Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Modelagem bidimensional do movimento da água em condições de solo não saturado

Francisco Dirceu Duarte Arraes

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Física do Ambiente Agrícola

Piracicaba
2014

Francisco Dirceu Duarte Arraes
Tecnólogo em Irrigação e Drenagem

Modelagem bidimensional do movimento da água em condições de solo não saturado

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:
Prof. Dr. **JARBAS HONORIO DE MIRANDA**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Física do Ambiente Agrícola

Piracicaba
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP

Arraes, Francisco Dirceu Duarte
Modelagem bidimensional do movimento da água em condições de solo não saturado / Francisco Dirceu Duarte Arraes.- - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2014.
86 p: il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2014.

1. Diferenças finitas 2. Bulbo molhado 3. Análise de sensibilidade I. Título

CDD 631.432
A773m

DEDICATÓRIA

A todos os meus familiares e principalmente aos meus pais Antônio Arraes Santana (Jua) e Gerucia Maria Duarte Arraes, a minha irmã Dicelle Duarte Arraes, e de forma muito especial ao meu amor e fonte de minha inspiração Vilauba Sobreira Palácio.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me proporcionar tantas alegrias e vitorias ao longo da minha vida;

Aos meus pais, Gerucia e Jua pelo esforço feito durante anos para dar educação e que tanto se esforçaram e me incentivaram a estudar. Tudo o que sou, devo a eles;

À minha irmã e amiga Dicelle por todo o apoio e carinho;

À minha esposa Vilauba pelo amor, carinho, companheirismo e incentivo;

A todos os meus familiares que mesmo nos momentos ausentes se fizeram presentes, em especial a minha avó dona Mundinha, aos tios Chagas, Arraes, Delma e Toinha.

À minha sogra Maninha pelo incentivo e orações;

Ao meu orientador Jarbas Honorio de Miranda pela amizade, compreensão e orientação;

Aos Professores Jarbas, Quirijn, Sergio Nascimento (Serginho), Sergio Moraes, Paulo Libardi pelos conhecimentos transmitidos de forma tão clara que em muito contribuíram para minha formação acadêmica.

À ESALQ/USP pela oportunidade oferecida, através do Departamento de Engenharia de Biossistemas para realização do curso de doutorado;

À CAPES pela concessão de bolsa de estudos;

Aos amigos da sala 115 Angélica, Roque, Marcos, Cristhiane, Adriano, Monica, Fernando, Marcelo, Luciano, Neilo, Helon e Francisco (Chiquilito) e aos professores Quirijn, Jarbas, Libardi e Sergio Moraes pela tão agradável convivência, companheirismo e pelos bons momentos na copa;

Aos companheiros da sala 115a Marcelo, Neilo e Luciano (Boner) pelas amplas discussões em nossa salinha a respeito dos mais diversos a assuntos; Marcos pelas discussões em física do solo, modelagem, programação, matemática e lógico sobre o Chapolin e suas aventuras.

Aos colegas Carlos, Mariana, Bruno Marçal;

Aos secretários Fernando, Ângela e Davilmar;

Aos meus amigos, Isaac Ponciano e Ezequiel (Guatemala) pela excelente convivência ao longo da minha estadia em Piracicaba e pelas discussões sobre tudo;

Ao amigo e ex-professor Joaquim Branco de Oliveira pelo incentivo para que continuasse meus estudos;

Aos meus amigos Ricardo César, Thiago Alves, Sávio, Adriana e Jorgiana pelo incentivo e apoio;

Aos colegas de trabalho do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IFSertão – PE) campus Salgueiro – PE em especial Rodrigo, Almir, Thiciano, Romulo, Adriana, Marcelo e Edmilson;

Aos estudantes do Curso Superior de Tecnologia em Irrigação e Drenagem do IFCE-Campus Iguatu Aidersson, Paulilo, Emanuel, Yure, Kleber, Juarez, Ysis, Ramon, Taynara, Wesley e aos estudantes do Curso Licenciatura em Química do IFCE – campus Iguatu Luís Humberto, Raquel e Evelinny;

Ao sofrido povo brasileiro e principalmente aos filhos mais pobres dessa nação que devido à carga tributaria desigual mantém toda essa maquina funcionando e mantém as universidades públicas e gratuitas;

Aqui queria agradecer aos enfermeiros do Hospital Regional do Cariri: Ivaneide, Cícero, Jozélia, Helk e ao médico residente Breno pelos cuidados quando de lá precisei.

A todos que de uma forma ou de outra contribuíram para mais essa vitória.

Muito Obrigado!

EPÍGRAFE

"Não sou nada.
Nunca serei nada.
Não posso querer ser nada.
À parte isso, tenho em mim todos os sonhos do mundo."

(Fernando Pessoa)

SUMÁRIO

RESUMO

Modelagem bidimensional do movimento da água em condições de solo não saturado

O conhecimento da distribuição da umidade no solo para diferentes tipos de solos e diferentes vazões pode ser aplicado na otimização do dimensionamento de um sistema de irrigação, no manejo da água na zona radicular, bem como, auxiliar na aplicação eficiente de fertilizantes na rizosfera. Portanto, objetivou-se com a presente pesquisa desenvolver um modelo numérico bidimensional capaz de simular a distribuição da umidade no perfil de solo para diferentes sistemas de irrigação. Sendo que para tal, o modelo utiliza o método das diferenças finitas, mediante uma discretização da solução da equação de Richards e o método iterativo de Picard, o qual foi utilizado para garantir a conservação da massa. O modelo numérico ainda torna possível considerar a extração de água pelas plantas e a evaporação da água na superfície do solo. E para avaliar o seu desempenho foi feita uma análise de sensibilidade. O modelo matemático foi desenvolvido no Departamento de Engenharia de Biossistemas, pertencente à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" – ESALQ/USP. A linguagem de programação utilizada foi Fortran 90. A estrutura computacional foi feita de forma a permitir ao usuário a entrada de informações tais como: a) dados do perfil do solo, no que se refere às suas propriedades físico-hídricas, b) informações sobre o tipo de irrigação, tempo de simulação, tempo de aplicação de água via irrigação. O programa permite ao usuário a opção entre simular a extração de água pela as plantas ou não. Para a validação do modelo foram utilizados os dados obtidos por Rivera (2004), em um experimento conduzindo no antigo Departamento de Engenharia Rural da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". O desempenho do modelo foi avaliado com base nos parâmetros estatísticos: índice de concordância de Willmott; coeficiente de eficiência, raiz quadrada do erro médio, erro médio e o erro máximo absoluto. A análise de sensibilidade do modelo foi avaliada em função dos parâmetros: densidade de fluxo de água, condutividade hidráulica do solo saturado, alfa e n (parâmetros de ajuste da curva de retenção). Pelos resultados obtidos, o modelo apresentou um desempenho satisfatório na simulação dos perfis de umidade em relação aos dados medidos em condições de experimento em solo não saturado. Em relação à análise de sensibilidade, o modelo apresentou maior sensibilidade aos parâmetros de fluxo de entrada e ao parâmetro n da equação de retenção, indicando que tais parâmetros de entrada, necessitam ser determinados com maior precisão. Houve baixa sensibilidade ao parâmetro "alfa" da curva de retenção.

Palavras-chave: Diferenças finitas; Bulbo molhado; Análise de sensibilidade

ABSTRACT

Two-dimensional modeling of water movement in unsaturated soils

The soil moisture distribution for different soil types under different flow regimes can be used to optimize the design of an irrigation system, water manage water in the root zone, or increase the precision of the application of fertilizers in the rhizosphere. Therefore, the objective of this research was to develop a two-dimensional numerical model capable of simulating the soil moisture distribution in soil profile for different irrigation systems. The model is a finite difference solution of the Richards equation solution, in which the Picard iteration method is used to ensure the conservation of mass. The numerical model also takes water extraction by plants and water evaporation on the soil surface into account. The mathematical model was developed in the Department of Biosystems Engineering, College of Agriculture "Luiz de Queiroz", ESALQ / USP. It was coded in Fortran 90, and structured to allow interactive input of a) physical and hydraulic properties soil profile, and b) type of irrigation, irrigation application time, and simulation. The simulation of water extraction by the plants is optional. And to evaluate its performance a sensitivity analysis was done. Data obtained in an experiment carried out in the older Rural Engineering Department, College of Agriculture "Luiz de Queiroz" by Rivera (2004), were used to validate the model. Model performance was evaluated using the Willmott index of agreement; efficiency coefficient, root mean square error, average error and the maximum absolute error. Sensitivity analyses were performed on the density of water flow, saturated hydraulic conductivity, and on alpha and n (setting parameters of the soil water retention curve). From the results obtained, the model satisfactory simulated the measured soil moisture distributions in the experimental soil moisture profiles. The model was most sensitive to variations in the parameters of the input stream and to n, a parameter in the soil water retention equation (van Genuchten model, 1980). This results is indicative that these input parameters need to be determined with greater accuracy. The model output was not very sensitive to alpha, a shape parameter in the soil water retention curve.

Keywords: Finite difference; Wet bulb; Sensitivity analysis

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO

O crescimento da população mundial tem como consequência o aumento do consumo de água pelo meio urbano. Nesse sentido, cabe à agricultura irrigada a missão de produzir maior quantidade de alimentos com uma menor utilização de água e além disso, buscar não degradar os recursos do solo e da água.

O aumento da eficiência dos sistemas de irrigação, a facilidade de automação, a capacidade de aplicar fertilizantes e outros produtos químicos via água de irrigação e o baixo custo econômico são alguns dos fatores que têm contribuído para o aumento da popularidade da irrigação nas últimas décadas.

O dimensionamento e o manejo dos sistemas de irrigação exigem a compreensão da distribuição da umidade no solo e a sua relação com o sistema radicular. Portanto, o conhecimento da distribuição da umidade no solo para diferentes tipos de solos e diferentes vazões pode ser utilizada na otimização do dimensionamento de um sistema de irrigação, manejo da água na zona radicular, bem como, uma aplicação eficiente de fertilizantes na rizosfera.

A distribuição da umidade no solo sob a irrigação pode ser medida ou simulada por modelos matemáticos, os quais apresentam várias vantagens: (i) os modelos, em sua maioria, têm sua utilização relativamente fácil; (ii) os modelos que simulam a infiltração e redistribuição, incorporam conceitos amplamente aceitos pela física do solo, exceção feita para os modelos empíricos; (iii) os parâmetros de entrada necessários podem ser obtidos a partir da literatura especifica, bem como mediante uma base de dados. (iv) a medição da distribuição da umidade em campo, embora recomendável, não é necessária para a obtenção de estimativas preliminares de fluxo de água.

Vários modelos utilizam a equação de Richards (1931) como a equação que descreve o fluxo de água solo, logo sua solução pode ser utilizada para simular a distribuição do conteúdo de água na condição de solo não saturado. A solução numérica da equação de Richards é obtida mediante a aplicação de métodos numéricos, onde se pode citar o método dos elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas.

Embora, alguns modelos bidimensionais tenham sidos desenvolvidos no Brasil, onde pode-se citar os trabalhos de Botrel (1988), Rivera et al. (2006) e Tolentino Junior (2011), esses modelos estão restritos à simulação do movimento de água a partir de uma fonte pontual (*source point*), ou seja, um gotejador localizado na superfície do solo, não considerando a evaporação, extração de água pelas raízes. Visando suprir a carência de um modelo mais geral de fácil manipulação e aplicável a outras situações da irrigação como, por exemplo, aspersão,

microaspersão, gotejamento subsuperficial e irrigação por superfície, buscou-se desenvolver esse modelo matemático bidimensional para simulação do movimento da água em condições de saturação variável. O modelo proposto na presente pesquisa tem como objetivo simular valores de potencial mátrico e conteúdo de água no solo. Além desse aspecto, será feita uma análise de sensibilidade do referido modelo matemático, diante dos seguintes cenários:

- simulação do movimento da água no solo em condições de carga hidráulica constante na superfície do solo, em que se assemelha à irrigação por superfície ou na condição de teste infiltração de anel com carga constante, bem como, na condição de uma fonte pontual, ou seja, irrigação por gotejamento superficial ou subsuperficial e irrigação por microaspersão/aspersão;
- simulação da influência da evaporação da água no solo e a extração de água pelas raízes;
- resolução da equação de Richards na forma mista;
- aplicação do método de diferenças finitas discretização da solução da equação de Richards; utilizando-se o método iterativo de Picard, para garantir a conservação da massa.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Água no solo

O estado hidráulico de um solo pode ser definido por duas propriedades: a quantidade de água armazenada nos poros do solo e a energia potencial da água. É habitual na modelagem hídrica do solo representar a primeira propriedade, em termos de uma relação volumétrica, significando a fração do volume total do solo que é ocupada pela água contida no solo. Esse índice adimensional nada mais é que uma relação do volume de água com o volume total do solo conhecida como umidade volumétrica do solo (θ). Se V_a é o volume de água no solo [L^3], e V_t o volume total [L^3], portanto, o conteúdo volumétrico de água no solo [$L^3 L^{-3}$] pode ser definido como:

$$\theta = \frac{V_a}{V_t} \tag{1}$$

A segunda propriedade, a energia potencial da água no solo, fornece a força motriz para o movimento da água, a qual move-se a partir de pontos de maior energia potencial para pontos com menor energia potencial, em resposta ao gradiente potencial (LIBARDI, 2005).O potencial total da água no solo é composto por vários potenciais. Em condição de solo saturado, os componentes mais importantes são: potencial gravitacional e de pressão e em condições de solo não saturado, o potencial gravitacional e potencial mátrico, mas cabe ressaltar que a água também pode se mover através do meio poroso do solo em resposta a gradientes térmicos, elétricos, ou de concentração de solutos (JURY; HORTON, 2004).

A energia potencial pode ser expressa por unidade de volume, por unidade de massa ou por unidade de peso. Se for expresso em termos de volume, a unidade resultante é pressão ($J\ m^{-3} = N\ m^{-2} = Pa$). Se o potencial for expresso por unidade de massa, é a unidade de joules por quilograma ($J\ kg^{-1}$). Porém, normalmente em estudos das relações hídricas no solo e em modelos eco-hidrológicos o potencial é expresso por unidade de peso, levando a uma unidade de distância ($J\ N^{-1} = m$).

Quando o potencial da água no solo é expresso por unidade de peso, o potencial gravitacional corresponde a uma elevação z [L], bem como o potencial de pressão (solo saturado) e o potencial mátrico (solo não saturado) corresponde à carga de pressão de água no solo. Em alguns textos sobre água no solo (HILLEL, 1998; WARRICK, 2003; JURY; HORTON, 2004) para evitar o uso desnecessário de símbolos é comum definir apenas o potencial de pressão h [L] ("*pressure head*"). Se o solo está saturado, h é positivo, e também

denotado pelo potencial de pressão hidrostática. Se o solo encontra-se como não saturado, h é negativo, e também denotado de potencial mátrico.

Portanto, o potencial total da água no solo expresso por unidade de peso, H [L], é dado por:

$$H = h + z \tag{2}$$

Em que z é a coordenada vertical, ou seja, a altura em relação a algum nível de referência, e h é o potencial de pressão.

2.2 O movimento da água no solo

O movimento da água no solo pode ocorrer em condições saturadas, situação em que todos os poros do solo estão preenchidos com água, e em condições não saturadas, quando apenas parte dos seus poros estão preenchidos com ar. A quantificação do movimento da água no solo, tanto sob as condições de saturação como de não saturação, tem sido feita pelas chamadas equações de fluxo para regime estacionário e para regime transiente (LIBARDI, 2005).

A relação fundamental entre o fluxo macroscópico e o potencial hidráulico é dada pela Lei de Darcy. Em 1856, Henry Darcy realizou uma série de experimentos com o intuito de pesquisar o fluxo de água em uma coluna vertical, saturada, com sistema de solo homogêneo (sem camadas com a profundidade ou nenhuma variação nas propriedades do solo), isotrópico (propriedades do solo uniforme em todas as direções) e com a área da secção transversal constante (Figura 1) (HILLEL, 1998; WARRICK, 2003; LAL; SHUKLA, 2004).

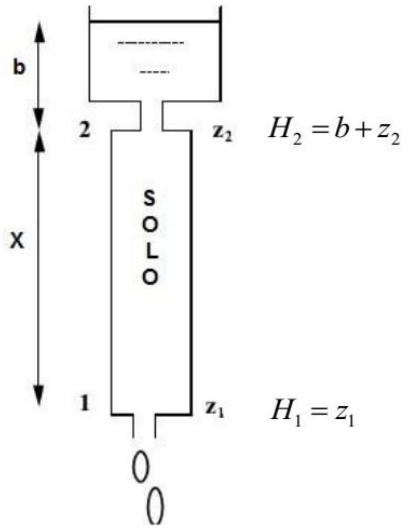

Figura 1 - Representação esquemática do experimento de Darcy (1856)

Darcy concluiu que a vazão Q, através da coluna comportava-se de maneira inversamente proporcional ao comprimento da coluna e diretamente proporcional à área da secção transversal e à diferença entre os potenciais hidráulicos. A partir dos resultados ele formulou seguinte equação.

$$Q = K_o \frac{A\Delta H}{x} \tag{3}$$

Em que Q é a vazão [$L^3 T^{-1}$], A é a área da secção transversal [L^2], x é o comprimento da coluna [L], ΔH é a diferença de potencial hidráulico [L], obtida pela diferença entre os potenciais H_2 e H_1, e K_o é uma constante de proporcionalidade, chamada de condutividade hidráulica do solo saturado [$L\ T^{-1}$].

A densidade de fluxo "q" também conhecida como fluxo de Darcy ou velocidade de Darcy (BEAR, 1979; FREEZE; CHERRY, 1979; BEAR; BACHMAT, 1990; FETTER, 2001), que representa o fluxo volumétrico por unidade de área, pode ser definida como:

$$q = \frac{Q}{A} \tag{4}$$

Em que: q é a densidade de fluxo de água no solo, $L\ T^{-1}$

A densidade de fluxo ou velocidade de Darcy, em termos físicos, refere-se à velocidade média da água através da matriz do solo. Porém, não se deve confundir com a velocidade da água nos poros, tendo em vista que o fluxo de fato não ocorre através de toda a área da secção transversal, porque parte dessa área está ligada por partículas e apenas a porosidade permite a fração fluir (HILLEL, 1998; LAL; SHUKLA, 2004; REICHARDT; TIMM, 2004). Além de que a área real de poros, através da qual ocorre o fluxo, é menor do que a área total (poro mais a matriz do solo). Logo, a velocidade média do líquido nos poros deve ser maior do que a densidade de fluxo (HILLEL, 1998). Em condições de solo não saturado, a área disponivel é menor ainda, pois o fluido só se movimenta pelos poros cheios de água (REICHARDT; TIMM, 2004). Portanto, a velocidade média de poros de água v [$L\ T^{-1}$] é determinada como se segue:

$$v = \frac{q}{\theta} \tag{5}$$

A Lei de Darcy pode ser aplicada para representar fluxo em meios porosos, em qualquer direção no espaço. Para isso, basta um "tratamento" matemático à Lei de Darcy escrevendo na forma diferencial generalizada.

$$q = -K_o \nabla H \tag{6}$$

Em que ∇ (operador vetorial nabla) representa o gradiente nas direções x, y, z, e ∇H é o gradiente hidráulico tridimensional, dado por:

$$\nabla H = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \tag{7}$$

O sinal negativo na eq. (6) indica que a água flui no sentido do decréscimo do potencial, ou seja, do ponto de maior potencial para o ponto de menor potencial hidráulico. Vale ressaltar que a Lei de Darcy foi estabelecida em determinadas circunstâncias: fluxo laminar em meio poroso saturado, sob as condições de fluxo em regime estacionário, considerando o fluido homogêneo, isotérmico e incompressível, e negligenciando a energia cinética. Como a Lei de Darcy é uma lei macroscópica deduzida pela integração do fluxo de água individual em cada poro, a qual tem várias formas microscopicamente (MIYAZAKI, 2005). Portanto, representar o comportamento médio do fluxo no meio poroso é devido à pequena influência de outros fatores, a lei macroscópica de Darcy pode ser utilizada para muitas situações que não correspondem a essas premissas básicas (FREEZE; CHERRY, 1979).

A hipótese mais restritiva da Lei de Darcy é aquela que considera o fluxo laminar, sendo o movimento do fluido dominado por forças viscosas. Isto ocorre quando os fluidos se movem lentamente, e as moléculas de água se movem juntamente às linhas de correntes paralelas. Quando a velocidade de fluxo aumenta (por exemplo, na vizinhança de um poço de bombeamento), as partículas de água movem-se de forma caótica e as linhas de corrente já não são paralelas. Neste caso o fluxo é turbulento, e as forças de inércia são mais importantes que as forças viscosas (FETTER, 2001).

Avalidade da Lei de Darcy é muitas vezes expressa em função do número de Reynolds (Re), que representa a proporção entre as forças de inércia e as forças viscosas, no qual é utilizado como um critério para distinguir entre o fluxo laminar, o fluxo turbulento e a zona de transição. Para o meio poroso, o número de Reynolds é definido de acordo Lal e Shukla (2004) como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_w r v}{\eta_w} \tag{8}$$

Em que ρ_w é a densidade da água a uma dada temperatura, [M L^{-3}], η_w é a viscosidade dinâmica da água, [M $L^{-1}T^{-1}$], v é a velocidade da água, [L T^{-1}], e r é o raio do poro, [L], e Re é adimensional.

De acordo com Bear (1979), a Lei de Darcy, que supõe um fluxo laminar é válida para números de Reynolds inferiores a 1, mas o limite superior pode ser prorrogado até 10 (Figura 2). Uma vez que os poros no solo são curvas e de raios variáveis, portanto, os valores de Re menores do que 1 corresponde a um fluxo laminar (LAL; SHUKLA, 2004).

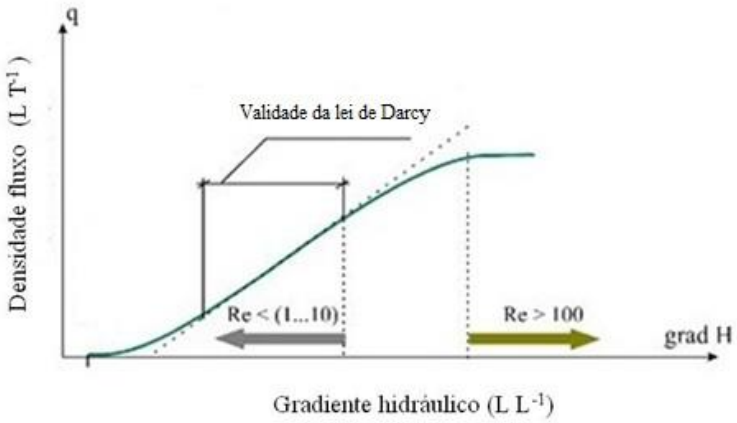

Figura 2 - Faixa de validade da Lei de Darcy
Fonte: adaptado de Lal e Shukla (2004)

A equação de Darcy é válida quando as forças de inércia sobre o fluido são insignificantes em comparação às forças viscosas [ver eq. (8)]. Para a maioria dos gradientes hidráulicos observados na natureza, essa condição geralmente prevalece em solos argilosos, siltosos e de textura fina (LAL; SHUKLA, 2004). Assim, a lei de Darcy é válida para tais solos. Em solos de textura grossa (por exemplo, areias grossas e cascalhos), gradientes hidráulicos acima da unidade podem causar turbulência ou não condições de fluxo laminar. Em velocidades mais altas, a relação linear entre o gradiente hidráulico e o fluxo (Figura 2) deixa de existir ea Lei de Darcy não é mais válida (HUBBERT, 1957).

Na condição de não saturação quando atua o potencial mátrico, além do potencial gravitacional, os processos de fluxo são mais difíceis de serem descritos quantitativamente, uma vez que podem promover mudanças no estado e quantidade de água durante o fluxo. O fluxo de água nessas condições é a situação mais comum do solo agrícola, podendo ser quantificado pela Lei de Buckingham, essa equação que descreve a densidade de fluxo num meio poroso não saturado. Pode ser escrita na forma vetorial como:

$$q = -K(\theta)\nabla H \qquad (9)$$

Em que K (θ) ou K(h) é a condutividade hidráulica não saturada [L T^{-1}], que é função do conteúdo de umidade, θ [L^3 L^{-3}] ou em função do potencial mátrico, h [L]. A eq. (8) também é conhecida pela equação de Darcy-Buckingham (LIBARDI, 2005).

A água líquida flui através de poros contínuos e tortuosos no solo. A equação básica para quantificar o fluxo de água no solo é construída pela aplicação da Lei de Darcy combinada com a equação da continuidade para um pequeno cubo de dimensões dx, dy e dz como mostrado na Figura 3, que contém um número suficientemente grande de partículas de solo e, por conseguinte, demonstra propriedades representativas de toda a amostra do solo.

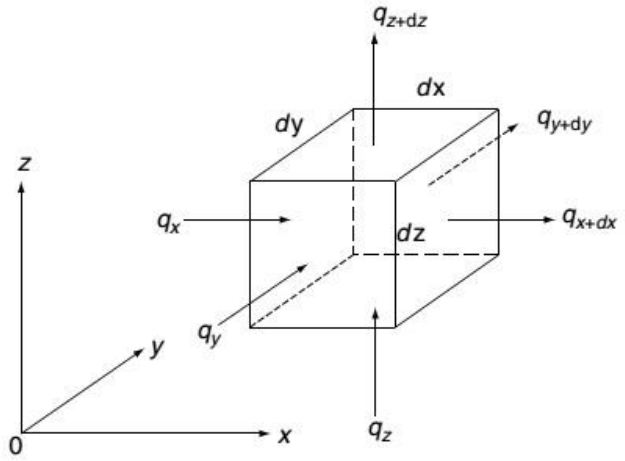

Figura 3 - Volume elementar de solo

A equação de continuidade combina a taxa de variação da umidade da matriz do solo para as mudanças nos fluxos de entrada e de saída através da matriz do solo. A equação de continuidade estabelece que a taxa de variação do fluxo de entrada e de saída é igual à taxa de variação na armazenagem de água na matriz do solo (LIBARDI, 2005).

Denotando a mudança no conteúdo volumétrico de água neste pequeno cubo por dθ, a mudança quantitativa total de água neste cubo é dada por dθ dx dy dz. A partir da Figura 3 pode-se deduzir que a variação no total de água é produzida pela diferença entre as entradas (q_x, q_y e q_z) e saídas (q_{x+dx}, q_{y+dy}, e q_{z+dz}). Sendo as densidades de fluxos nas saidas dadas por:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \tag{11}$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \tag{12}$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \tag{13}$$

Portanto, o balanço de volume no elemento de solo (Figura 3) durante um determinado tempo dt é dado por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} dxdydz = q_x dydz - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydz + q_y dxdz - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dxdz +$$

$$q_z dxdy - \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dxdy \pm \Gamma \qquad (14)$$

Em que θ representa a umidade volumétrica [L^3 L^{-3}], t é o tempo [T], q_x, q_ye q_z representam componentes de fluxo nas direções x, y e z, respectivamente [L T^{-1}] e Γ [T^{-1}] é um termo fonte /sumidouro (“sink / source”), é uma fonte em caso positivo, se negativo é um sumidouro. Um termo sumidouro (sink) é usado para simular o movimento de água no sistema solo-planta-atmosfera para representar a extração de água pela planta.

Cancelando-se os termos iguais na eq. (14), a equação de balanço de massa ou equação da continuidade torna-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) - \Gamma \qquad (15)$$

Substituindo a Lei de Darcy-Buckingham [eq. (9)] na eq. (15), a variação da umidade volumétrica em relação ao tempo, torna-se.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(\theta) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \right] - \Gamma \qquad (16)$$

Ou ainda.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(h) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(h) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(h) \frac{\partial H}{\partial z} \right] - \Gamma \qquad (17)$$

A combinação da equação de Darcy-Buckingham [eq. (9)] com a equação da continuidade [eq. (15)] fornece a equação diferencial geral que rege o movimento da água no solo, também conhecida como equação de Richards (LIBARDI, 2005). Substituindo-se a eq. (2) na eq. (17), tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(h) \frac{\partial (h+z)}{\partial z} \right] - \Gamma \qquad (18)$$

Ou ainda

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(h) \frac{\partial (h)}{\partial z} \right] + \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} - \Gamma \qquad (19)$$

A eq. (19) é conhecida como a equação Richards na forma mista (CELIA et al., 1990), tendo em vista que existem duas variáveis dependentes a umidade volumétrica (θ) e o potencial mátrico (h). Portanto, as relações entre θ e h podem ser derivadas, permitindo que a eq. (19) possa ser reformulada para ter apenas uma variável dependente, o que pode ser à base do potencial mátrico (h) ou à base da umidade volumétrica (θ). Esta relação entre a umidade do solo e o potencial mátrico, também conhecida como a curva de retenção de água no solo, proporciona uma transformação entre h e θ em um determinado solo (HILLEL, 1998; WARRICK, 2003; LIBARDI, 2005). Aplicando-se a regra da cadeia, a taxa de variação da umidade volumétrica pode ser expressa como (VAN DAM; FEDDES, 2000).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t} = C(h)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{20}$$

Em que C(h) é a função capacidade hídrica específica [L^{-1}], que é igual ao coeficiente angular da curva característica de solo. Convém, no entanto, notar que a função capacidade hídrica especifica, definida pela eq. (20), é diferente para cada tipo de solo, e até mesmo no mesmo solo, sendo afetada pela histerese da curva de retenção (DE JONG VAN LIER et al., 2006).

Substituindo-se a função capacidade hídrica especifica [eq. (20)] na eq. (19), obtém-se:

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(h)\frac{\partial h}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(h)\frac{\partial (h)}{\partial z}\right] + \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} - \Gamma \tag{21}$$

Na eq. (21) a variável dependente será a carga devido à pressão da água nos meniscos capilares (potencial mátrico), sendo essa equação conhecida como equação de Richards forma “h-based” (CELIA et al., 1990).

Alternativamente o componente mátrico pode ser representado como:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{22}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{23}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{24}$$

Logo, substituindo as equações (22), (23) e (24) na eq. (19), e fazendo K em função de θ tem-se.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(\theta)\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_y(\theta)\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(\theta)\frac{\partial h}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K_z(\theta)}{\partial z}-\Gamma \tag{25}$$

Definido a difusividade hidráulica não saturada D(θ) [L^2 T^{-1}], sendo válido apenas na condição de ausência de histerese (LAL; SHUKLA, 2004; MIYAZAKI, 2005):

$$D(\theta)=K(\theta)\frac{\partial h}{\partial\theta} \tag{26}$$

Logo, a eq. (27), é a equação de Richards conhecida como na forma difusividade ou "θ-based"

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D_x(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[D_y(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[D_z(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K_z(\theta)}{\partial z}-\Gamma \tag{27}$$

As equações (21) e (27) são altamente não lineares devido às funções de C(h), D(θ), e K(θ) ou K(h) devido à sua dependênciaem entre h e θ. Elas também são conhecidas como equações Fokkar-Plank (LAL; SHUKLA, 2004; LIU et al., 2004). Soluções analíticas da equação de Richards foram obtidas por Braester(1973), Warrick (1974), Lomen e Warrick (1978), Sander et al. (1988), Warrick et al.(1991). Porém devido à equação de Richards ser uma equação diferencial parcial de segunda ordem não linear, as soluções analíticas são obtidas a partir principalmente de simplificações das propriedades hidráulicas do solo. Para problemas mais complexos e com geometria irregular é necessário recorrer às técnicas numéricas (VAN GENUCHTEN, 1982; CELIA et al., 1990; PAN; WIERENGA, 1995; VAN DAM; FEDDES, 2000; VASCONCELLOS; AMORIM, 2001; DE JONG VAN LIER et al., 2008).

2.3 Curva de retenção de água no solo

A relação fundamental entre a umidade do solo (θ) e o potencial mátrico (h) é chamada de curva característica de água no solo ou curva de retenção da água no solo. Essa relação proporciona uma transformação entre potencial mátrico e umidade do solo. A curva de retenção é uma das mais importantes medidas da característica hidráulica do solo e é elementar na modelagem do fluxo da água (DE JONG VAN LIER et al., 2009). A forma da curva característica de água no solo é afetada pela distribuição do tamanho da partícula, distribuição de tamanho do poro, a estrutura do solo, quantidade de matéria orgânica presente

e textura do solo (WARRICK, 2003; LAL; SHUKLA, 2004; MIYAZAKI, 2005). Essa relação pode ser expressa matematicamente como:

$$\theta = f(h) \tag{28}$$

$$h = f(\theta) \tag{29}$$

A determinação das curvas de retenção é feita em laboratório seguindo trajetórias de drenagem: quando uma amostra previamente saturada é exposta a potenciais mátricos gradualmente maiores (em valores absolutos), com sucessivas medidas desses valores em função do conteúdo de água de equilíbrio de cada estágio; ou de molhamento – quando uma amostra seca ao ar tem seu potencial mátrico reduzido gradualmente, também com sucessivas medidas do potencial em função do conteúdo de água de equilíbrio em cada estágio (SILVA, 2011).

A curva característica de água no solo é dependente da trajetória seguida durante o ensaio, de secagem, umedecimento ou mista, e este fenômeno é denominado histerese (HILLEL, 1998; LAL; SHUKLA, 2004; MIYAZAKI, 2005). A curva de secagem e a curva de umedecimento formam os limites extremos para a curva característica de um dado solo. Entre essas curvas existem infinitas outras curvas que representam a relação umidade e a tensão de água do solo. As curvas de secagem e de umedecimento são assintóticas nos extremos (umidade tendendo a zero e a de tensão tendendo ao infinito), como mostra a Figura 4 (HILLEL, 1998; JURY; HORTON, 2004; LAL; SHUKLA, 2004; MIYAZAKI, 2005).

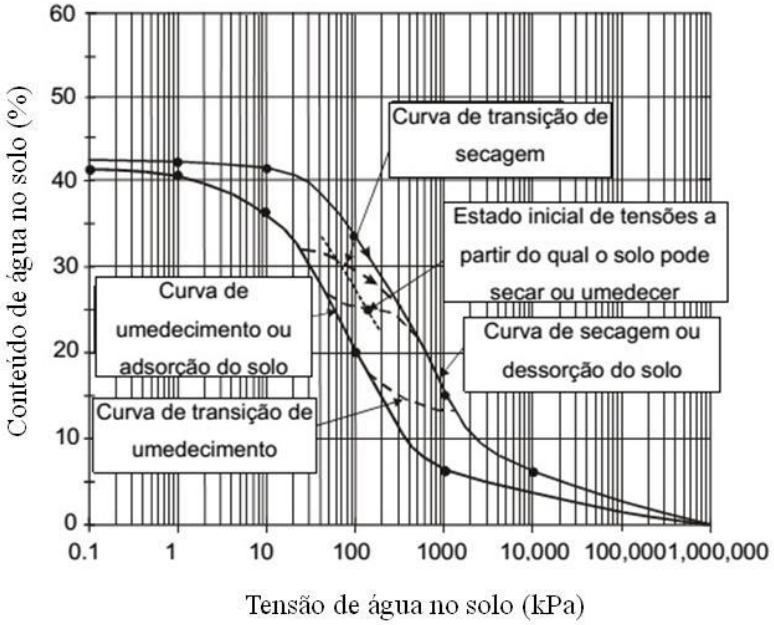

Figura 4 - Curva de retenção de água com histerese
Fonte: Boszczowski (2008)

O fenômeno da histerese é explicado por meio de diferentes causas, como a geometria não uniforme dos poros intercomunicados por pequenas passagens, o efeito do ângulo de contato que varia em função da trajetória seguida, a ocorrência de bolhas de ar aprisionadas que influenciam a trajetória de umedecimento e as variações de volume sofridas por expansão e retração (POULOVASSILIS, 1962; HILLEL, 1998).

Na literatura é apresentada uma vasta quantidade de modelos matemáticos para representar as curvas de retenção para diferentes tipos de solos. Destacam-se os modelos Gardner (1958), Brooks e Corey (1964), Brutsaert (1966), Haverkamp e Vauclin (1979), van Genuchten (1980). As equações mais utilizadas em modelos são as de Brooks e Corey (1964) e van Genuchten (1980) (ŠIMŮNEK et al., 2006; KROES et al., 2008; DE JONG VAN LIER et al., 2009; DOURADO NETO et al., 2011). A relação Brooks e Corey (1964) é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}=\left[\dfrac{h_a}{h}\right]^{\lambda_b} & \text{para } h\le h_a \\ \theta=\theta_s & \text{para } h_a\le h\le 0 \end{cases} \tag{30}$$

Em que h_a é a pressão de entra da de ar do solo [L] e λ_b um parâmetro de ajuste.

A equação de van Genuchten (1980) é dada pela seguinte expressão:

$$S_e=\frac{\theta-\theta_r}{\theta_s-\theta_r}=\left[\frac{1}{1+\left(\alpha|h|\right)^n}\right]^m \tag{31}$$

Em que S_e é a saturação efetiva, θ_s e θ_r são umidade de saturação e umidade residual do solo (parâmetro de ajuste numérico na qual o potencial mátrico tende ao infinito), respectivamente, α é um parâmetro com dimensão igual ao inverso do potencial mátrico [L^{-1}], n é um parâmetro da curva, adimensional, e m é um parâmetro da curva (geralmente) definido como $m=1-\dfrac{1}{n}$.

Os efeitos dos parâmetros α e n na equação de van Genuchten (1980) são apresentados na Figura 5. Quando se mantem n fixo e oscilando o valor de α (Figura 5a), parâmetro α influência diretamente no valor da pressão de entrada de ar. De acordo Vereecken et al. (2010), dizem que geralmente, esse valor pode ser maior do que a pressão de entrada de ar. Na Figura 5b indica que o parâmetro n controla a inclinação da curva de retenção.

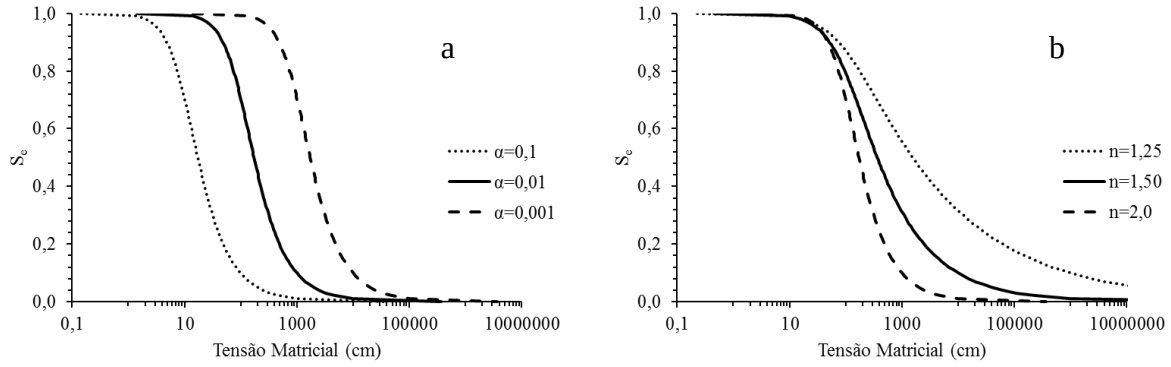

Figura 5–Influência dos parâmetros da equação de van Genuchten (1980): (a) Efeito do parâmetro α com n=2; (b) Efeito do parâmetro n com α =0,01 cm^{-1}

O modelo apresentado por van Genuchten (1980), é particularmente interessante por que, partindo da teoria desenvolvida por Mualem (1976) pode-se derivar analiticamente a uma função para determinar a condutividade hidráulica do solo, a partir da curva de retenção da água no solo.

2.4 Condutividade hidráulica

As condutividades hidráulicas do solo saturado e não saturado estão ambas relacionadas com o grau de resistência do meio poroso em transportar a água através dos seus poros. Estas resistências são afetadas pelas formas, tamanhos, ramificações e tortuosidades dos poros, bem como pela viscosidade da água (MIYAZAKI, 2005). Além disso, a condutividade hidráulica do solo não saturado é afetada significativamente pelo conteúdo de água no solo (DE JONG VAN LIER et al., 2009).

De acordo com Miyazaki (2005), há dois tipos de configurações de água no solo não saturado: os filmes de água ao redor das partículas do solo, incluindo a água que fica praticamente interconectada por inteira ao longo dos pontos de contato das partículas e a água que parcialmente satura os pequenos poros. Estas configurações podem coexistir. Quando o conteúdo de água volumétrica diminui no solo, tanto a espessura da película de água e o tamanho dos domínios em que os pequenos poros parcialmente saturados irão diminuir. Assim, a redução no conteúdo volumétrico de água irá provocar uma diminuição da área de fluxo da secção transversal, provocado um aumento da resistência contra o fluxo e da distância real do fluxo. É por isso que a condutividade hidráulica do solo não saturado diminui muito rapidamente com o decréscimo do conteúdo de água.

A determinação da condutividade hidráulica do solo pode ser feita em laboratório ou a campo. Em condições de laboratório os resultados são mais precisos em relação ao campo, devido ao maior controle das condições experimentais. Apesar de maior grau de dificuldade, as medidas em campo são feitas nas condições naturais e com perturbação mínima da estrutura do solo. A condutividade hidráulica também pode ser determinada por métodos indiretos por meio da quantificação a partir de outras propriedades cuja determinação seja mais fácil. Os métodos de determinação da condutividade hidráulica podem ser o permeâmetro de carga constante e de carga decrescente, método das colunas grandes e das colunas pequenas, método das condições transientes, infiltrômetro de tensão, método do furo do trado e método do perfil instantâneo (MELO FILHO; LIBARDI, 2009).

Quando as medições diretas da condutividade hidráulica do solo não são possíveis, tendo em vista, que as metodologias ainda permanecem com um elevado custo e/ou procedimentos demorados (AIMRUN; AMIN, 2009). Por esta razão, têm sido desenvolvidos métodos indiretos, em que a condutividade é expressa como uma função de outros parâmetros do solo. Neste contexto, foram desenvolvidas funções de pedotransferência (equaçõesde regressão), para calcular a condutividade hidráulica a partir de propriedades do solo, tais como a distribuição do tamanho das partículas, densidade do solo, matéria orgânica (SAXTON et al., 1986; VEREECKEN et al., 1990; RAWLS et al., 1991; WÖSTEN et al., 1995; AIMRUN; AMIN, 2009). Porém, os modelos baseados na distribuição do tamanho dos porossão mais comumente aplicados (BURDINE, 1953; MUALEM, 1976).

A estimativa da condutividade hidráulica também poderá ser feita a partir de modelos que consideram a distribuição do tamanho dos poros do solo, por exemplo, Mualem (1976). Os dados de entrada para estes tipos de modelos geralmente incluem os parâmetros da curva de retenção de água no solo, a condutividade hidráulica do solo saturado e o parâmetro de distribuição do tamanho dos poros (DE JONG VAN LIER et al., 2009; DOURADO NETO et al., 2011). O modelo de Mualem (1976) é dado por:

$$K(S_e) = K_o S_e^{\ell} \left[\frac{\int_0^{S_e} \frac{1}{h} dS_e}{\int_0^{1} \frac{1}{h} dS_e} \right]^2 \qquad (32)$$

Em que ℓ é um parâmetro empírico e tem sido tradicionalmente definido como 0,5. Porém, Schaap et al. (2001) sugere uma vasta gama de valores para diferentes classes texturais.

A equação de van Genuchten (1980) pode ser utlizada em conjunto com a equação de Mualem (1976). Portanto, substituíndo-se a eq. (31) na eq. (32), a seguinte função pode ser obtida para descrever a condutividade hidráulica [eq. (33)], sendo conhecida como equação de van Genuchten-Mualem:

$$K(S_e) = K_o S_e^{\,l}\left[1-\left(1-S_e^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^2 \tag{33}$$

A preferência pela utilização de condutividade hidráulica do solo não saturado, em vez da difusividade de água no solo na análise do fluxo de água em condição não saturada é baseada na evidência de que o seu significado físico é claro. A desvantagem do uso da condutividade hidráulica reside na sua dificuldade de medição e na magnitude da mudança de seus valores em comparação com a difusividade hidráulica do solo (MIYAZAKI, 2005).

2.5 Modelos de extração de água pelas raízes

A extração de água pela raiz é um importante mecanismo que afeta drasticamente a distribuição espaço-temporal da quantidade de água nas camadas superiores do solo com vegetação, no entanto, os processos de extração de água pela raiz e suas interações com o solo ainda não são totalmente compreendidos (JAVAUX et al., 2008). Uma das razões para essa falta de compreensão é a dificuldadedas medições das propriedades de solo e raíz (DE JONG VAN LIER et al., 2006; GREEN et al., 2006). Outra razão é a falta de conhecimentos na compreensão dos processos biológicos que regem a extração de água pelas raízes (JAVAUX et al., 2008).

Os processos de transporte de água dentro de camadas de solo não saturado e na zona das raízes (rizosfera) são controlados por processos que envolvem propriedades do solo (hidráulicas), fisiologia da planta e fatores meteorológicos. Percebe-se claramente, a taxa de extração de água pelas plantas e os fatores que a controlam são de interesse fundamental de áreas como a hidrologia, irrigação e meteorologia.

A modelagem da extração de água pela raiz é uma importante ferramenta para a predição de taxas reais de transpiração, do crescimento da cultura, do movimento de água no solo e transporte de solutos (DE JONG VAN LIER et al., 2009). O problema da modelagem da extração de água pelas raízes das plantas tem sido tratado por vários autores (GARDNER, 1960, 1964; COWAN, 1965; MOLZ; REMSON, 1970; ROWSE et al., 1978; MOLZ, 1981; BRUCKLER et al., 1991; LAFOLIE et al., 1991; CHEN; LIETH, 1993; CLAUSNITZER; HOPMANS, 1994; DOUSSAN et al., 1998; WU et al., 1999; LI et al., 2001; DE JONG VAN

LIER et al., 2006; GONG et al., 2006; DE JONG VAN LIER et al., 2013) utilizando duas escalas distintas, a escala microscópica e a macroscópica.

Os modelos microscópicos são por vezes chamados como mesoscópicos (FEDDES; RAATS, 2004), tais modelos consideram a extração de água por um fluxo radial convergente em direção a uma raiz singular. Essa raiz é considerada como um sumidouro em formato de linha ou tubo estreito de raio r_0 uniforme, com propriedades absortivas constantes ao longo de seu comprimento (GARDNER, 1960; COWAN, 1965; PASSIOURA, 1988; FEDDES; RAATS, 2004; GREEN et al., 2006). Geralmente, quando se utiliza esta abordagem, é assumido que cada raiz tem acesso exclusivo a um cilindro oco de solo com raio interior, r_0, igual ao raio da raiz e raio exterior, r_m, (Figura 6), e determinado a partir da densidade da radicular, R, [L L^{-3}] eq. (34) (SANTOS, 2011).

$$R = \frac{1}{\pi r_m^{\ 2}} \Rightarrow r_m = \sqrt{\frac{1}{\pi R}} \tag{34}$$

Em que R representa a densidade radicular [L L^{-3}]; definida como a razão entre o comprimento de raize seu volume de solo ocupado, e r_m (L) também é chamado de distância média entre raízes.

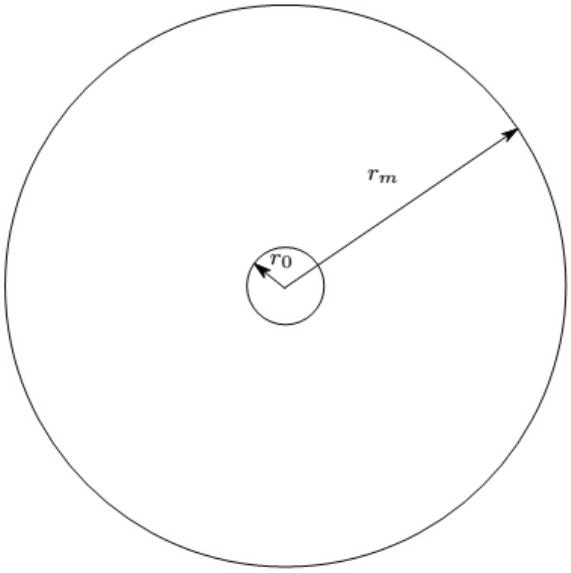

Figura 6 - Representação geométrica dos modelos microscópicos de extração de água do solo. r_m representa a distância média entre raízes ou raio da rizosfera; e r_0 o raio da raiz

Fonte: Santos (2011)

A análise da extração da água disponível na rizosfera é feita a partir da equação de Richads, e considera que o fluxo de água para as raízes das plantas é limitado pelas propriedades hidráulicas do solo (GARDNER, 1960; COWAN, 1965; FEDDES; RAATS, 2004; DE JONG VAN LIER et al., 2006). A abordagem mais comum nesses modelos utiliza a equação de Richards na forma difusiva e considera o sistema de coordenadas cilindricas, eq. (35) (GARDNER, 1960; COWAN, 1965; DE JONG VAN LIER et al., 2006) para maiores detalhes para obtenção da eq. (35) pode ser conferido em Santos (2011).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\left(rD\frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \tag{35}$$

Em que r é a distância radial a partir da raiz [L]

Uma solução foi apresentada por Gardner (1960) a partir de algumas considerações de fluxo em regime estacionário (Steady State), ou seja, $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$, e a uma difusividade constante e raio de extração de comprimento infinito. Portanto, foi obtida uma solução aproximada da extração de água pela raiz para as condições de regime transiente, assumindo uma sucessão de estados estacionários (SANTOS, 2011). A suposição de regime estacionário significa que durante um dado período de tempo toda a água extraida pela raiz em r_o é acompanhada por um fluxo de água em r_m.

Outra solução para eq. (35) foi obtida por Cowan (1965), assumindo a difusividade constante, fluxo a taxa constante (steady rate), ou seja, $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{constante}$, e a água extraída pela raiz vem do volume de solo definido entre r_o e r_m.

Uma crítica aos modelos de Gardner (1960) e Cowan (1965) sugere que os valores de densidade radicular (R), assumidos eram muito menores do que os comumentes encontrados em campo, o que resultou em uma superestimativa da resistência da rizosfera (DEERY et al., 2013). Passioura e Cowan (1968) analisaram a acurácia das soluções analíticas considerando fluxo estacionário e a taxa constante comparando-se predições do conteúdo de água na interface solo-raiz por essas soluções com uma solução numérica. Nas condições analisadas, os autores encontraram boa concordância entre as soluções, porém a segunda solução foi mais precisa. Apesar das soluções analíticas serem importantes pelo fato de, normalmente, poder explicitar uma dada varíavel de interesse, a consideração de fluxo em regime estacionário ou a taxa constante dificilmente ocorrem em condições reais, o que limita o uso dessas soluções.

Soluções numéricas suprem essas limitações, porém seu uso é limitado ao modelo numéricodo qual faz parte (SANTOS, 2011).

Na escala macroscópica, a extração de água pela raizes é representada por um termo (Γ) na equação de Richards [eq. (17)]. O principal desafio dessa abordagem consiste, portanto, na determinação da forma desconhecida da função Γ, que impossibilita a resolução da eq. (17) (FEDDES; RAATS, 2004).

O termo sumidouro representa o volume de água removida por unidade de tempo a partir de uma unidade de volume de solo, devido à extração de água pela planta (ŠIMŮNEK et al., 2006). Existem diferentes funções para descrever o termo sumidouro. De acordo Molz (1981), existem duas classes de funções. Uma classe que tem origem na analogia da Lei de Ohm. Nessa classe incluem os modelos proposto por Gardner (1964), Whisler et al. (1968), Molz e Remson (1970), Herkelrath et al. (1977a), Herkelrath et al. (1977b), Rowse et al. (1978). Estas funções necessitam do conhecimento detalhado da densidade radicular, potencial da água nas raízes das plantas, o potencial mátrico na interface solo-raiz, resistência hidráulica da raiz e do solo para o fluxo de água (LI et al., 2001; LUO et al., 2003). Sendo que são difíceis de medir e muitas vezes são calibrados com o auxílio de dados de campos (LUO et al., 2003).

A outra classe de funções para descrever o termo sumidouro foi desenvolvida assumindo que a taxa de transpiração é igual à soma da taxa de extração no perfil da rizosfera. Por conseguinte, a mudança de armazenamento de água na planta é negligenciável (LUO et al., 2003; GONG et al., 2006; GREEN et al., 2006). Partindo deste pressuposto, o termo sumidouro pode ser expresso como:

$$\Gamma = \frac{XY\sigma\beta(x,y,z)}{\int_0^{X_m}\int_0^{Y_m}\int_0^{Z_m}\sigma\beta(x,y,z)dxdydz}T_p \tag{36}$$

Em que o termo σ é chamado de função de redução da transpiração ou da extração; β(r,z) é a distribuição da densidade de raízes; X_m, Y_m e Z_m são máximos comprimentos das raízes nas direções X, Y e Z respectivamente, [L]; e T_p é a transpiração potencial, [L T^{-1}].

A função de redução (σ) pode ser formulada como uma função do comprimento das raízes (MOLZ; REMSON, 1970), da quantidade de água do solo ou do potencial mátrico (FEDDES et al., 1978), da condutividade da água do solo (MOLZ; REMSON, 1970), da difusividade (MOLZ; REMSON, 1970) e do potencial de fluxo mátrico (DE JONG VAN LIER et al., 2006).

2.6 Condições de contorno

Na solução de uma equação diferencial ordinária ou parcial, é necessário assumir certos valores iniciais e de contorno. Existe uma variedade de condições de contorno que pode ser especificada, sendo que qualquer combinação garante a exclusividade, ou seja, contanto que cada contorno ou parte do contorno tem uma e apenas uma condição que lhe é atribuído.

A superfície solo é exposta às condições atmosféricas altamente variáveis que podem mudar rapidamente. Sendo que na parte superior ocorre o fluxo de água em dois sentidos, para baixo a partir de infiltração ou para cima a partir da evaporação. Ainda pode ocorrer empoçamento, quando a taxa de precipitação é maior que a taxa de infiltração, nessa situação cria-se uma altura de água na superfície do solo. A camada inferior do solo tem em muitos casos uma profundidade grande o suficiente de modo que pode ser considerado que o gradiente hidráulico possa ser igual a zero, ou exista um lençol freático superficial, e, portanto, o valor de θ ou h é igual a saturação (ŠIMŮNEK et al., 2006; VAN DAM et al., 2008).

Para a condição de empoçamento na superficie, ou seja, quando existe a presença de uma carga hidráulica na superficie do solo. Tal situação é definida como condição de contorno de Dirichlet, que pode ser escrita matematicamente como:

$$\theta = \theta_k, t \geq 0, \mathrm{z} = 0, 0 \leq x \leq X_{\max} \tag{37}$$

Ou ainda

$$h = h_k, t \geq 0, \mathrm{z} = 0, 0 \leq x \leq X_{\max} \tag{38}$$

$$h = 0, t \geq 0, \mathrm{z} = 0, 0 \leq x \leq X_{\max} \tag{39}$$

A condição de contorno especificada pela eq. (37) é empregada quando é utilizada a equação de Richards na forma de difusividade [ver eq. (27)]. As condições de contorno eq. (38) e eq. (39) são aplicadas quando se utiliza a equação de Richards na forma “h-based” [ver eq. (21)]. A condição de contorno de Dirichlet é aplicável em testes de infiltração quando se utiliza infiltrômetro de duplo anel, e em irrigação por superficie (ZERIHUN et al., 2005).

Ao descrever a distribuição das chuvas ou irrigação por aspersão, presume-se que a precipitação é distribuída uniformemente sobre toda a superfície do solo, para esta situação é conhecida como a condição de contorno de Neumann. A condição de contorno para tal situação é descrita como:

$$q_o = -K(h)\frac{\partial H}{\partial z} \text{ para } 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{X}_{\max}; \mathrm{z} = 0; t \ge 0 \tag{40}$$

$$q_o = K(\theta) - D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} \text{ para } 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{X}_{\max}; \mathrm{z} = 0; t \ge 0 \tag{41}$$

A eq. (41) representa a equação de Darcy-Buckingham na forma de difusividade.

2.7 Diferenças finitas

Dada às condições iniciais e de contorno adequadas, a solução da equação de Richards existe e é única. No entanto, existem apenas casos especiais, em que existem soluções analíticas. Quando essas soluções analíticas não existem ou são difícil obtenção, as soluções podem ser aproximadas utilizando métodos numéricos.

Existem muitos métodos numéricos que podem ser aplicados para resolver equações diferenciais, sejam elas parciais ou ordinárias. Entre estes o Método das Diferenças Finitas (MDF). É um método simples de ser aplicado, geralmente de baixo custo computacional e que gera bons resultados. O método das diferenças finitas é o método mais antigo e o mais divulgado, devido à simplicidade na compreensão, aprendizado e implementação. Foi o primeiro método a ser utilizado para a solução sistemática de problemas de água subterrânea (PIZARRO, 2009).

No MDF, as soluções de problemas de condição inicial e de contorno são expandidas por Séries de Taylor e por meio de truncamento adequado dessas séries, as derivadas parciais, tanto a espacial quanto a temporal, das equações diferenciais são aproximadas por quocientes de diferenças.

O MDF pode ser utilizado na obtenção de soluções numéricas de uma vasta gama de equações diferenciais, sendo seu princípio básico que a equação diferencial que se deseja aproximar pode ser numericamente equilibrada em cada ponto discreto do modelo. Assim, o domínio é discretizado por uma malha regularmente espaçada em cada uma das dimensões do problema, sendo as funções e propriedades de interesse consideradas apenas nestes pontos discretos (DI BARTOLO, 2010). A partir da definição da malha, são obtidas expressões aproximadas para as derivadas da função considerada nos pontos discretos, por meio de diferenças finitas. Existem diferentes ordens de aproximação para tais expressões, dependendo do número de pontos que se utiliza para aproximar as derivadas.

A seguir são apresentadas as formas de discretização para uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{42}$$

A equação diferencial [eq. (42)] exige aproximações para segunda derivada no espaço e para primeira derivada no tempo. A derivada temporal é discretizada utilizando diferenças progressivas e é dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{w+1} - U_i^{w}}{\Delta t} \tag{43}$$

A segunda de derivada pode ser aproximada por uma diferença finita centrada.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^{w} - 2U_i^{w} + U_{i-1}^{w}}{(\Delta x)^2} \tag{44}$$

Existem diversas combinações possíveis entre as derivadas no tempo e no espaço. Entre essas combinações pode-se citar o Método de Euler explícito e o Método implícito (CHAPRA; CANALE, 2010). A seguir são apresentadas essas formas de discretização para a equação diferencial.

O método de Euler é a forma mais simples de discretização por diferenças finitas e também é utilizado para a solução de equações diferenciais ordinárias. Para a discretização temporal do lado esquerdo da eq. (42) utiliza-se a eq. (43) de diferenças finitas progressiva, enquanto para a discretização espacial utiliza-se a formulação de diferenças finitas centrada eq. (44). Isolando-se o termo que se deseja obter, cujo valor é teoricamente desconhecido, obtém-se:

$$U_i^{w+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[U_{i+1}^{w} - U_i^{w} + U_{i-1}^{w}\right] \tag{45}$$

A eq. (45) fornece uma relação entre dois instantes de tempo sucessivos. Observa-se que a eq. (45) fornece um conjunto de equações que possui solução direta e pode ser facilmente resolvida, visto que a incógnita de cada uma das equações algébricas é U_i^{w+1}.

Outra solução pode ser obtida a partir da discretização implícita que envolve aproximações implícitas das derivadas espaciais, que em geral, são discretizadas ao nível de tempo w+1, portanto, nesse método o denominado ficar totalmente implícito. Neste caso a equação diferencial [ver eq. (42)] pode ser é escrita na forma:

$$\frac{U_i^{w+1} - U_i^{w}}{\Delta x} = \frac{U_{i+1}^{w+1} - 2U_i^{w+1} + U_{i-1}^{w+1}}{(\Delta x)^2} \tag{46}$$

Reescrevendo a eq. (46) de uma forma mais conveniente obtém-se:

$$-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}U_{i+1}^{w+1}+\left[1+\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]U_i^{w+1}-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}U_{i-1}^{w+1}=U_i^{w} \tag{47}$$

A equação acima representa o Método de Euler Implícito. Cada equação tem três incógnitas U_{i-1}^{w+1}, U_i^{w+1} e U_{i+1}^{w+1} formando um sistema de tridiagonal de equações lineares. Isto significa que a cada passo de tempo um sistema de equações de ordem γ+1 deve ser resolvido. Maiores detalhes sobre o método das diferenças finitas podem ser vistos em Chapra e Canale (2010), Golub e Ortega (1992).

2.8 Modelos e modelagem do movimento de água em solo não saturado

Muitos modelos de vários graus de complexidade e dimensionalidade (1, 2 e 3 dimensões) foram desenvolvidos durante as últimas décadas para quantificar o fluxo de água em meios porosos. Os modelos computacionais baseados em solução analítica e/ou numérica da equação do transporte de água no solo estão sendo cada vez mais utilizados para uma ampla gama de aplicações em pesquisa, gestão dos recursos hídricos e manejo de irrigação (DABACH et al., 2011; KUKLIK; HOANG, 2014; SATCHITHANANTHAM et al., 2014; TAN et al., 2014).

As soluções analíticas representam uma abordagem matemática clássica para resolver equações diferenciais, levando a uma solução exata para um problema particular. Soluções analíticas são geralmente obtidas pela aplicação de várias transformações (Laplace ou de Fourier) nas equações que governam o problema. A solução também pode ser obtida pela aplicação de algumas técnicas de solução de equação diferencias como, por exemplo, a técnica de separação de variáveis, outra abordagem pode ser feita diante da aplicação da função do Green (BOYCE; DIPRIMA, 2000; JEFFREY, 2001; GOCKENBACH, 2010).

As soluções analíticas normalmente só podem ser obtidas apenas em situações simplificadas, como, por exemplo, solos homogêneos, geometrias simplificadas do domínio das equações, e as condições iniciais e de contorno constantes ou altamente simplificadas (ŠIMŮNEK, 2005). Soluções analíticas da equação de Richards foram obtidas por Wooding (1968); Philip (1971); Raats (1971); Parlange (1985); Revol et al. (1997a, 1997b); Warrick (1974); Warrick e Lomen (1991); Thorburn et al.(2003).

Uma variedade de métodos numéricos pode ser utilizada para resolver a equação do fluxo de água para saturação variável (equação de Richards). A popularidade dos métodos numéricos deriva do fato de que a equação de Richards somente pode ser resolvida analiticamente apenas para um número muito limitado de casos. Entre os muitos modelos

numéricos desenvolvidos nas últimas décadas se destacam o modelo SWAP (KROES et al., 2008), sendo um modelo eco-hidrológico que simular diferentes processos em uma dimensão no sistema solo-planta-atmosfera, e utiliza para a solução da equação de Richards o método das diferenças finitas (VAN DAM; FEDDES, 2000). Outro modelo muito utilizado na escala unidimensional é o modelo MACRO proposto por Jarvis e Larsbo (2012), sendo um modelo mecanicista unidimensional que usa o método das diferenças finitas para simular o movimento de água na condição de dupla porosidade (*dual porosity*). Na escala unidimensional o modelo mais utilizado no mundo é o Hydrus1D (ŠIMŮNEK et al., 2005), sendo que o mesmo utilizar o método dos elementos finitos para solução da equação de Richards. No Brasil destacam-se os modelos propostos por Corrêa (2001), Costa et al. (1999) ambos utilizam o método das diferenças finitas e também se destaca o modelo proposto por Miranda (2001) que utiliza o método dos volumes finitos.

Na escala bidimensional utilizando o método das diferenças finitas destacam-se as abordagem propostas Bresler e Russo (1975), Ragab et al. (1984), Clement et al.(1994), Gong et al.(2006), Elmaloglou e Diamantopoulos (2009). O modelo Hydrus 2/3D (ŠIMŮNEK et al., 2006), é o software comercial mais utilizado para simular o movimento da água do solo meio poroso de saturação variável. No Brasil na escala bidimensional se destacam os modelos propostos por Botrel (1988), Rivera et al. (2006), Tolentino Junior (2011), sendo que estes utilizam o método dos volumes finitos para gotejadores superficiais e solos homogêneos. Vale ressaltar que o modelo desenvolvido por Rivera et al. (2006) teve como base o modelo MIDI proposto por Miranda (2001).

2.9 Material e métodos

2.9.1 Desenvolvimento, entrada e saída de dados do modelo matemático

O modelo matemático foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação Fortran 90 (PRESS et al., 1996). O programa computacional foi estruturado de forma a permitir ao usuário a entrada de informações tais como: a) dados do perfil do solo, no que se refere às suas propriedades físico-hídricas, b) informações sobre o tipo de irrigação, condição de contorno, tempo de simulação, tempo de aplicação de água via irrigação. O modelo ainda permite ao usuário a escolha entre a simulação da extração de água pela as plantas ou não. Nas Figuras 7 e 8 são apresentados os fluxogramas resumidos do modelo matemático, no qual pode-se observar os parâmetros de entrada e de saída, sendo:

Dados de entrada:

nx: Número total de compartimentos na direção x;

nz: Número total de compartimentos na direção z;

Xmax: Máxima distância na direção x;

Zmax: Máxima profundidade;

tipoirriga: Sistema de irrigação utilizado;

Q_0: Vazão do sistema de irrigação;

h_0: Carga hidráulica na superfície do solo;

Z_{goteja}: Profundidade do gotejador no caso de irrigação por gotejamento subsuperficial;

dtmin: Passo de tempo mínimo utilizado na simulação;

dtmax: Passo de tempo máximo utilizado na simulação;

dtpasso: Incremento no passo de tempo

ttotal: Tempo total de simulação;

n_{tempo}: Número de intervalos de tempo para salvar os resultados

temposalvar: Valor do tempo para salvar os dados;

t_{aplica}: Tempo de aplicação de água no domínio;

nlayer: Número de camadas presente no perfil do solo;

Zlayer: Profundidade de cada camada;

nclayer: Número de compartimentos em cada camada;

$\theta_r$layer: Umidade residual para cada camada;

$\theta_s$layer: Umidade de saturação para cada camada;

αVGlayer: Parâmetro da equação de van Genuchten (1980) para cada camada;

nVGlayer: Parâmetro da equação de van Genuchten (1980) para cada camada;

K_0layer: Condutividade do solo saturado para cada camada;

ℓVGMlayer: Parâmetro da equação de van Genuchten - Mualem para cada camada;

$h_0$layer: Valor inicial do potencial mátrico para cada camada;

iaf: Índice de área foliar;

p_z: Parâmetros empíricos do modelo Vrugt et al (2001);

p_x: Parâmetros empíricos do modelo Vrugt et al (2001);

z*: Parâmetros empíricos do modelo Vrugtet al (2001);

x*: Parâmetros empíricos do modelo Vrugtet al (2001);

dia: Valor dia do ano no calendário cristão;

mês: Valor do mês;

ano: Valor do ano;

Tx: Temperatura máxima;

Tn: Temperatura mínima;

UR: Umidade relativa do ar;

u: Velocidade do vento;

ins: Insolação.

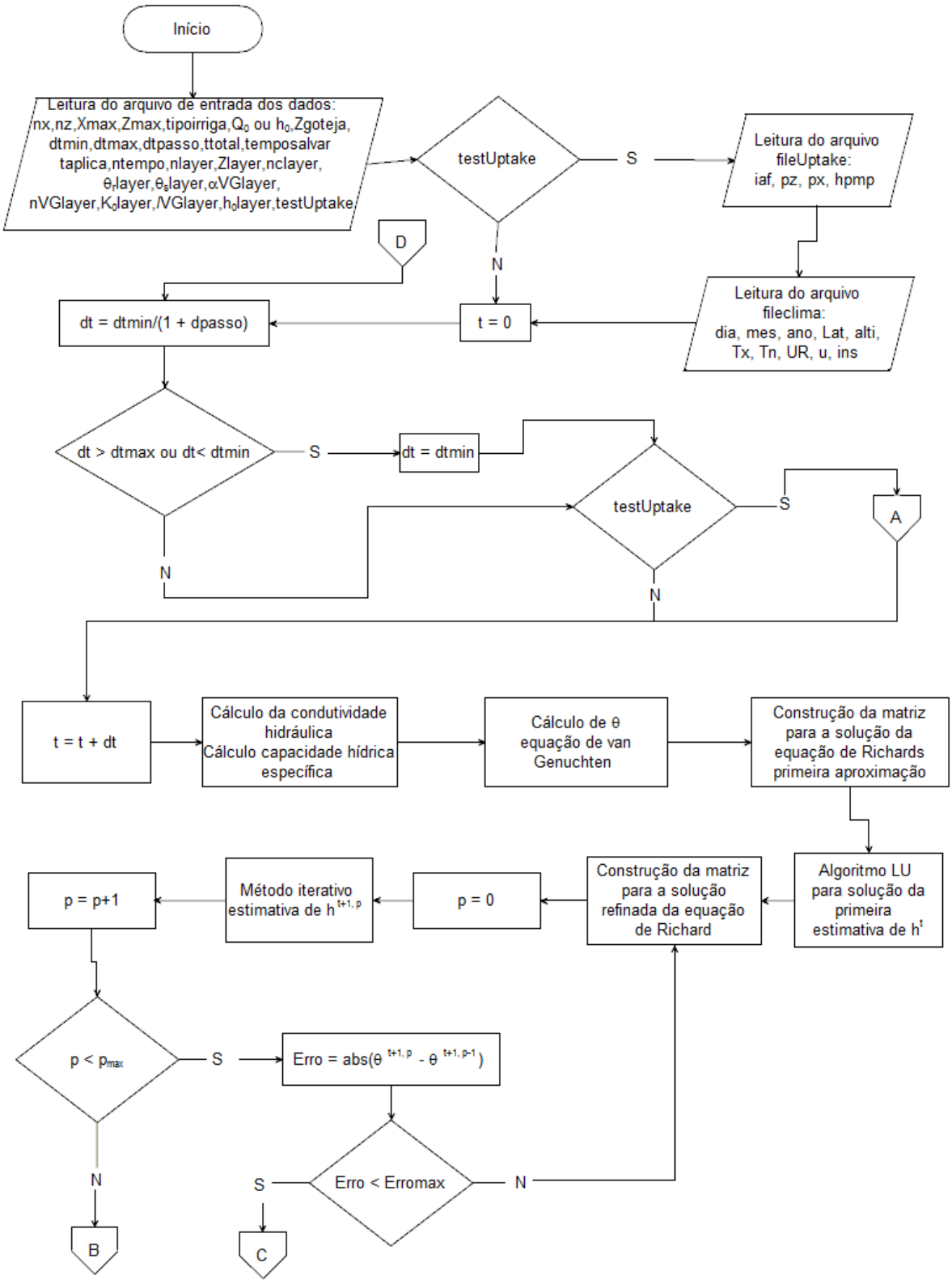

Figura 7- Fluxograma do modelo matemático proposto

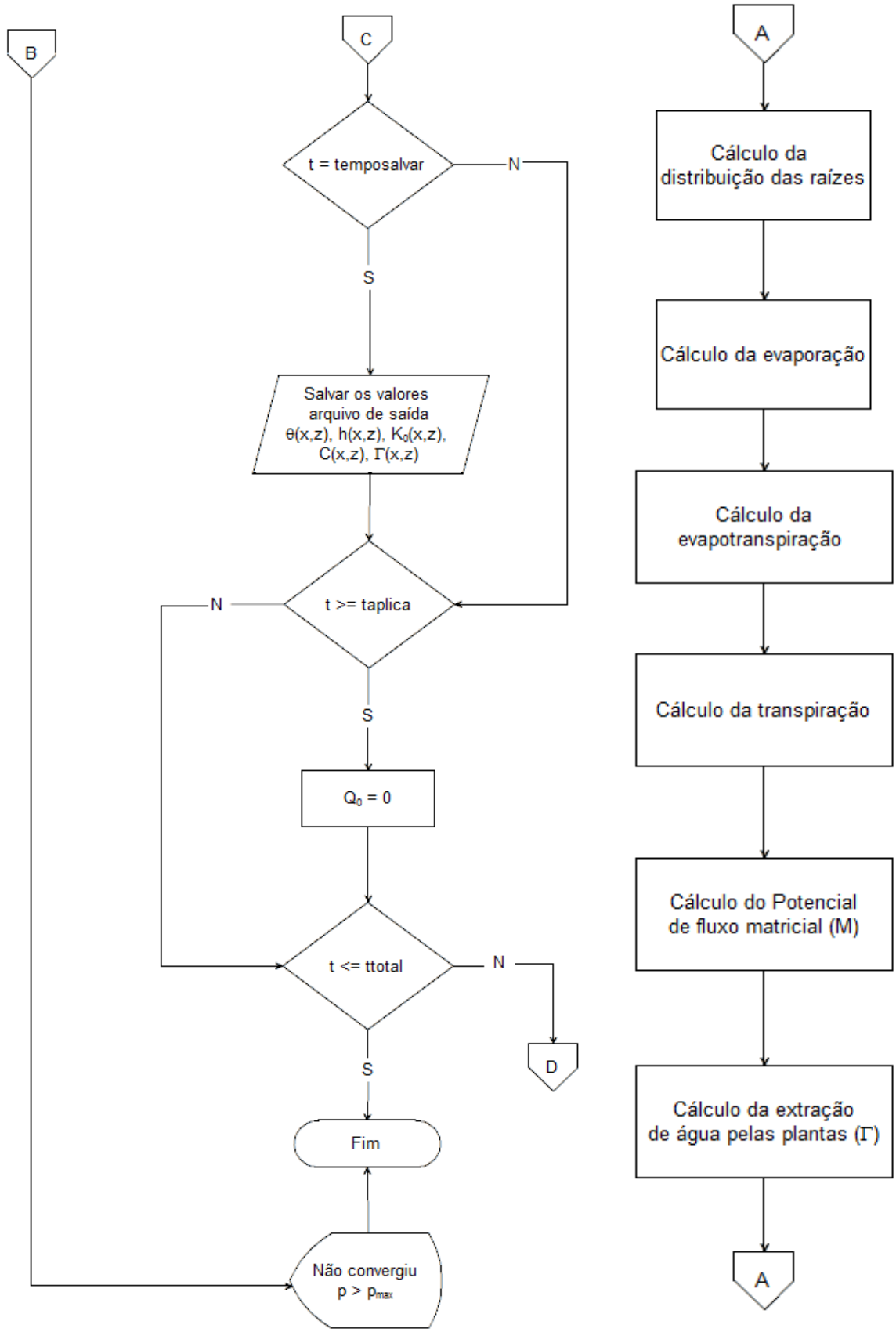

Figura 8 - Fluxograma do modelo matemático proposto (continuação)

Parâmetros de Saída:

θ: Distribuição da umidade volumétrica no domínio em estudo para os diferentes tempos;

h: Distribuição do potencial mátrico no domínio em estudo para os diferentes tempos;

K: Distribuição da condutividade hidráulica no domínio em estudo para os diferentes tempos;

C: Distribuição da função hídrica específica no domínio em estudo para os diferentes tempos;

Γ: Distribuição da extração de água pelas raízes no domínio em estudo para os diferentes tempos.

O modelo matemático consistiu na solução da equação diferencial parcial de segunda ordem, ou seja, a equação do movimento de água no solo em condições de saturação variável (Equação de Richards). Assim foi possível determinar a distribuição de água no solo em função tanto do espaço quanto do tempo. Para isso foi utilizado o método das diferenças finitas para a marcha do tempo e para a discretização espacial.

O modelo apresenta algumas simplificações na solução da equação de Richards [eq. (21)]. O modelo considera o meio como isotrópico, isotérmico, não considera o fluxo em macroporos, e não considera o fluxo de vapor no solo.

Um modelo numérico foi desenvolvido para simular a distribuição da água no perfil do solo para três situações distintas (Figura 9). Na condição de carga hidráulica constante (Figura 9A), em que se assemelha a irrigação por superfície ou na condição de teste de infiltração com anel com carga constante, na condição de uma fonte pontual, ou seja, irrigação por gotejamento superficial ou subsuperficial (Figura 9B) e a irrigação por microaspersão (Figura 9C).

A equação de Richards que descreve o movimento de água em meio poroso isotérmico, bidimensional, com a coordenada vertical positiva para baixo, e em condições não saturadas, a base do potencial mátrico considerado a extração de água pelas plantas como um termo sumidouro (abordagem macroscópica) pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_x(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(h)\frac{\partial(h)}{\partial z}\right] + \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} - \Gamma \qquad (48)$$

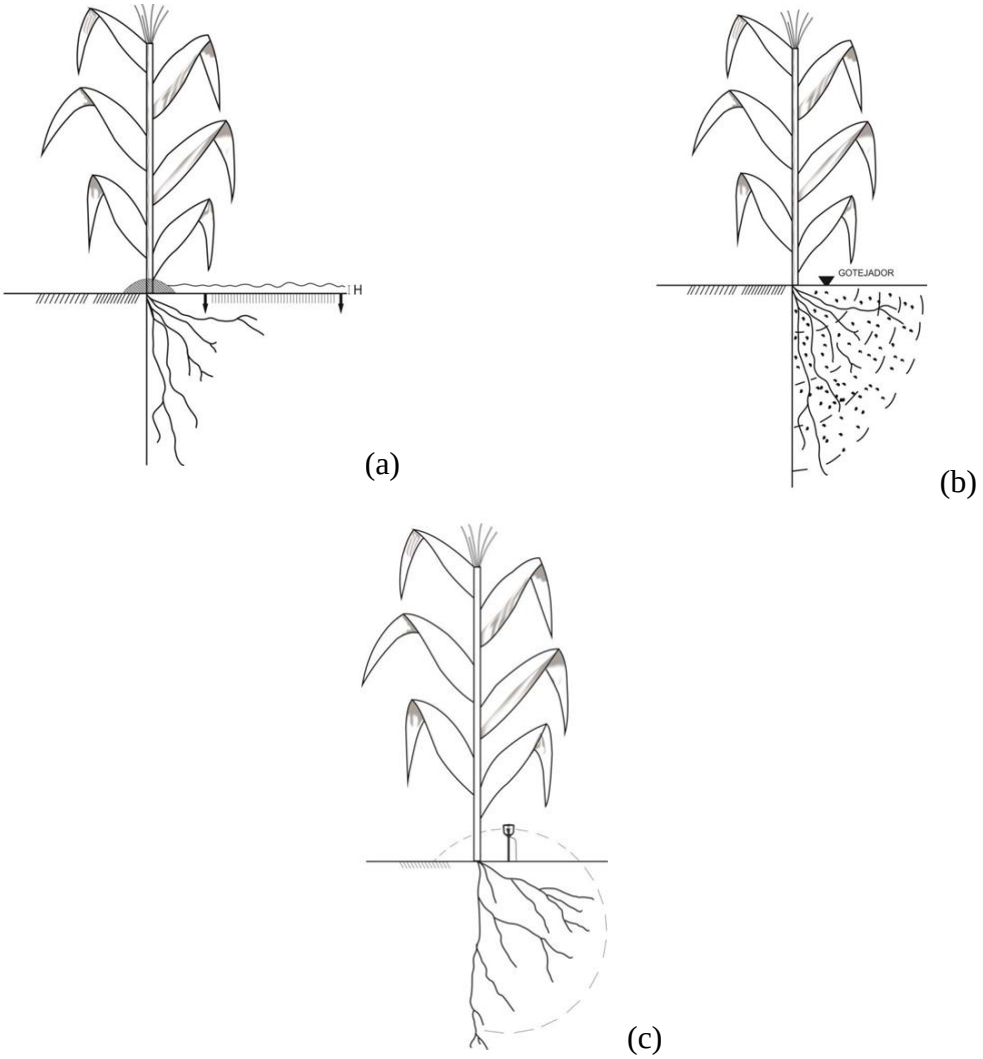

Figura 9 - Sistemas de Irrigação: (A) superfície, (B) gotejamento, (C) microaspersão

Nesta expressão aparecem derivadas parciais de h em ordem ao espaço e ao tempo que podem ser substituídas por diferenças finitas. Os coeficientes são função da variável dependente h, tendo os seus valores que ser estimados para as diferentes situações de tempo e espaço.

2.9.1.1 Discretização

A aproximação por diferenças finitas implica que o domínio de cálculo e o tempo sejam discretizados. Assim, o domínio de cálculo (Ω) passa a ser representado por um conjunto de pontos que ocupam os nós de uma malha retangular. A malha divide Ω de forma regular (Figura 10).

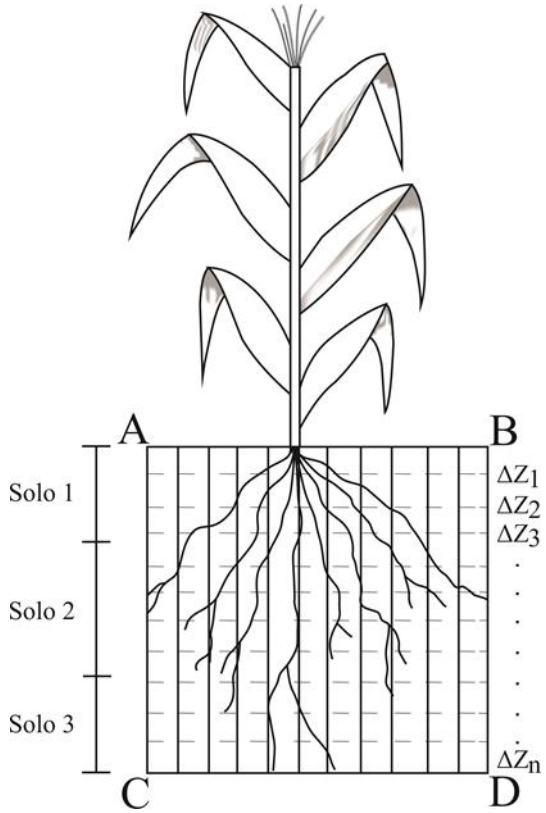

Figura 10 - Esquema da discretização do domínio

Os pontos da malha são numerados na vertical mediante o índice i (i = 1, 2, ..., N), e na direção horizontal pelo índice j (j = 1, 2, ..., M). Admite-se que as células cujos limites encontram-se a meia distância entre os nós da malha, correspondem à zona de influência do ponto que a envolvem. Isso significa que os valores de h, θ e Γ num ponto da malha traduzem a situação que prevalece na célula correspondente. O tempo é dividido em passos de tempo Δt que variam ao longo da simulação.

Dentre as várias formas possíveis de resolução por diferenças finitas, optou-se por um esquema implícito. Isto significa que, entre os instantes t e t+1, as derivadas parciais em ordem ao espaço são avaliadas com base nos valores de h no instante t+1 (esquema implícito).

Assim, no passo de tempo Δt entre os instantes t e t+1, no ponto (i,j), a eq. (48) é discretizada da seguinte forma:

$$C_{i,j}^{t}\frac{\left(h_{i,j}^{t+1}-h_{i,j}^{t}\right)}{\Delta t^{t}}=\frac{K_{i+1/2,j}^{t}\left(\frac{h_{i+1,j}^{t+1}-h_{i,j}^{t+1}}{\Delta x}\right)-K_{i-1/2,j}^{t}\left(\frac{h_{i,j}^{t+1}-h_{i-1,j}^{t+1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$+\frac{K^{t}_{i,j+1/2}\left(\frac{h^{t+1}_{i,j+1}-h^{t+1}_{i,j}}{\Delta z_l}+1\right)-K^{t}_{i,j-1/2}\left(\frac{h^{t+1}_{i,j}-h^{t+1}_{i,j-1}}{\Delta z_u}+1\right)}{\Delta z_{i,j}}-\Gamma^{t}_{i,j} \tag{49}$$

Em que os índices indicam i a linha da malha, j a coluna, t o tempo, $\Delta z_l = z_{i+1,j} - z_{i,j}$ e $\Delta z_u = z_{i-1,j} - z_{i,j}$.

Devido à alta não linearidade da capacidade hídrica específica C(h), tem-se para cada passo tempo graves erros no balanço de massa, quando são simuladas condições altamente transitórias (VAN DAM; FEDDES, 2000). Portanto, no presente modelo será utilizada a modificação na solução da eq. (49), proposta por van Dam e Feddes (2000), eq. (50).

$$\theta^{t+1}_{i,j}-\theta^{t}_{i,j}=C^{t+1,p-1}_{i,j}\left(h^{t+1,p}_{i,j}-h^{t+1,p-1}_{i,j}\right)+\theta^{t+1,p-1}_{i,j}-\theta^{t}_{i,j} \tag{50}$$

Em que p é número de iterações

Substituindo a eq. (50) na eq. (49), tem-se:

$$C^{t+1,p-1}_{i,j}\left(h^{t+1,p}_{i,j}-h^{t+1,p-1}_{i,j}\right)+\theta^{t+1,p-1}_{i,j}-\theta^{t}_{i,j}=$$

$$\Delta t^{t}\left[\frac{K^{t}_{i+1/2,j}\left(\frac{h^{t+1,p}_{i+1,j}-h^{t+1,p}_{i,j}}{\Delta x}\right)-K^{t}_{i-1/2,j}\left(\frac{h^{t+1,p}_{i,j}-h^{t+1,p}_{i-1,j}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}\right]$$

$$+\Delta t^{t}\left[\frac{K^{t}_{i,j+1/2}\left(\frac{h^{t+1,p}_{i,j+1}-h^{t+1,p}_{i,j}}{\Delta z_l}+1\right)-K^{t}_{i,j-1/2}\left(\frac{h^{t+1,p}_{i,j}-h^{t+1,p}_{i,j-1}}{\Delta z_u}+1\right)}{\Delta z_{i,j}}\right]-\Delta t^{t}\Gamma^{t}_{i,j} \tag{51}$$

Desenvolvendo a eq. (51) e fazendo o agrupamento dos termos obtém-se:

$$A_{i,j}h^{t+1,p}_{i,j-1}+B_{i,j}h^{t+1,p}_{i,j+1}+D_{i,j}h^{t+1,p}_{i,j}+E_{i,j}h^{t+1,p}_{i-1,j}+F_{i,j}h^{t+1,p}_{i+1,j}=G_{i,j} \tag{52}$$

Em que

$$A_{i,j}=-\frac{\Delta t^{t}}{\Delta z_{i,j}\Delta z_u}K^{t}_{i,j-1/2} \tag{53}$$

$$B_{i,j}=-\frac{\Delta t^{t}}{\Delta z_{i,j}\Delta z_l}K^{t}_{i,j+1/2} \tag{54}$$

$$D_{i,j} = \left[\frac{\Delta t^t}{\Delta x^2} \left(K^t_{i+1/2,j} + K^t_{i-1/2,j} \right) + \frac{\Delta t^t}{\Delta z_{i,j} \Delta z_l} K^t_{i,j+1/2} + \frac{\Delta t^t}{\Delta z_{i,j} \Delta z_u} K^t_{i,j-1/2} + C^{t+1,p-1}_{i,j} \right] \tag{55}$$

$$E_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} K^t_{i-1/2,j} \tag{56}$$

$$F_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} K^t_{i+1/2,j} \tag{57}$$

$$G_{i,j} = C^{t+1,p-1}_{i,j} h^{t+1,p-1}_{i,j} - \theta^{t+1,p-1}_{i,j} + \theta^t_{i,j} - \frac{\Delta t^t}{\Delta z_{i,j}} \left(K^t_{i,j+1/2} - K^t_{i,j+1/2} \right) - \Delta t^t \cdot \Gamma^t_{i,j} \tag{58}$$

Para análise de convergência da solução iterativa da eq. (51) pode ser utilizada o critério na diferença entre os potenciais mátricos $\left| h^{t+1,p}_{i,j} - h^{t+1,p-1}_{i,j} \right|$. Huang et al. (1996) propôs o uso da diferença do conteúdo de água $\left| \theta^{t+1,p}_{i,j} - \theta^{t+1,p-1}_{i,j} \right|$. Ainda de acordo com Huang et al. (1996), a vantagem no critério à base de θ, é que esse é mais sensível que o critério baseado no potencial mátrico, principalmente, que o mesmo permite menos iterações. Huang et al. (1996), mostram a maior eficiência do critério à base no conteúdo de água no solo para um grande número de problemas de infiltração. Portanto, no presente modelo foi utilizado a recomendação de van Dam e Feddes (2000), no qual o critério à base de θ foi implementado como análise de convergência. Van Dam e Feddes (2000) relatam que uso do critério à base de θ as simulações são realizadas em menos tempo, sem sacrificar a precisão no balanço de massa.

Como já discutido na revisão de literatura a discretização efetuada corresponde ao desenvolvimento em série de Taylor da função h = h(x,z,t), considerando apenas os elementos de primeira ordem. Para tal pressupõe-se que esta função é contínua e derivável em ordem ao espaço e ao tempo, o que é consistente com o processo físico estudado. O espaçamento entre os pontos adjacentes deve ser suficientemente pequeno para que a variação do potencial mátrico (Pressure head) entre eles possa ser considerada linear.

O valor da função K(h), cuja linearização é explicita, na eq. (51). A condutividade hidráulica entre os nós pode ser calculada pela média aritmética, a média harmônica, ou a média geométrica. No modelo foi utilizada a média aritmética, sendo calculada como:

$$K^t_{i,j\pm 1/2} = \frac{K^t_{i,j} + K^t_{i,j\pm 1}}{2} \tag{59}$$

$$K^t_{i\pm 1/2,j} = \frac{K^t_{i,j} + K^t_{i\pm 1,j}}{2} \tag{60}$$

A aplicação da eq. (51) para cada nó, incluindo as condições de contorno resulta em um sistema de equações que foi resolvido de forma eficiente pelo método da decomposição LU (PRESS et al., 1989).

O modelo utilizado para descrição da curva de retenção da água no solo foi o modelo de van Genuchten (1980) eq. (31). E para o cálculo da condutividade hidráulica foi utilizado o modelo desenvolvido por Mualem (1976) eq. (33).

2.9.1.2 Extração de água

Considerando a extração de água em duas dimensões, temos que a extração de água pelas plantas (Γ) é dada por:

$$\Gamma(x,z,t) = \frac{\pi.X.Z.M.\varphi(x,z)}{2\pi \int_0^{Z_m}\int_0^{X_m} M.x.\varphi(x,z).dx.dz} \cdot T_{pot} \tag{61}$$

Em que φ(x,z) é a distribuição da densidade de raízes; M é a função de redução; Z_m é o máximo comprimento das raízes na profundidade z; X_m é o máximo comprimento da raiz na direção horizontal (x), x é a distância horizontal a partir da origem, e T_{pot} é a transpiração potencial, calculada como.

$$T_{pot} = Kc * ETo - Ev \tag{62}$$

Em que Kc é o coeficiente de cultivo, ETo é a evapotranspiração de referência calculada pelo método de Penman-Monteith parametrizada pela FAO no seu manual 56 (ALLEN et al., 1998), e Ev é a evaporação do solo.

De acordo com Allen et al. (1998) a forma recomenda da equação Penman-Monteith pela FAO é:

$$ET_o = \frac{0{,}408\Delta(R_n - G) + \gamma \frac{900}{T_{med} + 273} u_2 (e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0.34u_2)} \tag{63}$$

Em que: ET_o é a evapotranspiração de referência, mm dia^{-1}; R_n é o saldo de radiação, MJ m^{-2} dia^{-1}; G é a densidade do fluxo de calor no solo, MJ m^{-2} dia^{-1}; T_{med} é a temperatura média diária do ar, ºC; u_2é a velocidade do vento média diária a 2 m de altura, m s^{-1}; e_s é a pressão de saturação de vapor, kPa; e_a é a pressão real do vapor, kPa; Δ é a declividade da curva de pressão de vapor no ponto de T_{med}, kPa $ºC^{-1}$; γ é o coeficiente psicrométrico, kPa $ºC^{-}$

[1]. Os procedimentos para obtenção dos parâmetros meteorológicos pode ser visto em Allen et al. (1998).

A evaporação da água na superfície do solo será obtida pela equação proposta por Belmans et al. (1983).

$$Ev = e^{-0.6.IAF} ETo \tag{64}$$

Em que IAF é o índice área foliar, ETo é a evapotranspiração potencial da cultura.

Para a determinação da distribuição da densidade de raízes foi utilizada a equação proposta por Vrugt et al. (2001).

$$\varphi(x,z) = \left(1 - \frac{z}{Z_m}\right)\left(1 - \frac{x}{X_m}\right) e^{-\left[\left(p_z / Z_m\right)|z^* - z| + \left(p_x / X_m\right)|x^* - x|\right]} \tag{65}$$

Em que p_z, p_x, z* e x* são parâmetros empíricos do modelo

A partir da abordagem macroscópica da extração de água pelas plantas feita por Jong van Lier et al.(2008), tem-se que a função de redução (M) pode ser obtida pelo potencial fluxo matricial, sendo o mesmo definido como a integral da condutividade hidráulica do solo não saturado [eq. (66)].

$$M = \int_{h_{pmp}}^{h} K(h)dh \tag{66}$$

Em que h_{pmp} é o valor do potencial mátrico no ponto de murcha permanente.

2.9.2 Condições iniciais e de contorno

Contrariamente à grande maioria dos modelos de simulação do movimento de água em duas dimensões, optou-se, por uma forma mais realista, pela hipótese de um perfil hídrico inicial não uniforme. Para a primeira irrigação admitiu-se que o potencial mátrico inicial h_o dependia somente da profundidade, enquanto no início das irrigações subsequentes, considerou-se também uma variação segundo o eixo horizontal. Assim:

Para primeira irrigação tem-se:

$$h(x,z,0) = h_0(z) \quad 0 \le x \le X_{\max}, 0 \le z \le Z_{\max} \tag{67}$$

Para as irrigações seguintes, tem-se:

$$h(x,z,0) = h_0(x,z) \quad 0 \le x \le X_{\max}, 0 \le z \le Z_{\max} \tag{68}$$

O domínio de cálculo Ω que é um retângulo (Figura 10) cujos quatro lados constituem seus contornos (fronteiras). Considerou-se, dessa forma, um sistema de coordenadas cartesianas no qual foram estabelecidas as direções de fluxo X e Z. As seguintes condições de contorno foram adotadas:

a) Fronteira AC (Figura 10)

Por se tratar de uma fronteira do domínio onde suas células vizinhas no sentido negativo do eixo X pertencem a um dos quadrantes do volume de solo total, dada à simetria, estamos perante uma situação equivalente à de um fluxo (ou condição de Neumann) nulo:

$$K(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \mathrm{t} \geq 0,\ 0 < z \leq Z_{\max},\ \mathrm{x} = 0 \tag{69}$$

b) Fronteira BD (Figura 10)

Posta a hipótese de isolamento dos bulbos ou frente de molhamento, e como esta fronteira é definida de forma que a frente de umedecimento não atinja esta fronteira, tem-se uma condição de fluxo nulo (condição de Neumann).

$$K(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0,\ 0 < z \leq Z_{\max},\ x = X_{\max} \tag{70}$$

c) Fronteira CD (Figura 10)

A fronteira inferior será deslocada de forma a que a influência da água de irrigação nessa zona seja nula (condição de Dirichlet).

$$K(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq X_{\max},\ z = Z_{\max} \tag{71}$$

d) Fronteira AB (Figura 10)

No estabelecimento da condição de contorno à superfície do solo reside um dos principais problemas da simulação do movimento de água no solo. Com efeito, pode-se distinguir diferentes situações para o mesmo sistema de irrigação. Portanto, foram analisadas as diferentes condições de contorno para cada tipo de irrigação.

- Irrigação por superficie ou teste de infiltração com carga constante (Figura 9A).

Para essa situação aplica-se a condição de contorno Dirichlet, ou seja, uma carga hidráulica constante na superficie do solo durante tempo de aplicação de água, ou seja,

$$h(x,0,t) = h_0 \quad t \leq t_p,\ 0 \leq x \leq X_{\max},\ \mathrm{z} = 0 \tag{72}$$

Em que h_0 é a carga hidráulica na superfície do solo, t_p é o tempo de aplicação.

Para a fase de redistribuição da água no solo o usário pode obtar entre duas condições de contorno do tipo de Neumann, uma considerando o processo da evaporação na superficie do solo [eq.(73)] ou não considerar a evaporação, ou seja, fluxo nulo [eq. (74)].

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t>t_p, 0\le x\le X_{\max}, \mathrm{z}=0 \tag{73}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=0 \quad t>t_p, 0\le x\le X_{\max}, \mathrm{z}=0 \tag{74}$$

- Irrigação por gotejamento superficial ou subsuperficial (Figura 9B).

Como na irrigação por gotejamento superficial apenas um nó recebe toda a vazão do gotejador, ou seja, fonte pontual “source point” e a partir a dela a frente umidecimento se espelhar pelo dominio Ω. Logo, se tem duas zonas distintas, uma região do dominio que recebe o fluxo do gotejador [eq.(75)] e outra que sofre a ação da evaporação (caso o usário deseje simular) ou a ausência de fluxo, equações 76 e 77, respectivamente.

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=q_i \quad t\le t_p, x=0, \mathrm{z}=0 \tag{75}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t>0, 0<x\le X_{\max}, \mathrm{z}=0 \tag{76}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=0 \quad t>0, 0<x\le X_{\max}, \mathrm{z}=0 \tag{77}$$

Em que q_i é o fluxo de água.

Na irrigação por gotejamento subsuperficial o gotejador encontra-se em uma profundidade qualquer dentro do dominio Ω, logo, a condição de contorno nesse nó é dada por:

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=q_i \quad t\le t_p, x=0, z=\text{profundidade do gotejador} \tag{78}$$

Para a fase de redistribuição de água no solo, tem-se:

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t>t_p, 0\le x\le X_{\max}, z=0 \tag{79}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=0 \quad t>t_p, 0\le x\le X_{\max}, z=0 \tag{80}$$

Na superficie quando se utilizar a irrigação por gotejamento subsuperficial, tem-se

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t\geq 0, 0\leq x\leq X_{\max}, z=0 \tag{81}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=0 \quad t\geq 0, 0\leq x\leq X_{\max}, z=0 \tag{82}$$

- Irrigação por microaspersão (Figura 9C)

Na modelagem do movimento de água utilizando o sistema de microaspersão, tem-se uma situação parecida com a irrigação por gotejamento superficial, como diferença em relação adotação de água no dominio se dá em uma região da fronteira AB e não em apenas um ponto. Essa região que recebe o fluxo é limitada pelo raio de alcance do microaspersor, portanto, as condições de contornos para esse sistema são dadas por:

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=q_i \quad t\leq t_p, 0\leq x\leq \text{Raio de Alcance, z} = 0 \tag{83}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t\leq t_p, \text{x} > \text{Raio de Alcance, z} = 0 \tag{84}$$

$$-K(h)\frac{\partial h}{\partial z}+K(h)=Ev \quad t\leq t_p, \text{x} > \text{Raio de Alcance, z} = 0 \tag{85}$$

Para a fase de redistribuição de água no solo dentro do dominio na irrigação por microaspersão a condição de contorno pode ser difinida pelo usuário entre duas situações, uma considerando a evaporação na superficie do solo [eq. (79)] e a outra sem considera a evaporação [eq. (80)].

2.9.3 Simulação e validação do modelo

Para a validação do modelo foram utilizados os dados obtidos por Rivera (2004), em um experimento conduzido no antigo Departamento de Engenharia Rural da Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”.

2.9.3.1 Propriedades hidráulicas do solo

O material de solo utilizado foi originado de um perfil classificado como Latossolo Vermelho, fase arenosa coletada dentro do campus da ESALQ/USP. A coleta foi realizada de uma camada que se “estendia” da superfície até uma profundidade de 30 centímetros. Na Tabela 1 são apresentadas as características físico-hídricas do solo e na Tabela 2 os parâmetros da curva de retenção.

Tabela 1 - Características físico-hídricas do solo

Textura			Densidade		Porosidade	Ko
Areia (%)	Silte (%)	Argila (%)	Solo (g cm^{-3})	Partículas (g cm^{-3})	(%)	(cm h^{-1})
67	6	27	1,369	2,575	46,835	10,221

Fonte: Rivera (2004)

Tabela 2 - Parâmetros da curva de retenção, segundo o modelo de van Genuchten (1980)

θ_r (cm^3 cm^{-3})	θ_s (cm^3 cm^{-3})	α (cm^{-1})	N	M
0,113	0,482	0,029428	1,828069	0,452975

Fonte: Rivera (2004)

Os parâmetros de entrada no modelo utilizados na simulação no que se refere às propriedades hidráulicas do solo foram:

a) $\theta_r$layer = 0,113 cm^3 cm^{-3}
b) $\theta_s$layer = 0,482 cm^3 cm^{-3}
c) αVGlayer =0,029428 cm^{-1}
d) nVGlayer = 1,828069
e) mVGlayer = 0,452975
f) K_0layer = 10,221 cm h^{-1}
g) ℓVGMlayer =0,5

2.9.3.2 Arranjo experimental

Com o intuito de simular um gotejador, Rivera (2004) utilizou um dosador de soro previamente calibrado para uma vazão de 3 L h^{-1}. Este dosador foi localizado no centro da caixa de polietileno que continha o solo e foi acoplado a um frasco de Mariotte com capacidade de 10 litros por intermédio de um tubo capilar, mantendo-se constante a carga hidráulica dentro do frasco (Figura 11). O tempo de aplicação foi de duas horas, sendo, portanto, aplicado um volume de solução de 6 litros. A umidade do solo após o teste foi determinada utilizando-se o método gravimétrico. Os pontos de amostragem foram localizados ao longo de uma malha tomando-se como eixo central o ponto onde estava localizado o emissor; a partir desse ponto amostrou-se a cada 10 cm na direção horizontal e 10 cm na vertical ao longo de dois raios, de modo que todo anel esquematizado fosse amostrado duas vezes. O total de raios amostrados foram seis (duas repetições para cada

tempo), dispostos de modo a formar na superfície do solo ângulos de 60 graus, ou seja, o bulbo foi dividido em seis fatias de igual tamanho. Tanto na direção radial como vertical foram retiradas 5 amostras, totalizando 25 amostras por raio. Os tempos de coleta das amostras foram antes da irrigação; 24; 48; e 72 horas após o final da irrigação.

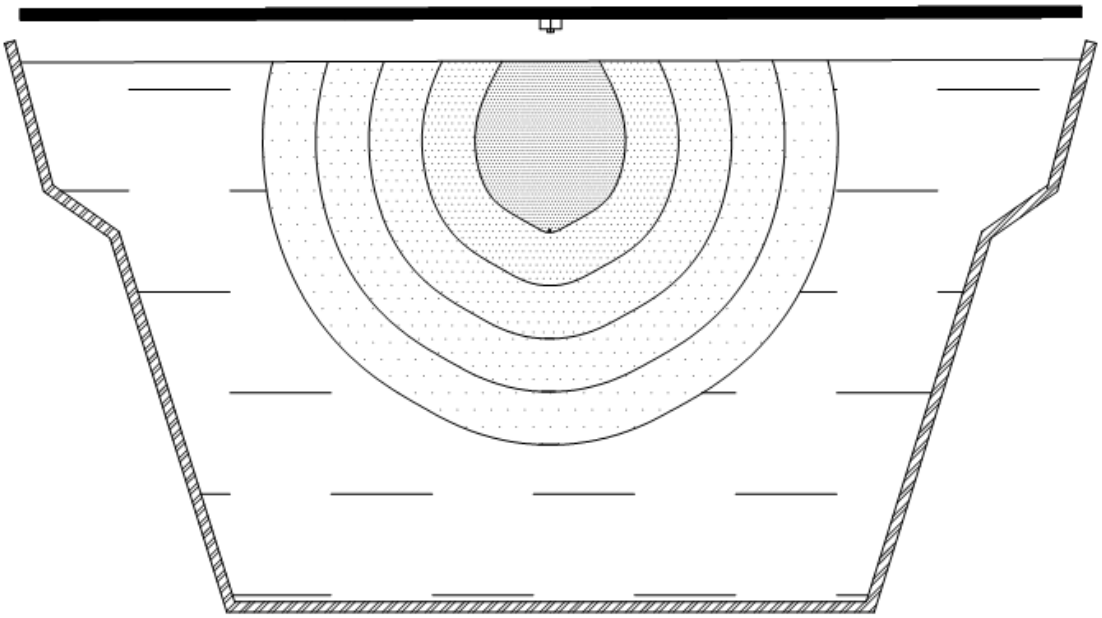

Figura 11 - Corte longitudinal do experimento realizado por Rivera (2004)

Portanto, os parâmetros de entrada no modelo utilizados na simulação no que se refere ao sistema de irrigação de irrigação foram:

a) tipoirriga = Gotejamento
b) $Q_0 = 3\ L\ h^{-1}$
c) Z_{goteja} =0,0 cm
d) $t_{aplica} = 2\ h$

2.9.3.3 Condição inicial

Os valores da umidade no perfil de solo antes de se inicia a irrigação podem ser conferidos na Tabela 3. Portanto, foi considerado na simulação que perfil de solo tinha 10 camadas, porém, com as propriedades hidráulicas iguais para todas as camadas alterando apenas os valores da umidade inicial, esses valores são considerados como valores iniciais para solução da eq. (54).

Tabela 3 - Umidade inicial do solo para várias profundidades

Profundidade do solo (cm)	θ (cm^3 cm^{-3})
0 – 10	0,1260
10 – 20	0,1281
20 – 30	0,1192
30 – 40	0,1232
40 – 50	0,1219
50 – 60	0,1202
60 – 70	0,1203
70 – 80	0,1195
80 – 90	0,1191
90 – 100	0,1190

Fonte: Rivera (2004)

Portanto, os parâmetros de entrada no modelo utilizados na simulação no que se refere às condições iniciais foram:

a) nlayer = 10 camadas
b) Zlayer = 10 cm
c) nclayer =1,0
d) h_o = Valores da Tabela 3

2.9.3.4 Discretização no domínio do tempo e espaço

Os parâmetros de entrada no modelo utilizados na simulação no que se refere à discretização do espaço e do tempo foram:

a) nx = 10
b) nz = 10
c) Xmax = 100 cm
d) Zmax = 100 cm
e) dt_{min} = 0,005 dia
f) dt_{max} = 0,01 dia
g) dt_{passo}= 0,01
h) t_{total}= 72 h
i) n_{tempo} = 3
j) temposalvar = 24, 48 e 72 h
k) dt = variável

Cabe ressaltar que não foram simuladas a extração de água pelas raízes e a evaporação na superfície do solo.

2.9.4 Análise estatística dos resultados e análise de sensibilidade

De posse da distribuição temporal e espacial da umidade volumétrica (θ), o modelo foi testado comparando-se os valores de θ obtidos experimentalmente por Rivera (2004) com aqueles obtidos pelo o modelo proposto. Ainda como o intuito de analisar a acurácia dos resultados obtido pelo modelo utilizando diferenças finitas e comparar os seus resultados com outra técnica numérica, fez-se uma comparação entre os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos (RIVERA, 2004; TOLENTINO JUNIOR, 2011). Para as comparações entre os dados observados e simulados foram utilizados os seguintes índices estatísticos, conforme sugerido por Legates e Mccabe (1999): índice de concordância de Willmott (id); o coeficiente de eficiência (E), a raiz quadrada do erro médio (RMSE), erro médio (EM) e o erro máximo absoluto (EMAX). Esses índices são definidos como:

$$Id = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i - O_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\left|P_i - O\right| + \left|O_i - O\right|\right)^2} \tag{86}$$

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i - O_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(O_i - O\right)^2} \tag{87}$$

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(P_i - O_i\right)^2}{N}} \tag{88}$$

$$EM = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i - O_i\right)}{N} \tag{89}$$

$$EMAX = \max\left\{\left|Pi - Oi\right|\right\}_{i=1}^{N} \tag{90}$$

Em que: O_i são os dados padrão, obtidos nos ensaios experimentais; P_i são dados simulados pelo modelo; N é o número de observações e O é a média dos valores observados.

Os resultados de umidade do solo obtidos nas simulações foram submetidos a uma análise de sensibilidade mediante a determinação do erro padrão [eq. (91)] variando-se,

individualmente, os seguintes parâmetros de entrada: condutividade hidráulica do solo saturado, vazão do emissor, parâmetro α da equação de van Genuchten (1980) e o parâmetro n da equação de van Genuchten (1980). Estes parâmetros foram, então, alterados em relação ao seu valor padrão, mantendo-se todos outros dados de entrada fixos, observando a sensibilidade do modelo a estas alterações. A determinação do erro padrão do valor final de θ foi obtido comparando o valor obtido em relação ao valor padrão.

$$e = \sqrt{\frac{\sum (ym(i) - ys(i))^2}{N}} \tag{91}$$

Em que: *e* é o erro padrão; ym(i) é o valor padrão simulado pelo modelo; ys(i) é valor simulado pelo modelo variando o parâmetro de entrada.

Os parâmetros de entrada do modelo sofreram variações para mais e para menos, seguindo acréscimos positivos de +10%,+20%, +30%, +40%, +50%, e negativos de -10%, -20%, -30%, -40%, -50%.

2.10 Resultados e Discussão

2.10.1 Comparação da distribuição da umidade do solo observada e simulada

A comparação entre os resultados medidos e simulados pelo método das diferenças finitas para a distribuição da umidade volumétrica (θ) do solo após 24 horas em diferentes distâncias horizontais e verticais pode ser observada na Figura 12. Em geral, os resultados simulados apresentaram concordância com os dados observados, sendo que a maior diferença foi observada para a distância de 5 cm e na profundidade 35 cm (Figura 12A), em que o modelo apresentou uma subestimativa do valor de θ.

Para o tempo de 24 horas após o inicio da simulação o modelo estimou os valores θ de forma mais precisa para os pontos mais distantes do emissor (Figura 12C e Figura 12D), tal fato pode ser atribuído ao final de 24 horas a água ainda não se distribui por todo o domínio. Portanto, para os pontos localizados mais distantes do emissor os valores de umidade do solo ainda estão próximos da condição inicial da simulação.

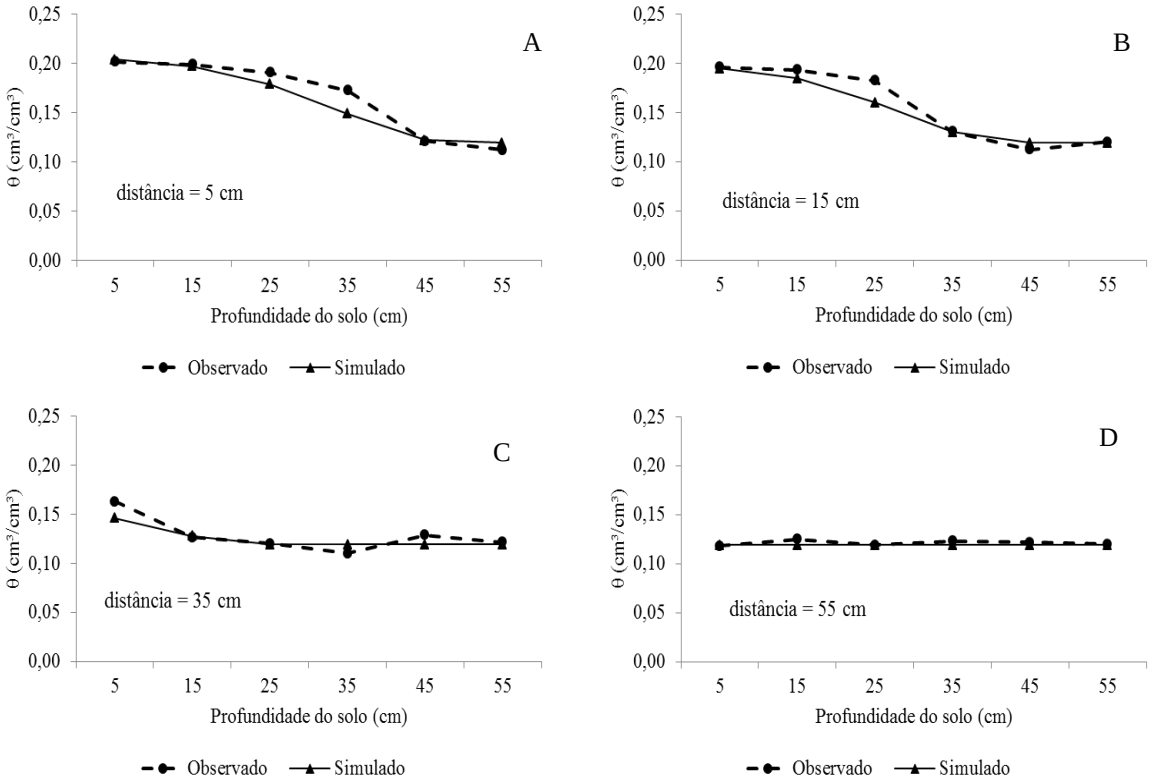

Figura 12 - Valores de θ medidos e simulados após 24 horas do final da irrigação para diferentes profundidades e distancias do emissor: (A) 5 cm; (B) 15 cm; (C) 35 cm; (D) 55 cm

Os perfis de distribuição ilustrada por meio de isolinhas de θ para 24 horas após o final da irrigação, gerados pelos métodos das diferenças finitas e volumes finitos, bem como os observados, são apresentados na Figura 13.

Pode-se observar que a umidade do solo, tanto a observada quanto à simulada, variaram de 0,12 a 0,20 $cm^3\ cm^{-3}$aproximadamente em ambos os métodos (Figura 13). Ainda de acordo com a Figura 13, percebe-se que os valores de umidade do solo obtidos por Rivera (2004) variaram na faixa de 0,17 a 0,20 $cm^3\ cm^{-3}$, entre a distância de 33 cm e profundidade de 35 cm em relação ao emissor, decrescendo tanto no sentido horizontal como no sentido vertical, à medida que se afasta do emissor, adquirindo o bulbo uma forma hemisférica. Esse mesmo comportamento foi simulado com grande precisão pelo modelo proposto (MDF).

É evidente a partir das isolinhas apresentadas na Figura 13 que, em geral, a distribuição de água no solo foi simulada com boa concordância quando comparada com as observadas; tanto na profundidade e largura da zona úmida.

O MDF apresentou melhor concordância da distribuição da quantidade de água quando comparado ao MVF, tendo em vista que as isolinhas obtidas pelo MDF coincidiram

com os valores observados, enquanto que o MVF apresentou superestimativa dos valores de umidade, principalmente para as distâncias maiores que 35 cm do emissor (Figura 13). Esse comportamento de superestimativa do raio molhado pelo o MVF também foi observado por Tolentino Junior (2011).

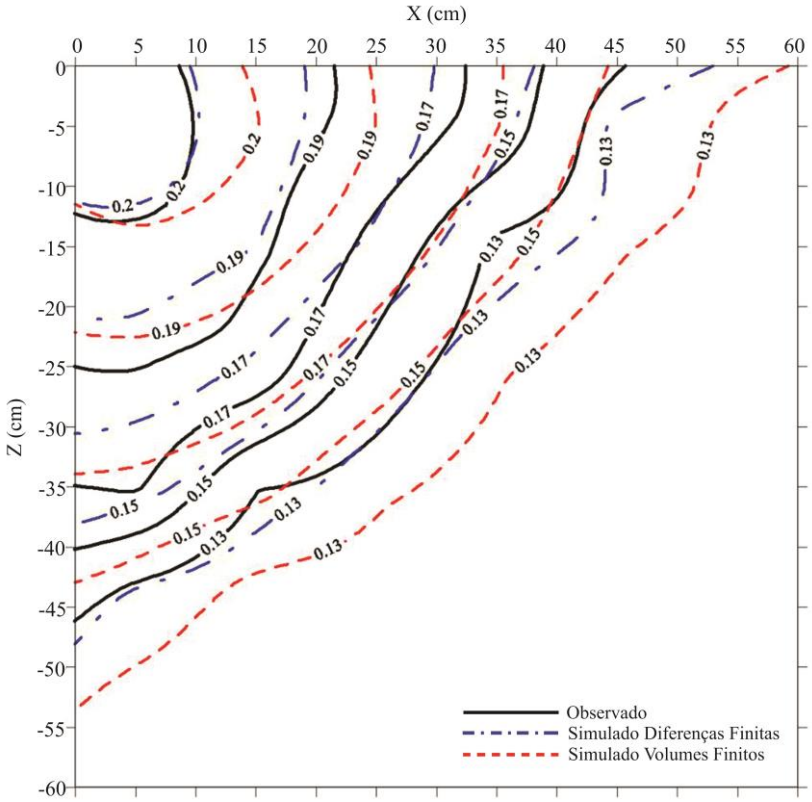

Figura 13 - Umidade volumétrica do solo ($cm^3\ cm^{-3}$) simulada pelo modelo e observada após 24 horas do final da irrigação

Para melhor avaliar quantitativamente a precisão das previsões do modelo, foram calculados os seguintes índices de desempenho: o índice de concordância de Willmott (id); o coeficiente de eficiência (E), a raiz quadrada do erro médio (RMSE), erro médio (EM) e o erro máximo absoluto (EMAX) para os valores de θ observados e estimados por ambos os modelos (MDF e MVF). Esses índices estão presentes na Tabela 4, o valor do id para MDF foi 0,9869 e de 0,9713 para o MVF, já o coeficiente de eficiência (E), também conhecido como coeficiente de Nash e Sutcliffe, foi de 0,9522 e para o MDF e de 0,8817 para MVF. De acordo com Santos (2011), o coeficiente de eficiência (E) representa a razão entre o erro quadrado médio da estimativa e a variância dos dados observados, subtraída da unidade, e varia de $-\infty$ a 1. Valores de E iguais a zero indicam, portanto, que a média dos dados observados é uma estimativa tão boa quanto os valores preditos pelo modelo; quando $E \leq 0$, a média dos valores observados é uma estimava melhor do que os valores estimados pelo

modelo. Este índice, assim, apresenta uma superioridade ao índice de Willmott em termos de interpretação. Portanto, ambos os modelos de acordo com esses dos índices id e E estimaram com precisa os valores de θ. Sendo que MDF apresentou melhores estimativas que o MVF.

Tabela 4 - Índices estatísticos para comparação entre os valores da quantidade de água simulados pelo método das diferenças finitas (MDF), volume finitos (MVF) e obtidos experimentalmente para o tempo de 24 horas

	Id	E	RMSE	EM	EMAX
MDF	0,9869	0,9522	0,0044	0,0002	0,0173
MVF	0,9713	0,8817	0,0069	0,0020	0,0307

A simulação da redistribuição da água no solo após 24 horas do inicio pelo método das diferenças finitas apresentou valores de RMSE igual a 0,0044, de EM igual a 0,0002 e de EMAX igual a 0,0173, sendo esses valores menores que os valores encontrados pelo MVF, mostrando assim melhores resultados do modelo proposto utilizando a técnica das diferenças finitas quando comparada a técnica de numérica dos volumes finitos (Tabela 4). Existe uma gama de trabalhos relatando a eficiência de modelos na previsão do bulbo molhado, comparando os resultados da simulação com dados obtidos experimentalmente (SIYAL; SKAGGS, 2009; KANDELOUS et al., 2011; SAMADIANFARD et al., 2012; ARBAT et al., 2013; SUBBAUAH; MASHRU, 2013).

A partir da Figura 14 pode-se observar uma comparação entre o conteúdo de água no solo verticalmente em diferentes posições de distância a partir do emissor para o tempo de redistribuição de 48 horas após a irrigação. Nota-se uma boa concordância entre os valores simulados pelo modelo proposto usando a técnica das diferenças finitas e os valores observados.

As maiores diferenças entre os valores observados e simulados ocorreu para as distância de 35 cm (Figura 14C) e para a distância de 55 cm (Figura 14D), em que observa-se na Figura 14C que modelo subestimou os valores nas menores profundidades e superestimou para as maiores profundidades. Enquanto que na distância de 55 cm do emissor (Figura 14D) o modelo superestimou os valores de θ em quase todas as profundidades.

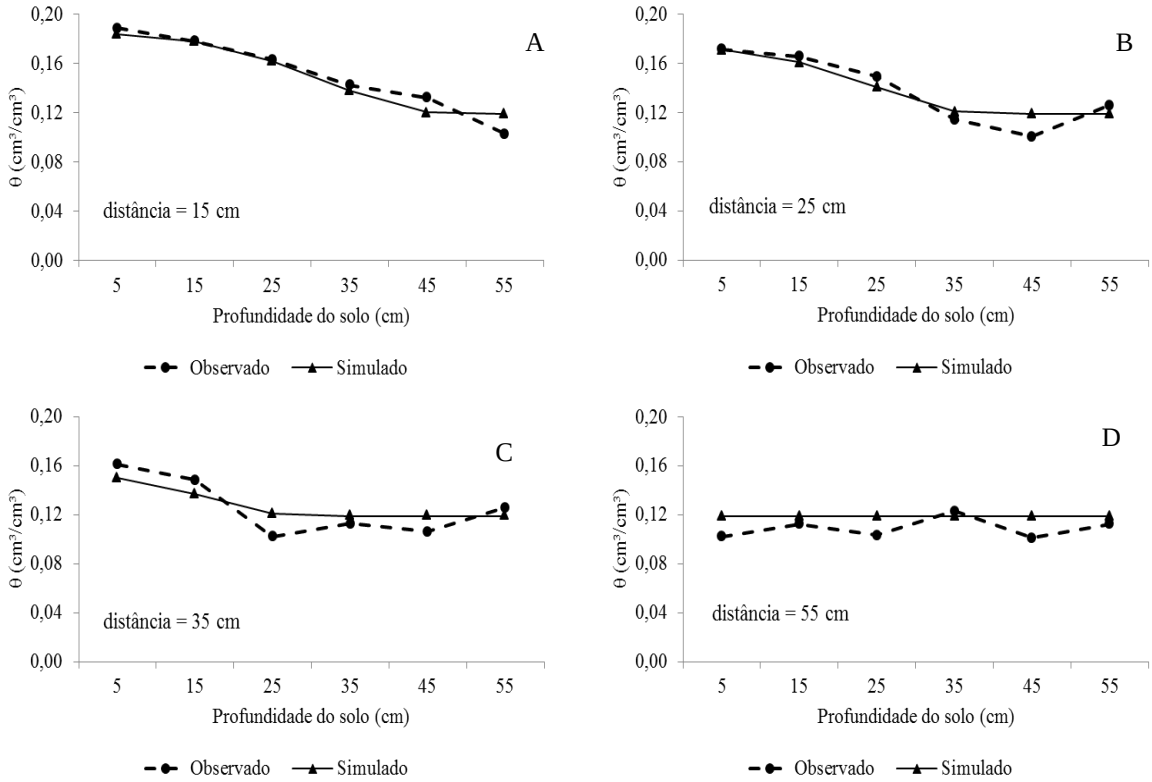

Figura 14 - Valores de θ medidos e simulados após 48 horas do final da irrigação para diferentes profundidades e distancias do emissor: (A) 15 cm; (B) 25 cm; (C) 35 cm; (D) 55 cm

A comparação da distribuição de água no solo obtido pelos valores experimentais (RIVERA, 2004), MDF e MVF mostraram um padrão de distribuição de água semelhante (Figura 15). Observa-se que as dimensões do bulbo ficaram praticamente constantes quando comparadas com o tempo de 24 horas de redistribuição, mas houve uma diminuição da umidade, principalmente nas células próximas ao ponto do emissor, tantos para os dados observados e simulados.

Nas distâncias mais próximas do emissor houve um decréscimo umidade de quando comparado com o tempo de 24 horas. Mas o decréscimo das células superiores acarretou um acréscimo da umidade das células adjacentes laterais e inferiores, produto da redistribuição da água no solo, mesmo sendo a taxas muito baixas.

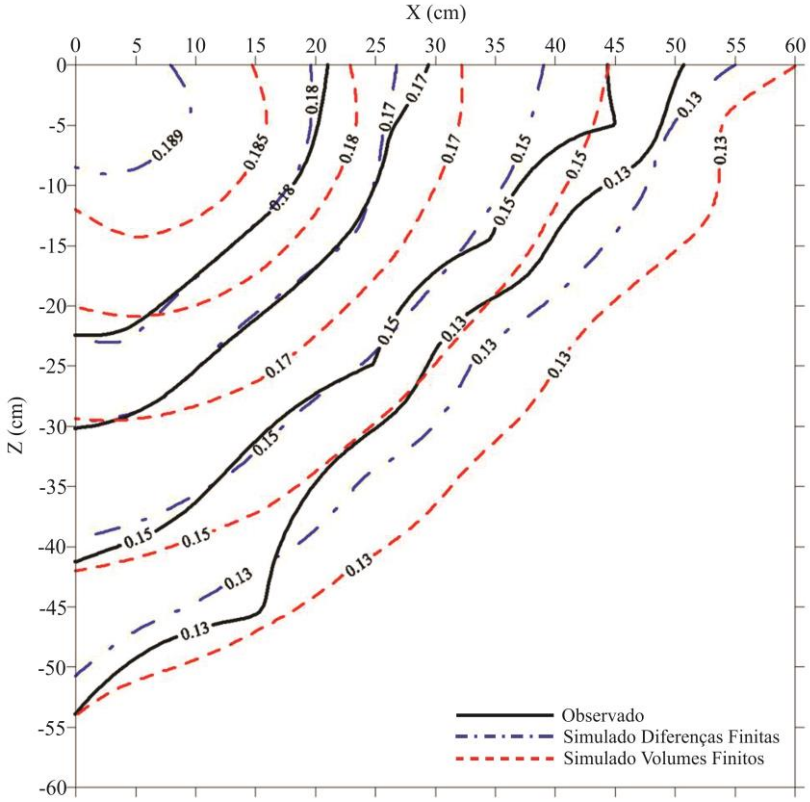

Figura 15 - Umidade volumétrica do solo ($cm^3\ cm^{-3}$) simulada pelo modelo e observada após 48 horas do final da irrigação

Ainda de acordo com a Figura 15, percebe-se que as isolinhas de θ obtidas pelo método das diferenças finitas segue o mesmo padrão das obtidas experimentalmente, enquanto que o método dos volumes finitos apresentou uma superestimativas no padrão das isolinhas de θ.

Comparando os desempenhos dos modelos na simulação para a redistribuição de água após 48 horas, observa-se que o MDF apresentou melhores valores em todos os índices estatísticos analisando quando comparado ao MVF (Tabela 5). Como o valor de E>0 (Tabela 5), tem-se que os valores simulados pelas metodologias testadas foram melhores que a média dos valores observados.

Tabela 5 - Índices estatísticos para comparação entre os valores de teor de água simulados pelo método das diferenças finitas (MDF), volume finitos (MVF) e obtidos experimentalmente para o tempo de 48 horas

	Id	E	RMSE	EM	EMAX
MDF	0,9384	0,7931	0,0072	0,0018	0,0236
MVF	0,9162	0,6735	0,0090	0,0036	0,0371

O modelo proposto obteve um valor do erro médio (EM) de 0,0018 cm³ cm^{-3}. Siyal e Skaggs (2009) avaliaram a eficácia do modelo Hydrus 2/3D em comparação a dados experimentais, e encontraram o valor médio de EM igual a -0,006 cm³ cm^{-3}.

De acordo com a Figura 16 observa-se uma boa concordância entre os valores simulados pelo modelo proposto usando a técnica das diferenças finitas e os valores observados do conteúdo de água no solo verticalmente em todas as diferentes posições de distância a partir do emissor para o tempo de redistribuição de 72 horas após a irrigação.

Os resultados obtidos pelo modelo para o tempo redistribuição de 72 horas não apresentou nenhuma tendência de superestimativa ou subestimativa dos valores de θ (Figura 16), mostrando que o mesmo pode ser usado para simular a distribuição e redistribuição de água no solo para as condições de irrigação por gotejamento.

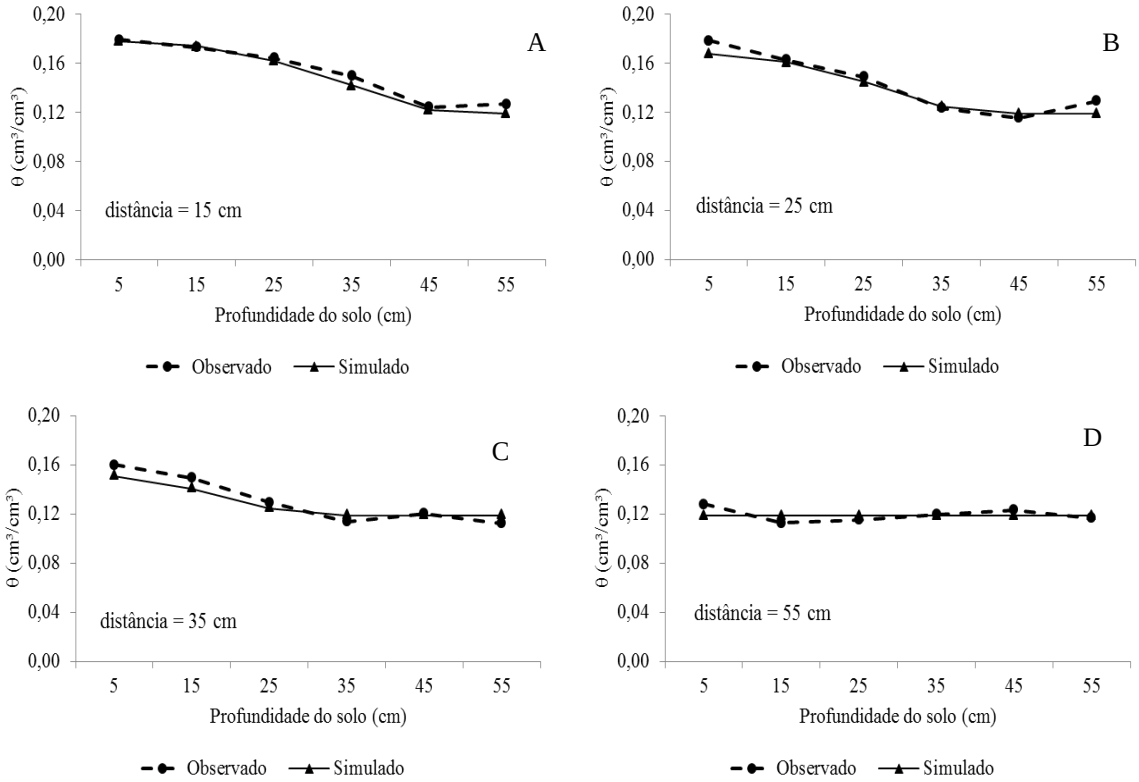

Figura 16 - Valores de θ medidos e simulados após 72 horas do final da irrigação para diferentes profundidades e distancias do emissor: (A) 15 cm; (B) 25 cm; (C) 35 cm; (D) 55 cm

Os perfis de distribuição ilustrada por meio de isolinhas de θ para72 horas após o final da irrigação, gerados pelos métodos das diferenças finitas e volumes finitos, bem como os observados, são apresentados na Figura 17. Nas duas condições (dados simulados e

observados) as células próximas ao emissor continuaram perdendo água para as células adjacentes, mas com pequena intensidade, porém isto não contribuiu significativamente para alterações nas dimensões do bulbo. Ambos os valores de umidade (simulada e observada) tiveram um comportamento aproximado no que se refere à distribuição no perfil do solo (Figura 17).

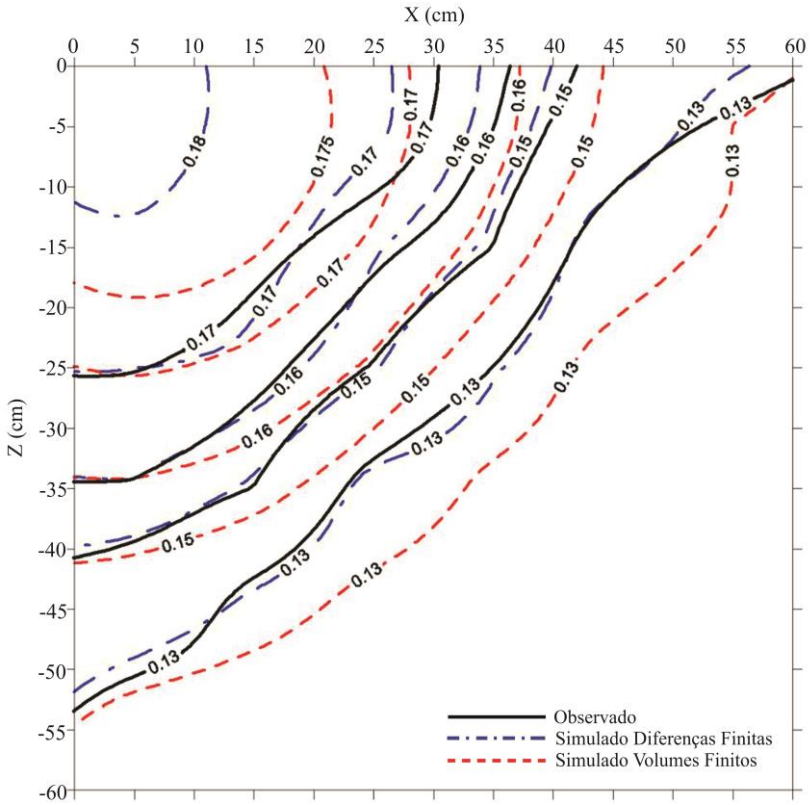

Figura 17 - Umidade volumétrica do solo ($cm^3\ cm^{-3}$) simulada pelo modelo e observada após 72 horas do final da irrigação

O MDF apresentou novamente uma melhor estimativa da distribuição de água no solo quando comparado com MVF, tendo em vista que as isolinhas de θ obtidas pelo MDF coincidem como as isolinhas obtidas a partir dos valores de observados em campo.

Rivera (2004) comenta que neste tipo de solo pode-se dizer que após 24 horas a redistribuição da água dentro do bulbo molhado praticamente termina, sendo as maiores mudanças observadas nas células próximas ao emissor, ou seja, o fluxo de água que ocorreu após este tempo foi pequeno, de forma que as dimensões do bulbo passaram a permanecer praticamente inalteradas. Esse mesmo comportamento foi simulado com sucesso pelo o modelo proposto usado MDF mostrando assim a potencialidade da técnica em ser usada para estudo da estimativa do bulbo molhado, que é um parâmetro importante no dimensionamento

e no manejo de sistema de microirrigação (GONG et al., 2006; SIYAL; SKAGGS, 2009; KANDELOUS; ŠIMŮNEK, 2010b; SUBBAIAH, 2011).

Diante dos valores apresentados na Tabela 6, observa-se que, os valores de id foram maiores que 0,9 para ambas as metodologias utilizadas no presente trabalho, logo, pode-se dizer que tanto MDF como MVF estimaram com boa concordância a redistribuição de água no solo após 72 horas do final da irrigação. E ainda de acordo com a referida tabela, tem-se que os valores de E > 0, significado que os valores simulados pelas metodologias testadas foram melhores que a média dos valores observados.

Tabela 6 - Índices estatísticos para comparação entre os valores de teor de água simulados pelo método das diferenças finitas (MDF), volume finitos (MVF) e obtidos experimentalmente para o tempo de 72 horas

	Id	E	RMSE	EM	EMAX
MDF	0,9851	0,9444	0,0033	0,0005	0,0151
MVF	0,9650	0,8562	0,0052	0,0016	0,0183

É importante ressaltar que, para os índices “EM” e “EMAX”, que têm a unidade da variável analisada (cm^3 cm^{-3}). Assim, o valor de EMAX para o MDF, representa uma diferença de 0,0151 cm^3 cm^{-3} em relação ao valor observado, enquanto que o MFV apresentou um valor de EMAX de 0,0183 cm^3 cm^{-3} (Tabela 6).

Analisando os valores obtidos para o índice RMSE (Tabela 6), percebe-se que para ambas as metodologias apresentaram baixos valores de RMSE, 0,0033 e 0,0052 para o MDF e MVF, respectivamente. Kandelous e Šimůnek (2010a) encontraram valores de RMSE variando até um máximo de 0,045 cm^3 cm^{-3}em simulações de um sistema de gotejamento subsuperficial como modelo Hydrus 2/3D.

Analisando o desempenho do modelo proposto utilizado o MDF para os três tempos de redistribuição da água no solo (Tabela 4, 5 e 6), pode-se de dizer que o modelo teve um bom desempenho como os dados observados, tal afirmação pode ser justificado pelos baixos valores de RMSE (próximo de zero), baixos valores de EM, e maiores valores dos índices “E” e id sempre próximos da unidade.

As pequenas diferenças observadas entre os valores de θ estimados e observados pelo MDF devem ser possivelmente devido à consequência de limitações do modelo. Sendo importante ressaltar que as hipóteses feitas na simulação do modelo, em que a não consideração da evaporação, que não existe ocorrência de histerese, e que a água aplicada pelo emissor distribui-se uniformemente em todas as direções. Porém, comparando os desvios

do modelo em relação aos dados medidos do presente trabalho, e comparando com outros resultados apresentados na literatura, é possível afirmar que as previsões do modelo numérico proposto foram excelentes.

2.10.2 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade do modelo foi feita com o intuito de verificar o efeito da variação dos parâmetros de entrada sobre as simulações do modelo com relação ao perfil de umidade no solo. Os parâmetros de entrada sofreram variações de –50 a + 50 %, e os efeitos foram analisados calculando-se o erro padrão em relação aos resultados obtidos com os dados originais.

O modelo mostrou-se pouco sensível às variações no valor da condutividade hidráulica do solo saturado, o que permitiu verificar que este tem um efeito pouco relevante sobre a umidade do bulbo para esse tipo de solo, sendo mais acentuado para variações negativas que para as positivas (Figura 18).

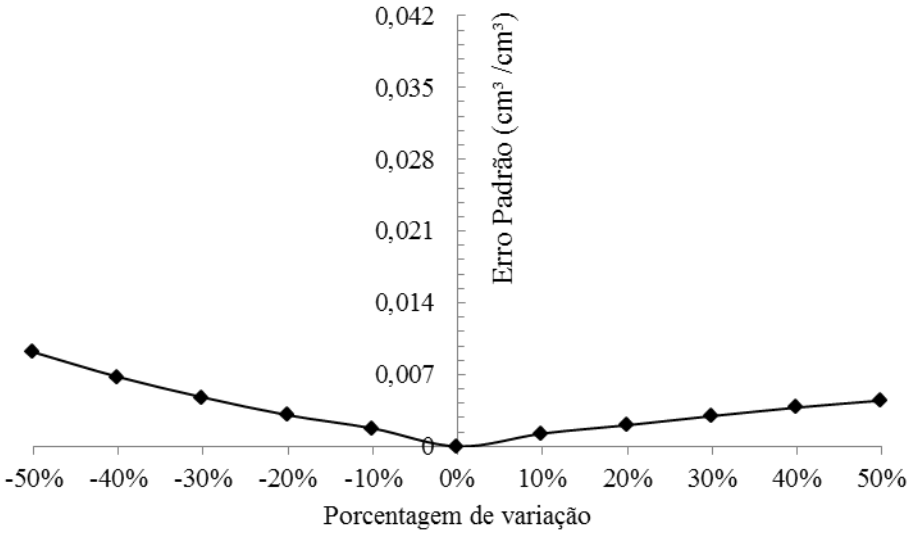

Figura 18 - Sensibilidade das umidades finais obtidos pelo modelo, em função da variação da hidráulica do solo saturado (K_o) de -50% a 50% do valor padrão

O resultado da baixa sensibilidade do modelo ao parâmetro K_0 não era esperado, uma vez que o seu valor regula os processos de infiltração e de redistribuição de água no solo e, por conseguinte, controla a dinâmica com que ocorrem as mudanças no teor de umidade do solo. Inoue et al.(1998) e Rocha et al. (2006) encontraram resultados semelhantes.

O valor considerado padrão da vazão do emissor foi 3,0 L h^{-1}. Na Figura 19 apresentam-se os valores do desvio padrão sofridos pelos valores da umidade final após o processamento da simulação, observa-se que a vazão do emissor é um parâmetro bastante influente na simulação, pois, variações negativas ou positivas, evidenciaram uma sensibilidade do modelo, principalmente com relação a variações negativas. Resultados semelhantes foram observados por Rivera et al. (2006), Miranda (2001) e Pinho (2009).

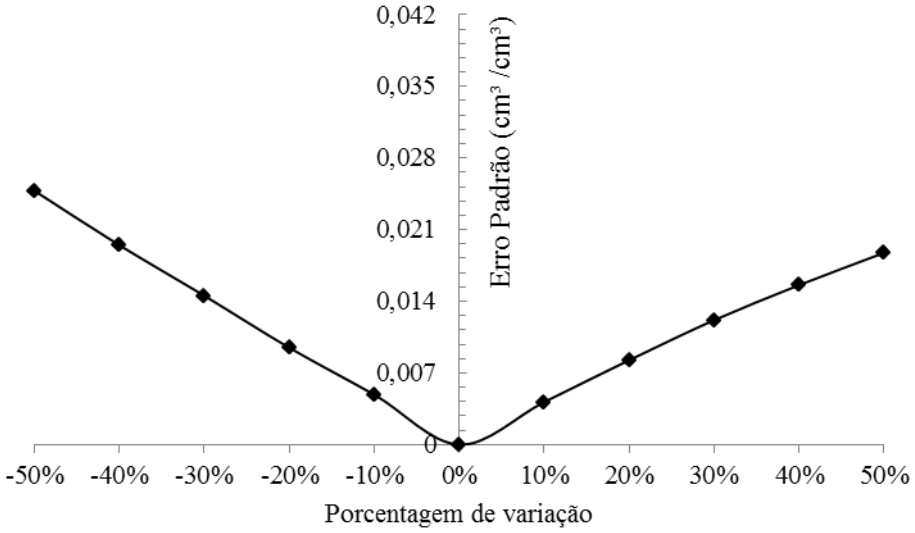

Figura 19 - Sensibilidade das umidades finais obtidos pelo modelo, em função da variação da vazão do emissor (q) de -50% a 50% do valor padrão

De acordo com a Figura 20 o modelo mostrou-se pouco sensível às variações no valor do parâmetro α da equação de van Genuchten (1980) eq. (32). Porém, o modelo apresentou o erro padrão da umidade levemente mais acentuado para variações negativas que para as positivas. Resultados semelhantes foram observados por Mertens et al. (2005), Rocha et al. (2006), Pinho (2010) ao analisarem a sensibilidade do modelo Hydrus 1D e 2/3D.

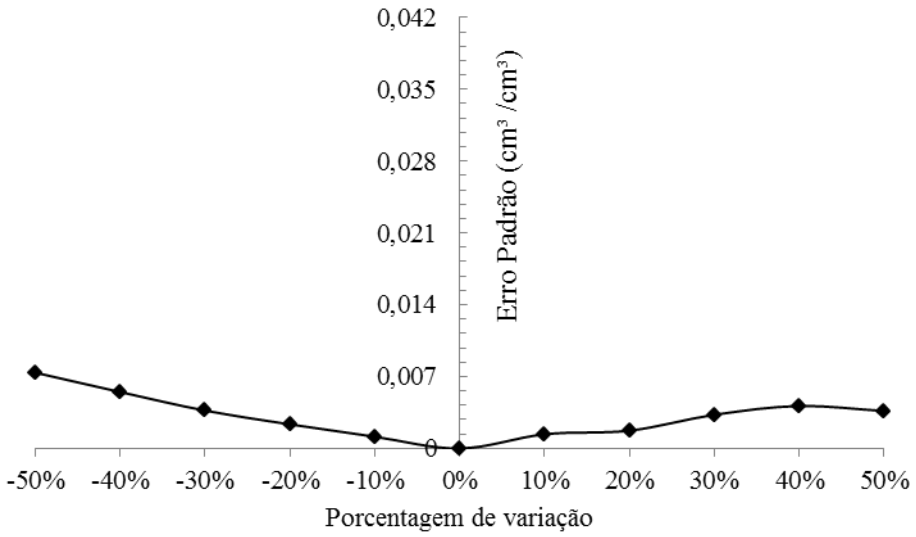

Figura 20 - Sensibilidade das umidades finais obtidos pelo modelo, em função da variação do parâmetro α de -50% a 50% do valor padrão

O modelo apresentou uma alta sensibilidade ao parâmetro n da equação de van Genuchten (1980) (Figura 21), a mudança no parâmetro n acarretou maior erro padrão quando foi decrescida, ou seja, o modelo foi mais sensível a reduções do parâmetro n (Figura 21). A maior sensibilidade ao parâmetro n da equação van Genuchten também foi observado por diversos autores (ŠIMŮNEK et al., 1998; MERTENS et al., 2005; ROCHA et al., 2006; PINHO, 2009) para o modelo Hydrus1D e 2/3D.

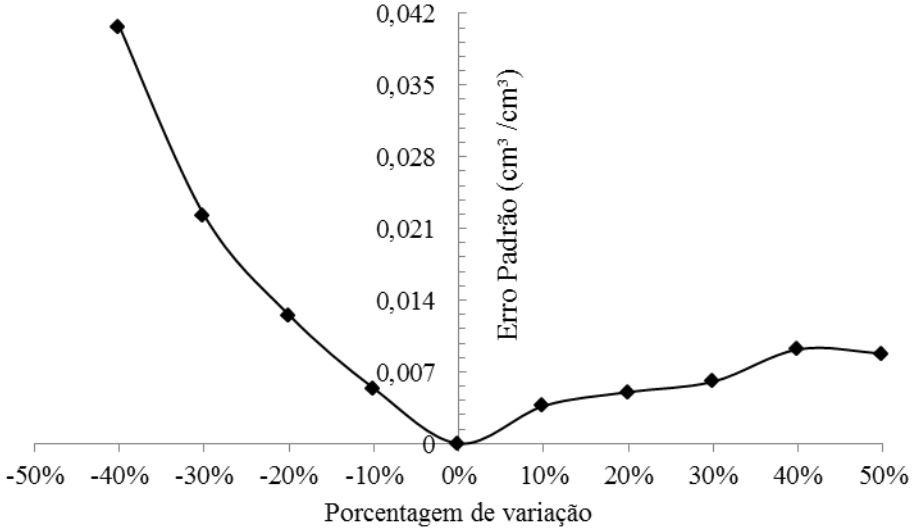

Figura 21 - Sensibilidade das umidades finais obtidos pelo modelo, em função da variação do parâmetro n de -50% a 50% do valor padrão

Os resultados da análise de sensibilidade obtidos neste estudo são consistentes com os relatados na literatura (INOUE et al., 1998; MIRANDA, 2001; RIVERA et al., 2006; ROCHA et al., 2006; PINHO, 2009). Inoue et al.(1998) observaram que o parâmetro n foi o mais sensível aos dados potenciais mátricos do solo, e K_0 e α o menos sensível. Da mesma forma, Šimůnek et al.(1998) em um estudo numérico encontraram que o modelo Hydrus foi mais sensível ao parâmetro ne menos sensíveis ao parâmetro α.

3 CONCLUSÕES

Os resultados alcançados pelo modelo matemático por meio das simulações da distribuição da água para irrigação por gotejamento superficial permitiu as seguintes conclusões:

1) A resolução da equação Richards na forma mista a partir do método de diferenças finitas, método iterativo de Picard apresentou um desempenho satisfatório ao simular o movimento bidimensional da distribuição do perfil de umidade na condição de solo não saturado para irrigação por gotejamento superficial;
2) Os índices estatísticos mostram que o modelo proposto obteve melhores resultados ao simular os perfis de distribuição da umidade no solo quando comparado aos valores simulados através do método do volume finitos;
3) Simulando-se as quantidades de água no solo, o modelo apresentou maior sensibilidade aos seguintes parâmetros: fluxo de entrada (q) e o parâmetro “n” da curva de retenção de água no solo (van Genuchten, 1980), indicando que estes precisam ser determinados com maior precisão;
4) Houve baixa sensibilidade aos parâmetros alfa (α) da curva de retenção de água no solo e condutividade hidráulica do solo saturado (K_0).

REFERÊNCIAS

ABBASI, F.; JACQUES, D.; ŠIMŮNEK, J.; FEYEN, J.; VAN GENUCHTEN, M. T. Inverse estimation of soil hydraulic and solute transport parameters from transient field experiments: Heterogeneous soil. **Transactions of the ASAE**,Saint Joseph, v. 46, n. 4, p. 1097-1111, 2003.

AIMRUN, W.; AMIN, M. Pedo-transfer function for saturated hydraulic conductivity of lowland paddy soils. **Paddy and Water Environment**,Tokyo, v. 7, n. 3, p. 217-225, 2009.

ALLEN, R.G.; PEREIRA, L.S.; RAES, D.; SMITH, M. **Crop evapotranspiration:** guidelines for computing crop water requirements. Rome: FAO, 1998. 300p. (FAO. Irrigation and Drainage Paper, 56).

ARBAT, G.; PUIG-BARGUÉS, J.; DURAN-ROS, M.; BARRAGÁN, J.; RAMÍREZ DE CARTAGENA, F. Drip-irriwater: computer software to simulate soil wetting patterns under surface drip irrigation. **Computers and Electronics in Agriculture**,Amsterdam, v. 98, p. 183-192, 2013.

BEAR, J. **Hydraulics of groundwater**. New York: McGraw-Hill, 1979. 569 p.

BEAR, J.; BACHMAT, Y. **Introduction to modeling of transport phenomena in porous media**. Norwell: Kluwer Academic, 1990. 553 p.

BELMANS, C.; WESSELING, J.G.; FEDDES, R.A. Simulation model of the water balance of a cropped soil: SWATRE. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 63, n. 3, p. 271-286, 1983.

BOSZCZOWSKI. **Avalição das propriedades mecânicas e hidráulicas de um perfil de alteração de granito-gnaisse de Curitiba, PR**. 2008. 577 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

BOTREL, T. **Simulação da distribuição espacial da água em solo irrigado com gotejador. 1988. 80 f**. 1988. 80 p. Tese (Doutorado em Solos e Nutrição de Plantas)-Escola Superior de Agricultura" Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 1988.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Ordinary differential equations and boundary value problems**. 7thed. New York: John Wiley, 2000. 745 p.

BRAESTER, C. Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux. **Water Resources Research**,Washington,v. 9, n. 3, p. 687-694, 1973.

BRESLER, E.; RUSSO, D. Two-dimensional solutes transfer during nonsteady infiltration: laboratory test of mathematical model. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 39, n. 3, p. 585-587, 1975.

BROOKS, R.H.; COREY, A.T. Hydraulic properties of porous media. In: COREY, A.T.; DILS, R.E.; YEVDJEVICH, V.M. **Hydrology papers.** Fort Collins:: Colorado State University, 1964. p.1-29.

BRUCKLER, L.; LAFOLIE, F.; TARDIEU, F. Modeling root water potential and soil-root water transport: II. Field comparisons. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 55, n. 5, p. 1213-1220, 1991.

BRUTSAERT, W. Probability laws for pore-size distributions. **Soil Science**, Baltimore, v. 101, n. 2, p. 85-92, 1966.

BURDINE, N.T. Relative permeability calculations from pore size distribution data. **Journal of Petroleum Technology**,Richardson, v. 5, n. 3, p. 71-78, 1953.

CELIA, M.A.; BOULOUTAS, E.T.; ZARBA, R.L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. **Water Resources Research**,Washington,v. 26, n. 7, p. 1483-1496, 1990.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. 6.ed. New York: McGraw-Hill, 2010. 968 p.

CHEN, D.X.; LIETH, J.H. A two-dimensional, dynamic model for root growth distribution of potted plants. **Journal of the American Society for Horticultural Science**,Alexandria, v. 118, n. 2, p. 181-187, 1993.

CLAUSNITZER, V.; HOPMANS, J.W. Simultaneous modeling of transient three-dimensional root growth and soil water flow. **Plant and Soil**,Dordrecht, v. 164, n. 2, p. 299-314, 1994.

CLEMENT, T.; WISE, W.R.; MOLZ, F.J. A physically based, two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 161, n. 1, p. 71-90, 1994.

CORRÊA, M.M. **Desenvolvimento e teste de modelo de transporte unidimensional de solutos no solo**. 2001. 104 p. Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2001.

COSTA, S.N.; MARTINEZ, M.A.; MARTINS, J.H.; FERREIRA, P.A. SIMASS - modelo para simular o transporte de água e solutos no solo I: Desenvolvimento e teste de sensibilidade. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 3, n. 2, p. 183-189, 1999.

COWAN, I.R. Transport of water in the soil-plant-atmosphere system. **Journal of Applied Ecology**,London, v. 2, n. 1, p. 221-239, 1965.

DABACH, S.; LAZAROVITCH, N.; ŠIMŮNEK, J.; SHANI, U. Numerical investigation of irrigation scheduling based on soil water status. **Irrigation Science**,Heidelberg, v. 31, n. 1, p. 27-36, 2011.

DE JONG VAN LIER, Q.; DOURADO NETO, D.; METSELAAR, K. Modeling of transpiration reduction in van Genuchten–Mualem type soils. **Water Resources Research**,Washington, v. 45, n. 2, p. 1-9, 2009.

DE JONG VAN LIER, Q.; METSELAAR, K.; VAN DAM, J. C. Root water extraction and limiting soil hydraulic conditions estimated by numerical simulation. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 5, n. 4, p. 1264-1277, 2006.

DE JONG VAN LIER, Q.; VAN DAM, J.; METSELAAR, K.; DE JONG, R.; DUIJNISVELD, W. Macroscopic root water uptake distribution using a matric flux potential approach. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 7, n. 3, p. 1065-1078, 2008.

DE JONG VAN LIER, Q.; VAN DAM, J.C.; DURIGON, A.; SANTOS, M.A. dos; METSELAAR, K. Modeling water potentials and flows in the soil–plant system comparing hydraulic resistances and transpiration reduction functions. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 12, n. 3, p. 1-20, 2013.

DEERY, D.M.; PASSIOURA, J.B.; HUTCHINSON, P.A. Uptake of water from Kandosol subsoil: I. Determination of soil diffusitivy. **Plant and Soil**,Dordrecht,v. 368, p. 483-429, 2013.

DI BARTOLO, L. **Modelagem sísmica anisotrópica através do método das diferenças finitas utilizando sistemas de equações em segunda ordem**. 2010. 241 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

DOURADO NETO, D.; DE JONG VAN LIER, Q.; GENUCHTEN, M. T.; REICHARDT, K.; METSELAAR, K.; NIELSEN, D. Alternative analytical expressions for the general van Genuchten–Mualem and van Genuchten–Burdine hydraulic conductivity models. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 10, n. 2, p. 618-623, 2011.

DOUSSAN, C.; PAGÈS, L.; VERCAMBRE, G. Modelling of the hydraulic architecture of root systems: an integrated approach to water absorption—model description. **Annals of Botany**,Oxford, v. 81, n. 2, p. 213-223, 1998.

ELMALOGLOU, S.; DIAMANTOPOULOS, E. Simulation of soil water dynamics under subsurface drip irrigation from line sources. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 96, n. 11, p. 1587-1595, 2009.

FEDDES, R.A.; RAATS, P.A.C. Parameterizing the soil – water – plant root system. In: FEDDES, R.A.; ROOIJ, G.H.; VAN DAM, J.C. **Unsaturated-zone modeling:** process, challenges and applications. Wageningen: Kluwer Academic, 2004. chap. 4, p.95-141.

FEDDES, R.A.; KOWALIK, P.J.; ZARADNY, H. **Simulation of field water use and crop yield**. Wageningen: Centre for Agricultural Publishing and Documentation, 1978. 189 p.

FETTER, C.W. **Applied hydrogeology**. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2001. 681 p.

FREEZE, R.A.; CHERRY, J.A. **Groundwater**. New Jersey: Printice-Hall, 1979. 604 p.

GARDNER, W. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. **Soil Science**, Batimore, v. 85, n. 4, p. 228-232, 1958.

_____. Dynamic aspects of water availability to plants. **Soil Science**, Batimore, v. 89, n. 2, p. 63-73, 1960.

_____. Relation of root distribution to water uptake and availability. **Agronomy Journal**, Madison, v. 56, n. 1, p. 41-45, 1964.

GOCKENBACH, M.S. **Partial differential equations:** analytical and numerical methods. Philadelphia: Siam, 2010. 614 p.

GOLUB, G.H.; ORTEGA, J.M. **Scientific computing and differential equations:** an introduction to numerical methods. Boston: Academic Press, 1992. 343 p.

GONG, D.; KANG, S.; ZHANG, L.; DU, T.; YAO, L. A two-dimensional model of root water uptake for single apple trees and its verification with sap flow and soil water content measurements. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 83, n. 1/2, p. 119-129, 2006.

GREEN, S.R.; KIRKHAM, M.B.; CLOTHIER, B.E. Root uptake and transpiration: from measurements and models to sustainable irrigation. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 86, n. 1/2, p. 165-176, 2006.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M. A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. **Water Resources Research**,Washington, v. 15, n. 1, p. 181-187, 1979.

HERKELRATH, W.N.; MILLER, E.E.; GARDNER, W.R. Water uptake by plants: I. Divided root experiments. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 41, n. 6, p. 1033-1038, 1977a.

_____. Water uptake by plants: II. The root contact model. **Soil Science Society of America Journal**, Madision, v. 41, n. 6, p. 1039-1043, 1977b.

HILLEL, D. **Environmental soil physics:** fundamentals, applications, and environmental considerations. San Diego: Academic Press, 1998. 494 p.

HUANG, K.; MOHANTY, B.P.; VAN GENUCHTEN, M.T. A new convergence criterion for the modified Picard iteration method to solve the variably saturated flow equation. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 178, n. 1, p. 69-91, 1996.

HUBBERT, M.K. Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids. **International Association of Scientific Hydrology Bulletin**,London, v. 2, n. 1, p. 23-59, 1957.

INOUE, M.; ŠIMUNEK, J.; HOPMANS, J.W.; CLAUSNITZER, V. In situ estimation of soil hydraulic functions using a multistep soil-water extraction technique. **Water Resources Research**,Washington, v. 34, n. 5, p. 1035-1050, 1998.

JARVIS, N.; LARSBO, M. MACRO (v5.2): Model use, calibration and validation. **Transactions of the ASABE**,Saint Joseph, v. 55, n. 4, p. 1413-1423, 2012.

JAVAUX, M.; SCHRÖDER, T.; VANDERBORGHT, J.; VEREECKEN, H. Use of a three-dimensional detailed modeling approach for predicting root water uptake. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 7, n. 3, p. 1079-1088, 2008.

JEFFREY, A. **Advanced engineering mathematics**. San Diego: Academic Press, 2001. 1160 p.

JURY, W.A.; HORTON, R. **Soil physics**. 6thed. New Jersey: John Wiley, 2004. 368 p.

KANDELOUS, M.M.; ŠIMŮNEK, J. Comparison of numerical, analytical, and empirical models to estimate wetting patterns for surface and subsurface drip irrigation. **Irrigation Science**,Heidelberg, v. 28, n. 5, p. 435-444, 2010a.

_____. Numerical simulations of water movement in a subsurface drip irrigation system under field and laboratory conditions using HYDRUS-2D. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 97, n. 7, p. 1070-1076, 2010b.

KANDELOUS, M.M.; ŠIMŮNEK, J.; VAN GENUCHTEN, M.T.; MALEK, K. Soil water content distributions between two emitters of a subsurface drip irrigation system. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 75, n. 2, p. 488, 2011.

KROES, J.; VAN DAM, J.; GROENENDIJK, P.; HENDRIKS, R.; JACOBS, C. **SWAP version 3.2:** theory description and user manual. Waginingen: Alterra Wageningen, 2008. 262 p.

KUKLIK, V.; HOANG, T.D. Soil moisture regimes under point irrigation. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 134, p. 42-49, 2014.

LAFOLIE, F.; BRUCKLER, L.; TARDIEU, F. Modeling root water potential and soil-root water transport: I. Model presentation. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 55, n. 5, p. 1203-1212, 1991.

LAL, R.; SHUKLA, M.K. **Principles of soil physics**. New York: Marcel Dekker, 2004. 682 p.

LEGATES, D.R.; MCCABE, G.J. Evaluating the use of “goodness-of-fit” measures in hydrologic and hydroclimatic model validation. **Water Resources Research**,Washington, v. 35, n. 1, p. 233-241, 1999.

LI, K.Y.; DE JONG, R.; BOISVERT, J.B. An exponential root-water-uptake model with water stress compensation. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 252, n. 1, p. 189-204, 2001.

LIBARDI, P.L. **Dinâmica da água no solo.** São Paulo: EDUSP, 2005. 335 p.

LIU, F.; ANH, V.; TURNER, I. Numerical solution of the space fractional Fokker–Planck equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**,Amsterdam, v. 166, n. 1, p. 209-219, 2004.

LOMEN, D.; WARRICK, A. Time-dependent solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation with water extraction. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 39, n. 1, p. 59-67, 1978.

LUO, Y.; OUYANG, Z.; YUAN, G.; TANG, D.; XIE, X. Evaluation of macroscopic root water uptake models using lysimeter data. **Transactions of the ASAE**,Saint Joseph, v. 46, n.3, p. 625-634, 2003.

MELO FILHO, J.F.; LIBARDI, P.L. Variabilidade espacial da condutividade hidráulica do solo: conceitos e bases para avaliação. In: CARVALHO, C.A.L.; DANTAS, A.C.V.L.; PEREIRA, F.A.C.; MELO FILHO, J.F; OLIVEIRA, G.J.C.**Tópicos em ciências agrárias.** Cruz das Almas: Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Agrárias, Ambientais e Biológicas, 2009. v. 1, p.296.

MERTENS, J.; MADSEN, H.; KRISTENSEN, M.; JACQUES, D.; FEYEN, J. Sensitivity of soil parameters in unsaturated zone modelling and the relation between effective, laboratory andin situ estimates. **Hydrological Processes**, Chichester, v. 19, n. 8, p. 1611-1633, 2005.

MIRANDA, J.H. **Modelo para simulação da dinâmica de nitrato em colunas verticais de solo não saturado**. 2001. 79 p. Tese (Doutorado em Irrigação e Drenagem) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2001.

MIYAZAKI, T. **Water flow in soils**. 2nded. New York: CRC Press, 2005. 418 p.

MOLZ, F.J. Models of water transport in the soil-plant system: A review. **Water Resources Research**,Washington, v. 17, n. 5, p. 1245-1260, 1981.

MOLZ, F.J.; REMSON, I. Extraction term models of soil moisture use by transpiring plants. **Water Resources Research**,Washington, v. 6, n. 5, p. 1346-1356, 1970.

MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. **Water Resources Research**,Washington, v. 12, n. 3, p. 513-522, 1976.

PAN, L.; WIERENGA, P.J. A transformed pressure head-based approach to solve Richards' equation for variably saturated soils. **Water Resources Research**,Washington, v. 31, n. 4, p. 925-931, 1995.

PARLANGE, J.Y.; HAVERKAMP, R.; TOUMA, J. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. **Soil Science**, Baltimore, v. 139, n. 4, p. 305-311, 1985.

PASSIOURA, J.B. Water transport in and to roots. **Annual Review of Plant Physiology and Plant Molecular Biology**, Palo Alto, v. 39, n. 1, p. 245-265, 1988.

PASSIOURA, J.B.; COWAN, I.R. On solving the non-linear diffusion equation for the radial flow of water to roots. **Agricultural Meteorology**,Amsterdam, v. 5, n. 2, p. 129-134, 1968.

PHILIP, J.R. General theorem on steady infiltration from surface sources, with application to point and line sources. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 35, n. 6, p. 867-871, 1971.

PINHO, R.E.C. **Teores de água e solutos no solo:** desempenho e sensibilidade do modelo Hydrus-1D. 2009. 81 p. Dissertação (Mestrado em Física do Ambiente Agrícola) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2009.

PIZARRO, M.L.P. **Simulação de fluxo de água e transporte de solutos na zona não-saturada do solo pelo método de elementos finitos adaptativo**. 2009. 193 p. Tese (Engenharia Ambiental) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

POULOVASSILIS, A. Hysteresis of pore water, an application of the concept of independent domains. **Soil Science**, Batimore, v. 93, n. 6, p. 405-412, 1962.

PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. **FORTRAN numerical recipes:** the art of scientific computing. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 1235 p.

RAATS, P.A.C. Steady infiltration from point sources, cavities, and basins. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 35, n. 5, p. 689-694, 1971.

RAWLS, W.; GISH, T.; BRAKENSIEK, D. Estimating soil water retention from soil physical properties and characteristics. In: STEWART, B.A.**Advances in soil science.**New York: Springer, 1991. p.213-234.

REICHARDT, K.; TIMM, L.C. **Solo, planta e atmosfera:** conceitos, processos e aplicações. Barueri: Manole, 2004. 478 p.

REVOL, P.H.; VAUCLIN, M.; VACHAUD, G.; CLOTHIER, B.E. Infiltration from a surface point source and drip irrigation: 1. The midpoint soil water pressure. **Water Resources Research**, Washington, v. 33, n. 8, p. 1861-1867, 1997a.

REVOL, P.H.; CLOTHIER, B.E.; MAILHOL, J.C.; VACHAUD, G.; VAUCLIN, M. Infiltration from a surface point source and drip irrigation: 2. An approximate time-dependent solution for wet-front position. **Water Resources Research**,Washington, v. 33, n. 8, p. 1869-1874, 1997b.

RIVERA, R.N.C. **Modelagem da dinâmica da água e do potássio na irrigação por gotejamento superficial**. 2004. 106 p. Tese (Doutorado em Irrigação e Drenagem) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2004.

RIVERA, R.N.C.; DUARTE, S.N.; MIRANDA, J.H.; BOTREL, T.A. Modelagem da dinâmica do potássio no solo sob irrigação por gotejamento: validação do modelo. **Engenharia Agrícola**,Jaboticabal, v. 26, n. 2, p. 388-394, 2006.

ROCHA, D.; ABBASI, F.; FEYEN, J. Sensitivity analysis of soil hydraulic properties on subsurface water flow in furrows. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**,New York, v. 132, n. 4, p. 418-424, 2006.

ROWSE, H.; STONE, D.; GERWITZ, A. Simulation of the water distribution in soil. **Plant and Soil**,Dordrecht, v. 49, n. 3, p. 533-550, 1978.

SAMADIANFARD, S.; SADRADDINI, A.A.; NAZEMI, A.H.; PROVENZANO, G.; KISI, O. Estimating soil wetting patterns for drip irrigation using genetic programming. **Spanish Journal of Agricultural Research**,Madrid, v. 10, n. 4, p. 1155, 2012.

SANDER, G.; PARLANGE, J.-Y.; KÜHNEL, V.; HOGARTH, W.; LOCKINGTON, D.; O'KANE, J. Exact nonlinear solution for constant flux infiltration. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 97, n. 3, p. 341-346, 1988.

SANTOS, M.A. **Extração de água do solo por plantas de soja:** modelagem hidrofísica e empírica. 2011. 76 p. Dissertação (Mestrado em Física do Ambiente Agrícola) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2011.

SATCHITHANANTHAM, S.; KRAHN, V.; SRI RANJAN, R.; SAGER, S. Shallow groundwater uptake and irrigation water redistribution within the potato root zone. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 132, p. 101-110, 2014.

SAXTON, K.; RAWLS, W. J.; ROMBERGER, J.; PAPENDICK, R. Estimating generalized soil-water characteristics from texture. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 50, n. 4, p. 1031-1036, 1986.

SCHAAP, M.G.; LEIJ, F.J.; VAN GENUCHTEN, M.T. Rosetta: A computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedotransfer functions. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 251, n. 3, p. 163-176, 2001.

SILVA, P.A.D. **Estudo do fenômeno de barreira capilar:** modelagem numérica e experimentação física. 2011. 187 p. Tese (Doutorado em Saneamento,Meio Ambiente e Recursos Hídricos) - Universidade Federal Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

ŠIMŮNEK, J. Models of water flow and solute transport in the unsaturated zone. In: ANDERSON, M.G. **Encyclopedia of hydrological sciences.** New York: John Wiley, 2005. p.1171-1180

ŠIMŮNEK, J.; VAN GENUCHTEN, M.T.; SEJNA, M. **The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media**. Riverside: Departament of Enveriomental Sciencies, University of California-Riverside Research Reports,2005. 240 p.

_____. The HYDRUS software package for simulating the two-and three-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media:technical manual. Prague: PC Progress, 2006. 213 p.

ŠIMŮNEK, J.; VAN GENUCHTEN, M.T.; GRIBB, M.M.; HOPMANS, J.W. Parameter estimation of unsaturated soil hydraulic properties from transient flow processes. **Soil and Tillage Research**, Amsterdam, v. 47, n. 1, p. 27-36, 1998.

SIYAL, A.A.; SKAGGS, T.H. Measured and simulated soil wetting patterns under porous clay pipe sub-surface irrigation. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 96, n. 6, p. 893-904, 2009.

SUBBAIAH, R. A review of models for predicting soil water dynamics during trickle irrigation. **Irrigation Science**,Heidelberg, v. 31, n. 3, p. 225-258, 2011.

SUBBAUAH, R.; MASHRU, H. H. Modeling for predicting soil wetting radius under point source surface trickle irrigation. **Agricultural Engineering International: CIGR Journal**,Beishatian, v. 15, n. 3, p. 1-10, 2013.

TAN, X.; SHAO, D.; LIU, H. Simulating soil water regime in lowland paddy fields under different water managements using HYDRUS-1D. **Agricultural Water Management**,Amsterdam, v. 132, p. 69-78, 2014.

THORBURN, P.J.; COOK, F.J.; BRISTOW, K.L. Soil-dependent wetting from trickle emitters: implications for system design and management. **Irrigation Science**,Heidelberg,v. 22, n. 3/4, p. 121-127, 2003.

TOLENTINO JUNIOR, J.B. **Modelagem do bulbo molhado em irrigação por gotejamento**. 2011. 101 p. Tese (Doutorado em Irrigação e Drenagem) - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2011.

VAN DAM, J.C.; FEDDES, R.A. Numerical simulation of infiltration, evaporation and shallow groundwater levels with the Richards equation. **Journal of Hydrology**,Amsterdam, v. 233, n. 1, p. 72-85, 2000.

VAN DAM, J.C.; GROENENDIJK, P.; HENDRIKS, R.F.A.; KROES, J.G. Advances of modeling water flow in variably saturated soils with SWAP. **Vadose Zone Journal**,Madison, v. 7, n. 2, p. 640, 2008.

VAN GENUCHTEN, M.T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 44, n. 5, p. 892-898, 1980.

_____. A comparison of numerical solutions of the one-dimensional unsaturated—saturated flow and mass transport equations. **Advances in Water Resources**,Amsterdam, v. 5, n. 1, p. 47-55, 1982.

VASCONCELLOS, C.; AMORIM, J.C.C. Simulação numérica da infiltração da água em meios porosos não-saturados homogêneos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 14, 2001, Aracaju. **Anais…** Aracaju: ABRH, 2001. 1 CD-ROM.

VEREECKEN, H.; MAES, J.; FEYEN, J. Estimating unsaturated hydraulic conductivity from easily measured soil properties. **Soil Science**, Baltimore, v. 149, n. 1, p. 1-12, 1990.

VEREECKEN, H.; WEYNANTS, M.; JAVAUX, M.; PACHEPSKY, Y.; SCHAAP, M. G.; VAN GENUCHTEN, M.T.Using pedotransfer functions to estimate the van Genuchten–Mualem soil hydraulic properties:A review. **Vadose Zone Journal**, Madison, v. 9, p. 795-820, 2010.

VRUGT, J. A.; HOPMANS, J. W.; ŠIMŮNEK, J. Calibration of a two-dimensional root water uptake model. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 65, n. 4, p. 1027-1037, 2001.

WARRICK, A. Time-dependent linearized infiltration. I. Point sources. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 38, n. 3, p. 383-386, 1974.

WARRICK, A.; ISLAS, A.; LOMEN, D. An analytical solution to Richards' equation for time-varying infiltration. **Water Resources Research**,Washington, v. 27, n. 5, p. 763-766, 1991.

_____. **Soil water dynamics**. New York: Oxford University Press, 2003. 391 p.

WHISLER, F. D.; KLUTE, A.; MILLINGTON, R. J. Analysis of steady-state evapotranspiration from a soil column. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v. 32, n. 2, p. 167-174, 1968.

WOODING, R.A. Steady infiltration from a shallow circular pond. **Water Resources Research**,Washington, v. 4, n. 6, p. 1259-1273, 1968.

WÖSTEN, J.H.M.; FINKE, P.A.; JANSEN, M.J.W. Comparison of class and continuous pedotransfer functions to generate soil hydraulic characteristics. **Geoderma**,Amsterdam, v. 66,n. 3, p. 227-237, 1995.

WU, J.; ZHANG, R.; GUI, S. Modeling soil water movement with water uptake by roots. **Plant and Soil**,Dordrecht, v. 215, n. 1, p. 7-17, 1999.

ZERIHUN, D.; FURMAN, A.; WARRICK, A.W.; SANCHEZ, C.A. Coupled surface–subsurface solute transport model for irrigation borders and basins. I. Model development. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**,New York, v. 131, n. 5, p. 396-406, 2005.