

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teoremas limite para variáveis aleatórias de Bernoulli dependentes

Bruna Luiza de Faria Rezende

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Bruna Luiza de Faria Rezende

Teoremas limite para variáveis aleatórias de Bernoulli dependentes

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Estatística

Orientadora: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

USP – São Carlos
Maio de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R467t Rezende, Bruna Luiza de Faria
Teoremas limite para variáveis aleatórias de
Bernoulli dependentes / Bruna Luiza de Faria
Rezende; orientador Renato Jacob Gava. -- São
Carlos, 2023.
68 p.

Tese (Doutorado - Programa Interinstitucional de
Pós-graduação em Estatística) -- Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação, Universidade de São
Paulo, 2023.

1. Variáveis aleatórias Bernoulli dependentes. 2.
Lei forte dos grandes números. 3. Flutuação
Gaussiana. 4. Princípio da invariância fraco e quase
certo. 5. Teorema central do limite. I. Gava,
Renato Jacob , orient. II. Título.

Bruna Luiza de Faria Rezende

Limit theorems for dependent Bernoulli random variables

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Interagency Program Graduate in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Renato Jacob Gava

USP – São Carlos

May 2023

*Dedico esta tese aos meus pais,
que tanto me apoiaram e incentivaram.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais e irmão, Maria Divina, Luiz e Luiz Henrique, por todo apoio familiar, incentivo e preocupação que tiveram para me dar suporte emocional, intelectual e financeiro para que eu tivesse condições de chegar, permanecer e concluir este ciclo.

Ao meu orientador, Renato, pela orientação, compreensão e atenção dedicadas a mim durante toda trajetória de desenvolvimento deste trabalho, sempre com muita paciência.

Ao meu noivo, Fernando, pelo companheirismo, cumplicidade e carinho que sempre teve comigo.

Aos meus amigos e colegas de disciplinas que me ajudaram, deram forças, foram meus companheiros e compartilharam comigo diversos momentos.

Aos professores da banca examinadora por participarem desta reflexão e darem contribuições relevantes.

Ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos (DEs-UFSCar), ao Departamento de Matemática Aplicada e Estatística do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP) e aos seus funcionários, em especial aos secretários dos programas e aos professores que ministraram disciplinas que cursei durante o doutorado e contribuíram para meu amadurecimento acadêmico.

Por fim, agradeço a todos amigos que direta ou indiretamente me ajudaram no período em cursei o doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Nada na vida deve ser temido, somente compreendido.
Agora é hora de compreender mais para temer menos.”
(Marie Curie)*

RESUMO

REZENDE, B. L. F. **Teoremas limite para variáveis aleatórias de Bernoulli dependentes.** 2023. 68 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Neste trabalho, consideramos uma sequência de variáveis de Bernoulli correlacionadas cuja probabilidade de sucesso do ensaio atual depende condicionalmente dos ensaios anteriores. Essa probabilidade condicional é dada como uma função linear da média da amostra e possui dois parâmetros dos quais um deles pode assumir valores negativos. Estabelecemos para este modelo a lei forte dos grandes números, uma convergência quase certa e em \mathcal{L}^m , uma flutuação Gaussiana da soma das variáveis aleatórias com a distribuição proposta, um princípio da invariância fraco e quase certo, o teorema central do limite e a lei do logaritmo iterado. Além disso, aplicamos todos os nossos resultados ao passeio aleatório minimal, um modelo físico com características interessantes de difusão.

Palavras-chave: Variáveis aleatórias Bernoulli dependentes. Lei forte dos grandes números. Flutuação Gaussiana. Princípio da invariância fraco e quase certo. Teorema central do limite.

ABSTRACT

REZENDE, B. L. F. **Limit theorems for dependent Bernoulli random variables**. 2023. 68 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

In this work, we consider a sequence of correlated Bernoulli variables whose probability of success for the current trial depends conditionally on previous trials. This conditional probability is given as a linear function of the sample mean and has two parameters of which one can assume negative values. We established for this model the strong law of large numbers, an almost sure and \mathcal{L}^m convergence, a Gaussian fluctuation of the sum of the random variables with the proposed distribution, an almost sure invariance principle and a weak invariance principle, the central limit theorem and the law of the iterated logarithm. Furthermore, we apply all our results to the minimal random walk, a physical model with interesting diffusion characteristics.

Keywords: Dependent Bernoulli random variables. Strong law of large numbers. Gaussian fluctuation. Almost sure and weak invariance principle. Central limit theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Simulação de $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}$ com $n = 1, \dots, 1000$ e $\theta_0 = \{0.1, 0.5, 0.9\}$	35
Figura 2	– Simulação de $\frac{S_n}{n}$ com $n = 1, \dots, 2000$, $p = \{0.1, 0.5, 0.9\}$, $q = \{0.1, 0.5, 0.9\}$ e $L = \frac{q}{1-\alpha}$	49
Figura 3	– Simulação de 4 realizações de $\frac{S_n}{n}$ com $n = 1, \dots, 15000$, $p = 0.9$, $q = 0.1$ e $L = \frac{q}{1-\alpha}$	50
Figura 4	– Simulação de M_n com $n = 1, \dots, 2000$, $s = \{0.1, 0.5, 0.9\}$, $p = \{0.1, 0.5, 0.9\}$ e $q = 0$	51

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Simulação do passeio aleatório minimal	50
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	25
3	RESULTADOS PRINCIPAIS	31
3.1	Lei Forte dos Grandes Números	31
3.2	Convergência quase certa e em \mathcal{L}^m	35
3.3	Flutuação Gaussiana de M_n	36
3.4	Princípio da invariância	40
3.5	Teorema Central do Limite	44
4	APLICAÇÃO NO PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE A	RESULTADOS UTILIZADOS	63
APÊNDICE B	DISTRIBUIÇÃO DE MITTAG-LEFFLER	67

INTRODUÇÃO

Variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli são o tipo mais simples de variáveis aleatórias. O nome desta distribuição e todos os termos relacionados vem do matemático suíço do século XVII Jacob Bernoulli. Apesar de naquela época o conceito de distribuição de probabilidade ainda não ter sido criado, em seus manuscritos que geraram o livro *Ars Conjectandi* (“A Arte de Conjeturar”), [Bernoulli \(1713\)](#) definiu o que hoje chamamos de ensaios de Bernoulli, nos quais cada evento é independente dos demais e pode assumir apenas dois valores, 1 (“sucesso”) e 0 (“fracasso”) com respectivas probabilidades p e $1 - p$, em que p assume valores entre 0 e 1.

Muitos historiadores consideram *Ars Conjectandi* o documento fundador da probabilidade matemática. Nele, Bernoulli introduz conceitos fundamentais da análise combinatória, apresenta a primeira prova do que hoje chamamos de lei fraca dos grandes números e dentre outras coisas, também introduziu a distribuição binomial. Mais informações sobre a vida e obra de Bernoulli podem ser encontradas em [Schneider \(2005\)](#).

Uma variável aleatória com distribuição binomial representa o número de sucessos em n tentativas independentes sucessivas de um experimento de Bernoulli. [Drezner e Farnum \(1993\)](#) introduziram uma generalização dessa distribuição que permite dependência entre os ensaios, de forma que as probabilidades de sucesso deles não são constantes. No artigo, os autores definiram um parâmetro adicional que controla o grau de correlação entre os ensaios e obtiveram expressões para os momentos, média e variância dessa distribuição.

[Heyde \(2004\)](#) inspirou-se no trabalho de [Drezner e Farnum \(1993\)](#) e apresentou um processo de Bernoulli correlacionado, no qual a probabilidade de sucesso de cada ensaio depende da taxa de sucesso dos ensaios anteriores por meio de uma variável fixa, não negativa e menor do que um, que representa o parâmetro de dependência. Dessa forma, as somas parciais das variáveis aleatórias que possuem essa distribuição têm a distribuição binomial generalizada de [Drezner e Farnum \(1993\)](#). O autor mostra que esse processo possui interessantes propriedades assintóticas que diferem notavelmente na vizinhança de um ponto crítico. Além disso, [Heyde](#)

(2004) apresentou uma dicotomia assintótica básica e de dependência de curto/longo alcance, isto é, para dois intervalos distintos de valores do parâmetro de dependência, o processo pode ter uma memória de curto ou longo alcance.

Mais tarde, James, James e Qi (2008) consideraram a classe de processos de Bernoulli correlacionados proposta por Heyde (2004) com um diferencial, o parâmetro de dependência não era mais fixo. Obtiveram para as somas parciais das variáveis aleatórias com a distribuição proposta a lei forte dos grandes números, o teorema central do limite e a lei do logaritmo iterado. Vale observar novamente que a distribuição de cada soma é a distribuição binomial generalizada introduzida por Drezner e Farnum (1993).

Posteriormente, Wu, Qi e Yang (2012) propuseram uma sequência de variáveis aleatórias dependentes de Bernoulli com dois parâmetros de dependência não negativos e menores do que um, diferente do processo considerado por Heyde (2004) e James, James e Qi (2008). Para essa sequência de variáveis aleatórias, os autores investigaram comportamentos quase certos, provaram a lei forte dos grandes números sob condições fracas e também estenderam os resultados obtidos anteriormente por James, James e Qi (2008).

Zhang e Zhang (2015), considerando a sequência de variáveis aleatórias dependentes de Bernoulli proposta por Wu, Qi e Yang (2012), estabeleceram um princípio da invariância quase certo para as somas parciais das variáveis aleatórias com tal distribuição. Depois, generalizaram o processo para um caso multidimensional e estenderam os resultados de Heyde (2004), James, James e Qi (2008) e Wu, Qi e Yang (2012).

Nesta pesquisa consideramos o modelo sugerido por Wu, Qi e Yang (2012) com um diferencial, permitimos que um dos dois parâmetros de dependência do processo de Bernoulli generalizado possa assumir valores negativos. Mais especificamente, lidamos com uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli dependentes $\{X_n\}_{n \geq 1}$ cuja probabilidade de sucesso do ensaio atual depende da quantidade de sucessos dos ensaios anteriores da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1) &= \theta_0; \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) &= \theta_n + d_n \frac{S_n}{n}, \quad \text{para } n \geq 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $0 < \theta_0 < 1$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ é a filtração gerada por X_1, \dots, X_n (isto é, $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$); θ_n e d_n são os parâmetros de dependência com $0 \leq \theta_n < 1$ e $0 \leq \theta_n + d_n < 1$, para todo $n \geq 1$. Note que essas restrições implicam que $-1 < d_n < 1$.

No caso em que $\theta_n = \theta$ e $d_n = 0$ teremos o processo de Bernoulli clássico com variáveis aleatórias i.i.d. e quando $\theta_n = (1-d)\theta_0$ e $d_n = d$ para algum $d \in (0, 1)$ teremos o processo de Bernoulli generalizado apresentado por Heyde (2004).

Considerando o modelo da forma proposta, a suposição de diferenças de martingais limitadas, usada para provar os resultados dos artigos supracitados, não é mais verdadeira, o que

faz com que precisemos recorrer a estratégias diferentes dos demais autores para demonstrar os resultados desejados.

O principal motivo para estarmos interessados em um conjunto de parâmetros que podem assumir valores negativos é o fato de existir um modelo proposto na literatura de Física, apresentado por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#). Nesse artigo, os autores introduzem um passeio aleatório com incrementos dependentes e memória ilimitada, de modo que sua função de distribuição condicionada em todo passado tem como parâmetros $0 \leq q \leq 1$ e $-1 \leq \alpha \leq 1$.

No presente trabalho estabelecemos para esse modelo mais geral a lei forte dos grandes números (Seção 3.1), uma convergência quase certa e em \mathcal{L}^m (Seção 3.2), uma flutuação Gaussiana da soma das variáveis aleatórias com a distribuição proposta (Seção 3.3), um princípio da invariância fraco e quase certo tendo como resultados diretos a lei do logaritmo iterado e o teorema central do limite (Seção 3.4) e uma outra demonstração do teorema central do limite (Seção 3.5). Por fim, aplicamos todos os resultados obtidos no capítulo 3 a um modelo físico, o passeio aleatório minimal introduzido por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#) (Capítulo 4).

PRELIMINARES

Antes de apresentar os resultados principais deste trabalho é imprescindível definir algumas variáveis, apresentar alguns conceitos e consequências que serão necessários para compreender e demonstrar tais resultados.

A probabilidade de sucesso do n -ésimo ensaio, definida como $p_n := \mathbb{P}(X_n = 1)$, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta_0, \text{ tal que } \theta_0 \in (0, 1); \\ p_n &= 0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= \mathbb{E}(X_n), \text{ para } n > 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Utilizando (1.1),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(0 \cdot \mathbb{P}(X_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(X_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1})) \\ &= \mathbb{E}\left(\theta_{n-1} + d_{n-1} \frac{S_{n-1}}{n-1}\right) \\ &= \theta_{n-1} + d_{n-1} \frac{\mathbb{E}(S_{n-1})}{n-1} \text{ para } n > 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Temos de (2.1) que para $n > 1$,

$$\mathbb{E}(S_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n-1} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta_0; \\ p_n &= \theta_{n-1} + \frac{d_{n-1}}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} p_j, \text{ para } n > 1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $0 < \theta_0 < 1$, $0 \leq \theta_n < 1$ e $-1 < d_n < 1$.

Definição 1. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de sub σ -álgebras de \mathcal{F} . Se $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias de Ω e satisfaz

- (i) M_n é mensurável com respeito a \mathcal{F}_n ,
- (ii) $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$,
- (iii) $\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$ quase certamente,

então, a sequência $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é um **martingal** com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$. Além disso, uma sequência $\{D_n\}_{n \geq 1}$ será dita uma **diferença de martingais** se substituirmos (iii) por

- (iii') $\mathbb{E}(D_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$ quase certamente.

Exemplo 1. Um martingal é a idealização matemática de um jogo justo. Para entender melhor considere, por exemplo, um dado equilibrado sendo jogado e o jogador ganha um real se o dado apresentar face 1, 2 ou 3 e perde a mesma quantia se o resultado for 4, 5 ou 6. Considere a sequência de variáveis aleatórias i.i.d. $\{X_n\}_{n \geq 1}$ onde $X_n = 1$ se o jogador ganha na rodada n e $X_n = -1$ se o jogador perde. Dessa forma, para cada $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Defina $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ representando a quantia acumulada pelo jogador até o instante n , com $S_0 = 0$. Vamos provar que S_n é um martingal.

- (i) Como $X_1, \dots, X_n \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$, então $S_n \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 1$.
- (ii) Note que $|S_n| \leq n$, então $\mathbb{E}(|S_n|) \leq n < \infty$ para todo $n \geq 1$.
- (iii) Como as variáveis aleatórias X_n são independentes para todo $n \geq 1$, temos que $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$, logo $\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$.

Conforme ilustrado nesse exemplo, o martingal mantém saltos de valor esperado zero, isto é, o jogador não ganha nada em média. Uma consequência desse fato é que se nós conhecemos a quantia acumulada no instante $n - 1$, temos uma informação sobre seu futuro, pois sabemos que é esperado que no instante n a quantia acumulada se mantenha a mesma do instante anterior.

Definição 2. Defina as seguintes variáveis, considerando d_n e p_n como os definidos em (1.1) e (2.3) respectivamente,

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{d_j}{j}\right), \quad \text{para } n \geq 2; \quad (2.4)$$

$$A_n^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \quad \text{e} \quad \bar{A}_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{a_j^2}, \quad \text{para } n \geq 1; \quad (2.5)$$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} \quad \text{e} \quad \bar{B}_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}, \quad \text{para } n \geq 1; \quad (2.6)$$

$$M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n}, \quad \text{para } n \geq 1; \quad (2.7)$$

$$D_1 = M_1 \quad \text{e} \quad D_n = M_n - M_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (2.8)$$

Lema 1. A sequência $\{M_n\}_{n \geq 1}$ definida em (2.7) é um martingal com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ de média zero e a sequência $\{D_n\}_{n \geq 1}$ definida em (2.8) é uma diferença de martingais.

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, sabemos que $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i = \sum_{i=1}^n (X_i) + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Note que de (1.1) temos $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0 + 1 \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = \theta_n + d_n \frac{S_n}{n}$ e de (2.2), $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \theta_n + d_n \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}$. Além disso, pela definição (2.4), $a_{n+1} = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{d_j}{j}\right) = \left(1 + \frac{d_n}{n}\right) \cdot a_n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \frac{\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n]}{a_{n+1}} \\ &= \frac{S_n + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - [\mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(X_{n+1})]}{a_{n+1}} \\ &= \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_{n+1}} + \frac{\theta_n + d_n \frac{S_n}{n} - \left[\theta_n + d_n \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right]}{a_{n+1}} \\ &= \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_{n+1}} + \frac{\frac{d_n}{n} [S_n - \mathbb{E}(S_n)]}{a_{n+1}} \\ &= [S_n - \mathbb{E}(S_n)] \frac{\left(1 + \frac{d_n}{n}\right)}{a_{n+1}} \\ &= \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} = M_n \text{ q.c..} \end{aligned}$$

Temos ainda

$$\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{a_n} \mathbb{E}[S_n - \mathbb{E}(S_n)] = 0.$$

Além disso, como $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal,

$$\mathbb{E}(D_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1} = 0.$$

□

Lema 2. Seja $\{D_n\}_{n \geq 1}$ a sequência de diferenças de martingais com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ definida em (2.8). Então,

$$|D_j| \leq \frac{2}{a_j}, \quad (2.9)$$

Demonstração. Note que pelas definições (2.8) e (2.7), a sequência $\{D_n\}_{n \geq 1}$ de diferenças de martingais é, para cada $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_j &= \frac{S_j - \mathbb{E}(S_j)}{a_j} - \frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{a_{j-1}} \\ &= \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{a_j} + [S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})] \left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j-1}}\right) \\ &= \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{a_j} - \frac{[S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})] d_{j-1}}{j-1} \frac{1}{a_j}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Quando $j = 1$, $D_1 = M_1 = \frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1)}{a_1}$. Então, para $j \geq 1$

$$|D_j| \leq \frac{2}{a_j},$$

uma vez que os incrementos X_n 's são uniformemente limitados. \square

Por outro lado, o fato de os d_j 's poderem ser negativos, implica que a sequência de diferenças de martingais $\{D_n\}_{n \geq 1}$ pode não ser limitada. O Exemplo 2 abaixo mostra um caso em que isso ocorre.

Observação 1. Ao longo deste trabalho, a notação $a_n \sim b_n$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; $a_n = O(b_n)$ quer dizer que existem constantes $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que $|a_n| \leq c|b_n|$ quando $n \geq n_0$; $a_n = o(b_n)$ simboliza que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$; e $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Exemplo 2. Considere a sequência de variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli $\{X_n\}_{n \geq 1}$ introduzida por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#) como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1) &= s; \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) &= q + \alpha \frac{S_n}{n} \text{ para } n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$ e $\alpha := p - q \in [-1, 1]$. Esse modelo é chamado de **passeio aleatório minimal**.

Nesse caso, $\theta_n = q$, $d_n = \alpha$ e

$$a_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{j} \right).$$

Observe que podemos reescrever a_n usando a função gama da seguinte maneira

$$a_n = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(1 + \alpha)} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Além disso, note que

- $a_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, se $0 < \alpha \leq 1$.
- $a_n = 1$ para $n \geq 1$, se $\alpha = 0$.
- $a_n \rightarrow 0$, se $-1 \leq \alpha < 0$.

A principal razão para a introdução deste modelo do ponto de vista físico vem do fato de ele ser manipulável analiticamente, permitindo o cálculo dos dois primeiros momentos de S_n e possuir o que é chamado pelos físicos de difusão anômala. A difusão na física é o estudo de como uma partícula se propaga em um meio.

Definição 3. Um processo estocástico qualquer S_n é difusivo se

$$\text{Var}(S_n) = kn, \text{ para algum } k > 0,$$

caso contrário diremos que S_n possui **difusão anômala**.

Outra forma de dizer que o modelo S_n apresenta **difusão anômala** é se seu segundo momento se comportar assintoticamente de forma não linear como n^h , para $h \neq 1$. Se $h > 1$ o processo é chamado superdifusivo e se $h < 1$ subdifusivo. Alternativamente, ele exibe difusão normal se $h = 1$. Observe que as somas de variáveis aleatórias i.i.d. com variância finita exibem difusão normal.

A propagação acelerada de uma notícia, como uma *fake news* sendo compartilhada freneticamente, pode ser modelada por um processo de difusão anômala com regime superdifusivo e no caso contrário, se uma informação sofre censura ou é impedida de ser difundida, também é considerado um exemplo de difusão anômala, porém com regime subdifusivo.

Mais adiante, no Capítulo 4, voltaremos a tratar do passeio aleatório minimal com maiores detalhes.

RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo são demonstrados os resultados mais importantes desta pesquisa. Considerando o modelo proposto, provamos aqui a lei forte dos grandes números (Seção 3.1), uma convergência quase certa e em \mathcal{L}^m (Seção 3.2), uma flutuação Gaussiana da soma das variáveis aleatórias com a distribuição proposta (Seção 3.3), um princípio da invariância (Seção 3.4) e o teorema central do limite (Seção 3.5)

3.1 Lei Forte dos Grandes Números

Provada pela primeira vez pelo matemático suíço Jakob Bernoulli em 1713, a lei dos grandes números é um dos resultados mais famosos da teoria da probabilidade. A grosso modo, ela afirma que se um experimento é repetido um grande número de vezes, a média dos resultados deve estar próximo do valor esperado. Nesta seção, provamos que, considerando uma condição necessária e suficiente, podemos obter que a média das somas das variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli dependentes consideradas nesta pesquisa converge quase certamente para seu valor esperado.

Definição 4. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ **converge quase certamente** para a variável aleatória Y se $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y) = 1$.

Intuitivamente, a convergência quase certa permite que alguns pontos do espaço amostral escapem do critério de convergência, porém, o conjunto desses pontos tem probabilidade zero de ocorrer.

Os lemas a seguir serão utilizados para demonstrar a lei forte dos grandes números para o modelo proposto nesta pesquisa.

Lema 3. Considerando as variáveis a_n e A_n definidas em (2.4) e (2.5) respectivamente, temos:

- (i) a_n/n é não crescente em n .

(ii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \infty$.

Demonstração. (i) Podemos escrever $n = \prod_{j=1}^{n-1} (1 + j^{-1})$, então

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1 + d_j j^{-1}}{1 + j^{-1}} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j + d_j}{j + 1} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1 - d_j}{j + 1} \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

que é não crescente, uma vez que $-1 < d_j < 1$.

(ii) Pelo item (i) temos que a_n/n é monótona e limitada, pois $0 < \frac{a_n}{n} < 1$. Então existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = v$ e, como a_n/n é não crescente, $v \leq \frac{a_n}{n}$, para todo $n \geq 1$. Suponha que $v \neq 0$, assim, para $n \geq 1$, $\frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{n^2 v^2}$, o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2 v^2} = \frac{\pi^2}{6v^2} < \infty.$$

(iii) Temos de (3.1) que

$$\frac{a_n}{n} = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1 - d_j}{j + 1} \right) = \exp \left(- \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - d_j}{j + 1} + O(1) \right).$$

Daí, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1-d_j}{j+1} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. □

Lema 4. Seja $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de diferenças de martingais com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$. Se $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) < \infty$ q.c., então $\sum_{j=1}^n Z_j$ converge quase certamente.

Demonstração. Pelo Teorema 2.17 de [Hall e Heyde \(1980\)](#) (ver Teorema 7 do Apêndice A), considerando $p = 2$ o resultado é válido. □

Teorema 1 (Lei Forte dos Grandes Números). Suponha que (1.1) valha. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} = 0 \text{ q.c.}$$

se, e somente se, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \infty$.

Demonstração. Primeiramente, assumamos que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \infty$. Defina $Z_j = \frac{a_j}{j} D_j$. Temos de (2.9) que,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \infty,$$

então, pelo Lema 4, $\sum_{j=1}^{\infty} Z_j$ converge quase certamente. Sabemos, pelo Lema 3 (i), que $\frac{a_n}{n}$ é monótona não crescente. Considerando a hipótese e utilizando o Lema 3 (iii), temos que $\frac{n}{a_n} \uparrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, concluímos pelo Lema de Kronecker (ver Lema 8 do Apêndice A) que

$$\frac{a_n}{n} \sum_{j=1}^n D_j = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j}{a_j} Z_j}{\frac{n}{a_n}} \rightarrow 0 \text{ q.c..}$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \sum_{j=1}^n D_j = 0 \text{ q.c..}$$

Agora, para provar a recíproca, utilizaremos a técnica de prova por contraposição. Assuma que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} < \infty$, temos pelo Lema 3 (iii) e (ii) que $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} < \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 < \infty$. Por (2.9), $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{a_j^2} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 < \infty$. Pelo Lema 4 obtemos que $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} = M_n = \sum_{j=1}^n D_j$ converge quase certamente para alguma variável aleatória M . Além disso, como $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal, para $m > n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n D_m | \mathcal{F}_{m-1}) &= \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})(M_m - M_{m-1}) | \mathcal{F}_{m-1}] \\ &= M_n \mathbb{E}(M_m | \mathcal{F}_{m-1}) - M_n M_{m-1} - M_{n-1} \mathbb{E}(M_m | \mathcal{F}_{m-1}) + M_{n-1} M_{m-1} \\ &= M_n M_{m-1} - M_n M_{m-1} - M_{n-1} M_{m-1} + M_{n-1} M_{m-1} = 0 \end{aligned}$$

logo, $\mathbb{E}[(D_n + D_m)^2 | \mathcal{F}_{m-1}] = \mathbb{E}(D_n^2 | \mathcal{F}_{m-1}) + \mathbb{E}(D_m^2 | \mathcal{F}_{m-1})$ daí, $\mathbb{E}[(D_n + D_m)^2] = \mathbb{E}(D_n^2) + \mathbb{E}(D_m^2)$. Por indução, provamos que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^n D_j \right)^2 \right] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^2). \quad (3.2)$$

Pelo Lema de Fatou (ver Lema 9 do Apêndice A) e por (2.9), para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n - M)^2] &= \mathbb{E}\left[(M_n - \lim_{m \rightarrow \infty} M_m)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\lim_{m \rightarrow \infty} M_m - M_n)^2\right] \\
&\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(M_m - M_n)^2] \\
&= \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^m D_j - \sum_{j=1}^n D_j\right)^2\right] \\
&= \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=n+1}^m D_j\right)^2\right] \\
&= \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(D_j^2) \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{4}{a_j^2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(M_n - M)^2] = 0$. O que implica, juntamente com $E(M_n) = 0$,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(M) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n^2) - [\mathbb{E}(M_n)]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n D_j\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2) \\
&\geq \mathbb{E}(D_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] = \mathbb{E}(X_1) - [\mathbb{E}(X_1)]^2 = \theta_0(1 - \theta_0) > 0.
\end{aligned}$$

Isso significa que M é uma variável aleatória não degenerada. Como $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} < \infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} M$ é não degenerada. Portanto, se $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} < \infty$, $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$ não converge para 0 com probabilidade 1, que é o que queríamos provar.

□

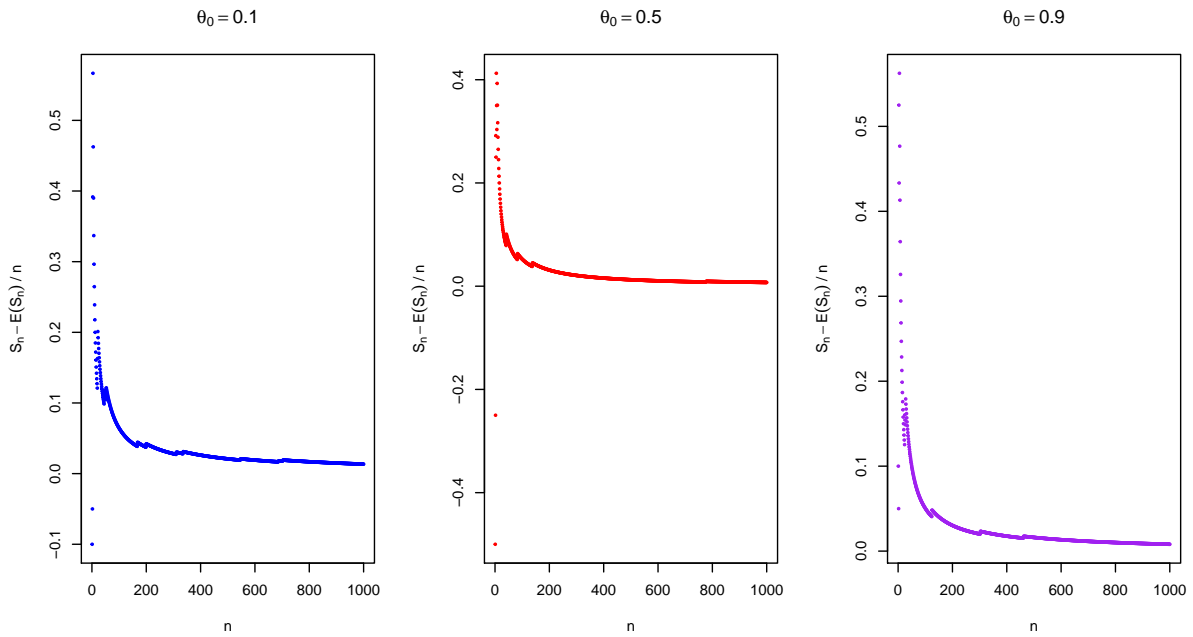
Exemplo 3. Consideremos $\theta_n = 1/n$, $d_n = -1/n$ para $n \geq 2$ e $\theta_1 = d_1 = 0$. De (1.1) temos que $\mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \theta_0$ e $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = \theta_n + d_n \frac{S_n}{n}$, para $n \geq 1$. Daí,

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_{n-1}) + \mathbb{E}(X_n) = \theta_{n-1} + \mathbb{E}(S_{n-1}) \left(1 + \frac{d_{n-1}}{n-1}\right), \text{ para } n \geq 2.$$

Assim, $\mathbb{E}(S_2) = \theta_0$ e por recursividade,

$$\mathbb{E}(S_n) = \theta_0 \prod_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j} \prod_{k=j+1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n-1} = \frac{(\theta_0 - 3)n + 2n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2}{2(n-1)}.$$

Com o intuito de ilustrar o exemplo, foi feita uma simulação de uma realização de $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$ para $\theta_0 = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}$, com $n = 1, \dots, 1000$ que podem ser vistas na figura 1. Podemos notar que nestes casos, independente do valor de θ_0 , $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$ converge para 0 a medida que n cresce.

Figura 1 – Simulação de $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}$ com $n = 1, \dots, 1000$ e $\theta_0 = \{0.1, 0.5, 0.9\}$ 

Fonte: A autora

De fato,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{j}}{j+1} = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

assim, pelo Teorema 1 temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} = 0 \text{ q.c..}$$

3.2 Convergência quase certa e em \mathcal{L}^m

Nessa seção nos interessamos em provar que o martingal $\{M_n\}_{n \geq 1}$ converge quase certamente e em \mathcal{L}^m para uma variável não degenerada de média zero.

Definição 5. Uma sequência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ **converge em \mathcal{L}^m** para Y , sendo $0 < m < \infty$, se $Y_n \in \mathcal{L}^m$, $Y \in \mathcal{L}^m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Y_n - Y|^m) = 0$. Dizer que $Y \in \mathcal{L}^m$ significa que Y é m -integrável, isto é, $\mathbb{E}(|Y|^m) < \infty$.

Teorema 2 (Convergência quase certa e em \mathcal{L}^m). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 < \infty$, então existe uma variável aleatória M não degenerada e de média zero tal que

$$M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} \rightarrow M \text{ q.c. e em } \mathcal{L}^m, m \geq 1, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Provemos primeiramente para o caso em que $m > 1$. Já definimos a diferença de martingais $\{D_n\}_{n \geq 1}$ como $D_1 = M_1$ e $D_n = M_n - M_{n-1}$, para $n \geq 1$. Daí,

$$M_n = D_n + M_{n-1} = D_n + D_{n-1} + M_{n-2} = \cdots = \sum_{j=2}^n D_j + M_1 = \sum_{j=1}^n D_j.$$

Além disso, temos de (2.9) que $|D_j| \leq \frac{2}{a_j}$. Portanto, utilizando a desigualdade de Burkholder (ver Teorema 8 do Apêndice A) e a desigualdade triangular para uma constante c que depende somente de $m > 1$

$$\mathbb{E}(|M_n|^m) \leq c \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n D_j^2 \right|^{m/2} \right) \leq c \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n |D_j^2|^{m/2} \right) \leq c \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{4}{a_j^2} \right)^{m/2} \right].$$

Por hipótese, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} < \infty$, então $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(|M_n|^m) < \infty$.

Portanto, pelo teorema de convergência em \mathcal{L}^m para martingais (ver Teorema 9 do Apêndice A), concluímos que, para $m > 1$, $M_n \rightarrow M$ quase certamente e em \mathcal{L}^m .

Para o caso $m = 1$, note que pela desigualdade de Lyapounov (ver Teorema 11 do Apêndice A),

$$|\mathbb{E}(M)| = |\mathbb{E}(M - M_n)| \leq \mathbb{E}(|M - M_n|) \leq [\mathbb{E}(|M - M_n|^2)]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois converge em \mathcal{L}^2 . Dessa forma, a convergência em \mathcal{L}^1 vale. Além disso, por (3.2) e (3.3) temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(M) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{E}(M_n^2) - [\mathbb{E}(M_n)]^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^n D_j \right)^2 \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2) \\ &\geq \mathbb{E}(D_1^2) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] = \mathbb{E}(X_1) - [\mathbb{E}(X_1)]^2 = \theta_0(1 - \theta_0) > 0, \end{aligned}$$

isto é, M é uma variável aleatória não degenerada de média zero. □

3.3 Flutuação Gaussiana de M_n

Em mecânica estatística, as flutuações estatísticas podem ser descritas como variabilidade. Isto quer dizer que quando um experimento é realizado com eventos sob as mesmas condições, os resultados obtidos podem ser ligeiramente diferentes. Nesta seção provamos que uma flutuação do martingal $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é gaussiana, isto é, converge em distribuição para uma variável aleatória normal.

Para demonstrar tal resultado, os seguintes lemas são necessários.

Lema 5. Se $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \infty$, então

$$\mathbb{E}(D_j^2) = \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o\left(\frac{1}{a_j^2}\right) \text{ q.c..} \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) = \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o\left(\frac{1}{a_j^2}\right) \text{ q.c..} \quad (3.5)$$

Demonstração. Vamos começar provando (3.5). De (2.10) e notando que $\mathbb{E}(X_j) = p_j$, temos

$$\begin{aligned} D_j^2 &= \frac{1}{a_j^2} \left[(X_j - p_j)^2 - 2d_{j-1}(X_j - p_j) \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) + d_{j-1}^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{a_j^2} \left\{ X_j^2 - 2p_j X_j + p_j^2 + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) [-2X_j + 2p_j + \right. \\ &\quad \left. + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Note que de (1.1), $\mathbb{E}(X_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) = \mathbb{E}(X_j | \mathcal{F}_{j-1}) = \theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1}$ e, como $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \infty$, pelo Teorema 1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) &= \frac{1}{a_j^2} \left\{ \theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} - 2p_j \left(\theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} \right) + p_j^2 + d_{j-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \left[-2 \left(\theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} \right) + 2p_j + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a_j^2} \left\{ p_j^2 + (1-2p_j) \left(\theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} \right) + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[-2 \left(\theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} \right) + 2p_j + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{a_j^2} \left\{ p_j^2 + (1-2p_j)p_j + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[(1-2p_j) - 2 \left(\theta_{j-1} + d_{j-1} \frac{S_{j-1}}{j-1} \right) + 2p_j + d_{j-1} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o\left(\frac{1}{a_j^2}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, para provar (3.4), lembramos que $\mathbb{E}(X_j^2) = \mathbb{E}(X_j) = p_j$ e utilizamos o Teorema

da Convergência Dominada (ver Teorema 12 do Apêndice A) e o Teorema 1, para obter

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_j^2) &= \frac{1}{a_j^2} \mathbb{E} \left[X_j^2 - 2p_j X_j + p_j^2 - 2d_{j-1} X_j \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2d_{j-1} p_j \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) + d_{j-1}^2 \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{a_j^2} \left\{ p_j - 2p_j^2 + p_j^2 - 2d_{j-1} p_j \mathbb{E} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2d_{j-1} p_j \mathbb{E} \left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right) + d_{j-1}^2 \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{1}{a_j^2} \left\{ p_j - p_j^2 + d_{j-1}^2 \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o \left(\frac{1}{a_j^2} \right). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

□

Lema 6. Considerando $s_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2)$ e supondo \bar{A}_n^2/\bar{B}_n^2 limitado para todo $n \geq 1$, então $a_n^2 s_n^2 \geq cn$ para $0 < c \leq 1$.

Demonstração. Temos de (3.8) que, para todo $n \geq 1$,

$$s_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + \frac{d_{j-1}^2}{a_j^2} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right],$$

$a_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{d_j}{j} \right)$ de (2.4) e, pela hipótese, $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} \geq c \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{a_j^2}$, para algum $0 < c \leq 1$.

Além disso, como $d_i < 1$ para todo $i \geq 1$,

$$\prod_{i=n}^{j-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right) \leq \prod_{i=n}^{j-1} \left(1 + \frac{1}{i} \right) = \prod_{i=n}^{j-1} \left(\frac{i+1}{i} \right) = \frac{j}{n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_n^2 s_n^2 &= a_n^2 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + \frac{d_{j-1}^2}{a_j^2} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{j-1} - \mathbb{E}(S_{j-1})}{j-1} \right)^2 \right] \\
&\geq a_n^2 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} \\
&\geq c a_n^2 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{a_j^2} \\
&= c \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=n}^{j-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right)^2} \\
&\geq c \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^2}{j^2} \geq cn^2 \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = cn.
\end{aligned}$$

□

Observação 2. Note que $B_n \leq A_n$ e $\bar{B}_n \leq \bar{A}_n$ para todo $n \geq 1$. Seja $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2 = p_n(1 - p_n)$. Se $\sigma_n^2 \geq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, então A_n/B_n e \bar{A}_n/\bar{B}_n são limitados, satisfazendo a suposição do teorema a seguir.

Teorema 3 (Flutuação Gaussiana de S_n). Considerando M a variável aleatória limite do Teorema 2 e $s_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2)$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 < \infty$ e \bar{A}_n^2/\bar{B}_n^2 é limitado para todo $n \geq 1$, então

$$\frac{M - M_n}{s_{n+1}} = \frac{a_n M - (S_n - \mathbb{E}(S_n))}{a_n s_{n+1}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e} \quad (3.9)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|M - M_n|}{s_{n+1} \phi(s_{n+1}^{-1})} = 1 \text{ q.c.}, \quad (3.10)$$

onde $\phi(x) = \sqrt{2 \log \log(x \vee 3)}$.

Demonstração. Defina $t_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})$. Vamos provar que as condições do Teorema 1 (b) de Heyde (1977) (ver Teorema 13 do Apêndice A) valem. Sob a hipótese de que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 < \infty$, é claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{B}_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n^2 = 0$, pois $\bar{B}_n \leq \bar{A}_n$. Assim, pelo Lema 5 obtemos que $s_n^2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Provemos agora a condição (i) do Teorema 13, isto é, queremos provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^2}{s_n^2} = 1$ q.c.. Pelo Lema 5, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} - \frac{\varepsilon}{a_n^2}}{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}} < \frac{t_n^2}{\bar{B}_n^2} < \frac{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + \frac{\varepsilon}{a_n^2}}{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}},$$

assim, pela hipótese de que \bar{A}_n^2/\bar{B}_n^2 é limitado temos que, para algum $K > 0$,

$$1 - \varepsilon K < \frac{t_n^2}{\bar{B}_n^2} < 1 + \varepsilon K,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^2}{\bar{B}_n^2} = 1 \text{ q.c.} \quad (3.11)$$

De modo análogo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^2}{\bar{B}_n^2} = 1 \text{ q.c.} \quad (3.12)$$

Por (3.11) e (3.12), a condição (i) é satisfeita.

Provemos agora a condição (ii) do mesmo teorema. Pelo Lema 6

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(a_j^2 s_j^2)^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(c_j)^2} = \frac{\pi^2}{6c^2} < \infty. \quad (3.13)$$

Logo, utilizando o Lema 1 (ii) de Heyde (1977) (ver Lema 10 do Apêndice A) temos

$$\frac{1}{s_n^4} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{a_j^4} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Note que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n)] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^2} \mathbb{E}(D_j^4),$$

pois, caso $|D_j| \leq \varepsilon s_n \Rightarrow \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n)] = 0 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^2} \mathbb{E}(D_j^4)$. Caso contrário, se $|D_j| > \varepsilon s_n \Rightarrow \frac{D_j^2}{\varepsilon^2 s_n^2} > 1 \Rightarrow \frac{D_j^4}{\varepsilon^2 s_n^2} > D_j^2 \Rightarrow \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n)] = \mathbb{E}[D_j^2] < \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^2} \mathbb{E}(D_j^4)$.

Daí, utilizando (2.9) e (3.14),

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n)] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^4} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^4) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^4} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{2^4}{a_j^4} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, a condição (ii) do Teorema 1 (b) de Heyde (1977) (ver Teorema 13 do Apêndice A) é de fato satisfeita, o que nos permite concluir que (3.9) vale.

Agora, provaremos que as condições (iii) e (iv) do mesmo teorema valem. Note que

$$\mathbb{E}[|D_j| \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_j)] \leq \frac{1}{\varepsilon^3 s_j^3} \mathbb{E}(D_j^4),$$

daí, de (2.9) e (3.13)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j} \mathbb{E}[|D_j| \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_j)] &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^3 s_j^4} \mathbb{E}(D_j^4) \\ &\leq \frac{2^4}{\varepsilon^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(s_j a_j)^4} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, a condição (iii) vale. De maneira análoga provamos a condição (iv). Portanto, (3.10) vale. \square

3.4 Princípio da invariância

Dizer que algo é invariante significa dizer que não varia, não muda. Na matemática, invariante é uma propriedade mantida por um objeto matemático que permanece a mesma, mesmo após a transformação desse objeto. Nesse sentido, um princípio de invariância é um resultado que nos permite mudar nosso espaço de probabilidade sem alterar a distribuição.

Nesta seção, provamos um resultado que garante que redefinindo o espaço de probabilidade de $\{X_n\}_{n \geq 1}$, podemos manter sua distribuição e aproximar a sequência $\{S_n\}_{n \geq 1}$ quase

certamente de um movimento Browniano padrão, isto é, o processo de Wiener, que é um processo estocástico a tempo contínuo que descreve o que, em aplicações da física, é entendido como o movimento aleatório da posição de uma partícula gerado por incrementos aleatórios não correlacionados temporalmente com variância finita. Para conhecer mais sobre as diferentes maneiras que o princípio da invariância pode ser empregado, consulte [Philipp \(1980\)](#) e [Simons e Stout \(1978\)](#).

Algumas das propriedades de processo de Wiener é que ele tem trajetórias uniformemente contínuas quase certamente e tem incrementos gaussianos. É importante destacar também que uma característica importante do processo de Wiener é a invariância de escala, o que significa que $\alpha^{-1}W(\alpha^2t)$ é um processo de Wiener para qualquer constante α não nula. Além disso, o processo de Wiener pode ser construído como o limite escalar de um passeio aleatório, o que é conhecido como teorema de Donsker, uma extensão funcional do teorema central do limite.

Definição 6. Um **movimento Browniano padrão** ou **processo de Wiener** é um processo estocástico $\{W(t)\}_{t \geq 0}$, em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com as seguintes propriedades:

- (i) O processo começa em zero: $\mathbb{P}(W(0) = 0) = 1$.
- (ii) Os incrementos são independentes: se $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_k$, então as variáveis aleatórias $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ são independentes.
- (iii) Os incrementos $W(t+h) - W(t)$ são estacionários (não depende de t) e tem distribuição normal com média zero e variância h : $W(t+h) - W(t) \sim N(0, h)$.

O lema provado a seguir será usado para demonstrar os princípios da invariância fraco e quase certo para S_n .

Lema 7. Quando $n \geq 1$, $\sqrt{\frac{n+4}{6}} \leq a_n A_n \leq n \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Demonstração. Para $n = 1$, temos que $a_1 A_1 = 1$ e $\sqrt{\frac{5}{6}} \leq 1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Note que, pelas definições (2.5) e (2.4), para $n \geq 2$

$$a_n^2 A_n^2 = \sum_{j=1}^n \frac{a_n^2}{a_j^2} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{a_n}{a_j} \right)^2 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right)}{\prod_{i=1}^{j-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right)} \right]^2 = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j}^{n-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right)^2.$$

Sabemos que $d_i > -1$, logo

$$\prod_{i=j}^{n-1} \left(1 + \frac{d_i}{i} \right) \geq \prod_{i=j}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i} \right) = \frac{j-1}{n-1},$$

o que implica que

$$a_n^2 A_n^2 \geq 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^2 = 1 + \frac{(n-2)(2n-3)}{6(n-1)} \geq 1 + \frac{n-2}{6}.$$

Por outro lado, sabemos que $d_i < 1$, assim

$$\prod_{i=j}^{n-1} \left(1 + \frac{d_i}{i}\right) \leq \prod_{i=j}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \frac{n}{j}.$$

Então,

$$a_n^2 A_n^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{n}{j}\right)^2 \leq n^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Teorema 4 (Princípios da invariância fraco e quase certo). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^2 = \infty$ e A_n/B_n é limitado para todo $n \geq 1$, então podemos redefinir $\{X_n\}_{n \geq 1}$ em um novo espaço de probabilidade sem alterar sua distribuição e, nesse novo espaço de probabilidade, existe um movimento Browniano padrão $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ tal que

$$\left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - W(B_n^2) \right| = o(\sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}) \text{ q.c. } e \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{B_n} \left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - W(B_n^2) \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.16)$$

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema de representação de Skorokhod para martingais (ver Teorema 14 do Apêndice A). De acordo com ele, podemos encontrar um novo espaço de probabilidade onde existem um movimento Browniano padrão $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ e uma sequência de variáveis aleatórias não negativas τ_1, τ_2, \dots com as seguintes propriedades: se $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$, $M'_n = W(T_n)$, $D'_1 = M'_1$, $D'_n = M'_n = M'_n - M'_{n-1}$ para $n \geq 2$ e $\mathcal{G}_n = \sigma(M'_1, \dots, M'_n, W(t))$ para $0 \leq t \leq T_n$, então $\{M_n\}_{n \geq 1}$ e $\{M'_n\}_{n \geq 1}$ são iguais em distribuição ($\{M_n\}_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} \{M'_n\}_{n \geq 1}$), T_n é \mathcal{G}_n -mensurável e

$$\mathbb{E}(\tau_j | \mathcal{G}_{j-1}) = \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{G}_{j-1}); \quad \mathbb{E}(\tau_j^r | \mathcal{G}_{j-1}) \leq c_r \mathbb{E}(D_j^{2r} | \mathcal{G}_{j-1}) \text{ q.c.}, \quad (3.17)$$

para $r \geq 1$ e c_r uma constante positiva que depende de r .

Como $\{M_n\}_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} \{M'_n\}_{n \geq 1}$, pelo Lema 5 temos

$$\mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{G}_{j-1}) = \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o\left(\frac{1}{a_j^2}\right) \text{ q.c.} \quad (3.18)$$

Por (3.17) e (3.18)

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\tau_j | \mathcal{G}_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + o\left(\frac{1}{a_j^2}\right) = B_n^2 + o(A_n^2) = B_n^2 + o(B_n^2) \text{ q.c.} \quad (3.19)$$

Defina agora $\hat{\tau}_j = \tau_j - \mathbb{E}(\tau_j | \mathcal{G}_{j-1})$, $j = 1, \dots, n$ e note que $\hat{\tau}_j$ é uma diferença de martingais com respeito a \mathcal{G}_j que, por (3.17) e (2.9), satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\tau}_j^2 | \mathcal{G}_{j-1}) &= \mathbb{E}(\tau_j^2 | \mathcal{G}_{j-1}) - [\mathbb{E}(\tau_j | \mathcal{G}_{j-1})]^2 \leq c_2 \mathbb{E}(D_j^4 | \mathcal{G}_{j-1}) - [\mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{G}_{j-1})]^2 \\ &\leq c_2 \frac{2^4}{a_j^4} - \left(\frac{2^2}{a_j^2}\right)^2 = \frac{c}{a_j^4} \text{ q.c.}, \end{aligned}$$

para alguma constante c positiva. Usando o Lema 7 obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\frac{\hat{\tau}_j^2}{A_j^4} \mid \mathcal{G}_{j-1} \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c}{A_j^4 a_j} \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+4}{6} \right)^{-4/2} < \infty \text{ q.c..}$$

Além disso, note que A_n^2 , definida em (2.5), é não decrescente. Então o Teorema 2.18 de Hall e Heyde (1980) (ver Teorema 15 do Apêndice A) garante para $p = 2$ que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\tau}_j}{A_j^2} < \infty$ q.c..

Por hipótese temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^2 = \infty$ e sabemos que $B_n \geq A_n$, logo $A_n^2 \uparrow \infty$. Assim, pelo Lema de Kronecker (ver Lema 8 do Apêndice A) obtemos

$$\frac{\sum_{j=1}^n \frac{\hat{\tau}_j}{A_j^2} A_j^2}{A_n^2} \rightarrow 0 \text{ q.c.,}$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^n \hat{\tau}_j = o(A_n^2) \text{ q.c..} \quad (3.20)$$

Combinando (3.19) e (3.20)

$$T_n = \sum_{j=1}^n \tau_j = \sum_{j=1}^n \hat{\tau}_j + \mathbb{E}(\tau_j \mid \mathcal{G}_{j-1}) = o(A_n^2) + B_n^2 + o(B_n^2) = B_n^2 + o(B_n^2) \text{ q.c..} \quad (3.21)$$

Pelo Teorema 1.2.1 de Csörgö e Révész (1981) (ver Teorema 16 do Apêndice A) obtemos

$$M'_n = W(T_n) = W(B_n^2) + o(\sqrt{B_n^2 \log \log B_n}) \text{ q.c..}$$

Concluindo que (3.15) vale. Vamos provar agora (3.16).

Dados $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, utilizando o teorema da probabilidade total, escreva

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{|W(T_n) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon \right) &= \mathbb{P} \left(\frac{|W(T_n) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon, |T_n - B_n^2| > \delta B_n^2 \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\frac{|W(T_n) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon, |T_n - B_n^2| \leq \delta B_n^2 \right). \end{aligned}$$

Provaremos que ambos os termos da última igualdade convergem para zero. Temos de (3.21) que $|T_n - B_n^2|/B_n^2 \rightarrow 0$ q.c. quando $n \rightarrow \infty$, logo

$$\mathbb{P} \left(\frac{|W(T_n) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon, |T_n - B_n^2| > \delta B_n^2 \right) \leq \mathbb{P}(|T_n - B_n^2| > \delta B_n^2) \rightarrow 0 \text{ q.c. quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, utilizando novamente (3.21)

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{|W(T_n) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon, |T_n - B_n^2| \leq \delta B_n^2 \right) &= \mathbb{P} \left(\frac{|W(B_n^2(1 + o(1))) - W(B_n^2)|}{B_n} > \varepsilon, \right. \\ &\quad \left. \frac{|B_n^2((1 + o(1)) - 1)|}{B_n^2} \leq \delta \right). \end{aligned}$$

Reescalando o movimento Browniano, que é invariante por escala,

$$\mathbb{P}(W((1+o(1)) - W(1)) > \varepsilon, |(1+o(1)) - 1| \leq \delta) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s:|s-1|<\delta} |W(s) - W(1)| > \varepsilon\right).$$

que converge para zero quando $\delta \rightarrow 0$ uma vez que as trajetórias de um movimento Browniano são quase certamente uniformemente contínuas no conjunto compacto $[1 - \delta, 1]$, isso quer dizer que $\mathbb{P}(|W(s) - W(1)| < \varepsilon \text{ dado } |s - 1| < \delta) = 1$. Isso conclui a demonstração de (3.16). \square

A partir desse teorema é possível obter o Teorema Central do Limite e a Lei do Logaritmo Iterado como a seguir.

Corolário 1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^2 = \infty$ e A_n/B_n é limitado para todo $n \geq 1$, então

$$(i) \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

$$(ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{a_n B_n \sqrt{\log \log(B_n)}} = \sqrt{2} \text{ q.c..}$$

Demonstração. (i) Sabemos que um Movimento Browniano $W(t)$ tem distribuição $N(0, t)$, $t \geq 0$ e temos a convergência (3.16) do Teorema 4, então, aplicando o Teorema de Slutsky (i) (ver Teorema 19 do Apêndice A), obtemos

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1).$$

(ii) Pela equação (3.15) do Teorema 4 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} \left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - W(B_n^2) \right| = 0 \text{ q.c..}$$

Aplicando a Lei do Logaritmo Iterado para Movimento Browniano (ver Teorema 18 do Apêndice A) obtemos

$$0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{a_n \sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} - \frac{W(B_n^2) \sqrt{2}}{\sqrt{2B_n^2 \log \log(B_n)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{a_n \sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} - \sqrt{2} \text{ q.c..}$$

que prova o que queríamos. \square

3.5 Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite (TCL) é um dos teoremas mais importantes da teoria da probabilidade, tendo possibilidade de aplicação em diversas áreas. Diversas variações desse teorema foram apresentadas ao longo dos anos, porém a versão padrão, provada pela primeira vez pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace em 1810, afirma que a soma ou média de

uma sequência infinita de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com variância finita, quando adequadamente reescaladas, tende para uma distribuição normal.

A seguir, apresentamos uma nova versão para esse teorema, na qual, a soma das variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli dependentes que propusemos, reescaladas de forma conveniente, converge para uma variável com distribuição normal padrão.

Teorema 5 (Teorema Central do Limite). Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ e A_n/B_n é limitado para todo $n \geq 1$. Então, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Demonstração. Vamos provar as condições do Corolário 3.1 de Hall e Heyde (1980) (ver Teorema 17 do Apêndice A). Seja $D_{nj} = \frac{D_j}{B_n}$ para $1 \leq j \leq n$. Demonstramos primeiramente a condição (i), para tanto, provaremos que para todo $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E} [D_{nj}^2 \mathbb{I}(|D_{nj}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{j-1}] \rightarrow 0. \text{ q.c.}$$

Temos do Lema 7 que $\sqrt{\frac{n+4}{6}} \leq a_n A_n$, logo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j^4 A_j^4} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+4}{6}\right)^{-4/2} < \infty. \quad (3.22)$$

Sabemos que $B_n \leq A_n$ e por hipótese temos $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$. Note que A_n^2 é não decrescente. Então, pelo Lema de Kroneker (ver Lema 8 do Apêndice A),

$$\frac{1}{A_n^4} \sum_{i=1}^n A_i^4 \frac{1}{a_i^4 A_i^4} = \frac{1}{A_n^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^4} \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Por hipótese também temos que $A_n/B_n \leq c$ para algum $c > 0$, logo de (3.23)

$$\frac{1}{B_n^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^4} \leq c^4 \frac{1}{A_n^4} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^4} \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Note que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon B_n) | \mathcal{F}_{j-1}] \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \mathbb{E}(D_j^4 | \mathcal{F}_{j-1}),$$

pois, caso $|D_j| \leq \varepsilon B_n \Rightarrow \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon B_n) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon B_n) | \mathcal{F}_{j-1}] = 0 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \mathbb{E}(D_j^4 | \mathcal{F}_{j-1})$.

E caso $|D_j| > \varepsilon B_n \Rightarrow \frac{D_j^2}{\varepsilon^2 B_n^2} > 1 \Rightarrow \frac{D_j^4}{\varepsilon^2 B_n^2} > D_j^2 \Rightarrow \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon B_n) | \mathcal{F}_{j-1}] < \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \mathbb{E}(D_j^4 | \mathcal{F}_{j-1})$.

Daí, utilizando (3.24) e lembrando que de (2.9) $|D_j| \leq \frac{2}{a_j}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [D_{nj}^2 \mathbb{I}(|D_{nj}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{j-1}] &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon B_n) | \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^4} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^4 | \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^4} \sum_{j=1}^n \frac{2^4}{a_j^4} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Provemos agora a condição (ii) do mesmo teorema, para tal, demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_{nj}^2 | \mathcal{F}_{n(j-1)}) = 1$ q.c.. Pelo Lema 5, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} - \frac{\varepsilon}{a_j^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}} < \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})}{B_n^2} < \frac{\sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} + \frac{\varepsilon}{a_j^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}},$$

assim, pela hipótese de que A_n^2/B_n^2 é limitado temos que, para algum $c > 0$,

$$1 - \varepsilon c < \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})}{B_n^2} < 1 + \varepsilon c,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_{nj}^2 | \mathcal{F}_{n(j-1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})}{B_n^2} = 1 \text{ q.c..}$$

Portanto, lembrando que $\sum_{j=1}^n D_j = M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n}$, pelo Corolário 3.1 de Hall e Heyde (1980) (ver Teorema 17 do Apêndice A) concluímos

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} = \frac{\sum_{j=1}^n D_j}{B_n} = \sum_{j=1}^n D_{nj} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

□

APLICAÇÃO NO PASSEIO ALEATÓRIO MINIMAL

Como mencionado no Exemplo 2 do Capítulo 2, o passeio aleatório minimal, introduzido por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#), é um modelo físico com características interessantes de difusão. Neste capítulo descrevemos o passeio aleatório minimal de forma mais detalhada e aplicamos os resultados obtidos no capítulo anterior.

O passeio aleatório minimal definido por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#) consiste em um passeio aleatório $\{S_n\}_{n \geq 0}$ iniciado na origem, com incrementos dependentes e memória ilimitada de forma que a cada passo o indivíduo (ou a partícula) permanece onde está ou se move para o vizinho mais próximo à sua direita. Mais precisamente, o passeio se inicia em $S_0 = 0$ e a cada passo de tempo discreto $n \geq 1$,

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1},$$

onde $X_{n+1} \in \{0, 1\}$ é uma variável aleatória de Bernoulli. O primeiro passo é dado para a direita com probabilidade $s \in [0, 1]$, isto é,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = s = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

A memória consiste no conjunto dos passos dados anteriormente e a dependência é dada quando no tempo $n + 1$, com $n \geq 1$, um dos tempos anteriores n' é sorteado uniformemente e, se o passo do tempo sorteado (passo lembrado) for para a direita ($X_{n'} = 1$),

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \in [0, 1] \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

e se permaneceu parado ($X_{n'} = 0$),

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } q \in [0, 1] \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - q \end{cases}.$$

Da definição dada, temos que $S_n = \sum_{i=1}^n X_n$ representa a quantidade de passos dados para a direita em n realizações e, conseqüentemente, $n - S_n$ é o número de vezes que o indivíduo permaneceu onde estava. Utilizando o teorema da probabilidade total para $n \geq 1$ e definindo o parâmetro que pode assumir valores negativos, $\alpha := p - q \in [-1, 1]$, temos

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) = \frac{S_n}{n}p + \frac{(n - S_n)}{n}q = q + \alpha \frac{S_n}{n}. \quad (4.1)$$

Note que quando $\alpha = 1$, isto é, $p = 1$ e $q = 0$, o processo depende somente de X_1 , pois os próximos passos serão iguais a esse valor, já que nesse caso $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 0$ e $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1$. E quando $0 \leq p < 1$ e $q = 0$, o mesmo acontece quando $X_1 = 0$.

O fato interessante sobre a difusão do passeio $\{S_n\}_{n \geq 0}$ se dá justamente ao considerarmos o caso em que $q = 0$, no qual S_n exibe regimes de subdifusão se $p < 1/2$, difusão se $p = 1/2$ e superdifusão se $p > 1/2$.

No artigo, [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#), é mostrado que

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{qn}{1 - \alpha} + \left(s - \frac{q}{1 - \alpha}\right) \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(n)} \sim \frac{qn}{1 - \alpha} + \left(s - \frac{q}{1 - \alpha}\right) \frac{n^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.2)$$

e

$$\mathbb{E}(S_n^2) \sim \frac{q^2 n^2}{(\alpha - 1)^2} + \frac{q(1 - q - \alpha)n}{(\alpha - 1)^2(1 - 2\alpha)} + \frac{2q(s - s\alpha - q)}{(1 - \alpha)^2\Gamma(1 + \alpha)} n^{1+\alpha} + B(\alpha, q, s)n^{2\alpha}, \quad (4.3)$$

onde

$$B(\alpha, q, s) = \frac{1}{(\alpha - 1)^3(2\alpha - 1)^2} \left[\frac{4^\alpha \alpha^2 (s\alpha^2 + \alpha q - 3q)\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma(1 + \alpha)}{\sqrt{\pi}(\alpha - 1)(2\alpha - 1)\Gamma(2\alpha - 2)\Gamma(1 + 2\alpha)} \right. \\ + s\alpha(7 - 19\alpha + 25\alpha^2 - 16\alpha^3) + 2q^2(8\alpha^3 - 16\alpha^2 + 5\alpha - 1) \\ + q\alpha(13\alpha - 6) + 2qs(1 - 6\alpha + 26\alpha^2 - 24\alpha^3 + 8\alpha^4) \\ + \frac{1}{\Gamma(1 + 2\alpha)} (q^2(8\alpha - 2 + 6\alpha^2 - 4\alpha^3) + q(5\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^3 + 2) \\ \left. + 2qs(1 - 6\alpha) + s(4\alpha^5 - 16\alpha^4 + 25\alpha^3 - 19\alpha^2 + 7\alpha - 2)) \right].$$

Vamos agora aplicar os resultados obtidos no Capítulo 3 no passeio aleatório minimal. Nesse caso, temos que $\theta_0 = s$, $\theta_n = q$, $d_n = \alpha$, para $n \geq 1$ e

$$a_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{j}\right) = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(1 + \alpha)} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Corolário 2 (Lei Forte dos Grandes Números 1). Se $\alpha \neq 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{q}{1 - \alpha}$ q.c..

Demonstração. Pela equação (4.2) temos que

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{q}{1 - \alpha} - \left(s - \frac{q}{1 - \alpha}\right) \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(n)} \\ \sim \frac{S_n}{n} - \frac{q}{1 - \alpha} - \left(s - \frac{q}{1 - \alpha}\right) \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Como $\alpha < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} = 0$.

Note que se $\alpha \neq 1$, a condição da Lei Forte dos Grandes Números (Teorema 1) é satisfeita, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-d_j}{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{j+1} = \infty.$$

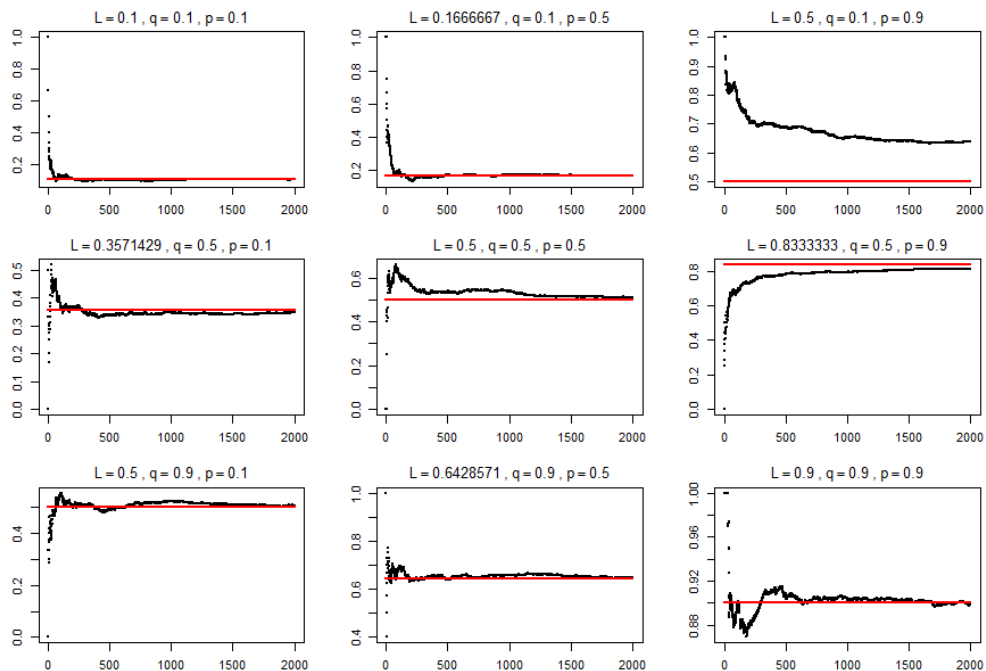
Então, aplicando o Teorema 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - \frac{q}{1-\alpha} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{q}{1-\alpha} \text{ q.c..}$$

□

A fim de ilustrar melhor o resultado precedente, os seguintes gráficos foram gerados a partir da simulação de uma realização do passeio aleatório minimal variando os valores de p e q e considerando $s = 1/2$. A linha vermelha representa o valor $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{q}{1-\alpha}$.

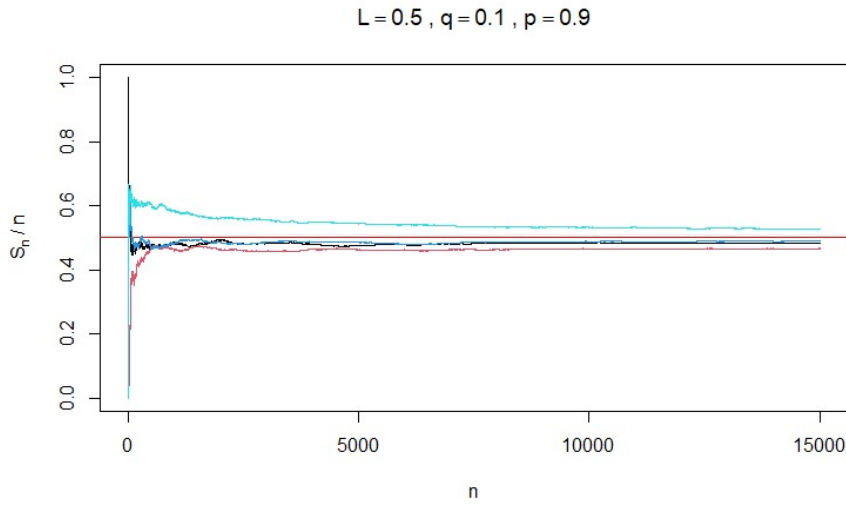
Figura 2 – Simulação de $\frac{S_n}{n}$ com $n = 1, \dots, 2000$, $p = \{0.1, 0.5, 0.9\}$, $q = \{0.1, 0.5, 0.9\}$ e $L = \frac{q}{1-\alpha}$.



Fonte: A autora

Note que quando o valor de α está um pouco mais próximo de 1, isto é, quando $q = 0.1$ e $p = 0.9$, a dependência no passado é muito grande e visualmente no gráfico superior direito, nota-se que $\frac{S_n}{n}$ demora mais para convergir para L . Na figura a seguir é possível visualizar a convergência nesse caso para quatro realizações simuladas.

Figura 3 – Simulação de 4 realizações de $\frac{S_n}{n}$ com $n = 1, \dots, 15000$, $p = 0.9$, $q = 0.1$ e $L = \frac{q}{1 - \alpha}$.



Fonte: A autora

A simulação foi feita utilizando o *software* R seguindo o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 – Simulação do passeio aleatório minimal

```

1:  $n \leftarrow 1000$ 
2:  $s \leftarrow 0.5$ 
3:  $p_s \leftarrow [0.1, 0.5, 0.9]$ 
4:  $q_s \leftarrow [0.1, 0.5, 0.9]$ 
5: para  $p \in p_s$  faça
6:   para  $q \in q_s$  faça
7:      $X[1] \leftarrow \text{Bernoulli}(s)$ 
8:      $S[1] \leftarrow X[1]$ 
9:     para  $i \in [1, \dots, n]$  faça
10:       $Y[i] \leftarrow$  elemento sorteado de  $X$ 
11:      se  $Y[i] = 1$  então
12:         $X[i] \leftarrow \text{Bernoulli}(p)$ 
13:      senão
14:         $X[i] \leftarrow \text{Bernoulli}(q)$ 
15:      fim se
16:       $S[i] \leftarrow S[i-1] + X[i]$ 
17:       $Z[i] \leftarrow S[i]/i$ 
18:    fim para
19:  fim para
20: fim para

```

$\triangleright \mathbb{P}(X_1 = 1)$
 $\triangleright \mathbb{P}(X_n = 1 | X_{n'} = 1)$
 $\triangleright \mathbb{P}(X_n = 1 | X_{n'} = 0)$
 $\triangleright X_1$
 $\triangleright S_1$
 $\triangleright X_{i'}$
 $\triangleright X_i$
 $\triangleright S_i$

Corolário 3 (Teorema da Convergência Quase Certa 2). Se $q = 0$ e $1/2 < p < 1$, então existe uma variável aleatória M não degenerada e de média zero tal que

$$\frac{S_n}{n^p \Gamma(1+p)^{-1}} - s \rightarrow M \text{ q.c. e em } \mathcal{L}^m.$$

Demonstração. Considerando $q = 0$ e $1/2 < p < 1$, temos $\alpha = p$ e

$$\mathbb{E}(S_n) = s \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(1+p)\Gamma(n)} = sa_n \sim s \frac{n^p}{\Gamma(1+p)}.$$

O Lema 1 de Coletti, Gava e Lima (2019) nos dá que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < \infty$ se, e somente se, $\alpha > 1/2$. Assim, aplicando o Teorema 2, para $m \geq 1$,

$$M_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} = \frac{S_n}{a_n} - s \rightarrow M \text{ q.c. e em } \mathcal{L}^m, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

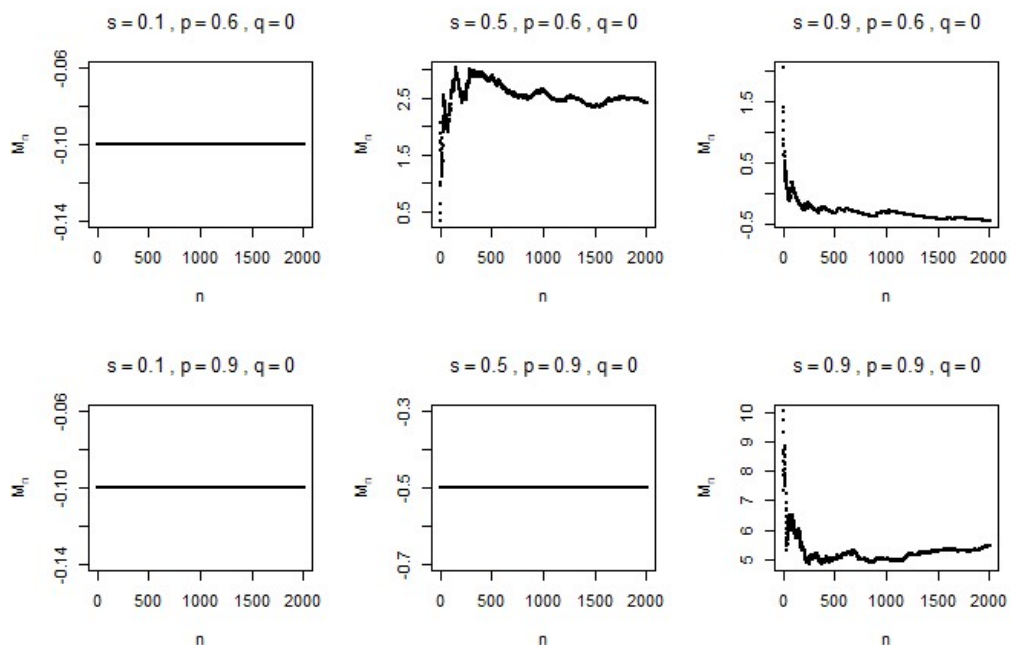
Logo, como $a_n \sim \frac{n^p}{\Gamma(1+p)}$,

$$\frac{S_n}{n^p \Gamma(1+p)^{-1}} - s \rightarrow M \text{ q.c. e em } \mathcal{L}^m.$$

□

Novamente a título de ilustração, os seguintes gráficos foram gerados a partir de uma simulação de uma realização do passeio aleatório minimal variando os valores de s e p e considerando $q = 0$.

Figura 4 – Simulação de M_n com $n = 1, \dots, 2000$, $s = \{0.1, 0.5, 0.9\}$, $p = \{0.1, 0.5, 0.9\}$ e $q = 0$.



Fonte: A autora

Note novamente, agora de maneira visual, que quando $q = 0$ e o valor de $s = \mathbb{P}(X_1 = 1)$ é bem pequeno, como pode ser visto nos dois gráficos da esquerda, o processo perde sua

aleatoriedade, pois nesses casos, $X_1 = 0$. Aumentando um pouco a probabilidade de X_1 ser igual a 1, nos gráficos do meio notamos que as duas possibilidades acontecerem, $X_1 = 1$ e $X_1 = 0$, e M_n convergindo para algo que não pudemos definir precisamente ou o processo sendo constante, respectivamente. E por fim, quando o primeiro passo tem grande probabilidade de ser 1, como visto nas realizações da direita, vemos o comportamento aleatório de M_n convergindo para uma variável aleatória.

No artigo de [Coletti, Gava e Lima \(2019\)](#), os autores provam em seu Teorema 4 que a variável aleatória limite M do teorema da convergência quase certa é não normal e, a fim de apresentar até o quarto momento de M de forma explícita, calcularam até o quarto momento de S_n e obtiveram os seguintes resultados

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{2s\Gamma(n+2p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2p)} - \frac{s\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+p)} \\ &\sim \frac{2sn^{2p}}{\Gamma(1+2p)} \\ \mathbb{E}(S_n^3) &= \frac{6s\Gamma(n+3p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+3p)} - \frac{6s\Gamma(n+2p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2p)} + \frac{s\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+p)} \\ &\sim \frac{6sn^{3p}}{\Gamma(1+3p)} \\ \mathbb{E}(S_n^4) &= \frac{24s\Gamma(n+4p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+4p)} - \frac{36s\Gamma(n+3p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+3p)} + \frac{14s\Gamma(n+2p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+2p)} - \frac{s\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(1+p)} \\ &\sim \frac{24sn^{4p}}{\Gamma(1+4p)}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= 0 \\ \mathbb{E}(M^2) &= \frac{2s\Gamma(1+p)^2}{\Gamma(1+2p)} - s^2 \\ \mathbb{E}(M^3) &= \frac{6s\Gamma(1+p)^3}{\Gamma(1+3p)} - \frac{6s^2\Gamma(1+p)^2}{\Gamma(1+2p)} + 2s^3 \\ \mathbb{E}(M^4) &= \frac{24s\Gamma(1+p)^4}{\Gamma(1+4p)} - \frac{24s^2\Gamma(1+p)^3}{\Gamma(1+3p)} + \frac{12s^3\Gamma(1+p)^2}{\Gamma(1+2p)} - 3s^4.\end{aligned}$$

Mais recentemente [Miyazaki e Takei \(2020\)](#) notaram que essas expressões dos momentos de S_n poderiam ser representadas utilizando

$$a_n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+kp)}{\Gamma(n)\Gamma(1+kp)},$$

de forma que $a_n^{(1)} = a_n$ e, para $s = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= a_n^{(1)} \\ \mathbb{E}(S_n^2) &= 2a_n^{(2)} - a_n^{(1)} \\ \mathbb{E}(S_n^3) &= 6a_n^{(3)} - 6a_n^{(2)} + a_n^{(1)} \\ \mathbb{E}(S_n^4) &= 24a_n^{(4)} - 36a_n^{(3)} + 14a_n^{(2)} - a_n^{(1)}.\end{aligned}$$

Depois, definiram $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$, para $k = 2, 3, \dots$ e o k -ésimo momento fatorial de X como $\mathbb{E}[(X)_k]$. Daí, usando as expressões dos momentos de S_n

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_n)_2] &= \mathbb{E}[S_n(S_n - 1)] = \mathbb{E}[(S_n)^2] - \mathbb{E}[S_n] = 2(a_n^{(2)} - a_n^{(1)}) \\ \mathbb{E}[(S_n)_3] &= \mathbb{E}[(S_n)^3] - 3\mathbb{E}[(S_n)^2] + 2\mathbb{E}[S_n] = 6(a_n^{(3)} - a_n^{(2)} + a_n^{(1)}) \\ \mathbb{E}[(S_n)_4] &= \mathbb{E}[(S_n)^4] - 6\mathbb{E}[(S_n)^3] + 11\mathbb{E}[(S_n)^2] - 6\mathbb{E}[S_n] = 24(a_n^{(4)} - 3a_n^{(3)} + 3a_n^{(2)} - a_n^{(1)})\end{aligned}$$

E finalmente, com os resultados enunciados a seguir, encontraram uma solução geral para $\mathbb{E}[(S_n)_k]$ e, por consequência, a distribuição da variável limite M , quando $s = 1$.

Teorema 6. Seja $p \in (0, 1)$, $q = 0$ e $s = 1$. Para todos $k = 1, 2, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$,

$$\mathbb{E}[(S_n)_k] = k! \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1} a_n^{(j)}.$$

Como $a_n^{(k)} \sim \frac{n^{kp}}{\Gamma(1+kp)}$ quando $n \rightarrow \infty$, puderam concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[(S_n)_k]}{a_n^{(k)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[(S_n)_k]}{a_n^{(k)}} = k! \text{ para todo } k = 1, 2, \dots$$

E daí chegaram ao seguinte resultado:

Corolário 4. Para todo $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_n}{n^p} \right)^k \right] = \frac{k!}{\Gamma(1+kp)}.$$

Assim o martingal $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é \mathcal{L}^k -limitado e

$$\bar{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^p} = \frac{M}{\Gamma(1+p)} \text{ q.c.}$$

tem uma distribuição de *Mittag-Leffler* (ver Apêndice B) com parâmetro p . Em particular, $\mathbb{P}(\bar{M} > 0) = 1$.

Além disso, [Miyazaki e Takei \(2020\)](#) fizeram interessantes aplicações à percolação em árvores recursivas aleatórias.

Corolário 5 (Flutuação Gaussiana 3). Se $q > 0, 1/2 < \alpha < 1$, então

$$\frac{M - M_n}{(n+1)^{1/2-\alpha}} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{(c\Gamma(1+\alpha))^2}\right) \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e} \quad (4.5)$$

onde c é uma constante e M é uma variável aleatória não normal.

Demonstração. Lembrando que das definições (2.5) e (2.6), para $n \geq 1$,

$$\frac{A_n^2}{B_n^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j(1-p_j)}$$

e

$$\frac{\bar{A}_n^2}{\bar{B}_n^2} = \frac{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{a_j^2}}{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2}} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{p_j(1-p_j)}.$$

De (4.1) e (4.2),

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) = q + \alpha \frac{\mathbb{E}(S_{n-1})}{n-1} \\ &\sim q + \alpha \frac{\frac{q(n-1)}{1-\alpha} + \left(s - \frac{q}{1-\alpha}\right) \frac{(n-1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}{n-1} \\ &= q + \alpha \left[\frac{q}{1-\alpha} + \left(s - \frac{q}{1-\alpha}\right) \frac{(n-1)^{\alpha-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \right], \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, sabendo que $\alpha < 1$,

$$p_n \rightarrow q + \alpha \left(\frac{q}{1-\alpha} \right) = \frac{q}{1-\alpha}. \quad (4.6)$$

Pela hipótese $q > 0$, logo A_n^2/B_n^2 converge, então \bar{A}_n^2/\bar{B}_n^2 é limitado. Além disso, pelo Lema 1 de [Coletti, Gava e Lima \(2019\)](#) temos que quando $\alpha > 1/2$, $A_n^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2}$ converge. Satisfazendo assim as hipóteses do Teorema 3.

Por (3.12), (4.4) e (4.6) temos que

$$\begin{aligned}
s_n^2 &\sim \bar{B}_n^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{p_j(1-p_j)}{a_j^2} \\
&\sim \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\frac{q}{1-\alpha} \left(\frac{1-\frac{q}{1-\alpha}}{j^{2\alpha}} \right)}{(\Gamma(1+\alpha))^2} = \frac{q}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right) (\Gamma(1+\alpha))^2 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^{2\alpha}} \\
&\sim \frac{q}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right) (\Gamma(1+\alpha))^2 \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx \\
&= \frac{q}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right) (\Gamma(1+\alpha))^2 \frac{n^{1-2\alpha}}{2\alpha-1} \\
&= \frac{q}{(1-\alpha)(2\alpha-1)} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right) \frac{n(\Gamma(1+\alpha))^2}{n^{2\alpha}} \\
&\sim \frac{q}{(1-\alpha)(2\alpha-1)} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right) \frac{n}{a_n^2}
\end{aligned}$$

Definindo $c^2 = \frac{q}{(1-\alpha)(2\alpha-1)} \left(\frac{1-\alpha-q}{1-\alpha} \right)$ e aplicando na equação (3.9) do Teorema 3,

$$\frac{M - M_n}{s_{n+1}} \sim \frac{M - M_n}{\frac{c\Gamma(1+\alpha)}{(n+1)^{\alpha-1/2}}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$\frac{M - M_n}{(n+1)^{1/2-\alpha}} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{(c\Gamma(1+\alpha))^2}\right) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

□

Observação 3. Apesar de sabermos que M é o limite do martingal M_n quando $n \rightarrow \infty$, sua distribuição não é conhecida, uma vez que não podemos afirmar que tem uma distribuição de *Mittag-Leffler* quando $q \neq 0$.

Para aplicar o princípio da invariância fraco e quase certo (Teorema 4), o teorema central do limite e a lei do logaritmo iterado (Corolário 1 (ii)), consideramos $\alpha = 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$, logo

$$\mathbb{E}(S_n) = 2qn + (s - 2q) a_n. \tag{4.7}$$

Coletti, Gava e Lima (2019) mostraram que, para $\alpha = 1/2$,

$$B_n^2 \sim 4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n \text{ e} \tag{4.8}$$

$$a_n B_n \sim \sqrt{4q(1-p)n \log n}. \tag{4.9}$$

Corolário 6 (Princípio da invariância fraco e quase certo 4). Se $\alpha = 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$, então

$$\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n}} - W(\log n) = o(\sqrt{\log n \log \log \log n}) \text{ q.c. e} \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \left(\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n}} - W(\log n) \right) \xrightarrow{P} 0. \tag{4.11}$$

Demonstração. Pela equação (3.15) do Teorema 4,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} \left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - W(B_n^2) \right| = 0 \text{ q.c..}$$

Logo, por (4.7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n - 2qn}{a_n B_n \sqrt{\log \log(B_n)}} - \frac{s - 2q}{\sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} - \frac{W(B_n^2)}{\sqrt{B_n^2 \log \log(B_n)}} \right| = 0 \text{ q.c..}$$

Substituindo as igualdades assintóticas (4.8) e (4.9) e notando que $\log \log(B_n) \sim \log \log \log n$ e também que quando $n \rightarrow \infty$ o termo central do limite acima converge para 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n} \sqrt{\log n \log \log \log n}} - \frac{W(4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n)}{\sqrt{4q(1-p)\Gamma(3/2)^2} \sqrt{\log n \log \log \log n}} \right| = 0 \text{ q.c..}$$

Sabemos que o movimento Browniano é invariante por escala de forma que podemos reescalar $\frac{W(4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n)}{\sqrt{4q(1-p)\Gamma(3/2)^2}}$ como $W(\log n)$, obtendo

$$\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n}} - W(\log n) = o(\sqrt{\log n \log \log \log n}) \text{ q.c..}$$

Considerando agora a equação (3.16), temos

$$\frac{1}{B_n} \left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n} - W(B_n^2) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

De maneira análoga à feita anteriormente,

$$\left| \frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n \log n}} - \frac{s - 2q}{\sqrt{4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n}} - \frac{W(4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n)}{\sqrt{4q(1-p)\Gamma(3/2)^2} \sqrt{\log n}} \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Reescalando o movimento Browniano concluímos que

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n}} - W(\log n) \xrightarrow{P} 0.$$

□

Corolário 7 (Teorema Central do Limite 5). Se $\alpha = 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$, então

$$\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0, 4q(1-p)).$$

Demonstração. Pelo Teorema 5 temos

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Por (4.7), (4.8) e (4.9),

$$\begin{aligned} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{a_n B_n} &= \frac{S_n - 2qn}{a_n B_n} - \frac{s - 2q}{B_n} \\ &\sim \frac{S_n - 2qn}{\sqrt{4q(1-p)n \log n}} - \frac{s - 2q}{\sqrt{4q(1-p)\Gamma(3/2)^2 \log n}}. \end{aligned}$$

Note que quando $n \rightarrow \infty$ o segundo termo converge para zero, logo pelo Teorema 5

$$\frac{S_n - 2qn}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} N(0, 4q(1-p)).$$

□

Corolário 8 (Lei do Logaritmo Iterado 1(ii)). Se $\alpha = 1/2$, $p < 1$ e $q > 0$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - 2qn|}{\sqrt{2n \log n \log \log \log n}} = \sqrt{4q(1-p)} \text{ q.c..}$$

Demonstração. Pelo Corolário 1 (ii) temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{a_n B_n \sqrt{\log \log(B_n)}} = \sqrt{2} \text{ q.c..}$$

Por (4.7) e utilizando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \frac{|S_n - 2qn - (s - 2q)a_n|}{a_n B_n \sqrt{\log \log B_n}} &\geq \frac{|S_n - 2qn|}{a_n B_n \sqrt{\log \log B_n}} - \frac{|s - 2q|}{B_n \sqrt{\log \log B_n}} \\ &\sim \frac{|S_n - 2qn|}{\sqrt{4q(1-p)n \log n \log \log B_n}} - o(1). \end{aligned}$$

Notando novamente que $\log \log(B_n) \sim \log \log \log n$, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n - 2qn|}{\sqrt{2n \log n \log \log \log n}} = \sqrt{4q(1-p)} \text{ q.c...}$$

□

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com tudo que foi exposto, temos condições de concluir que podemos trabalhar com parâmetros negativos e além disso, vimos que é relevante supô-lo, dado que existem aplicações físicas para aplicarmos o estudo considerando esse fato.

Apresentando o modelo da forma enunciada, fomos capazes de provar algumas das principais leis assintóticas da estatística, a lei forte dos grandes números, com uma condição adicional; definimos o martingal $\{M_n\}_{n \geq 1}$ e demonstramos que ele converge quase certamente e em \mathcal{L}^m para uma variável aleatória não degenerada de média zero; provamos que uma flutuação da sequência de somas $\{S_n\}_{n \geq 1}$ é Gaussiana, isto é, essa flutuação converge em distribuição para a normal padrão; estabelecemos um princípio da invariância fraco e quase certo e ainda apresentamos a lei do logaritmo iterado e o teorema central do limite demonstrado seguindo duas estratégias distintas.

Além de exibir todos esses resultados, ainda as aplicamos no modelo físico, o passeio aleatório minimal introduzido por [Harbola, Kumar e Lindenberg \(2014\)](#), o qual considera o parâmetro podendo assumir valores negativos.

Esse tema ainda pode ser explorado considerando o que foi feito por [Miyazaki e Takei \(2020\)](#) para o passeio aleatório minimal e, considerando o modelo que propusemos neste trabalho, debater sobre sua conexão com percolação em árvores aleatórias recursivas de maneira mais geral.

REFERÊNCIAS

BERNOULLI, J. **Ars conjectandi: opus posthumum: accedit Tractatus de seriebus infinitis; et Epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis**. [S.l.]: Impensis Thurnisiorum, 1713. Citado na página 21.

BILLINGSLEY, P. **Probability and measure**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. xiv+593 p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics). A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-00710-2. Citado nas páginas 63 e 64.

COLETTI, C. F.; GAVA, R. J.; LIMA, L. R. de. Limit theorems for a minimal random walk model. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, IOP Publishing, v. 2019, n. 8, p. 083206, 2019. Citado nas páginas 51, 52, 54 e 55.

CSÖRGO, M.; RÉVÉSZ, P. **Strong approximations in probability and statistics**. New York: Academic Press, 1981. Citado nas páginas 43 e 65.

DREZNER, Z.; FARNUM, N. A generalized binomial distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 22, n. 11, p. 3051–3063, 1993. Citado nas páginas 21 e 22.

DURRETT, R. **Probability: theory and examples**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. v. 49. Citado nas páginas 63 e 64.

GRIMMETT, G.; GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. *et al.* **Probability and random processes**. [S.l.]: Oxford University Press, 2001. Citado na página 66.

HALL, P.; HEYDE, C. C. **Martingale limit theory and its application**. New York: Academic Press, 1980. Citado nas páginas 32, 43, 63, 65 e 66.

HARBOLA, U.; KUMAR, N.; LINDENBERG, K. Memory-induced anomalous dynamics in a minimal random walk model. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 90, p. 022136, Aug 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022136>>. Citado nas páginas 23, 28, 47, 48 e 59.

HEYDE, C. On central limit and iterated logarithm supplements to the martingale convergence theorem. **Journal of Applied Probability**, Cambridge University Press, v. 14, n. 4, p. 758–775, 1977. Citado nas páginas 39, 40 e 64.

_____. Asymptotics and criticality for a correlated Bernoulli process. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 46, n. 1, p. 53–57, 2004. Citado nas páginas 21 e 22.

JAMES, B.; JAMES, K.; QI, Y. Limit theorems for correlated Bernoulli random variables. **Statistics and Probability Letters**, v. 78, n. 15, p. 2339 – 2345, 2008. ISSN 0167-7152. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715208001314>>. Citado na página 22.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 66.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. **Brownian motion and stochastic calculus**. 2. ed. New York: Springer-Verlang, 1991. v. 113. Citado na página 66.

MITTAG-LEFFLER, G. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. **Comptes Rendus Acad**, Springer, v. 137, p. 554–558, 1903. Citado na página 67.

_____. Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene. **Acta mathematica**, Springer, v. 29, n. 1, p. 101–181, 1905. Citado na página 67.

MIYAZAKI, T.; TAKEI, M. Limit theorems for the 'laziest' minimal random walk model of elephant type. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 181, n. 2, p. 587–602, 2020. Citado nas páginas 52, 53 e 59.

PHILIPP, W. Weak and L^p -invariance principles for sums of B-valued random variables. **The Annals of Probability**, JSTOR, p. 68–82, 1980. Citado na página 41.

PILLAI, R.; JAYAKUMAR, K. Discrete Mittag-Leffler distributions. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 271–274, 1995. Citado na página 68.

PILLAI, R. N. On Mittag-Leffler functions and related distributions. **Annals of the Institute of statistical Mathematics**, Springer, v. 42, n. 1, p. 157–161, 1990. Citado na página 67.

SCHNEIDER, I. Jakob Bernoulli, Ars Conjectandi (1713). In: **Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940**. [S.l.]: Elsevier, 2005. p. 88–104. Citado na página 21.

SIMONS, G.; STOUT, W. A weak invariance principle with applications to domains of attraction. **The Annals of Probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 294–315, 1978. Citado na página 41.

WU, L.; QI, Y.; YANG, J. Asymptotics for dependent Bernoulli random variables. **Statistics and Probability Letters**, Elsevier, v. 82, n. 3, p. 455–463, 2012. Citado na página 22.

ZHANG, Y.; ZHANG, L.-X. On the almost sure invariance principle for dependent Bernoulli random variables. **Statistics & Probability Letters**, Elsevier, v. 107, p. 264–271, 2015. Citado na página 22.

RESULTADOS UTILIZADOS

Teorema 7. (Hall e Heyde (1980, p. 35), Teorema 2.17) Sejam $\{S_n = \sum_{j=1}^n X_j\}_{n \geq 1}$ um martingal com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ e $1 \leq p \leq 2$. Se $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_j|^p | \mathcal{F}_{j-1}) < \infty$ q.c., então S_n converge quase certamente.

Lema 8. (Hall e Heyde (1980, p. 31), Lema de Kronecker) Seja $\{x_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge e seja $\{y_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência monótona de constantes positivas com $y_n \uparrow \infty$. Então $\frac{1}{y_n} \sum_{j=1}^n y_j x_j \rightarrow 0$.

Lema 9. (Durrett (2019, p. 30), Lema de Fatou) Se a variável aleatória $X_n \geq 0$, então

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Teorema 8. (Hall e Heyde (1980, p. 23), Desigualdade de Burkholder) Se $\{M_n = \sum_{j=1}^n D_j\}_{n \geq 1}$ é um martingal com respeito a $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ e $1 < m < \infty$, então existem constantes c_1 e c_2 que dependem somente de m , tais que

$$c_1 \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n D_j^2 \right|^{m/2} \right) \leq \mathbb{E}(|M_n|^m) \leq c_2 \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n D_j^2 \right|^{m/2} \right);$$

$$c_1 = \left(18m^{1/2}l\right)^{-m} \text{ e } c_2 = \left(18ml^{1/2}\right)^m, \text{ onde } m^{-1} + l^{-1} = 1.$$

Teorema 9. (Durrett (2019, p. 237), Teorema de convergência em \mathcal{L}^m para martingais) Se $\{M_n\}_{n \geq 1}$ é um martingal com $\sup \mathbb{E}(|M_n|^m) < \infty$, onde $m > 1$, então $M_n \rightarrow M$ quase certamente e em \mathcal{L}^m .

Teorema 10. (Billingsley (1995, p. 80), Desigualdade de Hölder) Sejam X e Y variáveis aleatórias quaisquer e supondo que $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, $q > 1$. Então

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq [\mathbb{E}(|X|^p)]^{1/p} [\mathbb{E}(|Y|^q)]^{1/q}.$$

Teorema 11. (Billingsley (1995, p. 81), Desigualdade de Lyapounov) Seja X uma variável aleatória qualquer e supondo que $0 < \alpha \leq \beta$. Considerando na desigualdade de Hölder (Teorema 10) que $p = \beta/\alpha$, $q = \beta/(\beta - \alpha)$ e $Y(\omega) = 1$ e substituindo X por $|X|^\alpha$. Então

$$[\mathbb{E}(|X|^\alpha)]^{1/\alpha} \leq [\mathbb{E}(|X|^\beta)]^{1/\beta}.$$

Teorema 12. (Durrett (2019, p.30), Teorema da Convergência Dominada) Se X, Y são variáveis aleatórias e $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow X$ quase certamente, $|X_n| \leq Y$ para todo $n \geq 1$, e $\mathbb{E}(Y) < \infty$, então $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

Teorema 13. (Heyde (1977, p. 325), Teorema 1 (b) e Corolário 1) Seja $\{M_n\}_{n \geq 1}$ um martingal de média 0 e com quadrado integrável. Escreva $M := \sum_{j=1}^{\infty} D_j$, $s_n^2 := \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2)$ e $t_n^2 := \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})$. Suponha que $s_n \rightarrow 0$ e

- (i) $\frac{t_n^2}{s_n^2} \xrightarrow{p} \eta^2$, onde η^2 é quase certamente alguma variável aleatória finita e diferente de zero.
- (ii) $\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{E}[D_j^2 \mathbb{I}(|D_j| > \varepsilon s_n)] \rightarrow 0$, $\forall \varepsilon > 0$, onde $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora.

Então

$$\frac{M - M_n}{s_{n+1}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, se a convergência de i) for quase certa e, além disso tivermos

- (iii) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j} \mathbb{E}(|D_j|; |D_j| > \varepsilon s_j) < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.
- (iv) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s_j^4} \mathbb{E}(D_j^4; |D_j| \leq \delta s_j) < \infty$, para algum $\delta > 0$.

Então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|M - M_n|}{s_{n+1} \phi(s_{n+1}^{-1})} = 1 \text{ q.c.},$$

onde $\phi(x) = \sqrt{2 \log \log(x \vee 3)}$.

Lema 10. (Heyde (1977, p. 327), Lema 1) Sejam $\{x_n\}_{n \geq 1}$ e $\{y_n\}_{n \geq 1}$ sequências de números reais $x_n \geq 0$, para todo n .

- (i) Se $\sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty$ e $\left(\frac{x_n}{\sum_{j=n}^{\infty} x_j} \right) \rightarrow l$, algum $0 \leq l < 1$, com $n \rightarrow \infty$, então

$$\left(\sum_{j=k}^{\infty} x_j \right) \sum_{i=1}^k \left[x_i \left(\sum_{j=i}^{\infty} x_j \right)^{-2} \right] \rightarrow 1 \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

- (ii) Se $x_n \uparrow \infty$ e a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ converge, então $x_k \sum_{j=k}^{\infty} y_j \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$.

Teorema 14. (Hall e Heyde (1980, p. 269), Teorema de representação de Skorokhod para martingais) Seja $\{M_n = \sum_{j=1}^n D_j\}_{n \geq 1}$ um martingal de média zero e quadrado integrável. Então existe um espaço de probabilidade com um movimento Browniano padrão W e uma sequência de variáveis não negativas τ_1, τ_2, \dots com as seguintes propriedades: se $T_n = \sum_{j=1}^n \tau_j$, $M'_n = W(T_n)$, $D'_1 = M'_1$, $D'_n = M'_n - M'_{n-1}$ para $n \geq 2$ e $\mathcal{G}_n = \sigma(M'_1, \dots, M'_n, W(t))$ para $0 \leq t \leq T_n$, então

$$(i) \{M_n\}_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} \{M'_n\}_{n \geq 1},$$

$$(ii) T_n \text{ é } \mathcal{G}_n\text{-mensurável},$$

(iii) para cada número real $r \geq 1$

$$\mathbb{E}(\tau_j^r | \mathcal{G}_{j-1}) \leq c_r \mathbb{E}(|D'_j|^{2r} | \mathcal{G}_{j-1}) \text{ q.c.},$$

$$\text{onde } c_r = 2(8/\pi^2)^{r-1} \Gamma(r+1) \text{ e}$$

$$(iv) \mathbb{E}(\tau_j | \mathcal{G}_{j-1}) = \mathbb{E}(D_j^2 | \mathcal{G}_{j-1}) \text{ q.c..}$$

(Onde $\stackrel{d}{=}$ significa "iguais em distribuição")

Teorema 15. (Hall e Heyde (1980, p. 35), Teorema 2.18) Seja $\{S_n = \sum_{j=1}^n X_j\}_{n \geq 1}$ um martingal e $\{U_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias não decrescente tal que U_n é \mathcal{F}_{n-1} -mensurável para cada n . Se $1 \leq p \leq 2$ e $\sum_{j=1}^{\infty} U_j^{-p} \mathbb{E}(|X_j|^p | \mathcal{F}_{j-1}) < \infty$, então $\sum_{j=1}^{\infty} U_j^{-1} X_j < \infty$ q.c..

Teorema 16. (Csörgo e Révész (1981, p. 30), Teorema 2.1.1) Seja $a_T (T \geq 0)$ uma função não decrescente de T para a qual

$$(i) 0 < a_T \leq T,$$

$$(ii) T/a_T \text{ é não decrescente.}$$

Então

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T - a_T} \beta_T |W(t + a_T) - W(t)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 1; \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \beta_T |W(T + a_T) - W(T)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \beta_T |W(T + s) - W(T)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 1; \quad (\text{A.2})$$

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T - a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \beta_T |W(t + s) - W(t)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 1, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\beta_T = \left[2a_T \left(\log \frac{T}{a_T} + \log \log T \right) \right]^{-1/2}.$$

Se também tivermos

$$(iii) \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\log \frac{T}{a_T} \right) (\log \log T)^{-1} = \infty, \text{ então}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \beta_T |W(t+a_T) - W(t)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 1; \quad (\text{A.4})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T-a_T} \sup_{0 \leq s \leq a_T} \beta_T |W(t+s) - W(t)| \stackrel{\text{q.c.}}{=} 1. \quad (\text{A.5})$$

Teorema 17. (Hall e Heyde (1980, p. 58), Corolário 3.1) Seja $\{\sum_{j=1}^i D_{nj}, \mathcal{F}_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ um vetor de martingais com $\mathbb{E}(\sum_{j=1}^i D_{nj}) = 0$, $\sum_{j=1}^i D_{nj} \in \mathcal{L}^2$ e $\mathcal{F}_{ni} \subseteq \mathcal{F}_{(n+1)i}$, para todo $1 \leq i \leq k_n$ e $n \geq 1$. Seja σ^2 uma variável aleatória finita quase certamente. Se

(i) para todo $\varepsilon > 0$, $\sum_j \mathbb{E} \left[D_{nj}^2 \mathbb{I}(|D_{nj}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{n(j-1)} \right] \xrightarrow{P} 0$, onde $\mathbb{I}(A)$ é a função indicadora,

(ii) $V_{nk_n}^2 = \sum_j \mathbb{E}(D_{nj}^2 | \mathcal{F}_{n(j-1)}) \xrightarrow{P} \sigma^2$

então $\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj} \xrightarrow{d} Z$, onde a função característica de Z é dada por $\phi_Z(t) = \mathbb{E}[\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)]$.

Em particular, se σ^2 é constante quase certamente, $Z \stackrel{d}{=} N(0, \sigma)$.

Teorema 18. (Karatzas e Shreve (1991, p. 112), Lei do Logaritmo Iterado para Movimento Browniano)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1.$$

Teorema 19. (James (1996, p. 248), Teorema de Slutsky) Sejam X, X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots variáveis aleatórias tais que $X_n \xrightarrow{d} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} c$, onde c é uma constante. Então

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

(ii) $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - c$.

(iii) $Y_n X_n \xrightarrow{d} cX$.

(iv) $X_n/Y_n \xrightarrow{d} X/c$, se $c \neq 0$ e $\mathbb{P}(Y_n \neq 0) = 1$.

Teorema 20. (Grimmett *et al.* (2001, p.566)) Seja $f_n = \prod_{j=1}^n (1 + x_j)$.

(i) Se $x_n > 0$ para todo n , então $f_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\sum_j x_j = \infty$.

(ii) Se $-1 < x_n \leq 0$ para todo n , então $f_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\sum_j |x_j| = \infty$.

DISTRIBUIÇÃO DE MITTAG-LEFFLER

A função de *Mittag-Leffler* definida pela série de potência

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1 + \alpha j)}$$

para $\alpha, z \in \mathbb{C}$ foi introduzida pela primeira vez pelo matemático sueco Gosta Mittag-Leffler [(MITTAG-LEFFLER, 1903) e (MITTAG-LEFFLER, 1905)]

Dessa definição, como j é um inteiro positivo,

$$E_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1 + j)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z.$$

Uma variável aleatória X tem distribuição de *Mittag-Leffler* com parâmetro $p \in [0, 1]$ se sua função geradora de momentos é dada como

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = E_p(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(1 + pj)} \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Daí, o k -ésimo momento de X , isto é, a k -ésima derivada da função geradora de momentos de X avaliada no ponto $\lambda = 0$, é dado por

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{k!}{\Gamma(1 + pk)}.$$

Além disso, Pillai (1990) provou que a função de distribuição acumulada e a densidade de X , quando X tem tal distribuição, são dadas respectivamente por

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} x^{pj}}{\Gamma(1 + pj)} e^{-x}$$

$$f_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} x^{pj-1}}{\Gamma(pj)}$$

em que $x > 0$ e $0 < p \leq 1$. Note que quando $p = 1$, X tem distribuição exponencial com média 1.

Posteriormente, Pillai e Jayakumar (1995) propuseram uma generalização da distribuição geométrica, a distribuição de *Mittag-Leffler* discreta com parâmetro α , com função geradora de probabilidade

$$\mathbb{E}(X^z) = \frac{1}{1 + c(1 - z)^\alpha} \text{ com } p = 1/(1 + c).$$

