

Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

Modelos autorregressivos e de médias móveis espaço-temporais
(STARMA) aplicados a dados de temperatura

Natália da Silva Martins

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestra
em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agrônômica

Piracicaba
2013

Natália da Silva Martins
Bacharel em Estatística

**Modelos autoregressivos e de médias móveis espaço-temporais
(STARMA) aplicados a dados de temperatura**

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:
Prof. Dr. **VITOR AUGUSTO OZAKI**

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestra
em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experi-
mentação Agronômica

**Piracicaba
2013**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP**

Martins, Natália da Silva

Modelos autoregressivos e de médias móveis espaço-temporais (STARMA) aplicados a dados de temperatura / Natália da Silva Martins.- - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2013.
117 p: il.

Dissertação (Mestrado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2013.

1. SARIMA
2. STARMA
3. Correlação espaço-temporal
4. Matriz de ponderação

CDD 631.56
M386m

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

A Deus, pelo dom da vida.

*Aos meus pais, Paulo e Terezinha, pelo amor e
motivação; a quem devo, abaixo de Deus, a minha
existência.*

*Aos meus padrinhos, José e Celina, pela dedicação e
carinho.*

*À minha irmã que esteve sempre presente em todas as
jornadas.*

*Ao meu sobrinho Paulo Augusto, pelas alegrias trazidas
com sua chegada.*

*Com amor, **DEDICO***

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo entendimento e equilíbrio em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, que me permitiram a vida e caminharam comigo. Meu pai-herói, Paulo, incansável na construção desta herança e minha mãe, Maria Terezinha, que abdicou sua vida em favor da minha e de minha irmã e que por muitas vezes não reconheci este esforço.

Aos meus padrinhos, José Aparecido e Celina, por todo apoio, dedicação e pelo imenso carinho.

À minha maravilhosa irmã, Ana Paula, por toda amizade e companheirismo.

Ao meu sobrinho, Paulo, que chegou em nossas vidas trazendo muitas alegrias.

Aos amigos Thiago Gentil, Gabriel de Lemos e Alessandra dos Santos, com quem fiz laços de amizade desde os primeiros dias. Trocando saberes, conhecimentos, experiências, estudamos muito e nos divertimos muito durante esses dois anos.

Aos amigos, Tiago Santana, Kellen Rocha, Lucas Santana, Elisângela, Danilo Sarti e Fernando Toledo por estarem sempre ao meu lado me ouvindo, apoiando e claro puxando a orelha quando necessário.

À você Erik Augusto, por estar sempre a meu lado acreditando em meus sonhos e apoiando-me para torná-los realidade.

Ao Professor Dr. Vitor Augusto Ozaki, pela excelente orientação, amizade e por sempre acreditar em mim.

Ao Guilherme Biz e Davi Butturi por toda ajuda com a parte computacional e pela amizade adquirida ao longo deste trabalho.

As professoras Margareth Udo, Rosângela Getirana Santana e Eniuce Menezes de Souza que desde o início me incentivaram e apoiaram a seguir nos estudos.

À Luciane Branjão meu reconhecido obrigada.

Ao Eduardo Bonilha e o Jorge agradeço pelos inúmeros cafés, conversas de desabafo, conselhos e acima de tudo pela grande amizade.

À todos os professores do Programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica minha eterna gratidão pelos conhecimentos passados.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento desta pesquisa.

À Divisão técnica de atendimento à comunidade (DVATCOM), em especial a senhora Áurea e a senhora Solange.

Meus agradecimentos a todo o apoio desses anjos, pois sem eles não alcançaria esta bênção, esta promessa de Deus em minha vida.

*“Mantenha seus pensamentos positivos, porque
seus pensamentos tornam-se suas palavras.
Mantenha suas palavras positivas, porque suas
palavras tornam-se suas atitudes. Mantenha
suas atitudes positivas, porque suas atitudes
tornam-se seus hábitos. Mantenha seus
hábitos positivos, porque seus hábitos
tornam-se seus valores. Mantenha seus
valores positivos, porque seus valores...
Tornam-se seu destino. ”*

Mahatma Gandhi

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	17
LISTA DE SÍMBOLOS	18
1 INTRODUÇÃO	21
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1 Modelo de Médias Móveis $MA(q)$	27
2.2 Modelo Autoregressivo $AR(p)$	27
2.3 Modelos Mistos $ARMA(p, q)$	28
2.4 Modelo $ARIMA(p, d, q)$	28
2.5 Modelos Sazonais	29
2.6 Modelos da classe STARMA	30
2.7 Estudos utilizando a classe de modelos SARIMA	35
2.8 Estudos utilizando a classe de modelos STARMA	36
3 MATERIAIS E MÉTODOS	41
3.1 Metodologia de Box-Jenkins para modelos da classe ARIMA	41
3.1.1 Procedimentos para identificação	41
3.1.2 Procedimentos para estimação	43
3.1.3 Diagnóstico do modelo identificado	45
3.1.4 Previsão	46
3.2 Extensão da metodologia de Box-Jenkins para modelos da classe STARMA	47
3.2.1 Procedimentos para identificação	47
3.2.2 Procedimentos para estimação	51
3.2.3 Diagnóstico do modelo identificado	54
3.2.4 Previsão	55
3.2.5 Método utilizado para a comparação das classes de modelos SARIMA e STARMA	55
3.2.6 Análise das séries históricas-parte computacional	56
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	59
4.1 Descrição e análise dos dados	59

4.2	Análise segundo a classe de modelos SARIMA.....	61
4.3	Análise segundo a classe de modelos STARMA.....	72
4.4	Comparação das classes de modelo SARIMA e STARMA.....	83
4.5	Implementação computacional-modelo STARMA.....	85
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	87
5.1	Sugestões e trabalhos futuros.....	88
	REFERÊNCIAS.....	89
6	ANEXOS.....	93

RESUMO

Modelos autorregressivos e de médias móveis espaço-temporais (STARMA) aplicados a dados de temperatura

Os processos espaço-temporais vêm ganhando destaque nos últimos anos, em razão do aumento de estudos compreendendo variáveis que apresentam interação entre as dimensões espacial e temporal. Com o objetivo de modelar esses processos, Pfeifer e Deutsch (1980a) propuseram uma extensão da classe de modelos univariados de Box-Jenkins, denominada por modelo espaço-temporal autoregressivo de média móvel (STARMA). Essa classe de modelos é utilizada para descrever dados de séries temporais espacialmente localizadas. Os processos passíveis de modelagem via classe de modelos STARMA são caracterizados por observações de variáveis aleatórias, em que os locais a serem incorporados no modelo são fixos no espaço. A dependência entre as n séries temporais é modelada por meio da matriz de ponderação, de modo que os modelos da classe STARMA expressem cada observação no tempo t e na localização i como uma média ponderada de combinações lineares das observações anteriores e a inovação defasada no espaço e no tempo conjuntamente. Dada a nova classe de modelos, os objetivos deste estudo foram apresentar a classe de modelos STARMA, implementar computacionalmente, no *software* R, rotinas que permitam a análise de dados espaço-temporais, com as rotinas implementadas estabelecer e testar modelos de séries temporais aos dados de temperaturas mínimas médias mensais de 8 estações meteorológicas situadas no Paraná e comparar a classe de modelos STARMA com a classe de modelos univariados proposta por Box e Jenkins (1970). Com este estudo verificou-se que na apresentação da classe de modelos STARMA há complexidade no conceito de ordens de vizinhança e na identificação dos modelos espaço-temporais. Em relação a criação de rotinas responsáveis pelas análises de dados espaço-temporais observou-se dificuldades em sua implementação, principalmente no momento de estimação dos parâmetros. Na comparação da classe de modelos STARMA, multivariada, com a classe de modelos SARIMA, univariada, constatou-se que ambos os modelos se ajustaram de maneira satisfatória aos dados, produzindo previsões acuradas.

Palavras-chave: STARMA; SARIMA; correlação espaço-temporal; matriz de ponderação

ABSTRACT

Space-time autorregressive moving average (STARMA) models applied to temperature data

Spatio-temporal processes have been highlighted lately, due to the increase of studies approaching variables that present interactions between the spatial and temporal dimensions. In order to model these processes, Pfeifer e Deutsch (1980a) have suggested an extension of the Box-Jenkins univariate model class, named spatio-temporal autoregressive moving-average model (STARMA). This model class is used to describe spatially located time series data. The processes prone to be modeled via the STARMA model class are characterized by observations of random variables, in which the locations to be incorporated in the model are spatially fixed. The dependence between the n time series is modeled through the weighing matrix. So STARMA models express each observation at time t and location i as a weighed mean of linear combinations of the previous observations and the jointly lagged innovation in space and time. Given the new class models, the objectives of this study were to present a class of models STARMA, implentar computationally, in textit R software, routines that allow the analysis of spatio-temporal data with the routines implemented to establish and test models time series data of monthly average minimum temperatures of 8 meteorological stations located in Paraná and compare the class of models STARMA with the class of univariate models proposed by Box e Jenkins (1970). With this study it was found that the presentation of the class of models STARMA no complexity in the concept of ordered neighborhood and identification of spatio-temporal models. Regarding the creation of routines responsible for the analysis of spatio-temporal observed difficulties in its implementation, especially at the time of estimation of parameters. In comparison class STARMA models, multivariate, with the class of SARIMA models, univariate, it was found that both models were adjusted satisfactorily to the data, producing accurate forecasts.

Keywords: STARMA; SARIMA; correlation espace - time; weighing matrix

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ordem espacial de um sistema, (PFEIFER; DEUTSCH, 1979)	32
Figura 2 - Ciclo iterativo de Box-Jenkins para a construção de um modelo	42
Figura 3 - Mesorregiões do Estado do Paraná	59
Figura 4 - Estações meteorológicas presentes na Mesorregião Noroeste Paranaense ..	60
Figura 5 - Séries históricas de temperaturas mínimas médias em 8 estações meteo- rológicas no Paraná	61
Figura 6 - Função de autocorrelação temporal das séries históricas de temperaturas mínimas médias	62
Figura 7 - Séries históricas diferenciadas das temperaturas mínimas médias em 8 estações meteorológicas no Paraná	63
Figura 8 - Função de autocorrelação temporal das séries históricas de temperaturas mínimas médias com uma diferenciação sazonal	63
Figura 9 - Função de autocorrelação parcial temporal das séries históricas com uma diferenciação sazonal	64
Figura 10 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 2	67
Figura 11 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 3	68
Figura 12 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 4	68
Figura 13 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 6	69
Figura 14 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 43	69
Figura 15 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 44	70
Figura 16 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 45	70
Figura 17 - Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 47	71
Figura 18 - Histograma dos resíduos	72

Figura 19 - FACST de ordem 0 e de ordem 1	74
Figura 20 - FACST e FACPST de ordem 0 e de ordem 1, para as séries de temperaturas mínimas médias diferenciadas	75
Figura 21 - FACST e FACPST de ordem 0 e de ordem 1 com os parâmetros destacados	75
Figura 22 - FAC residual do modelo STARMA(1, 0, 0) × (0, 1, 1 ₁)	77
Figura 23 - FAC residual do modelo STARMA(2, 0, 0) × (0, 1, 1 ₁)	77
Figura 24 - FAC residual do modelo STARMA(3, 0, 0) × (0, 1, 1 ₁)	78
Figura 25 - FAC residual do modelo STARMA(1, 0, 0) × (1 ₁ , 1, 1 ₁)	78
Figura 26 - FAC residual do modelo STARMA(2 ₁ , 0, 14) × (1, 1, 1 ₁)	79
Figura 27 - FAC residual do modelo STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (0, 1, 1 ₁)	80
Figura 28 - FAC residual do modelo STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (1 ₁ , 1, 1 ₁)	80
Figura 29 - FAC residual do modelo STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (1, 1, 1 ₁)	81
Figura 30 - Histograma dos resíduos dos modelos STARMA identificados	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Características teóricas da função de autocorrelação temporal (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP) para modelos AR, MA e ARMA, adaptado de (BOX; JENKINS, 1970)	43
Tabela 2 - Características teóricas da função de autocorrelação espaço temporal e função de autocorrelação parcial espaço temporal para modelos STAR, STMA e STARMA, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980b)	51
Tabela 3 - Estatísticas descritivas das séries originais das temperaturas mínimas médias mensais por estação meteorológica	60
Tabela 4 - Modelos da classe SARIMA identificados para descrever as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo	64
Tabela 5 - Valores de BIC e estimativas das variâncias residuais para a escolha dos modelos da classe SARIMA	65
Tabela 6 - Modelos da classe SARIMA escolhidos para descrever as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo	66
Tabela 7 - Estimativas dos parâmetros dos modelos da classe SARIMA ajustados às séries de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo com seus respectivos erros padrões	66
Tabela 8 - Modelos da classe SARIMA para as estações 2, 3 e 4	66
Tabela 9 - Estimativas dos parâmetros dos modelos da classe SARIMA ajustados às séries de temperaturas mínimas médias mensais das estações 2, 3 e 4 ..	67
Tabela 10 - Estações meteorológicas e suas respectivas localizações geográficas	72
Tabela 11 - Modelos da classe STARMA identificados	76
Tabela 12 - Valores de BIC, estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para os modelos ajustados	76
Tabela 13 - Modelos da classe STARMA identificados	79
Tabela 14 - Valores de BIC, estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para os novos modelos ajustados	79
Tabela 15 - Estimativa dos parâmetros do modelo da classe STARMA ajustados aos dados de temperaturas mínimas médias mensais	82

Tabela 16 -Valores reais e valores preditos pelo modelo SARIMA para as estações meteorológicas	83
Tabela 17 -Erro quadrático médio de previsão das temperaturas mínimas médias mensais realizadas com o modelos SARIMA	84
Tabela 18 -Valores reais e valores preditos pelo modelo STARMA sazonal para as estações meteorológicas	84
Tabela 19 -Erro quadrático médio de previsão das temperaturas mínimas médias mensais realizadas com o modelo STARMA	85

LISTA DE SÍMBOLOS

- T: tamanho da série temporal
N: número de localizações
S: período sazonal
s: defasagem espaço-temporal
k: defasagem temporal
b: número de parâmetros
 α : parâmetro do modelo autorregressivo
 β : parâmetro do modelo de média móvel
W: matriz de vizinhança
FAC: função de autocorrelação temporal
FACP: função de autocorrelação parcial temporal
FACST: função de autocorrelação espaço-temporal
FACPST: função de autocorrelação parcial espaço-temporal

1 INTRODUÇÃO

Uma série temporal pode ser definida, segundo Morettin e Toloí (2004), como um conjunto de observações de qualquer fenômeno aleatório ordenadas no tempo, em que a análise e a modelagem da dependência serial destas observações constituem um dos objetivos do estudo de séries temporais.

A análise destas séries consiste em encontrar relações de dependência existentes temporalmente nos dados buscando-se identificar o mecanismo gerador da série, com o objetivo de extrair periodicidades relevantes nas observações, descrever seu comportamento (verificação da existência de tendência, ciclos e variações sazonais) e fazer previsões, (BOX; JENKINS, 1970).

Muitas são as classes de modelos descritas para o ajuste de uma sequência de dados históricos, tais como os modelos de suavização exponencial, ARIMA, espaço de estados, VARMA, entre outros. Estes modelos são capazes de representar e prever a distribuição de variáveis aleatórias ao longo do tempo. Diferentes métodos de previsão têm sido implementados nas mais variadas aplicações envolvendo ramos distintos do conhecimento, como por exemplo, previsões do clima.

Nesse sentido, muitas atividades agropecuárias podem se beneficiar com as análises de séries temporais, tais como: zoneamento agroecológico, planejamento das atividades agropastoris (desde o plantio até a industrialização), estudos sobre o efeito das mudanças ambientais na agricultura, monitoramento de seca, manejo de água de irrigação bem como a análise de crédito e seguro agrícola.

O conhecimento do comportamento dos elementos do clima é de fundamental importância, visto estarem as atividades, acima mencionadas, sujeitas às condições do tempo. Dessa maneira, com a incorporação das previsões climáticas nas decisões gerenciais, a sociedade se torna melhor adaptada aos ritmos irregulares do clima, uma vez que as alterações climáticas, em especial o aquecimento global, têm sido motivo de grandes preocupações da comunidade científica, (BACK, 2001).

Ressalta-se que, dentre os elementos do clima, o conhecimento do comportamento da variável temperatura do ar é primordial, uma vez que os processos biofísicos e bioquímicos, condicionantes do metabolismo dos seres vivos, são afetados pelas condições energéticas do ambiente, sendo as condições de atmosfera e solo as mais importantes. Sendo assim, o tratamento estatístico desta variável observada ao longo do tempo, deter-

minando seus padrões de ocorrência e propiciando uma adequada previsibilidade do seu comportamento em uma dada região é um instrumento de grande valia no planejamento e na gestão de inúmeras atividades agrícolas, agropecuárias e humanas.

Visto que a temperatura do ar é um dos elementos climáticos determinantes da distribuição e adaptação de plantas e animais, afetando diretamente seus processos físicos, químicos e biológicos, torna-se relevante e necessária a realização de previsões confiáveis de sua ocorrência. Para verificar se o aumento nos registros de temperatura refletem um aquecimento significativo ou uma variação aleatória natural, diversos estudos vêm sendo conduzidos no intuito de se obterem modelos que conduzam a estimativas cada vez mais precisas em diversas regiões do Brasil (FERRAZ; SAFADI; LAGE, 1999), (SEDIYAMA; JR., 1998), (NETO et al., 2002), (MEDEIROS et al., 2005), (CAVALCANTI; SILVA; SOUSA, 2006). Por intermédio de modelos de estimativas de temperatura do ar é possível tanto o desenvolvimento de estudos de aptidão climática regional das culturas quanto estudos detalhados do setor agropecuário.

A classe de modelos empíricos autoregressivos de médias móveis juntamente com o seu processo de construção, referido como método de Box- Jenkins, proposto por Box e Jenkins (1970), têm se mostrado muito útil no campo de análises estatísticas de séries temporais. Porém, os modelos da classe de Box-Jenkins são univariados e podem ser aplicados somente a uma única série de dados e para um único ponto no espaço. Para contornar tal situação, uma alternativa seria a utilização de modelos multivariados. Tais modelos tentam descrever e prever, simultaneamente, n séries temporais observadas em N locais. Caso essas n séries temporais apresentem algum padrão entre os N locais, essas inter-relações, entre as diferentes regiões, podem ser consideradas, resultando em uma análise mais precisa.

Pfeifer e Deutsch (1980a) considerando essas inter-relações propuseram uma extensão da classe de modelos univariados de Box-Jenkins, a qual considera as correlações espaço-temporais simultaneamente, denominada por modelo espaço-temporal autoregressivo de média móvel (STARMA). Essa classe de modelos é utilizada para descrever dados de séries temporais espacialmente localizados.

Os processos passíveis de modelagem via classe de modelos STARMA são caracterizados por observações de variáveis aleatórias, em que os locais a serem incorporados no modelo são fixos no espaço e a dependência entre os N locais e a série temporal

são, sistematicamente, relacionados com a localização geográfica. De modo que os modelos STARMA expressem cada observação no tempo t e na localização i como uma média ponderada de combinações lineares das observações anteriores e a inovação defasada no espaço e no tempo, conjuntamente, (HUANG et al., 2010).

Ressalta-se que, embora tenham sido desenvolvidos em 1980 e aprimorados até o fim de 1981, estes modelos encontraram dificuldades de implementação computacional, passando por um período de desuso. Em decorrência do avanço tecnológico, principalmente na área de processamento computacional, tais modelos foram resgatados a partir do ano de 2000 e até então vêm sendo amplamente aplicados a dados espaço-temporais.

Observando a importância de se considerar a correlação espacial em dados espaço-temporais e em face à necessidade de determinação dos valores das temperaturas mínimas médias mensais em diversas regiões, o presente estudo tem como objetivos:

- apresentar a classe de modelos STARMA;
- implementar, computacionalmente, no *software* R, rotinas que permitam a análise de dados espaço-temporais;
- com as rotinas implementadas, estabelecer e testar modelos de séries temporais aos referidos dados de temperatura;
- comparar a classe de modelos STARMA com a classe de modelos univariados proposta por Box e Jenkins (1970).

O presente estudo é estruturado em 5 seções, em que a seção 1 é composta pela descrição do problema, objetivos e justificativa. Na seção 2 são descritos conceitos de séries temporais, a classe de modelos autoregressivos de médias móveis e a classe de modelos espaço-temporal. A seção 3 expõe a metodologia de Box-Jenkins para modelos da classe ARIMA e sua extensão para os modelos da classe STARMA. Na seção 4 são apresentados os resultados e discussões para ambas metodologias, bem como os resultados da comparação entre as mesmas, ratificando a importância deste estudo para aplicação nas diversas áreas do conhecimento. E, finalizando, na seção 5 é exposta uma breve conclusão da teoria estudada e as conclusões das análises dos dados de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas, respondendo aos objetivos propostos para o estudo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura descreve muitas classes de modelos utilizados para o ajuste para de uma sequência de dados históricos, as quais são capazes de representar e prever a distribuição de variáveis aleatórias ao longo do tempo e do espaço. Devido à amplitude dessas classes de modelos, diversos estudos comparativos vêm sendo utilizados a fim de verificar quais dos modelos existentes se ajustam de forma mais adequada aos dados, uma vez que a comparação entre os modelos é capaz de demonstrar que as vantagens inerentes a cada método podem ser absorvidas proporcionando previsões mais acuradas.

Para se ajustar um modelo a uma série temporal, frequentemente, a suposição de estacionariedade se faz necessária. A estacionariedade de uma série temporal é definida por Box e Jenkins (1970) como o desenvolvimento aleatório, no tempo, em torno de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável, sem mudanças sistemáticas (tendência) e sem variações cíclicas. Isto é, um processo Z_t é dito ser estritamente estacionário se a distribuição conjunta de $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}$ é a mesma que a distribuição conjunta de $Z_{t_1-k}, Z_{t_2-k}, \dots, Z_{t_n-k}$ para todo t_1, t_2, \dots, t_n . Entretanto, na prática, é muito difícil usar a definição de estacionariedade estrita, tornando-se satisfatória a definição de estacionariedade de 2ª ordem, a qual é atendida se a média da série é constante e se sua função de autocovariância depende apenas da defasagem k .

Uma das formas de verificar a estacionariedade de uma série temporal que se tornou popular nos últimos anos é o teste da raiz unitária (teste de Dickey-Fuller), em que, a hipótese nula é: a série temporal não apresenta estacionariedade *versus* a hipótese alternativa de que a série temporal apresenta estacionariedade. Para maiores detalhes consultar Dickey e Fuller (1981).

Morettin e Toloi (2004) salientam que a maioria das séries, que se encontram na prática são não estacionárias, sendo necessário realizar alguma transformação até que estas se tornem estacionárias. Box e Jenkins (1970), Dickey e Fuller (1981) e Chatfield (1984) ressaltam que as principais razões para a transformação de uma série temporal são: estabilização da variância, tornar o efeito sazonal aditivo, retirar o padrão de tendência e ajustar uma distribuição normal aos dados.

De acordo com Box e Jenkins (1970), se a série apresentar um efeito sazonal multiplicativo e a variância aumentar com a média, a transformação indicada é a raiz quadrada ou a logarítmica, casos especiais de transformação de Box-Cox. Para os demais

casos uma fórmula geral é apresentada na equação 1:

$$Z_t^{(\lambda)} = \frac{Z_t^\lambda - c}{\lambda}. \quad (1)$$

para λ diferente de zero e sendo λ e c constantes a serem estimadas.

Caso a série apresente tendência, uma transformação proposta é a diferenciação, que consiste em tomar diferenças sucessivas da série original, até se obter uma série estacionária. A primeira diferença de Z_t é definida por:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}. \quad (2)$$

E a segunda por:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Z_t &= \nabla(\nabla Z_t) \\ &= \nabla(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1} \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

De modo geral, a n -ésima diferença de Z_t é:

$$\nabla^n Z_t = \nabla(\nabla^{n-1} Z_t). \quad (4)$$

Em situações normais, será suficiente tomar 1 ou 2 diferenças para que a série se torne estacionária.

Posto as condições necessárias para o ajuste de um modelo de séries temporais e visando à obtenção de previsões mais precisas por meio do ajuste de diferentes modelos à dados de séries temporais, essa seção descreve os principais métodos probabilísticos para tal modelagem, uma vez que os modelos de séries temporais proporcionam melhores resultados para previsões de médio e curto prazo, descrevendo e prevendo a dis-

tribuição de variáveis aleatórias ao longo do tempo e do espaço, (MAKRIDAKIS; STEVEN; ROB, 1998). Os métodos probabilísticos que serão descritos pertencem a classe de modelos empíricos, sendo estes os modelos autorregressivos integrados de médias móveis sazonal (SARIMA) e autorregressivos de médias móveis espaço-temporal (STARMA).

2.1 Modelo de Médias Móveis MA(q)

Segundo Box e Jenkins (1970) a classe de modelos SARIMA é univariada sendo capaz de descrever apenas uma série temporal em um ponto particular do espaço. A classe SARIMA possui subclasses especiais, modelos autorregressivos (AR), modelos de médias móveis (MA), modelos autorregressivos e de médias móveis (ARMA), modelos autorregressivos integrados e de médias móveis (ARIMA).

Uma subclasse pode ser considerada se ϵ_t é um processo discreto puramente aleatório, então este consiste em uma sequência de variáveis aleatórias ϵ_t independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância σ_ϵ^2 . Um processo Z_t é chamado de processo de médias móveis de ordem q , ou MA(q), se

$$Z_t = \epsilon_t + \beta_1\epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q\epsilon_{t-q}. \quad (5)$$

O processo MA(q) pode ser expresso a partir de um operador de retardo, denotado por B e definido como:

$$B^j\epsilon_t = \epsilon_{t-j}, \text{ para todo } j.$$

Assim, a equação 5 pode ser reescrita como

$$Z_t = (1 + \beta_1B + \beta_2B^2 + \dots + \beta_qB^q)\epsilon_t = \theta(B)\epsilon_t, \quad (6)$$

em que $\theta(B) = 1 + \beta_1B + \beta_2B^2 + \dots + \beta_qB^q$, isto é, um polinômio de ordem q em B.

2.2 Modelo Autoregressivo AR(p)

Considerando ϵ_t um processo discreto puramente aleatório, com média zero e variância σ_ϵ^2 , um processo Z_t é chamado de processo autoregressivo de ordem p , ou AR(p), se

$$Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \dots + \alpha_p Z_{t-p} + \epsilon_t. \quad (7)$$

Utilizando o operador de retardo, a equação 7 pode ser reescrita como:

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p) Z_t = \epsilon_t, \quad (8)$$

ou

$$\phi(B) Z_t = \epsilon_t, \quad (9)$$

em que $\phi(B) = (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p)$, isto é, um polinômio de ordem p em B .

2.3 Modelos Mistos ARMA(p, q)

Os processos autoregressivos e de médias móveis, ARMA, combinam as características de processos AR(p) e MA(q), sendo uma subclasse de modelos úteis e parcimoniosos para descrever dados de séries temporais, (CHATFIELD, 1984). O modelo ARMA(p, q) é definido por:

$$Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \dots + \alpha_p Z_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}, \quad (10)$$

em que, ϵ_t é um processo puramente aleatório com média zero e variância σ_ϵ^2 .

Usando o operador de retardo o modelo pode ser reescrito da forma

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_p B^p) Z_t = (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \dots + \beta_q B^q) \epsilon_t, \quad (11)$$

ou

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) \epsilon_t. \quad (12)$$

2.4 Modelo ARIMA(p, d, q)

Na prática, muitas séries temporais não são estacionárias e os modelos descritos até o presente momento são apropriados para séries estacionárias. Desta forma,

para ajustar estes modelos a uma série temporal observada, é necessário a remoção das fontes de variação não estacionárias. Se uma série observada for não estacionária na média pode-se tentar remover a tendência tomando-se uma ou mais diferenças.

Um modelo ARMA no qual Z_t é substituído pela sua d -ésima diferença $\nabla^d Z_t$ é capaz de descrever alguns tipos de séries não estacionárias. A série diferenciada pode ser denotada por:

$$\nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t. \quad (13)$$

O processo autoregressivo integrado e de médias móveis chamado de ARIMA(p, d, q) é dado pela equação 14:

$$\nabla^d Z_t = \alpha_1 \nabla^d Z_{t-1} + \dots + \alpha_p \nabla^d Z_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q}, \quad (14)$$

ou de modo equivalente

$$\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta(B)\epsilon_t, \quad (15)$$

ou

$$\nabla^d Z_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \epsilon_t. \quad (16)$$

Um processo que se torna estacionário após d diferenças é dito ser não estacionário homogêneo, ou integrado de ordem d , $I(d)$, (CHATFIELD, 1984).

2.5 Modelos Sazonais

Muitas séries temporais contêm uma componente periódica sazonal que se repete por intervalos iguais de tempo, isto é, a cada s observações.

Neste caso, tomar a primeira diferença ($Z_t - Z_{t-1}$) não é suficiente para tornar a série estacionária. De acordo com Cryer (1986), a forma adequada de diferenciar dados que contenham padrões sazonais determinísticos é tomando diferenças no período sazonal, isto é, considerando o período sazonal igual a doze ($S = 12$) tem-se que $\nabla_S^D Z_t = Z_t - Z_{t-12}$.

A diferença sazonal, geralmente, é denotada por ∇_s onde s é o período sazonal. A D -ésima diferença sazonal é denotada por ∇_s^D . Ao se combinarem os dois tipos de diferenciação obtém-se o operador $\nabla^d \nabla_s^D$.

Box e Jenkins (1970) generalizam o modelo ARIMA para lidar com sazonalidade estocástica e definiram um modelo ARIMA sazonal, chamado de SARIMA, representado por:

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^s)\epsilon_t, \quad (17)$$

em que

$$\phi(B) = 1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p,$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \phi_s B^s - \dots - \phi_P B^{Ps},$$

$$\theta(B) = 1 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q,$$

$$\Theta(B^s) = 1 + \theta_s B^s + \dots + \theta_Q B^{Qs}.$$

Este modelo é um SARIMA de ordem $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ e, embora, pareça extremamente complicado, na prática os valores de d e D , em geral, não serão maiores que 1 ou 2 e um número pequeno de coeficientes será suficiente para descrever a série.

2.6 Modelos da classe STARMA

A classe de modelos STARMA é utilizada para descrever dados de séries temporais espacialmente localizados. De acordo com Pfeifer e Deutsch (1980b) os processos passíveis de modelagem, via esta classe de modelos, são caracterizados por observações de variáveis aleatórias com N locais fixos no espaço, onde a dependência entre estes locais e as séries temporais é, sistematicamente, relacionada com a localização.

A classe de modelos STARMA é caracterizada pela dependência linear defasada no tempo e no espaço. Assume-se que as observações z_i são da variável aleatória $Z_i(t)$ sendo avaliadas em cada uma das N localizações fixadas no espaço em T períodos. Estes N locais no espaço podem representar várias situações, como por exemplo, países, esta-

dos, cidades, bairros, entre outras. A forma autoregressiva, no modelo espaço-temporal, poderia expressar as observações no tempo t e no local i , $z_i(t)$, como uma combinação linear das observações passadas no local i com seus vizinhos. Se uma mesma relação é esperada para todos os locais do sistema, esse processo exibe uma estacionariedade espacial, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980a).

Na construção de um modelo espaço-temporal, a definição de operador de defasagem espacial faz-se necessária. Seja $L^{(l)}$, o operador de defasagem espacial da l -ésima ordem, tal que:

$$\begin{aligned} L^{(0)}z_i(t) &= z_i(t), \\ L^{(l)}z_i(t) &= \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)} z_j(t). \end{aligned}$$

em que $w_{ij}^{(l)}$ são os pesos com

$$\sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)} = 1$$

para todo i e $w_{ij}^{(l)}$ diferentes de zero se os locais i e j são vizinhos da l -ésima ordem. A representação da matriz do conjunto de pesos $w_{ij}^{(l)}$ é $\mathbf{W}^{(l)}$, uma matriz quadrada $N \times N$ com cada linha somando um. Se $\mathbf{z}(t)$ é um vetor coluna ($N \times 1$) de observações $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, então,

$$L^{(0)}\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^0\mathbf{z}(t) = \mathbf{I}_N\mathbf{z}(t),$$

e

$$L^{(l)}\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^l\mathbf{z}(t), \text{ para } l > 0.$$

Para Pfeifer e Deutsch (1980a) a especificação da forma de pesos $w_{ij}^{(l)}$, para vários positivos l 's é uma questão deixada para o construtor do modelo, o qual pode escolher pesos que reflitam a configuração do sistema do local. Os $w_{ij}^{(l)}$ podem ser escolhidos de maneira a refletir propriedades físicas do sistema observado, como por exemplo, barreiras naturais tais como, rios ou montanhas e até mesmo a facilidade de acessibilidade do município i ao município j . Este último fator pode incluir informações como o número de estradas entre i e j , a quantidade de transporte público disponível que os conecta, e até mesmo as taxas de fluxo sobre essas pistas.

Segundo Pfeifer e Deutsch (1979) os pesos refletem uma hierarquia de ordem espacial dos vizinhos. A primeira ordem de vizinhança é definida pelos locais de interesse mais próximos. A segunda ordem de vizinhança é definida como os vizinhos mais longe que os vizinhos da primeira ordem e mais próximos que os vizinhos de terceira ordem. Na Figura 1 são apresentadas as quatro primeiras ordens de vizinhança de um sistema

particular. Neste caso tem-se as matrizes $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}, W^{(4)}$, em que os pesos $w_{ij}^{(l)}$ são definidos de acordo com o número de vizinhos de um local pré definido.

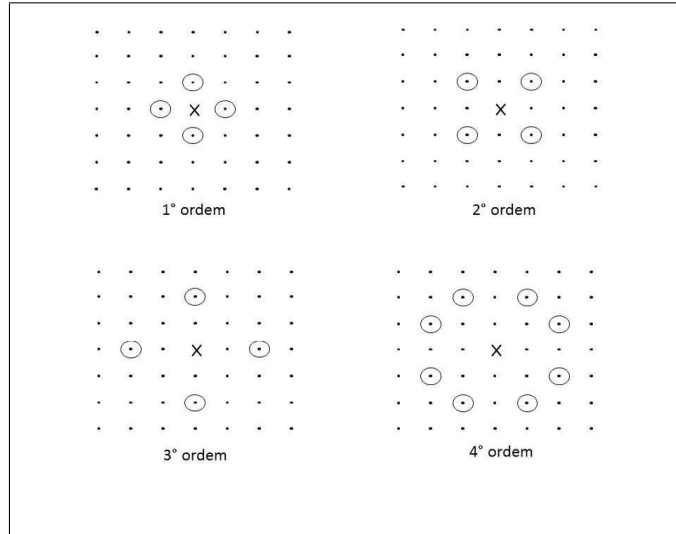


Figura 1 – Ordem espacial de um sistema, (PFEIFER; DEUTSCH, 1979)

Além da construção da matriz \mathbf{W} utilizando os fatores descritos anteriormente, uma outra forma de construir a matriz de vizinhança, proposta por Rao e Antunes (2004) é utilizando a matriz de ponderação de ordem 0, $\mathbf{W}^{(0)}$, como a matriz identidade e a matriz de ponderação de ordem 1, $\mathbf{W}^{(1)}$ como o inverso da distância euclidiana entre os locais, como pode ser observado a seguir.

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_{ij}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

em que d_{ij} é a distância euclidiana, em metros, determinada pela equação 18:

$$d_{ij} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}. \quad (18)$$

em que a_i e b_i são as coordenadas geográficas, em UTM (*Universal Transverso de Mercator*), dos locais de interesse. As coordenadas são utilizadas em UTM, uma vez que essa é utilizada para corrigir a projeção cilíndrica, transformando-a em uma projeção plana.

Após estas definições é possível a representação do modelo STARMA. De forma semelhante às séries temporais univariadas, $z_i(t)$ pode ser expresso como uma combinação de observações passadas e erros. No entanto, nos modelos da classe STARMA

além de se permitir dependência de $z_i(t)$ somente com observações passadas e erros do local i , é permitida a dependência com os locais vizinhos de várias ordens espaciais, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980a).

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} L^l z_i(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} L^l \epsilon_i(t-k) + \epsilon_i(t) \quad (19)$$

em que p é a ordem autoregressiva, q é a ordem de médias móveis, λ_k é a ordem espacial do k -ésimo termo autoregressivo, m_k é a ordem espacial do k -ésimo termo de médias móveis, ϕ_{kl} e θ_{kl} são parâmetros, e $\epsilon_i(t)$ são erros normais aleatórios com

$$E[\epsilon_i(t)] = 0$$

$$E[\epsilon_i(t)\epsilon_j(t+s)'] = \begin{cases} \sigma^2, & i=j, s=0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O modelo STARMA pode ser designado conforme:

$$\text{STARMA } (p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p}, q_{m_1, m_2, \dots, m_q})$$

O modelo STARMA apresentado na equação 19 pode ser reescrito na forma vetorial, segundo a equação 20:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^l \mathbf{z}(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^l \boldsymbol{\epsilon}(t-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t). \quad (20)$$

Duas subclasses especiais do modelo STARMA podem ser notadas, uma quando $q = 0$, pois apenas o termo autoregressivo permanece e por isso o modelo carrega o nome de autoregressivo espaço temporal ou modelo STAR, conforme apresentado na equação 21

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^l \mathbf{z}(t-k) + \boldsymbol{\epsilon}(t). \quad (21)$$

Este modelo pode ser representado como um STAR($p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p}$). A segunda subclasse é percebida quando o termo autoregressivo p é igual a zero, gerando um modelo

referido como média móvel espaço-temporal ou STMA, representado pela equação 22:

$$\mathbf{z}(t) = \epsilon(t) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^l \epsilon(t-k). \quad (22)$$

Este é um modelo STMA(q_{m_1, m_2, \dots, m_q}).

Para que o modelo STARMA possa representar um processo estacionário, isto é, sua estrutura de covariância de $z(t)$ não se altere com o tempo, certas condições devem ser atendidas. Estas condições são denominadas de condições de estacionariedade e exigem que todos os x_u que resolvam:

$$\det[x_u^p \mathbf{I} - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^l x_u^{p-k}] = 0.$$

devem se encontrar dentro de um círculo unitário ($|x_u| < 1$). Efetivamente este requisito serve para determinar uma região de possíveis valores de ϕ_{kl} que resultarão em um processo estacionário e com solução única. Se estas mesmas condições forem aplicadas ao termo de médias móveis do modelo STARMA e os x_u que resolvam:

$$\det[x_u^q \mathbf{I} - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^l x_u^{q-k}] = 0.$$

estiverem dentro do círculo unitário, este modelo é dito inversível. Essa propriedade de invertibilidade implica que $z(t)$ pode ser expresso como combinações lineares de pesos que convergem para zero. Logo para todo modelo STAR tem-se a invertibilidade e para todo modelo STMA tem-se a estacionariedade, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980a). No caso em que a estacionariedade da série não é satisfeita é necessário realizar uma diferenciação, simples ou sazonal, assim como na metodologia de Box-Jenkins.

Assim como na classe de modelos SARIMA, a classe de modelos STARMA também pode ser utilizada para descrever séries que não apresentam estacionariedade. Para isso, basta realizar a diferenciação de ordem necessária na série e posteriormente incorporá-la ao modelo, originando o modelo STARIMA conforme apresentado na equação 23:

$$\nabla^d \mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^l \nabla^d \mathbf{z}(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^l \epsilon(t-k) + \epsilon(t). \quad (23)$$

De forma análoga a classe de modelos SARIMA, na classe de modelos STARMA também pode-se incorporar a componente de sazonalidade e assim, o modelo passa a ser representado pela equação 24:

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S)\phi_{P,\Lambda}(B)\nabla_S^D\nabla^d\mathbf{z}(t) = \Theta_{q,m}(B^S)\theta_{q,m}(B) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (24)$$

em que

$$\Phi_{P,\Lambda}(B^S) = I - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\Lambda_k} \Phi_{lk} \mathbf{W}_l B^{kS},$$

$$\nabla_S^D = (I - B^S)^D,$$

$$\Theta_{Q,M}(B^S) = I - \sum_{k=1}^Q \sum_{l=0}^{M_k} \Theta_{kL} \mathbf{W}_l B^{kS}.$$

Um modelo da classe STARMA quando acrescido de uma diferenciação simples e uma diferenciação sazonal é representado pela notação STARIMA sazonal $(p_\lambda, d, q_m) \times (P_\Lambda, D, Q_M)_S$, em que P é a ordem autoregressiva sazonal, D é o número de diferenças sazonais e Q é a ordem de média móvel sazonal. O período sazonal é especificado por S e as ordens espaciais autoregressivas e de médias móveis são especificadas por Λ e M , respectivamente, (PFEIFER; DEUTSCH, 1981c).

2.7 Estudos utilizando a classe de modelos SARIMA

Os modelos da classe SARIMA são amplamente utilizados para a previsão de dados climatológicos. Cavalcanti, Silva e Sousa (2006) desenvolveram um modelo de estimativa da temperatura do ar em função das coordenadas geográficas e das anomalias de temperaturas da superfície do mar, para séries temporais das médias mensais de temperatura no Nordeste brasileiro.

Ferraz, Safadi e Lage (1999) utilizaram modelos de séries temporais na previsão da série de precipitações pluviais mensais da cidade de Lavras, MG. Dentre os modelos ajustados, modelo de regressão, modelo de alisamento exponencial de Holt-Winters e modelo SARIMA com sazonalidade determinística, os autores concluíram que os modelos SARIMA apresentaram melhores valores de previsão, segundo os resultados obtidos.

Com o objetivo de analisar a série de temperatura média mensal da cidade de Uberlândia, MG, Silva, Guimarães e Movares (2008) descreveram os componentes da

série em estudo e realizaram previsões para períodos subseqüentes por meio de modelos ajustados para a série. A análise permitiu identificar, na série, a presença dos componentes, tendência e sazonalidade. Desta forma, os autores verificaram a eficiência dos modelos do tipo SARIMA, uma vez que estes foram capazes de modelar a componente de sazonalidade. Existem muitos outros estudos relacionados a classe de modelos SARIMA e seria exaustiva a apresentação de todos.

A classe de modelos SARIMA é uma classe de modelos bem popular, sendo amplamente utilizada para a modelagem de séries temporais. Portanto, seria repetitiva a apresentação de tantos estudos envolvendo essa classe de modelos.

2.8 Estudos utilizando a classe de modelos STARMA

As classes de modelos empíricos descritas têm se mostrado muito úteis no campo de análises estatísticas de séries temporais, destacando-se os modelos espaço-temporais uma vez que estes descrevem e preveem simultaneamente n séries temporais observadas em N locais distintos. Nesse sentido, a popularização da classe de modelos espaço-temporal vem acontecendo pelas suas aplicações nas mais diversas áreas, como sociologia, hidrologia, ecologia, planejamento de tráfego, economia, entre outras. Como por exemplo, Martinn e Oeppen (1975) que introduziram o conceito de correlação espaço-temporal analisando dados de difusão de doenças aviárias, no leste da Inglaterra, com o objetivo de identificar as regiões onde as doenças poderiam se difundir. Os autores analisaram também dados de fornecimento de carne de animais de abate no leste de Midlands e regiões do leste da Anglia com o intuito de prever o seu preço médio. Em ambos os casos confirmaram a eficácia dos modelos que consideram a correlação espaço-temporal, por meio da proximidade das estimativas com os valores reais.

Pfeifer e Deutsch (1980a) introduziram os modelos da classe STARMA, descrevendo o procedimento iterativo dos estágios para a modelagem espaço-temporal e para ilustrarem tal procedimento analisaram a série histórica, (1969 até 1974), de prisão por assalto em 14 distritos no nordeste da cidade de Boston e devido a eficiência do modelo ajustado este pode ser empregado como uma função de previsão para o número de prisões por assalto nos distritos.

Pfeifer e Deutsch (1980b) descreveram o processo de identificação e interpretação para um modelo espaço-temporal de primeira ordem. Neste artigo, os autores

descreveram o processo de construção da matriz de ponderação, \mathbf{W} , de primeira ordem e simularam processos STMA(1₁) e STAR(1₁) para discutirem a forma de identificação de cada processo bem como suas interpretações físicas.

Pfeifer e Deutsch (1981a) e Pfeifer e Deutsch (1981bb) avaliaram a significância da autocorrelação das observações e dos resíduos por meio de testes baseados no cálculo da função de autocorrelação, e para tal tarefa, estudaram a variância amostral da função de autocorrelação espaço-temporal, considerando que os erros ϵ_t sejam variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com média zero e matriz de covariâncias $G = \sigma^2\mathbf{I}$.

Ainda em 1981, Pfeifer e Deutsch (1981ba) propuseram uma inovação na classe de modelos STARMA. Os autores consideraram a possibilidade da matriz de covariâncias ser diferente de $\sigma^2\mathbf{I}$ e apresentaram toda a sequência de identificação, estimação e diagnóstico do modelo incorporando os pressupostos na nova forma da matriz G .

Pfeifer e Deutsch (1981c) ilustraram a extensão da classe de modelos STARMA para dados com efeito de sazonalidade, propondo o modelo STARMA sazonal. No artigo os autores apresentaram os procedimentos de construção do modelo, o qual segue os mesmos princípios dos modelos propostos por Pfeifer e Deutsch (1980a), sendo realizada uma diferenciação sazonal na série histórica antes de se iniciar o processo de identificação. Para exemplificar a inclusão do termo sazonal, no modelo proposto, foi estudada a descarga diária de mil metros cúbicos, por segundo, em quatro locais ao longo do Rio Mississippi.

Pace et al. (2000) ajustaram o modelo autoregressivo espaço-temporal (STAR) para dados de preço de imóveis e com tal aplicação, mostraram os benefícios substanciais que poderiam ser obtidos ao modelar a dependência espacial e temporal dos dados. Esses benefícios foram confirmados comparando-se o modelo STAR com modelos tradicionais, isto é, modelos univariados que consideram apenas correlação temporal.

Epperson (2000) descreveu a importância do uso de modelos espaço-temporal na análise de dados ecológicos, pois estes, além de captarem a variância habitual espacial e a correlação, também captam, simultaneamente, as correlações espaço-temporal, permitindo a caracterização do processo genético da população de uma maneira nova e mais detalhada.

Giacomini e Granger (2004) estudaram variáveis de interesse econômico, as

quais, muitas vezes, apresentam, além da correlação temporal, a correlação espacial. Posto a presença de variáveis com ambas correlações os autores buscaram comparar a eficiência de diferentes métodos de previsão e mostraram que, quando a correlação espacial não é considerada no modelo, as previsões resultantes são insatisfatórias.

Rao e Antunes (2004) utilizaram a classe de modelos STARMA para modelar séries de temperaturas médias mensais em 9 regiões do Reino Unido e compararam os resultados com a classe de modelos SARIMA. Os resultados obtidos pelas análises mostraram a eficiência dos modelos espaço-temporais em relação aos modelos temporais.

Soni et al. (2004) pesquisaram a neurofisiologia fetal por meio de uma técnica de mapeamento da atividade cerebral, a qual detecta um campo magnético produzida por correntes elétricas naturais do cérebro. Os sinais de corrente elétrica são gravados e são analisados segundo a metodologia de análise de intervenção e segundo a análise espaço-temporal, uma vez que estes sinais podem apresentar padrões inesperados e, estes padrões, dependem da região do cérebro. Desta forma, o uso do modelo STARMA justifica-se no objetivo de examinar a relação entre as observações atuais, como uma combinação linear das observações anteriores, assim como as observações em locais vizinhos e a análise de intervenção por explicar as mudanças inesperadas nos sinais. Com o uso destas duas metodologias os autores proporcionaram um meio mais confiável para controlar os sinais reais gerados pelo cérebro fetal.

Zhour e Mitchell (2005) utilizaram modelos da classe STARMA para ajustar um modelo de previsão para a demanda de redes sem fio (*wireless*) obtendo, deste modo, um conhecimento prévio da demanda exigida e assim, evitar o tráfego na rede, mantendo a qualidade do serviço prestado pelas redes de telefonia fixa.

Sartoris (2007) modelou o número mensal de crimes (roubos, homicídios e roubos de carro) na cidade de São Paulo com o objetivo de verificar a existência do contágio de crimes de um bairro para outro, isto é, o autor considerou os números de crimes nos bairros, ao longo do tempo, e os analisou considerando a correlação espaço-temporal.

Cheng et al. (2008) compararam a aplicação de modelos da classe STARMA com a metodologia de redes neurais artificiais na modelagem de dados de temperatura da China. Os autores analisaram dados de 137 estações meteorológicas, nos anos de 1951 a 2002 e concluíram que a metodologia de redes neurais apresentou-se mais eficiente, neste

estudo, em relação a classe de modelos STARMA. Os autores discutiram, ainda, que embora o modelo STARMA não tenha apresentado o melhor resultado este é útil uma vez que se tem um único modelo para todas as estações meteorológicas.

Glasbey e Allcroft (2008) verificaram que a variabilidade temporal em pequenas regiões, a poucos quilômetros de distância, é muito importante em conceitos hidrológicos, de agricultura e energia. Assim, para avaliar o potencial de energia solar coletaram-se dados em Pentland Hills, no sul de Edimburgo. A partir dos dados, os autores construíram um modelo espaço-temporal para investigar a variabilidade da saída de energia solar de redes foto-voltaica. Com os resultados das análises, observaram um processo com estrutura de primeira ordem de vizinhança e um ajuste adequado do modelo aos dados.

Lee et al. (2010) estudaram o número de mortes de corvos associado com a epidemia de um vírus no Nilo Ocidental. A relevância do estudo realizado pelos autores se dá devido que o referido vírus é capaz de infectar rapidamente uma grande quantidade de corvos e pode, também, provocar uma séria infecção em seres humanos. Posta a relevância do estudo, os autores utilizaram a classe de modelos STARMA, uma vez que esta foi capaz de permitir a estimativa da taxa de propagação do vírus em diferentes escalas espaciais e temporais. Neste sentido, o modelo STARMA se mostrou promissor para a caracterização de doenças infecciosas.

Huang et al. (2010) avaliaram o fluxo diário de embarcações em uma rede de transportes marítimos em 23 diferentes localizações. Para modelar a série de fluxo diário de embarcações os autores utilizaram a classe de modelos STARMA, verificando sua eficiência quando o interesse é descrever dados espaço-temporais.

Hu, Qin e Chu (2011) apresentaram um método para a detecção de danos em estruturas de placas, baseado em uma análise de série espaço-temporal. A placa em estudo é dividida em várias sub-regiões e a resposta produzida é a vibração de determinada sub-região. Com isso, um modelo da classe STARMA é identificado e então as respostas de outras sub-regiões são previstas com o mesmo. Para validar a eficiência do modelo os autores utilizaram os erros preditos, comparando as respostas esperadas com as ocorridas na prática. Os resultados mostraram que este método pode, efetivamente, detectar a localização dos danos.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Esta seção apresenta os materiais e métodos a serem utilizados para o desenvolvimento deste estudo. Os dados utilizados neste estudo são referentes a temperaturas mínimas médias mensais, em graus Celsius, provenientes de $N=8$ estações meteorológicas situadas no Estado do Paraná. A série histórica é constituída de $T=100$ meses, compreendendo de janeiro de 2004 até abril de 2012, em que os últimos 6 valores, não serão utilizados nas análises com o objetivo de comparar os valores previstos com estes valores reais. Os dados foram disponibilizados pelo Grupo de Estudos em Gestão de Seguros e Riscos (GESER).

De acordo com Morettin e Tolo (2004) uma metodologia bastante utilizada na análise de modelos paramétricos é conhecida como abordagem de Box - Jenkins. Essa metodologia consiste em ajustar um modelo da classe SARIMA para um conjunto de dados, sendo composta por uma sequência de procedimentos, sendo estes: a identificação de um ou mais modelos candidatos por meio da análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, a estimação dos parâmetros dos modelos candidatos, o diagnóstico ou verificação do modelos ajustados por meio da análise de resíduos e a previsão caso o modelo seja adequado. Caso contrário, é necessário um novo modelo candidato iniciando-se novamente o processo, (BOX; JENKINS, 1970).

Para a classe de modelos STARMA Pfeifer e Deutsch (1980a), propõem uma extensão da metodologia de Box - Jenkins, a qual incorpora a correlação espaço-temporal, simultaneamente.

Na Figura 2 é apresentado o fluxograma do ciclo iterativo de Box - Jenkins, o qual mostra as etapas a serem seguidas para a construção de um modelo de série temporal.

Seguindo o ciclo iterativo de Box-Jenkins, nas seções a seguir, serão apresentados tanto o método de Box-Jenkins para a classe SARIMA, como sua extensão para a classe de modelos STARMA.

3.1 Metodologia de Box-Jenkins para modelos da classe ARIMA

3.1.1 Procedimentos para identificação

Segundo Box e Jenkins (1970) e Morettin e Tolo (2004) o procedimento de identificação consiste em três partes, em que a primeira incide em verificar se existe

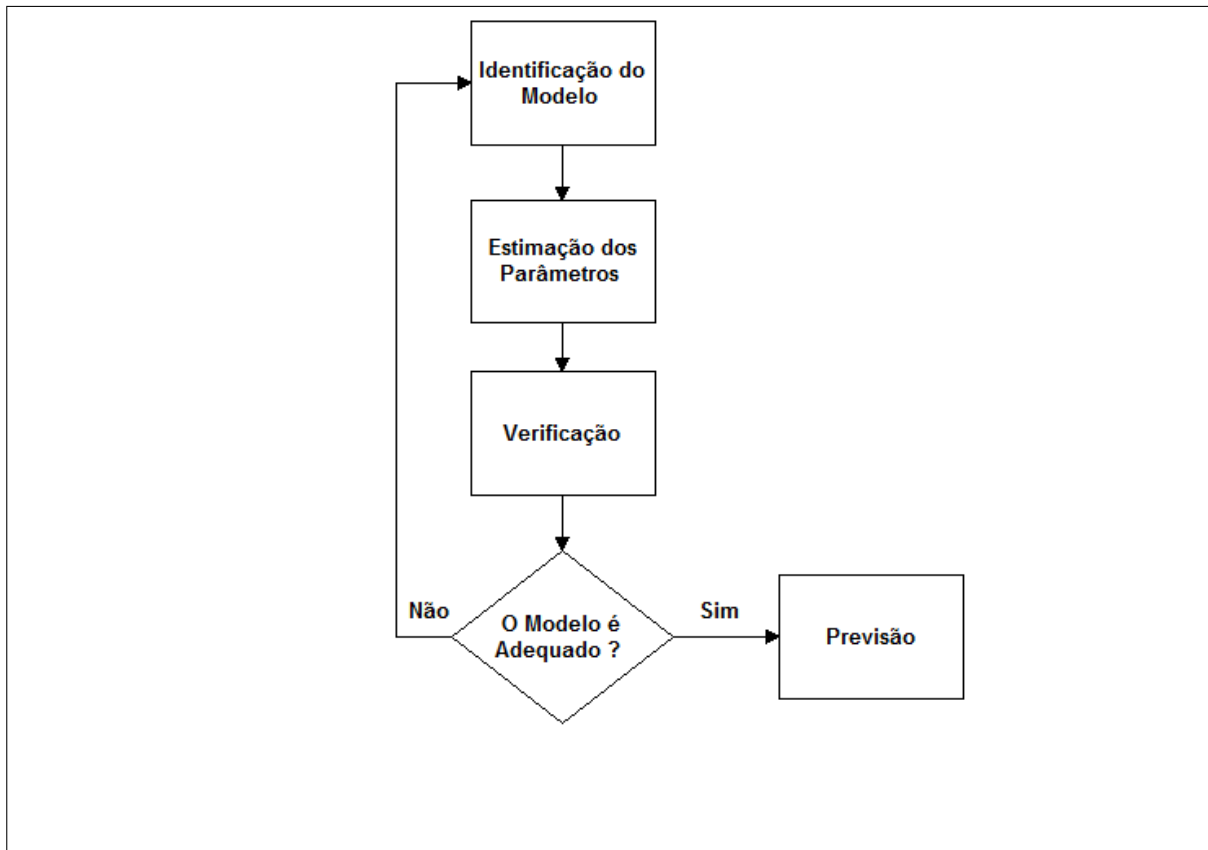


Figura 2 – Ciclo iterativo de Box-Jenkins para a construção de um modelo

a necessidade de uma transformação da série original, com o objetivo de estabilizar a variância; a segunda é determinar a ordem dos parâmetros do modelo da classe SARIMA $(p, d, q)X(P, D, Q)$, em que o primeiro parâmetro a ser identificado é o grau de diferenciação, d ou D , necessário para a estabilização da série temporal, principalmente em relação a tendência e a sazonalidade. Isso é realizado por meio da análise do comportamento do correlograma, ou seja, função de autocorrelação, no qual são apresentados os valores da autocorrelação em relação as defasagens k . Conforme descreve (MAKRIDAKIS; STEVEN; ROB, 1998), (MORETTIN; TOLOI, 2004) e (EHLERS, 2007) se o correlograma apresenta um comportamento onde os valores da autocorrelação amostral r_k decaem para zero de forma relativamente lenta, indica a não estacionariedade e a série precisa ser diferenciada.

Uma vez que a série está estacionária, a última parte é identificar a ordem autoregressiva p ou P (sazonal), a qual é determinada pela variação da função de autocorrelação parcial (FACP) da série que está sendo analisada e a ordem de médias móveis q ou Q (sazonal) que é determinada pela função de autocorrelação (FAC) da série em análise. As características teóricas da FAC e FACP são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Características teóricas da função de autocorrelação temporal (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP) para modelos AR, MA e ARMA, adaptado de (BOX; JENKINS, 1970)

Processo	FAC	FACP
Série aleatória	0	0
AR(1), $\alpha > 0$	decaimento exponencial	0 para $k > 1$
AR(1), $\alpha < 0$	decaimento oscilatório	0 para $k > 1$
AR(p)	decaimento para zero	0 para $k > p$
MA(1)	0, se $k > 1$	decaimento oscilatório
ARMA(p, q)	decaimento a partir de q	decaimento a partir de p

McLeod e Li (1983) salientam que o uso excessivo de diferenciações resulta em um número negativo da autocorrelação de ordem 1 da série diferenciada e que o número incorreto de diferenças acarreta um aumento na variância da série transformada.

3.1.2 Procedimentos para estimação

Com a identificação de um modelo para a série temporal o próximo passo consiste em estimar os parâmetros de cada um dos modelos autoregressivos, de médias móveis e a variância dos erros. Essas estimativas podem ser obtidas pelo método dos momentos, mínimos quadrados e máxima verossimilhança.

O método dos momentos é, geralmente, um dos mais fáceis para se obterem as estimativas dos parâmetros, pois consiste em equacionar momentos amostrais com momentos teóricos e resolver as equações resultantes para obter estimativas dos parâmetros desconhecidos. O método dos mínimos quadrados utiliza um processo iterativo que minimiza a soma de quadrados residual, partindo de um sistema de equações não lineares. E, por sua vez, o método de máxima verossimilhança estima os valores dos parâmetros, com relação aos dados observados, que são os mais prováveis e maximizam a função de verossimilhança, sendo o que resulta em melhores estimativas.

Um modelo ARIMA (p, d, q) é constituído de $p + q + 1$ parâmetros no vetor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2)$, em que $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$. Para estimar estes parâmetros será utilizado o método de máxima verossimilhança: dadas n observações Z_1, \dots, Z_N consideramos a função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\xi}|Z_1, \dots, Z_N)$ como função de $\boldsymbol{\xi}$. Os estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\xi}$ serão os valores que maximizam L ou $l = \log(L)$, (MORETTIN; TOLOI, 2004).

Sob a suposição de que $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ temos que a função de densidade conjunta de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ é:

$$f(z_i|\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_\epsilon^2)^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right\}, \quad (25)$$

em que:

$$\epsilon_t = Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}. \quad (26)$$

Porém, sabe-se que para calcular $\epsilon(t)$ a partir da equação 26 é necessário obter valores iniciais para os Z 's e para os ϵ 's. Esta questão de valores iniciais será resolvida por meio do procedimento condicional, em que os valores iniciais desconhecidos serão substituídos por zeros. Sob esta condição, tem-se a função de verossimilhança condicional:

$$L(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon}) = \prod_{i=1}^n f(z_i|\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_\epsilon^2)^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right\}. \quad (27)$$

e tomando-se o logaritmo de L , obtém-se:

$$\iota(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon}) \propto -n \log \sigma_\epsilon - \frac{S(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon})}{2\sigma_\epsilon^2}, \quad (28)$$

em que:

$$S(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2, \quad (29)$$

chamada de soma de quadrados condicional residual. Usando um asterisco para indicar ι e $S(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{Z}, \boldsymbol{\epsilon})$ condicionais a $\mathbf{Z} = (Z_1^*, \dots, Z_p^*)$ e $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_q^*)$, é possível escrever 28 e 29 como 30 e 31, respectivamente:

$$\iota_*(\boldsymbol{\xi}) = -n \log \sigma_\epsilon - \frac{S(\boldsymbol{\eta})}{2\sigma_\epsilon^2}, \quad (30)$$

$$S_*(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2. \quad (31)$$

Segundo Box e Jenkins (1970) maximizar $\iota_*(\boldsymbol{\xi})$ é equivalente a minimizar $S_*(\boldsymbol{\eta})$ e a escolha dos valores de \mathbf{Z} e $\boldsymbol{\epsilon}$ é realizada colocando os elementos deste s vetores

iguais às suas esperanças, $E(\epsilon_t) = 0$, o mesmo ocorrendo com os elementos de \mathbf{Z}^* ; se $E(Z_t) \neq 0$; deve-se substituir cada elemento de \mathbf{Z}^* por \bar{Z} .

3.1.3 Diagnóstico do modelo identificado

Após identificar e estimar, de forma eficiente, os parâmetros de um modelo é preciso verificar sua adequação, ou seja, verificar se este representa satisfatoriamente os dados antes de utilizá-lo. Em muitas aplicações os modelos são julgados adequados em termos do comportamento dos resíduos, deste modo, para verificar tal adequação vários testes de adequação são propostos na literatura, tais como o teste de autocorrelação residual, teste de Box-Pierce, teste de autocorrelação cruzada, teste do periodograma cruzado, entre outros.

Neste estudo, para verificar se o modelo é adequado para representar a série histórica observar se-á se os resíduos se distribuem de forma aleatória em torno de zero e com variância constante e sejam não correlacionados. Será verificado o correlograma residual, uma vez que este permite uma análise mais detalhada da estrutura de autocorrelação indicando possíveis termos faltantes no modelo. Evidências de correlação deste tipo indicam que uma ou mais características da série não foram adequadamente descritas pelo modelo. E será utilizado, também, o teste de Box-Pierce (estatística Q), que consiste em verificar se um grupo de autocorrelações é significativamente diferente de zero, cujas hipóteses são:

$$H_0 : \rho(1) = \dots = \rho(m) = 0$$

$$H_1 : \rho(k) \neq 0, \text{ para algum } k \text{ pertencente ao conjunto } \{1, \dots, m\}$$

sendo a estatística do teste representada na equação 32:

$$Q = N \sum_{k=1}^m r_k^2. \quad (32)$$

Na prática, o número m de autocorrelações amostrais é usualmente escolhido entre 15 e 20. Se o modelo ajustado for apropriado então Q terá distribuição aproximadamente qui-quadrado com $(m - p - q)$ graus de liberdade.

O teste de Box-Pierce não tem um bom desempenho quando as amostras são pequenas, pois, a distribuição se afasta da qui-quadrado. Uma alternativa é a utilização do teste de Ljung e Box (1978), em que a estatística do teste é dada pela equação 33:

$$Q = N(N + 2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{N - k}. \quad (33)$$

Sua distribuição amostral é, aproximadamente, qui-quadrado, com $(m - p - q)$ graus de liberdade.

Na verificação da adequação do modelo a normalidade dos resíduos pode ser testada por meio do teste de Shapiro-Wilk, em que a hipótese nula é a normalidade dos resíduos *versus* a hipótese alternativa de não normalidade, histograma com curva sobreposta e um gráfico de probabilidades normais, (CHATFIELD, 1984).

Segundo Akaike (1973) uma maneira de discriminar os modelos é por meio dos critérios de informação, que levam em conta apenas a qualidade do ajuste penalizando a inclusão de parâmetros extras. Os critérios de informação mais utilizados são: AIC (Critério de Informação de Akaike), o AIC corrigido e o BIC (Critério de Informação Bayesiano). Logo, a regra básica consiste em selecionar o modelo cujo critério de informação calculado seja mínimo. Neste estudo, o critério adotado para selecionar o melhor modelo dentre os identificados será o BIC, descrito na equação 34, e o valor da estimativa da variância residual.

$$BIC = -2\ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{b\ln(T)}{T}, \quad (34)$$

em que $\hat{\sigma}^2$ é a variância residual estimada, b é o número de parâmetros, T o tamanho da série temporal.

3.1.4 Previsão

Um dos principais objetivos da análise de séries temporais é fazer previsões, a partir do modelo identificado, estimado e validado. Seja t o período corrente, o interesse é prever os valores de Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots . A previsão de Z_{t+h} , para $h = 1, 2, \dots$ será denotada por $\hat{Z}_t(h)$ e chamada de previsão h passos a frente. Quando se tem uma série temporal observada z_1, \dots, z_n as previsões podem ser feitas dentro do período amostral e comparadas com os valores observados. Assim, a diferença entre os valores previsto e observado, $\hat{z}_t(h) - z_{t+h}$, é chamada de erro aleatório de previsão h passos à frente e será denotado por e_{t+h} , (MONTGOMERY; JOHNSON; GARDINER, 1990).

Para a realização da previsão é necessário que Z_t seja estacionária e os parâmetros do modelo conhecidos. Assim, a previsão $\hat{Z}_t(h)$ pode ser expressa utilizando

a equação de diferenças, choques aleatórios e na forma invertida. Neste estudo, a fórmula utilizada para a realização de previsão se dará por meio da equação de diferenças, apresentada na equação 35, descrita em Morettin e Toloi (2004).

$$Z_{t+h} = \phi_1[Z_{t+h-1}] + \dots + \phi_{p+d}[Z_{t+h-p-d}] - \theta_1[\epsilon_{t+h-1}] - \dots - \theta_q[\epsilon_{t+h-q}] + \epsilon_{t+h}. \quad (35)$$

Desta forma, para realizar a previsão aplica-se a esperança condicional na equação 35, resultando na equação 36:

$$\widehat{Z}_t(h) = \phi_1[Z_{t+h-1}] + \dots + \phi_{p+d}[Z_{t+h-p-d}] - \theta_1[\epsilon_{t+h-1}] - \dots - \theta_q[\epsilon_{t+h-q}] + \epsilon_{t+h}, \quad (36)$$

para $h \geq 1$. Para utilizar a equação 36 na previsão deve-se considerar:

$$[Z_{t+h}] = \widehat{Z}_t(h), \text{ para } h > 0,$$

$$[Z_{t+h}] = Z_{t+h}, \text{ para } h \leq 0,$$

$$[\epsilon_{t+h}] = 0, \text{ para } h > 0 \text{ e}$$

$$\epsilon_{t+h} = \epsilon_{t+h}, \text{ para } h \leq 0.$$

3.2 Extensão da metodologia de Box-Jenkins para modelos da classe STARMA

3.2.1 Procedimentos para identificação

A identificação é o processo no qual uma subclasse da classe do modelo geral é escolhida e suas propriedades teóricas devem combinar com as estimadas a partir dos dados. As técnicas de identificação envolvem um resumo dos dados com o intuito de produzir informações que melhor correspondam às observadas. Na identificação de um modelo espaço-temporal (STARMA) uma boa idéia é combinar as N^2 possíveis covariâncias cruzadas em todos os pares de locais. O resultado é rotulado como função de autocovariância temporal. Tal função expressa a covariância entre os pontos defasados no espaço e no tempo. Usando o operador de defasagem apresentado na seção 2.6, uma covariância média entre a l -ésima ordem ponderada de vizinhos de qualquer local e a k -ésima ordem ponderada de vizinhos do mesmo local em defasagens de tempo s , no futuro, poderia ser representada pela equação 37, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980b):

$$\gamma_{lk}(s) = E \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{N} \right\}. \quad (37)$$

em que $\gamma_{lk}(s)$ é a covariância entre os vizinhos da k -ésima e l -ésima ordem com defasagem espaço-temporal s . A equação 37 pode ser expressa na forma vetorial apresentada na equação 38:

$$\gamma_{lk}(s) = E \left\{ \frac{[\mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t)]' [\mathbf{W}^{(k)} \mathbf{z}(t+s)]}{N} \right\}. \quad (38)$$

Utilizando a propriedade de $E[\mathbf{y}' \mathbf{A} \mathbf{y}] = \text{tr}[\mathbf{A} E[\mathbf{y} \mathbf{y}']]$ a equação 38 pode ser reescrita conforme a equação 39:

$$\gamma_{lk}(s) = \text{tr} \left\{ \frac{\mathbf{W}^{(k)'} \mathbf{W}^{(l)} \Gamma(s)}{N} \right\}, \quad (39)$$

em que $\Gamma(s) = E[\mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t+s)']$ e $\Gamma(s)$ tendo como estimador usual:

$$\hat{\Gamma}(s) = \sum_{t=1}^{T-s} \frac{\mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t+s)'}{T-s}. \quad (40)$$

Substituindo a equação 40 na equação 39 e o resultado obtido sendo substituído em 38, tem-se, diretamente, um estimador amostral, $\hat{\gamma}_{lk}(s)$, da função de autocovariância espaço-temporal,

$$\hat{\gamma}_{lk}(s) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} \frac{L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{N(T-s)}. \quad (41)$$

Considerando $l = 0$ e $k = 0$ nota-se que:

$$\gamma_{00}(s) = \frac{1}{N} \text{tr}[\Gamma(s)].$$

constatando-se que a autocovariância média da s -ésima defasagem é igual para todos os N locais.

Com as estimativas das autocovariâncias é possível obter os valores das ferramentas essenciais, função de autocorrelação espaço-temporal e função de autocorrelação parcial espaço-temporal, para a identificação de uma classe do modelo STARMA. No entanto, Martinn e Oeppen (1975) relatam que a definição de função de autocorrelação espaço-temporal não é uma questão simples como é na classe de modelos univariados de Box-Jenkins. Neste contexto, o interesse é definir uma função de autocorrelação que tenha variância constante para todas as defasagens espaciais. Assim, sendo uma definição

adequada de função de autocorrelação espaço-temporal entre a l -ésima e k -ésima ordem de vizinhança na defasagem temporal s é:

$$\rho_{lk}(s) = \frac{\gamma_{lk}(s)}{\sqrt{[\gamma_{ll}(0)\gamma_{kk}(0)]}}. \quad (42)$$

Essa definição é adequada pelo fato da estimativa da variância amostral se mostrar relativamente constante para toda defasagem espacial, (PFEIFER, 1979). A estimativa amostral da função de autocorrelação amostral espaço-temporal é:

$$\hat{\rho}_{lk}(s) = \frac{\hat{\gamma}_{lk}(s)}{\sqrt{[\hat{\gamma}_{ll}(0)\hat{\gamma}_{kk}(0)]}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} (L^{(l)} z_i(t))^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} (L^{(k)} z_i(t))^2}}. \quad (43)$$

Ao encontrar a função de autocorrelação amostral espaço-temporal a seleção de um modelo da classe STARMA não é trivial. Embora cada modelo tenha sua função de autocorrelação amostral espaço-temporal, é difícil distinguir entre algumas formas de modelos. De modo particular, o modelo autoregressivo é sempre conhecido, no entanto, a sua ordem é desconhecida não sendo fácil constatá-la por meio da $\hat{\rho}_{lk}(s)$. Uma solução apresentada por Martinn e Oeppen (1975) é a utilização da função de autocorrelação parcial espaço-temporal, que pode ser verificada por meio de uma extensão das equações de Yule-Walker, comumente utilizadas para caracterizar séries temporais estacionárias. Considerando um modelo STAR geral (equação 44),

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-j) + \boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (44)$$

e multiplicar ambos lados por $[\mathbf{W}^{(h)} \mathbf{z}(t-s)]'$, resultando em:

$$\mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)'} \mathbf{z}(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl} \mathbf{z}(t-j)' \mathbf{W}^{(h)'} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-j) + \mathbf{z}(t-s)' \mathbf{W}^{(h)'} \boldsymbol{\epsilon}(t). \quad (45)$$

Calculando o valor esperado e dividindo ambos lados por N segue que:

$$\gamma_{h0}(s) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{\lambda} \phi_{jl}(s-j), \quad (46)$$

Tabela 2 – Características teóricas da função de autocorrelação espaço temporal e função de autocorrelação parcial espaço temporal para modelos STAR, STMA e STARMA, (PFEIFER; DEUTSCH, 1980b)

Forma do modelo	Função de autocorrelação espaço-temporal	Função de autocorrelação parcial espaço temporal
STAR	decai gradativamente	decaimento gradativo após a última defasagem no tempo p , λ_p defasagem espacial
STMA	decaimento gradativo após a última defasagem no tempo q , m_q defasagem espacial	decai gradativamente
STARMA	decai gradativamente	decai gradativamente

3.2.2 Procedimentos para estimação

Depois da escolha do modelo candidato da classe STARMA, escolhido no estágio de identificação, e suas respectivas ordens é necessária a estimação dos parâmetros. A melhor estimativa dos parâmetros $\Phi = [\phi_{10}, \phi_{11}, \dots, \phi_{1\lambda_1}, \dots, \phi_{p0}, \phi_{p1}, \dots, \phi_{p\lambda_p}]'$ e $\Theta = [\theta_{10}, \theta_{11}, \dots, \theta_{1\lambda_1}, \dots, \theta_{q0}, \theta_{q1}, \dots, \theta_{q\lambda_q}]'$ são as estimativas de máxima verossimilhança, (AKAIKE, 1974), uma vez que a formulação do modelo básico tem erros que são ruído branco puro com distribuição normal multivariada com média $\mathbf{0}$ e matriz de variância-covariância $\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$. No entanto, os cálculos dessas estimativas de máxima verossimilhança não são de fácil obtenção.

Uma alternativa descrita por Pfeifer e Deutsch (1980a) seria aproximar os parâmetros utilizando a função de verossimilhança condicional que minimiza a soma de quadrados dos erros, porém sabe-se que $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ são erros aleatórios não observáveis e que $\mathbf{z}(t)$ são quantidades observadas. Logo para calcular o $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ é necessário isolá-lo na equação 20, resultando na equação 47:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{z}(t) - \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{z}(t-k) + \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} \mathbf{W}^{(l)} \boldsymbol{\epsilon}(t-k). \quad (47)$$

Assim, a função de verossimilhança condicional de Φ , Θ e σ^2 é:

$$L(\Phi, \Theta, \sigma^2) = (2\Pi)^{\frac{-TN}{2}} (\sigma^2)^{\frac{-TN}{2}} \exp\left(-\frac{S_*(\Phi, \Theta)}{2\sigma^2}\right), \quad (48)$$

em que $S_*(\Phi, \Theta) = \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$ e o vetor $\hat{\epsilon}$ é calculado por meio da equação 47, com $\mathbf{z}(t)$ e $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ iguais a zero para $t < 1$. Os estimadores de máxima verossimilhança de σ^2 , Φ e Θ são:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{TN}, \quad (49)$$

e $\hat{\Phi}, \hat{\Theta}$ que minimizam $S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$. A função de verossimilhança condicional torna-se exata e requer pouco esforço computacional se T é grande, porém se T é pequeno esta estimativa torna-se inadequada, afastando-se da função de verossimilhança. Isso ocorre devido ao fato das estimativas de máxima verossimilhança condicional serem também estimativas de mínimos quadrados, de modo que os valores dos parâmetros que minimizam a soma de quadrados dos resíduos de um modelo STAR são estimativas baseadas na teoria de regressão linear.

Com isso o vetor de parâmetros Φ pode ser estimado pela equação normal de mínimos quadrados,

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\Phi = \mathbf{X}'\mathbf{Z}, \quad (50)$$

e segundo Pfeifer e Deutsch (1980a) a região aproximada de confiança para os valores dos parâmetros de um modelo STAR pode ser construída usando o resultado da teoria de regressão linear, uma vez que:

$$\frac{(\Phi - \hat{\Phi})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\Phi - \hat{\Phi})}{\frac{HS_*(\hat{\Phi})}{TN-H}} \sim F_{(H, TN-H)}, \quad (51)$$

sendo que $S_*(\hat{\Phi})$ é a soma de quadrado residual, em que $\boldsymbol{\epsilon}(t)$, apresentado na equação 47, não contém o termo de médias móveis; T é o tamanho da série temporal; N o número de locais e H a dimensão do vetor Φ .

Devido a natureza dos dados de séries temporais, as pressuposições sobre a independência da variável regressora não é esperada, deste modo, os resultados clássicos sobre a distribuição dos estimadores de mínimos quadrados não seguem diretamente. Mann e Wald (1943) mostram que as propriedades associadas com os estimadores de modelos de regressão linear podem ser válidas no limite para modelos como o STAR, então:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\Phi)}{TN - H}, \quad (52)$$

e

$$\frac{(TN - H)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(TN-H)}^2, \quad (53)$$

permitindo, desta forma, o cálculo do intervalo de confiança para σ^2 .

O modelo STAR é linear, no entanto o modelo STMA não, o que leva a utilização de técnicas não lineares de otimização tais como o método de gradiente e linearização iterativa, (para maiores detalhes sobre os métodos consultar Marquardt (1963)).

A natureza não linear dos modelos STMA e STARMA apresenta problemas na determinação da região de confiança dos parâmetros. A soma de quadrados $S(\Phi, \Theta)$ e sua respectiva função de verossimilhança não são simétricas, como no caso linear, assim sendo, não é possível encontrar uma expressão fechada disponível para uma região de confiança. Com o intuito de compensar essa não simetria, uma função de verossimilhança é utilizada, a partir da qual uma região de confiança aproximada, pode ser calculada.

De maneira geral, a soma de quadrados pode ser aproximada por:

$$S(\Phi, \Theta) = S(\delta) \approx S(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})' \mathbf{Q} (\delta - \hat{\delta}), \quad (54)$$

em que

$$\delta' = (\Phi', \Theta'), \quad (55)$$

é o vetor de parâmetros e:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial S(\delta)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right] \hat{\delta}, \quad (56)$$

para $i = 1, 2, \dots, b, j = 1, 2, \dots, b$; b é o número de parâmetros (dimensão de δ). Desde que:

$$S(\Phi, \Theta) = \sum_{t=1}^T \epsilon(t) \epsilon(t)'. \quad (57)$$

Posto isto, a região de confiança para $[\Phi, \Theta]'$ é obtida, conforme descrevem Pfeifer e Deutsch (1980a) pela relação,

$$S(\delta) = S(\hat{\delta}) + \frac{b}{TN - b} S(\hat{\delta}) F_{(b, TN-b, \alpha)}. \quad (58)$$

em que $F_{(b, TN-b, \alpha)}$ é o ponto percentual da distribuição F com b e $(TN - b)$ graus de

liberdade e nível de significância α .

3.2.3 Diagnóstico do modelo identificado

Após a seleção e estimação dos parâmetros do modelo candidato, é necessário certificar se o modelo representa, de forma satisfatória, os dados. O modelo candidato pode ser insuficiente para representar a correlação observada do processo, o que implica em correlação residual, ou ainda o modelo pode ser indevidamente complexo, levando os parâmetros à não significância.

Para confirmar se o modelo identificado é um bom modelo, deve-se realizar uma análise residual e observar se estes resíduos são ruído branco, ou seja, são normalmente distribuídos com média zero e matriz de covariância $\sigma^2 \mathbf{I}_{NT}$ e todas as autocovariâncias de defasagens espaciais diferentes de zero devem ser iguais a zero, isto é, $\gamma_{lk}(s) = 0$, para todo $s \neq 0$.

Pfeifer (1979) propõe um teste para averiguar se os resíduos são ruído branco. Este teste consiste em calcular a autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos e compará-las com sua variância, isto é, se os valores da autocorrelação forem menores que a variância da estimativa de $\rho_{l0}(s)$ então os resíduos são ruídos brancos, o que implica em uma função de autocorrelação espaço-temporal igual a zero. A equação para o cálculo da variância da estimativa de $\rho_{l0}(s)$ é apresentada na equação 59:

$$var(\hat{\rho}_{l0}(s)) \approx \frac{1}{N(T-s)}, \quad (59)$$

Posto a verificação dos resíduos, deve-se também checar a significância das estimativas dos parâmetros, a qual pode ser realizada por meio da região de confiança para os parâmetros. O teste para o cálculo de significância dos parâmetros pode ser realizado, sob a hipótese de nulidade $\Phi = \Theta = \mathbf{0}$, com base na estatística teste apresentada na equação 60:

$$\frac{(TN-b)[S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}}^*) - S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}})]}{S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}})}, \quad (60)$$

em que $S_*(\hat{\boldsymbol{\delta}}^*)$ é o vetor de parâmetros em que o parâmetro a ser testado é zero, ($\delta_k = 0$).

Com distribuição $F_{(1, TN-b, \alpha)}$ sob hipótese de nulidade e caso algum parâmetro seja estatisticamente não significativo este deve ser removido do modelo.

Após identificar, estimar, verificar o modelo identificado, verificar a significância dos parâmetros, verificar se os resíduos são ruídos brancos, é necessário selecionar dentre os modelos candidatos um modelo para a obtenção de valores futuros, ou seja, previsão.

Na extensão da classe de modelos de Box-Jenkins proposta por Pfeifer e Deutsch (1980a), a seleção do melhor modelo é realizada considerando-se: o princípio da parcimônia, que consiste em escolher o modelo com menor número de parâmetros; o critério de informação BIC, o qual pode ser calculado via a equação 61 e soma de quadrados residual (SQR),

$$BIC = NT \ln(\hat{\sigma}^2) + 2b \ln(T), \quad (61)$$

em que $\hat{\sigma}^2$ corresponde a estimativa da variância residual, b é o número de parâmetros, N o número de localizações e T o tamanho da série histórica.

3.2.4 Previsão

Para os modelos da classe STARMA a previsão é realizada de forma análoga a dos modelos da classe SARIMA, em que o modelo identificado e escolhido é empregado como uma função de previsão para a variável em estudo, que neste caso, são as temperaturas mínimas médias mensais.

3.2.5 Método utilizado para a comparação das classes de modelos SARIMA e STARMA

A análise comparativa entre os modelos propostos por Box e Jenkins (1970) e por Pfeifer e Deutsch (1980a) será realizada considerando as respectivas variâncias residuais e os respectivos desempenhos nas previsões, os quais podem ser medidos por meio de erros de previsões.

Na literatura, diversas medidas foram desenvolvidas para resumir os erros gerados por um método de previsão. Tais medidas envolvem o cálculo de uma função em relação às diferenças entre os valores reais e os valores previstos que são, frequentemente, referenciadas como erros, (BAILLIE, 1979).

Os erros podem ser utilizados em estatísticas capazes de verificar quais os métodos de previsão que resultam em melhores estimativas. Segundo Hanke, Wivhen e Reitsch (2001) as estatísticas que medem o grau de ajustamento do modelo aos dados são,

principalmente, a soma dos quadrados dos erros, o erro quadrático médio, o erro absoluto médio e o desvio padrão absoluto médio.

Nesta pesquisa, utilizar-se-á o erro quadrático médio, que incide em, após o ciclo iterativo de Box-Jenkins, realizar as previsões e comparar os valores previstos com os reais, verificando qual metodologia proporciona o menor erro quadrático médio de previsão. O erro quadrático médio (EQM) pode ser expresso pela equação 62:

$$EQM = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h e_{t+h}^2, \quad (62)$$

em que,

$$e_{t+h} = \hat{z}_t(h) - z_{t+h}, \quad (63)$$

conforme definido em 3.1.4.

3.2.6 Análise das séries históricas-parte computacional

As análises das séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais serão realizadas de acordo as metodologias propostas por Box e Jenkins (1970) e Pfeifer e Deutsch (1980a), conforme mencionado.

Para as análises segundo Box e Jenkins (1970) toda a parte computacional encontra-se implementada no *software* R, (JÚNIOR; DIGGLE, 2001). Os pacotes a serem utilizados nestas análises serão: *foreign*, *geoR*, *maptools*, *MASS*, *forecast* e *tseries*. Os pacotes *foreign*, *geoR*, *maptools* e *MASS* são utilizados para ler os arquivos em extensão *shape* usados para construir o mapa no qual serão apresentadas as estações meteorológicas do Paraná e para identificar as estações a serem estudadas. Os pacotes *forecast* e *tseries* serão utilizados na análise das séries temporais para identificar os modelos, estimar os parâmetros dos modelos identificados, escolher dentre os modelos identificados o melhor para representar os dados de temperaturas mínimas médias, verificar a adequação do modelo identificado e escolhido e por fim realizar as previsões.

Em relação às análises a serem realizadas por meio da metodologia de Pfeifer e Deutsch (1980a) não há nenhum pacote no *software* R disponível para a mesma. Deste modo, neste estudo, conforme apresentado nos objetivos, serão desenvolvidas rotinas capazes de modelar séries históricas provenientes de dados com características espaço-

temporais.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção apresenta e discute os resultados obtidos dentro da pesquisa realizada com a utilização das ferramentas selecionadas e a aplicação dessas ferramentas na identificação do método de previsão mais adequado.

Para analisar dados de séries temporais é necessária a preparação dos dados, que consiste em uma análise exploratória para detectar a presença de outliers ou dados faltantes, os quais possam influenciar, erroneamente, no ajuste do modelo.

As séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais serão analisadas sob dois diferentes métodos, Box-Jenkins e sua extensão para dados espaço-temporais. Os resultados e discussões serão apresentados segundo cada método nas seções 4.2 e 4.3, respectivamente, e assim proceder-se-a com a comparação entre os mesmos, apresentada na seção 4.4.

4.1 Descrição e análise dos dados

O estado do Paraná é dividido em 10 mesorregiões, conforme apresentado na Figura 3, na qual todas apresentam estações meteorológicas. Visto que todas as mesorregiões apresentam estações meteorológicas para proceder as análises escolheu-se, aleatoriamente, uma mesorregião, Noroeste Paranaense, em que as estações meteorológicas são identificada na cor vermelha, Figura 4. As estações meteorológicas presentes na mesorregião Noroeste Paranaense e utilizadas neste estudo são: 2, 3, 4, 6, 43, 44, 45, e 47.



Figura 3 – Mesorregiões do Estado do Paraná

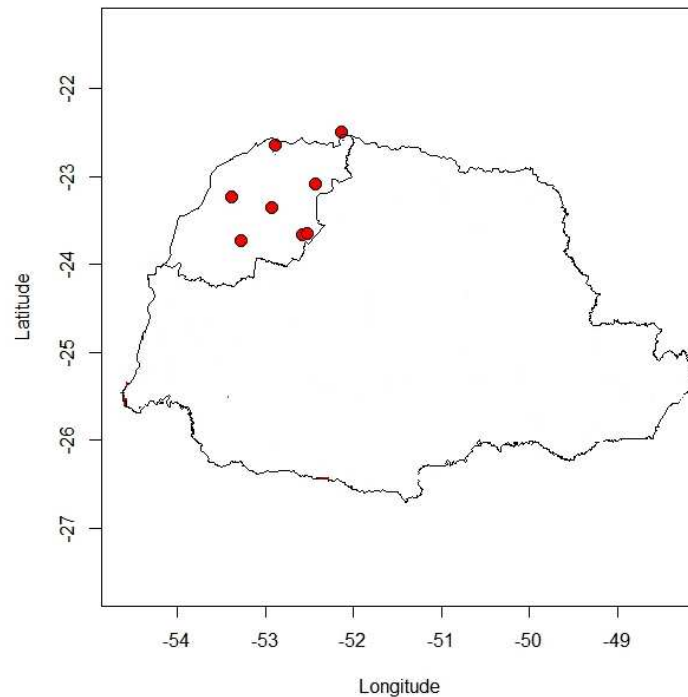


Figura 4 – Estações meteorológicas presentes na Mesorregião Noroeste Paranaense

Uma análise exploratória das temperaturas mínimas médias mensais foi realizada com o objetivo de conhecer melhor os dados e verificar se há presença de outliers. Esta análise foi realizada usando a base de dados composta pelas oito estações meteorológicas em estudo nos anos de 2004 a 2012 e os resultados são expostos na Tabela 3.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas das séries originais das temperaturas mínimas médias mensais por estação meteorológica

Estação	Média	Variância	Máximo	Mínimo	Assimetria
02	18,37	8,53	22,94	10,57	-0,44
03	18,00	8,92	22,41	9,97	-0,45
04	18,28	8,80	22,48	10,44	-0,44
06	17,94	10,3	22,22	10,23	-0,41
43	17,65	8,06	22,14	10,27	-0,43
44	18,17	8,02	22,47	10,09	-0,48
45	15,97	13,5	21,25	7,42	-0,38
47	18,08	8,99	22,93	9,87	-0,41

Na Tabela 3 é possível observar a semelhança entre os valores da média, variância, máximo, mínimo e assimetria para as estações meteorológicas 2, 3, 4, 6, 43, 44 e 47. Observa-se, também, que a estação 45 apresenta um valor médio, máximo e mínimo

inferior as demais, bem como apresenta uma variabilidade maior em relação às outras estações.

Na Figura 5 são apresentadas as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais de cada estação meteorológica.

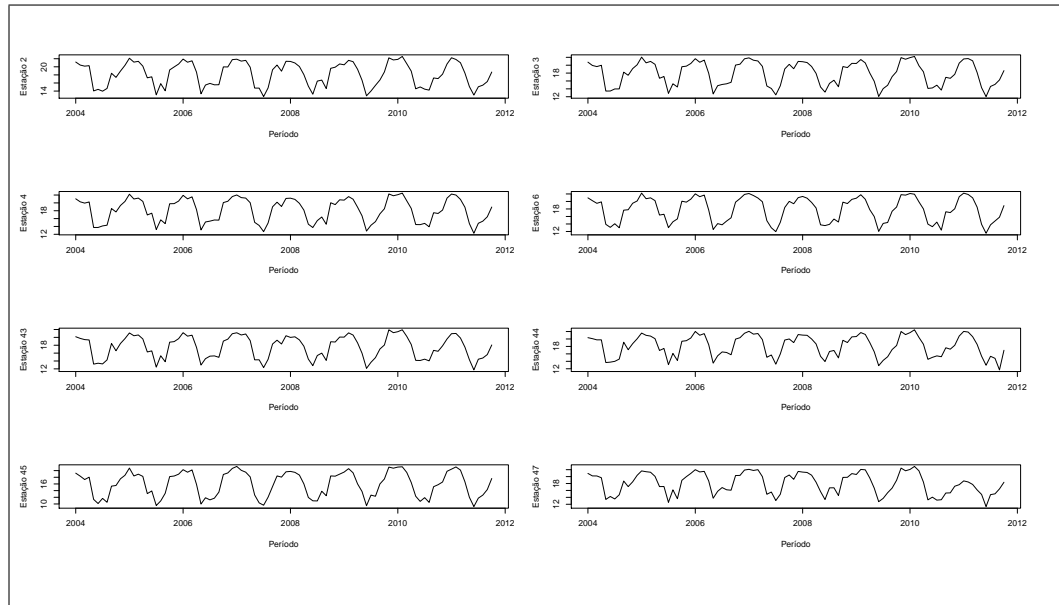


Figura 5 – Séries históricas de temperaturas mínimas médias em 8 estações meteorológicas no Paraná

Observando a Figura 5 é possível verificar que as séries históricas não apresentam uma componente de tendência, ou seja, estas são estacionárias. Nota-se ainda que as séries apresentam uma periodicidade, a qual se repete anualmente. Este comportamento sugere a presença de uma componente sazonal.

4.2 Análise segundo a classe de modelos SARIMA

Considerando a metodologia proposta por Box e Jenkins (1970), para definir um modelo de séries temporais, é necessário a visualização da função de autocorrelação (FAC) e função de autocorrelação parcial (FACP). Por meio da FAC, exibida na Figura 6, foi possível constatar a presença da componente de sazonalidade sugerida na Figura 5.

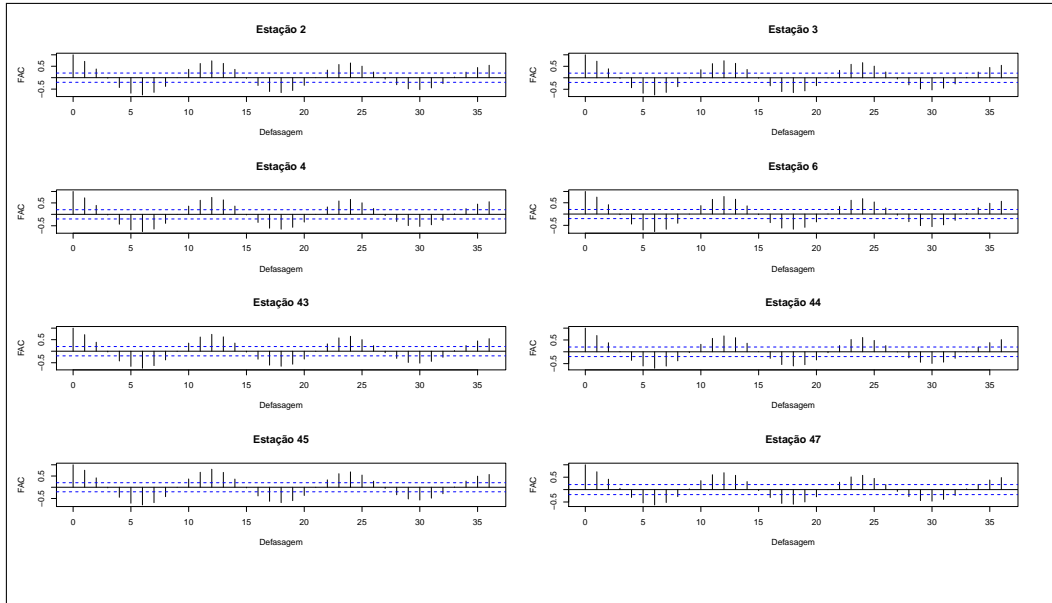


Figura 6 – Função de autocorrelação temporal das séries históricas de temperaturas mínimas médias

Como pode ser observado na Figura 5 as periodicidades presentes nas séries históricas são anuais; isso também é visto na Figura 6, pois é fácil de verificar que esta apresenta um comportamento senoidal nos valores das autocorrelações.

Para retirar a componente de sazonalidade das séries de temperaturas mínimas médias mensais é necessário aplicar uma diferença no período sazonal. Neste caso como a periodicidade é anual as séries devem ser diferenciadas em $S=12$. As séries diferenciadas são expostas na Figura 7, a FAC e FACP são exibidas nas Figuras 8 e 9, respectivamente.

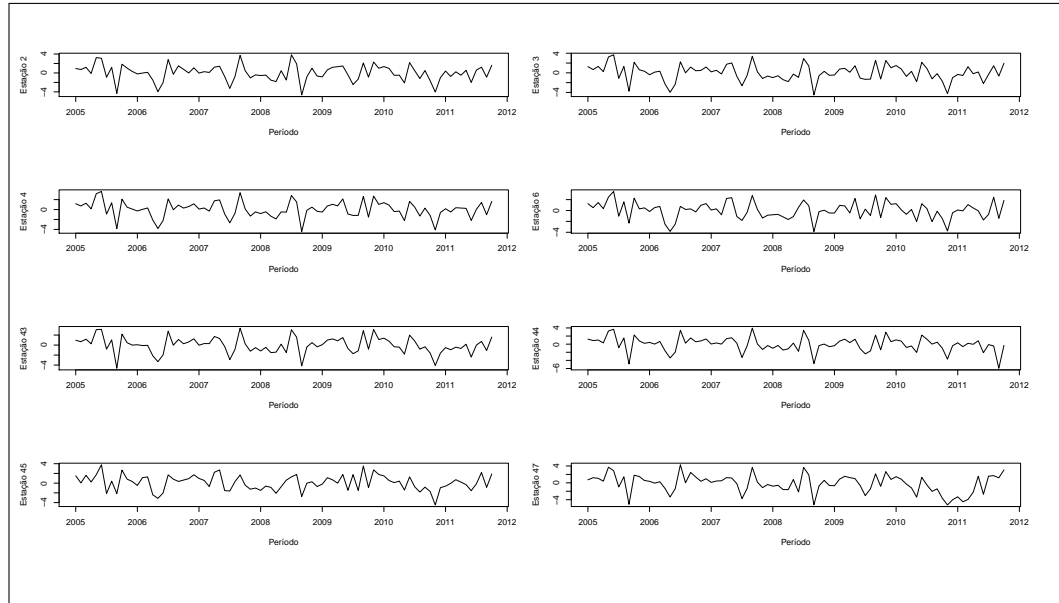


Figura 7 – Séries históricas diferenciadas das temperaturas mínimas médias em 8 estações meteorológicas no Paraná

Após a diferenciação, nota-se que as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais ainda apresentam o mesmo comportamento, isto é, são semelhantes, garantindo segundo Pfeifer (1979) a correlação espacial e a estacionariedade espacial do sistema, uma vez que a mesma relação é esperada para todas as estações.

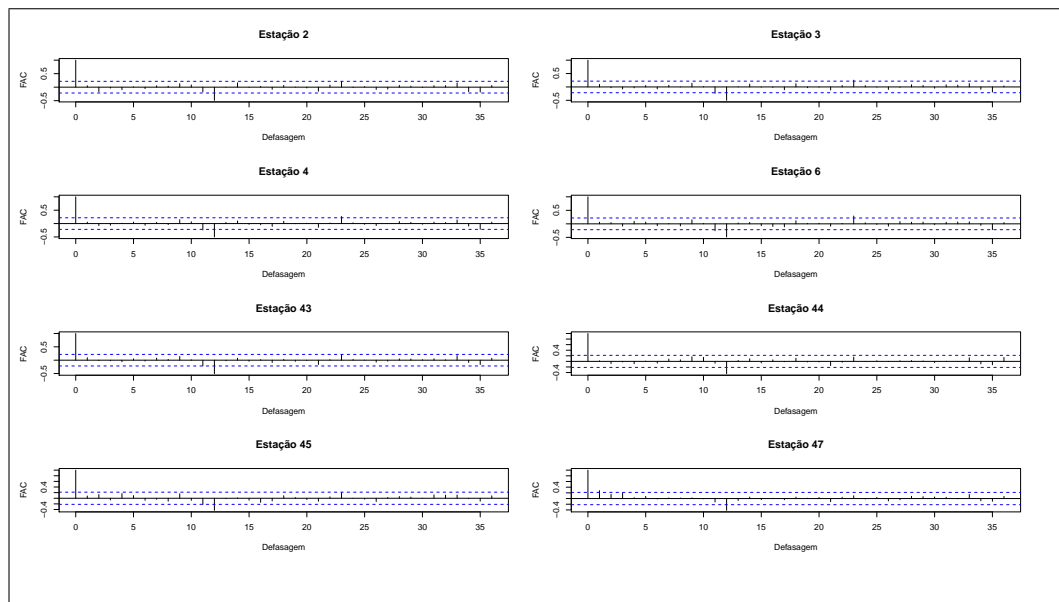


Figura 8 – Função de autocorrelação temporal das séries históricas de temperaturas mínimas médias com uma diferenciação sazonal

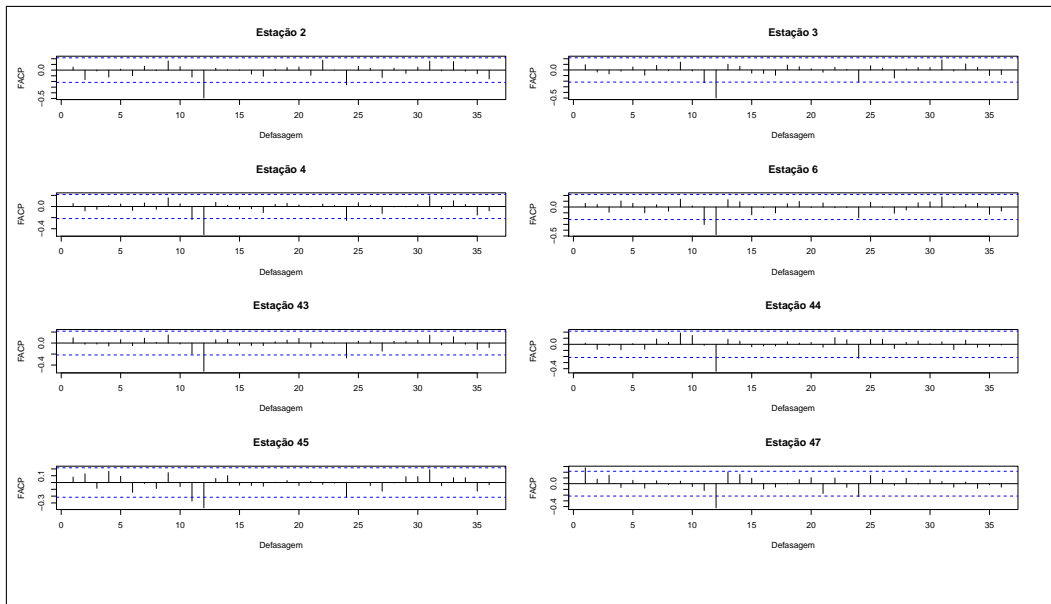


Figura 9 – Função de autocorrelação parcial temporal das séries históricas com uma diferenciação sazonal

Após a diferenciação sazonal é possível constatar que as séries não apresentam mais um comportamento periódico. Deste modo, observando as FAC's e FACP's das séries compostas de uma diferença sazonal foi possível a identificação dos modelos para as estações em estudo. O processo de identificação dos modelos consiste em observar os valores de autocorrelação que se encontram fora dos intervalos nas FAC's e nas FACP's de cada estação meteorológica. Na FAC identificam-se os termos de médias móveis (q) e os termos de médias móveis sazonais (Q), na FACP identificam-se os termos autorregressivos (p) e os termos autorregressivos sazonais (P). A Tabela 4 apresenta os modelos identificados com base nas FAC's e FACP's para descreverem o comportamento das séries de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas.

Tabela 4 – Modelos da classe SARIMA identificados para descrever as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo

Estação	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
02	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,1)	-	-
03	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,1)	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,2)	
04	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,1)	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,2)	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,1)
06	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,2)	-
43	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,0)	-
44	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,0)	-
45	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,1)	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,1)
47	SARIMA(1,0,1) \times (2,1,0)	SARIMA(1,0,1) \times (1,1,1)	SARIMA(1,0,1) \times (2,1,1)

No processo de identificação dos modelos, ao se analisarem as FAC's e

FACP's, na maioria dos casos, identificam-se mais de um modelo. Sendo assim, é necessário escolher, dentre os modelos identificados, um modelo que melhor se ajuste às séries. Neste estudo, para escolher este modelo considerou-se o princípio da parcimônia, o BIC e as estimativas das variâncias residuais. Na Tabela 5, são exibidos para cada estação meteorológica, os modelos identificados com seus respectivos valores de BIC e as estimativas das variâncias residuais.

Tabela 5 – Valores de BIC e estimativas das variâncias residuais para a escolha dos modelos da classe SARIMA

Estação	Modelo	BIC	$\hat{\sigma}^2$
02	1	292,96	1,39
03	1	287,11	1,41
	2	292,00	1,42
04	1	281,60	1,30
	2	289,82	1,27
	3	284,99	1,28
06	1	273,60	1,15
	2	276,82	1,25
43	1	279,23	1,25
	2	290,70	1,66
44	1	304,80	2,25
	2	314,59	1,72
45	1	291,04	1,54
	2	291,69	1,55
	3	295,99	1,54
47	1	327,32	1,99
	2	329,24	1,99
	3	331,03	1,94

Com base no princípio da parcimônia, nos valores de BIC e nas estimativas das variâncias residuais escolheu-se o modelo que melhor se ajusta às séries de temperaturas mínimas médias mensais. Na Tabela 6 são expostos os modelos escolhidos para descrever as séries históricas de cada estação meteorológica.

Tabela 6 – Modelos da classe SARIMA escolhidos para descrever as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo

Estação	Modelo
02	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,1)
03	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,1)
04	SARIMA(0,0,0) \times (1,1,1)
06	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)
43	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)
44	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)
45	SARIMA(0,0,0) \times (2,1,0)
47	SARIMA(1,0,1) \times (2,1,0)

Utilizando-se o método de estimativas de máxima verossimilhança condicional estimaram-se os parâmetros dos modelos ajustados. As estimativas dos parâmetros são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Estimativas dos parâmetros dos modelos da classe SARIMA ajustados às séries de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas em estudo com seus respectivos erros padrões

Estação	ϕ_1	Φ_1	Φ_2	θ_1	Θ_1
02	-	-0,40(0,29)	-0,20(0,22)	-	-0,56(0,33)
03	-	-0,30(0,17)	-	-	-0,61(0,18)
04	-	-0,31(0,16)	-	-	-0,66(0,17)
06	-	-	-	-	-0,92(0,40)
43	-	-0,94(0,10)	-0,49(0,10)	-	-
44	-	-0,91(0,11)	-0,49(0,10)	-	-
45	-	-0,73(0,11)	-0,37(0,11)	-	-
47	0,90(0,08)	-0,92(0,10)	-0,52(0,09)	-0,64(0,13)	-

Por intermédio da Tabela 7 constata-se que os parâmetros Φ_1 e Φ_2 do modelo ajustado para a série temporal da estação meteorológica 2, assim como o parâmetro Φ_1 do modelo ajustado para as séries temporais das estações meteorológicas 3 e 4 não foram significativos ao nível de 5% de significância. Deste modo, estes podem ser retirados do modelo. Com a retirada dos parâmetros não significativos dos modelos ajustados para as séries das estações 2, 3 e 4 os novos modelos são expostos na Tabela 8.

Tabela 8 – Modelos da classe SARIMA para as estações 2, 3 e 4

Estação	Modelo
02	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)
03	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)
04	SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)

Com os novos modelos para as estações 2, 3 e 4 têm-se novas estimativas para os parâmetros, as quais são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 – Estimativas dos parâmetros dos modelos da classe SARIMA ajustados às séries de temperaturas mínimas médias mensais da estações 2, 3 e 4

Estação	Θ_1
02	-1,00(0,23)
03	-0,93(0,43)
04	-1,00(0,36)

Observando os valores das estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros padrões, Tabela 9, verifica-se que os parâmetros estimados são significantes ao nível de significância de 5%. Deste modo, é possível proceder as análises.

Com a identificação dos modelos, as estimações dos parâmetros e as verificações das significâncias das estimativas finalizadas, faz-se necessário averiguar a adequabilidade dos modelos às séries de temperaturas mínimas médias mensais. Nas Figuras 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 são apresentados os resíduos, as FAC's residuais e os valores de p do teste Ljung-Box.

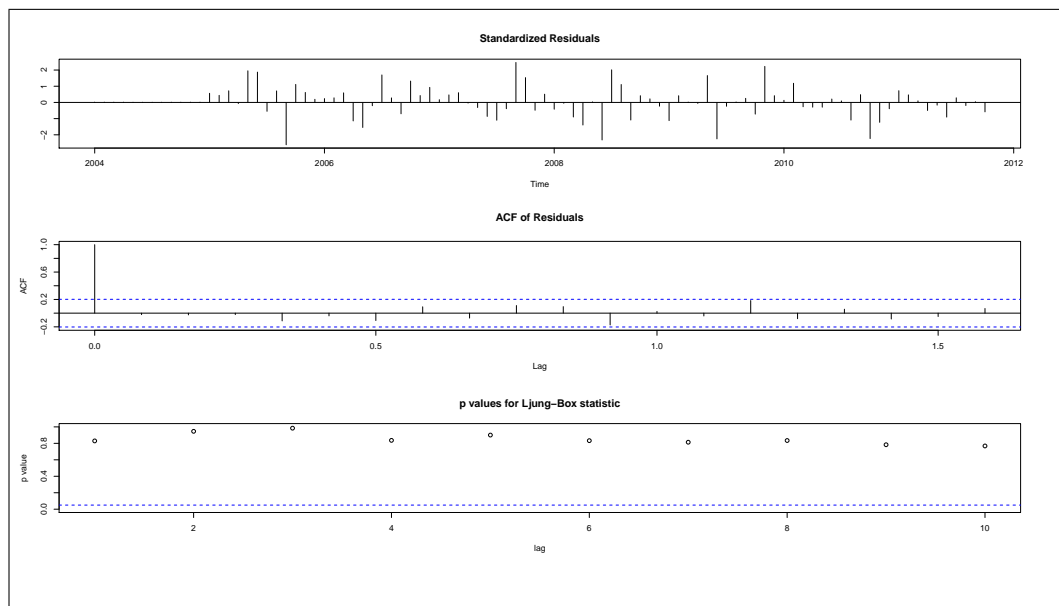


Figura 10 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 2

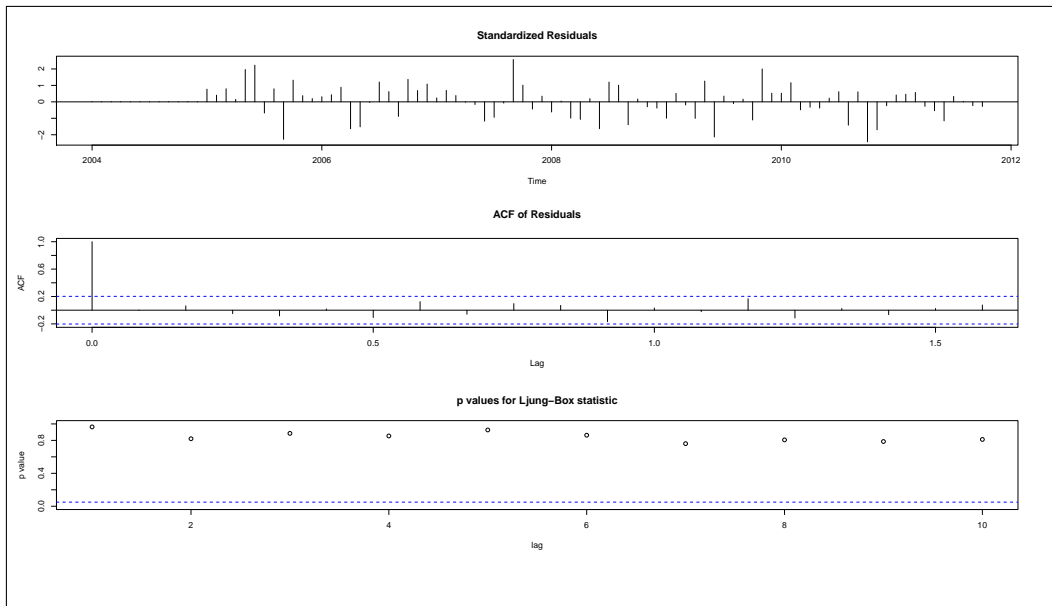


Figura 11 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 3

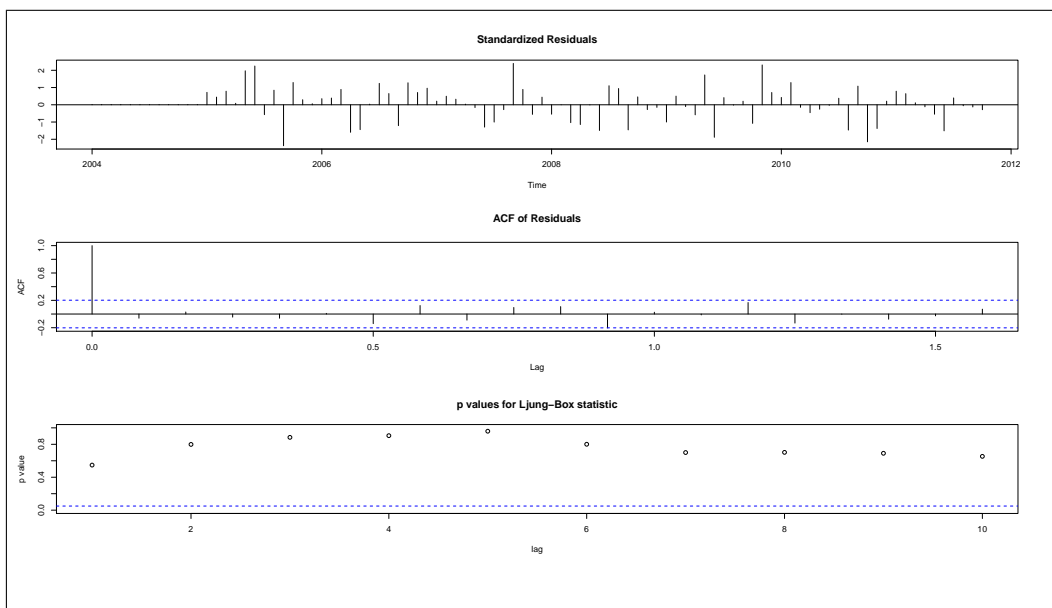


Figura 12 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 4

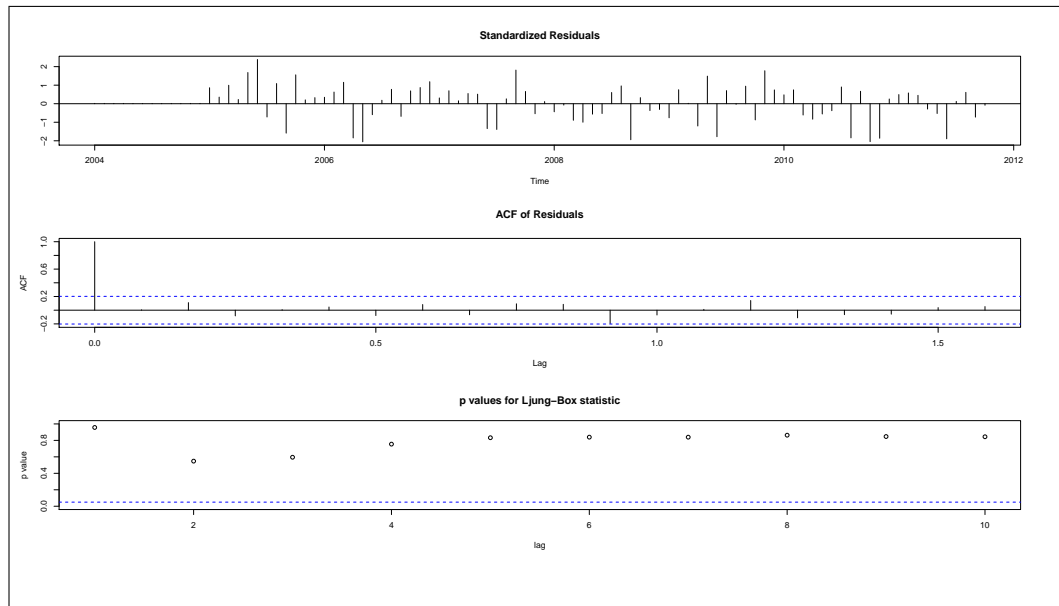


Figura 13 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 6

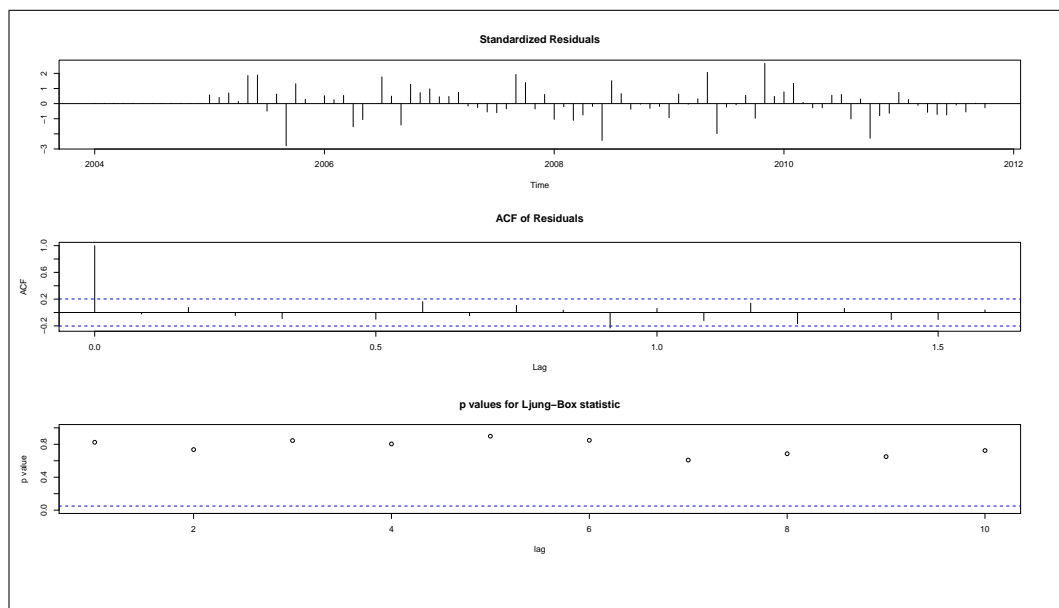


Figura 14 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 43

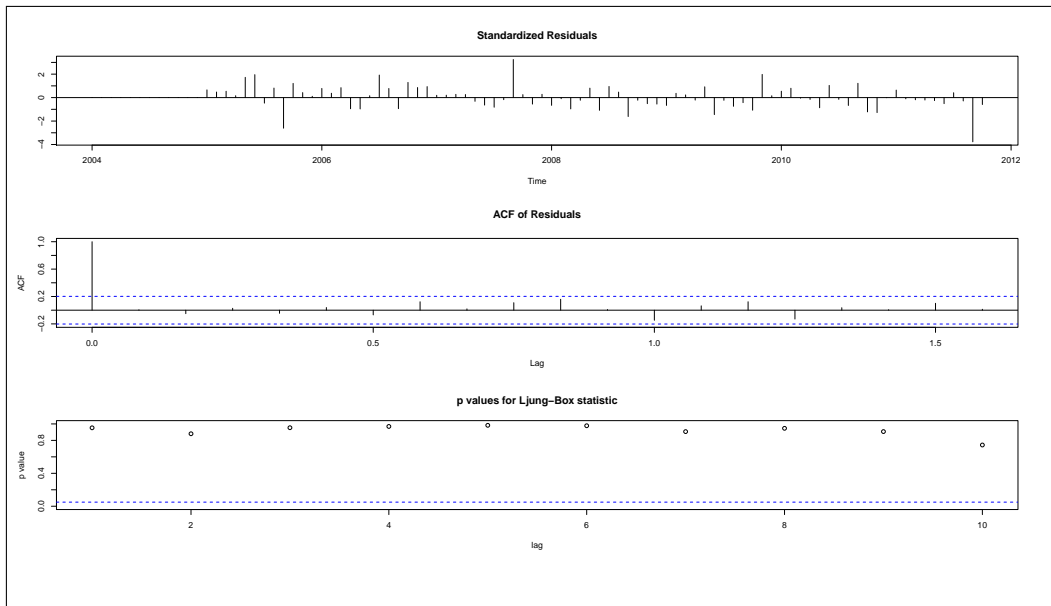


Figura 15 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 44

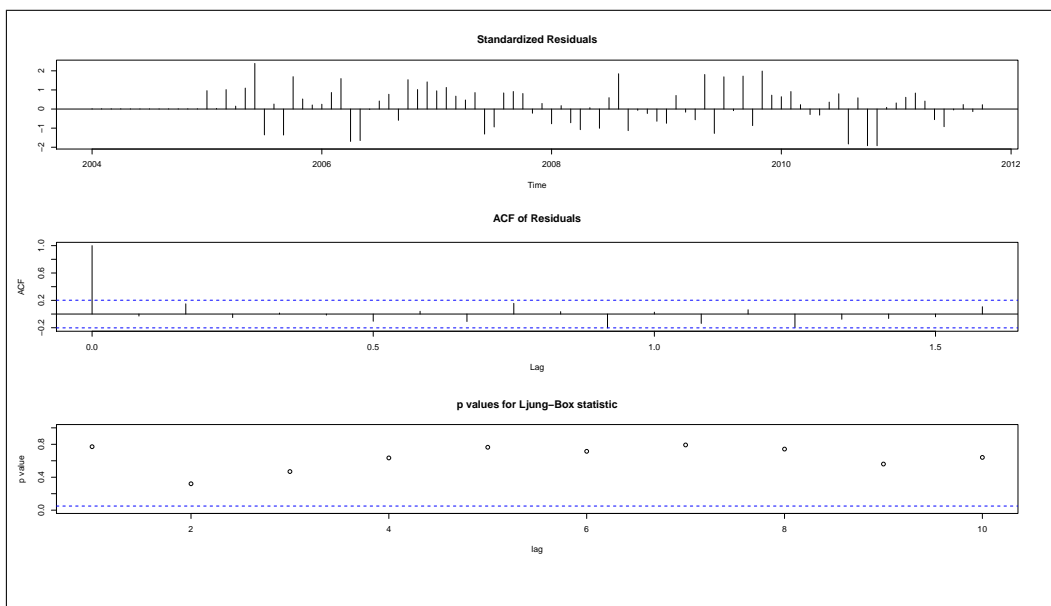


Figura 16 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 45

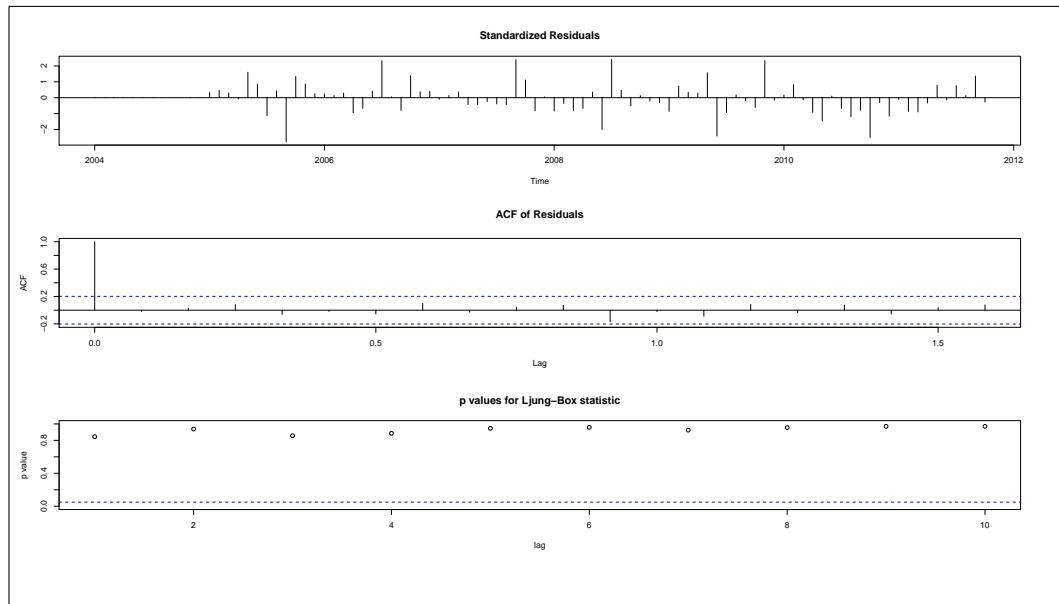


Figura 17 – Resíduos padronizados, FAC residual e o valor de p do teste Ljung-Box para o modelo ajustado para a estação 47

Nota-se por intermédio das Figuras 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17 que os resíduos apresentam uma distribuição aleatória em torno de zero; as FAC's residuais evidenciam a ausência de autocorrelação serial, comprovada por meio dos valores de p do teste de Ljung-Box.

A normalidade dos resíduos, provenientes de cada modelo, pode ser observada de maneira empírica na Figura 18, a qual apresenta as distribuições de frequências residuais, os histogramas. O teste realizado para ratificar a normalidade dos resíduos de cada modelo ajustado, foi o teste de Shapiro Wilk, que apresentou um valor de p maior que o nível de significância de 5%.

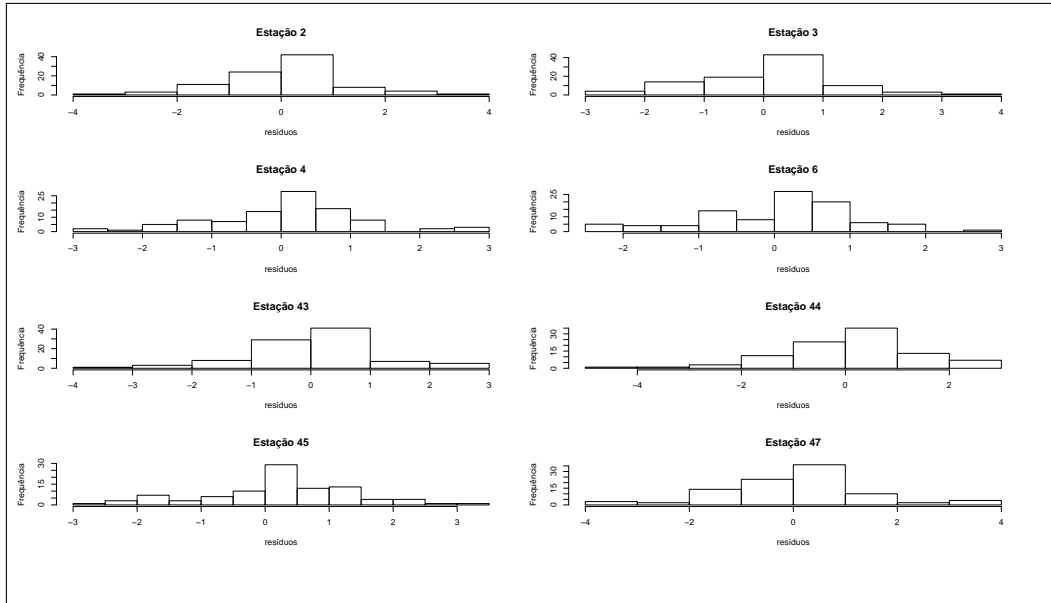


Figura 18 – Histograma dos resíduos

Considerando os processos de estimação, identificação e adequação dos modelos é possível constatar que os modelos expostos na Tabela 6 ajustados para as séries temporais das estações 6, 43, 44, 45 e 47 e os expostos na Tabela 8 ajustados para as séries temporais das estações 2, 3 e 4 são satisfatórios e podem ser utilizados para a realização de previsões.

4.3 Análise segundo a classe de modelos STARMA

Nos resultados pertinentes à metodologia de Box-Jenkins estendida por Pfeifer e Deutsch (1980a) para dados espaço-temporais, seguiu-se o procedimento apresentado na seção 3. Deste modo, inicialmente, são expostas na Tabela 10 as coordenadas geográficas em graus, minutos e segundos das estações meteorológicas presentes na Mesorregião Noroeste Paranaense.

Tabela 10 – Estações meteorológicas e suas respectivas localizações geográficas

Estação	Latitude	Longitude
02	-23°23'25"	-53°38'95"
03	-23°35'92"	-52°93'14"
04	-22°63'94"	-52°89'01"
06	-22°49'17"	-52°13'44"
42	-23°08'33"	-52°43'33"
43	-23°66'66"	-52°58'33"
45	-23°65'00"	-52°53'00"
47	-23°73'33"	-53°28'33"

Para a modelagem dos dados utilizando a classe de modelos STARMA, faz-se necessário a definição da matriz de ponderação, \mathbf{W} . Neste estudo, construiu-se a matriz de ponderação proposta por Rao e Antunes (2004), em que a matriz de ponderação de ordem zero ($\mathbf{W}^{(0)}$) é especificada como $\mathbf{I}_{8 \times 8}$ e a matriz de ponderação de ordem um ($\mathbf{W}^{(1)}$) tem seus pesos de vizinhanças calculados por meio do inverso da distância euclidiana. No cálculo da matriz $\mathbf{W}^{(1)}$ converteram-se as coordenadas geográficas de graus, minutos e segundos para UTM, a fim de corrigir a projeção cilíndrica da terra. A matriz $\mathbf{W}^{(1)}$ é apresentada a seguir:

$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,09 & 0,11 & 0,25 & 0,18 & 0,16 & 0,16 & 0,06 \\ 0,13 & 0,00 & 0,12 & 0,26 & 0,14 & 0,11 & 0,12 & 0,11 \\ 0,14 & 0,10 & 0,00 & 0,17 & 0,12 & 0,15 & 0,16 & 0,17 \\ 0,20 & 0,15 & 0,12 & 0,00 & 0,07 & 0,13 & 0,12 & 0,21 \\ 0,23 & 0,13 & 0,13 & 0,11 & 0,00 & 0,09 & 0,09 & 0,22 \\ 0,22 & 0,10 & 0,18 & 0,22 & 0,10 & 0,00 & 0,01 & 0,18 \\ 0,22 & 0,11 & 0,18 & 0,20 & 0,09 & 0,01 & 0,00 & 0,19 \\ 0,06 & 0,08 & 0,15 & 0,26 & 0,18 & 0,13 & 0,14 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Ressalta-se que os valores presentes na matriz de ponderação, $\mathbf{W}^{(1)}$, indicam a proximidade das estações meteorológicas, de modo que quanto menor o valor dos pesos mais próximas as estações se encontram.

A identificação dos modelos da classe STARMA foi realizada com base nos valores da autocorrelação espaço-temporal. Esses valores encontram-se nas funções de autocorrelações espaço-temporais (FACST) de ordem 0 e de ordem 1, expostas na Figura 19.

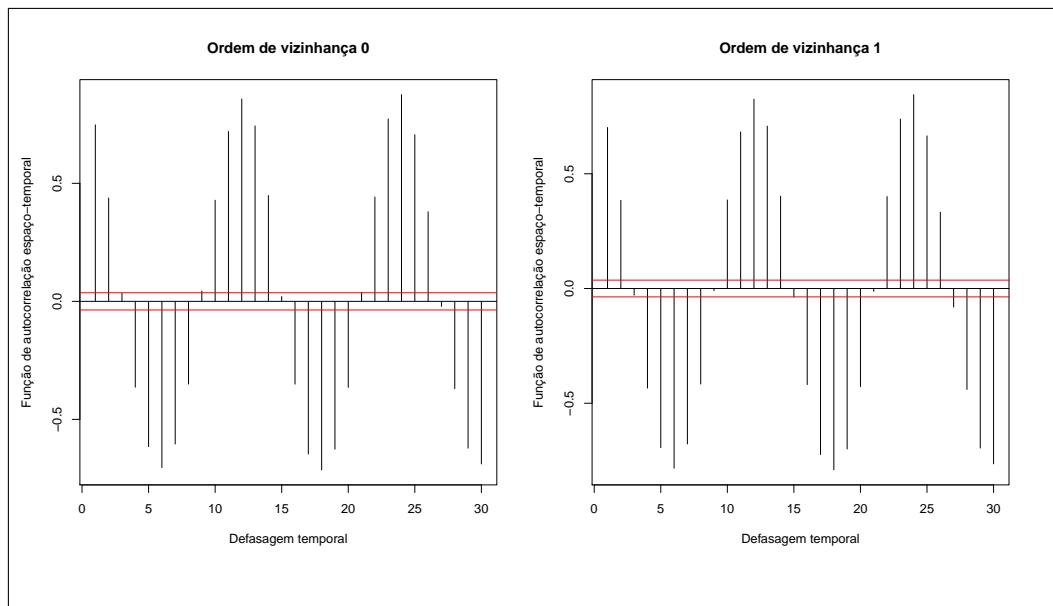


Figura 19 – FACST de ordem 0 e de ordem 1

Como foi observado na Figura 5 a presença da componente de sazonalidade assim, também, a FACST de ordem 0 e de ordem 1, exposta na Figura 19, detecta a presença dessa componente. Ainda, observando-se a Figura 19 é possível constatar que a periodicidade da componente sazonal é anual, deste modo, de maneira análoga a classe de modelos univariada, realiza-se uma diferença sazonal em $S=12$.

Realizada a diferença sazonal nas séries temporais de temperaturas mínimas médias mensais das estações (Figura 7), obteve-se a FACST e a função de autocorrelação parcial espaço-temporal (FACPST) as quais se encontram na Figura 20.

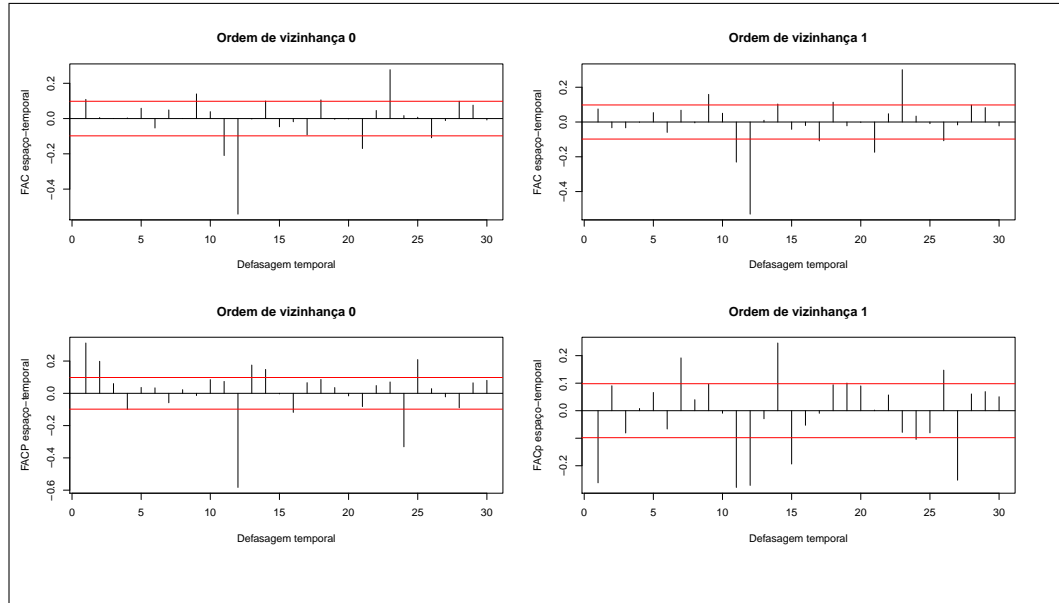


Figura 20 – FACST e FACPST de ordem 0 e de ordem 1, para as séries de temperaturas mínimas médias diferenciadas

Analisando as FACST e FACPST (Figura 20) de ordens 0 e 1 nota-se a dificuldade em se identificar um modelo, assim como Pfeifer e Deutsch (1980b) relatam em seu artigo. Considerando essa dificuldade, na Figura 21 os parâmetros de ordens autorregressivas espaço-temporais e de médias móveis espaço-temporais selecionados para compor os modelos da classe STARMA foram destacados.

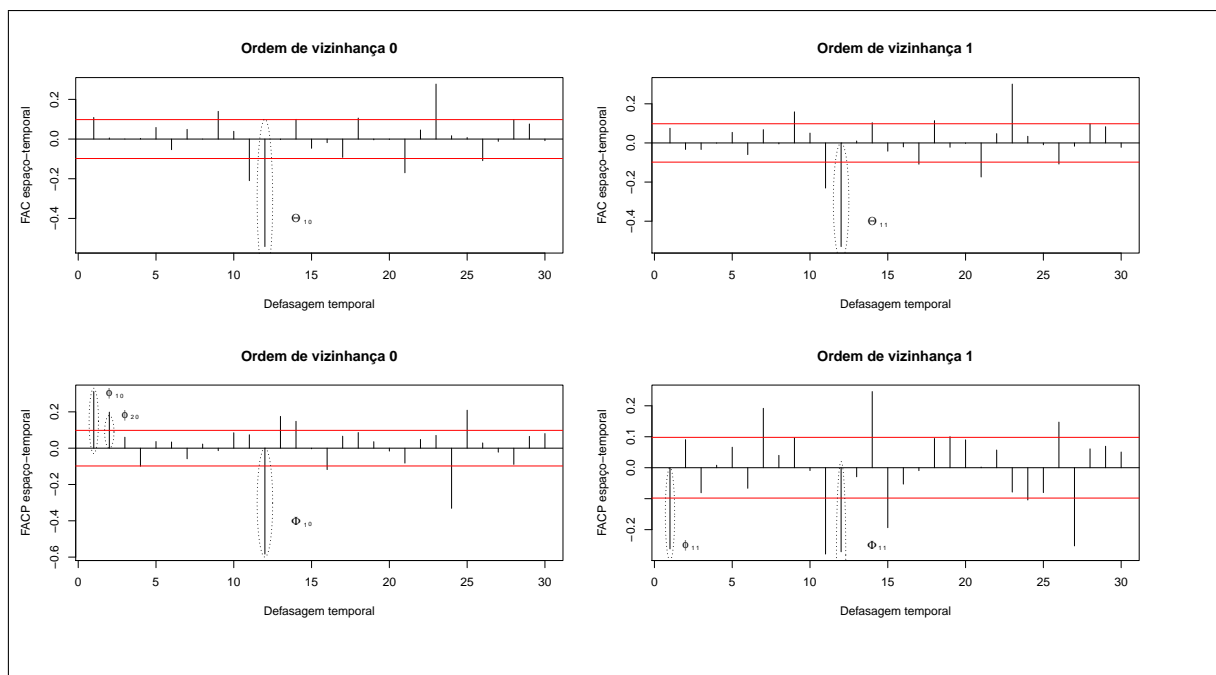


Figura 21 – FACST e FACPST de ordem 0 e de ordem 1 com os parâmetros destacados

Por intermédio da Figura 21 é possível identificar alguns modelos capazes de descrever as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais das estações meteorológicas. Os modelos identificados são expostos na Tabela 11.

Tabela 11 – Modelos da classe STARMA identificados

Identificação	Modelo
1	STARMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1 ₁)
2	STARMA(2, 0, 0) \times (0, 1, 1 ₁)
3	STARMA(3, 0, 0) \times (0, 1, 1 ₁)
4	STARMA(1, 0, 0) \times (1 ₁ , 1, 1 ₁)

Em seguida à identificação de 4 modelos candidatos, é necessário verificar qual destes é o melhor, isto é, qual se ajustaria de forma mais satisfatória às séries temporais. Para tanto, utilizou-se o princípio da parcimônia, os valores de BIC, as estimativas das variâncias residuais, a soma dos resíduos, apresentadas na Tabela 12, e as FACST's residuais.

Tabela 12 – Valores de BIC, estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para os modelos ajustados

Modelo	BIC	$\hat{\sigma}^2$	Soma de quadrados dos resíduos
1	476,74	1,99	1303,23
2	477,69	1,96	1287,53
3	485,29	1,93	1268,17
4	488,73	1,97	1292,07

A Tabela 12 expos os valores do critério BIC, as estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para cada modelo identificado e por meio destes verifica-se que o modelo 1, STARMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1₁), possui os menores valores de BIC, estimativa da variância residual, soma de quadrado residual e atende o princípio da parcimônia.

As FACST's residuais, assim como na classe univariada de Box e Jenkins (1970), são capazes de verificar se os modelos identificados captam as autocorrelações espaço-temporais. Para tanto, as FACST's são apresentadas nas Figuras 22, 23, 24, 25.

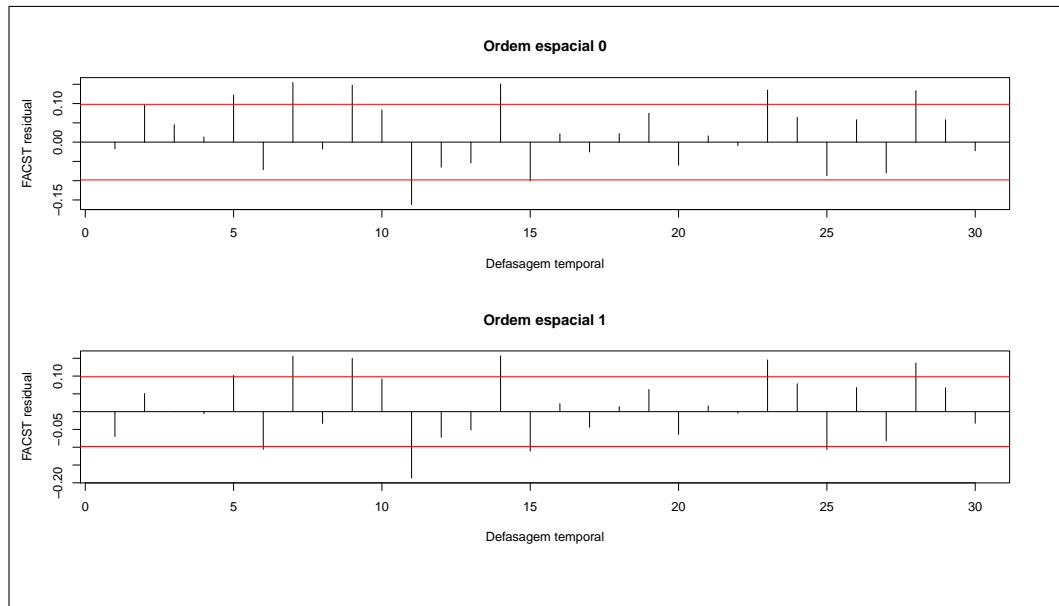


Figura 22 – FAC residual do modelo STARMA(1, 0, 0) \times (0, 1, 1₁)

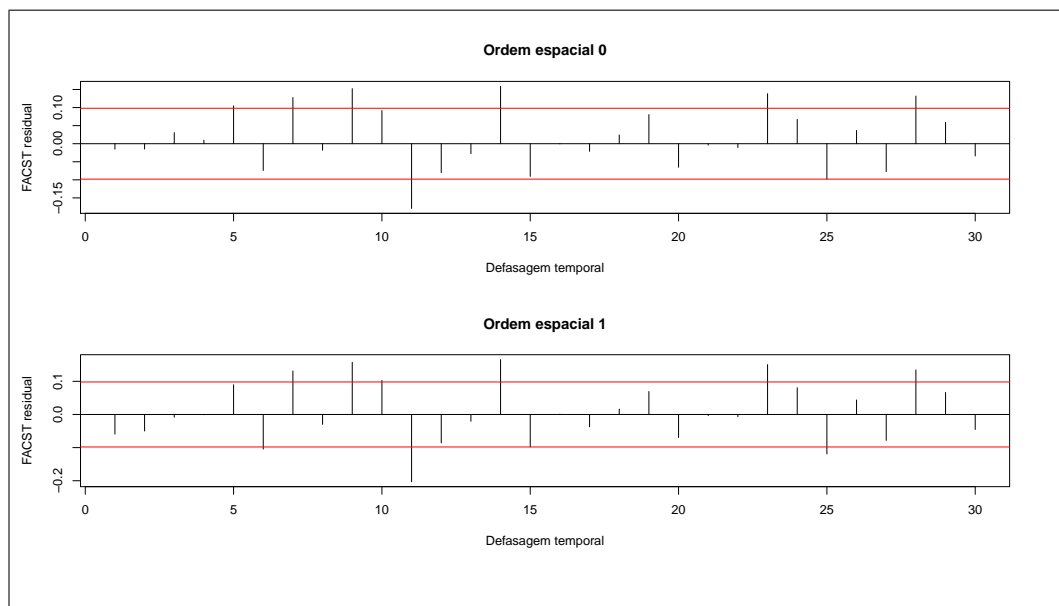


Figura 23 – FAC residual do modelo STARMA(2, 0, 0) \times (0, 1, 1₁)

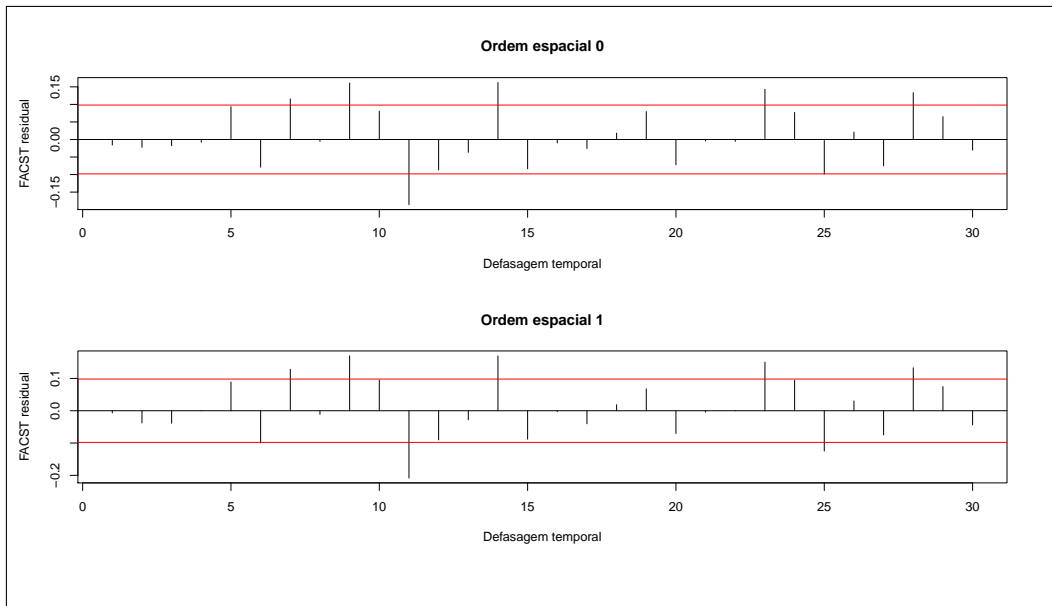


Figura 24 – FAC residual do modelo STARMA(3, 0, 0) \times (0, 1, 1₁)

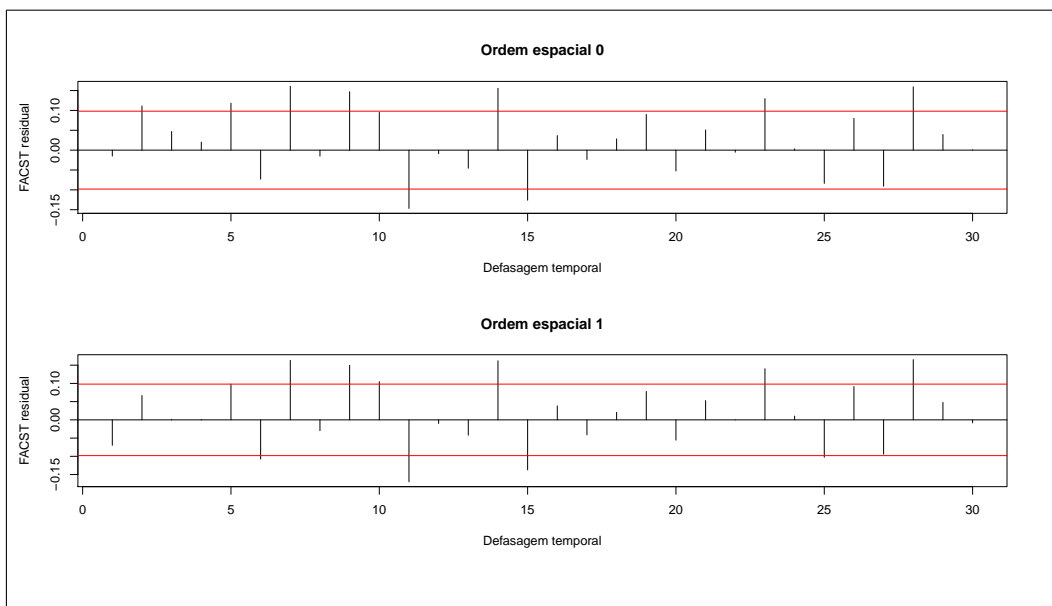


Figura 25 – FAC residual do modelo STARMA(1, 0, 0) \times (1₁, 1, 1₁)

Observando as Figuras 22, 23, 24, 25 verifica-se que os modelos ajustados não foram capazes de captar todas as autocorrelações espaço-temporais presentes nas séries históricas. Percebe-se, também, que a autocorrelação de defasagem 14 encontra-se fora dos limites em todas as FACST's e FACPST's de ordem zero e um. Deste modo, acrescentado-se esta autocorrelação é possível a identificação de mais 4 modelos, os quais são apresentados na Tabela 13.

Tabela 13 – Modelos da classe STARMA identificados

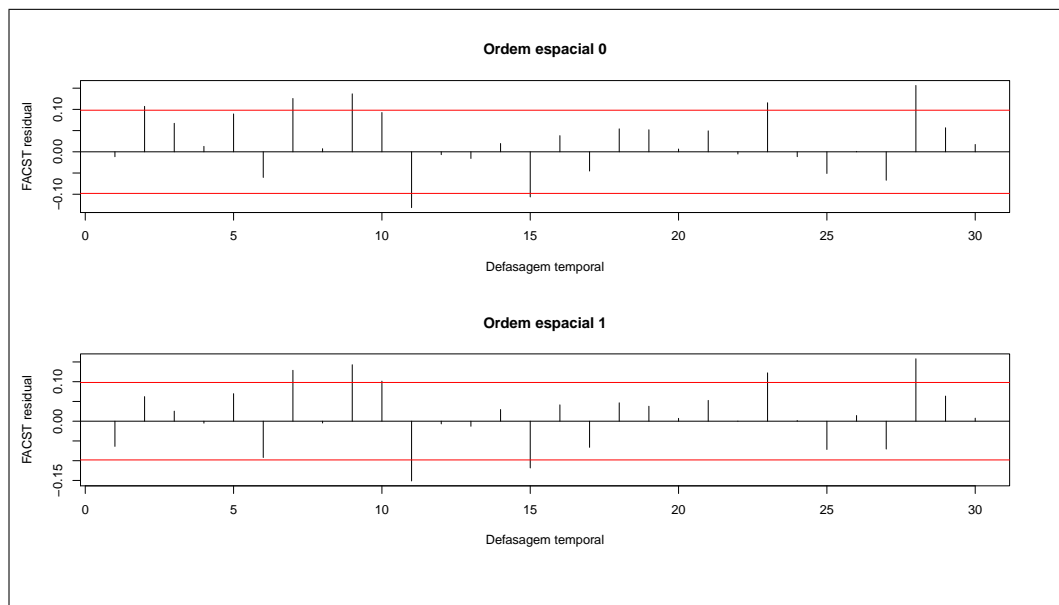
Identificação	Modelo
5	STARMA(2 ₁ , 0, 14) × (1, 1, 1 ₁)
6	STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (0, 1, 1 ₁)
7	STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (1 ₁ , 1, 1 ₁)
8	STARMA(3 ₁ , 0, 14) × (1, 1, 1 ₁)

Os valores de BIC, estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para os novos modelos ajustados são expostos na Tabela 14.

Tabela 14 – Valores de BIC, estimativas das variâncias residuais e soma dos resíduos para os novos modelos ajustados

Modelo	BIC	$\hat{\sigma}^2$	Soma de quadrados dos resíduos
5	483,31	1,93	1264,35
6	481,06	1,89	1243,20
7	489,67	1,87	1226,22
8	481,06	1,86	1226,60

As Figuras 26, 27, 28 e 29 apresentam as FACST's e FACPST's dos novos modelos identificados.

Figura 26 – FAC residual do modelo STARMA(2₁, 0, 14) × (1, 1, 1₁)

Observando a Figura 26 constata-se que o modelo ajustado, STARMA(2₁, 0, 14) × (1, 1, 1₁), captou as autocorrelações espaço-temporais após a defasagem 9.

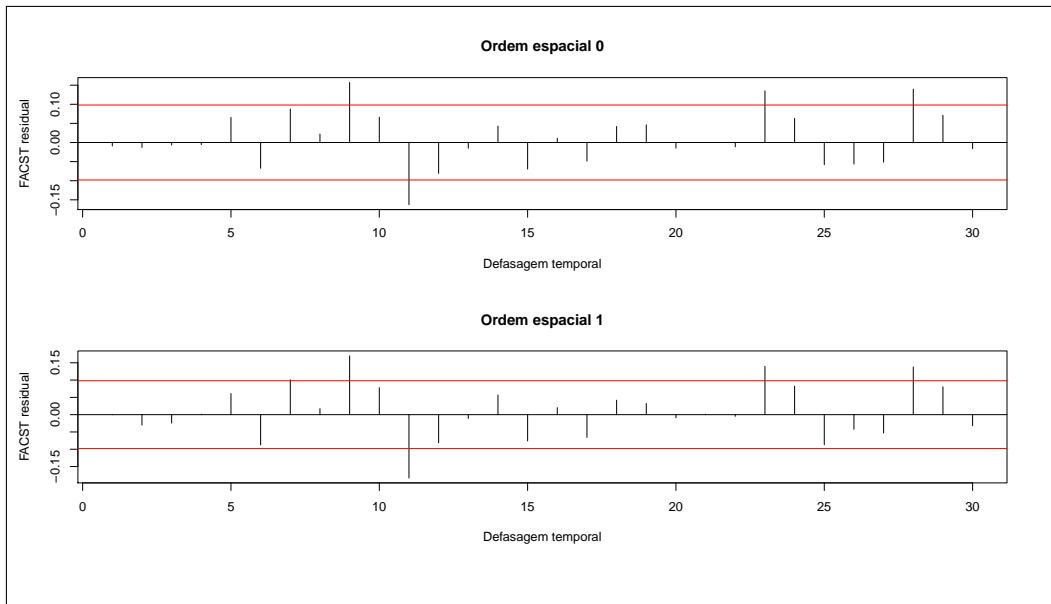


Figura 27 – FAC residual do modelo $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (0, 1, 1_1)$

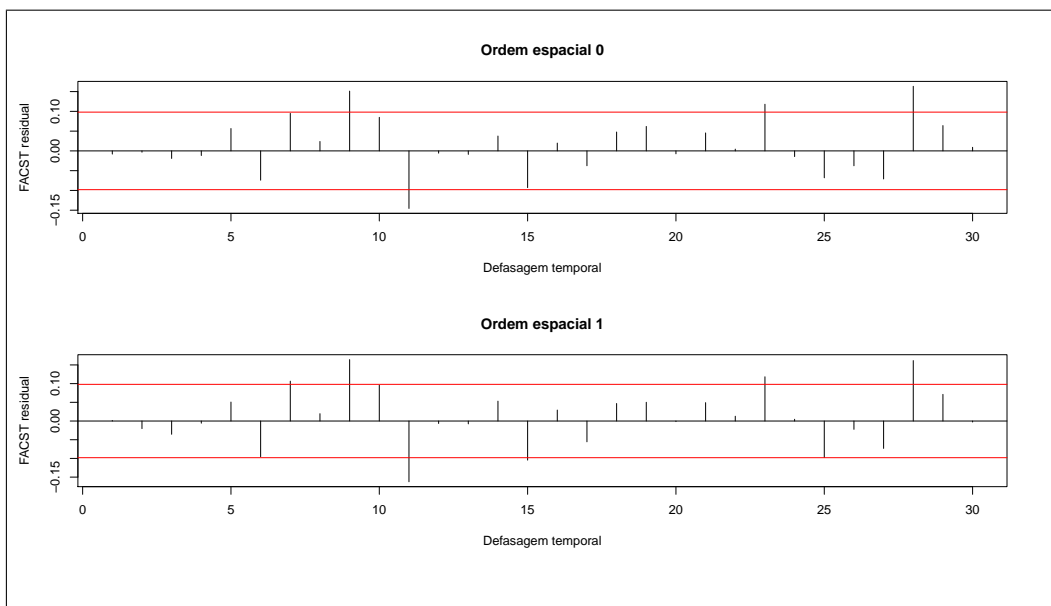


Figura 28 – FAC residual do modelo $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (1_1, 1, 1_1)$

Analisando as Figuras 27 e 28 constata-se que os modelos ajustados, 6, $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (0, 1, 1_1)$, e 7, $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (1_1, 1, 1_1)$, foram capazes de captar as primeiras autocorrelações espaço-temporais, ressaltando-se que o primeiro captou mais autocorrelações. A Figura 29 apresenta a FACST do modelo 8, o qual é composto dos modelos 5 e 6.

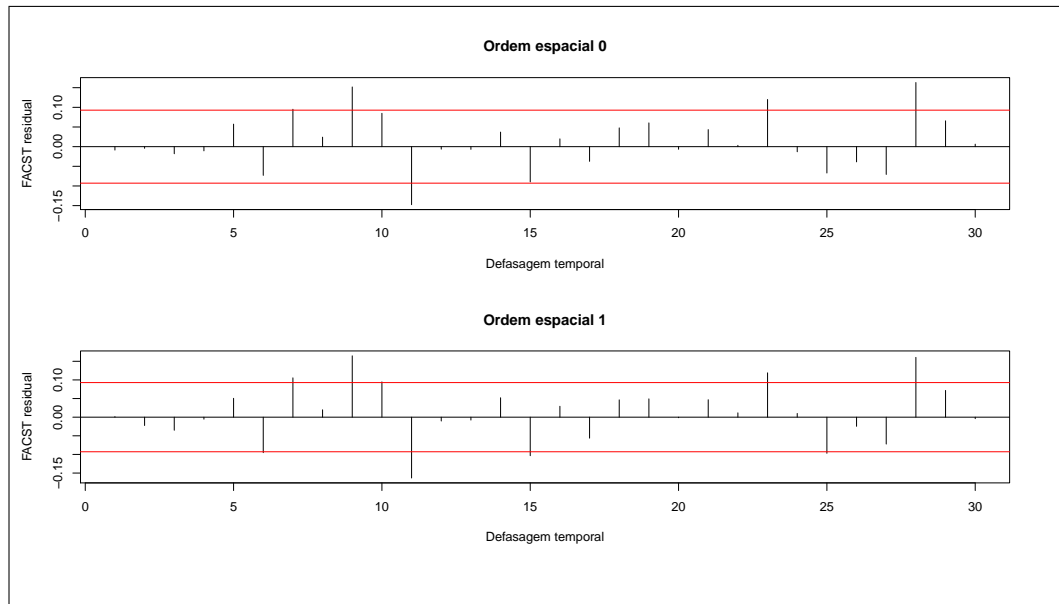


Figura 29 – FAC residual do modelo $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (1, 1, 1_1)$

Na figura 29, observa-se a presença de autocorrelações fora dos intervalos. No entanto, verifica-se que o modelo 8, $\text{STARMA}(3_1, 0, 14) \times (1, 1, 1_1)$, foi o modelo que apresentou o menor número de autocorrelações espaço-temporais fora dos intervalos, se diferenciando dos demais.

Nas figuras das FACST's residuais é possível notar a presença de autocorrelações fora do intervalo, indicando que os modelos ajustados não captaram totalmente a autocorrelação serial nas defasagens espaço-temporais. Pfeifer e Deutsch (1981a) salientam que as autocorrelações não captadas por um modelo da classe STARMA podem ser explicadas por três motivos, sendo eles: falta de correlação espacial, matriz de covariâncias diferente de $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ ou o modelo ajustado não foi adequado.

Para a escolha do modelo a ser empregado para a previsão, verificou se a normalidade dos resíduos foi atendida em modelos identificados. A normalidade foi constatada por meio dos histogramas residuais, apresentados na Figura 30, e pelos testes de Shapiro Wilk, os quais apresentaram valor de $p > 5\%$.

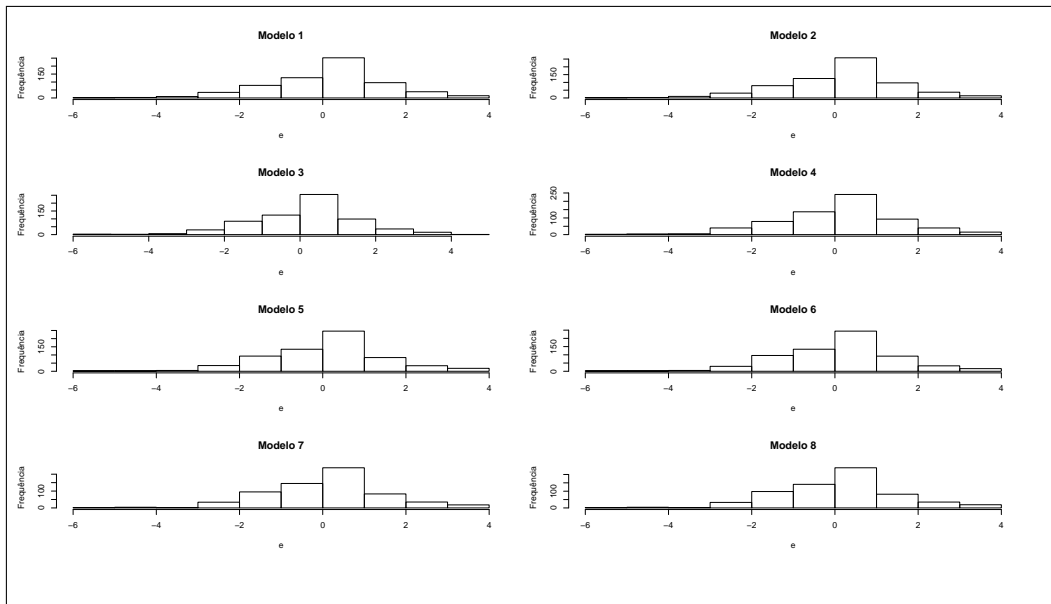


Figura 30 – Histograma dos resíduos dos modelos STARMA identificados

Observando a Tabela 12 e a Tabela 14 constata-se que o menor valor para o BIC é encontrado no modelo 1, o menor valor das estimativas das variâncias residuais se deu no modelo 8, as menores somas de quadrados residuais ocorreram para os modelos 7 e 8, com diferença mínima na última casa decimal. Observando as FACST's residuais apresentadas nas Figuras 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29 verifica-se que a FACST do modelo 8 até 4 autocorrelações espaço-temporal fora do intervalo.

Considerando os valores de BIC, as estimativas das variâncias residuais, a soma de quadrados dos resíduos e comportamento das FACST's residuais optou-se por utilizar o modelo 8, STARMA(3₁, 0, 14) × (1, 1, 1₁), para a previsão de temperaturas mínimas médias mensais. As estimativas dos parâmetros do modelo escolhido são expostas na Tabela 15.

Tabela 15 – Estimativa dos parâmetros do modelo da classe STARMA ajustados aos dados de temperaturas mínimas médias mensais

Parâmetro	Estimativa
ϕ_{10}	0,257
ϕ_{11}	-0,265
ϕ_{20}	0,099
ϕ_{30}	0,069
θ_{14}	-0,134
Φ_{10}	-0,197
Θ_{10}	0,583
Θ_{11}	-0,117

Na metodologia para a análise de dados espaço-temporais proposta por

Pfeifer e Deutsch (1980a) a significância dos parâmetros é testada por meio do teste apresentado na seção 3, na equação 60.

Com a realização do teste para verificar a significância das estimativas dos parâmetros, constatou-se que as estimativas são, significativamente, diferentes de zero. Deste modo, o modelo da classe STARMA escolhido para a realização de previsões de temperaturas mínimas médias mensais é o modelo 8, apresentado na equação 64:

$$Z(t) = 0,257Z(t-1) - 0,265\mathbf{W}^1Z(t-1) + 0,099Z(t-2) + 0,069Z(t-3) \quad (64) \\ - 0,134\epsilon(t-14) - 0,197Z(t-12) + 0,583\epsilon(t-12) - 0,117\mathbf{W}^1\epsilon(t-12)$$

4.4 Comparação das classes de modelo SARIMA e STARMA

O critério para a avaliação e comparação de cada método foi realizado segundo o quadrado médio do erro, conforme descrito na metodologia, seção 3.

Para comparar os métodos propostos por Box e Jenkins (1970) e por Pfeifer e Deutsch (1980a) retiraram-se os 6 últimos valores de temperaturas mínimas médias mensais das séries históricas, novembro de 2011 a abril de 2012, e tais valores foram comparados com os valores previstos para ambos os métodos, no mesmo período. Assim, foi possível verificar qual método produziu as melhores estimativas de previsão para a variável em estudo.

Na classe de modelos univariados, SARIMA, realizou-se a previsão 6 passos a frente, contemplando os meses de novembro de 2011 a abril de 2012, com o objetivo de compará-los com os valores reais. Na Tabela 16 são apresentados os valores reais e os valores previstos, para cada estação meteorológica.

Tabela 16 – Valores reais e valores preditos pelo modelo SARIMA para as estações meteorológicas

Estação	Mês											
	Novembro		Dezembro		Janeiro		Fevereiro		Março		Abril	
	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto
02	19,2	20,1	20,4	21,1	20,9	21,5	21,9	21,4	19,8	20,9	19,0	19,2
03	18,9	20,2	19,9	21,0	20,4	21,3	21,1	21,5	19,1	20,3	18,3	18,4
04	19,0	20,6	20,1	21,2	20,8	21,4	21,7	22,0	19,7	20,7	19,0	18,7
06	18,8	19,8	20,0	21,0	20,7	21,7	20,9	21,3	19,4	20,5	17,7	18,7
43	18,1	20,1	19,6	20,5	19,6	20,7	20,9	21,4	18,8	20,3	18,0	18,3
44	18,8	20,2	20,7	20,8	20,6	21,2	21,7	22,0	19,7	20,8	19,1	18,8
45	17,2	18,4	18,1	19,8	18,4	20,3	19,4	20,9	16,9	19,6	15,6	16,3
47	19,0	20,2	19,8	20,5	20,5	20,7	22,0	21,8	19,9	21,2	19,0	18,6

Observa-se na Tabela 16 que os valores previstos são bem próximos dos

valores reais, confirmando o bom ajuste dos modelos considerados. Na verificação da qualidade da previsão foram calculados os erros quadráticos médios, de acordo com a equação 62, das previsões das temperaturas mínimas médias mensais para cada estação meteorológica, os quais são apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 – Erro quadrático médio de previsão das temperaturas mínimas médias mensais realizadas com o modelos SARIMA

Estação	Erro quadrático médio
02	0,55
03	0,89
04	0,87
06	0,86
43	1,48
44	0,59
45	3,14
47	0,68

Pode-se observar que os erros quadráticos médios foram relativamente pequenos, e que somente as estações 43 e 45 apresentaram um erro maior em relação as demais. Logo, os modelos ajustados à cada estação meteorológicas se mostraram eficazes e, assim, podem ser utilizados para a realização de previsões de temperaturas médias mensais. Os erros quadráticos médios apresentados na Tabela 17 serão utilizados para a comparação dos modelos da classe SARIMA com os modelos da classe STARMA.

Utilizando o modelo ajustado da classe STARMA e com base no processo de previsão descrito na metodologia, seção 3, realizou-se a previsão para a variável temperatura mínima média mensal um passo a frente. As previsões são apresentadas na Tabela 18.

Tabela 18 – Valores reais e valores preditos pelo modelo STARMA sazonal para as estações meteorológicas

Estação	Mês											
	Novembro		Dezembro		Janeiro		fevereiro		Março		Abril	
	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto	Real	Previsto
02	19,2	18,8	20,4	21,6	20,9	22,2	21,9	21,9	19,8	20,7	19,0	19,1
03	18,9	18,0	19,9	21,2	20,4	21,9	21,1	21,5	19,1	20,3	18,3	18,4
04	19,0	18,4	20,1	21,6	20,8	22,2	21,7	21,7	19,7	20,5	19,0	18,8
06	18,8	18,2	20,0	21,5	20,7	22,2	20,9	21,4	19,4	20,2	17,7	18,3
43	18,1	18,8	19,6	20,9	19,6	21,4	20,9	21,5	18,8	20,2	18,0	18,4
44	18,8	20,0	20,7	22,3	20,6	22,5	21,7	22,1	19,7	20,7	19,1	19,0
45	17,2	16,6	18,1	20,0	18,4	20,9	19,4	20,4	16,9	19,4	15,6	16,4
47	19,0	18,6	19,8	20,6	20,5	21,3	22,0	22,2	19,9	21,5	19,0	19,8

Observando-se os valores reais e previstos na Tabela 18, pode-se verificar uma proximidade entre tais valores. No entanto, tal similaridade não é constatada para a estação 45, a qual apresenta valores de previsões mais distantes dos reais.

Finalizado o processo de previsão, calcularam-se os erros quadráticos médios, os quais são expostos na Tabela 19.

Tabela 19 – Erro quadrático médio de previsão das temperaturas mínimas médias mensais realizadas com o modelo STARMA

Estação	Erro quadrático médio
02	0,65
03	1,04
04	0,82
06	0,91
43	1,23
44	1,41
45	2,93
47	0,67

Examinando os valores dos erros quadráticos médios na Tabela 19 verifica-se que os maiores erros de previsões ocorreram para a estação meteorológica 45, como foi visto na Tabela 18. Esses maiores erros de previsão, também, foram averiguados nas previsões realizadas pela classe de modelos SARIMA. Este fato pode ser decorrente da maior variabilidade presente nos dados de temperaturas mínimas médias da estação 45.

Com os valores dos erros quadráticos médios obtidos pelas comparações entre os valores reais e previstos para os dois métodos, constatou-se que para as estações 2, 3, 6, 44 os modelos da classe SARIMA apresentaram melhores resultados de previsão. Em relação às estações 4, 43, 45 e 47 os modelos da classe STARMA foram mais satisfatórios, uma vez que seus valores previstos são mais próximos dos valores reais, conforme os resultados expostos nas Tabelas 19 e 17.

De acordo com os resultados expostos, não se pode dizer qual a classe de modelos, dentre as estudadas, se apresentou mais satisfatória em relação às previsões. No entanto, vale ressaltar que a classe de modelos STARMA produz um único modelo, pelo qual são realizadas as previsões de todas as estações meteorológicas simultaneamente, além de considerar em seus cálculos a correlação espaço-temporal.

4.5 Implementação computacional-modelo STARMA

Como mencionado na seção 3, as séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais foram analisadas de acordo com duas metodologias, Box e Jenkins (1970) e Pfeifer e Deutsch (1980a), em que a parte computacional necessária para a análise segundo Box e Jenkins (1970) encontra-se completamente disponível no *software* R.

No que tange à análise segundo Pfeifer e Deutsch (1980a) toda a parte computacional foi desenvolvida e implementada. No processo de identificação dos parâmetros de ordem autorregressiva e de médias móveis espaço-temporais, desenvolveu-se uma programação capaz de calcular as autocovariâncias, autocorrelações e autocorrelações parciais espaço-temporais.

Para a estimação dos parâmetros foi necessária a implementação de funções para a minimização dos resíduos utilizando métodos não lineares, como os de Newton-Raphson e Nelder-Mead, existentes no *software* R.

Com os parâmetros estimados, estimaram-se os resíduos, as variâncias residuais, os valores de BIC, as autocorrelações espaço-temporais residuais e verificaram-se as significâncias das estimativas dos parâmetros dos oito modelos identificados e, deste modo, escolheu-se o modelo que melhor se adequou às séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais, para a realização das previsões.

As previsões foram calculadas no Excel utilizando o modelo identificado e escolhido como uma função de previsão para a variável em estudo. E, uma vez calculadas as previsões utilizando ambas as metodologias, a comparação das mesmas foi realizada por meio dos erros quadráticos médios calculados, também, no Excel.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, apresentou-se uma descrição das classes de modelos SARIMA, proposta por Box e Jenkins (1970), expondo suas subclasses AR, MA, ARMA e ARIMA. Descreveu-se também a classe de modelos STARMA, na qual abordaram-se os conceitos de ordem de vizinhança, construção da matriz de ponderação, \mathbf{W} , e as suas subclasses STAR, STMA, ressaltando suas propriedades e particularidades.

Descreveu-se passo a passo os estágios de identificação, estimação, verificação do modelo e previsão, desenvolvidos por Box-Jenkins para a metodologia SARIMA, bem como sua extensão, aprimorada por Pfeifer e Deutsch (1980a), para os modelos STARMA.

Salientou-se o comportamento teórico da função de autocorrelação, função de autocorrelação parcial, função de autocorrelação espaço-temporal e função de autocorrelação parcial espaço-temporal, para os modelos SARIMA e STARMA, respectivamente.

Após os estudos referentes às duas classes de modelos, fez-se a implementação computacional para a análise segundo a classe STARMA, analisaram-se séries históricas de temperaturas mínimas médias mensais. O objetivo da análise, segundo as classes de modelos SARIMA e STARMA, foi verificar qual das classes representaria, de modo mais adequado, os dados com características espaço-temporais, produzindo previsões mais acuradas.

Com o estudo comparativo, a partir de erros de previsão, foi possível verificar que ambas as classes de modelos representaram satisfatoriamente as temperaturas mínimas médias das estações meteorológicas. Não sendo possível constatar qual a classe de modelos é a mais eficiente, uma vez que ao se observarem os erros quadráticos médios percebeu-se que, além destes valores serem próximos, houve quatro estações em que o modelo STARMA foi capaz de prever observações futuras considerando observações passadas de forma mais eficiente que o modelo SARIMA e quatro em que o modelo SARIMA foi mais eficiente.

Em um contexto geral, as duas classes de modelos apresentaram-se como ferramentas eficientes no processo de previsão de dados de temperaturas mínimas médias mensais. No entanto, a classe de modelos multivariada apresenta um único modelo capaz de prever as temperaturas para todas as estações meteorológicas, simultaneamente, e considera a correlação espaço-temporal, enquanto para os modelos da classe SARIMA é

necessário à identificação de um modelo para cada estação meteorológica. Nesse sentido, considera-se que os modelos da classe STARMA apresentam vantagens de aplicação em relação aos modelos da classe SARIMA.

Em relação à implementação das rotinas responsáveis pela análise da classe de modelos STARMA, ressaltam-se as dificuldades para a criação das funções para o cálculo das autocorrelações espaço-temporais, bem como para a utilização dos métodos iterativos na minimização dos erros. Ainda, para o processo de estimação são necessárias muitas iterações até a obtenção das estimativas.

5.1 Sugestões e trabalhos futuros

Espera-se que este estudo possa motivar pesquisas futuras nas áreas de modelos espaço-temporais. A seguir encontram-se algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Realizar essa análise considerando a matriz de variância covariância de ϵ_t diferente de $\sigma^2 \mathbf{I}_N$.
- Estimar os parâmetros considerando diferentes formas da matriz de ponderação, \mathbf{W} .
- Analisar os dados de temperaturas mínimas médias mensais excluindo os dados da estação 45 e refazer o estudo comparativo das classes STARMA e SARIMA.
- Desenvolver procedimentos que possam ser utilizados para o cálculo do erro padrão dos parâmetros.
- Utilizar a medida de distância do grande círculo, a qual considera a curvatura da Terra, pois esta deve ser útil em situações em que as regiões são separadas por grandes distâncias.

REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. Maximum likelihood identification of gaussian autoregressive moving average models. **Biometrika**, Oxford, n. 60, p. 255–265, 1973.

_____. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Tokyo, n. 19, p. 716–723, 1974.

BACK, A. J. Aplicação de análise estatística para identificação de tendências climáticas. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 36, n. 5, p. 717–726, 2001.

BAILLIE, T. R. Asymptotic prediction mean squared error for vector autorregressive models. **Biometrika**, Oxford, v. 66, p. 675–678, 1979.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis, Forecasting and Control**. São Francisco: Holden Day, 1970. 562 p.

CAVALCANTI, E. P.; SILVA, V. P. R.; SOUSA, F. A. S. Programa computacional para a estimativa da temperatura do ar para a região nordeste do brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 10, n. 1, p. 140–147, 2006.

CHATFIELD, C. **The Analysis of Time Series**. New York: Chapman & Hall/CRC, 1984. 282 p.

CHENG, T.; WANG, J. Q.; LI, X.; ZHANG, W. A hybrid approach to model nonstationary space - time series. **The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences**, Guilin, n. 37, p. 195–202, 2008.

CRYER, J. D. **Time series analysis**. Boston: Springer, 1986. 505 p.

DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Likelihood ratio statistic for autoregressive time series with a unit root. **Econometrica Society**, New York, n. 49, p. 1057–1072, 1981.

EHLERS, R. S. **Análise de Séries Temporais**. Curitiba: UFPR, 2007. 118 p.

EPPERSON, B. K. Spatial and space - time correlations in ecological models. **Ecological Modelling**, Michigan, n. 132, p. 63–76, 2000.

FERRAZ, M. I. F.; SAFADI, T.; LAGE, G. Uso de modelos de séries temporais na previsão de séries de precipitação pluviométricas mensais no município de lavras - mg. **Revista Brasileira de Agrometeorologia**, Sete Lagoas, v. 7, n. 2, p. 259–267, 1999.

GIACOMINI, R.; GRANGER, C. W. J. Aggregation of space-time process. **journal of**

Econometrics, California, n. 118, p. 7–26, 2004.

GLASBEY, C. A.; ALLCROFT, D. J. A spatio temporal auto-regressive moving average model for solar radiation. **Biomathematics and Statistics Scotland**, Scotland, n. 57, p. 143–154, 2008.

HANKE, J. E.; WIVHEN, D. W.; REITSCH, A. G. **Business forecasting**. New York: Prentice Hall, 2001. 576 p.

HU, X. T.; QIN, Z. Y.; CHU, F. L. Damage detection in plate structures based on space-time autoregressive moving average process. **Journal of Phisiconference Series**, Tsinghua, n. 305, p. 1–8, 2011.

HUANG, H.; LIN, S.; TANG, T.; LI, J. Application of rbf-starma model in shifting flow forecasting. **Advanced Materials Research**, China, n. 108, p. 893–897, 2010.

JúNIOR, P. J. R.; DIGGLE, P. J. geor: a package for geostatistical analysis. **R-NEWS**, v. 1, n. 2, p. 15–18, 2001.

LEE, C. Y.; EPPERSON, B. K.; WALKER, E. D.; SIGNS, K. Spatial-temporal analysis of dead crow reports associated with a west nile virus epidemic. **Asian Journal os Arts and Sciences**, Taiwan, v. 1, n. 1, p. 29–41, 2010.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lake of fit in the time series models. **Biometrika**, Oxford, n. 65, p. 297–303, 1978.

MAKRIDAKIS, S. G.; STEVEN, C. W.; ROB, J. H. **Forecasting: methods and applications**. New York: Wiley, 1998. 311 p.

MANN, H. B.; WALD, A. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. **Econometrika**, New York, n. 11, p. 173–220, 1943.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, New York, n. 11, p. 431–441, 1963.

MARTINN, R. L.; OEPPEN, J. E. The identification of regional forecasting models using space-time correlation functions. **Trans. Inst. Brit. Georg.**, Cambridge, n. 66, p. 95–118, 1975.

MCLEORD, A. I.; LI, W. K. Diagnostic checking arma time series models using square residual autocorrealtions. **Journal of Time Series Analysis**, New Jersey, v. 4, p. 269–273, 1983.

MEDEIROS, S. S.; CECILIO, R. A.; JUNIOR, J. C. F. M.; SILVA, J. L. C. Estimativas e espacialização das temperaturas do ar mínimas, médias e máximas na região nordeste

do brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 9, n. 2, p. 247–255, 2005.

MONTGOMERY, D. C.; JOHNSON, L. A.; GARDINER, J. S. **Forecasting and time series analysis**. New York: McGraw Hill Higher Education, 1990. 304 p.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de Séries Temporais**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2004. 538 p.

NETO, S. N. O.; REIS, G. G.; REIS, M. G. F.; LEITE, H. G.; COSTA, J. M. N. Estimativa de temperaturas mínima, média, e máxima do território brasileiro situado entre 16° e 24° latitude sul e 48° e 60° longitude oeste. **Engenharia na Agricultura**, Viçosa, v. 10, n. 1-4, p. 8–17, 2002.

PACE, R. K.; BARRY, R.; W., G. O.; SIRMANS, C. F. A method for spatial - temporal forecasting with application to real estate prices. **International Journal of Forecasting**, Louisiana, n. 16, p. 229–246, 2000.

PFEIFER, P. E. Dissertação de Ph.D, **Spatial-Dynamic Modeling**. Atlanta: [s.n.], 1979. 117 p.

PFEIFER, P. E.; DEUTSCH, S. J. A starima model-building procedure with application to discription and regional forecasting. **Technometrics**, Atlanta, p. 330–349, 1979.

_____. A three-stage interative procedure for space-time modeling. **Technometrics**, Atlanta, n. 22, p. 35–47, 1980a.

_____. Identification and interpretation of first-order space-time arma models. **Technometrics**, Atlanta, n. 22, p. 397–408, 1980b.

_____. Variance of the sample space-time autocorrelation function. **Journal of the Royal Statistical Society**, Atlanta, n. 43, p. 28–33, 1981a.

_____. Space-time arma modeling with contemporaneously correlated innovations. **Technometrics**, Atlanta, n. 23, p. 401–409, 1981b.

_____. Variance of the sample space-time correlation function of contemporaneously correlated variables. **Society for industrial and applied mathematics**, Atlanta, n. 40, p. 133–136, 1981b.

_____. Seazonal space - time arima modeling. **Geographical Analysis**, Ohio, v. 13, n. 2, p. 117–133, 1981c.

RAO, T. S.; ANTUNES, A. M. C. Spatio-temporal modelling of temperature time series: A compartive study. **Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems**, New York, v. 139, p. 123–150, 2004.

SARTORIS, A. The 1st world conference of the spatial econometrics association. In: SPATIAL ECONOMETRICS ASSOCIATION, Cambridge. **Anais**. 2007. Disponível em: <<http://www.paceprojects.co.uk/Sartoris1.pdf>>. Acesso em: 24 jan. 2012.

SEDIYAMA, G. C.; JR., J. C. F. M. Modelos para estimativas das temperaturas normais mensais médias, máximas, mínimas, e anual no estado de minas gerais. **Revista Engenharia na Agricultura**, Viçosa, v. 6, n. 1, p. 57–61, 1998.

SILVA, M. I. S.; GUIMARÃES, E. C.; MOVARES, T. Previsão de temperatura média mensal de uberlândia, mg com modelos de séries temporais. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 12, p. 480–485, 2008.

SONI, P.; CHAN, Y.; PREISSEL, H.; ESWARAN, H.; WILSON, J.; MURPHY, P.; LOWERY, C. L. Spatial temporal analysis of non-stationary fmeg data. **Neurology and Clinical Neurophysiology**, Alemanha, n. 100, p. 1–6, 2004.

ZHOUR, J.; MITCHELL, K. Spatial autoregressive models for resource demand prediction in mobile wireless networks. **ITC19/ Performance Challenges for Efficient Next Generation Networks**, Kansas City, p. 1071–1080, 2005.

6 ANEXOS

```

rm(list=ls())

## lendo os dados

dados <- read.csv("C:/Users/user/Desktop/dissertação/natalia
/Dados-tratados_PR.csv", head = T , sep = ";")

head(dados)
str(dados)

## escolhendo as estações

require(foreign)
require(geoR)
require(maptools)
require(MASS)

geo <- data.frame(idestacao = dados$idestacao, latitude =
dados$latitude,
longitude = dados$longitude)

head(geo)

dadosgeo <- as.geodata(geo, coords.col = c(3, 2), data.col = 1)
plot(dadosgeo, low = T)

points(dadosgeo, pt.divide = "equal", xlab = "Longitude",
col = "red", ylab = "Latitude")
meso <- readShapePoly("C:/Users/user/Desktop/dissertação
/natalia/41ME2500G.shp")
estado <- readShapePoly("C:/Users/user/Desktop/dissertação
/natalia/41UF2500G.shp")
polygon(estado@polygons[[1]]@Polygons[[1]]@coords)
polygon(meso@polygons[[4]]@Polygons[[1]]@coords)
dadosgeo$NOME[identify(dadosgeo$coords)]

# As estações escolhidas formas das observações 203965,
13303, 22171, 181795, 4435, 195097, 8869,186229
geo[4435,]
geo[8869,]
geo[13303,]
geo[22171,]
geo[190663,]
geo[186229,]
geo[195097,]
geo[203965,]

# Estações escolhidas: 2, 3, 4, 6, 43, 44, 45, 47

```

```

# Estruturando os dados para as estações escolhidas

estacao <- subset(dados, idestacao %in% c(2, 3, 4, 6, 43, 44, 45, 47))
head(estacao)
dim(estacao)

# Estruturando os dados para calcular as médias mensais da temperatura

estacao$data <- as.Date(estacao$data)
mes <- format(estacao$data, format = "%m")
ano <- format(estacao$data, format = "%Y")
dados <- cbind(estacao, mes, ano)
head(dados)

# Calculando as médias mensais da temperatura mínima

dados_fim <- aggregate(dados$tmin, by = list(estacao =
dados$idestacao, mes = dados$mes,
ano = dados$ano), mean)

head(dados_fim)

n=8
tempo=147
dados=matrix(dados_fim$x, n, tempo)
dados[,48:147] ### retirando inicio dos dados, pois a serie é melhor
dados=dados[,48:147]
real=dados[,95:100]
dados=dados[,1:94] ### retirando os ultimos 6 meses para previsao
head(dados)

# estatisticas descritivas

library(moments)

media <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, mean), 3)
variancia <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, var), 3)
assimetria <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, skewness), 3)
kurtose <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, kurtosis), 3)
minimo <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, min), 3)
maximo <- round(tapply(dados_fim$x, dados_fim$estacao, max), 3)

resumo=rbind(media, variancia,assimetria, kurtose, minimo, maximo)

#series originais

est2 <- ts(dados[1,], frequency=12, start = c(2004,1))
est3 <- ts(dados[2,], frequency=12, start = c(2004,1))
est4 <- ts(dados[3,], frequency=12, start = c(2004,1))
est6 <- ts(dados[4,], frequency=12, start = c(2004,1))
est43 <- ts(dados[5,], frequency=12, start = c(2004,1))
est44 <- ts(dados[6,], frequency=12, start = c(2004,1))

```

```

est45 <- ts(dados[7,],frequency=12,start = c(2004,1))
est47 <- ts(dados[8,],frequency=12,start = c(2004,1))

par(mfrow=c(4,2))

plot(est2, ylab="Estação 2", xlab="Período")
plot(est3, ylab="Estação 3", xlab="Período")
plot(est4, ylab="Estação 4", xlab="Período")
plot(est6, ylab="Estação 6", xlab="Período")
plot(est43, ylab="Estação 43", xlab="Período")
plot(est44, ylab="Estação 44", xlab="Período")
plot(est45, ylab="Estação 45", xlab="Período")
plot(est47, ylab="Estação 47", xlab="Período")

##### Analise sarima #####

par(mfrow=c(4,2))
e2 = acf (est2, plot=F, lag.max=36)
e2$lag = e2$lag*12
plot (e2,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 2")

e3 = acf (est3, plot=F, lag.max=36)
e3$lag = e3$lag*12
plot (e3,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 3")

e4 = acf (est4, plot=F, lag.max=36)
e4$lag = e4$lag*12
plot (e4,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 4")

e6 = acf (est6, plot=F, lag.max=36)
e6$lag = e6$lag*12
plot (e6,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 6")

e43 = acf (est43, plot=F, lag.max=36)
e43$lag = e43$lag*12
plot (e43,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 43")

e44 = acf (est44, plot=F, lag.max=36)
e44$lag = e44$lag*12
plot (e44,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 44")

e45 = acf (est45, plot=F, lag.max=36)
e45$lag = e45$lag*12
plot (e45,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 45")

e47 = acf (est47, plot=F, lag.max=36)
e47$lag = e47$lag*12
plot (e47,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 47")

### Fazendo diferença sazonal

```



```

par(mfrow=c(4,2))

plot(diff(est2,12), ylab="Estação 2", xlab="Período")
plot(diff(est3,12), ylab="Estação 3", xlab="Período")
plot(diff(est4,12), ylab="Estação 4", xlab="Período")
plot(diff(est6,12), ylab="Estação 6", xlab="Período")
plot(diff(est43,12), ylab="Estação 43", xlab="Período")
plot(diff(est44,12), ylab="Estação 44", xlab="Período")
plot(diff(est45,12), ylab="Estação 45", xlab="Período")
plot(diff(est47,12), ylab="Estação 47", xlab="Período")

par(mfrow=c(4,2))

de2 = acf (diff(est2,12), plot=F, lag.max=36)
de2$lag = de2$lag*12
plot(de2,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 2")

de3 = acf (diff(est3,12), plot=F, lag.max=36)
de3$lag = de3$lag*12
plot(de3,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 3")

de4 = acf (diff(est4, 12), plot=F, lag.max=36)
de4$lag = de4$lag*12
plot(de4,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 4")

de6 = acf (diff(est6,12), plot=F, lag.max=36)
de6$lag = de6$lag*12
plot(de6,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 6")

de43 = acf (diff(est43,12), plot=F, lag.max=36)
de43$lag = de43$lag*12
plot(de43,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 43")

de44 = acf (diff(est44,12), plot=F, lag.max=36)
de44$lag = de44$lag*12
plot(de44,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 44")

de45 = acf (diff(est45,12), plot=F, lag.max=36)
de45$lag = de45$lag*12
plot(de45,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 45")

de47 = acf (diff(est47,12), plot=F, lag.max=36)
de47$lag = de47$lag*12
plot(de47,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 47")

par(mfrow=c(4,2))

pe2 = pacf (diff(est2,12), plot=F, lag.max=36)
pe2$lag = pe2$lag*12
plot(pe2,xlab='Defasagem',ylab='FACP',main="Estação 2")

```

```

pe3 = pacf (diff(est3,12), plot=F, lag.max=36)
pe3$lag = pe3$lag*12
plot (pe3,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 3")

pe4 = pacf (diff(est4, 12), plot=F, lag.max=36)
pe4$lag = pe4$lag*12
plot (pe4,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 4")

pe6 = pacf (diff(est6,12), plot=F, lag.max=36)
pe6$lag = pe6$lag*12
plot (pe6,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 6")

pe43 = pacf (diff(est43,12), plot=F, lag.max=36)
pe43$lag = pe43$lag*12
plot (pe43,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 43")

pe44 = pacf (diff(est44,12), plot=F, lag.max=36)
pe44$lag = pe44$lag*12
plot (pe44,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 44")

pe45 = pacf (diff(est45,12), plot=F, lag.max=36)
pe45$lag = pe45$lag*12
plot (pe45,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 45")

pe47 = pacf (diff(est47,12), plot=F, lag.max=36)
pe47$lag = pe47$lag*12
plot (pe47,xlab='Defasagem', ylab='FACP', main="Estação 47")

### Ajustando o modelo

mod_est2 = arima(est2,order=c(0,0,0), seasonal=list(order=c(2,1,1)))

mod_est3.1 = arima(est3,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est3.2 = arima(est3,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,2)))

mod_est4.1 = arima(est4,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est4.2 = arima(est4,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,2)))
mod_est4.3 = arima(est4,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,1)))
mod_est4.4 = arima(est4,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,2)))

mod_est6.1 = arima(est6,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(0,1,1)))
mod_est6.2 = arima(est6,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(0,1,2)))

mod_est43.1 = arima(est43,order=c(0,0,0),

```

```
seasonal=list(order=c(1,1,0))
mod_est43.2 = arima(est43,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
```

```
mod_est44.1 = arima(est44,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,0)))
mod_est44.2 = arima(est44,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
```

```
mod_est45.1 = arima(est45,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est45.2 = arima(est45,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,1)))
mod_est45.3 = arima(est45,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
```

```
mod_est47.1 = arima(est47,order=c(1,0,1),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est47.2 = arima(est47,order=c(1,0,1),
seasonal=list(order=c(2,1,1)))
mod_est47.3 = arima(est47,order=c(1,0,1),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
```

```
### escolhendo o modelo por meio de:
#BIC
```

```
AIC(mod_est3.1, k = log(147))
AIC(mod_est3.2, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est4.1, k = log(147))
AIC(mod_est4.2, k = log(147))
AIC(mod_est4.3, k = log(147))
AIC(mod_est4.4, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est6.1, k = log(147))
AIC(mod_est6.2, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est43.1, k = log(147))
AIC(mod_est43.2, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est44.1, k = log(147))
AIC(mod_est44.2, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est45.1, k = log(147))
AIC(mod_est45.2, k = log(147))
AIC(mod_est45.3, k = log(147))
```

```
AIC(mod_est47.1, k = log(147))
AIC(mod_est47.2, k = log(147))
AIC(mod_est47.3, k = log(147))
```

```

#sigma
#log
#verificando a significancia dos parametros

mod_est2 = arima(est2,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,1)))
mod_est3 = arima(est3,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est4 = arima(est4,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(1,1,1)))
mod_est6 = arima(est6,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(0,1,1)))
mod_est43 = arima(est43,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
mod_est44 = arima(est44,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
mod_est45 = arima(est45,order=c(0,0,0),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))
mod_est47 = arima(est47,order=c(1,0,1),
seasonal=list(order=c(2,1,0)))

### validando o modelo

#fac residuo

par(mfrow = c(4,2))

mod2 = acf(mod_est2$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod2$lag = mod2$lag*12
plot(mod2,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 2")

mod3 = acf(mod_est3$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod3$lag = mod3$lag*12
plot(mod3,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 3")

mod4 = acf(mod_est4$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod4$lag = mod4$lag*12
plot(mod4,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 4")

mod6 = acf(mod_est6$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod6$lag = mod6$lag*12
plot(mod6,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 6")

mod43 = acf(mod_est43$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod43$lag = mod43$lag*12
plot(mod43,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 43")

mod44 = acf(mod_est44$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod44$lag = mod44$lag*12
plot(mod44,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 44")

mod45 = acf(mod_est45$residuals, plot=F, lag.max=36)

```

100

```
mod45$lag = mod45$lag*12
plot(mod45,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 45")

mod47 = acf(mod_est47$residuals, plot=F, lag.max=36)
mod47$lag = mod47$lag*12
plot(mod47,xlab='Defasagem',ylab='FAC',main="Estação 47")

# residuo

par(mfrow = c(4,2))
plot(mod_est2$residuals,main='Estação 2')
plot(mod_est3$residuals,main='Estação 3')
plot(mod_est4$residuals,main='Estação 4')
plot(mod_est6$residuals,main='Estação 6')
plot(mod_est43$residuals,main='Estação 43')
plot(mod_est44$residuals,main='Estação 44')
plot(mod_est45$residuals,main='Estação 45')
plot(mod_est47$residuals,main='Estação 47')

#ljung

tsdiag(mod_est2)
tsdiag(mod_est3)
tsdiag(mod_est4)
tsdiag(mod_est6)
tsdiag(mod_est43)
tsdiag(mod_est44)
tsdiag(mod_est45)
tsdiag(mod_est47)

#histograma

par(mfrow=c(4,2))
hist(mod_est2$residuals, main="Estação 2", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est3$residuals, main="Estação 3", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est4$residuals, main="Estação 4", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est6$residuals, main="Estação 6", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est43$residuals, main="Estação 43", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est44$residuals, main="Estação 44", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est45$residuals, main="Estação 45", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")
hist(mod_est47$residuals, main="Estação 47", ylab="Frequência",
xlab="resíduos")

#previsao
```

```

library(forecast)
p2 = predict(mod_est2, n.ahead = 6)$pred
p3 = predict(mod_est3, n.ahead = 6)$pred
p4 = predict(mod_est4, n.ahead = 6)$pred
p6 = predict(mod_est6, n.ahead = 6)$pred
p43 = predict(mod_est43, n.ahead = 6)$pred
p44 = predict(mod_est44, n.ahead = 6)$pred
p45 = predict(mod_est45, n.ahead = 6)$pred
p47 = predict(mod_est47, n.ahead = 6)$pred

previsao = rbind(p2,p3,p4,p6,p43,p44,p45,p47)

# Erros dos valores previstos

EA = round(abs(previsao-real),2) #erro absoluto
E = round(previsao-real,2)
QMR_2 = round((sum((E[1,])^2)/6),2)
QMR_3 = round((sum((E[2,])^2)/6),2)
QMR_4 = round((sum((E[3,])^2)/6),2)
QMR_6 = round((sum((E[4,])^2)/6),2)
QMR_43 = round((sum((E[5,])^2)/6),2)
QMR_44 = round((sum((E[6,])^2)/6),2)
QMR_45 = round((sum((E[7,])^2)/6),2)
QMR_47 = round((sum((E[8,])^2)/6),2)

erro = cbind(QMR_2,QMR_3,QMR_4,QMR_6,QMR_43,QMR_44,QMR_45,QMR_47)

## Modelagem STARMA

# Matriz de ponderação

lat <- c(-23.2325, -23.3592, -22.6394, -22.4917,
-23.08333, -23.66667, -23.65, -23.73333)
lon <- c(-53.3895, -52.9314, -52.8901, -52.1344,
-52.43333, -52.58333, -52.53, -53.28333)

#Transformando em UTM

coor=data.frame(lat, lon)
library(rgdal)
SP <- SpatialPoints(coor,proj4string=CRS("+proj=longlat +zone=22"))
corutm=spTransform(SP, CRS("+proj=utm"))
M=as.matrix(dist(corutm@coords))
m=M/rowSums(M)
w=list(diag(n),m)

#####

#FAC espaço temporal

tt=94

```

```

n=8
par(mfrow=c(1,2))
plot(facst(y=dados,w=w,s=30,n=n,t=tt)[,1],type="h",
ylab="Função de autocorrelação espaço-temporal",
main="Ordem de vizinhança 0", xlab="Defasagem temporal")
abline(h=sqrt(1/(n*tt)),col="red")
abline(h=-sqrt(1/(n*tt)),col="red")
abline(h=0,col="black")
plot(facst(y=dados,w=w,s=30,n=n,t=tt)[,2],type="h",
ylab="Função de autocorrelação espaço-temporal",
main="Ordem de vizinhança 1", xlab="Defasagem temporal")
abline(h=-sqrt(1/(n*tt)),col="red")
abline(h=sqrt(1/(n*tt)),col="red")
abline(h=0,col="black")

#####Fazendo a diferença sazonal#####

dadosd=matrix(0,n,82)
for(i in 1:n){
  dadosd[i,]=diff(dados[i,],lag=12)}

#write.table(dadosd, file="F:/dadosd.txt",col.names=TRUE)

##### FACST e FACPST #####
require(graphics)
require(plotrix)

par(mfrow=c(2,2))
plot(facst(y=dadosd,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",
ylab="FAC espaço-temporal",
main="Ordem de vizinhança 0",xlab="Defasagem temporal")
  abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=0)

draw.ellipse(x=12, y=-0.3, a=0.5, b=0.4, border=1, angle=0, lty=3)
text(x=14,y=-0.4,expression(Theta),cex=1)
text(x=14.6,y=-0.42,'1',cex=0.5)
text(x=14.9,y=-0.42,'0',cex=0.5)

plot(facst(y=dadosd,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",
ylab="FAC espaço-temporal",
main="Ordem de vizinhança 1",xlab="Defasagem temporal")
  abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=0)

draw.ellipse(x=12, y=-0.3, a=0.5, b=0.3, border=1, angle=0, lty=3)
text(x=14,y=-0.4,expression(Theta),cex=1)
text(x=14.6,y=-0.42,'1',cex=0.5)
text(x=14.9,y=-0.42,'1',cex=0.5)

```

```

plot (facpst (y=dadosd,w=w,s=30,n=n,t=82) [,1],type="h",
      ylab="FACP espaço-temporal",
      main="Ordem de vizinhança 0",xlab="Defasagem temporal")
abline (h=2*sqrt (1/(n*52)),col="red")
abline (h=2*-sqrt (1/(n*52)),col="red")
abline (h=0)

draw.ellipse(x=12, y=-0.3, a=0.5, b=0.3, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=14,y=-0.4,expression(Phi),cex=1)
text (x=14.6,y=-0.42,'1',cex=0.5)
text (x=14.9,y=-0.42,'0',cex=0.5)

draw.ellipse(x=24, y=-0.15, a=0.3, b=0.18, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=25,y=-0.15,expression(Phi),cex=1)
text (x=25.6,y=-0.16,'2',cex=0.5)
text (x=25.9,y=-0.16,'1',cex=0.5)

draw.ellipse(x=1, y=0.15, a=0.3, b=0.18, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=2,y=0.3,expression(phi),cex=1)
text (x=2.5,y=0.29,'1',cex=0.5)
text (x=2.8,y=0.29,'0',cex=0.5)

draw.ellipse(x=2, y=0.09, a=0.3, b=0.09, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=3,y=0.18,expression(phi),cex=1)
text (x=3.5,y=0.17,'2',cex=0.5)
text (x=3.8,y=0.17,'0',cex=0.5)

plot (facpst (y=dadosd,w=w,s=30,n=n,t=82) [,2],type="h",
      ylab="FACP espaço-temporal",
      main="Ordem de vizinhança 1",xlab="Defasagem temporal")
abline (h=2*-sqrt (1/(n*52)),col="red")
abline (h=2*sqrt (1/(n*52)),col="red")
abline (h=0)

draw.ellipse(x=1, y=-0.15, a=0.3, b=0.15, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=2,y=-0.25,expression(phi),cex=1)
text (x=2.5,y=-0.26,'1',cex=0.5)
text (x=2.8,y=-0.26,'1',cex=0.5)

draw.ellipse(x=12, y=-0.28, a=0.3, b=0.3, border=1, angle=0, lty=3)
text (x=14,y=-0.25,expression(Phi),cex=1)
text (x=14.5,y=-0.26,'1',cex=0.5)
text (x=14.8,y=-0.26,'1',cex=0.5)

##### Identificando modelos #####

## Modelo identificado (1,0,0)x(0,1,1_1)

# Fazendo a função para minimizar o erro

esti=function(theta,y){
phil0=theta[1]

```



```

THETA10=theta[2]
THETA11=theta[3]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]}
for(i in 13:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]%*%a[,i-12]}
S=sum(a^2)
return(S)
}

est=optim(c(0,0,0),esti,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1),upper=c(1,1,1))

est
Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,6),-1,1,
rep(0,6),-1,1),6,3)
bvec      <- rep(-1,6)
constrOptim(c(0,0,0), esti, NULL, ui=Amat,
ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti,c(0.5,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=dadosd[,1]
for(i in 2:12){
e[,i]=dadosd[,i]-est$par[1]*dadosd[,i-1]}
for(i in 13:82){
e[,i]=dadosd[,i]-est$par[1]*dadosd[,i-1]+est$par[2]*
e[,i-12]+est$par[3]*w[[2]]%*%e[,i-12]}
}
sum(e^2)

write.table(e, file="F:/e.txt",col.names=TRUE)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 1")

#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h", ylab="FACST residual"
, main="Ordem espacial 0", xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1", xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")

```

```

abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(3)*log(82)
Bic

##### Modelo(2,0,0)x(0,1,1_1) #####

esti2=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi20=theta[2]
THETA10=theta[3]
THETA11=theta[4]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
for(i in 2:2){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]}
for(i in 3:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi20*y[,i-2]}
for(i in 13:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi20*y[,i-2]+THETA10*
a[,i-12]+THETA11*w[[2]]%*%a[,i-12]}
S=sum(a^2)
return(S)
}

est2=optim(c(0.1,0,0.5,0.5),esti2,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1),upper=c(1,1,1,1))

Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,8),-1,1,rep(0,8),
-1,1,rep(0,8),-1,1),8,4)
bvec      <- rep(-1,8)
constrOptim(c(0,0,0,0),esti2, NULL, ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti2,c(0.5,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=dadosd[,1]
for(i in 2:2){
e[,i]=dadosd[,i]-est2$par[1]*dadosd[,i-1]}
for(i in 3:12){
e[,i]=dadosd[,i]-est2$par[1]*dadosd[,i-1]-est2$par[2]
*dadosd[,i-2]}
for(i in 13:82){
e[,i]=dadosd[,i]-est2$par[1]*dadosd[,i-1]-est2$par[2]*
dadosd[,i-2]+
est2$par[3]*e[,i-12]+est2$par[4]*w[[2]]%*%e[,i-12]}

```

```

sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 2")

#####Calculando facst dos erros #####

    par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
  abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
  abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(4)*log(82)
Bic

##### Modelo(3_1,0,0)x(0,1,1_1) #####

  esti3=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi20=theta[3]
phi30=theta[4]
THETA10=theta[5]
THETA11=theta[6]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]*%*%y[,1]
a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]*%*%y[,2]-phi20*y[,1]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]*%*%y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]
}
for(i in 13:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]*%*%y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]+
THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]*%*%a[,i-12]}
S=sum(a^2)
return(S)
}

est3=optim(c(0.1,0,0.5,0.5,0.5,0),esti3,method="L-BFGS-B",

```

```

y=dadosd, lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1))

Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,12),-1,1,
rep(0,12),-1,1,rep(0,12),
-1,1,rep(0,12),-1,1,rep(0,12),-1,1),12,6)
bvec      <- rep(-1,12)
constrOptim(c(0,0,0,.3,0,0), esti3, NULL,
ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti3,c(0.5,0,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####
y=dadosd
e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=y[,1]
e[,2]=y[,2]-est3$par[1]*y[,1]-est3$par[2]*w[[2]]**y[,1]
e[,3]=y[,3]-est3$par[1]*y[,2]-est3$par[2]*w[[2]]**y[,2]
-est3$par[3]*y[,1]
for(i in 4:12){
e[,i]=y[,i]-est3$par[1]*y[,i-1]-est3$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]
-est3$par[3]*y[,i-2]-
est3$par[4]*y[,i-3]
}
for(i in 13:82){
e[,i]=y[,i]-est3$par[1]*y[,i-1]-est3$par[2]*w[[2]]**
y[,i-1]-est3$par[3]*y[,i-2]-
est3$par[4]*y[,i-3]+est3$par[5]*e[,i-12]+
est3$par[6]*w[[2]]**e[,i-12]}
sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 3")

##### Estimativa do sigma^2#####
sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(6)*log(82)
Bic

#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

```

```
#####Modelo-4= (1,0,0)x(1_1,1,1_1)#####

  esti4=function(theta,y){
phi10=theta[1]
PHI10=theta[2]
PHI11=theta[3]
THETA10=theta[4]
THETA11=theta[5]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]}
for(i in 13:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-PHI10*y[,i-12]-PHI11*w[[2]]%*%y[,i-12]
+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]%*%a[,i-12]}
S=sum(a^2)
return(S)
}

est4=optim(c(0.1,0,0.1,0,0.0),esti4,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1))

Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,10),-1,1,rep(0,10),-1,1,
rep(0,10),-1,1,rep(0,10),-1,1),10,5)
bvec      <- rep(-1,10)
constrOptim(c(0,0,0,.3,0), esti4, NULL, ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti4,c(0.5,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####
y=dadosd
e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
e[,i]=y[,i]-est4$par[1]*y[,i-1]}
for(i in 13:82){
e[,i]=y[,i]-est4$par[1]*y[,i-1]-est4$par[2]*y[,i-12]
-est4$par[3]*w[[2]]%*%y[,i-12]+est4$par[4]*e[,i-12]+
est4$par[5]*w[[2]]%*%e[,i-12]}
sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 4")

#####Calculando facst dos erros #####

  par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
  abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
  abline(h=0)
```

```

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(5)*log(82)
Bic

##Modelo-5= (2_1,0,14)x(1_1,1,1_1) considerando apenas o 14 parametro

esti5=function(theta,y){
phi0=theta[1]
theta140=theta[2]
PHI10=theta[3]
PHI11=theta[4]
THETA10=theta[5]
THETA11=theta[6]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
a[,i]=y[,i]-phi0*y[,i-1]}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi0*y[,i-1]-PHI10*y[,i-12]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+
THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi0*y[,i-1]-PHI10*y[,i-12]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+
theta140*a[,i-14]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}

S=sum(a^2)
return(S)
}

est5=optim(c(0.1,0,0.5,0.5,0.5,0),esti5,method="L-BFGS-B",
y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1))

Amat <- matrix(c(-1,1,rep(0,12),-1,1,
rep(0,12),-1,1,rep(0,12),
-1,1,rep(0,12),-1,1,rep(0,12),-1,1),12,6)
bvec <- rep(-1,12)
constrOptim(c(0,0,0,.3,0,0), esti5, NULL, ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti5,c(0.5,0,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)

```

```

e[,1]=y[,1]
for(i in 2:12){
e[,i]=y[,i]-est5$par[1]*y[,i-1]}
for(i in 13:14){
e[,i]=y[,i]-est5$par[1]*y[,i-1]-est5$par[3]*y[,i-12]-
est5$par[4]*w[[2]]%*%y[,i-12]+est5$par[5]*
e[,i-12]+est5$par[6]*w[[2]]%*%e[,i-12]}
for(i in 15:82){
e[,i]=y[,i]-est5$par[1]*y[,i-1]-est5$par[3]*
y[,i-12]-est5$par[4]*w[[2]]
%*%y[,i-12]+est5$par[2]*e[,i-14]+est5$par[5]*e[,i-12]
+est5$par[6]*w[[2]]%*%e[,i-12]}

sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 5")

#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",,ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(6)*log(82)
Bic

##### Estimativa 6- Modelo(3_1,0,14)x(0,1,1_1) #####

esti6=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi20=theta[3]
phi30=theta[4]
THETA10=theta[5]
THETA11=theta[6]
theta140=theta[7]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]%*%y[,1]

```

```

a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]%*%y[,2]-phi20*y[,1]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]%*%y[,i-1]
-phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]%*%y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]+THETA10*a[,i-12]+
THETA11*w[[2]]%*%a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]%*%y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]+theta140*a[,i-14]+
THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]%*%a[,i-12]}

S=sum(a^2)
return(S)
}

est6=optim(c(0,0,0,0,0,0,0),esti6,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1,1))
est6
Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,14),-1,1,
rep(0,14),-1,1,rep(0,14),
-1,1,rep(0,14),-1,1,rep(0,14),-1,1,rep(0,14),-1,1),14,7)
bvec      <- rep(-1,14)
constrOptim(c(0,0,0,0,0,0,0), esti6, NULL, ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti6,c(0,0,0,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=y[,1]
e[,2]=y[,2]-est6$par[1]*y[,1]-est6$par[2]*w[[2]]%*%y[,1]
e[,3]=y[,3]-est6$par[1]*y[,2]-est6$par[2]*w[[2]]%*%y[,2]-
est6$par[3]*y[,1]
for(i in 4:12){
e[,i]=y[,i]-est6$par[1]*y[,i-1]-est6$par[2]*
w[[2]]%*%y[,i-1]-est6$par[3]*y[,i-2]-
est6$par[4]*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
e[,i]=y[,i]-est6$par[1]*y[,i-1]-est6$par[2]*w[[2]]%*%y[,i-1]
-est6$par[3]*y[,i-2]-est6$par[4]*y[,i-3]+est6$par[5]*
e[,i-12]+est6$par[6]*w[[2]]%*%e[,i-12]}
for(i in 15:82){
e[,i]=y[,i]-est6$par[1]*y[,i-1]-est6$par[2]*w[[2]]%*%y[,i-1]-
est6$par[3]*y[,i-2]-est6$par[4]*y[,i-3]+est6$par[7]*e[,i-14]+
est6$par[5]*e[,i-12]+est6$par[6]*w[[2]]%*%e[,i-12]}
sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 6")

```



```
#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(7)*log(82)
Bic

##### Estimativa 7- Modelo(3_1,0,14)x(1_1,1,1_1) #####

esti7=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi20=theta[3]
phi30=theta[4]
THETA10=theta[5]
THETA11=theta[6]
theta140=theta[7]
PHI10=theta[8]
PHI11=theta[9]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]**y[,1]
a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]**y[,2]-phi20*y[,1]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-phi30*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi20*y[,i-2]-
phi30*y[,i-3]-PHI10*y[,i-12]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+
THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi20*y[,i-2]-
phi30*y[,i-3]-PHI10*y[,i-12]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+theta140*
a[,i-14]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}

S=sum(a^2)
```

```

return(S)
}

est7=optim(c(0.5,0.5,0,0,0,0,0,0,0),esti7,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1,1,1,1))
est7
Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,18),-1,1,rep(0,18),
-1,1,rep(0,18),-1,1,rep(0,18),
-1,1,rep(0,18),-1,1,rep(0,18),-1,1,rep(0,18),-1,1,
rep(0,18),-1,1),18,9)
bvec      <- rep(-1,18)
constrOptim(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0), esti7, NULL, ui=Amat,
ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti7,c(0,0,0,0,0,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=y[,1]
e[,2]=y[,2]-est7$par[1]*y[,1]-est7$par[2]*w[[2]]**y[,1]
e[,3]=y[,3]-est7$par[1]*y[,2]-est7$par[2]*w[[2]]**y[,2]-
est7$par[3]*y[,1]
for(i in 4:12){
e[,i]=y[,i]-est7$par[1]*y[,i-1]-est7$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]-
est7$par[3]*y[,i-2]-est7$par[4]*y[,i-3]
}

for(i in 13:14){
e[,i]=y[,i]-est7$par[1]*y[,i-1]-est7$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]-
est7$par[3]*y[,i-2]-est7$par[4]*y[,i-3]-est7$par[8]*y[,i-12]-
est7$par[9]*w[[2]]**y[,i-12]+est7$par[5]*e[,i-12]+
est7$par[6]*w[[2]]**e[,i-12]}
for(i in 15:82){
e[,i]=y[,i]-est7$par[1]*y[,i-1]-est7$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]-
est7$par[3]*y[,i-2]-est7$par[4]*y[,i-3]-est7$par[8]*y[,i-12]-
est7$par[9]*w[[2]]**y[,i-12]+est7$par[7]*e[,i-14]+
est7$par[5]*e[,i-12]+est7$par[6]*w[[2]]**e[,i-12]}
sum(e^2)
hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 7")

#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h",ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")

```

```

abline(h=2*sqrt(1/(n*52)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(9)*log(82)
Bic

##### Estimativa 8- Modelo(3_1,0,14)x(1,1,1_1) #####

  esti8=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi20=theta[3]
phi30=theta[4]
THETA10=theta[5]
THETA11=theta[6]
theta140=theta[7]
PHI10=theta[8]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]**y[,1]
a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]**y[,2]-phi20*y[,1]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi20*
y[,i-2]-phi30*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi20*
y[,i-2]-phi30*y[,i-3]-
PHI10*y[,i-12]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi20*y[,i-2]-
phi30*y[,i-3]-PHI10*y[,i-12]+theta140*a[,i-14]+THETA10*a[,i-12]+
THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}

S=sum(a^2)
return(S)
}

est8=optim(c(0.5,0.5,0,0,0,0,0,0),esti8,method="L-BFGS-B",y=dadosd,
lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1,1,1))
est8
Amat      <- matrix(c(-1,1,rep(0,16),-1,1,rep(0,16),-1,1,rep(0,16),
-1,1,rep(0,16),-1,1,rep(0,16),-1,1,rep(0,16),-1,1,rep(0,16),-1,1),16,8)
bvec      <- rep(-1,16)
constrOptim(c(0,0,0,0,0,0,0,0), esti8, NULL, ui=Amat,ci=bvec,y=dadosd)
nlm(esti8,c(0,0,0,0,0,0,0,0),y=dadosd)

##### Calculando os erros#####

```

```

e=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
e[,1]=y[,1]
e[,2]=y[,2]-est8$par[1]*y[,1]-est8$par[2]*w[[2]]**y[,1]
e[,3]=y[,3]-est8$par[1]*y[,2]-est8$par[2]*w[[2]]**
y[,2]-est8$par[3]*y[,1]
for(i in 4:12){
e[,i]=y[,i]-est8$par[1]*y[,i-1]-est8$par[2]*w[[2]]**
y[,i-1]-est8$par[3]*y[,i-2]-est8$par[4]*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
e[,i]=y[,i]-est8$par[1]*y[,i-1]-est8$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]-
est8$par[3]*y[,i-2]-est8$par[4]*y[,i-3]-est8$par[8]*y[,i-12]+
est8$par[5]*e[,i-12]+est8$par[6]*w[[2]]**e[,i-12]}
for(i in 15:82){
e[,i]=y[,i]-est8$par[1]*y[,i-1]-est8$par[2]*w[[2]]**y[,i-1]-
est8$par[3]*y[,i-2]-est8$par[4]*y[,i-3]-est8$par[8]*y[,i-12]+
est8$par[7]*e[,i-14]+est8$par[5]*e[,i-12]+est8$par[6]*
w[[2]]**e[,i-12]}
sum(e^2)

hist(e, ylab="Frequência", main="Modelo 8")

#####Calculando facst dos erros #####

par(mfrow=c(2,1))
plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,1],type="h", ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 0",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*58)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*58)),col="red")
abline(h=0)

plot(facst(y=e,w=w,s=30,n=n,t=82)[,2],type="h", ylab="FACST residual",
main="Ordem espacial 1",xlab="Defasagem temporal")
abline(h=2*sqrt(1/(n*58)),col="red")
abline(h=2*-sqrt(1/(n*58)),col="red")
abline(h=0)

sigma2=sum(e^2)/(n*82)
sigma2

Bic=n*82*log(sigma2)+2*(8)*log(82)
Bic

#verificando a significancia do parametro phi20

# Modelo 1:

# phi10
# phi11
# phi30
# theta140

```

```

# THETA10
# THETA11
# PHI11

esti1=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi30=theta[3]
THETA10=theta[4]
THETA11=theta[5]
theta140=theta[6]
PHI11=theta[7]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]**y[,1]
a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]**y[,2]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*
w[[2]]**y[,i-1]-phi30*y[,i-3]
}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-phi30*
y[,i-3]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-
phi30*y[,i-3]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+theta140*a[,i-14]
+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}

S=sum(a^2)
return(S)
}

esti1=optim(c(0.5,0.5,0,0,0,0,0),esti1,method="L-BFGS-B",
y=dadosd,lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1,1))

#verificando a significancia do parametro phi30

# Modelo 2:

# phi10
# phi11
# phi20
# theta140
# THETA10
# THETA11
# PHI11

esti2=function(theta,y){
phi10=theta[1]
phi11=theta[2]
phi20=theta[3]

```

```

THETA10=theta[4]
THETA11=theta[5]
theta140=theta[6]
PHI11=theta[7]

a=matrix(0,nrow=n,ncol=82)
a[,1]=y[,1]
a[,2]=y[,2]-phi10*y[,1]-phi11*w[[2]]**y[,1]
a[,3]=y[,3]-phi10*y[,2]-phi11*w[[2]]**y[,2]-phi20*y[,1]
for(i in 4:12){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*
w[[2]]**y[,i-1]-phi20*y[,i-2]
}
for(i in 13:14){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+THETA10*
a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}
for(i in 15:82){
a[,i]=y[,i]-phi10*y[,i-1]-phi11*w[[2]]**y[,i-1]-
phi20*y[,i-2]-PHI11*w[[2]]**y[,i-12]+theta140*
a[,i-14]+THETA10*a[,i-12]+THETA11*w[[2]]**a[,i-12]}

S=sum(a^2)
return(S)
}

est2=optim(c(0.5,0.5,0.3,0.4,0.3,0.4,0.5),esti2,method="L-BFGS-B",
y=dadosd,lower=c(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1), upper=c(1,1,1,1,1,1,1))

est1$value
est2$value

###verificando significancia

n
t=82
k=8 #(numero de parametros modelo completo)

#parametro phi20
((t*n-k)*(est1$value-1226.60))/1226.60

#parametro phi30
((t*n-k)*(est2$value-1226.60))/1226.60

# comparar com f tabelado

```