BOZDOGAN, H. Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrika**, Williamsburg, v. 52, p. 345–370, 1987.

BRITO, E. de; PERCONTINI, A.; CORDEIRO, G. M.; DEMÉTRIO, C. G. B. The Marshall-Olkin negative binomial family: theory and application. **Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica**, Budapest, 2014. In press.

CAMERON, A. C.; TRIVEDI, P. K. **Regression analysis of count data**. New York: Cambridge University Press, 1998. 411 p.

CHEN, G.; BALAKRISHNAN, N. A general purpose approximate goodness-of-fit test. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v. 27, p. 154–161, 1995.

CORDEIRO, G. M.; HASHIMOTO, E. M.; ORTEGA, E. M. M. The McDonald Weibull model. **Statistics**, New York,, v. 48, p. 256–278, 2014.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7th ed. San Diego: Academic Press, 2007. 1162 p.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized logistic distributions. **Journal of Applied Statistical Science**, New York, v. 18, p. 51–66, 2010.

KENNEY, J. F.; KEEPING, E. S. **Mathematics of Statistics, Part 1**. 3rd. ed. New Jersey: Literary Licensing, 1962. 472 p.

MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v. 84, p. 641–652, 1997.

MOORS, J. J. A. A quantile alternative for kurtosis. **The Statistician**, New Jersey, v. 37, p. 25–32, 1988.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The exponentiated type distributions. **Acta Applicandae Mathematicae**, Dordrecht, v. 92, p. 97–111, 2006.

PARANAÍBA, P. F.; ORTEGA, E. M. M.; CORDEIRO, G. M.; de Pascoa, M. A. R. The Kumaraswamy Burr XII distribution: theory and practice. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, New York, v. 83, p. 2117–2143, 2013.

PERCONTINI, A.; CORDEIRO, G. M.; BOURGUIGNON, M. The G-negative binomial family: general properties and applications. **Advances and Applications in Statistics**, India, v. 35, p. 127 –160, 2013.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Cleveland, v. 6, p. 461–464, 1978.

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

## 6.1 Conclusão

Neste trabalho, fez-se um tratamento matemático para duas novas distribuições, a McDonald Gumbel e a gama Burr XII, e para uma nova classe geradora de distribuições contínuas, a Marshall-Olkin binomial negativa. Entre as propriedades apresentadas, podem-se destacar, a função densidade de probabilidade, a função distribuição acumulada, a função densidade das estatísticas de ordem, a função geradora de momentos, os desvios médios, a entropia e as curvas de Bonferroni e Lorenz. O processo de estimação para os parâmetros dos novos modelos foi o método de máxima verossimilhança e obteve-se a matriz de informação observada.

Consideraram-se, também, alguns testes úteis para comparar modelos, tais como o teste da razão de verossimilhança e as estatísticas de Cramér-von Mises e de Anderson-Darling. Aplicações com dados reais foram realizadas para mostrar que as novas distribuições podem ser usadas mais efetivamente para proporcionar um melhor ajuste do que outros modelos conhecidos na literatura.

## 6.2 Pesquisas futuras

Dando continuidade a essas pesquisas, pretende-se apresentar modelos de regressão para as novas distribuições e para a nova família, bem como introduzir análise de diagnóstico (influência local e resíduos) para os novos modelos de regressão.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A - Matriz de informação observada da distribuição McGu

Os elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros $(a, b, c, \mu, \sigma)$ da distribuição McGu envolve as seguintes quantidades: $\psi'(\cdot)$ é a derivada da função digama, $z_i = (x_i - \mu)/\sigma$, $u_i = \mathrm{e}^{-\mathrm{z_i}}$ e $t_i = \mathrm{e}^{-\mathrm{c\,u_i}}$. Os elementos de $J(\boldsymbol{\theta})$ são:

$$J_{aa} = n[\psi'(a+b) - \psi'(a)], \qquad J_{ab} = n\psi'(a+b), \qquad J_{ac} = -c\sum_{i=1}^{n} u_i,$$

$$J_{a\mu} = -\frac{c}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad J_{a\sigma} = -\frac{c}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_i\, u_i, \qquad J_{bb} = n[\psi'(a+b) - \psi'(b)],$$

$$J_{bc} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i\, t_i}{1-t_i}\right], \qquad J_{b\mu} = \frac{c}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i\, t_i}{1-t_i}\right], \qquad J_{b\sigma} = \frac{c}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{z_i\, u_i\, t_i}{1-t_i}\right],$$

$$J_{cc} = -\frac{n}{c^2} + (b-1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i^2\, t_i}{(1-t_i)^2}\right],$$

$$J_{c\mu} = -\frac{a}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} u_i - \frac{(b-1)}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i\, t_i(1-t_i-c\,u_i)}{(1-t_i)^2}\right],$$

$$J_{c\sigma} = -\frac{a}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_i\, u_i - \frac{(b-1)}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{z_i\, u_i\, t_i\,(1-t_i-c\,u_i)}{(1-t_i)^2}\right],$$

$$J_{\mu\mu} = -\frac{ac}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} u_i + \frac{c(b-1)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{u_i\, t_i\,(1-t_i-c\,u_i)}{(1-t_i)^2}\right],$$

$$J_{\mu\sigma} = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{ac}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(1-z_i)\ u_i\right] - \frac{c(b-1)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{u_i\, t_i\,[(1-z_i)(1-t_i) + c\, z_i\, u_i]}{(1-t_i)^2}\right\}$$

e

$$\begin{aligned} J_{\sigma\sigma} &= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} z_i + \frac{ac}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[z_i\,(2-z_i)\ u_i\right] \\ &\quad - \frac{c(b-1)}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{z_i\, u_i\, t_i\,[(2-z_i)(1-t_i) + c\, z_i\, u_i]}{(1-t_i)^2}\right\}. \end{aligned}$$

## APÊNDICE B - Integral

Tem-se o seguinte resultado que vale para $m$ e $k$ inteiros positivos, $\mu > -1$ e $p > 0$ (PRUDNIKOV; BRYCHKOV; MARICHEV, 1992, pag. 21)

$$\begin{aligned} I\left(p, \mu, \frac{m}{k}, \nu\right) &= \int_0^\infty \exp(-px)\, x^\mu \,(1 + x^{\frac{m}{k}})^\nu dx \\ &= \frac{k^{-\nu} m^{\mu+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}} \Gamma(-\nu) p^{\mu+1}} \times \\ &\quad G^{k,k+m}_{k+m,k}\left(\frac{m^m}{p^m} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta(m, -\mu), \Delta(k, \nu+1) \\ \Delta(k, 0) \end{array}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $\Delta(k, a) = \frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}, \cdots, \frac{a+k}{k}$ e a função Meijer G definida na Seção 4.3.

## APÊNDICE C - Matriz de informação observada da distribuição GBXII

Os elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros $(a, s, k, c)$ da GBXII são

$$J_{aa}(\boldsymbol{\theta}) = -n\,\psi'(a) - \sum_{i\in C}\left\{\frac{G_{2,3}^{3,0}\left(\log[u_i]\,\middle|\,\begin{matrix}1,1\\0,0,a\end{matrix}\right)^2 - 2\,Q(a,\log[u_i])\,G_{3,4}^{4,0}\left(\log[u_i]\,\middle|\,\begin{matrix}1,1,1\\0,0,0,a\end{matrix}\right)}{Q\left(a,\log[u_i]\right)^2}\right\},$$

$$J_{as}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{c}{s}\sum_{i\in F}\left[\frac{u_i-1}{u_i\,\log(u_i)}\right] - \frac{c}{s}\sum_{i\in C}\left\{\frac{(u_i-1)\,G_{2,3}^{3,0}\left(\log[u_i]\,\middle|\,\begin{matrix}a,a\\a-1,a-1,2a-1\end{matrix}\right)}{u_i^2\,Q\left(a,\log[u_i]\right)^2}\right\},$$

$$J_{ak}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{k}, \qquad J_{ac}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i\in F}\left[\frac{v_i}{u_i\,\log(u_i)}\right] + \sum_{i\in C}\left\{\frac{v_i\,G_{2,3}^{3,0}\left(\log[u_i]\,\middle|\,\begin{matrix}a,a\\a-1,a-1,2a-1\end{matrix}\right)}{u_i^2\,Q\left(a,\log[u_i]\right)^2}\right\},$$

$$\begin{aligned}
J_{ss}(\boldsymbol{\theta}) \;=\;& \frac{r\,c}{s^2} + \frac{c\,(k+1)}{s^2}\sum_{i\in F}\left[\frac{c+u_i}{u_i^2}\right] - \frac{c\,(a-1)}{s^2}\sum_{i\in F}\left\{\frac{(u_i-1)\;[c(u_i-1)-(u_i+c)\log(u_i)]}{u_i^2\;\log(u_i)^2}\right\}\\
&-\frac{c}{s^2}\sum_{i\in C}\frac{(u_i-1)\;\log(u_i)^{a-2}}{u_i^4\,Q(a,\log[u_i])^2}\\
&\times\{c\,(u_i-1)\;[Q(a,\log[u_i])u_i\;(a-1-2\;\log[u_i]+u_i\,(c+1)\;\log[u_i])+\log(u_i)^a]\},
\end{aligned}$$

$$J_{sk}(\boldsymbol{\theta}) \;=\; \sum_{i\in F}\frac{u_i-1}{u_i},$$

$$\begin{aligned}
J_{sc}(\boldsymbol{\theta}) \;=\;& -\frac{r}{s} - \frac{(k+1)}{s}\sum_{i\in C}\left\{\frac{(u_i-1)[u_i+c\,\log(u_i-1)]}{u_i^2}\right\}\\
&+\frac{(a-1)}{s}\sum_{i\in C}\left\{\frac{(u_i-1)[c\,v_i-\log[u_i](u_i+c\,\log[u_i-1])]}{u_i^2\;\log(u_i)^2}\right\}\\
&+\sum_{i\in F}\frac{(u_i-1)\;\log(u_i)^{a-2}}{s\,u_i^4\,Q\left(a,\log[u_i]\right)^2}\\
&\times\{c\,v_i\;\log(u_i)^a+u_i\;\log(u_i)[u_i-c(u_i-2)\log(u_i-1)]-c(a-1)v_i\,Q\left(a,\log[u_i]\right)\},
\end{aligned}$$

$$J_{kk}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r\,a}{k^2}, \qquad J_{kc}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i\in F}\frac{v_i}{u_i},$$

e

$$\begin{aligned} J_{cc}(\boldsymbol{\theta}) &= -\sum_{i\in C}\frac{v_i^2\,(u_i-1)^{c-1}\,\log[u_i]^{a-2}}{u_i^4\,Q\,(a,\log[u_i])} \\ &\quad \times\left\{u_i\,Q\,(a,\log[u_i])\,[u_i\,\log(u_i)+(u_i-1)^a(a-1-2\,\log[u_i])]+(u_i-1)\log[u_i]^a\right\}, \end{aligned}$$

em que $u_i = 1+(x_i/s)^c$, $v_i = (x_i/s)^c\,\log[(x_i/s)^c]$, $\psi(s) = d\,\log\,\Gamma(s)/ds$ é a função digama, $Q(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$ é a função gama incompleta e $G_{p,q}^{m,n}\,(\cdot|\cdot)$ é a função Meijer G definida na Seção 4.3.

**APÊNDICE D - Matriz de informação observada da família MONB-G**

Os elementos da matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros $(s, p, \beta, \boldsymbol{\xi})$ da distribuição MONB-G são

$$J_{ss} = \frac{n\,\{s^2\,(1-\beta)^s\,\log(1-\beta)^2 - [(1-\beta)^s - 1]^2\}}{s^2\,\left[(1-\beta)^s - 1\right]^2},$$

$$J_{sp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-(1-p)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\,[1-p(1-\beta)]},$$

$$J_{s\beta} = -n\left\{\frac{1+(1-\beta)^s\,[s\,\log(1-\beta)-1]}{(1-\beta)\,[(1-\beta)^s-1]^2}\right\} + \sum_{i=1}^{n} \frac{p\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\,[1-p(1-\beta)]},$$

$$J_{s\xi_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)\,\partial\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j}{1-(1-p)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})} - \sum_{i=1}^{n} \frac{[1-p(1-\beta)]\,\partial\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j}{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p(1-\beta)]},$$

$$\begin{aligned} J_{pp} &= -\frac{n}{p^2} + (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\beta)^2\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})^2}{\left\{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\,[1-p(1-\beta)]\right\}^2} \\ &- (s-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})^2}{[1-(1-p)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})]^2}, \end{aligned}$$

$$J_{p\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})\,\{2\,p\,(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi}) + G(x_i;\boldsymbol{\xi})\}}{\left\{p(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi}) + G(x_i;\boldsymbol{\xi})\right\}^2},$$

$$\begin{aligned} J_{p\xi_j} &= (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-\beta)\,\partial\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j}{\left\{p(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi}) + G(x_i;\boldsymbol{\xi})\right\}^2} \\ &- (s-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j}{[p+(1-p)\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})]^2}, \end{aligned}$$

$$J_{\beta\beta} = \frac{n\,s\,[(s+1)(1-\beta)^s-1]}{(1-\beta)^2[1-(1-\beta)^s]^2} + (s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{p^2\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})}{\left\{1-\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi})[1-p(1-\beta)]\right\}^2},$$

$$J_{\beta\xi_j} = -(s+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{p\,\partial\,G(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j}{\left\{p(1-\beta)\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi}) + G(x_i;\boldsymbol{\xi})\right\}^2}$$

e

$$
\begin{aligned}
J_{\xi_j \xi_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i;\boldsymbol{\xi})\,\partial\, g(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j - \left[\partial^2\, g(x_i;\boldsymbol{\xi})/\partial\,\xi_j\right]^2}{g(x_i;\boldsymbol{\xi})^2} \\
&- (s-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)\,\left\{(1-p)\,-\left[p\,\overline{G}(x_i;\boldsymbol{\xi}) + G(x_i;\boldsymbol{\xi})\right]\,\right\}}{}.
\end{aligned}
$$