

Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação

Renata Alcarde

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Agronomia. Área de concentração: Es-
tatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba
2007

Renata Alcarde
Licenciada em Matemática

Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação

Orientadora:

Prof^ª Dr^ª **SÔNIA MARIA DE STEFANO PIEDADE**

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Agronomia. Área de concentração: Es-
tatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba

2007

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - ESALQ/USP**

Alcarde, Renata

Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação / Renata

Alcarde - - Piracicaba, 2007.

99 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2007.

Bibliografia.

1. Álgebra 2. Delineamento experimental 3. Software estatístico para microcomputador
I. Título

CDD 512.5

“Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor”

Dedicatória

À

Deus

Por que Nele tudo posso.

Aos meus pais,
Antonio Sergio e Olga,
meu irmão Rodrigo ,
e minha tia Maria Inês.

Ao meu namorado e grande amor,
Fellipe.
E, à minha amiga irmã Nice.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por Suas graças e bençãos em minha vida.

Aos meus pais, Antonio Sergio e Olga, ao meu irmão, Rodrigo e a minha tia Maria Inês, pelo amor incondicional e incentivo. Ao meu namorado Fellipe, pela compreensão e apoio e a minha amiga irmã Nice, por seus conselhos e sua fé.

À querida Prof^a. Dr^a. Sônia Maria De Stefano Piedade, pela orientação e por todas as palavras amigas, por sempre me fazer sentir que tudo daria certo, afinal “não há de ser nada”.

Ao Prof. Dr. Gerson Barreto Mourão, por estar sempre pronto a esclarecer minhas dúvidas.

Aos demais professores do departamento: Prof^a. Dr^a. Clarice Garcia Borges Demétrio, Prof. Dr. Décio Barbin, Prof. Dr. Edwin Moisés Marcos Ortega, Prof. Dr. Gabriel Adrián Sarriés, Prof^a. Dr^a. Maria Cristina Stolf Nogueira, Prof^a. Dr^a. Roseli Aparecida Leandro, Prof. Dr. Sívio Sandoval Socchi, Prof. Dr. Carlos Tadeu dos Santos Dias e Prof. Dr. Vitor Augusto Ozaki pelo crescimento, pelas contribuições e pelos sorrisos amistosos.

Ao Prof. Dr. Amauri de Almeida Machado, do Departamento de Matemática, Estatística e Computação da Universidade Federal de Pelotas, pela colaboração.

Às secretárias Solange de Assis Paes Sabadin e Luciane Brajão, agradeço as conversas, as alegrias e toda a dedicação. Aos funcionários Eduardo Bonilha e Jorge Alexandre Wiendl, pela colaboração e serviços prestados.

Aos queridos amigos que conquistei nestes dois anos, às pessoas que sempre me incentivaram e buscaram respostas comigo, àquelas que me escutaram, que riram e choraram comigo, àquelas sempre dispostas ao processo do cafezinho: Marina, Simone, Mirian, Lúcio, Lucimary, Vanderly, Wilson, Júlio, Juliana e Fernanda, agradeço de todo meu coração.

Aos demais alunos do programa, com os quais tive o prazer de conviver.

À Coordenadoria para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudo.

E a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO	7
ABSTRACT	8
LISTA DE FIGURAS	9
LISTA DE TABELAS	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 DESENVOLVIMENTO	14
2.1 Revisão de Literatura	14
2.1.1 Breve histórico da experimentação	14
2.1.2 Fatores experimentais e suas relações	17
2.1.2.1 Fatores experimentais	17
2.1.2.2 Classe de um fator	17
2.1.2.3 Dois fatores especiais	18
2.1.2.4 Definições importantes	18
2.1.2.5 Estrutura experimental	20
2.1.3 Diagrama de Hasse	20
2.1.4 Algumas definições da álgebra linear	22
2.1.5 Subespaços definidos pelos fatores	27
2.1.6 Fatores ortogonais	31
2.1.7 Decomposição ortogonal	39
2.1.8 Efeitos e somas de quadrados	41
2.1.9 Estrutura ortogonal de tratamento	43
2.1.10 Estrutura ortogonal de parcela	45
2.1.11 Delineamentos ortogonais	45
2.1.12 Análise da variância	47
2.2 Material e métodos	48
2.2.1 Material	48
2.2.1.1 Experimento I	48
2.2.1.2 Experimento II	49
2.2.2 Métodos	51

	6
2.2.2.1 Fatores experimentais	51
2.2.2.2 Estrutura experimental	52
2.2.2.3 Subespaços ortogonais	53
2.2.2.4 Ortogonalidade entre fatores	55
2.2.2.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade	56
2.2.2.6 Somas de quadrados	57
2.2.2.7 Análise da variância e modelo maximal	59
2.2.2.8 Esperanças dos quadrados médios	60
2.3 Resultados e discussões	61
2.3.1 Experimento I	61
2.3.1.1 Fatores experimentais	61
2.3.1.2 Estrutura experimental	61
2.3.1.3 Ortogonalidade entre fatores	61
2.3.1.4 Subespaços definidos pelos fatores e decomposição ortogonal	67
2.3.1.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade	69
2.3.1.6 Somas de quadrados	70
2.3.1.7 Esperança dos quadrados médios	71
2.3.1.8 Esquema da análise da variância	72
2.3.2 Experimento II	73
2.3.2.1 Fatores experimentais	73
2.3.2.2 Estrutura experimental	74
2.3.2.3 Ortogonalidade entre fatores	74
2.3.2.4 Subespaços definidos pelos fatores e decomposição ortogonal	83
2.3.2.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade	87
2.3.2.6 Somas de quadrados	88
2.3.2.7 Esperança dos quadrados médios	89
2.3.2.8 Esquema da análise da variância	90
3 CONCLUSÕES	91
REFERÊNCIAS	92
APÊNDICES	93

RESUMO

Fundamentos do diagrama de Hasse e aplicações à experimentação

A crescente aplicação da estatística às mais diversas áreas de pesquisa, tem definido delineamentos complexos, dificultando assim seu planejamento e análise. O diagrama de Hasse é uma ferramenta gráfica, que tem como objetivo facilitar a compreensão da estrutura presente entre os fatores experimentais. Além de uma melhor visualização do experimento o mesmo fornece, através de regras propostas na literatura, os números de graus de liberdade de cada fator. Sob a condição de ortogonalidade do delineamento, podem-se obter também as matrizes núcleo das formas quadráticas para as somas de quadrados e as esperanças dos quadrados médios, propiciando a razão adequada para a aplicação do teste F. O presente trabalho trata-se de uma revisão, fundamentada na álgebra linear, dos conceitos presentes na estrutura do diagrama. Com base nos mesmos, demonstrou-se o desdobramento do espaço vetorial do experimento em subespaços gerados por seus respectivos fatores, de tal modo que fossem ortogonais entre si. E, a fim de exemplificar as regras e o emprego desta ferramenta, utilizaram-se dois conjuntos de dados, o primeiro de um experimento realizados com cabras Saanen e segundo com capim Marandu, detalhando-se a estrutura experimental, demonstrando-se a ortogonalidade entre os fatores e indicando-se o esquema da análise da variância. Cabe salientar que o diagrama não substitui o uso de softwares, mas tem grande importância quando o interesse está em se comparar resultados e principalmente verificar o quociente adequado para o teste F.

Palavras-chave: Diagrama de Hasse; Experimentação; Ferramenta gráfica; Subespaços vetoriais; Ortogonalidade

ABSTRACT

Foundations of Hasse diagram and its applications on experimentation

The increase of statistics applications on the most diverse research areas has defined complex statistics designs turn its planning and analysis really hard. The Hasse diagram is a graphic tool that has as objective turn the comprehension of the present structure among the experimental factors easiest. More than a better experiment overview, by the rules proposed on the literature, this diagram gives the degrees of freedom for each factor. By the condition of design orthogonality, the nucleus matrix of quadratic form for the sum of squares and the expected values for the mean squares can also be obtained, given the proper ratio for F test application. The present work is a review, with its foundations on linear algebra, of the present's concepts on the diagram structure. With this basis were demonstrated the development of the vectorial space of the experiment in subspaces generated by its own factors, in a way that it was orthogonal within themselves. And, to give examples about the rules and the application of this tool, experimental data of Saanen goats and other set of data of Marandu grazing were used, with a detailed experiment structure, showing the orthogonality within the factors and with an indication of the analysis of variance model. Has to be emphasized that the diagram do not substitute the usage of software but has a great meaning when the interest is about results comparisons and most of all to check the proper quotient for the F test.

Keywords: Hasse diagram; Experimentation; Graphic tool; Vectorial subspaces; Orthogonality

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama de Hasse para os fatores F e G , tal que $F \prec G$	21
Figura 2 - Diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados	21
Figura 3 - Diagrama de Hasse para a coleção de modelos considerando os fatores F e G cruzados	44
Figura 4 - Diagrama de Hasse para a demonstração	47
Figura 5 - Ilustração do Experimento II	50
Figura 6 - Graus de liberdade no diagrama de Hasse, tal que $F \prec G$	56
Figura 7 - Graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados	57
Figura 8 - Expressões das somas de quadrados no diagrama de Hasse, tal que $F \prec G$	58
Figura 9 - Expressões das somas de quadrados no diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados	58
Figura 10 - Diagrama de Hasse combinado para fatores de tratamento e de parcela no Experimento I	63
Figura 11 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores de parcela no Experimento I	70
Figura 12 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de trata- mento no Experimento I	70
Figura 13 - Matrizes núcleo dos fatores de parcela no Experimento I	71
Figura 14 - Matrizes núcleo dos fatores de tratamento no Experimento I	71
Figura 15 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento I	72
Figura 16 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de tratamento no Experimento I	72
Figura 17 - Diagrama de Hasse combinado para fatores de tratamento e de parcela no Experimento II	79
Figura 18 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento II	87
Figura 19 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores de tratamento no Experimento II	88

	10
Figura 20 - Matrizes núcleo dos fatores de parcela no Experimento II	88
Figura 21 - Matrizes núcleo dos fatores de tratamento no Experimento II	89
Figura 22 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento II	89
Figura 23 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de tratamento no Experimento II	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Croqui do Experimento I, em que os índices em cada casela referem-se aos dias (subparcelas)	49
Tabela 2 - Esquema da análise da variância para o Experimento I	73
Tabela 3 - Composição dos tratamentos no Experimento II	73
Tabela 4 - Organização dos dados do Experimento II, informando o número da parcela (índice) e o tratamento alocado a mesma	76
Tabela 5 - Esquema da análise da variância para o Experimento II	90

1 INTRODUÇÃO

O uso da experimentação passou a ter maior destaque em 1914 com Fisher, e permanece em processo de desenvolvimento, pois a cada dia pessoas, e principalmente empresas visam maior qualidade, confiança e controle. Tais características conduziram a estatística experimental a, praticamente, todas as áreas que se tem conhecimento.

O interesse em um considerável número de tratamentos somado a diversas estruturas de controle local pode dar origem a delineamentos complexos, dificultando o planejamento do experimento, bem como sua análise. Nesse ponto, vê-se a necessidade de uma ferramenta que proporcione uma melhor compreensão do experimento, facilitando seu procedimento como um todo.

Uma ferramenta que se encaixa em tais qualidades recebe o nome de diagrama de Hasse. Trata-se de representações gráficas das estruturas dos tratamentos e das parcelas, que podem ser concluídas por meio de conversas com o pesquisador ou simplesmente da leitura do problema.

O diagrama de Hasse pode modificar o pensamento do estatístico na implementação e análise de experimentos, pois o mesmo não mais necessita seguir delineamentos conhecidos, e pelo mesmo motivo pode diferenciar o ensino da estatística experimental, uma vez que são as estruturas entre os fatores que devem ser reconhecidas.

Além das vantagens citadas, o diagrama auxilia na obtenção do número de graus de liberdade de cada fator, tendo como pressuposto a ortogonalidade entre os fatores, auxilia também na obtenção das somas de quadrados, da razão apropriada para o teste F e do modelo linear estatístico.

Os cálculos são realizados através de regras que consideram projeções ortogonais, soma direta de subespaços vetoriais entre outros elementos da álgebra linear. Tais elementos, cálculos e regras serão mostrados no presente trabalho, e com a utilização de dados reais são apresentados exemplos da eficácia do diagrama de Hasse.

Cabe salientar a falta de material presente na literatura, uma vez que poucos são os artigos que fazem uso do diagrama de Hasse aplicado à experimentação, principalmente à experimentação agrônômica. Grande parte do conteúdo encontrado refere-se ao ensino de matemática discreta em disciplinas como teoria da computação, não abordando o mesmo de

modo prático, e tão pouco justificando seus fundamentos. Vale ainda ressaltar que na literatura não foi encontrada grande diversidade de materiais na língua portuguesa, um indicativo de que tal ferramenta não foi, até o presente momento, muito explorada pelos estudantes e pesquisadores brasileiros.

O presente trabalho tem como objetivo evidenciar o diagrama de Hasse como ferramenta gráfica facilitadora da estatística experimental em procedimentos de planejamento, análise e ensino. Paralelamente, pretende-se fundamentar algebricamente o diagrama e os cálculos presentes nas regras propostas na literatura, bem como explorar as propriedades da estrutura experimental e de ortogonalidade entre fatores.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Revisão de Literatura

2.1.1 Breve histórico da experimentação

A estatística moderna iniciou-se com a pesquisa agrícola, em 1843, na Estação Experimental de Rothamsted, a qual gerou um grande volume de dados, o que levou John Russeli, diretor da estação, a contratar um especialista para realizar as análises, o matemático Ronald Aylmer Fisher (1890-1962).

Durante os quatorze anos que permaneceu na estação, Fisher desenvolveu toda a base da estatística moderna, fundamentada nos conhecimentos matemáticos e de probabilidade, pôde aplicar na prática sua teoria de inferência estatística e obter conclusões importantes. Também percebeu que freqüentemente ocorriam falhas nos experimentos que geravam os dados, dificultando a análise dos mesmos. Isto indicou a importância do plano experimental apropriado (MONTGOMERY, 2001).

Em contato com cientistas e pesquisas de campo, Fisher elaborou os três princípios básicos da experimentação: a aleatorização, a repetição e o controle local. Paralelamente, Fisher passou a utilizar um novo método de análise dos dados, a análise da variância. Neste, desdobrou a soma dos quadrados dos desvios dos valores reais com relação aos esperados em componentes independentes, um para o tratamento, um para o erro e assim por diante. Desenvolveu os conceitos de número de graus de liberdade, quadrado médio e teste F. Considerando planejamento, foi Fisher quem sugeriu o uso do controle local em dois sentidos, cujo delineamento recebeu o nome de quadrado latino. Ainda sugeriu o quadrado greco-latino, porém o mesmo não é muito utilizado no planejamento de experimentos (PEARCE, 1983).

Segundo o mesmo autor, outra contribuição para o planejamento de experimentos foi a de Yates, que sugeriu o uso de blocos incompletos balanceados, reconhecendo a dificuldade de se terem todos os blocos tão grandes quanto o número de tratamentos. Cabe salientar que esse delineamento é dito não ortogonal, e a análise da variância foi estendida para o mesmo. Yates em 1935 propôs uma análise da variância aprimorada, com o desdobramento do número de graus de liberdade dos componentes de tratamento, podendo-se assim, verificar a importância da interação entre os mesmos.

Montgomery (2001) completa, afirmando a existência de quatro eras do planejamento estatístico experimental moderno. A primeira conduzida por Fisher. A segunda, com o planejamento estatístico industrial, que teve início na década de 1930, e foi catalisada pela metodologia de superfície de resposta, desenvolvida por Box e Wilson em 1951. A próxima era do planejamento estatístico iniciou-se por volta de 1970, com o crescente interesse da indústria em aperfeiçoar sua qualidade, liderada por Genichi Taguchi, que defendeu o uso do planejamento estatístico para o que ele denominou planejamento do parâmetro robusto, ou

- i.** criando processos insensíveis para fatores ambientais ou outros fatores difíceis de controlar;
- ii.** criando processos insensíveis para a variação transmitida dos componentes;
- iii.** encontrando níveis dos processos variáveis que forcem a média ao valor desejado, enquanto que simultaneamente reduz a variabilidade em torno desse valor.

Foi sugerida por Taguchi a utilização de delineamentos com fatoriais fracionários e outros arranjos ortogonais, porém sua metodologia gerou muita discussão e controvérsia, a qual deu origem à quarta era, que incluiu um renovado interesse no planejamento estatístico por parte dos pesquisadores e profissionais, originando novas e úteis resoluções para os diversos problemas propostos. Outro campo que também interessou-se pelo planejamento foi o da educação formal, uma vez que o planejamento estatístico passou a ser ensinado nas universidades.

Desde o trabalho dos pioneiros da estatística uma gama de técnicas foram desenvolvidas, e a utilização dos computadores como ferramentas essenciais vem crescendo, o que tanto pode ser um facilitador na realização da análise dos dados quanto pode fornecer informações errôneas, pois freqüentemente pesquisadores os utilizam de modo inadequado por não compreender os métodos implementados (MACHADO et al., 2005).

Além dos computadores, outra ferramenta que tem sido utilizada, e tem como importante característica a não necessidade de se conhecer o delineamento do experimento, tornando experimentos complexos mais fáceis de serem analisados, trata-se do diagrama de Hasse. Tal diagrama é o resultado da correspondência matemática entre as estruturas de reticulados e as estruturas de delineamentos experimentais.

Um diagrama da estrutura, mais corretamente chamado Diagrama de Hasse, é uma representação originária da teoria dos conjuntos, nomeado em homenagem ao matemático

alemão Helmut Hasse (1898-1979). Esta representação tem grande aplicação nas áreas de matemática discreta, informática e experimentação, devido ao número de informações que apresenta.

A utilização do diagrama de Hasse na Experimentação iniciou-se com Taylor e Hilton, em 1981 com a publicação do artigo *A Structure Diagram Symbolization for Analysis of Variance*, no qual foram apresentadas vantagens do seu uso e regras para a obtenção de aspectos relevantes à análise, tais como número de graus de liberdade, esperança dos quadrados médios, razões apropriadas do teste F, entre outros.

De acordo com Lohr (1995) e Machado et al. (2005) o diagrama é uma poderosa ferramenta visual utilizada na representação da estrutura dos fatores em um delineamento experimental balanceado (ou ortogonal), o mesmo pode ajudar no planejamento de um experimento complicado bem como elucidar a estrutura dos dados a serem analisados.

Segundo Taylor e Hilton (1981), existem quatro elementos-chave para uma aplicação bem sucedida do método do diagrama, apresentados a seguir:

- i. compreender como o diagrama representa a relação entre os fatores experimentais e mostra quais efeitos do delineamento (em termos de modelo linear) aparecem na análise estatística;
- ii. aprender como todo efeito do delineamento desdobra unicamente os fatores no experimento em conjuntos característicos de fatores disjuntos (conjuntos de fatores), os quais podem ser nomeados e identificados pela referência à estrutura do diagrama;
- iii. compreender o conceito da interação formal entre os efeitos, e como obter tais interações pela referência visual da estrutura do diagrama;
- iv. aprender as regras para calcular as quantias estatísticas utilizando os conceitos precedentes.

Entretanto, as regras para a obtenção de tais quantias estatísticas, apresentadas por Brien (2007) e Bailey (2005) não utilizam diretamente os conceitos de conjunto de fatores e suas terminologias, tão pouco o conceito de interação formal para identificar as interações entre os fatores em um mesmo conjunto.

Taylor e Hilton (1981) ainda afirmam que o diagrama fornece uma valiosa perspectiva complementar para a análise da variância e das técnicas de análise, por meio de uma

conexão entre a descrição verbal do experimento e o correspondente modelo linear estatístico. Paralelamente, Lohr (1995) menciona que o diagrama de Hasse se estende à sala de aula, auxiliando no ensino de planejamento de experimentos.

2.1.2 Fatores experimentais e suas relações

2.1.2.1 Fatores experimentais

Segundo Machado et al. (2005) um fator experimental é definido como uma característica explanatória cujos níveis na amostra apresentam as seguintes propriedades:

- i. são escolhidos e definidos durante o planejamento do experimento para cada unidade amostrada;
- ii. compreendem um pequeno conjunto de níveis que se repetem em tais unidades;
- iii. classificam as unidades em grupos, subdividindo uma amostra de tal modo que cada unidade pertença a somente um grupo;
- iv. as relações com os níveis dos demais fatores experimentais constituem uma estrutura significativa que determina a estrutura do experimento ou o delineamento experimental.

De acordo com Bailey (2005) os fatores de um delineamento experimental podem ser de tratamento ou de parcela. Fatores de tratamento (ou aleatorizados) são aqueles que o pesquisador pode controlar, ou seja, os quais pode-se escolher em qual unidade será alocado. Denota-se por $T(w)$ o tratamento aplicado à unidade observacional w . Logo, T é o fator de tratamento local. Em contrapartida, os fatores de parcela (ou não aleatorizados), são os que o pesquisador não pode controlar, ou somente pode ser realizado de modo limitado.

2.1.2.2 Classe de um fator

Considere os fatores F e G , fatores de parcela e tratamento, respectivamente. Utilizando-se da notação

$$F(w) = \text{nível do fator } F \text{ na parcela } w,$$

$$G(i) = \text{nível do fator } G \text{ no tratamento } i$$

Bailey (2005) define as classes dos fatores como segue.

A classe de F contendo a parcela α é o conjunto das parcelas w pertencentes ao conjunto de todas as parcelas do experimento (Ω), tal que o nível do fator F na parcela w é igual ao nível de F na parcela α .

Analogamente, a classe de G contendo o tratamento j é o conjunto dos tratamentos i pertencentes ao conjunto de todos os tratamentos do experimento (\mathcal{T}), tal que o nível do fator G no tratamento i é igual ao nível de G no tratamento j .

2.1.2.3 Dois fatores especiais

Tanto em Ω como em \mathcal{T} existem dois fatores especiais, o fator Universal e o fator Igualdade. A título de exemplo, serão apresentadas, a seguir, as definições utilizando o conjunto Ω .

O fator universal, denominado U , possui uma única classe na qual estão todas as parcelas e não distingue as parcelas. É definido por $U(w) = \Omega$, para todo w em Ω .

O fator igualdade, denominado E , possui uma classe por unidade, isto é, E tem tantas classes quantas forem as parcelas. É definido por $E(w) = w$ para todo w em Ω .

2.1.2.4 Definições importantes

Para as definições que se seguem, considere F e G fatores em um mesmo conjunto.

Definição 1 . F é equivalente a G , se toda F -classe é também uma G -classe.

Notação: $F \equiv G$ se F é equivalente a G .

Definição 2 . F é dito marginal a G , se toda F -classe está contida em uma G -classe, mas F e G não são equivalentes.

Notação: $F \prec G$.

Definição 3 . Dois fatores F e G são considerados aninhados quando a um nível qualquer do fator G sempre se combina um nível distinto do fator F .

Pode-se dizer que um nível do fator F não tem significado quando não mencionado o nível do fator G . Observe que se F está aninhado a G , então F é marginal a G .

Definição 4 . Dois fatores F e G são cruzados quando um nível qualquer do fator F que se combina com algum nível do fator G é sempre o mesmo.

Note que, se dois fatores são cruzados, então a relação de marginalidade não se aplica aos mesmos.

Definição 5 . Definem-se fatores generalizados a partir da combinação de níveis de dois ou mais fatores. Sua representação é feita pela lista dos fatores que os constituem separados por ‘ \wedge ’. Por conveniência fatores simples também serão considerados fatores generalizados.

Definição 6 . O ínfimo entre dois fatores F e G é definido pelo fator $F \wedge G$ cujas classes são as interações não vazias das F -classes com as G -classes.

Definição 7 . O supremo entre dois fatores F e G é o único fator $F \vee G$ que satisfaz as seguintes condições:

- i. $F \prec F \vee G$ e $G \prec F \vee G$;
- ii. se H é um fator tal que $F \prec H$ e $G \prec H$ então $F \vee G \prec H$.

Supondo que F e G sejam fatores de tratamento, a classe de $F \vee G$ contendo o tratamento i é definida pelo processo iterativo a seguir:

1º Passo : escrevem-se todos os tratamentos na mesma F -classe que i ;

2º Passo : escrevem-se todos os tratamentos que estão na mesma G -classe que os tratamentos descritos no passo anterior;

3º Passo : escrevem-se todos os tratamentos que estão na mesma F -classe que os tratamentos obtidos no passo anterior;

...

assim, até que o processo pare.

Definição 8 . Um fator é dito uniforme se todas as suas classes possuem o mesmo tamanho.

Notação: O número de níveis do fator F é denotado por n_F .

Notação: Se F é um fator uniforme então k_F denota o tamanho de todas as suas classes.

2.1.2.5 Estrutura experimental

De acordo com Machado et al. (2005) estruturas de tratamento são maneiras significativas de se dividir o conjunto \mathcal{T} dos tratamentos. A estrutura de tratamento pode ser constituída de tratamentos não estruturados, fatorial, fatorial mais controle, entre outros.

Analogamente, as estruturas de parcela são maneiras significativas de se dividir o conjunto Ω de parcelas. Tal estrutura é caracterizada pelo controle local aplicado no experimento, que pode ser inteiramente ao acaso, em blocos ou quadrado-latino.

Segundo Brien (2007) a estrutura experimental, ou fórmula estrutural, é uma das formas de se representarem algebricamente, as relações entre os fatores. Para tanto, deve-se considerar a relação presente, de aninhamento ou cruzamento, e seus respectivos números de níveis. Entretanto, acrescentar o número de níveis torna-se adequado somente quando o mesmo permanece constante para todos os níveis do outro fator, o que pode não ocorrer.

2.1.3 Diagrama de Hasse

Sabendo-se que o diagrama de Hasse é um *poset* (conjunto parcialmente ordenado), vale ressaltar que a ordem parcial de um diagrama é estabelecida pela relação de aninhamento e que o mesmo é uma representação gráfica da estrutura experimental.

Desenha-se um ponto para cada fator e, para os fatores que são aninhados devem-se unir seus pontos por meio de um segmento. Brien (2007) sugere a construção do diagrama de Hasse conforme as figuras que se seguem.

O ponto para o fator U está sempre no topo do diagrama e, caso o fator E seja incluído, o mesmo deve estar na base do diagrama de Hasse.

Tomando-se novamente os fatores F e G em um mesmo conjunto:

- (i) Se F está aninhado a G , então $F \prec G$. Logo, para uma representação, o ponto para o fator F encontra-se abaixo do ponto para o fator G , e um ponto para $F \vee G$ deve ser incluído no diagrama acima dos mesmos.

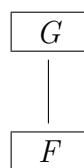


Figura 1 - Diagrama de Hasse para os fatores F e G , tal que $F < G$

- (ii) Se F e G são fatores cruzados, a relação de marginalidade não se aplica, assim, para a representação os pontos para ambos encontram-se no mesmo nível. E, um ponto para $F \wedge G$ deve ser incluído no diagrama abaixo dos pontos para os fatores F e G . Caso a interação entre tais fatores seja nula, a representação para o ínfimo pode ser omitida.

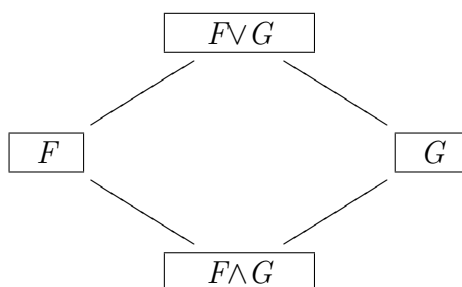


Figura 2 - Diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados

Para todo experimento são desenhados dois diagramas de Hasse, um para fatores de tratamento e outro para fatores de parcela. Bailey (2005) distingue entre os dois tipos de fatores usando um ponto cheio para fatores de parcela e um ponto vazio para fatores de tratamento.

O diagrama de Hasse para fatores de parcela deve sempre conter um ponto para o fator E . E, se os fatores F e G estão incluídos no diagrama, então seu ínfimo, $F \wedge G$ deve, necessariamente, ser incluído. Ao lado do ponto para cada fator, seja ele de tratamento ou parcela, escreve-se o número de níveis respectivo ao mesmo.

Segundo Lohr (1995) o diagrama de Hasse descrito, classificado pelo autor como básico, pode ser construído para delineamentos não ortogonais. Porém, para a obtenção das somas de quadrados, razões apropriadas do teste F e outras características de interesse o delineamento deve, necessariamente, ser ortogonal, ou seja, deve existir uma estrutura ortogonal, tanto para tratamentos, quanto para parcelas.

Para tanto serão introduzidos alguns conceitos, tais como: subespaço vetorial, ortogonalidade, complemento ortogonal, decomposição ortogonal, os quais justificam a utilização e a veracidade do diagrama de Hasse.

2.1.4 Algumas definições da álgebra linear

Callioli (1993) apresenta as seguintes definições e proposições importantes no contexto da álgebra linear:

Definição 9 . Um conjunto W , não vazio, é dito um espaço vetorial sobre o conjunto dos reais (\mathbb{R}), quando e somente quando:

i. Existe uma adição $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ em W , com as seguintes propriedades:

- a) *Comutativa*: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$;
- b) *Associativa*: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$;
- c) *Elemento neutro* (\mathbf{o}): $\exists \mathbf{o} \in W \mid \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$;
- d) *Elemento oposto* ($-\mathbf{u}$): $\forall \mathbf{u} \in W, \exists (-\mathbf{u}) \in W \mid \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

ii. Existe uma multiplicação de $\mathbb{R} \times W$ em W , logo cada par (α, \mathbf{u}) de $\mathbb{R} \times W$ está associado a um único elemento de W , indicado por $\alpha\mathbf{u}$, e para essa multiplicação tem-se as propriedades:

- a) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
- b) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
- c) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- d) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definição 10 . Seja W um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Define-se um subespaço vetorial de W como um subconjunto $V \subset W$, tal que:

i. $\mathbf{o} \in V$;

ii. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$;

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \mathbf{u} \in V, \alpha \mathbf{u} \in V$

Definição 11 . Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W . A soma de U com V , indicada por $(U + V)$, é o seguinte subconjunto de W :

$$U + V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\}.$$

Observe que

$$U + V = V + U$$

$$U + \mathbf{o} = U$$

$$U \subset U + V \text{ e } V \subset U + V$$

para todos os subespaços U e V de W .

Proposição 1 . Se U e V são subespaços vetoriais de W , então $(U + V)$ também é um subespaço vetorial de W .

Demonstração: Para mostrar que $(U + V)$ é um subespaço de W basta verificar as três condições citadas:

i. $\mathbf{o} \in U + V$

Note que $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o}$, e pela Definição 10 sabe-se que $\mathbf{o} \in U$ e $\mathbf{o} \in V$. Logo, $\mathbf{o} \in (U + V)$;

ii. Sejam $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$ elementos de $(U + V)$, supondo-se que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Então:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

pela Definição 10, $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in U$ e $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in V$. Logo, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in U + V$;

iii. Tome $\mathbf{w} \in (U + V)$, ou seja, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, tal que $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$. Pela Definição 10, $\alpha \mathbf{u} \in U$ e $\alpha \mathbf{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Logo, pode-se escrever

$$\alpha \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{w}$$

Então, $\alpha \mathbf{w} \in U + V, \forall \mathbf{w} \in U + V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Portanto, conclui-se que $(U + V)$ é um subespaço de W . ■

Definição 12 . Sejam U e V subespaços vetoriais de W tais que $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$. Nesse caso, diz-se que $(U + V)$ é a soma direta dos subespaços U e V , e denota-se por $U \oplus V$.

Proposição 2 . Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W . Então $W = U \oplus V$ se, e somente se, cada vetor $\mathbf{w} \in W$ admite uma única decomposição $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, com $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Por hipótese $W = U \oplus V$. Suponha $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$, com $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \in U$ e $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \in V$.

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Observe que $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \in V$, pois ambos os termos estão em V , então $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \in U \cap V = \{\mathbf{o}\}$. Assim, $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) = \mathbf{o}$, o que implica que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$. Portanto, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$.

(\Leftarrow) Agora, suponha que $\mathbf{w} \in U \cap V$. Seja então $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$, tem-se:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

Pela hipótese, conclui-se que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Portanto, $\mathbf{w} = \mathbf{o}$, ou seja, $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$, mostrando que $W = U \oplus V$. ■

Considerações para a Definição 13:

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e seja $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\} \subset V$. Considere $[S] = \{\alpha_1 \mathbf{s}_1, \dots, \alpha_n \mathbf{s}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Note que $[S]$ é um subespaço vetorial de V , pois:

i. Pode-se escrever $\mathbf{o} = 0\mathbf{s}_1 + \dots + 0\mathbf{s}_n$. Logo, $\mathbf{o} \in [S]$;

ii. Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [S]$, tais que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{s}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{s}_n$$

com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{s}_n) + (\beta_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{s}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{s}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{s}_n. \end{aligned}$$

Como $(\alpha_i + \beta_i) \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$, tem-se que $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in [S]$.

iii. Tome $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V$, logo $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{s}_n$.

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{v} &= \gamma(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{s}_n) \\ &= (\gamma \alpha_1) \mathbf{s}_1 + \dots + (\gamma \alpha_n) \mathbf{s}_n. \end{aligned}$$

Como $\gamma \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$, tem-se que $\gamma \mathbf{v} \in [S]$.

Como as três condições estão satisfeitas, conclui-se que $[S]$ é um subespaço vetorial. ■

Definição 13 . O subespaço $[S]$ construído é denominado como subespaço gerado por S .

Note que cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de S .

Definição 14 . Um espaço vetorial é finitamente gerado se existe $S \subset V$, S finito, tal que $V = [S]$.

Definição 15 . Seja W um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de W é o subconjunto finito $B \in W$ para o qual as condições se verificam:

i. $[B] = W$;

ii. B é linearmente independente, ou seja, nenhum vetor em B é combinação linear dos demais vetores pertencentes ao mesmo.

Definição 16 . Seja W um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . O produto interno sobre W é definido por uma aplicação que transforma cada par ordenado $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \times W$ em um número real, o qual recebe o nome de produto escalar. O produto interno usual do \mathbb{R}^n é dado por:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

A raiz quadrada do produto interno de um vetor \mathbf{u} por ele mesmo é chamado de norma do vetor \mathbf{u} e é denotado por $\|\mathbf{u}\|$.

Definição 17 . Um espaço euclidiano é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} munido com um produto interno.

Definição 18 . Tome os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} pertencentes ao subespaço vetorial $V \subset W$. \mathbf{u} e \mathbf{v} são ditos ortogonais se o produto escalar de \mathbf{u} por \mathbf{v} for igual a zero.

Definição 19 . O complemento ortogonal do subespaço $V \subset W$, denotado por V^\perp , é definido pelo seguinte subespaço:

$$V^\perp = \{ \mathbf{v} \in W : \mathbf{v} \perp \mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \in V \}.$$

Proposição 3 . Seja $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ um subconjunto ortogonal do espaço euclidiano V . Então, $\forall \mathbf{u} \in V$, o vetor

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i$$

é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado pelos vetores de \mathbf{B} .

Demonstração: Tome um \mathbf{b}_j qualquer em \mathbf{B} . Logo,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = \left\langle \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle}{\|\mathbf{b}_j\|^2} \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle - \\ &\quad - \sum_{i=j+1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, e pela Definição 16, sabe-se que $\|\mathbf{b}_j\|^2 = \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle$, assim:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_j \rangle.$$

Então,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle = 0, \forall j = 1, \dots, n.$$

E portanto, \mathbf{v} é ortogonal a todo vetor em \mathbf{B} .

Observe que se \mathbf{v} é ortogonal aos vetores em \mathbf{B} , então \mathbf{v} é ortogonal a toda combinação linear dos vetores em \mathbf{B} . Tome $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_n \rangle \\ &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 4 . Seja V um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial W com produto interno, então $W = V \oplus V^\perp$.

Demonstração: Pela Definição 12 deve-se mostrar que $W = V + V^\perp$ e que $V \cap V^\perp = \{\mathbf{o}\}$. Para tanto, seja $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ uma base ortogonal arbitrária de V . Se $\mathbf{w} \in W$, pela Proposição 3, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i$ é ortogonal a todo elemento em V . Assim, $\mathbf{w} \in V^\perp$.

Mas,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i.$$

Observe que $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2}$ é um escalar, logo pertence a \mathbb{R} e $\mathbf{b}_i \in W$. Logo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i \in W.$$

Sendo assim todo vetor $\mathbf{u} \in W$ pode ser decomposto como a soma de dois vetores, um pertencente a V e outro pertencente a V^\perp .

Então, basta mostrar que $V \cap V^\perp = \{\mathbf{o}\}$. Seja $\mathbf{w} \in V \cap V^\perp$. Como $\mathbf{w} \in V^\perp$, \mathbf{w} é ortogonal a todo vetor em V . Em particular, $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$, o que só ocorre se $\mathbf{w} = \mathbf{o}$, então $V \cap V^\perp = \{\mathbf{o}\}$. \blacksquare

Definição 20 . Seja $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ uma base arbitrária de um subespaço U de um espaço euclidiano W de dimensão finita. Hoffman (1971) define a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{u} \in W$ sobre o subespaço U como segue:

$$\mathbf{P}_U \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_n \rangle}{\|\mathbf{b}_n\|^2} \mathbf{b}_n.$$

2.1.5 Subespaços definidos pelos fatores

A partir desta seção, considere V o espaço vetorial formado por todos os vetores reais com coordenadas indexadas por Ω , quando consideradas as parcelas, ou \mathcal{T} , quando con-

siderados os tratamentos, e seja F um fator. Bailey (2005) define V_F , um subespaço vetorial de F , de tal modo que V_F é o conjunto de vetores cujas coordenadas sejam constantes em cada nível de F e $\dim V_F = n_F$. Assim, cada fator irá definir um subespaço vetorial sobre V .

Seja $\mathbf{v} \in V$, com V um espaço vetorial indexado por Ω . De acordo com as proposições 3 e 4, a projeção ortogonal de \mathbf{v} em V_F (denotada por $\mathbf{P}_F \mathbf{v}$) é o único vetor em V_F tal que $\mathbf{v} - \mathbf{P}_F \mathbf{v}$ está em V_F^\perp .

Tome o mesmo fator F como sendo um fator com n_F níveis, então V_F é um subespaço de V . Observe que o fator F possui n_F classes e suponha que cada classe contém r_i parcelas, com $i = 1, \dots, n_F$. Logo, se $\dim V = n$, então $\sum_{i=1}^{n_F} r_i = n$. Assim, pode-se escrever:

$$\mathbf{v} = \left\{ \underbrace{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1r_1}}_{1^a \text{ } F\text{-classe}}, \dots, \underbrace{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ir_i}}_{i\text{-ésima } F\text{-classe}}, \dots, \underbrace{v_{n_F1}, v_{n_F2}, \dots, v_{n_F r_{n_F}}}_{n_F\text{-ésima } F\text{-classe}} \right\}$$

Seja $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_{n_F}\}$ uma base de V_F , tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \left\{ \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r_i \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r_{n_F} \text{ vezes}} \right\} \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_i &= \{0, 0, \dots, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots, 0\} \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_{n_F} &= \{0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1\} \end{aligned}$$

Logo, \mathbf{B} é descrita por:

$$\mathbf{B} = \begin{matrix} & \mathbf{b}_1 & & \mathbf{b}_i & & \mathbf{b}_{n_F} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Pela Definição 20, a projeção ortogonal de \mathbf{v} em V_F será dada por:

$$\mathbf{P}_F \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n_F} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i.$$

Mas,

$$\|\mathbf{b}_i\|^2 = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle = r_i, \text{ com } i = 1, \dots, n_F.$$

E,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle &= v_{11} \cdot 0 + v_{12} \cdot 0 + \dots + v_{1r_1} \cdot 0 + \dots + v_{i1} \cdot 1 + v_{i2} \cdot 1 + \dots + v_{ir_i} \cdot 1 + \dots \\ &\quad \dots + v_{n_F 1} \cdot 0 + \dots + v_{n_F r_{n_F}} \cdot 0 \\ &= \sum_{j=1}^{r_i} v_{ij}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{n_F} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_F} \frac{\sum_{j=1}^{r_i} v_{ij}}{r_i} \mathbf{b}_i. \end{aligned}$$

Logo, cada coordenada de $\mathbf{P}_F \mathbf{v}$ é a média das coordenadas de \mathbf{v} na classe relevante de F , e a correspondente coordenada de $\mathbf{v} - \mathbf{P}_F \mathbf{v}$ é o desvio da coordenada original da média relevante.

Então, supondo que V seja o espaço vetorial indexado por Ω , o que implica que o vetor de dados \mathbf{y} está contido em V , logo a coordenada de $\mathbf{P}_F \mathbf{v}$ na parcela w é dada por:

$$\frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } F\text{-classe contendo } w}{\text{tamanho da } F\text{-classe contendo } w}.$$

Portanto, a soma de quadrados não corrigida para o fator F é definida por $\|\mathbf{P}_F \mathbf{v}\|^2$, ou seja,

$$\|\mathbf{P}_F \mathbf{v}\|^2 = \sum_{F\text{-classe}} \frac{(\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } F\text{-classe})^2}{\text{tamanho da } F\text{-classe}}.$$

Para mostrar a ortogonalidade dos fatores são necessárias as duas proposições seguintes:

Proposição 5 . Se F e G são fatores e F é marginal ou equivalente a G ($F \preceq G$) então $V_G \subseteq V_F$.

Demonstração: Tome \mathbf{v} em V_G , logo \mathbf{v} é constante em cada classe de G , por definição. Mas por hipótese $F \preceq G$, ou seja, toda classe de F está contida em uma única classe de G , logo, \mathbf{v} também é constante em cada classe de F . Assim, $\mathbf{v} \in V_F$, e portanto, $V_G \subseteq V_F$. ■

Proposição 6 . Se F e G são fatores, então $V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$.

Demonstração: Pela definição de supremo, tem-se que $F \preceq F \vee G$ e pela Proposição 5 sabe-se que $V_{F \vee G} \subseteq V_F$. Analogamente, $V_{F \vee G} \subseteq V_G$ e assim $V_{F \vee G} \subseteq V_F \cap V_G$.

Agora, supondo $\mathbf{v} \in V_F \cap V_G$, pode-se transformar \mathbf{v} em um fator H por meio de uma função $H(w) = v_w$.

Sabendo que $\mathbf{v} \in V_F \cap V_G$, tem-se que $\mathbf{v} \in V_F$ e assim \mathbf{v} é constante em toda a classe de F , logo cada classe de F está contida em uma única classe de G . Então $F \preceq G$. De modo análogo, $G \preceq F$. Pela definição de supremo $F \vee G \preceq H$ e pela Proposição 5 $V_H \subseteq V_{F \vee G}$. Como $\mathbf{v} \in V_H$, tem-se que $\mathbf{v} \in V_{F \vee G}$.

Logo, se $\mathbf{v} \in V_F \cap V_G$ então $\mathbf{v} \in V_{F \vee G}$, conseqüentemente, $V_F \cap V_G \subseteq V_{F \vee G}$.

Portanto, $V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$. ■

2.1.6 Fatores ortogonais

Sabe-se que W e W^\perp , subespaços de V , são ortogonais pela Definição 19, e pela Proposição 4 tem-se que $V = W \oplus W^\perp$, logo $W \cap W^\perp = \{\mathbf{o}\}$. Mas a Proposição 6 indica que $V_F \cap V_G = V_{F \vee G} \neq \{\mathbf{o}\}$. Sendo assim, os subespaços V_F e V_G não são ortogonais, o que motiva a definição que se segue:

Definição 21 . Os fatores F e G são ortogonais se o subespaço $V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp$ é ortogonal ao subespaço $V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp$.

Observe que se $F \prec G$, então $V_{F \vee G} = V_G$. Logo,

$$\begin{aligned} V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp &= V_G \cap V_G^\perp = \{\mathbf{o}\} \text{ e} \\ [V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp] \cap [V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp] &= [V_F \cap V_G^\perp] \cap \{\mathbf{o}\} = \{\mathbf{o}\} \end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 21, os fatores F e G são ortogonais.

Em contrapartida, considere dentre os fatores nenhum marginal ao outro e tome o subespaço $V_{F \vee G}$ de V . De acordo com a Proposição 4, $V = V_{F \vee G} \oplus V_{F \vee G}^\perp$. Mas,

$$(V_{F \vee G})^\perp = V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus (V_F + V_G)^\perp$$

pois,

$$V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp \cap V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp = (V_F \cap V_G) \cap (V_{F \vee G})^\perp.$$

E, pela Proposição 6, $V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$, então $V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp \cap V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp = (V_F \cap V_G) \cap (V_{F \vee G})^\perp = \{\mathbf{o}\}$, pela Proposição 4.

Pela Definição 11, tem-se que

$$\left. \begin{array}{l} V_F \subset V_F + V_G \\ V_G \subset V_F + V_G \end{array} \right\} \Rightarrow V_F \cap V_G \subset V_F + V_G \Rightarrow (V_F + V_G)^\perp \subset (V_F \cap V_G)^\perp,$$

ou seja, $(V_F + V_G)^\perp \subset (V_{F \vee G})^\perp$.

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} [V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp] \cap (V_F + V_G)^\perp &= V_F \cap [(V_{F \vee G})^\perp \cap (V_F + V_G)^\perp] \\ &= V_F \cap (V_F + V_G)^\perp \\ &= \{\mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} [V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp] \cap (V_F + V_G)^\perp &= V_G \cap [(V_{F \vee G})^\perp \cap (V_F + V_G)^\perp] \\ &= V_G \cap (V_F + V_G)^\perp \\ &= \{\mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Então,

$$V = V_{F \vee G} \oplus V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus (V_F + V_G)^\perp$$

A definição de ortogonalidade de fatores é equivalente às duas condições que seguem:

Teorema 1 .

(i) Os fatores F e G são ortogonais se e somente se $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v}$.

(ii) Se F e G são ortogonais então $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v}$.

para todo \mathbf{v} em V .

Demonstração: Sejam,

$$\begin{aligned} Z_F &= V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp; \\ Z_G &= V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp; \\ Z &= (V_F + V_G)^\perp. \end{aligned}$$

Assumindo que F seja ortogonal a G , observe que $V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp \oplus (V_F + V_G)^\perp$ é o complemento ortogonal de $V_{F \vee G}$, logo o espaço vetorial V pode ser decomposto pela soma direta dos seguintes subespaços vetoriais:

$$V_{F \vee G} \oplus Z_F \oplus Z_G \oplus Z$$

em que,

$V_{F \vee G} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in V_{F \vee G}\}$, ou seja, é o subespaço gerado pelo supremo entre os fatores F e G ;
 $Z_F = \{\mathbf{v}_F : \mathbf{v}_F \in V_F\}$, ou seja, contém os vetores que estão em V_F e são ortogonais a $V_{F \vee G}$;
 $Z_G = \{\mathbf{v}_G : \mathbf{v}_G \in V_G\}$, isto é, contém os vetores que estão em V_G e são ortogonais a $V_{F \vee G}$;

$Z = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in Z\}$, isto é, contém os vetores que são ortogonais a soma dos subespaços F e G .

Assim para todo $\mathbf{v} \in V$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{z}_F + \mathbf{z}_G + \mathbf{z}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F \mathbf{v} &= \mathbf{P}_F(\mathbf{x} + \mathbf{z}_F + \mathbf{z}_G + \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{z}_F \end{aligned}$$

pois,

$\mathbf{x} \in V_{F \vee G} \Rightarrow \mathbf{x} \in V_F$, assim, a projeção ortogonal de \mathbf{x} em V_F é o próprio \mathbf{x} ;

$\mathbf{v}_F \in Z_F \Rightarrow \mathbf{v}_F \in V_F$, logo a conclusão segue de modo análogo à anterior;

$\mathbf{v}_G \in Z_G \Rightarrow \mathbf{v}_G \in V_G$, e por hipótese tem-se que $\mathbf{v}_G \perp V_F$ e

$\mathbf{z} \in Z$, mas por definição de Z tem-se que $\mathbf{z} \perp V_F$.

Assim,

$$\mathbf{P}_G(\mathbf{P}_F \mathbf{v}) = \mathbf{P}_G(\mathbf{x} + \mathbf{v}_F) = \mathbf{x}$$

pois,

$\mathbf{x} \in V_{F \vee G} \Rightarrow \mathbf{x} \in V_G$ e

$\mathbf{v}_F \in Z_F \Rightarrow \mathbf{v}_F \in V_F$ e por hipótese $\mathbf{v}_F \perp V_G$.

Analogamente,

$$\mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G(\mathbf{x} + \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_G + \mathbf{z}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}_G,$$

e,

$$\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_F(\mathbf{x} + \mathbf{v}_G) = \mathbf{x}.$$

Portanto,

$$\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v}.$$

Ainda,

$$\mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v} = \mathbf{P}_{F \vee G}(\mathbf{x} + \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_G + \mathbf{z}) = \mathbf{x}$$

pois,

$$\mathbf{x} \in V_{F \vee G};$$

$$\mathbf{v}_F \in Z_F \Rightarrow \mathbf{v}_F \perp V_{F \vee G};$$

$$\mathbf{v}_G \in Z_G \Rightarrow \mathbf{v}_G \perp V_{F \vee G} \text{ e}$$

$$\mathbf{z} \in Z \Rightarrow \mathbf{z} \perp V_{F \vee G}.$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v} = \mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v}.$$

Para finalizar a demonstração, suponha $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v}$ e suponha também $\mathbf{v} \in Z_F$. Logo, por hipótese, $\mathbf{P}_F \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Assim,

$$\mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v} = \mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v}.$$

Mas, $\mathbf{P}_G \in V_G$ e $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} \in V_F$. Então, $\mathbf{P}_G \mathbf{v} \in V_F \cap V_G = V_{F \vee G}$, que é ortogonal a Z . Como $\mathbf{v} \in Z_F$, tem-se que $\mathbf{P}_G \mathbf{v}$ é ortogonal a \mathbf{v} , o que só é possível se $\mathbf{P}_G \mathbf{v} = 0$. Logo, \mathbf{v} é ortogonal a V_G , e portanto, F é ortogonal a G . ■

Corolário 1 . Se os fatores F , G e H são ortogonais dois a dois. Então $F \vee G$ é ortogonal a H .

Demonstração: Como, por hipótese, F é ortogonal a G , pelo Teorema 1 (ii), tem-se $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v}$. Mas, H é ortogonal a F e a G , assim

$$\mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v} \mathbf{P}_H \mathbf{v} = \mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} \mathbf{P}_H = \mathbf{P}_F \mathbf{P}_H \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_H \mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_H \mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{v}.$$

E portanto, os fatores $F \vee G$ e H são ortogonais. ■

Definição 22 . Uma coleção de fatores F_1, F_2, \dots, F_n é uma corrente de fatores se $F_1 \prec F_2 \prec \dots \prec F_n$.

Uma consequência imediata da definição de corrente de fatores e do Teorema 1 dá origem ao Teorema 2, apresentado a seguir:

Teorema 2 . A coleção de fatores em uma corrente é composta por fatores mutuamente ortogonais.

Demonstração: Tome F e G como fatores em uma corrente, tal que $F \prec G$, assim pela Proposição 1, $V_G \subset V_F$ e pela definição de supremo, $F \vee G = G$.

Tome $\mathbf{v} \in V$. Observe que $\mathbf{P}_G \mathbf{v} \in V_G$ mas por hipótese $V_G \subset V_F$, logo $\mathbf{P}_G \mathbf{v} \in V_F$ e, sabe-se que a projeção ortogonal de um vetor no espaço que o contém é o próprio vetor. Assim, $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{v}$. E, por definição $\mathbf{P}_F \mathbf{v} \in V_F$ e $\mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v} \in V_G$, o que só é possível se $\mathbf{P}_F \mathbf{v} \in V_G$. Porém, se $\mathbf{P}_F \mathbf{v} \in V_G$ então $\mathbf{P}_F \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{v}$. Sendo assim, $\mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{v}$.

Logo,

$$\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{v} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{v}.$$

Portanto, os fatores F e G são ortogonais. ■

Além da definição e das condições propostas pelo Teorema 1, a ortogonalidade pode também ser verificada pelo Teorema 3.

Teorema 3 . Os fatores F e G são ortogonais se, e somente se, as duas seguintes condições estão satisfeitas dentro de cada classe de $F \vee G$ separadamente:

- (i) toda F -classe encontra toda G -classe;
- (ii) todas essas intercessões têm tamanho proporcional ao produto dos tamanhos das F -classes pelas G -classes relevantes.

Demonstração: Assuma a seguinte notação, em que: p_i é o tamanho da i -ésima classe de F , q_j é o tamanho da j -ésima classe de G e s_{ij} é o tamanho da interseção entre as classes relevantes de F e G .

As condições (i) e (ii) podem ser substituídas pela condição de existência de uma constante c_Δ para cada classe Δ de $F \vee G$, tal que

$$s_{ij} = c_\Delta p_i q_j \tag{1}$$

uma vez que, se a interseção da i -ésima classe de F com a j -ésima classe de G é vazia então $s_{ij} = 0$.

Seja \mathbf{y} o vetor de dados, pelo Teorema 1, basta mostrar que $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y} = \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y}$.

Assim, a coordenada de $\mathbf{P}_F \mathbf{y}$ na i -ésima classe de F é dada por:

$$\mathbf{P}_F \mathbf{y} = \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F}{p_i}$$

e a coordenada de $\mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y}$ na j -ésima classe de G é:

$\mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y}$ = média das coordenadas de $\mathbf{P}_F \mathbf{y}$ na j -ésima classe de G , sendo que a i -ésima classe de F encontra a j -ésima classe de G .

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y} &= \frac{\sum_i s_{ij} \mathbf{P}_F \mathbf{y}}{q_j} \\ &= \frac{\sum_i s_{ij} \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F}{p_i}}{q_j} \\ &= \frac{\sum_i c_{\Delta} p_i q_j \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F}{p_i}}{q_j} \\ &= \frac{c_{\Delta} q_j \sum_i \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F}{q_j} \\ &= c_{\Delta} \sum_i \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F. \end{aligned}$$

Analogamente, a coordenada de $\mathbf{P}_G \mathbf{y}$ na j -ésima classe de G é dada por:

$$\mathbf{P}_G \mathbf{y} = \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}$$

e a coordenada de $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y}$ na i -ésima classe de F é a média das coordenadas de $\mathbf{P}_G \mathbf{y}$ na i -ésima classe de F . Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_F \mathbf{P}_{G\mathbf{y}} &= \frac{\sum_j s_{ij} \mathbf{P}_{G\mathbf{y}}}{p_i} \\
&= \frac{\sum_j s_{ij} \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}}{p_i} \\
&= \frac{\sum_j c_{\Delta} p_i q_j \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}}{p_i} \\
&= \frac{c_{\Delta} p_i \sum_j \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{p_i} \\
&= c_{\Delta} \sum_j \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{G\mathbf{y}} = \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}$$

e a coordenada de $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_{G\mathbf{y}}$ na i -ésima classe de F é a média das coordenadas de $\mathbf{P}_{G\mathbf{y}}$ na i -ésima classe de F . Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_F \mathbf{P}_{G\mathbf{y}} &= \frac{\sum_j s_{ij} \mathbf{P}_{G\mathbf{y}}}{p_i} \\
&= \frac{\sum_j s_{ij} \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}}{p_i} \\
&= \frac{\sum_j c_{\Delta} p_i q_j \frac{\text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{q_j}}{p_i} \\
&= \frac{c_{\Delta} p_i \sum_j \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G}{p_i} \\
&= c_{\Delta} \sum_j \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G.
\end{aligned}$$

Supondo os fatores F e G ortogonais, pelo Teorema 1, tem-se que $\mathbf{P}_G \mathbf{P}_{F\mathbf{y}} = \mathbf{P}_{F \vee G \mathbf{y}}$ e assim $\mathbf{P}_G \mathbf{P}_{F\mathbf{y}}$ tem o mesmo valor para toda j -ésima classe de G contida em uma

classe Δ dada de $F \vee G$, não importando quais são os dados \mathbf{y} . Logo,

$$\frac{s_{ij}}{q_j} = \frac{s_{ij'}}{q_{j'}},$$

desde que as j -ésima e j' -ésima classes de G estejam contidas em Δ .

De modo análogo, $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y} = \mathbf{P}_{F \vee G} \mathbf{y}$, o que indica que $\mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y}$ tem o mesmo valor para toda i -ésima classe de F contida em uma dada classe Δ de $F \vee G$, não importando quais são os dados \mathbf{y} . Logo,

$$\frac{s_{ij}}{p_i} = \frac{s_{i'j}}{p_{i'}},$$

desde que as i -ésima e i' -ésima classes de F estejam contidas em Δ .

As duas igualdades entre as razões acima indicam a existência da constante c_Δ e, portanto, a Equação 1 é verdadeira.

Para demonstrar a volta do teorema, suponha agora que a equação $s_{ij} = c_\Delta p_i q_j$ seja verdadeira, então todas as i -ésimas classes de F e j -ésimas classes de G , aqui representada, estão contidas em um classe Δ de $F \vee G$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y} &= c_\Delta \left(\sum_i \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } i\text{-ésima classe de } F \right) \\ &= c_\Delta (\text{total de } \mathbf{y} \text{ em } \Delta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y} &= c_\Delta \left(\sum_j \text{total de } \mathbf{y} \text{ na } j\text{-ésima classe de } G \right) \\ &= c_\Delta (\text{total de } \mathbf{y} \text{ em } \Delta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{P}_G \mathbf{P}_F \mathbf{y} = \mathbf{P}_F \mathbf{P}_G \mathbf{y}.$$

Portanto, pelo Teorema 1, os fatores F e G são ortogonais. ■

O Teorema 3 é um modo prático de verificar a ortogonalidade entre os fatores, embora a propriedade de ortogonalidade possa ser diferente no conjunto \mathcal{T} de tratamentos e no conjunto Ω de parcelas.

2.1.7 Decomposição ortogonal

A decomposição ortogonal é a chave para todos os cálculos no diagrama de Hasse. Nesta seção, é definido um novo subespaço para cada fator.

Teorema 4 . Seja \mathcal{F} um conjunto de fatores não equivalentes em um mesmo conjunto. Suponha que \mathcal{F} satisfaz:

- (a) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ então $F \vee G \in \mathcal{F}$;
- (b) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ então F é ortogonal a G .

Define-se o subespaço W_F para F em \mathcal{F} por:

$$\begin{aligned} W_F &= V_F \cap \left(\sum_{G \succ F} V_G \right)^\perp \\ &= V_F \cap \bigcap_{G \succ F} V_G^\perp \end{aligned}$$

e seja $d_F = \dim W_F$.

Então,

- (i) se F e G são fatores diferentes em \mathcal{F} então W_F é ortogonal a W_G ;
- (ii) se $F \in \mathcal{F}$, então V_F é a soma direta ortogonal dos W_G 's para os quais $G \succ F$. Em particular, se $E \in \mathcal{F}$, então todo o espaço é igual a

$$\bigoplus_{F \in \mathcal{F}} W_F$$

- (iii) se $F \in \mathcal{F}$ então

$$d_F = n_F - \sum_{G \succ F} d_G$$

Demonstração:

- (i) Como F e G são fatores distintos, suponha que pelo menos um entre os mesmos seja diferente do supremo $F \vee G$, seja $F \prec F \vee G$. Assim,

$$W_F \subset V_F \cap (V_{F \vee G})^\perp$$

e por definição,

$$W_G \subseteq V_G \cap (V_{F \vee G})^\perp.$$

Porém, por hipótese, os fatores são ortogonais, ou seja, os subespaços $V_F \cap V_{F \vee G}^\perp$ e $V_G \cap V_{F \vee G}^\perp$ são ortogonais, e então seus subconjuntos também o serão. Logo, W_F é ortogonal a W_G .

- (ii) Esta demonstração será feita por indução, o primeiro passo será mostrar que vale para um subespaço, então suponha que não exista $G \succ F$, assim, $W_F \subseteq V_F$. Logo o resultado é válido.

Suponha que o resultado seja válido para todo G em \mathcal{F} , então

$$\begin{aligned} V_G &= \bigoplus_{H \succ G} W_H \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{G \succ F} = \sum_{G \succ F} \left(\bigoplus_{H \succ G} W_H \right). \end{aligned}$$

Como todos os fatores G em \mathcal{F} são ortogonais entre si, pode-se escrever:

$$\sum_{G \succ F} V_G = \bigoplus_{G \succ F} W_G.$$

Mas todo V_G está contido em V_F , pela Proposição 5, pois $G \succ F$. Logo, tem-se que todo W_G está contido em V_F . Agora tome $\mathbf{v} \in \sum_{G \succ F} V_G$, como $\sum_{G \succ F} V_G = \bigoplus_{G \succ F} W_G$, o vetor \mathbf{v} , pela Proposição 2, admite uma única decomposição:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \dots + \mathbf{w}_n$$

em que cada $\mathbf{w}_i \in W_{G_i}$, com $i = 1, \dots, n$. Logo, $\mathbf{v} \in V_F$, e sendo assim, $\sum_{G \succ F} V_G \subset V_F$.

Pela Proposição 4,

$$\begin{aligned}
V_F &= \left(\sum_{G \succ F} V_G \right) \oplus \left(\sum_{G \succ F} V_G \right)^\perp \\
&= \bigoplus_{G \succ F} W_G \oplus V_F \cap \left(\sum_{G \succ F} V_G \right)^\perp \\
&= W_F \oplus \left(\bigoplus_{G \succ F} W_G \right) \\
&= \bigoplus_{G \succeq F} W_G.
\end{aligned}$$

(iii) Sabendo-se que $V_F = \bigoplus_{G \succeq F} W_G$ e que $\dim V_F = n_F$, por definição e que

$$\begin{aligned}
\dim \bigoplus_{G \succeq F} W_G &= \sum_{G \succeq F} \dim W_G \\
&= \dim \sum_{G \succeq F} W_G \\
&= \sum_{G \succeq F} d_G \\
&= d_F + \sum_{G \succ F} d_G.
\end{aligned}$$

Logo,

$$d_F = n_F - \sum_{G \succ F} d_G.$$

E, portanto, conclui-se a demonstração do Teorema 4. E ainda, conclui-se que o número de graus de liberdade do fator F é dado pela diferença entre o número de níveis do fator F e soma dos graus de liberdade dos fatores para os quais F é marginal. ■

2.1.8 Efeitos e somas de quadrados

Para o próximo teorema, suponha que são satisfeitas as hipóteses do Teorema 4.

Teorema 5 . Suponha que \mathcal{F} é um conjunto de fatores não equivalentes, que satisfaz as hipóteses do Teorema 4. Define-se $\mathbf{Q}_F \mathbf{v}$ como sendo a projeção ortogonal de \mathbf{v} em W_F , para todo vetor \mathbf{v} em V e todo fator F em \mathcal{F} . Então

- (i) se F e V são fatores distintos em \mathcal{F} então $\mathbf{Q}_F \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{Q}_G \mathbf{v}$;
- (ii) se $F \in \mathcal{F}$, então $\mathbf{P}_F \mathbf{v} = \sum_{G \succeq F} \mathbf{Q}_G \mathbf{v}$; em particular se $E \in \mathcal{F}$ então $\mathbf{v} = \mathbf{P}_E \mathbf{v} = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{Q}_F \mathbf{v}$;
- (iii) se $F \in \mathcal{F}$ então $\|\mathbf{P}_F \mathbf{v}\|^2 = \sum_{G \succeq F} \|\mathbf{Q}_G \mathbf{v}\|^2$.

Demonstração:

- (i) Observe que:

$$\mathbf{Q}_F \mathbf{v} \in W_F$$

$$\mathbf{Q}_G \mathbf{v} \in W_G.$$

O Teorema 4 afirma que W_F é ortogonal a W_G e portanto, $\mathbf{Q}_F \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{Q}_G \mathbf{v}$.

- (ii) O Teorema 4 garante que

$$V_F = \bigoplus_{G \succeq F} W_G$$

e conseqüentemente $W_{G_i} \cap W_{G_j} = \{\mathbf{o}\}$, tal que $W_{G_i} \neq W_{G_j}$ e $W_{G_i}, W_{G_j} \succeq F$. Assim, suponha $\mathbf{v} \in V_F$ e que existam n fatores $G \succeq F$, sabe-se que o vetor \mathbf{v} admite uma única decomposição

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_{G_1} + \dots + \mathbf{w}_{G_n}.$$

Agora, observe que se a decomposição anterior é única, os vetores $\mathbf{w}_{G_1}, \dots, \mathbf{w}_{G_n}$ são linearmente independentes. Logo, uma base de V_F é a reunião das bases de cada W_G , com $G \succeq F$.

Seja $\mathbf{B}_i = \{\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \dots, \mathbf{b}_{ig_i}\}$ uma base de W_{G_i} , com $\dim W_{G_i} = g_i$ e $\sum_{i=1}^n g_i = n_F$. Assim, $\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{B}_i$ é uma base de V_F . Então, se $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{12}, \dots, \mathbf{b}_{1g_1}, \mathbf{b}_{21}, \mathbf{b}_{22}, \dots, \mathbf{b}_{2g_2}, \dots, \mathbf{b}_{n1}, \mathbf{b}_{n2}, \dots, \mathbf{b}_{ng_n}\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{g_i} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_{ij} \rangle}{\|\mathbf{b}_{ij}\|^2} \mathbf{b}_{ij} \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{g_1} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_{1j} \rangle}{\|\mathbf{b}_{1j}\|^2} \mathbf{b}_{1j}}_{\mathbf{Q}_{G_1} \mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{g_2} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_{2j} \rangle}{\|\mathbf{b}_{2j}\|^2} \mathbf{b}_{2j}}_{\mathbf{Q}_{G_2} \mathbf{v}} + \dots + \underbrace{\sum_{j=1}^{g_n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_{nj} \rangle}{\|\mathbf{b}_{nj}\|^2} \mathbf{b}_{nj}}_{\mathbf{Q}_{G_n} \mathbf{v}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{P}_F \mathbf{v} = \sum_{G \succeq F} \mathbf{Q}_G \mathbf{v}.$$

(iii) Como os $\mathbf{Q}_{G_i} \mathbf{v}$ são independentes para todo $i = 1, \dots, n$, por definição tem-se que $\langle \mathbf{Q}_{G_i} \mathbf{v}, \mathbf{Q}_{G_j} \mathbf{v} \rangle = 0$, para $i \neq j$. Logo,

$$\|\mathbf{P}_F \mathbf{v}\|^2 = \sum_{G \succeq F} \|\mathbf{Q}_G \mathbf{v}\|^2$$

Quando as condições do Teorema 4 são satisfeitas chama-se $\mathbf{Q}_F \mathbf{v}$ de efeito de F e $\|\mathbf{Q}_F \mathbf{v}\|^2$ de soma de quadrados para F , escreve-se $\text{SQ}(F)$. Agora

$$\begin{aligned} \text{ajuste para } F &= \mathbf{P}_F \mathbf{v} = \sum_{G \succeq F} \mathbf{Q}_G \mathbf{v} = \mathbf{Q}_F \mathbf{v} + \sum_{G \succ F} \mathbf{Q}_G \mathbf{v} \\ &= \text{efeito de } F + \sum_{G \succ F} (\text{efeito de } G), \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{efeito de } F = \text{ajuste para } F - \sum_{G \succ F} (\text{efeito de } G).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \text{SQC}(F) &= \|\mathbf{P}_F \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{Q}_F \mathbf{v}\|^2 + \sum_{G \succ F} \|\mathbf{Q}_G \mathbf{v}\|^2 \\ &= \text{SQ}(F) + \sum_{G \succ F} \text{SQ}(G), \end{aligned}$$

e então,

$$\text{SQ}(F) = \text{SQC}(F) - \sum_{G \succ F} \text{SQ}(G) \quad \blacksquare$$

2.1.9 Estrutura ortogonal de tratamento

Bailey (2005) afirma que o fator universal U deve ser considerado como um fator de parcela e de tratamento, ou seja, a média geral, que geralmente é o fator universal, será tanto um fator de parcela quanto de tratamento.

Definição 23 . Um conjunto \mathcal{G} de fatores não equivalentes em \mathcal{T} é uma estrutura de tratamento ortogonal se:

- (i) $U \in \mathcal{G}$;
- (ii) se $F \in \mathcal{G}$ e $G \in \mathcal{G}$ então $F \vee G \in \mathcal{G}$;
- (iii) se $F \in \mathcal{G}$ e $G \in \mathcal{G}$ então F é ortogonal a G .

Tomando-se \mathcal{G} como uma estrutura ortogonal de tratamento, pode-se obter o diagrama de Hasse para a coleção de modelos esperados, uma vez que o modelo nulo, ou aquele que contém apenas a média geral será marginal a todos os outros, e o modelo maximal será aquele que tem todos os demais como marginais.

Como os fatores são ortogonais, o V_{modelo} -subespaço para cada modelo pode ser decomposto pela soma direta dos W -subespaços ortogonais contidos no mesmo, conforme proposto pelo Teorema 4 e sugerido na Figura 3.

A seleção do modelo é feita pelo teste F por meio de componentes de variância, observando-se os W -subespaços.

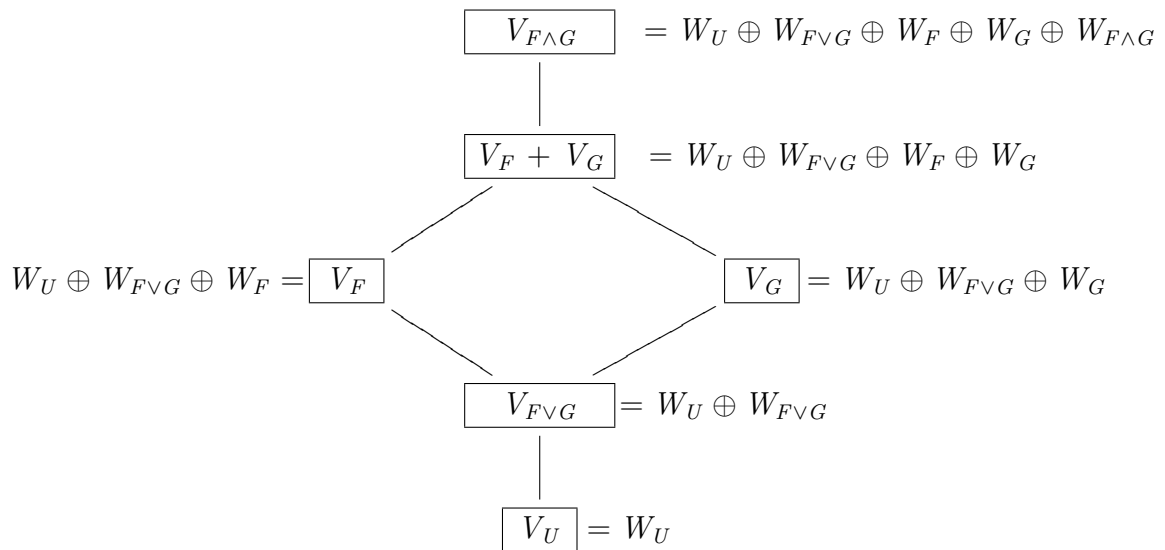


Figura 3 - Diagrama de Hasse para a coleção de modelos considerando os fatores F e G cruzados

2.1.10 Estrutura ortogonal de parcela

Definição 24 . Um conjunto \mathcal{F} de fatores não equivalentes em Ω é uma estrutura ortogonal de parcela se

- (i) todo fator em \mathcal{F} é uniforme;
- (ii) $U \in \mathcal{F}$;
- (iii) $E \in \mathcal{F}$;
- (iv) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ então $F \vee G \in \mathcal{F}$;
- (v) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ então $F \wedge G \in \mathcal{F}$;
- (vi) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ então F é ortogonal a G .

2.1.11 Delineamentos ortogonais

De acordo com Bailey (2005), todo delineamento é constituído por três componentes. São eles: a estrutura de parcela, a estrutura de tratamento e a função de delineamento T , a qual aloca os tratamentos às parcelas.

Segundo a mesma autora, uma função de delineamento apresenta a seguinte propriedade: fatores de tratamento em \mathcal{T} , ortogonais entre si, permanecem ortogonais quando considerados como fatores em Ω . Repetições iguais garante tal propriedade.

Observe que, se F é um fator de parcela e G um fator de tratamento, então $T \preceq G \preceq F \vee G$. Assim, $F \vee G$ fornece um agrupamento dos tratamentos. E, caso $F \vee G$ não tenha significado natural, o mesmo recebe o nome de pseudo fator de tratamento.

A seguir serão definidos delineamentos ortogonais e o teorema seguinte irá auxiliar na localização dos subespaços de tratamento.

Definição 25 . Um delineamento cuja estrutura de parcela consiste de um conjunto \mathcal{F} de fatores em um conjunto Ω de parcelas, cuja estrutura de tratamento consiste de um conjunto \mathcal{G} de fatores em um conjunto \mathcal{T} de tratamentos e cujos tratamentos estão alocados a parcelas de acordo com a função de delineamento T é um delineamento ortogonal se:

- (i) \mathcal{F} é uma estrutura de parcela ortogonal;
- (ii) \mathcal{G} é uma estrutura de tratamento ortogonal;
- (iii) a função T é tal que:
 - (a) se os fatores de tratamento G_1 e G_2 estão em \mathcal{G} , então, eles permanecem ortogonais entre si em Ω ;
 - (b) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$ então F é ortogonal a G ;
 - (c) se $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{G}$ então $F \vee G \in \mathcal{G}$.

Teorema 6 . Seja G um fator de tratamento em um delineamento ortogonal. Então, existe um único fator de parcela F marginal ou equivalente a G , em que todos os demais fatores de parcela que são marginais ou equivalentes a G são também marginais ou equivalentes a F . Portanto, $W_G \subseteq W_F$.

Demonstração: Sabe-se que o fator E está em \mathcal{F} , então $E \preceq G$, logo existe pelo menos um fator de parcela marginal ou equivalente a G . Tome os fatores F_1, F_2, \dots, F_n marginais ou equivalentes a G e seja $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$, assim $F \in \mathcal{F}$ e $F_i \preceq F \preceq G, \forall i = 1, \dots, n$. Portanto, F é o fator em questão no teorema.

Agora, pelo Teorema 4 e pela Proposição 5, tem-se que

$$W_G \subseteq V_G \subseteq V_F.$$

Suponha que exista um fator H tal que $H \prec F$, assim os fatores H e G não poderão ser marginais, ou seja, são fatores cruzados. Observe abaixo o diagrama de Hasse para a presente demonstração. Esse diagrama funciona como a composição dos diagramas de Hasse para fatores de tratamento e de parcela.

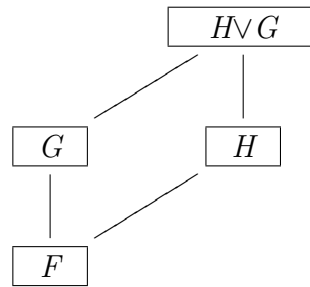


Figura 4 - Diagrama de Hasse para a demonstração

Desde que o delineamento seja ortogonal, HVG é um fator de tratamento, de acordo com a Definição 25. Logo,

$$\begin{aligned} W_G &\subseteq V_G \cap (V_{HVG})^\perp \Rightarrow \\ &\Rightarrow W_G \subseteq (V_{HVG})^\perp. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 4,

$$\begin{aligned} W_F &\subseteq V_F \cap \bigcap_{H \prec F} V_H^\perp \\ W_F &\subseteq V_F \cap [V_G^\perp \cap V_H \cap (V_{HVG})^\perp]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$W_G \subseteq W_F \quad \blacksquare$$

2.1.12 Análise da variância

As descrições a seguir são propostas por Bailey (2005).

A estrutura de parcela \mathcal{F} determina a análise da variância nula. Usa-se a estrutura de tratamento ortogonal, \mathcal{G} e o Teorema 4 para obter a lista de subespaços de tratamento.

No esquema da análise da variância, insere-se uma coluna para fonte de variação, em que o Teorema 6 auxilia na localização de cada subespaço de tratamento, os quais são escritos em linhas separadas na coluna para fonte de variação, alocados ao fator de parcela adequado. Logo, o fator de parcela deve conter, além dos subespaços de tratamentos, uma linha para resíduo e outra para o total.

A coluna para número de graus de liberdade é dividida em duas, à direita localizam-se os números de graus de liberdade para fatores de parcela e à esquerda para fatores de tratamento, calculados utilizando o diagrama de Hasse.

Acrescenta-se uma coluna para somas de quadrados, obtidas de acordo com o Teorema 5, e outra coluna para quadrados médios, calculados dividindo-se as somas de quadrados pelos respectivos graus de liberdade.

Adiciona-se outra coluna para as esperanças dos quadrados médios de cada fator. Supondo-se que G seja um fator de tratamento e F um fator de parcela em um delineamento ortogonal. Então

$$\begin{aligned} E[\text{Soma de Quadrados } (G)] &= E[\|\mathbf{Q}_G \mathbf{y}\|^2] \\ &= \|\sigma_G\|^2 + d_G \sigma_F \\ &= \sigma_G^2 + d_G \sigma_F. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E[\text{Quadrado Médio } (G)] &= E\left[\frac{\|\mathbf{Q}_G \mathbf{y}\|^2}{d_G}\right] \\ &= \frac{\sigma_G^2}{d_G} + \sigma_F^2. \end{aligned}$$

As esperanças dos quadrados médios indicam a razão apropriada para o teste F.

2.2 Material e métodos

2.2.1 Material

Utilizaram-se dois conjuntos de dados no presente estudo, provenientes de experimentos realizados junto a Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” e, descritos a seguir:

2.2.1.1 Experimento I

Os dados deste primeiro experimento são parte da tese do aluno do programa de Pós-Graduação em Ciência Animal e Pastagem (Departamento de Zootecnia/ESALQ/USP), Omer Cavalcanti de Almeida, sob orientação do professor Dr. Alexandre Vaz Pires.

O presente experimento teve por objetivo verificar a influência do óleo de soja na produção de leite em cabras Saanen.

Utilizaram-se quatro cabras Saanen multíparas em lactação com produção e período de lactação próximos. Aplicaram-se às mesmas quatro tratamentos em quatro períodos distintos sendo observada a produção de leite de cada animal durante cinco dias em cada período, de tal modo que o experimento seguisse o delineamento quadrado-latino 4×4 , conforme croqui apresentado na Tabela 1.

Os tratamentos utilizados foram:

Dieta base (Controle);

Dieta base + dose de 30g de óleo de soja;

Dieta base + dose de 60g de óleo de soja;

Dieta base + dose de 90g de óleo de soja,

em que, as doses de óleo de soja foram aplicadas diretamente na cavidade bucal de cada animal com o auxílio de uma seringa.

Tabela 1 - Croqui do Experimento I, em que os índices em cada casela referem-se aos dias (subparcelas)

	Animal ₁	Animal ₂	Animal ₃	Animal ₄
Período ₁	T ₁ 1,....,5	T ₃ 6,....,10	T ₂ 11,....,15	T ₄ 16,....,20
Período ₂	T ₂ 21,....,25	T ₁ 26,....,30	T ₄ 31,....,35	T ₃ 36,....,40
Período ₃	T ₃ 41,....,45	T ₄ 46,....,50	T ₁ 51,....,55	T ₂ 56,....,60
Período ₄	T ₄ 61,....,65	T ₂ 66,....,70	T ₃ 71,....,75	T ₁ 76,....,80

2.2.1.2 Experimento II

Os dados do segundo experimento são parte da dissertação do aluno do programa de Pós-Graduação em Ciência Animal e Pastagem (Departamento de Zootecnia/ESALQ/USP), Leandro Coelho de Araujo, sob orientação da professora Dra. Patrícia Menezes Santos, da Embrapa Pecuária Sudeste localizada em São Carlos/SP.

Este experimento teve por objetivo avaliar características produtivas do Capim Marandu, quando submetido à deficit hídrico nas fases de sementeira, germinação e perfilhamento.

Conduziu-se o experimento em vasos plásticos, em casa de vegetação, com condições de temperatura, pressão e características do solo (umidade e adubação), controladas.



Figura 5 - Ilustração do Experimento II

Utilizou-se o delineamento em blocos ao acaso (quatro blocos) com esquema de tratamento fatorial mais controle, cujos fatores de tratamento foram *Grau*, que caracteriza os níveis de água no solo para retorno a irrigação após o período de deficit hídrico e *Época*, que indica a época de suspensão da irrigação (deficit hídrico), com os respectivos níveis descritos a seguir:

Testemunha: sem déficit hídrico, com unidade do solo mantida próxima a U_{CC} durante todo o período experimental;

*Grau*₁: irrigação suspensa até a umidade do solo atingir 75% de U_{CC} , e posteriormente mantida como no tratamento Testemunha;

*Grau*₂: irrigação suspensa até a umidade do solo atingir 50% de U_{CC} , e posteriormente

mantida como no tratamento Testemunha;

*Grau*₃: irrigação suspensa até a umidade do solo atingir 25% de U_{CC} , e posteriormente mantida como no tratamento Testemunha;

*Época*₁: suspensão da irrigação imediatamente após a semeadura;

*Época*₂: suspensão da irrigação no momento da germinação de ao menos 50% das sementes;

*Época*₃: suspensão da irrigação no início do perfilhamento primário de ao menos 50% das plantas,

em que, U_{CC} é a umidade à capacidade de campo do solo.

No decorrer do experimento diferentes variáveis foram observadas, tais como: número de perfilhos surgidos, altura de plantas, folhas (lâmina foliar), colmos (colmos + bainha), matéria verde, área foliar, matéria seca e raiz. Porém, no presente estudo utilizou-se apenas a variável resposta peso das folhas de cada unidade experimental, dadas em gramas.

2.2.2 Métodos

Utilizaram-se os teoremas e proposições apresentados nas seções anteriores, a fim de justificar algebricamente as regras de construção e utilização do diagrama de Hasse propostas por Brien (2007), as quais paralelamente, foram introduzidas.

2.2.2.1 Fatores experimentais

A princípio identificaram-se os fatores experimentais, ou seja, quais fatores eram de tratamento e quais fatores eram de parcela. A regra abaixo, proposta por Brien (2007) auxiliou em tal identificação:

Regra 1: Fazer a seguinte pergunta:

Para uma unidade observacional, pode-se identificar os níveis do fator associados à unidade se a aleatorização não foi efetuada?

No caso da resposta ser afirmativa, trata-se de um fator de parcela. Caso contrário, o fator será de tratamento.

2.2.2.2 Estrutura experimental

Em seguida, foram apontadas as classes de cada fator, com o objetivo de verificar a ortogonalidade entre os mesmos.

Paralelamente, estabeleceram-se as relações de aninhamento ou cruzamento entre os fatores experimentais seus respectivos números de níveis. Como consequência, com base nas Regras 2 e 3, apresentou-se a estrutura experimental e sua expansão.

Regra 2: A estrutura experimental é determinada como segue:

1. Descreve-se a relação entre os fatores de parcela no experimento;
2. Analogamente, descreve-se a relação entre
 - (i) os fatores de tratamento, e
 - (ii) os fatores de tratamento e de parcela, quando necessário.

E acrescenta-se o número de níveis dos fatores em frente aos respectivos nomes (BRIEN, 2007).

Tendo definida a estrutura experimental, Brien (2007) sugere que tal fórmula seja expandida, com o objetivo de se obterem os termos que serão incluídos no modelo e na tabela de análise da variância. O mesmo autor apresenta uma outra regra, para a realização dessa expansão.

Regra 3: Considere os fatores F e G em um mesmo conjunto. As regras para a expansão da fórmula estrutural são:

$$F * G = F + G + F : G$$

$$F / G = F + G[F]$$

em que no primeiro lado da equação encontram-se as fórmulas estruturais e no segundo encontram-se as fórmulas expandidas, de tal modo que

$F * G$ representa o fator F cruzado com o fator G ,

F / G representa o fator G aninhado ao fator F ,

$F : G$ representa a interação entre os fatores F e G , e

$G[F]$ representa o fator G dentro do fator F .

2.2.2.3 Subespaços ortogonais

Os cálculos desenvolvidos a seguir auxiliaram na obtenção dos subespaços W 's, ortogonais entre si.

Seja $F \prec G$ e $\mathbf{y} \in \left(\bigcap_{G \succ F} V_G \right)$, obter W_F significa identificar os vetores ortogonais a \mathbf{y} em V_F . Ou seja, a coleção de vetores $\mathbf{P}_F \mathbf{y}$, $\forall \mathbf{y} \in \left(\bigcap_{G \succ F} V_G \right)$.

Seja então, V_F um subespaço de dimensão n_F e \mathbf{B}_F uma base para V_F , tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_F &= [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_{n_F}] \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n_F} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n_F} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_1} & b_{n_2} & \dots & b_{nn_F} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Seja também,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_F \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{n_F} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2} \mathbf{b}_i \\
&= \frac{b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \dots + b_{n1}y_n}{b_{11}^2 + b_{21}^2 + \dots + b_{n1}^2} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{n2}y_n}{b_{12}^2 + b_{22}^2 + \dots + b_{n2}^2} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \frac{b_{1n_F}y_1 + b_{2n_F}y_2 + \dots + b_{nn_F}y_n}{b_{1n_F}^2 + b_{2n_F}^2 + \dots + b_{nn_F}^2} \begin{pmatrix} b_{1n_F} \\ b_{2n_F} \\ \vdots \\ b_{nn_F} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathbf{b}'_1 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} \cdot \mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b}'_2 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} \cdot \mathbf{b}_2 + \dots + \frac{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \cdot \mathbf{b}_{n_F} \\
&= \mathbf{b}_1 \cdot \frac{\mathbf{b}'_1 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} + \mathbf{b}_2 \cdot \frac{\mathbf{b}'_2 \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \cdot \frac{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{y}}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \\
&= \left[\mathbf{b}_1 \frac{1}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} \mathbf{b}'_1 + \mathbf{b}_2 \frac{1}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} \mathbf{b}'_2 + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \mathbf{b}'_{n_F} \right] \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_{n_F} \\ \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_{n_F} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F} \end{pmatrix}.$$

Mas, $\mathbf{b}'_i \mathbf{b}_j = 0, \forall i \neq j$. Assim,

$$\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F} \end{pmatrix}.$$

E,

$$(\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \mathbf{y} = \left[\mathbf{b}_1 \frac{1}{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1} \mathbf{b}'_1 + \mathbf{b}_2 \frac{1}{\mathbf{b}'_2 \mathbf{b}_2} \mathbf{b}'_2 + \dots + \mathbf{b}_{n_F} \frac{1}{\mathbf{b}'_{n_F} \mathbf{b}_{n_F}} \mathbf{b}'_{n_F} \right] \mathbf{y}.$$

Portanto, $\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \mathbf{y} = \mathbf{P}_F \mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F$ é uma base para o subespaço W_F .

Então, a projeção ortogonal de \mathbf{y} em W_F , $\mathbf{Q}_F \mathbf{y}$, analogamente, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_F \mathbf{y} &= \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right] \left\{ \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]' \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right] \right\}^{-1} \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]' \mathbf{y} \\ &= \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right] \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]^{-1} \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]' \mathbf{y} \\ &= \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right] \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]^{-1} \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right]' \mathbf{y} \\ &= \mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \mathbf{y} \end{aligned}$$

Conclui-se então, que $\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F$ é a matriz de projeção ortogonal de \mathbf{y} em V_F e também de \mathbf{y} em W_F .

2.2.2.4 Ortogonalidade entre fatores

De acordo com Taylor e Hilton (1981), o digrama de Hasse apenas pode ser obtido sob a condição de ortogonalidade dos fatores. Verificou-se tal pressuposto por meio das propriedades de seus subespaços. Conforme sugere o Teorema 3, suponha que sejam dois os fatores, F e G . Identificou-se a existência de uma constante c_Δ para cada classe de FVG , conforme a Equação 1, dada por:

$$s_{ij} = c_\Delta p_i q_j, \text{ em que}$$

p_i é o tamanho da i -ésima classe de F ;

q_j é o tamanho da j -ésima classe de G e

s_{ij} é o tamanho da interseção entre as classes relevantes de F e G .

E, por meio das definições 23 e 24 garantiram-se as existências de estruturas ortogonais de tratamento e parcela. Enquanto que a Definição 25 assegurou a ortogonalidade do delineamento.

2.2.2.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

Comprovada a ortogonalidade entre os fatores, pôde-se desenhar os diagramas de Hasse para tratamentos e parcelas, para tanto utilizou-se a Regra 4, a qual deriva do Teorema 4.

Regra 4: O diagrama de Hasse para a fórmula estrutural, de um conjunto de fatores, sejam eles fatores de tratamento ou de parcela, é formado colocando acima aquele que tem todos os demais fatores como marginais a ele, conectando-os por um segmento. Logo, fatores cruzados ficam um ao lado do outro. O fator Universal, geralmente representado pela média geral, é incluído no topo do diagrama. E, no final do diagrama consta a representação do ínfimo entre os fatores, aquele fator que é marginal a todos os demais. Do lado esquerdo do fator generalizado escreve-se o número de níveis e do lado direito o número de graus de liberdade para a correspondente fonte de variação, que é obtido pela diferença entre o número de seus níveis e a soma dos números de graus de liberdade de todos os fatores generalizados para os quais o mesmo é marginal (BRIEN, 2007).

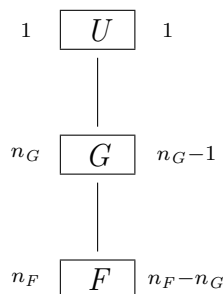


Figura 6 - Graus de liberdade no diagrama de Hasse, tal que $F \prec G$

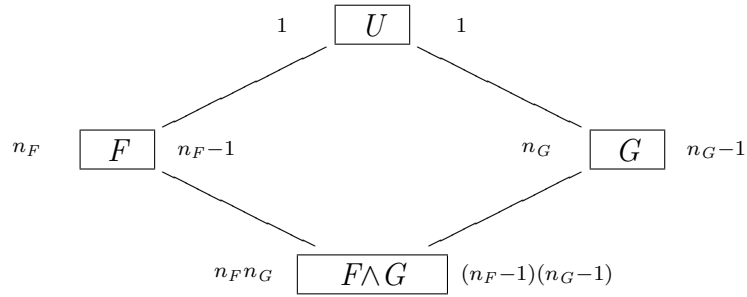


Figura 7 - Graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados

2.2.2.6 Somas de quadrados

Sejam os fatores F e G , tais que $F \prec G$. De acordo com o Teorema 5, tem-se:

$$\text{SQ}(F) = \text{SQC}(F) - \sum_{G \succ F} \text{SQ}(G).$$

Mas, pela Seção 2.2.2.3, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{SQ}(F) &= \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \mathbf{y} \right]^2 - \sum_{G \succ F} \left[\mathbf{B}_G (\mathbf{B}'_G \mathbf{B}_G)^{-1} \mathbf{B}'_G \mathbf{y} \right]^2 \\ &= \mathbf{y}' \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F \right] \mathbf{y} - \mathbf{y}' \left[\sum_{G \succ F} \mathbf{B}_G (\mathbf{B}'_G \mathbf{B}_G)^{-1} \mathbf{B}'_G \right] \mathbf{y} \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{SQ}(F) = \mathbf{y}' \left[\mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F - \sum_{G \succ F} \mathbf{B}_G (\mathbf{B}'_G \mathbf{B}_G)^{-1} \mathbf{B}'_G \right] \mathbf{y}. \quad (2)$$

Portanto, as somas de quadrados podem ser obtidas por meio da Equação 2. Pode-se observar que a mesma é uma forma quadrática e a quinta regra proposta por Brien (2007), fundamentada pelos cálculos da Seção 2.2.2.3, sugere a utilização do diagrama de Hasse a fim de lograr as matrizes núcleo das formas quadráticas. Assim, as somas de quadrados de interesse foram calculadas a partir da Regra 5, ilustrada pelas Figuras 8 e 9.

Regra 5: Para cada fator generalizado em uma fórmula estrutural existe um operador linear médio e uma matriz, denotados por \mathbf{M} e \mathbf{Q} , respectivamente. Tais matrizes \mathbf{Q} são as matrizes núcleo das formas quadráticas, as quais representam as somas de quadrados. As expressões para \mathbf{Q} são obtidas em termos dos operadores \mathbf{M} com o auxílio do diagrama de Hasse para

cada fórmula estrutural. Então, no diagrama, do lado esquerdo de cada fator generalizado acrescenta-se a respectiva matriz \mathbf{Q} e, do lado direito as expressões em função dos operadores, as quais são obtidas subtraindo-se do operador \mathbf{M} do fator em questão, as matrizes \mathbf{Q} dos fatores para o qual o mesmo é marginal.

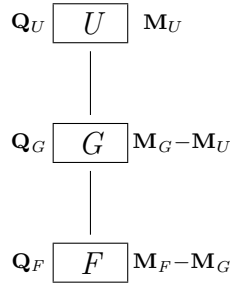


Figura 8 - Expressões das somas de quadrados no diagrama de Hasse, tal que $F \prec G$

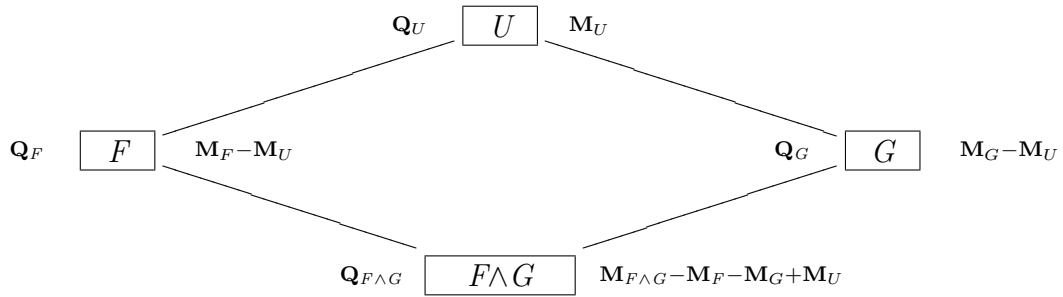


Figura 9 - Expressões das somas de quadrados no diagrama de Hasse para os fatores F e G , cruzados

Em que:

$$\mathbf{M}_U = \mathbf{B}_U (\mathbf{B}'_U \mathbf{B}_U)^{-1} \mathbf{B}'_U$$

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{B}_F (\mathbf{B}'_F \mathbf{B}_F)^{-1} \mathbf{B}'_F$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{B}_G (\mathbf{B}'_G \mathbf{B}_G)^{-1} \mathbf{B}'_G$$

$$\mathbf{M}_{F \wedge G} = \mathbf{B}_{F \wedge G} (\mathbf{B}'_{F \wedge G} \mathbf{B}_{F \wedge G})^{-1} \mathbf{B}'_{F \wedge G}$$

e,

$$\mathbf{Q}_U = \mathbf{M}_U$$

$$\mathbf{Q}_F = \mathbf{M}_F - \mathbf{M}_U$$

$$\mathbf{Q}_G = \mathbf{M}_G - \mathbf{M}_U$$

$$\mathbf{Q}_{F \wedge G} = \mathbf{M}_{F \wedge G} - \mathbf{M}_F - \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_U$$

2.2.2.7 Análise da variância e modelo maximal

Formou-se a tabela da análise da variância através dos passos listados na Regra 6, descrita por Brien (2007).

Regra 6:

1. Listam-se todos os fatores de parcela na coluna para *Fonte*, seus respectivos números de graus de liberdade na coluna *gl* e suas formas quadráticas na coluna *SQ*;
2. Colocam-se os fatores de tratamentos indentados sob o fator de parcela com o qual é confundido, acrescentam-se seus números de graus de liberdade e, se o delineamento for ortogonal, suas formas quadráticas;
3. As fontes *Residuais* são adicionadas de tal forma que estejam indentadas ao respectivo fator de parcela, abaixo de todos os fatores de tratamento indentados ao mesmo, e seus números de graus de liberdade e formas quadráticas são calculados por diferença. Para experimentos ortogonais, a matriz da forma quadrática para o Resíduo é a diferença das matrizes das formas quadráticas a partir da qual é calculada.

Cabe salientar que as análises de variância foram realizadas com o auxílio do software estatístico R.

A esperança e a variância dos termos do modelo maximal foram calculadas segundo a Regra 7, dada a seguir:

Regra 7:

1. Designa-se cada fator do experimento como fixo ou aleatório;
2. Determina-se se o fator é um termo potencial para esperança ou variância como segue: fatores que envolvem somente fatores (originais) fixos são termos potenciais para a esperança e fatores que contém pelo menos um fator (original) aleatório se tornará termo para a variação. Se não houver fator de parcela que tenha sido classificado como aleatório, o termo consistindo de todos os fatores de parcela será designado como aleatório;

3. A esperança do modelo maximal é então a soma de todos os termos esperados exceto aqueles que são marginais a um termo no modelo; se não existirem termos esperados, o modelo consiste de um único termo para a média geral;
4. A variância do modelo maximal é a soma de todos os termos de variação (BRIEN, 2007).

2.2.2.8 Esperanças dos quadrados médios

Brien (2007) sugere os seguintes passos para a construção das esperanças dos quadrados médios para um experimento segundo um delineamento ortogonal:

Regra 8:

1. Para cada fórmula estrutural, toma-se o diagrama de Hasse dos fatores generalizados para a fórmula e, para cada fator generalizado F , substitui-se o número de combinações de níveis, f , à esquerda por **i)** $(n/f) \sigma_F^2$ se F é um termo na variação do modelo, ou **ii)** $q(\psi)$ se F é um termo potencial da esperança do modelo. À direita de cada fator generalizado F , informa-se a respectiva contribuição para a esperança do quadrado médio incluindo:
 - a) a expressão a esquerda para toda variação do fator generalizado V para o qual F é marginal ($F \preceq V$), iniciando com o mais abaixo de V até F , isto é, a expressão a esquerda para todo V diretamente ou indiretamente conectado a F ; e
 - b) a expressão para F a sua esquerda.
2. Adicionam-se as contribuições dos fatores de parcela a esperança do quadrado médio, calcula-se no diagrama de Hasse, para a tabela de análise da variância, colocando cada contribuição de acordo com sua fonte na tabela, a menos que a fonte tenha sido desdobrada, neste caso coloca-se a contribuição de acordo com a fonte na qual tenha sido desdobrada.
3. Repete-se o passo 2 para a outra fórmula estrutural, adicionando a contribuição daqueles que já estão na tabela. Entretanto se o fator generalizado ocorrer mais que uma vez no diagrama de Hasse, seu $(n/f) \sigma_F^2$ ou $q(\psi)$ é adicionado somente uma vez.

Logo, utilizou-se da Regra 8 para lograr as esperanças dos quadrados médios de cada fator generalizado.

2.3 Resultados e discussões

2.3.1 Experimento I

2.3.1.1 Fatores experimentais

De acordo com a descrição do experimento, houve apenas um fator de tratamento, denominado *Tratamentos*, representando as doses de óleo de soja, em g. E, os fatores de parcela foram denominados por *Período*, *Animal* e *Dias*.

2.3.1.2 Estrutura experimental

Para parcelas tem-se:

$$(4\textit{Período} * 4\textit{Animal}) / 5\textit{Dias}.$$

Logo,

$$\text{Est. de parcela} = \textit{Período} + \textit{Animal} + \textit{Período:Animal} + \textit{Dias}[\textit{Período:Animal}].$$

E, para tratamentos:

$$4\textit{Tratamentos}.$$

Assim,

$$\text{Est. de tratamento} = \textit{Tratamentos}$$

2.3.1.3 Ortogonalidade entre fatores

De acordo com a Definição 25, para que o delineamento seja ortogonal devem-se ter estruturas ortogonais de tratamento e parcela. Como tem-se apenas um fator de tratamento, concluiu-se que a estrutura de tratamento é ortogonal.

Para fatores de parcela, conforme Teorema 2 os fatores: *Período* e *Período* \wedge *Animal*, *Animal* e *Período* \wedge *Animal*, *Período* e *Dias*[*Período* \wedge *Animal*], *Animal* e *Dias*[*Período* \wedge *Animal*] e, *Período* \wedge *Animal* e *Dias*[*Período* \wedge *Animal*] são ortogonais entre si. Para se afirmar que a estrutura de parcela é ortogonal deve-se mostrar a ortogonalidade entre os fatores *Período* e *Animal*. Para tanto, apresentaram-se as classes de cada fator de interesse.

Classe de *Período* contendo a subparcela 1:

$$(\text{Período})_1 = \{1, \dots, 20\} \Rightarrow p_1 = 20.$$

Classe de *Período* contendo a subparcela 21:

$$(\text{Período})_2 = \{21, \dots, 40\} \Rightarrow p_2 = 20.$$

Classe de *Período* contendo a subparcela 41:

$$(\text{Período})_3 = \{41, \dots, 60\} \Rightarrow p_3 = 20.$$

Classe de *Período* contendo a subparcela 61:

$$(\text{Período})_4 = \{61, \dots, 80\} \Rightarrow p_4 = 20.$$

Classe de *Animal* contendo a subparcela 1:

$$(\text{Animal})_1 = \{1, \dots, 5, 21, \dots, 25, 41, \dots, 45, 61, \dots, 65\} \Rightarrow q_1 = 20.$$

Classe de *Animal* contendo a subparcela 6:

$$(\text{Animal})_2 = \{6, \dots, 10, 26, \dots, 30, 46, \dots, 50, 66, \dots, 70\} \Rightarrow q_2 = 20.$$

Classe de *Animal* contendo a subparcela 11:

$$(\text{Animal})_3 = \{11, \dots, 15, 31, \dots, 35, 51, \dots, 55, 71, \dots, 75\} \Rightarrow q_3 = 20.$$

Classe de *Animal* contendo a subparcela 16:

$$(\text{Animal})_4 = \{16, \dots, 20, 36, \dots, 40, 56, \dots, 60, 76, \dots, 80\} \Rightarrow q_4 = 20.$$

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 20, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 20, \forall j = 1, 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 5, \forall i, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$5 = c_{\Delta} \cdot 20 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{\Delta} = \frac{1}{80}.$$

Sabendo-se que o supremo entre os fatores *Período* e *Animal* é o fator Universal, M e, como existe uma constante c_{Δ} para a única classe de M , pelo Teorema 3, concluiu-se que os fatores de interesse são ortogonais. E, portanto, a estrutura de parcela é ortogonal.

Basta então, verificar a veracidade do ítem (iii) da Definição 25. Quaisquer dois fatores de parcela e tratamento devem ser ortogonais entre si quando consideradas as classe sob o subespaço indexado por Ω . Assim, construiu-se o diagrama de Hasse combinado para os fatores de tratamento e parcela, apresentado na Figura 10.

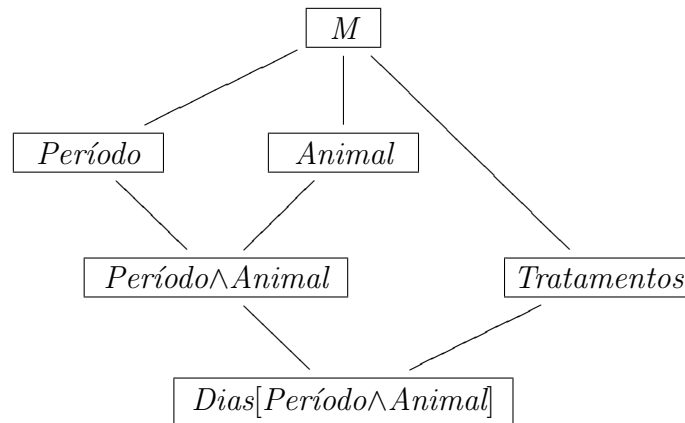


Figura 10 - Diagrama de Hasse combinado para fatores de tratamento e de parcela no Experimento I

As classes de *Tratamentos* indexadas por Ω foram dadas por:

Classe de *Tratamentos* contendo a subparcela 1:

$$(Tratamentos)_1 = \{1, \dots, 5, 26, \dots, 30, 51, \dots, 55, 76, \dots, 80\} \Rightarrow p_1 = 20.$$

Classe de *Tratamentos* contendo a subparcela 6:

$$(Tratamentos)_2 = \{6, \dots, 10, 36, \dots, 40, 41, \dots, 45, 71, \dots, 75\} \Rightarrow p_2 = 20.$$

Classe de *Tratamentos* contendo a subparcela 11:

$$(\textit{Tratamentos})_3 = \{11, \dots, 15, 21, \dots, 25, 56, \dots, 60, 66, \dots, 70\} \Rightarrow p_3 = 20.$$

Classe de *Tratamentos* contendo a subparcela 16:

$$(\textit{Tratamentos})_4 = \{16, \dots, 20, 31, \dots, 35, 46, \dots, 50, 61, \dots, 65\} \Rightarrow p_4 = 20.$$

E, as classes de *Período* \wedge *Animal* foram dadas por:

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 1:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_1 = \{1, \dots, 5\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 6:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_2 = \{6, \dots, 10\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 11:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_3 = \{11, \dots, 15\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 16:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_4 = \{16, \dots, 20\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 21:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_5 = \{21, \dots, 25\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 26:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_6 = \{26, \dots, 30\}.$$

Classe de *Período* \wedge *Animal* contendo a subparcela 31:

$$(\textit{Período} \wedge \textit{Animal})_7 = \{31, \dots, 35\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 36:

$$(Período \wedge Animal)_8 = \{36, \dots, 40\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 41:

$$(Período \wedge Animal)_9 = \{41, \dots, 45\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 46:

$$(Período \wedge Animal)_{10} = \{46, \dots, 50\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 51:

$$(Período \wedge Animal)_{11} = \{51, \dots, 55\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 56:

$$(Período \wedge Animal)_{12} = \{56, \dots, 60\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 61:

$$(Período \wedge Animal)_{13} = \{61, \dots, 65\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 66:

$$(Período \wedge Animal)_{14} = \{66, \dots, 70\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 71:

$$(Período \wedge Animal)_{15} = \{71, \dots, 75\}.$$

Classe de $Período \wedge Animal$ contendo a subparcela 76:

$$(Período \wedge Animal)_{16} = \{76, \dots, 80\}.$$

Verificou-se a ortogonalidade entre os fatores generalizados $Período$ e $Tratamentos$, $Animal$ e $Tratamentos$ e, $Período \wedge Animal$ e $Tratamentos$ conforme segue:

Para $(Período)_i$ e $(Tratamentos)_j$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = 1, \dots, 4$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 20, \forall i = 1, \dots, 4 \\ q_j = 20, \forall j = 1, \dots, 4 \\ s_{ij} = 5, \forall i = 1, \dots, 4 \text{ e } j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta} \cdot p_i \cdot q_j \\ 5 &= c_{\Delta} \cdot 20 \cdot 20 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{\Delta} = \frac{1}{80}.$$

Para $(Animal)_i$ e $(Tratamentos)_j$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = 1, \dots, 4$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 20, \forall i = 1, \dots, 4 \\ q_j = 20, \forall j = 1, \dots, 4 \\ s_{ij} = 5, \forall i = 1, \dots, 4 \text{ e } j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta} \cdot p_i \cdot q_j \\ 5 &= c_{\Delta} \cdot 20 \cdot 20 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta} = \frac{1}{80}.$$

Para $(Período \wedge Animal)_i$ e $(Tratamentos)_j$, com $i = 1, \dots, 16$ e $j = 1, \dots, 4$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 5, \forall i = 1, \dots, 16 \\ q_j = 20, \forall j = 1, \dots, 4 \\ s_{ij} = 5, \forall i = 1, \dots, 16 \text{ e } j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta} \cdot p_i \cdot q_j \\ 5 &= c_{\Delta} \cdot 5 \cdot 20 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta} = \frac{1}{20}.$$

Sabendo-se que o fator supremo para todos os casos é o próprio fator M , o qual possui apenas uma classe, e que as constantes c_{Δ} existem para os mesmos casos, concluiu-se que os fatores em questão são ortogonais entre si. E, como o fator $Dias[Período \wedge Animal]$ é marginal a todos os demais fatores, segue pelo Teorema 2 que $Dias[Período \wedge Animal]$ é ortogonal aos mesmos. Portanto, o delineamento é ortogonal.

2.3.1.4 Subespaços definidos pelos fatores e decomposição ortogonal

Uma base para V_M , subespaço definido pelo fator Universal M , deu-se por \mathbf{X}_M , a seguir:

$$\mathbf{X}_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}_{80 \times 1}.$$

As construções das bases dos demais subespaços vetoriais, definidos pelos fatores generalizados, basearam-se no croqui do experimento, apresentado na Figura 1.

Fatores de tratamento

O fator generalizado *Tratamentos* define um subespaço sobre o espaço vetorial V indexado por \mathcal{T} . Assim, uma base para o subespaço V_T , definido por *Tratamentos*, deu-se por:

$$\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{80 \times 4} .$$

Fatores de parcela

Uma base para o subespaço V_P , definido pelo fator *Período*:

$$\mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{20} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{20} \end{pmatrix}_{80 \times 4} .$$

Base para o subespaço V_A , definido pelo fator *Animal*:

$$\mathbf{X}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{80 \times 4}$$

Base para o subespaço V_{PA} , definido pelo fator $Período \wedge Animal$:

$$\mathbf{X}_{PA} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_5 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_5 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1}_5 \end{pmatrix}_{80 \times 16}$$

Como $Dias[Período \wedge Animal]$ corresponde ao fator Igualdade do experimento, uma base para o subespaço gerado pelo mesmo deu-se pela matriz Identidade de ordem 80, \mathbf{I}_{80} .

Logo, V_M , V_T , V_P , V_A , V_{PA} e V_D são os subespaços gerados pelas combinações lineares dos vetores em \mathbf{X}_M , \mathbf{X}_T , \mathbf{X}_P , \mathbf{X}_A , \mathbf{X}_{PA} , \mathbf{X}_D , respectivamente.

Sabendo-se que os subespaços acima não são ortogonais entre si, buscaram-se os subespaços \mathbf{W} 's que satisfazem tal interesse e, que são gerados pelas bases a seguir, de acordo com a Seção 4.3.

$$\mathbf{M}_{W_M} = \mathbf{X}_M(\mathbf{X}'_M \mathbf{X}_M)^{-1} \mathbf{X}'_M$$

$$\mathbf{M}_{W_T} = \mathbf{X}_T(\mathbf{X}'_T \mathbf{X}_T)^{-1} \mathbf{X}'_T$$

$$\mathbf{M}_{W_P} = \mathbf{X}_P(\mathbf{X}'_P \mathbf{X}_P)^{-1} \mathbf{X}'_P$$

$$\mathbf{M}_{W_A} = \mathbf{X}_A(\mathbf{X}'_A \mathbf{X}_A)^{-1} \mathbf{X}'_A$$

$$\mathbf{M}_{W_{PA}} = \mathbf{X}_{PA}(\mathbf{X}'_{PA} \mathbf{X}_{PA})^{-1} \mathbf{X}'_{PA}$$

$$\mathbf{M}_{W_D} = \mathbf{X}_D(\mathbf{X}'_D \mathbf{X}_D)^{-1} \mathbf{X}'_D$$

2.3.1.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

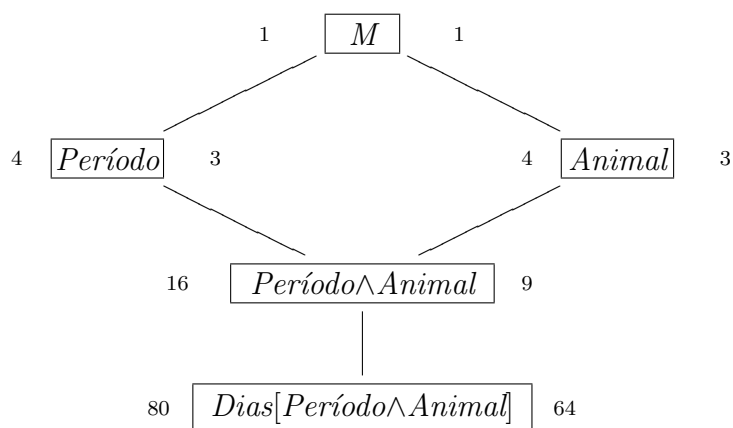


Figura 11 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores de parcela no Experimento I

Diagrama de Hasse para fatores de tratamento:

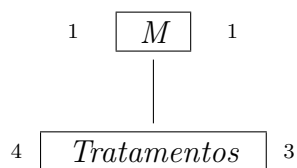


Figura 12 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de tratamento no Experimento I

2.3.1.6 Somas de quadrados

Obtenção das matrizes núcleo das formas quadráticas, ou seja, das somas de quadrados.

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

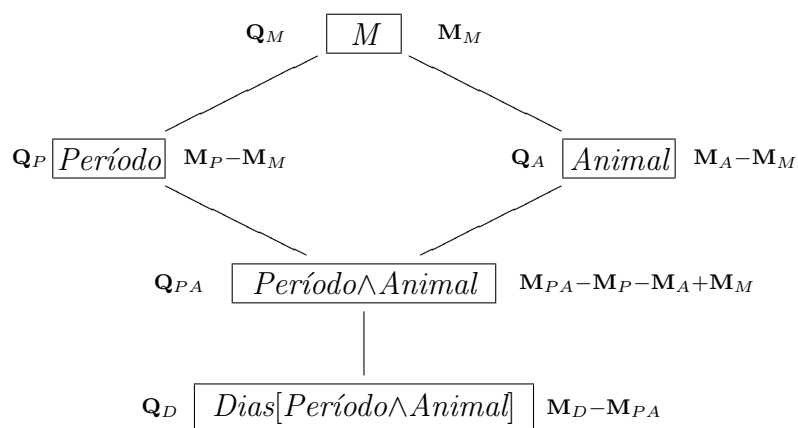


Figura 13 - Matrizes núcleo dos fatores de parcela no Experimento I

Diagrama de Hasse para fatores de tratamento:

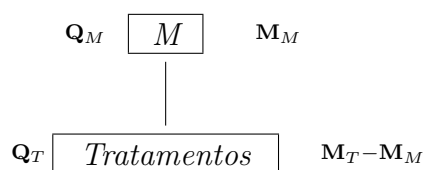


Figura 14 - Matrizes núcleo dos fatores de tratamento no Experimento I

2.3.1.7 Esperança dos quadrados médios

Os diagramas de Hasse com as contribuições para a esperança dos quadrados médios foram:

Para fatores de parcela, em que todos foram considerados aleatórios.

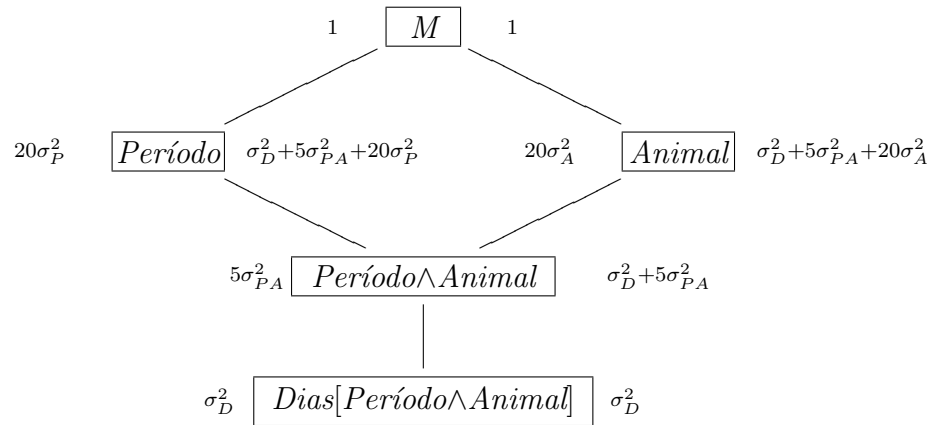


Figura 15 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento I

Para fatores de tratamento, os quais foram considerados fixos.

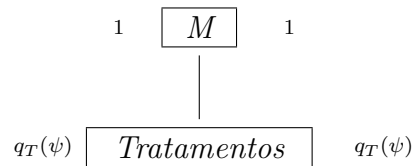


Figura 16 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de tratamento no Experimento I

2.3.1.8 Esquema da análise da variância

Sabendo-se que os tratamentos foram aplicados às parcelas, ou seja, a cada unidade da interação $Período \wedge Animal$, o esquema da análise da variância fica:

Tabela 2 - Esquema da análise da variância para o Experimento I

Fonte de variação	gl	SQ	E(QM)
Total	79		
<i>Período</i>	3	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{PY}$	$\sigma_D^2 + 5\sigma_{PA}^2 + 20\sigma_P^2$
<i>Animal</i>	3	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{AY}$	$\sigma_D^2 + 5\sigma_{PA}^2 + 20\sigma_A^2$
<i>Período</i> \wedge <i>Animal</i>	9	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{PAY}$	
<i>Tratamentos</i>	3	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{TY}$	$\sigma_D^2 + 5\sigma_{PA}^2 + q_T(\psi)$
<i>Resíduo</i>	6	por diferença	$\sigma_D^2 + 5\sigma_{PA}^2$
<i>Dias</i> [<i>Período</i> \wedge <i>Animal</i>]	64	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{DY}$	σ_D^2

2.3.2 Experimento II

2.3.2.1 Fatores experimentais

Os tratamentos do experimento em questão foram obtidos através da composição que pode ser observada na Tabela 3.

Tabela 3 - Composição dos tratamentos no Experimento II

	Testemunha	75%	50%	25%
Testemunha	T ₁			
Semeadura		T ₂	T ₃	T ₄
Germinação		T ₅	T ₆	T ₇
Perfilho		T ₈	T ₉	T ₁₀

Notou-se que o conjunto de tratamentos é composto por dois subconjuntos disjuntos,

Fatorial + tratamento adicional,

logo, criou-se um pseudo fator de tratamento, *Controle*, com dois níveis, no qual os tratamentos estão aninhados, a fim de se obter a ortogonalidade entre os fatores, o que verificou-se posteriormente.

Portanto, os fatores experimentais são: *Blocos* e *Parcelas*, fatores de parcela, e *Controle*, *Época* e *Grau*, fatores de tratamento.

2.3.2.2 Estrutura experimental

Para parcelas tem-se:

$$4\text{Blocos}/10\text{Parcelas}.$$

Logo,

$$\text{Est. de parcela} = \text{Blocos} + \text{Parcelas}[\text{Blocos}].$$

E, para tratamentos:

$$2\text{Controle}/(4\acute{E}poca*4\text{Grau}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Est. de tratamento} &= \text{Controle}/(\acute{E}poca + \text{Grau} + \acute{E}poca:\text{Grau}) \\ &= \text{Controle} + \acute{E}poca[\text{Controle}] + \text{Grau}[\text{Controle}] + \acute{E}poca:\text{Grau}[\text{Controle}]. \end{aligned}$$

2.3.2.3 Ortogonalidade entre fatores

É sabido que $\text{Parcelas} \prec \text{Blocos}$, assim pelo Teorema 2 os mesmos são ortogonais entre si. Procede do mesmo modo a ortogonalidade entre os fatores Controle e $\acute{E}poca$, Controle e Grau , $\acute{E}poca$ e $\acute{E}poca \wedge \text{Grau}$ e, Grau e $\acute{E}poca \wedge \text{Grau}$.

Para a verificação da ortogonalidade entre os fatores $\acute{E}poca$ e Grau , listaram-se as classes dos respectivos fatores e as classes de Controle , que é o fator supremo aos fatores de interesse.

Classe de $\acute{E}poca$ contendo o tratamento T_1 :

$$(\acute{E}poca)_1 = \{T_1\} \Rightarrow p_1 = 1.$$

Classe de $\acute{E}poca$ contendo o tratamento T_2 :

$$(\acute{E}poca)_2 = \{T_2, T_3, T_4\} \Rightarrow p_2 = 3.$$

Classe de $\acute{E}poca$ contendo o tratamento T_5 :

$$(\acute{E}poca)_3 = \{T_5, T_6, T_7\} \Rightarrow p_3 = 3.$$

Classe de *Época* contendo o tratamento T_8 :

$$(\acute{E}poca)_4 = \{T_8, T_9, T_{10}\} \Rightarrow p_4 = 3.$$

Classe de *Grau* contendo o tratamento T_1 :

$$(Grau)_1 = \{T_1\} \Rightarrow q_1 = 1.$$

Classe de *Grau* contendo o tratamento T_2 :

$$(Grau)_2 = \{T_2, T_5, T_8\} \Rightarrow q_2 = 3.$$

Classe de *Grau* contendo o tratamento T_3 :

$$(Grau)_3 = \{T_3, T_6, T_9\} \Rightarrow q_3 = 3.$$

Classe de *Grau* contendo o tratamento T_4 :

$$(Grau)_4 = \{T_4, T_7, T_{10}\} \Rightarrow q_4 = 3.$$

Classe de *Controle* contendo o tratamento T_1 :

$$(Controle)_1 = \{T_1\}.$$

Classe de *Controle* contendo o tratamento T_2 :

$$(Controle)_2 = \{T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}.$$

As interseções entre as classes de *Época* e *Grau* são dadas por:

Para $(Controle)_1$:

$$s_{11} = 1, p_1 = 1, q_1 = 1 \text{ e } \forall i, j \neq 1 \ s_{ij} = 0.$$

$$\Rightarrow 1 = c_{\Delta_1} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow c_{\Delta_1} = 1.$$

Para $(Controle)_2$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 3, \forall i = 2, 3, 4 \\ q_j = 3, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 1, \forall i, j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$1 = c_{\Delta_2} \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{\Delta_2} = \frac{1}{9}.$$

Assim, existe uma constante $c_{\Delta_1} = 1$ para a primeira classe de *Controle* e existe uma segunda constante $c_{\Delta_2} = \frac{1}{9}$ para a segunda classe de *Controle*. Logo, verificou-se que os fatores *Época* e *Grau* são ortogonais. Portanto, o experimento apresenta estrutura ortogonal de parcela e de tratamento.

De acordo com a Definição 25, para comprovar que o delineamento utilizado trata-se de um delineamento ortogonal deve-se ainda, verificar as condições apresentadas no item (iii).

Notou-se que a relação de marginalidade entre os fatores de tratamento não se altera quando considerado o subespaço indexado por Ω . Assim, bastou assegurar a ortogonalidade entre os fatores *Época* e *Grau*. Para tanto, organizaram-se os dados conforme a Tabela 4 e foram reescritas as classes dos fatores de tratamento.

Tabela 4 - Organização dos dados do Experimento II, informando o número da parcela (índice) e o tratamento alocado a mesma

Bloco I	T _{1 1}	T _{2 2}	T _{3 3}	T _{4 4}	T _{5 5}	T _{6 6}	T _{7 7}	T _{8 8}	T _{9 9}	T _{10 10}
Bloco II	T _{1 11}	T _{2 12}	T _{3 13}	T _{4 14}	T _{5 15}	T _{6 16}	T _{7 17}	T _{8 18}	T _{9 19}	T _{10 20}
Bloco III	T _{1 21}	T _{2 22}	T _{3 23}	T _{4 24}	T _{5 25}	T _{6 26}	T _{7 27}	T _{8 28}	T _{9 29}	T _{10 30}
Bloco IV	T _{1 31}	T _{2 32}	T _{3 33}	T _{4 34}	T _{5 35}	T _{6 36}	T _{7 37}	T _{8 38}	T _{9 39}	T _{10 40}

Classe de *Época* contendo a parcela 1:

$$(\textit{Época})_1 = \{1, 11, 21, 31\} \Rightarrow p_1 = 4.$$

Classe de *Época* contendo a parcela 2:

$$(\acute{E}poca)_2 = \{2, 3, 4, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 32, 33, 34\} \Rightarrow p_2 = 12.$$

Classe de *Época* contendo a parcela 5:

$$(\acute{E}poca)_3 = \{5, 6, 7, 15, 16, 17, 25, 26, 27, 35, 36, 37\} \Rightarrow p_3 = 12.$$

Classe de *Época* contendo a parcela 8:

$$(\acute{E}poca)_4 = \{8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, 38, 39, 40\} \Rightarrow p_4 = 12.$$

Classe de *Grau* contendo a parcela 1:

$$(Grau)_1 = \{1, 11, 21, 31\} \Rightarrow q_1 = 4.$$

Classe de *Grau* contendo a parcela 2:

$$(Grau)_2 = \{2, 5, 8, 12, 15, 18, 22, 25, 28, 32, 35, 38\} \Rightarrow q_2 = 12.$$

Classe de *Grau* contendo a parcela 3:

$$(Grau)_3 = \{3, 6, 9, 13, 16, 19, 23, 26, 29, 33, 36, 39\} \Rightarrow q_3 = 12.$$

Classe de *Grau* contendo a parcela 4:

$$(Grau)_4 = \{4, 7, 10, 14, 17, 20, 24, 27, 30, 34, 37, 40\} \Rightarrow q_4 = 12.$$

Classe de *Controle* contendo a parcela 1:

$$(Controle)_1 = \{1, 11, 21, 31\}.$$

Classe de *Controle* contendo a parcela 2:

$$(Controle)_2 = \{2, \dots, 10, 12, \dots, 20, 22, \dots, 30, 32, \dots, 40\}.$$

As interseções entre as classes de *Época* e *Grau* são dadas por:

Para $(Controle)_1$:

$$s_{11} = 4, p_1 = 4, q_1 = 4 \text{ e } \forall i, j \neq 1 \ s_{ij} = 0.$$

$$\Rightarrow 4 = c_{\Delta_1} \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow c_{\Delta_1} = \frac{1}{4}.$$

Para $(Controle)_2$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 12, \forall i = 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 4, \forall i, j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$4 = c_{\Delta_2} \cdot 12 \cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{\Delta_2} = \frac{1}{36}.$$

Como existem as constantes para cada classe de *Controle*, concluiu-se que os fatores *Época* e *Grau* são ortogonais. Logo, verificou-se que os fatores de tratamentos permanecem ortogonais entre si quando consideradas as classes sob o subespaço indexado por Ω .

Construiu-se o diagrama de Hasse combinado para os fatores de tratamento e parcela, apresentado na Figura 17.

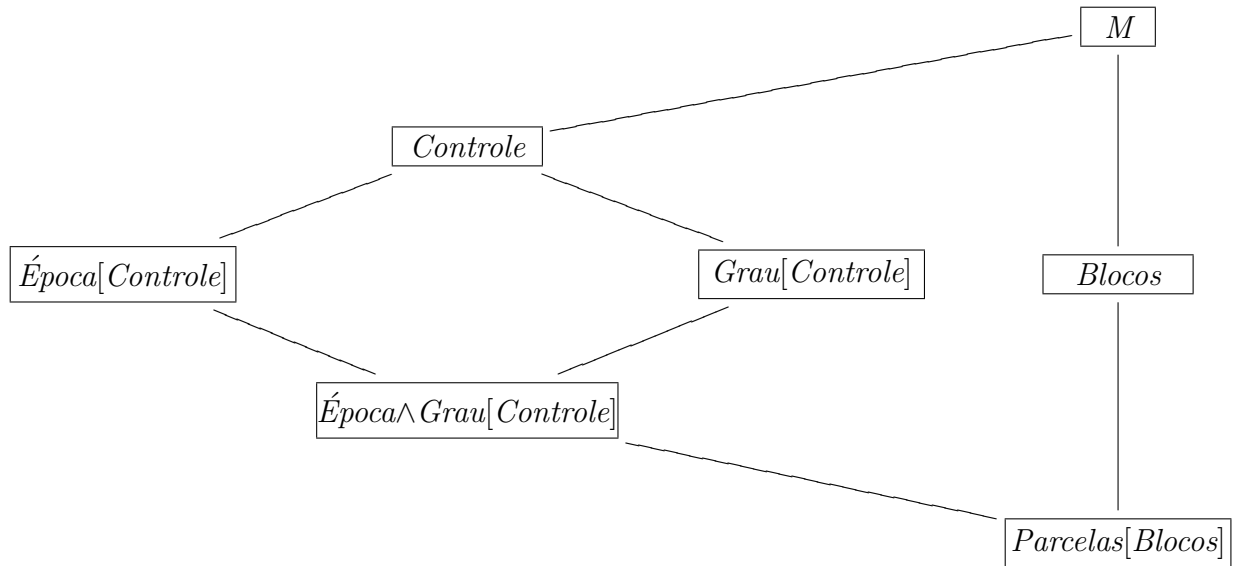


Figura 17 - Diagrama de Hasse combinado para fatores de tratamento e de parcela no Experimento II

Notou-se que o supremo entre quaisquer dois fatores de tratamento e parcela, será sempre o fator Universal, M , que por definição possui uma classe para todas as parcelas, em Ω . Cabe salientar que, $Parcelas[Blocos]$ é o fator igualdade do experimento, ou seja, $Parcelas[Blocos]$ possui uma classe para cada parcela.

As classes de $Blocos$ e $Época^Grau[Controle]$ são descritas a seguir:

Classe de $Blocos$ contendo a parcela 1:

$$(Blocos)_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Classe de $Blocos$ contendo a parcela 11:

$$(Blocos)_2 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Classe de $Blocos$ contendo a parcela 21:

$$(Blocos)_3 = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

Classe de $Blocos$ contendo a parcela 31:

$$(Blocos)_4 = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 1:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_1 = \{1, 11, 21, 31\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 2:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_2 = \{2, 12, 22, 32\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 3:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_3 = \{3, 13, 23, 33\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 4:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_4 = \{4, 14, 24, 34\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 5:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_5 = \{5, 15, 25, 35\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 6:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_6 = \{6, 16, 26, 36\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 7:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_7 = \{7, 17, 27, 37\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 8:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_8 = \{8, 18, 28, 38\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 9:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_9 = \{9, 19, 29, 39\}.$$

Classe de $\acute{E}poca \wedge Grau[Controle]$ contendo a parcela 10:

$$(\acute{E}poca \wedge Grau[Controle])_{10} = \{10, 20, 30, 40\}.$$

Verificou-se, conforme segue, a ortogonalidade entre os fatores generalizados *Blocos* e *Época*[*Controle*], *Blocos* e *Grau*[*Controle*] e, *Blocos* e *Época*∧*Grau*[*Controle*].

Para $(\text{Blocos})_i$ e $(\text{Época})_1$, com $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} s_{i1} &= c_{\Delta_1} \cdot p_i \cdot q_1 \\ 1 &= c_{\Delta_1} \cdot 10 \cdot 4 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta_1} = \frac{1}{40}.$$

Para $(\text{Blocos})_i$ e $(\text{Época})_j$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = 2, 3, 4$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 3, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta_2} \cdot p_i \cdot q_j \\ 3 &= c_{\Delta_2} \cdot 10 \cdot 12 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{\Delta_2} = \frac{1}{40}.$$

De modo análogo,

Para $(\text{Blocos})_i$ e $(\text{Grau})_1$, com $i = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} s_{i1} &= c_{\Delta_1} \cdot p_i \cdot q_1 \\ 1 &= c_{\Delta_1} \cdot 10 \cdot 4 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_{\Delta_1} = \frac{1}{40}.$$

Para $(Blocos)_i$ e $(Grau)_j$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = 2, 3, 4$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 12, \forall j = 2, 3, 4 \\ s_{ij} = 3, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 2, 3, 4 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta_2} \cdot p_i \cdot q_j \\ 3 &= c_{\Delta_2} \cdot 10 \cdot 12 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{\Delta_2} = \frac{1}{40}.$$

Ainda,

Para $(Blocos)_i$ e $(\acute{E}poca \wedge Grau[Control])_j$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = 1, \dots, 10$:

$$\text{Como, } \begin{cases} p_i = 10, \forall i = 1, 2, 3, 4 \\ q_j = 5, \forall j = 1, \dots, 10 \\ s_{ij} = 1, \forall i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } j = 1, \dots, 10 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= c_{\Delta} \cdot p_i \cdot q_j \\ 1 &= c_{\Delta} \cdot 10 \cdot 5 \end{aligned}$$

Então,

$$c_{\Delta} = \frac{1}{50}.$$

Como a constante c_{Δ} existe para os dois casos, concluiu-se que o fator *Blocos* é ortogonal aos fatores *Época*, *Grau* e *Época* \wedge *Grau*[*Control*]. Pelo Corolário 1, concluiu-se que os fatores *Control* e *Blocos* são ortogonais entre si. E, como o fator *Parcelas* é marginal a todos os demais fatores, pelo Teorema 2, *Parcelas* é ortogonal aos mesmos. Portanto, confirmou-se que o delineamento em questão é ortogonal.

2.3.2.4 Subespaços definidos pelos fatores e decomposição ortogonal

Sabendo-se que existe um fator M , Universal, tanto de parcela quanto de tratamento, uma base para V_M deu-se por \mathbf{X}_M :

$$\mathbf{X}_M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}_{40 \times 1}$$

e V_M é o subespaço gerado por \mathbf{X}_M , portanto, V_M é a combinação linear dos vetores em \mathbf{X}_M .

Fatores de tratamento:

Os fatores generalizados $Controle$, $Época[Controle]$, $Grau[Controle]$ e $Época \wedge Grau[Controle]$, definem subespaços sobre o espaço vetorial V indexado por \mathcal{T} . Logo, uma base para o subespaço definido pelo fator $Controle$, V_C , deu-se por:

$$\mathbf{X}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{40 \times 2}$$

Uma base para o subespaço V_B , definido pelo fator $\acute{E}poca[Controle]$:

$$\mathbf{X}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 4} .$$

Base para o subespaço V_G , definido pelo fator $Grau[Controle]$:

$$\mathbf{X}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 4}$$

Base para o subespaço definido pelo fator $\acute{E}poca \wedge Grau[Control]$:

$$\mathbf{X}_{EG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{40 \times 10}$$

Então, V_C é o subespaço gerado por \mathbf{X}_C , logo V_C é composto pelos vetores que são combinações lineares dos vetores em \mathbf{X}_C .

De modo análogo definiram-se V_E , V_G e V_{EG} , os quais são subespaços gerados por \mathbf{X}_E , \mathbf{X}_G e \mathbf{X}_{EG} , respectivamente.

Fatores de parcela:

Os fatores generalizados *Blocos* e *Parcelas[Blocos]* definem subespaços sobre o espaço vetorial V indexado por Ω . Assim, uma base para o subespaço definido por *Blocos* foi dada por:

$$\mathbf{X}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{40 \times 4}$$

Logo, V_B é o subespaço gerado pela base \mathbf{X}_B , isto é, V_B é descrito pela combinação linear de \mathbf{X}_B .

E uma base para o subespaço definido pelo fator *Parcelas[Blocos]* é dada pela matriz Identidade de ordem 40 (\mathbf{I}_{40}), uma vez que *Parcelas[Blocos]* é o fator Igualdade, ou seja, possui uma classe para cada parcela. Sendo assim, V_P é gerado por \mathbf{I}_{40} .

O interesse esteve na obtenção de subespaços ortogonais, uma vez que V_B não é ortogonal a V_P e V_C , V_E , V_G e V_{EG} também não são ortogonais entre si, pois $V_B \subset V_P$, $V_C \subset V_E$, $V_C \subset V_G$, $V_C \subset V_{EG}$, $V_E \subset V_{EG}$ e $V_G \subset V_{EG}$, ou seja, as interseções dos subespaços indexados por Ω , bem como por \mathcal{T} diferem de $\{\mathbf{o}\}$.

Assim, buscaram-se subespaços W 's, ortogonais entre si, que de acordo com a Seção 4.3, são gerados pelas seguintes bases:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{W_M} &= \mathbf{X}_M(\mathbf{X}'_M\mathbf{X}_M)^{-1}\mathbf{X}'_M \\ \mathbf{M}_{W_B} &= \mathbf{X}_B(\mathbf{X}'_B\mathbf{X}_B)^{-1}\mathbf{X}'_B \\ \mathbf{M}_{W_P} &= \mathbf{X}_P(\mathbf{X}'_P\mathbf{X}_P)^{-1}\mathbf{X}'_P \\ \mathbf{M}_{W_C} &= \mathbf{X}_C(\mathbf{X}'_C\mathbf{X}_C)^{-1}\mathbf{X}'_C \\ \mathbf{M}_{W_E} &= \mathbf{X}_E(\mathbf{X}'_E\mathbf{X}_E)^{-1}\mathbf{X}'_E \\ \mathbf{M}_{W_G} &= \mathbf{X}_G(\mathbf{X}'_G\mathbf{X}_G)^{-1}\mathbf{X}'_G \\ \mathbf{M}_{W_{EG}} &= \mathbf{X}_{EG}(\mathbf{X}'_{EG}\mathbf{X}_{EG})^{-1}\mathbf{X}'_{EG} \end{aligned}$$

2.3.2.5 Diagrama de Hasse e número de graus de liberdade

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

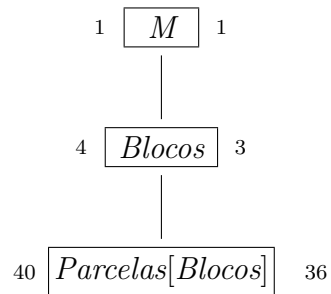


Figura 18 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento II

Diagrama de Hasse para fatores de tratamento:

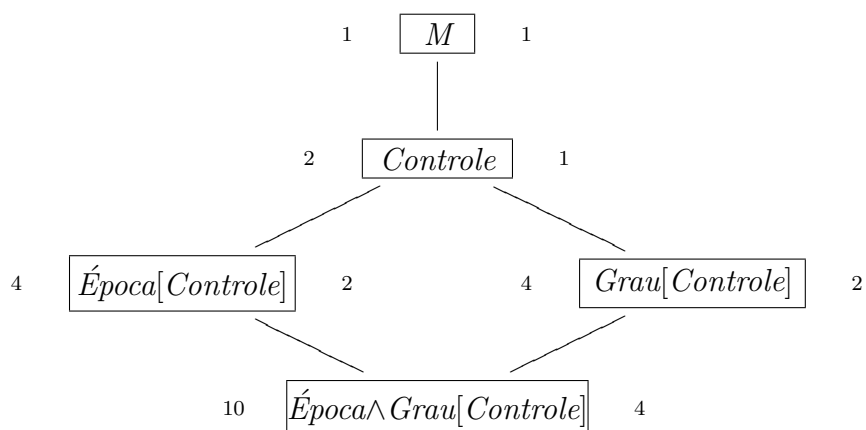


Figura 19 - Números de graus de liberdade no diagrama de Hasse para os fatores de tratamento no Experimento II

2.3.2.6 Somas de quadrados

Obtenção das matrizes núcleo das formas quadráticas, ou seja, das somas de quadrados.

Diagrama de Hasse para fatores de parcela:

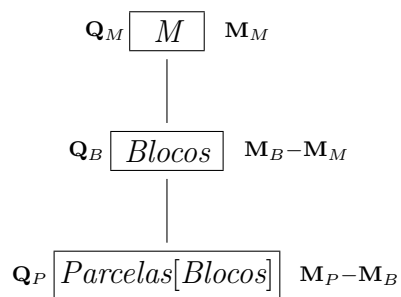


Figura 20 - Matrizes núcleo dos fatores de parcela no Experimento II

Diagrama de Hasse para fatores de tratamento:

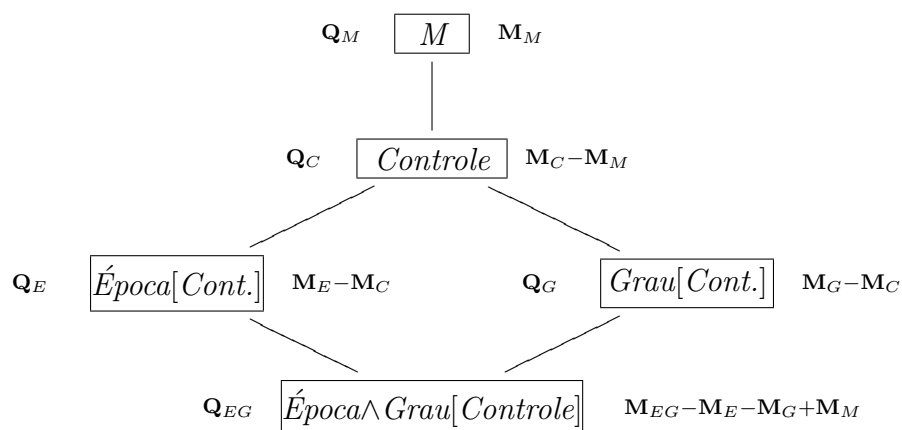


Figura 21 - Matrizes núcleo dos fatores de tratamento no Experimento II

2.3.2.7 Esperança dos quadrados médios

Os diagramas de Hasse com as contribuições para a esperança dos quadrados médios foram:

Para fatores de parcela, em que todos foram considerados aleatórios.

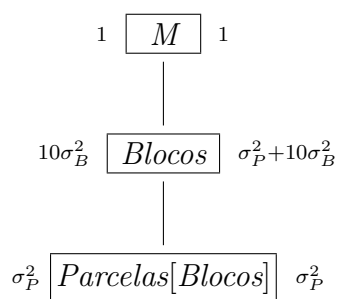


Figura 22 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de parcela no Experimento II

Para fatores de tratamento, os quais foram considerados fixos.

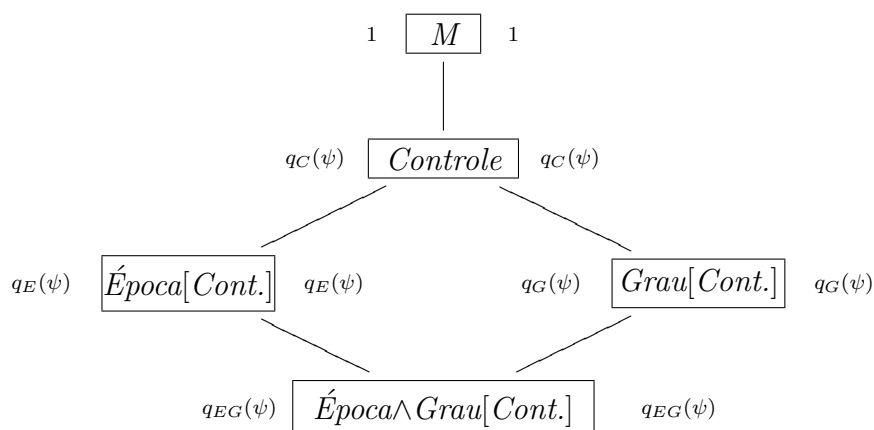


Figura 23 - Contribuições para as esperanças dos quadrados médios no diagrama de Hasse para fatores de tratamento no Experimento II

2.3.2.8 Esquema da análise da variância

Como todos os fatores de tratamento foram alocados às parcelas (*Parcelas*), o esquema da tabela da análise da variância fica:

Tabela 5 - Esquema da análise da variância para o Experimento II

Fonte de variação	gl	SQ	E(QM)
Total	39		
<i>Blocos</i>	3	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_B\mathbf{y}$	$\sigma_P^2 + 10\sigma_B^2$
<i>Parcelas</i> [<i>Blocos</i>]	36	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_P\mathbf{y}$	
<i>Controle</i>	1	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_C\mathbf{y}$	$\sigma_P^2 + q_C(\psi)$
<i>Época</i> [<i>Controle</i>]	2	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_E\mathbf{y}$	$\sigma_P^2 + q_E(\psi)$
<i>Grau</i> [<i>Controle</i>]	2	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_G\mathbf{y}$	$\sigma_P^2 + q_G(\psi)$
<i>Época</i> [<i>Controle</i>] \wedge <i>Grau</i> [<i>Controle</i>]	4	$\mathbf{y}'\mathbf{Q}_{EG}\mathbf{y}$	$\sigma_P^2 + q_{EG}(\psi)$
Resíduo	27	por diferença	σ_P^2

3 CONCLUSÕES

O presente estudo confirmou a praticidade das técnicas propostas pelo diagrama de Hasse bem como fundamentou, de modo algébrico, suas regras encontradas na literatura.

O primeiro experimento apresentou uma estrutura de parcela não trivial, o mesmo ocorreu para a estrutura de tratamento do segundo experimento. Ambos foram analisados com o auxílio de tais regras, evidenciando assim a estrutura do diagrama como a ferramenta facilitadora, fazendo com que fossem calculadas, de forma prática, as quantidades desejadas.

Em contrapartida, uma dificuldade encontrada foi demonstrar a ortogonalidade de ambos os delineamentos. Esta dificuldade pode ser maior ou menor de acordo com o número de fatores generalizados do experimento e a variação em sua estrutura.

Os resultados obtidos pelo software R e pelo diagrama de Hasse foram os mesmos, um indicativo de que tal diagrama é também um instrumento de comparação, pelo qual se pode verificar o testador adequado de cada fator de interesse, não substituindo assim a utilização de softwares estatísticos.

Vale ressaltar a importância em se utilizar ferramentas aplicáveis a experimentos desbalanceados, uma vez que perda de observações são ocorrências comuns na experimentação. Uma proposta para estudos futuros é a verificação, e se possível a construção, de novas regras que satisfaçam tal necessidade.

REFERÊNCIAS

BAILEY, R.A. Hasse diagrams in designed experiments: a pictorial aid to thinking about blocking, stratification, degrees of freedom, randomization, and analysis of variance. In: SIMPÓSIO DE ESTATÍSTICA APLICADA À EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA, 11., Londrina, 2005. **Minicurso**. Londrina: UEL, 2005. 96p.

BRIEN, C.J. Determining the analysis of variance table. In: ——— **Statistical Modelling**. Disponível em: <<http://chris.brien.name/ee2/course/SM06.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2007.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6.ed. São Paulo: Atual Editora Ltda., 1993. 352p.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Tradução de A.P. Bergamasco. São Paulo: Editora Polígono, 1971. 356p.

LOHR, S.L. Hasse Diagram in Statistical Consulting and Teaching. **The American Statistician**, New York, v. 39, n. 4, p. 376-381, Nov. 1981.

MACHADO, A. de A. et al. Estatística Experimental Uma Abordagem Baseada no Planejamento e no Uso de Recursos Computacionais. In: SIMPÓSIO DE ESTATÍSTICA APLICADA À EXPERIMENTAÇÃO AGRONÔMICA, 11., 2005, Londrina. **Minicurso**. Londrina: UEL, 2005. 300p.

MONTGOMERY, D.C. **Design and Analysis of Experiments**. 5.ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. 684p.

PEARCE, S.C. **The Agricultural Field Experiment: A Statistical Examination of Theory and Practice**. 1st.ed. Chichester: John Wiley, 1983. 335p.

R. **R Foundation for Statistical Computing Version 2.5.0**. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 12 abril 2007.

TAYLOR Jr., W.H.; HILTON, H.G. A Structure Diagram Symbolization for Analysis of Variance. **The American Statistician**, New York, v. 35, n. 2, p. 85-93, May 1981.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Subrotina R para a obtenção da análise do Experimento I

```
> prod.aov <- aov(Leite ~ (Periodo*Animal)/Dias + Tratamentos +
+ Error((Periodo*Animal)/Dias), prod.dat)
Warning message:
Error() model is singular in: aov(Leite ~ (Periodo * Animal)/Dias +
Tratamentos + Error((Periodo *
> summary(prod.aov)
```

```
Error: Periodo
      Df Sum Sq Mean Sq
Periodo  3 5.0631  1.6877
```

```
Error: Animal
      Df Sum Sq Mean Sq
Animal  3 40.133  13.378
```

```
Error: Periodo:Animal
      Df Sum Sq Mean Sq
Tratamentos  3 0.5040  0.1680
Periodo:Animal  6 5.5797  0.9299
```

```
Error: Periodo:Animal:Dias
      Df Sum Sq Mean Sq
Periodo:Animal:Dias 64 4.3262  0.0676
```

```
## SOLUÇÃO PELAS MATRIZES ##
```

```
> Xm = matrix(c(rep(c(1),times=80)),80,1)
> Mm=Xm%>%solve(t(Xm)%*%Xm)%*%t(Xm);
> SQm=t(prod.dat$Leite)%*%Mm%*%prod.dat$Leite ; SQm
      [,1]
[1,] 1076.668
>
> Xp = matrix(c(rep(c(1,0,0,0),times=20),
+             rep(c(0,1,0,0),times=20),
+             rep(c(0,0,1,0),times=20),
+             rep(c(0,0,0,1),times=20)), 80,4,byrow=T)
> Mp=Xp%>%solve(t(Xp)%*%Xp)%*%t(Xp);
> Qp = Mp-Mm;
> SQp = t(prod.dat$Leite)%*%Qp%*%prod.dat$Leite; SQp
      [,1]
[1,] 5.06308
>
> Xa = matrix(rep(c(rep(c(1,0,0,0),times=5),
+                 rep(c(0,1,0,0),times=5),
```

```

+             rep(c(0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1),times=5)),times=4),80,4,byrow=T)
> Ma=Xa%*%solve(t(Xa)%*%Xa)%*%t(Xa);
> Qa = Ma-Mm;
> SQa = t(prod.dat$Leite)%*%Qa%*%prod.dat$Leite ;SQa
      [,1]
[1,] 40.13318
>
> Xpa = matrix(c(rep(c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1),times=5)),
+             80,16,byrow=T)
> Mpa=Xpa%*%solve(t(Xpa)%*%Xpa)%*%t(Xpa);
> Qpa = Mpa-Mp-Ma+Mm;
> SQpa = t(prod.dat$Leite)%*%Qpa%*%prod.dat$Leite ;SQpa
      [,1]
[1,] 6.08366
>
> Xd = diag(x=1,80,80)
> Md = Xd%*%solve(t(Xd)%*%Xd)%*%t(Xd)
> Qd = Md - Mpa;
> SQd = t(prod.dat$Leite)%*%Qd%*%prod.dat$Leite; SQd
      [,1]
[1,] 4.326217
>
> Xt = matrix(c(rep(c(1,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(0,1,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1),times=5),
+             rep(c(0,1,0,0),times=5),
+             rep(c(1,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1),times=5),

```



```

+             rep(c(0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1),times=5),
+             rep(c(1,0,0,0),times=5),
+             rep(c(0,1,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,0,1),times=5),
+             rep(c(0,1,0,0),times=5),
+             rep(c(0,0,1,0),times=5),
+             rep(c(1,0,0,0),times=5)),80,4,byrow=T)
> Mt=Xt%%solve(t(Xt)%%Xt)%%t(Xt);
> Qt = Mt-Mm;
> SQt = t(prod.dat$Leite)%%Qt%%prod.dat$Leite; SQt
      [,1]
[1,] 0.5039654
> SQr = SQpa - SQt; SQr
      [,1]
[1,] 5.579694
> Qr = Qpa - Qt
> SQr = t(prod.dat$Leite)%%Qr%%prod.dat$Leite ; SQr
      [,1]
[1,] 5.579694

```

APÊNDICE B - Subrotina R para a obtenção da análise do Experimento II

```
> prod.aov <- aov(Folha ~ Blocos + Controle +
(Controle/Epoca)*(Controle/Grau) +Error(Blocos/Plots), prod.dat)
```

Warning message:

```
Error() model is singular in: aov(Folha ~ Blocos + Controle +
(Controle/Epoca) * (Controle/Grau) +
```

```
> summary(prod.aov)
```

Error: Blocos

	Df	Sum Sq	Mean Sq
Blocos	3	19.935	6.645

Error: Blocos:Plots

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Controle	1	1.638	1.638	0.5592	0.4610274
Controle:Epoca	2	27.352	13.676	4.6706	0.0181137 *
Controle:Grau	2	55.812	27.906	9.5303	0.0007387 ***
Controle:Epoca:Grau	4	16.528	4.132	1.4111	0.2570243
Residuals	27	79.059	2.928		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

SOLUÇÃO PELAS MATRIZES

```
> Xm = matrix(c(rep(c(1),times=40)),40,1)
```

```
> Mm=Xm%*%solve(t(Xm)%*%Xm)%*%t(Xm);
```

```
> SQm=t(prod.dat$Folha)%*%Mm%*%prod.dat$Folha
```

```
>
```

```
> Xc = matrix(rep(c(1,0,rep(c(0,1),times=9))),times=4),40,2,byrow=T)
```

```
> Mc=Xc%*%solve(t(Xc)%*%Xc)%*%t(Xc);
```

```
> Qc = Mc-Mm;
```

```
> SQc = t(prod.dat$Folha)%*%Qc%*%prod.dat$Folha; SQc
```

```
[,1]
```

```
[1,] 1.637551
```

```
>
```

```
> Xe = matrix(rep(c(1,0,0,0,rep(c(0,1,0,0),times=3),
```

```
+ rep(c(0,0,1,0),times=3),
```

```
+ rep(c(0,0,0,1),times=3)),times=4),40,4,byrow=T)
```

```
> Me=Xe%*%solve(t(Xe)%*%Xe)%*%t(Xe);
```

```
> Qe = Me-Mc;
```

```
> SQe = t(prod.dat$Folha)%*%Qe%*%prod.dat$Folha ;SQe
```

```
[,1]
```

```
[1,] 27.35244
```

```
>
```

```
> Xg = matrix(rep(c(1,0,0,0,
```

```

+           0,1,0,0,
+           0,0,1,0,
+           0,0,0,1,
+           0,1,0,0,
+           0,0,1,0,
+           0,0,0,1,
+           0,1,0,0,
+           0,0,1,0,
+           0,0,0,1),times=4),40,4,byrow=T)
> Mg=Xg%*%solve(t(Xg)%*%Xg)%*%t(Xg);
> Qg = Mg-Mc;
> SQg = t(prod.dat$Folha)%*%Qg%*%prod.dat$Folha; SQg
      [,1]
[1,] 55.81207
>
> Xeg = matrix(rep(c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
+           0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
+           0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
+           0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
+           0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
+           0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
+           0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
+           0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,
+           0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,
+           0,0,0,0,0,0,0,0,0,1),times=4),40,10,byrow=T)
> Meg=Xeg%*%solve(t(Xeg)%*%Xeg)%*%t(Xeg);
> Qeg = Meg-Me-Mg+Mc;
> SQeg = t(prod.dat$Folha)%*%Qeg%*%prod.dat$Folha; SQeg
      [,1]
[1,] 16.52783
>
>
> Xb = matrix(c(rep(c(1,0,0,0),times=10),
+           rep(c(0,1,0,0),times=10),
+           rep(c(0,0,1,0),times=10),
+           rep(c(0,0,0,1),times=10)),40,4,byrow=T)
> Mb=Xb%*%solve(t(Xb)%*%Xb)%*%t(Xb);
> Qb = Mb-Mm;
> SQb = t(prod.dat$Folha)%*%Qb%*%prod.dat$Folha; SQb
      [,1]
[1,] 19.93509
>
> Xp = diag(x=1,40,40)
> Mp = Xp%*%solve(t(Xp)%*%Xp)%*%t(Xp)
> Qp = Mp - Mm;
> SQp = t(prod.dat$Folha)%*%Qp%*%prod.dat$Folha ; SQp

```

```
      [,1]
[1,] 200.3244
>
> SQr = SQp - SQb - SQc - SQe - SQg - SQeg; SQr
      [,1]
[1,] 79.05941
> Qr = Qp - Qb - Qc - Qe - Qg - Qeg
> SQr = t(prod.dat$Folha)%*%Qr%*%prod.dat$Folha ; SQr
      [,1]
[1,] 79.05941
```