

**Resultados para o modelo de rumor de Maki-Thompson em
árvores**

Adalto Speroto

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação
em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Adalto Speroto

Resultados para o modelo de rumor de Maki-Thompson em árvores

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez
Coorientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior

USP – São Carlos
Junho de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Sr Speroto, Adalto
Resultados para o modelo de rumor de Maki-
Thompson em árvores. / Adalto Speroto; orientador
Pablo Martín Rodríguez; coorientador Valdivino Vargas
Júnior. -- São Carlos, 2021.
96 p.

Tese (Doutorado - Programa Interinstitucional de
Pós-graduação em Estatística) -- Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação, Universidade de São
Paulo, 2021.

1. Árvores Aleatórias.. 2. Árvores homogêneas..
3. Modelo de Maki-Thompson.. 4. Transição de fase..
I. Rodríguez, Pablo Martín, orient. II. Vargas
Júnior, Valdivino, coorient. III. Título.

Adalto Speroto

Results for the Maki-Thompson rumor model in trees

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP and to the Department of Statistics – DES- UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Interagency Program Graduate in Statistics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez
Coadvisor: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior

USP – São Carlos
June 2021

Este trabalho é dedicado aos meus pais Lorenzo Speroto e Francisca Vitorino Speroto, a minha irmã Creuza Vitorino Speroto, a minha esposa Gleica Sousa Miranda Speroto, aos meus sobrinhos Juliano Speroto e Aaron Rodrigues Miranda, ao meu filho Lorenzo Miranda Speroto, aos meus primos João Speroto, Valdeir Vitorino, Sérgio Ginelli, José Vitorino, João Vitorino Neto, às minhas primas Sueli Ginelli, Valdinéia Vitorino, Valdirene Vitorino, Luciene Vitorino, Maria Vitorino, Marlene Vitorino e em memória de Maria Medeiros Vitorino, João Vitorino, Florindo Sperotto, Anunciatta Rigotto e Nauziro Vitorino.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, a minha família e a todos que de alguma forma contribuíram para esse trabalho, como os professores por minha formação e aos colegas de doutorado pela troca de conhecimento e camaradagem.

Agradeço aos meu pais, em especial à minha mãe, Francisca Vitorino Speroto, por me incentivar, me educar e ensinar o valor do respeito a todos, independentemente de origem, crença, raça ou classe social. À memória de Maria Medeiros Vitorino, João Vitorino, Florindo Sperotto, Anunciatta Rigotto e a todos os nossos ancestrais.

Agradeço a toda equipe da EEEFM “Antônio dos Santos Neves” pelo apoio e esforços feitos para que eu pudesse ingressar no doutorado em Estatística, em especial, quero agradecer minha diretora Adriana Bonatto Merllo por me apoiar de forma incondicional.

Aos meus grandes amigos por todos os momentos alegres e tristes, que sempre me deram força para concluir essa longa e árdua tarefa e em especial a Milton Miranda Neto, Caio Moura Quina, Diego de Souza Silva e Valdecir Gonçalves Alves.

Meus agradecimentos aos colegas de turma que me proporcionaram que a minha caminhada até aqui pudesse ter sido mais amena e prazerosa. Agradeço aos meus professores que fizeram o possível e o impossível para garantir o melhor aprendizado tanto para mim quanto para os meus colegas.

Agradeço às instituições USP e UFSCar pelo suporte interinstitucional dado e a todos que fazem com que estas duas instituições serem referências no ensino de qualidade, a todos o meu muitíssimo obrigado.

Agradeço ao professor Valdivino Vargas Júnior, meu coorientador, por me incentivar e guiar pelas discussões importantes, pela sua disponibilidade e igualmente pelo seu apoio na elaboração deste trabalho.

Agradeço ao professor Pablo Martín Rodríguez, meu orientador, por me incentivar, apoiar e guiar com sabedoria meu foco de estudo nesta tese de doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

“Assim que você controlar o seu tempo, compreenderá o quão verdadeiro é o fato de que muitas pessoas superestimam o que elas podem realizar num ano - e subestimam o que elas podem conquistar numa década!”

Tony Robbins

RESUMO

Speroto, A. **Resultados para o modelo de rumor de Maki-Thompson em árvores.** 2021. 96 p. Tese (Doutorado Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo; Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2021.

Nesta tese, estudamos o modelo de rumor de Maki-Thompson em árvores homogêneas infinitas que é formulado como um processo de Markov a tempo contínuo. Este modelo pode ser definido como um sistema de partículas interagentes representando a disseminação de um boato por indivíduos em uma árvore homogênea. Assumimos que cada indivíduo possa pertencer a uma das três classes em uma população representada por: ignorantes, propagadores e contidos. Um propagador conta o boato a qualquer um de seus vizinhos ignorantes a uma taxa constante. Por outro lado, com a mesma taxa, um propagador torna-se um contido depois de interagir com outro propagador ou um contido.

Ainda neste trabalho, estendemos nossa análise a duas generalizações, na primeira supomos que cada propagador deixa de propagar o boato logo após estar envolvido em um determinado número de tentativas frustradas e na segunda estendemos o modelo de Maki-Thompson às árvores aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Estudamos condições suficientes sob as quais o boato se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva.

Palavras-chave: Modelo de Maki-Thompson, Transição de fase, Árvores homogêneas, Árvores aleatórias.

ABSTRACT

Speroto, A. Results for the Maki-Thompson rumor model in trees. 2021. 96 p. Tese (Doutorado em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo; Departamento de Estatística, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2021.

In this work, we study the Maki-Thompson rumor model on infinite homogeneous trees which is formulated as a continuous-times Markov chain. This model can be defined as a system of interacting particles representing the spread of a rumor by individuals in a homogeneous tree. We assume that each individual can belong to one of three classes in a population represented by: ignorants, spreaders and stifles. A spreader tells the rumor to any of its ignorant (nearest) neighbors at a constant rate. On the other hand, also at the same rate, a spreader becomes a stifler after interact with other spreader (nearest neighbors) or a stifler.

Still in this work, we extend our analysis to two generalizations, in the first one we assume that each propagator stops spreading the rumor right after being involved in a certain number of failed attempts and in the second we extend the Maki-Thompson model to Independent and identically distributed random trees. We study sufficient conditions under which the rumor either becomes extinct or survives with positive probability.

Keywords: Maki-Thompson model, Phase transition, Homogeneous trees, Random trees.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exibição dos pontos críticos para alguns valores de n 65

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Distribuição de Poisson para $d = 1, 2, \dots, 6$ | 76 |
| Tabela 2 – Média de X dado $d = 1, 2, \dots, 6$ | 76 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 23 |
| 2 | O MODELO | 27 |
| 2.1 | Noções e resultados fundamentais | 27 |
| 2.2 | A distribuição do número de propagadores que um propagador gera. | 30 |
| 2.3 | Resultados Auxiliares | 39 |
| 2.3.1 | Demonstração do Teorema 2.1.2 | 39 |
| 2.4 | Prova do Teorema 2.1.1 e do seus corolários | 40 |
| 2.4.1 | Demonstração do Teorema 2.1.1 | 40 |
| 2.4.2 | Demonstração do Corolário 2.1.1 | 42 |
| 2.4.3 | Demonstração do Corolário 2.1.2 | 43 |
| 2.5 | O alcance da propagação em \mathbb{T}_2 | 43 |
| 2.5.1 | Prova do Teorema 2.1.3 | 43 |
| 2.5.2 | Prova do Teorema 2.1.4 | 44 |
| 3 | O MODELO MT-ADF-K | 47 |
| 3.1 | Noções e resultados fundamentais | 47 |
| 3.2 | O modelo MT com ápice de frustração $k=2$ | 49 |
| 3.2.1 | Demonstração do Teorema 3.1.1 | 55 |
| 3.3 | O modelo-MT ADF-k. | 56 |
| 3.3.1 | Demonstração do Teorema 3.1.2 | 61 |
| 4 | ÁRVORES ALEATÓRIAS | 63 |
| 4.1 | Modelo e principais resultados | 63 |
| 4.2 | Resultados auxiliares | 65 |
| 4.3 | Prova dos Teoremas | 69 |
| 4.3.1 | Prova do Teorema 4.1.1 | 69 |
| 4.3.2 | Prova do Teorema 4.1.2 | 69 |
| 4.3.3 | Prova do Teorema 4.1.3 | 70 |
| 4.3.3.1 | Demonstração do item (i) do Teorema 4.1.3. | 71 |
| 4.3.3.2 | Demonstração do item (ii) do Teorema 4.1.3 | 71 |
| 4.3.3.3 | Demonstração do item (iii) do Teorema 4.1.3 | 72 |
| 4.3.4 | Prova do Teorema 4.1.4 | 73 |
| 4.3.4.1 | Demonstração do item (i) do Teorema 4.1.4 | 73 |
| 4.3.4.2 | Demonstração do item (ii) do Teorema 4.1.4 | 75 |
| 4.3.4.3 | Demonstração do item (iii) do Teorema 4.1.4 | 77 |

| | | |
|-----|--|-----------|
| 5 | CONCLUSÃO | 81 |
| | REFERÊNCIAS | 83 |
| | APÊNDICES | 85 |
| | APÊNDICE A – O ALCANCE DA PROPAGAÇÃO | 87 |
| A.1 | Funções geradoras fracionais lineares | 87 |
| | APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES. | 91 |
| B.1 | Resultados auxiliares para o modelo ADF-2 | 91 |
| B.2 | Resultado auxiliar para o modelo ADF-k | 95 |

1 INTRODUÇÃO

O modelo Maki-Thompson é um dos primeiros modelos matemáticos propostos na literatura para ilustrar de forma simples a transmissão da informação em uma população homogênea e totalmente misturada. Em 1965, veja (DALEY; KENDALL, 1965), estes dois autores propuseram um modelo de disseminação da informação que eliminava a necessidade de uma taxa de remoção separada: ambas as taxas de infecção e remoção dependem apenas da taxa que parametriza a interação entre os indivíduos e das regras para a propagação do boato. Esse modelo consiste de uma população fechada e homogeneamente misturada na qual existem três classes de indivíduos, a saber: aqueles que ignoram o boato; aqueles que sabem do boato e o propagaram ativamente e aqueles que estão cientes do boato, porém perderam o interesse em propagá-lo. Essas três classes são chamadas de ignorantes, propagadores e contidos, respectivamente.

A propagação do boato através da população é feita via o contato de pares formados de um propagador e outros indivíduos da população. Toda vez que ocorre o contato entre um propagador e um ignorante, este último torna-se conhecedor do boato. Se ocorrer o contato entre dois propagadores ou entre propagador e contido, temos como resultado a não propagação do boato pelos indivíduos envolvidos na transação, além disso, os propagadores tornam-se contidos. Uma versão mais simplificada do modelo de Daley-Kendall, onde não é permitida a remoção dupla, foi apresentada em (MAKI, D.; THOMPSON, M., 1973). Em vez disso, é assumido que caso dois propagadores se encontrarem apenas um será removido. O processo de rumor descrito por estes dois pesquisadores analisam a disseminação de um rumor através de uma população finita, fechada e homogeneamente misturada, no sentido de que todos os indivíduos da população podem interagir entre si. A fim de apresentar alguns trabalhos rigorosos do modelo-MT (uma abreviação para modelo de Maki-Thompson) que apareceram após a padronização do modelo de disseminação de boatos, consideremos para todo $t \geq 0$, as variáveis aleatórias:

$X(t)$ = número de ignorantes no instante t ;

$Y(t)$ = número de propagadores no instante t ;

$Z(t)$ = número de contidos no instante t ;

suponha que $X(t) + Y(t) + Z(t) = n$, para todo $t \geq 0$. O modelo-MT é a cadeia de Markov a tempo contínuo $(X(t), Y(t))_{t \geq 0}$ com transições e taxas dadas por:

| transição | taxa |
|-----------|--------------|
| $(-1, 1)$ | YX ; |
| $(0, -1)$ | $Y(n - X)$. |

Denotando por $\tau^{(n)} := \inf\{t \geq 0 : Y(t) = 0\}$ o tempo de absorção do processo, a variável aleatória $X(\tau^{(n)})/n$ será de grande interesse para os próximos resultados envolvendo limites. Vale mencionar que, dentre os trabalhos rigorosos no modelo-MT, em (SUDBURY, 1985) temos uma abordagem demonstrando que quando o tamanho da população tende ao infinito, a proporção da população que nunca ouve o rumor converge em probabilidade para 0,2032. Utilizando a notação do tempo de absorção do processo podemos expressar este resultado como segue

$$\frac{X(\tau^{(n)})}{n} \xrightarrow{P} 0,2032, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde o símbolo \xrightarrow{P} denota convergência em probabilidade. Posteriormente, Watson mostrou que

$$\sqrt{n} \left(\frac{X(\tau^{(n)})}{n} - 0,203 \right) \xrightarrow{D} N(0; 0,2728), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

onde o símbolo \xrightarrow{D} denota convergência em distribuição, ver em (WATSON, 1988). Um versão mais realista do modelo-MT, onde cada propagador se torna contido apenas quando ocorre a segunda tentativa frustrada de transmissão do rumor para alguém que já sabe, foi proposta em (CARNAL, 1994). Adotando essa dinâmica de propagação do rumor, foi mostrado que

$$\frac{X(\tau^{(n)})}{n} \xrightarrow{P} 0,059, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

A versão k -tentativas frustradas foi introduzida em (BELEN, 2008), onde foram adotadas as condições iniciais de 1 informante e $n - 1$ ignorantes e foi obtido o valor da proporção final de ignorantes em função de k . Outro trabalho, mais recente, foi desenvolvido em (LEBENSZTAYN; MACHADO; RODRIGUEZ, 2011), onde foi proposta uma versão em que cada informante decide parar de propagar o boato logo após estar envolvido em um número aleatório de tentativas frustradas. Neste trabalho foi demonstrado uma Lei dos Grandes Números e um Teorema do Limite Central para as proporções daqueles que permanecem ignorantes e aqueles que ouviram o boato, mas tornam-se desinteressados nisso.

Com o desenvolvimento de redes complexas, a dinâmica de propagação de rumores também incluiu a topologia das redes sociais. Uma rede social consiste em um conjunto de pessoas formando relacionamentos socialmente “significativos”, como os de conhecimento ou co-localização física. As comunidades sociais exibem um diâmetro relativamente curto, ou seja, apesar do tamanho das redes, o número de nós entre um dado par de nós é relativamente pequeno, isso também é referido como pequeno mundo, veja (ZANETTE, 2001; ZANETTE, 2002). Mais recentemente, em (AGLIARI E.; PACHON; RODRIGUEZ;

TAVANI, 2017), foi demonstrado que o modelo-MT em redes de pequeno mundo exibe uma transição entre regimes de localização (onde o número final de contidos é, no máximo, o logaritmo do tamanho da população). Além disso, uma aproximação do campo médio que se baseia no pressuposto de correlações negligenciáveis entre o estado dos indivíduos vizinhos é adotada para se obter uma estimativa para o número final de contidos.

Várias contribuições para o estudo da dinâmica dos rumores em redes sociais complexas fornecendo uma descrição mais realista desse processo podem se encontradas em (NEKOVEE M.; MORENO; BIANCONI; MARSILI, 2007). Em particular, elas são frequentemente caracterizadas por uma distorção na distribuição de graus, implicando a presença de um número estatisticamente significativo de elementos nessas redes com um número muito grande de conexões sociais. Nas redes de escala livre verifica-se a existência de vértices com mais ligações, que são identificados como pontos centrais. Observa-se neste trabalho a introdução de um novo modelo de boato que unifica o modelo-MT de espalhamento de um boato com o modelo epidêmico Susceptível-Infetado-Removido (SIR) e tem ambos os modelos, limitando os casos. Conclui-se que a fração final de indivíduos que já ouviram o boato (nós chamamos isso o tamanho final de um boato), no entanto, depende de uma interação entre os parâmetros do modelo e as correlações grau-grau.

Em (COLETTI; RODRIGUEZ; SCHINAZI, 2012), encontramos uma abordagem de um modelo estocástico espacial de transmissão de rumor na rede hipercúbica d -dimensional. Neste estudo eles encontraram condições suficientes sobre as quais o rumor sobrevive com probabilidade positiva.

O objetivo principal desta tese é estudar o comportamento do modelo-MT nas árvores homogêneas infinitas e estender os resultados obtidos para as árvores aleatórias iid. O estudo é baseado em resultados de processos de ramificação permitindo que a probabilidade de propagação do rumor em uma árvore homogênea infinita seja exibida em termos da probabilidade de sobrevivência do processo de ramificação associado ao modelo-MT. Além disso, encontramos condições sobre as quais o rumor se extingue ou sobrevive com probabilidade positiva.

Os próximos capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte maneira: no Capítulo 2, descrevemos o modelo-MT, enunciamos e demonstramos os principais teoremas relativos a probabilidade de sobrevivência do rumor nas árvores homogêneas; além disso, na última parte deste capítulo fornecemos algumas informações sobre a distribuição da quantidade de contidos no final do processo para o processo MT em \mathbb{T}_2 . No Capítulo 3, estendemos nossa análise à generalização do modelo de Maki-Thompson onde supomos que cada propagador deixa de propagar o boato logo após estar envolvido em um determinado número de tentativas frustradas; esse capítulo está dividido em duas partes, a primeira abordando o caso $k = 2$ e a segunda dedicada ao caso $k \geq 2$. Observamos que os resultados dos Capítulos 2 e 3 foram publicados em um artigo, veja

(JUNIOR; RODRIGUEZ; SPEROTO, 2020). No Capítulo 4, generalizamos o modelo de Maki-Thompson às árvores aleatórias independentes e identicamente distribuídas e exemplificamos este estudo considerando árvores aleatórias cujas distribuições de prole são dadas por variáveis com distribuição binomial, poisson e geométrica.

2 O MODELO

2.1 Noções e resultados fundamentais

Um grafo G é um par (V, E) de conjuntos tais que $E \subset [V]^2$; assim, os elementos de E são subconjuntos de 2 elementos de V . Em geral, $V := V(G)$ e $E := E(G)$, onde as notações $V(G)$ e $E(G)$ significam o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de G , respectivamente. Um subgrafo S de um grafo G é um grafo tal que $V(S) \subseteq V(G)$ e $E(S) \subseteq E(G)$. Um caminho num grafo G é uma sequência finita v_0, v_1, \dots, v_n de vértices distintos tais que quaisquer dois vértices consecutivos $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para cada i . Dizemos que G é um grafo conexo se para qualquer par u e v de vértices em $V(G)$ existe um caminho indo de u para v em G . Quando G é conexo, a distância entre dois vértices é dada pelo comprimento do caminho mais curto entre eles. Utilizamos a notação $d(u, v)$ para denotar a distância entre u e v . Toda vez que $d(u, v) = 1$, dizemos que u e v são vizinhos e denotamos por $u \sim v$. O número de vizinhos de um vértice v , aqui denotado por $d(v)$ corresponde ao grau do vértice v .

Uma árvore T é um grafo, sem ciclos, tal que quaisquer dois vértices estão conectados por exatamente um caminho. Neste trabalho, as árvores possuem um vértice especial o qual chamaremos de raiz da árvore, ele servirá como um ponto de referência para os outros vértices da árvore e será denotado $\mathbf{0}$, por ser o vértice de origem da árvore. Dados dois vértices $u, v \in T$, nós dizemos que $u \leq v$ se u é um dos vértices do caminho conectando $\mathbf{0}$ e v ; $u < v$, se $u \leq v$ e $u \neq v$. Dizemos que o vértice v é *descendente* do vértice u se $u \leq v$ e denotamos por $T^u = \{v \in T : u \leq v\}$ o conjunto dos descendentes de u . O conjunto T^u vai nos ser útil, pois ele é uma subárvore de T e será utilizado para setorizar a nossa árvore principal em d ramos (subárvores).

Quando u e v são dois vizinhos que satisfazem a relação $u \leq v$, dizemos que v é um *sucessor* de u . Dizemos que os vértices que estão a uma distância n da raiz de T , formam o nível n de T . Utilizando a notação $|v|$ para indicar $d(v, \mathbf{0})$, vamos escrever o n -ésimo nível de T como sendo $\partial T_n = \{v \in T : |v| = n\}$. Quando todos os vértices tem o mesmo grau a árvore é dita homogênea.

Utilizaremos a notação \mathbb{T}_d para representar a árvore homogênea infinita de grau $d+1$ com raiz $\mathbf{0}$. Isto é, \mathbb{T}_d é tal que cada vértice possui $d+1$ vizinhos mais próximos; sendo que a raiz, ao contrário dos demais vértices, possui todos os seus vizinhos mais próximos em um mesmo nível da árvore. Vamos destacar também a noção de raio em \mathbb{T}_d que é um caminho com infinitos vértices começando em $\mathbf{0}$. Já a noção de profundidade de um vértice é uma grandeza finita que é dada pela distância do vértice até a raiz da árvore. Em \mathbb{T}_d o conjunto dos elementos que constituem o nível n é descrito por $\partial \mathbb{T}_{d,n} = \{v \in \mathbb{T}_d : |v| = n\}$.

O modelo-MT pode ser definido como um processo de Markov a tempo contínuo $(\eta_t)_{t \geq 0}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}^{V(\mathbb{T}_d)}$, isto é, para todo t o estado do processo é uma função $\eta_t : V(\mathbb{T}_d) \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Nós assumimos que cada sítio $x \in V(\mathbb{T}_d)$ representa um indivíduo, o qual é dito ignorante se $\eta_t(x) = 0$, um propagador se $\eta_t(x) = 1$ e um contido se $\eta_t(x) = 2$, em cada instante de tempo t . Ignorantes são aqueles que não sabem do rumor; propagadores são aqueles que sabem e propagam o rumor; e contidos são aqueles que sabem do rumor, porém perderam o interesse em propagá-lo. Então, se o sistema está na configuração $\eta \in S$, o estado do sítio x muda de acordo com as seguintes taxas de transição

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1, & n_1(x, \eta), \\ 1 &\rightarrow 2, & n_1(x, \eta) + n_2(x, \eta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde

$$n_i(x, \eta) = \sum_{x \sim y} \mathbf{1}_{\{\eta(y)=i\}}$$

é o número de vizinhos mais próximos do sítio x no estado i para a configuração η , para $i \in \{1, 2\}$. Formalmente, (3.1) significa que se o sítio x está no estado, digamos, 0 no tempo t então a probabilidade de que ele estará no estado 1 no tempo $t + h$, para h pequeno, é $\lambda n_1(x, \eta)h + o(h)$, onde $o(h)$ é tal que $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$. Nós chamamos o processo de Markov $(\eta_t)_{t \geq 0}$ assim obtido de processo de rumor de Maki-Thompson em \mathbb{T}_d , ou simplesmente, processo-MT em \mathbb{T}_d . Uma vez que estamos considerando um grafo com um número infinito de vértices, nossa primeira tarefa será definir o evento de sobrevivência ou extinção para o processo de transmissão do rumor.

Definição 2.1.1. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT em \mathbb{T}_d com a configuração inicial η_0 tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$, para todo $x \neq \mathbf{0}$. Dizemos que o processo sobrevive quando existe uma sequência $\{(v_i, t_i)\}_{i \geq 0}$, com $(v_i, t_i) \in \mathbb{T}_d \times \mathbb{R}_+$, tal que $v_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$, v_{i+1} é um sucessor de v_i , $t_i < t_{i+1}$, $\eta_{t_i}(v_i) = 1$, para todo $i \geq 0$. Se não existe sobrevivência, nós dizemos que o processo se extingue. Utilizamos $\theta(d)$ para denotar a probabilidade de sobrevivência.*

Em outras palavras, pela definição anterior, temos que existe sobrevivência do rumor, se podemos garantir a existência de um caminho a partir da raiz de \mathbb{T}_d , de modo que todos os vértices no caminho foram propagadores em algum momento.

Observação 2.1.1. $(\eta_t)_{t \geq 0}$ sobrevive se $|\{v \in \mathbb{T}_d : \eta_t(v) = 1\}| \geq 1, \forall t \geq 0$.

Feita uma abordagem introdutória do processo-MT, já podemos enunciar o principal teorema deste trabalho.

Teorema 2.1.1. *Considere o processo-MT em \mathbb{T}_d com configuração inicial η_0 , tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$. Então,*

$$\theta(d) = 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1}$$

onde ψ é a menor raiz não negativa da equação

$$\sum_{j=0}^d j! \binom{d}{j} \left(\frac{s}{d+1} \right)^j \frac{j+1}{d+1} = s.$$

Do Teorema 2.1.1, podemos enunciar um corolário que diz respeito a probabilidade de propagação em árvores de dimensões cada vez maiores.

Corolário 2.1.1. $\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(d) = 1$.

Corolário 2.1.2. *A probabilidade de propagação $\theta(d)$ é não-decrescente em função de d . Isto é, $\theta(d) \leq \theta(d+1)$.*

Um outro resultado relevante para este trabalho é o seguinte teorema.

Teorema 2.1.2. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT em \mathbb{T}_d , então*

$$\theta(d) \begin{cases} = 0, & \text{se } d \in \{1, 2\}; \\ > 0, & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

O Teorema 2.1.2 nos diz que o modelo-MT possui transição de fase na árvore homogênea. Uma outra quantidade útil para medir o impacto do boato é o que chamamos de alcance da propagação no próximo teorema. Nosso objetivo aqui é encontrar uma maneira de expressar o fato de que podemos descobrir a geração em que o processo se extingue.

Quando o modelo-MT com k tentativas frustradas foi considerado no grafo completo, uma quantidade de interesse estava relacionada ao número de contidos no final do processo. Observe que este é o número de indivíduos que ouviram sobre o boato em algum momento. Pelo Teorema 2.1.2, sabemos que esse número é finito quase certamente quando $d = 2$. A seguir, fornecemos algumas informações sobre a distribuição da quantidade de contidos no final do processo para o processo-MT em \mathbb{T}_2 .

Teorema 2.1.3. *Considere o processo-MT em \mathbb{T}_2 , e seja S_∞ o número final de contidos no final do processo. Então*

$$\mathbb{P}(S_\infty = i) = \frac{1}{9i} \left\{ 3 \frac{G_i^{(i-1)}(0)}{(i-1)!} + 8 \frac{G_i^{(i-2)}(0)}{(i-2)!} + 6 \frac{G_i^{(i-3)}(0)}{(i-3)!} \right\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

onde

$$G_i(s) := \left(\frac{2s^2 + 4s + 3}{9} \right)^i, \quad s \in [-1, 1],$$

e

$$G_i^{(j)}(s) := \frac{d^j(G_i(s))}{ds^j}, \quad \text{for } j \geq 0,$$

e $G_i^{(j)}(s) := 0$ caso contrário. Além disso, $\mathbb{E}(S_\infty) = 18$.

Outra quantidade útil para medir o impacto do rumor é o que nós chamamos de o alcance da propagação no seguinte teorema.

Teorema 2.1.4. *Considere o processo-MT em \mathbb{T}_2 . Seja*

$$R := \max\{n \geq 1 : \eta_t(x) = 1 \text{ para algum } x \in \partial\mathbb{T}_{2,n}, \text{ e } t \in \mathbb{R}^+\}, \quad (2.3)$$

o alcance da propagação. Então, para algum $n \geq 0$

$$\frac{3}{9}\alpha_1(n) + \frac{4}{9}\alpha_1(n)^2 + \frac{2}{9}\alpha_1(n)^3 \leq \mathbb{P}(R \leq n) \leq \frac{3}{9}\alpha_2(n) + \frac{4}{9}\alpha_2(n)^2 + \frac{2}{9}\alpha_2(n)^3,$$

onde

$$\alpha_1(n) := \frac{(13/9)\{1 - (8/9)^n\}}{13/9 - (8/9)^n}, \quad \text{e} \quad \alpha_2(n) := \frac{(4/3)\{1 - (8/9)^n\}}{4/3 - (8/9)^n}.$$

Além disso,

$$6,144 \leq \mathbb{E}(R) \leq 7,448.$$

2.2 A distribuição do número de propagadores que um propagador gera.

Antes de enunciarmos alguns resultados básicos do trabalho, vamos apresentar algumas definições pertinentes ao contexto em que estamos estudando a dinâmica do rumor. O processo-MT começa com a configuração inicial η_0 tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$. No instante de tempo $t = 0$, apenas a raiz $\mathbf{0}$ sabe do rumor e seus $d + 1$ filhos estão no estado da ignorância. Seja N o número de propagadores que o propagador inicial gera. Note que a variável N pode ser interpretada como a quantidade de cupons que uma pessoa coleciona antes que apareça o primeiro cupom repetido, quando é suposto que existem apenas $d + 1$ tipos diferentes de cupons e todos são identicamente prováveis de serem colecionados.

Lema 2.2.1. *A variável aleatória N tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}(N = i) = i! \binom{d+1}{i} \frac{1}{(d+1)^i} \frac{i}{d+1},$$

para $i \in \{1, 2, 3, \dots, d+1\}$.

Demonstração. Para determinar a distribuição de probabilidade da variável N , iremos utilizar o seguinte resultado de variáveis aleatórias exponenciais. Dada uma sequência de variáveis aleatórias exponenciais idênticas e independentes Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1} , a probabilidade de que o $\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\}$ ocorra em Y_i , com $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$, veja (SCHINAZI, R. B., 1999, p.106), é dada por

$$\mathbb{P}(\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\} = Y_i) = 1/(d+1).$$

Note que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$, o evento $\{N = i\}$ ocorre se, e somente se, temos i transmissões sucessivas em cada uma das i primeiras interações e uma tentativa frustrada na $(i+1)$ -ésima interação com outro indivíduo que muda o estado do propagador para contido. Denotando por B_i o evento dado pela ocorrência de uma transmissão na i -ésima interação e por B_i^c o evento ocorrência de uma tentativa fracassada de transmissão. Como o evento $\{N = i\}$ é dado por i transmissões sucessivas seguida de uma tentativa frustrada na $(i+1)$ -ésima interação, segue que

$$\{N = i\} = \left(\bigcap_{j=1}^i B_j \right) \cap B_{i+1}^c. \quad (2.4)$$

Por (2.4), juntamente com a fórmula de multiplicação de probabilidades temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = i) &= \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{j=1}^i B_j \right) \cap B_{i+1}^c \right) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}(B_2|B_1) \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \dots \mathbb{P}(B_{i+1}^c | \bigcap_{j=1}^i B_j) \end{aligned}$$

Agora, substituindo adequadamente cada probabilidade por sua expressão em d , temos

$$\mathbb{P}(N = i) = \frac{(d+1)}{d+1} \frac{d}{d+1} \dots \frac{d+2-i}{d+1} \frac{i}{d+1}. \quad (2.5)$$

O próximo passo da demonstração é rescrever adequadamente as contas a fim de obter uma expressão geral para a probabilidade do evento $\{N = i\}$ onde aparecem os coeficientes binomiais. Como

$$\mathbb{P}(N = i) = \frac{(d+1)}{d+1} \frac{d}{d+1} \dots \frac{d+2-i}{d+1} \frac{i}{d+1},$$

multiplicando e dividindo a expressão anterior por $(d+1)i!$, observando em seguida que $(d+1)d(d-1) \dots (d-i+2) = (d+1)!/(d-i+1)!$ e por último, reconhecendo o coeficiente binomial concluímos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = i) &= i! \frac{(d+1)d(d-1)\dots(d-i+2)}{i!(d+1)^i} \frac{i}{d+1} \\
&= i! \frac{(d+1)!}{i!(d-i+1)!(d+1)^i} \frac{i}{d+1} \\
&= i! \binom{d+1}{i} \frac{1}{(d+1)^i} \frac{i}{d+1}.
\end{aligned}$$

Para concluirmos basta demonstrarmos que

$$\sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(N = i) = 1.$$

Para facilitar as contas, iremos explicitar as parcelas do somatório e iniciar a soma a partir das últimas parcelas até às primeiras. Como $\mathbb{P}(N = d+1) = d!/(d+1)^d$ e $\mathbb{P}(N = d) = dd(d-1)(d-2)\dots 3 \cdot 2/(d+1)^d$, somando $\mathbb{P}(N = d+1)$ com $\mathbb{P}(N = d)$ e além disso, utilizando o fato de que $d! = d(d-1)(d-2)\dots 3 \cdot 2$ e por fim, cancelamos o fator $d+1$, fator comum, obtendo o seguinte,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=d}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) &= \frac{d(d-1)(d-2)\dots 3 \cdot 2}{(d+1)^d} + \frac{d!}{(d+1)^d} \\
&= \frac{(d+1)d!}{(d+1)^d} \\
&= \frac{d(d-1)(d-2)\dots 3 \cdot 2}{(d+1)^{d-1}}.
\end{aligned}$$

Feito isto, vamos adicionar a parcela $\mathbb{P}(N = d-1)$ ao resultado obtido de $\sum_{\ell=d}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell)$ (a soma das duas últimas parcelas) e cancelando novamente o fator $d+1$ que se repete, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=d-1}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) &= \frac{(d-1)d(d-1)(d-2)\dots 4 \cdot 3}{(d+1)^{d-1}} + \frac{d(d-1)(d-2)\dots 3 \cdot 2}{(d+1)^{d-1}} \\
&= \frac{(d+1)d(d-1)(d-2)\dots 4 \cdot 3}{(d+1)^{d-1}} \\
&= \frac{d(d-1)(d-2)\dots 4 \cdot 3}{(d+1)^{d-2}}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo, adicionando a parcela $\mathbb{P}(N = d-2)$ ao resultado anterior e utilizando

raciocínio análogo, obtemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=d-2}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) &= \frac{(d-2)d(d-1)(d-2)\dots 5 \cdot 4}{(d+1)^{d-2}} + \frac{d(d-1)(d-2)\dots 4 \cdot 3}{(d+1)^{d-2}} \\ &= \frac{(d+1) \cdot d \cdot (d-1) \cdot (d-2)\dots 5 \cdot 4}{(d+1)^{d-2}} \\ &= \frac{d(d-1)(d-2)\dots 4 \cdot 3}{(d+1)^{d-3}}. \end{aligned}$$

De modo geral, podemos escrever a seguinte expressão para as somas parciais

$$\sum_{\ell=d-k}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) = \frac{d(d-1)(d-2)\dots (k+2)}{(d+1)^{d-k-1}}, \quad \text{para } k \in \{0, 1, 2, \dots, d-2\}. \quad (2.6)$$

Aplicando a expressão (2.6) para $k = d-2$, vamos ter o somatório começando em $\ell = d - (d-2) = 2$. Logo, o somatório dos termos de 2 até $d+1$, é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=2}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) &= \sum_{\ell=d-(d-2)}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) \\ &= d/(d+1). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(N = 1) = 1/(d+1)$, segue que

$$\sum_{\ell=1}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) = \mathbb{P}(N = 1) + \sum_{\ell=2}^{d+1} \mathbb{P}(N = \ell) = 1/(d+1) + d/(d+1) = 1.$$

Como queríamos demonstrar. □

O próximo resultado compara a média da variável N para diferentes valores da dimensão d .

Lema 2.2.2. *Se N_d é a distribuição do número de vizinhos propagadores gerados pela raiz, então $N_d \stackrel{st}{\leq} N_{d+1}$. Além disso,*

$$\mathbb{E}(N_d) < \mathbb{E}(N_{d+1}), \quad d \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Nossa demonstração se baseia em achar o valor esperado utilizando a fórmula $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(N \geq i)$. Já sabemos que $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1$. Para $j \geq 2$, a demonstração do Lema 2.2.1 diz que

$$\mathbb{P}(N_d \geq j) = \frac{d(d-1)\dots(d-j+2)}{(d+1)^{j-1}}.$$

A ideia agora é mostrar que

$$\mathbb{P}(N_d \geq j) \leq \mathbb{P}(N_{d+1} \geq j).$$

Para nos familiarizar com a ideia, vamos primeiramente mostrar que

$$\mathbb{P}(N_d \geq 2) < \mathbb{P}(N_{d+1} \geq 2).$$

Essa desigualdade é expressa por $d/d + 1 < (d + 1)/(d + 2)$, multiplicando cruzado, esta desigualdade se transforma em

$$d(d + 2) < (d + 1)^2$$

que é trivialmente satisfeita. Em geral, vamos ter

$$\mathbb{P}(N_d \geq j) < \mathbb{P}(N_{d+1} \geq j).$$

Esta desigualdade pode ser expressa pela desigualdade a seguir

$$\frac{d(d-1)(d-2)\dots(d-j+1)}{(d+1)^{j-1}} < \frac{(d+1)d(d-1)\dots(d-j+2)}{(d+2)^{j-1}}.$$

Cancelando os termos idênticos e multiplicando cruzado, essa inequação se transforma em

$$(d + 2 - j)(d + 2)^{j-1} < (d + 1)^j. \tag{2.7}$$

Para verificar esta desigualdade basta fazer indução sobre j . Primeiramente, note que a igualdade é válida para $j = 2$. Se $j = 2$, temos $d(d + 2)^1 < (d + 1)^2$ que é trivialmente satisfeita. Assumindo que (2.7) é verdadeira para $j \geq 2$, a ideia agora é multiplicar esta desigualdade por $d + 2$. Fazendo assim, obtemos

$$(d + 2 - j)(d + 2)^j < (d + 1)^j(d + 2).$$

Note que

$$(d + 2 - j)(d + 2)^j < (d + 1)^j(d + 2) \leq (d + 1)^{j+1} + (d + 1)^j.$$

Como $(d + 1)^j < (d + 2)^j$, segue que

$$(d + 2 - j)(d + 2)^j < (d + 1)^{j+1} + (d + 2)^j.$$

Consequentemente,

$$(d + 2 - j)(d + 2)^j - (d + 2)^j < (d + 1)^{j+1}.$$

Logo,

$$(d + 2 - j - 1)(d + 2)^j < (d + 1)^{j+1}.$$

Assim sendo,

$$(d + 2 - (j + 1))(d + 2)^j < (d + 1)^{j+1}.$$

Tendo em vista que a desigualdade (2.7) é verdadeira para $j = 2$ e sempre que assumimos que ela verdadeira para $j \geq 2$, ela é verdadeira para $j + 1$, podemos afirmar por indução matemática que

$$\mathbb{P}(N_d \geq j) < \mathbb{P}(N_{d+1} \geq j), \quad j \in \{1, 2, \dots, d+1\}. \quad (2.8)$$

Por conseguinte, utilizando o resultado que diz que se a variável aleatória Y assume somente valores inteiros não-negativos, então $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq i)$ juntamente com o fato de que $\mathbb{P}(N_{d+1} = d+1) > 0$, temos as duas próximas desigualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_d) &= \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(N_d \geq i) \\ &< \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(N_{d+1} \geq i) \\ &< \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(N_{d+1} \geq i) + \mathbb{P}(N_{d+1} = d+1) \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(N_{d+1} \geq i) \\ &= \mathbb{E}(N_{d+1}). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\mathbb{E}(N_d) < \mathbb{E}(N_{d+1})$. □

Seja X o número de propagadores que um determinado propagador (diferente da raiz) gera. Essa variável é bem parecida com a variável N , porém elas tomam valores em conjuntos diferentes. De fato, se por um lado, a variável N não assume o valor 0; por outro lado, a variável X não assume o valor $d+1$. Antes de apresentarmos a distribuição de probabilidade da variável X , vamos entender quais são as diferenças entre essas duas variáveis tão parecidas. A única diferença entre a raiz e um outro vértice qualquer reside no fato de que a raiz é o ancestral que da origem a todos os outros propagadores, no caso dos demais propagadores, eles sempre possuem um ancestral que lhe passou a informação.

De fato, note que as funções de probabilidade de X e N estão relacionadas e cumprem a relação $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(N = i+1)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ e isso nos permite enunciar e aceitar sem demonstração o seguinte lema referente à variável aleatória X .

Lema 2.2.3. *A variável aleatória X tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}}, \quad i \in \{0, \dots, d\}. \quad (2.9)$$

A esperança da variável aleatória X pode se explicitada através da seguinte expressão abaixo. O próximo resultado vai nos permitir escrever o valor esperado de X de forma mais compacta facilitando o manuseio na hora das majorações.

Lema 2.2.4. *Seja X o número de propagadores que um único propagador (diferente da raiz) gera em \mathbb{T}_d , então*

$$\mathbb{E}(X) = d! \sum_{k=1}^d \frac{1}{(d+1)^k (d-k)!}.$$

Demonstração. Para demonstrar esta igualdade vamos expressar a variável X como uma soma de variáveis aleatórias indicadoras que denotaremos por χ_i com $i \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$. A variável χ_i indica se o i -ésimo vizinho do propagador foi informado. Dessa forma, sabemos que o número de propagadores gerados por um propagador é dado pela soma das indicadoras. De modo geral, podemos escrever $X = \sum_{i=1}^d \chi_i$. Uma consequência imediata desta construção é que $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(\chi_i)$. Uma vez que as indicadoras são idênticas, a esperança terá o fator d em evidência, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(\chi_i) \\ &= \sum_{\ell=1}^d \mathbb{E}(\chi_1) \\ &= d\mathbb{E}(\chi_1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para calcular $\mathbb{E}(\chi_1)$, tomamos x_1 o primeiro vizinho descendente do propagador e para cada $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, consideramos o evento A_j que significa que x_1 foi o j -ésimo vizinho a receber a informação. A probabilidade de A_1 é dada por $\mathbb{P}(A_1) = 1/(d+1)$. O evento A_2 ocorre quando x_1 é o segundo indivíduo a ficar sabendo do boato, sua probabilidade é $\mathbb{P}(A_2) = (d-1)/(d+1)^2$ e assim sucessivamente. Desta forma, temos d eventos distintos, cada um deles com probabilidade positiva de ocorrência, a saber, para cada $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, o evento A_j tem probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{(d-1)!}{(d+1)^j (d-j)!}$$

Como χ_1 é uma variável indicadora, segue que $\mathbb{E}(\chi_1) = \mathbb{P}(\chi_1 = 1)$. Por outro lado, temos que $\{\chi_1 = 1\} = \bigcup_{j=1}^d A_j$ é uma união disjunta de eventos. Logo,

$$\mathbb{P}(\chi_1 = 1) = \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^d \frac{(d-1)!}{(d+1)^j (d-j)!}.$$

De acordo com (2.10), $\mathbb{E}(X) = d\mathbb{E}(\chi_1) = d \cdot \sum_{j=1}^d \sum_{j=1}^d (d-1)!/(d+1)^j (d-j)!$. Passando $(d-1)!$ para fora do somatório, obtemos a expressão desejada

$$\mathbb{E}(X) = d! \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j (d-j)!}.$$

□

Observação 2.2.1. *Existe uma majoração da média que nos será muito útil para demonstrar alguns resultados do capítulo de árvores aleatórias. Mais precisamente, é possível demonstrar que o número médio de indivíduos que um propagador gera em \mathbb{T}_d é menor do que d . Esta majoração pode ser expressa por*

$$\mathbb{E}(X_d) < d.$$

Podemos utilizar a mesma notação do Lema 2.2.4 para demonstrar a Observação 2.2.1, de forma mais precisa, por (2.10), temos que $\mathbb{E}(X_d) = d\mathbb{E}(\chi_1)$. Como $\mathbb{E}(\chi_1) = \mathbb{P}(\chi_1 = 1)$ e $\mathbb{P}(\chi_1 = 1) = \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(A_j)$. Logo, temos que $\mathbb{E}(\chi_1) < 1$ e consequentemente, $\mathbb{E}(X_d) = d\mathbb{E}(\chi_1) < d$.

Um outro resultado que nos será útil é o fato de que a sequência das esperanças é não-decrescente em função de d .

Proposição 2.2.1. *Seja X a variável aleatória da distribuição de prole do modelo MT em \mathbb{T}_d . Então,*

$$\mathbb{E}(X_d) < \mathbb{E}(X_{d+1}).$$

Demonstração. Para obter este resultado basta recordar o Lema 2.2.2 onde obtemos a dominância estocástica da variável N_{d+1} sobre N_d . Como $X = N - 1$, segue que $X_d \stackrel{st}{\leq} X_{d+1}$. Utilizando a propriedade da esperança que afirma que se X_d é estocasticamente menor que X_{d+1} , então $\mathbb{E}(X_d) < \mathbb{E}(X_{d+1})$ e o resultado segue de imediato. \square

Almejando explicitar a probabilidade de propagação do modelo-MT, vamos considerar o processo de ramificação subjacente ao processo-MT. Dado $n \geq 0$, considere o n -ésimo nível de \mathbb{T}_d como sendo $\partial\mathbb{T}_{d,n} = \{v \in \mathbb{T}_d : d(v, \mathbf{0}) = n\}$. Denotamos por B_n o conjunto dos propagadores pertencentes ao $(n + 1)$ -ésimo nível de \mathbb{T}_d . Em notação de conjuntos, podemos escrever:

$$B_n = \{v \in \partial\mathbb{T}_{d,n+1} : \bigcup_{t>0} \{\eta_t(v) = 1\}\}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim definido, B_0 é formado por cada vértice que está à distância um da raiz $\mathbf{0}$ e que se tornou propagador em algum momento; B_1 é formado por cada vértice que está à distância dois da raiz $\mathbf{0}$ e que se tornou propagador em algum momento, e assim sucessivamente. Definimos a variável aleatória $Z_n := |B_n|$. Dessa forma, Z_0 tem distribuição de probabilidade igual à de N e além disso, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i, \tag{2.11}$$

onde X_1, X_2, \dots são cópias idênticas e independentes da variável X . Assim definido, $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação tal que Z_0 tem distribuição dada por N . Em

palavras, podemos dizer que Z_n é a cardinalidade dos propagadores do rumor pertencentes a $(n + 1)$ -ésima geração de \mathbb{T}_d . O próximo lema afirma que $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação.

Lema 2.2.5. $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação.

Demonstração. Primeiramente, note que Z_n é um processo cuja distribuição de Z_0 é dada pela distribuição da variável N , já os demais Z_n do processo têm a distribuição da variável X como base. Para verificar que $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação, basta observar que a quantidade de elos incidentes em cada vértice é sempre a mesma. Portanto, segue da homogeneidade de \mathbb{T}_d que a distribuição do número de descendentes associada a um vértice u é sempre a mesma independentemente de quem seja o vértice. Além disso, quaisquer dois sítios que estão em um mesmo nível n possuem distribuições independentes. De fato, a distribuição de cada um deles dependerá apenas dos processos de poisson associados aos seus elos incidentes, que por sua vez, são sempre independentes. Portanto, podemos afirmar que se u e v pertencem a B_n , então X_u e X_v são iid, ou seja, elas são independentes e identicamente distribuídas, e conseqüentemente, o processo $(Z_n)_{n \geq 0}$ definido em (2.11) é um processo de ramificação cuja distribuição de prole dada é por

$$p_i = i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)}{d+1}, \quad \text{para } i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}.$$

□

O próximo lema trata da relação existente entre a propagação do modelo MT e a sobrevivência do processo de ramificação subjacente dado pela propagação do rumor.

Lema 2.2.6. *Seja $(Z_n)_{n \geq 0}$ o processo de ramificação subjacente ao processo-MT. $(Z_n)_{n \geq 0}$ sobrevive se e somente $(\eta_t)_{t \geq 0}$ sobrevive.*

Demonstração. Em primeiro lugar se o processo de ramificação sobrevive, então vamos ter $\{Z_n \geq 1\}$ para todo $n \geq 0$. O fato de $\{Z_n \geq 1\}$ para todo $n \geq 0$ faz com que exista um caminho finito começando em $\mathbf{0}$ e indo até o nível n . Isso pode ser descrito como uma sequência de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ e de tempos $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tais que $\eta_{t_j}(u_j) = 1$ para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, com $u_n = v_n$ e $v_0 = \mathbf{0}$. Logo, para cada n existe uma propagação do rumor indo de $\mathbf{0}$ até v_n com $v_n \in \partial\mathbb{T}_{d,n}$. Utilizando o simbolo $x \xrightarrow{Prop} y$ para denotar a propagação da informação de x até y , esse evento pode ser representado por $\mathbf{0} \xrightarrow{Prop} \partial\mathbb{T}_{d,n}$. Como o evento $\{\mathbf{0} \xrightarrow{Prop} \partial\mathbb{T}_{d,n}\}$ ocorre para todo n segue que

$$\bigcap_{n \geq 0} \{\mathbf{0} \xrightarrow{Prop} \partial\mathbb{T}_{d,n}\} \neq \emptyset$$

e conseqüentemente, o evento $\{\mathbf{0} \xrightarrow{Prop} \infty\}$ ocorre, ou seja, podemos afirmar que o modelo-MT sobrevive.

Para demonstrar a recíproca, basta observar que se o processo-MT sobrevive então, existe um caminho infinito de vértices os quais se tornaram propagadores em seus respectivos tempos. Tomando partes finitas deste caminho infinito vamos ter um caminho finito propagando de $\mathbf{0}$ até v_n pertencente ao nível n da árvore para cada natural n e conseqüentemente o conjunto $B_n \neq \emptyset$ para todo n e isso faz com que o conjunto $\{Z_n \geq 1\}$ para todo $n \geq 0$. \square

Passemos para a parte mais trabalhosa que é composta de alguns resultados que nos permitem demonstrar que o modelo-MT tem uma transição de fase em $d = 3$ e também explicitar a sua probabilidade de propagação.

2.3 Resultados Auxiliares

Vamos iniciar com a proposição que diz respeito ao comportamento da média da variável aleatória X que será utilizada para demonstrar os resultados pretendidos.

Proposição 2.3.1. $\mathbb{E}(X) > 1$ se, e somente se, $d \geq 3$.

Demonstração. Este resultado é uma consequência direta do Lema 2.2.4 e da Proposição 2.2.1 observando que $\mathbb{E}(X_2) = 8/9 < 1$ e $\mathbb{E}(X_3) = 39/32 > 1$. \square

De posse da Proposição 2.3.1 e do resultado de processo de ramificação que diz que um processo de ramificação sobrevive se, e somente se, a média da distribuição de prole é maior do que 1, podemos demonstrar o Teorema 2.1.2.

2.3.1 Demonstração do Teorema 2.1.2

Em primeiro lugar, vamos enunciar a proposição que garante a sobrevivência de processos de ramificação sob determinadas condições.

Proposição 2.3.2. *Seja $(p_i)_{i \geq 0}$ uma distribuição de prole com média m em que p_i é a probabilidade de que um vértice tenha i filhos, cumprindo a condição $p_0 + p_1 < 1$. Então, o processo de ramificação exibe uma transição de fase no sentido de que:*

- se $m \leq 1$, então $\mathbb{P}(Z_n \geq 1, \forall n \geq 0 | Z_0 = 1) = 0$;
- se $m > 1$, então $\mathbb{P}(Z_n \geq 1, \forall n \geq 0 | Z_0 = 1) = 1 - q > 0$.

Além disso, q (a probabilidade de extinção) é a única solução da equação $G(s) = s$ em $[0, 1)$, onde G é a função geradora de probabilidade da distribuição de prole.

Não apresentaremos a demonstração da Proposição 2.3.2, a mesma pode ser encontrada em (SCHINAZI, R. B., 1999). A seguir, vamos provar o Teorema 2.1.2.

Demonstração. De acordo com a Proposição 2.3.2, o processo-MT sobrevive quando a média da distribuição de prole é maior do que 1. A média da distribuição de prole é maior que 1 quando $d \geq 3$ e menor ou igual a 1 quando $d < 3$. Portanto, pela Proposição 2.3.1, se $d \geq 3$, o processo-MT tem probabilidade positiva de sobrevivência. Se $d < 3$, o processo se extingue com probabilidade 1. Desta maneira, o processo-MT exhibe uma transição de fase para $d = 3$.

□

2.4 Prova do Teorema 2.1.1 e do seus corolários

2.4.1 Demonstração do Teorema 2.1.1

A demonstração do teorema está praticamente feita, teremos apenas o trabalho de organizar as ideias a fim de concluirmos a prova. Conforme visto na Definição 3.1.1, utilizaremos $\theta(d)$ para denotar a probabilidade de sobrevivência. Vamos determinar $\theta(d)$ a partir da probabilidade de extinção do processo, ou seja,

$$\theta(d) = 1 - \mathbb{P}(E),$$

onde o evento E representa a extinção do processo-MT. Sem perda de generalidade, podemos analisar a propagação do modelo MT nos restringindo apenas à sobrevivência do modelo em cada uma das N (aleatório) subárvores de \mathbb{T}_d enraizadas no primeiro nível, pois inevitavelmente o boato atingirá o nível 1. Feita esta observação e utilizando a fórmula da probabilidade total, podemos escrever

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E|N = i) \mathbb{P}(N = i), \quad (2.12)$$

lembrando que N representa o número de propagadores do nível 1. Consideremos a sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ definida em (2.11). Pelo Lema 2.2.5, $(Z_n)_{n \geq 0}$ é um processo de ramificação com distribuição de prole dada por

$$p_i = \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)!}{d+1}, \quad i \in \{0, 1, \dots, d\}.$$

Além disso, como $\mathbb{E}(X) > 1$ para $d \geq 3$, veja o Teorema 3.2.2, sabemos que ψ , a probabilidade de extinção do processo de ramificação, é a menor solução positiva da equação $G(s) = s$ no intervalo $[0, 1)$, onde $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$ é a função geradora de probabilidades da

distribuição de prole. Utilizando (4.11), podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbb{E}(s^X) \\
 &= \sum_{i=0}^d s^i \mathbb{P}(X = i) \\
 &= \sum_{i=0}^d s^i i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{i+1}{d+1} \\
 &= \sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^i \frac{i+1}{d+1}.
 \end{aligned}$$

Note que o evento extinção ocorre se, e somente se, todos os N processos de ramificação se extinguirem. Haja visto que todos os N processos de ramificação são independentes e idênticos, podemos afirmar que $\mathbb{P}(E|N = i) = \psi^i$. Agora fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E|N = i)$ por ψ^i e $\mathbb{P}(N = i)$ por $i! \binom{d+1}{i} (s/(d+1))^i i/(d+1)$ na equação (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E) &= \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E|N = i) \mathbb{P}(N = i) \\
 &= \sum_{i=1}^{d+1} \psi^i i \binom{d+1}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{i!}{d+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1}\right)^i \frac{i!}{d+1}.
 \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E)$ na equação (4.10), segue que

$$\begin{aligned}
 \theta(d) &= 1 - \mathbb{P}(E) \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1}\right)^i \frac{i!}{d+1}.
 \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos explicitar a equação $G(s) = s$. Utilizando a expressão da função geradora de probabilidade podemos concluir que

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)!}{d+1} = s.$$

2.4.2 Demonstração do Corolário 2.1.1

Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(d) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \left[1 - \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1} \right] \\ &= 1 - \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1}.\end{aligned}$$

Portanto queremos demonstrar que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1} = 0.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi}{d+1} + \frac{2d\psi^2}{(d+1)^2} + \frac{3d(d-1)\psi^3}{(d+1)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4d(d-1)(d-2)\psi^4}{(d+1)^4} + \dots + \frac{d!\psi^{d+1}}{(d+1)^d} \right].\end{aligned}$$

Evidenciando o termo $\psi/d+1$ obtemos:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\psi}{d+1} \cdot \left[1 + \frac{2d\psi}{d+1} + \frac{3d(d-1)\psi^2}{(d+1)^2} + \frac{4d(d-1)(d-2)\psi^3}{(d+1)^3} + \dots + \frac{d!\psi^d}{(d+1)^{d-1}} \right].$$

Como $\lim_{d \rightarrow \infty} \psi/(d+1) = 0$, precisamos demonstrar que o segundo fator é limitado para todo número natural d , ou seja,

$$1 + \frac{2d\psi}{d+1} + \frac{3d(d-1)\psi^2}{(d+1)^2} + \frac{4d(d-1)(d-2)\psi^3}{(d+1)^3} + \dots + \frac{d!\psi^d}{(d+1)^{d-1}} < \Lambda,$$

para algum $\Lambda \in \mathbb{R}$. Note que

$$\sum_{j=1}^{\infty} jd(d-1)\dots(d-j+2) \frac{\psi^{j-1}}{(d+1)^{j-1}} < \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{d\psi}{d+1} \right)^{j-1}$$

Como a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{d\psi}{d+1} \right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{d\psi}{d+1}\right)^2} < \infty.$$

Portanto, existe $\Lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{d\psi}{d+1}\right)^2} < \Lambda.$$

E assim, podemos concluir que

$$1 + \frac{2d\psi}{d+1} + \frac{3d(d-1)\psi^2}{(d+1)^2} + \frac{4d(d-1)(d-2)\psi^3}{(d+1)^3} + \dots + \frac{d!\psi^d}{(d+1)^{d-1}} < \Lambda,$$

e conseqüentemente, obtemos que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1} = 0.$$

Como

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[1 - \sum_{i=1}^{d+1} i! \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i}{d+1} \right],$$

segue que

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(d) = 1.$$

2.4.3 Demonstração do Corolário 2.1.2

Utilizando a Equação (2.8) e o fato de que $X_d \stackrel{D}{=} N_d - 1$, chegamos a conclusão de que

$$\begin{aligned} X_d &\stackrel{D}{=} N_d - 1 \\ &\stackrel{st}{\leq} N_{d+1} - 1 \\ &\stackrel{D}{=} X_{d+1}. \end{aligned}$$

Onde as notações $\stackrel{D}{=}$ e $\stackrel{st}{\leq}$ representam igualdade em distribuição e dominância estocástica, respectivamente. Assim sendo, temos que X_d é dominada estocasticamente por X_{d+1} e o resultado segue por acoplamento dos processos de ramificação com lei de número de descendentes dado por X_d e X_{d+1} .

2.5 O alcance da propagação em \mathbb{T}_2

Quando o modelo MT com k tentativas frustradas foi considerado no grafo completo, uma quantidade de interesse estava relacionada ao número de contidos no final do processo. Note que este é o número de pessoas que ouviram sobre o boato em algum momento. De acordo com o Teorema 2.1.2 sabemos que esse número é finito quase certamente para $d = 2$. A seguir, fornecemos algumas informações sobre a distribuição da quantidade de contidos no final do processo-MT em \mathbb{T}_2 .

2.5.1 Prova do Teorema 2.1.3

Considere o processo-MT em \mathbb{T}_2 , e seja S_∞ o número final de contidos no final do processo. Nós já provamos que o processo-MT pode ser visto como um processo de ramificação dado por (2.11). Portanto S_∞ coincide com a descendência total de tais processos de ramificação. Para provar o Teorema 2.1.3 nós recorreremos a (DWASS, 1969). De fato, note que

$$\mathbb{P}(S_\infty = i) = \sum_{n=1}^3 \mathbb{P}(S_\infty = i | N = n) \mathbb{P}(N = n), \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbb{P}(N = 1) = \frac{3}{9}, \quad \mathbb{P}(N = 2) = \frac{4}{9}, \quad \mathbb{P}(N = 3) = \frac{2}{9}, \quad (2.14)$$

e pelo Teorema A.1.2 que se encontra no apêndice

$$\mathbb{P}(S_\infty = i | N = n) = \begin{cases} \frac{n}{i} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^i X_j = i - n\right), & i \geq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Aqui X_1, X_2, \dots denotam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com lei comum dada por (2.9) (com $d = 2$). Se $G_i(s)$ e $G_{X_j}(s)$ são funções geradoras de probabilidade $\sum_{j=1}^i X_j$ e X_j , respectivamente, então nós temos

$$G_i(s) = \prod_{j=1}^i G_{X_j}(s) = \left(\frac{2s^2 + 4s + 3}{9}\right)^i. \quad (2.16)$$

Juntando (2.13) com (2.16) obtemos (2.2).

Agora vamos provar que $\mathbb{E}(S_\infty) = 18$. Como

$$\mathbb{E}(S_\infty) = \sum_{n=1}^3 \mathbb{E}(S_\infty | N = n) \mathbb{P}(N = n), \quad (2.17)$$

e $\mu := E(X) = 8/9$ (veja o Lema 2.2.4 para $d = 2$) nós temos para $n \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathbb{E}(S_\infty | N = n) = \left(1 + n \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i\right) = 1 + 9n.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_\infty) &= \sum_{n=1}^3 \mathbb{E}(S_\infty | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^3 (1 + 9n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \frac{30}{9} + \frac{76}{9} + \frac{56}{9} \\ &= \frac{162}{9} \\ &= 18. \end{aligned}$$

2.5.2 Prova do Teorema 2.1.4

Antes de provar Teorema 2.1.4, enunciamos um resultado auxiliar em relação aos processos de ramificação.

Lema 2.5.1. *Seja $(Z_n)_{n \geq 0}$ um processo de ramificação com $Z_0 = 1$ e distribuição dada por (2.9) (com $d = 2$). Sejam G_X e G_{Z_n} funções geradoras de probabilidade X e Z_n , respectivamente. Então,*

$$13/45 + (128s)/\{45(5 - s)\} \leq G_X(s) \leq 1/3 + (2s)/(4 - s), \quad s \in [-1, 1], \quad (2.18)$$

e, para $n \geq 0$

$$\frac{(13/9) \{1 - (8/9)^n\}}{13/9 - (8/9)^n} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \frac{(4/3) \{1 - (8/9)^n\}}{4/3 - (8/9)^n}. \quad (2.19)$$

Demonstração. A ideia por trás da prova do lema é aplicar o Teorema A.1.3 que se encontra no apêndice deste trabalho. O primeiro passo é verificar a condição

$$h(s) := G_X^{(1)}(1)G_X^{(1)}(s)(1-s)^2 - (1 - G_X(s))^2 < 0,$$

onde $G_X^{(1)}(s) := dG_X(s)/ds$. De fato, temos que

$$h(s) = \frac{8}{9} \frac{4(s+1)}{9} (1-s)^2 - \left\{ 1 - \frac{(2s^2 + 4s + 3)}{9} \right\}^2,$$

e após alguns cálculos nós obtemos

$$h(s) = -\frac{32}{81}(s-1)^2 \left(s^2 + \frac{23}{4}s + \frac{3}{4}s \right).$$

Portanto $h(s) < 0$ para todo $s \in [0, 1)$. Portanto, por (i) do Teorema A.1.3 temos que a melhor função geradora fracional linear de limite superior para $G_X(s)$ é dada por $U(s) := 1/3 + (2s)/(4-s)$. Analogamente, (ii) do Teorema A.1.3 implica que a melhor função geradora fracional linear de limite inferior para $G_X(s)$ é dada por $L(s) := 13/45 + (128s)/\{45(5-s)\}$. Consequentemente, obtemos (2.18). Isto é bem conhecido, veja (AGRESTI, 1974), a desigualdade é preservada por composição da mesma função. Por sua vez, isso implica que, para qualquer $n \geq 0$

$$L_n(s) \leq G_{X,n}(s) \leq U_n(s),$$

onde $L_n, G_{X,n}$, e U_n são n -ésima composição de L, G_X , e U , respectivamente. Além disso, como $G_{X,n}(s) = G_{Z_n}(s)$, $G_{Z_n}(0) = \mathbb{P}(T \leq n)$, e por (AGRESTI, 1974, Equação (3.1)) nós temos

$$L_n(0) = \frac{(13/9) \{1 - (8/9)^n\}}{13/9 - (8/9)^n}, \quad U_n(0) = \frac{(4/3) \{1 - (8/9)^n\}}{4/3 - (8/9)^n};$$

nós concluímos (2.19) e a prova está completa. □

Considere o processo-MT em \mathbb{T}_2 e seja R dado por (2.3), o alcance da propagação. Note que, para qualquer n

$$\mathbb{P}(R \leq n) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(R \leq n | N = i) \mathbb{P}(N = i) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(T \leq n)^i \mathbb{P}(N = i),$$

onde T é o tempo de extinção de um processo de ramificação $(Z_n)_{n \geq 0}$ com $Z_0 = 1$ e distribuição de prole dada por (2.9) (com $d = 2$). Da distribuição de probabilidade de N , veja Lema 2.2.1 (com $d = 2$) nós temos que

$$\mathbb{P}(R \leq n) = \frac{3}{9} \mathbb{P}(T \leq n) + \frac{4}{9} \mathbb{P}(T \leq n)^2 + \frac{2}{9} \mathbb{P}(T \leq n)^3. \quad (2.20)$$

Além disso, pelo Lema 2.5.1 obtemos que

$$\alpha_1(n) \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \alpha_2(n).$$

Para encontrar um limite inferior e superior para $\mathbb{E}(R)$, nós usamos (2.20) para obter

$$\mathbb{P}(R > n) = \frac{17}{9} \mathbb{P}(T > n) - \frac{10}{9} \mathbb{P}(T > n)^2 + \frac{2}{9} \mathbb{P}(T > n)^3.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(R > n) = \frac{17}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) - \frac{10}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)^2 + \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)^3. \quad (2.21)$$

novamente, pelo Lema 2.5.1 nós temos o seguinte limite para série da expressão anterior:

$$4,4619 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/3)(8/9)^n}{4/3 - (8/9)^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4/9)(8/9)^n}{13/9 - (8/9)^n} \leq 4,9792,$$

$$2,0982 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(1/3)(8/9)^n}{4/3 - (8/9)^n} \right\}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(4/9)(8/9)^n}{13/9 - (8/9)^n} \right\}^2 \leq 2,3592,$$

$$1,5189 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(1/3)(8/9)^n}{4/3 - (8/9)^n} \right\}^3 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)^3 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(4/9)(8/9)^n}{13/9 - (8/9)^n} \right\}^3 \leq 1,6804.$$

Finalmente, por uma aplicação adequada dos limites anteriores em (2.21), obtemos que

$$\begin{aligned} 6,144 &= \frac{17}{9} 4,4619 - \frac{10}{9} 2,3592 + \frac{2}{9} 1,5189 \\ &\leq \mathbb{E}(R) \\ &\leq \frac{17}{9} 4,9792 - \frac{10}{9} 2,0982 + \frac{2}{9} 1,6804 \\ &= 7,448. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$6,144 \leq \mathbb{E}(R) \leq 7,448.$$

3 O MODELO MT-ADF-K

3.1 Noções e resultados fundamentais

No processo-MT, todo propagador perde o interesse em transmitir o boato ao se envolver em uma tentativa frustrada de transmissão do boato que é caracterizada pela tentativa de informar um indivíduo que já sabe do boato. Uma generalização deste modelo foi explorada pela primeira vez por Carnal numa população estabelecida em um grafo completo, veja em (CARNAL, 1994). Nessa generalização, cada informante se torna contido na segunda tentativa frustrada de transmissão do rumor para alguém que já sabe. Neste capítulo iremos abordar esta versão do modelo para a árvore homogênea \mathbb{T}_d visando generalizar os resultados obtidos para o modelo MT original. O modelo MT ADF- k em \mathbb{T}_d pode ser definido como um processo de Markov em tempo contínuo $(\eta_t^{(k)})_{t \geq 0}$ com o espaço de estados $S = \{-1, 0, 1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{T}_d}$, ou seja, no tempo t o estado do processo é uma função $\eta_t : \mathbb{T}_d \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, \dots, k\}$. O termo ADF- k significa ápice de frustração k , ou seja, quando um propagador experencia a k -ésima tentativa frustrada no processo de transmissão do rumor, ele perde o interesse em transmitir o rumor e se torna um contido. Assumimos que cada vértice $x \in \mathbb{T}_d$ representa um indivíduo, que é dito ignorante se $\eta(x) = -1$, um propagador que experimentou i tentativas frustradas se $\eta(x) = i$, para $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, e um contido se $\eta(x) = k$. Então, se o sistema está na configuração $\eta \in S$, o estado do vértice x muda de acordo com as seguintes taxas de transição

$$\begin{array}{rcll}
 & \text{transição} & & \text{taxa} \\
 -1 & \rightarrow & 0, & \sum_{i=0}^{k-1} n_i(x, \eta), \\
 i & \rightarrow & i+1, & \sum_{i=0}^k n_i(x, \eta),
 \end{array} \tag{3.1}$$

onde

$$n_i(x, \eta) = \sum_{y \sim x} 1\{\eta(y) = i\}$$

é o número de vizinhos mais próximos do vértice x no estado i para a configuração η , para $i \in \{-1, 0, \dots, k\}$. Formalmente, (3.1) significa que se o vértice x está no estado, digamos, -1 no tempo t então a probabilidade de que ele estará no estado 0 no tempo $t+h$, para h pequeno, é $\sum_{i=0}^{k-1} n_i(x, \eta)h + o(h)$, onde $o(h)$ representa uma função tal que $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$. Dizemos que o processo de Markov $(\eta_t^{(k)})_{t \geq 0}$ é o processo de rumor MT ADF- k em \mathbb{T}_d .

Como estamos considerando um grafo com infinitos vértices, nossa primeira tarefa será definir o evento de sobrevivência ou extinção para o processo de rumor.

Definição 3.1.1. *Seja $(\eta_t^{(k)})_{t \geq 0}$, com $k \geq 2$, o processo-MT em \mathbb{T}_d com a configuração inicial $\eta_0^{(k)}$ tal que $\eta_0^{(k)}(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0^{(k)}(x) = 0$, para todo $x \neq \mathbf{0}$. Dizemos que o processo sobrevive quando existe uma sequência $\{(v_i, t_i)\}_{i \geq 0}$, com $(v_i, t_i) \in \mathbb{T}_d \times \mathbb{R}_+$, tal que $v_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$, v_{i+1} é um sucessor de v_i , $t_i < t_{i+1}$, $\eta_{t_i}^{(k)}(v_i) = 1$, para todo $i \geq 0$. Se não existe sobrevivência, nós dizemos que o processo se extingue. Denotamos por $\theta(d, k)$ a probabilidade de sobrevivência para o modelo MT com k tentativas frustradas.*

Em outras palavras, dizemos que existe sobrevivência do rumor, se podemos garantir a existência de um raio a partir da raiz de \mathbb{T}_d , de modo que todos os vértices no raio foram propagadores em algum momento.

Aqui iremos apresentar os fatos em uma ordem que simplifica a compreensão do modelo ADF- k e ao mesmo tempo produz ferramentas indispensáveis para demonstrar os dois principais teoremas deste capítulo. Este capítulo está dividido em duas seções, a primeira aborda o modelo MT ADF-2 e segunda é destinada a lidar com o modelo MT ADF- k . Dito isto, podemos enunciar os dois principais teoremas deste capítulo.

Teorema 3.1.1. *Considere o processo-MT ADF-2 em \mathbb{T}_d com $d \geq 2$. Então $\theta(d, 2) > 0$. Outrossim,*

$$\theta(d, 2) = 1 - \sum_{i=1}^{d+1} \binom{i+1}{2} \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1}\right)^i \frac{i!}{(d+1)^2}$$

onde ψ é a menor raiz não negativa da equação

$$\sum_{\ell=0}^d \binom{\ell+2}{2} \binom{d}{\ell} \left(\frac{s}{d+1}\right)^\ell \frac{(\ell+1)!}{(d+1)^2} = s.$$

A partir do Teorema 3.1.1, podemos enunciar um corolário que diz respeito a probabilidade de propagação em árvores de dimensões cada vez maiores.

Corolário 3.1.1. $\lim_{d \rightarrow \infty} \theta(d, 2) = 1$.

Destacamos aqui o fato de que quando generalizamos o modelo MT através do aumento do número frustrações permitidas a um propagador antes que ele perca o interesse em propagar o boato, observamos que a média do número de indivíduos que se tornam propagadores aumenta. Uma pergunta a se fazer é se existe um número de frustrações permitidas a um propagador tal que a partir deste valor o número médio de indivíduos informado por um unico propagador seja superior a 1, fazendo com que esse modelo tenha probabilidade positiva de sobrevivência em $\mathbb{T}_1 = \mathbb{Z}$. A resposta para esta pergunta é não, nenhum modelo ADF- k possui transição de fase em \mathbb{Z} . Para ver isso, basta observar que em \mathbb{Z} cada propagador, com exceção da raiz, possui apenas um vizinho pretendente pra receber a informação e como existe uma probabilidade positiva de que o boato não seja

transmitido para este pretendente. Isso faz com que exista um número natural positivo no qual a transmissão falha. Feito esse comentário, vamos enunciar os resultados do modelo MT ADF- k .

Teorema 3.1.2. *Considere o processo-MT ADF k em \mathbb{T}_d com $k \geq 2$ e $d \geq 2$. Então $\theta(d, k) > 0$. Ademais, sejam*

$$S^*(i, k) := \sum_{m_1=1}^i \sum_{m_2=m_1}^i \cdots \sum_{m_{k-1}=m_{k-2}}^i \prod_{\ell=1}^{k-1} m_\ell, \quad (3.2)$$

e

$$S(i, k) := \sum_{m_1=1}^{i+1} \sum_{m_2=m_1}^{i+1} \cdots \sum_{m_{k-1}=m_{k-2}}^{i+1} \prod_{\ell=1}^{k-1} m_\ell. \quad (3.3)$$

Então

$$\theta(d, k) = 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i!}{(d+1)^k} \binom{d+1}{i} S^*(i, k) \quad (3.4)$$

onde ψ é a menor raiz não-negativa da equação

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)!}{(d+1)^k} S(i, k) = s. \quad (3.5)$$

Seguindo a ordem em que os dois temas foram abordados, vamos inicialmente demonstrar os resultados do modelo ADF-2, até porque vamos necessitar de alguns desses resultados para demonstrar o teorema principal da generalização do modelo para um número natural $k > 2$.

3.2 O modelo MT com ápice de frustração $k=2$

A distribuição de prole do modelo com 2-tentativas frustradas fica ligeiramente alterada devido ao privilégio que o propagador tem de poder ter uma tentativa frustrada a mais em comparação com o modelo MT original.

Seja $N^{(2)}$ o número de propagadores gerados pelo propagador inicial no modelo MT ADF-2. Essa variável aleatória também pode ser interpretada usando o problema do colecionador de cupons. Neste caso, ela modela a quantidade de cupons que uma pessoa coleciona antes que haja a repetição de dois cupons da coleção, sendo que há $d+1$ cupons diferentes e todos têm a mesma chance de serem colecionados. O próximo resultado é uma abordagem sobre a distribuição de probabilidade desta variável aleatória discreta.

Proposição 3.2.1. *A variável aleatória $N^{(2)}$ tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}(N^{(2)} = i) = i \binom{d+1}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^{i+1} \frac{i!}{d+1} \binom{i+1}{2}, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, d+1\}. \quad (3.6)$$

A Proposição 3.2.1 será uma consequência do estudo da variável aleatória $X^{(2)}$, definida como sendo o número de propagadores que um determinado propagador (diferente da raiz) gera no modelo MT ADF-2. O termo $\binom{i+1}{2}$ que aparece em (3.6) é denominado número triangular, de acordo com Howard Eves, veja em (EVES, H., 1969), o conceito de números triangulares provavelmente se originou com os pitagóricos. Esta escola foi fundada no século VI a.c, ela era composta pelos seguidores de Pitágoras. Por ser uma sociedade secreta, então hoje ninguém sabe com precisão o que estudavam e nem como funcionava. De modo geral, um número triangular é um número natural que pode ser representado na forma de um triângulo equilátero. O n -ésimo número triangular pode ser visto como o número de pontos de uma forma triangular com lados formados por n pontos, o que equivale à soma dos n primeiros números naturais.

Em geral, o n -ésimo número triangular é dado por:

$$T_n = \sum_{\ell=1}^n \ell, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Desenvolvendo os termos do somatório vamos chegar a conclusão de que:

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \binom{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Lema 3.2.1. *Sejam $(T_i)_{i \geq 1}$ a sequência de números triangulares e X o número de propagadores que um único propagador gera antes que ocorra a primeira tentativa frustrada. Então,*

$$\sum_{i=0}^d T_{i+1} \mathbb{P}(X = i) = d + 1.$$

Demonstração. A ideia para demonstrar este lema se baseia em dispor os valores envolvidos na soma em formato de uma matriz quadrada de ordem $d+1$, onde $a_{i\ell} = ip_\ell$ com $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$, $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$ e $p_\ell = \mathbb{P}(X = \ell)$. Esta matriz nos fará entender de maneira simples e objetiva tudo o que precisamos fazer para demonstrar o Lema 3.2.1. Como estamos trabalhando em \mathbb{T}_d , essa matriz possui $d+1$ linhas e $d+1$ colunas. Pelo Lema 2.2.3, temos que $\sum_{\ell=0}^d p_\ell = 1$ e conseqüentemente, somando os elementos das linhas desta matriz vamos obter $T_{d+1} = 1 + 2 + \dots + (d+1) = (d+2)(d+1)/2$. Além disso, vamos decompor a matriz quadrada em duas sub-matrizes triangulares complementares e

calcular quanto vale a soma dos elementos de cada uma delas.

$$A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_d \\ 2p_0 & 2p_1 & \cdots & 2p_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (d+1)p_0 & (d+1)p_1 & \cdots & (d+1)p_d \end{pmatrix}.$$

A soma de todos dos elementos da matriz A que estão situados na diagonal principal juntamente com aqueles elementos que estão situados acima dela, é a parte de A que nós queremos que dê $d+1$. Para concluir este fato, vamos provar que a soma dos elementos da matriz A que estão situados abaixo da diagonal principal, ou seja, os elemento a_{ij} tais que $i > j$, é $d(d+1)/2$. Denotando por

$$\delta_j := \sum_{i=1}^j (d+2-i)p_{j-i}, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, d\}, \quad (3.7)$$

a soma de todos os elementos da sub-matriz inferior é dada pelo somatório $\sum_{j=1}^d \delta_j$. Pelo Lema B.1.2 do apêndice, sabemos que

$$\sum_{j=1}^d \delta_j = \frac{d(d+1)}{2}. \quad (3.8)$$

Utilizando o fato de que a soma de todos os elementos da matriz A é $(d+2)(d+1)/2$ e juntamente com (3.8) e levando em consideração que as duas partes da matriz são complementares, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d T_{i+1} \mathbb{P}(X=i) &= \frac{(d+2)(d+1)}{2} - \frac{d(d+1)}{2} \\ &= \frac{(d+2)(d+1) - d(d+1)}{2} \\ &= \frac{2(d+1)}{2} \\ &= d+1. \end{aligned}$$

□

Denotando por $X^{(2)}$ o número de propagadores que um propagador diferente da raiz gera em \mathbb{T}_d . As variáveis $X^{(2)}$ e $N^{(2)}$ têm comportamentos idênticos, no sentido de que

$$\mathbb{P}(X^{(2)} = i) = \mathbb{P}(N^{(2)} = i+1)$$

para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, d\}$. Elas diferem apenas pelo fato de que a variável $N^{(2)}$ assume valores no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, d+1\}$ enquanto que a variável $X^{(2)}$ assume valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, d\}$. Um outro aspecto relevante é o fato de que $X^{(2)}$ também pode ser interpretada usando o problema do colecionador de cupons. Neste caso, $X^{(2)}$ modela a

quantidade de cupons que uma pessoa coleciona antes que haja a repetição de dois cupons da coleção, sendo que há $d + 1$ cupons diferentes, todos têm a mesma chance de serem colecionados e desde que a coleção seja formada inicialmente por um cupom. O próximo resultado é uma abordagem sobre a distribuição de probabilidade desta variável aleatória discreta.

Proposição 3.2.2. *A distribuição de $X^{(2)}$ é dada por*

$$\mathbb{P}(X^{(2)} = i) = \binom{i+2}{2} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+2}}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}. \quad (3.9)$$

Demonstração. Para determinar a distribuição de probabilidade da variável $X^{(2)}$, utilizaremos o fato que diz que a probabilidade do $\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\}$ ocorrer em Y_i , para uma sequência Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1} , de variáveis aleatórias exponenciais iid (independentes e idênticamente distribuídas) para todo $i \in \{1, 2, \dots, d+1\}$ é dada por

$$\mathbb{P}(\min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d+1}\} = Y_i) = \frac{1}{(d+1)}.$$

Vale aqui ressaltar que o resultado anterior nos diz que a probabilidade de um indivíduo receber a informação na primeira tentativa é sempre a mesma, a saber, $1/(d+1)$ e portanto vemos que este valor não depende da taxa λ . Passemos ao cálculo da distribuição de probabilidade de $X^{(2)}$. Não é difícil ver que $X^{(2)}$ toma valores sobre o conjunto $\{0, 1, \dots, d\}$. Note que, para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, o evento $\{X^{(2)} = i\}$ ocorre se, e somente se, temos a primeira tentativa frustrada entre as primeiras $i+1$ interações e a segunda tentativa frustrada na $(i+2)$ -ésima interação com outro indivíduo que muda o estado do propagador. Sejam $1 \leq m_1 \leq i+1$ e A_{m_1} o evento em que a primeira tentativa frustrada ocorre na m_1 -ésima interação e a segunda tentativa frustrada ocorre na $(i+2)$ -ésima interação com outro indivíduo, respectivamente. Denotando por B_i (ou por B_i^c) o evento dado pela ocorrência de uma transmissão (ou de uma tentativa frustrada de transmissão) na i -ésima interação. Como o evento $\{X^{(2)} = i\}$ é dado por i transmissões nas $(i+1)$ -ésimas primeiras tentativas e uma tentativa frustrada na $(i+2)$ -ésima interação com outro indivíduo que muda o estado do propagador, segue que

$$\{X^{(2)} = i\} = \bigcup_{m_1=1}^{i+1} B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{m_1}^c \cap \dots \cap B_{i+1} \cap B_{i+2}^c.$$

Note que, se $m_1 \in \{1, 2, \dots, i+1\}$, vale a igualdade a seguir

$$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{m_1}^c \cap \dots \cap B_{i+1} \cap B_{i+2}^c = \left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j \right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c.$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\{X^{(2)} = i\} = \bigcup_{m_1=1}^{i+1} \left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j \right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c.$$

Agora utilizando a fórmula da multiplicação de probabilidades, assim como foi feito em (2.5), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j\right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c\right) &= \binom{d}{i} \frac{i!}{(d+1)^i} \frac{m_1(i+1)}{(d+1)^2} \\ &= \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}} \frac{m_1}{(d+1)} \\ &= \frac{m_1}{(d+1)} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte igualdade

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j\right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c\right) = \frac{m_1}{(d+1)} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}. \quad (3.10)$$

Como temos uma união disjunta em (3.2), pelo axioma 3 da definição de probabilidade juntamente com (3.10), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{(2)} = i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m_1=1}^{i+1} \left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j\right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c\right) \\ &= \sum_{m_1=1}^{i+1} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1, j \neq m_1}^{i+1} B_j\right) \cap B_{m_1}^c \cap B_{i+2}^c\right) \\ &= \sum_{m_1=1}^{i+1} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}} \frac{m_1}{(d+1)} \\ &= \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+2}} \sum_{m_1=1}^{i+1} m_1. \\ &= \binom{i+2}{2} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+2}}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Para concluirmos, basta demonstrarmos que

$$\sum_{i=0}^d \mathbb{P}(X^{(2)} = i) = 1. \quad (3.11)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{(2)} = i) &= \frac{1}{d+1} \binom{i+2}{2} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \frac{T_{i+1}}{d+1} \mathbb{P}(X = i), \quad i \in \{0, 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

E o resultado segue do Lema 3.2.1. \square

As funções de probabilidade de $X^{(2)}$ e $N^{(2)}$ estão relacionadas de tal forma que podemos escrever seguinte igualdade, $\mathbb{P}(X^{(2)} = i) = \mathbb{P}(N^{(2)} = i + 1)$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$. Isso nos permite concluir a Proposição 3.2.1

Concluído o resultado sobre a distribuição de probabilidade de $X^{(2)}$, podemos passar para a proposição que diz respeito ao comportamento da sua média.

Proposição 3.2.3. $\mathbb{E}X^{(2)} > 1$ se, e somente se, $d \geq 2$.

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\mathbb{E}X^{(2)} = \sum_{i=0}^d i\mathbb{P}(X^{(2)} = i).$$

Escrevendo seus dois primeiros termos de maneira explícita, obtemos

$$\mathbb{E}X^{(2)} = \mathbb{P}(X^{(2)} = 1) + 2\mathbb{P}(X^{(2)} = 2) + \sum_{j=3}^d j\mathbb{P}(X^{(2)} = j)$$

Escrevendo,

$$\mathbb{E}X^{(2)} = \mathbb{P}(X^{(2)} = 2) + \mathbb{P}(X^{(2)} = 1) + \mathbb{P}(X^{(2)} = 2) + \sum_{j=3}^d j\mathbb{P}(X^{(2)} = j).$$

Como $\mathbb{P}(X^{(2)} = i) > 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$, segue que

$$\mathbb{E}X^{(2)} > \mathbb{P}(X^{(2)} = 2) + \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(X^{(2)} = j).$$

Agora utilizando o fato de que se $d \geq 2$, então

$$\mathbb{P}(X^{(2)} = 2) > \mathbb{P}(X^{(2)} = 0),$$

obtemos que

$$\mathbb{E}X^{(2)} > \sum_{j=0}^d \mathbb{P}(X^{(2)} = j).$$

Pela Proposição 3.2.2, podemos afirmar que:

$$\sum_{j=0}^d \mathbb{P}(X^{(2)} = j) = 1.$$

Segue que

$$\mathbb{E}X^{(2)} > \sum_{i=0}^d \mathbb{P}(X^{(2)} = i) = 1.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}X^{(2)} > 1.$$

Antes de prosseguirmos com as demonstrações, vamos justificar a desigualdade

$$\mathbb{P}(X^{(2)} = 0) < \mathbb{P}(X^{(2)} = 2), \quad \text{para todo } d \geq 2.$$

Escrevendo as duas probabilidades e multiplicando cruzado, a desigualdade

$$\frac{1}{(d+1)^2} < \frac{18}{(d+1)^2} \frac{d}{d+1} \frac{(d-1)}{d+1}$$

é equivalente a

$$(d+1)^2 < 18d(d-1).$$

Desenvolvendo os dois membros da desigualdade obtemos:

$$d^2 + 2d + 1 < 18d^2 - 18d.$$

Seguindo adequadamente obtemos:

$$17d^2 - 20d - 1 > 0$$

Aplicando a fórmula de Báskara na resolução obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4.a.c \\ &= 20^2 - 4.17.(-1) \\ &= 468. \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, a desigualdade prevalece se $d > d_2$, onde

$$d_2 = \frac{20 + \sqrt{468}}{34} \approx 1,22.$$

Portanto, a desigualdade é válida para $d \geq 2$. Para concluir a demonstração, basta mostrar que $\mathbb{E}X^{(2)} < 1$ para $d = 1$. De fato, se $d = 1$ temos:

$$\mathbb{E}X^{(2)} = 0.\mathbb{P}(X^{(2)} = 0) + 1\mathbb{P}(X^{(2)} = 1) = 3/4.$$

E assim, finalizamos a prova. □

Encerramos esta seção com a demonstração do seu principal teorema que garante a existência, com probabilidade positiva, de propagação do rumor na árvore homogênea. Além disso, exibimos uma expressão para $\theta(d, 2)$.

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.1.1

A prova do Teorema 3.1.1 é feita utilizando o fato bem conhecido de que um processo de ramificação sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, a média de sua distribuição de prole é maior do que 1. Além disso, a probabilidade de sobrevivência pode ser obtida a partir da raiz em $(0, 1]$ da equação $G^{(2)}(s) = s$, onde $G^{(2)}$ é a função geradora de probabilidade da distribuição de prole. Portanto, a prova do Teorema 3.1.1 é uma consequência do Lema 2.2.6 e a Proposição 3.2.3. Na verdade, o processo-MT sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, o processo de ramificação subjacente

sobreviver, o que acontece se, e somente se, $\mathbb{E}(X^{(2)}) > 1$. Portanto, podemos afirmar que o processo-MT ADF-2 sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, $d \geq 2$.

Com relação a expressão de $\theta(d, 2)$, a ideia é obtê-la a partir do evento $E^{(2)}$ que representa a extinção do processo-MT ADF-2 em \mathbb{T}_d . A probabilidade de extinção do processo pode ser calculada aplicando a fórmula da probabilidade total juntamente com a igualdade $\mathbb{P}(E^{(2)}|N^{(2)} = i) = \psi^i$, onde ψ é a menor raiz em $(0, 1]$ da equação $G^{(2)}(s) = s$. Fazendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^{(2)}) &= \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E^{(2)}|N^{(2)} = i) \mathbb{P}(N^{(2)} = i) \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} \psi^i i \binom{d+1}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^{i+1} \frac{i!}{d+1} \binom{i+1}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1}\right)^i \frac{i!}{(d+1)^2} \binom{i+1}{2}. \end{aligned}$$

Agora, substituindo $\mathbb{P}(E^{(2)})$ na equação que segue vamos ter

$$\begin{aligned} \theta(d, 2) &= 1 - \mathbb{P}(E^{(2)}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i \binom{d+1}{i} \left(\frac{\psi}{d+1}\right)^i \frac{i!}{(d+1)^2} \binom{i+1}{2}. \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos explicitar a equação $G^{(2)}(s) = s$. Utilizando a definição de função geradora de probabilidade podemos concluir que

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^{i+1} \frac{(i+1)!}{d+1} \binom{i+2}{2} = s.$$

3.3 O modelo-MT ADF-k.

A frustração ocorre quando alguma coisa que era esperada não aconteceu, aqui em nosso modelo, o que frustra o propagador é a falta de eficiência em propagar o boato. Por ironia do destino, quanto mais o propagador for tolerante ao fracasso, a mais gente ele irá levar a sua mensagem. O propagador do boato não deseja ter tentativas em vão, ele quer ter eficiência em propagar, ou seja, a cada tentativa que ele fizer, o desejo é que esta se frutifique em sucesso. Caso ele atinja um nível k de tentativas frustradas, ele se contém e para de propagar o boato para seus vizinhos.

Nesta seção, vamos abordar o modelo-MT ADF- k , onde é permitido que o propagador tenha $k \geq 2$ tentativas frustradas antes de mudar o seu estado de propagador para contido. Tendo como alvo a demonstração do Teorema 3.1.2, primeiramente iremos abordar

a distribuição do número de propagadores que um propagador gera e por último, vamos apresentar um argumento de acoplamento para mostrar que a variável aleatória do modelo ADF-2 é dominada estocasticamente pela variável aleatória do modelo ADF- k . Através deste acoplamento podemos concluir que o modelo ADF- k também possui probabilidade positiva de sobrevivência para $d \geq 2$.

Consideremos agora o processo-MT ADF- k , para $k \geq 2$. Denote por $N^{(k)}$ (ou por $X^{(k)}$) o número de propagadores que a raiz (ou que outro propagador) gera. Devido ao fato do método utilizado para concluir que $\mathbb{E}X^{(k)} > 1$ para $k = 1$ e $k = 2$ ter se mostrado ineficiente para concluir que $\mathbb{E}X^{(k)} > 1$ para $k \geq 3$, vamos construir um acoplamento que nos permita concluir que $\mathbb{E}X^{(k)} \geq \mathbb{E}X^{(2)}$, para todo $d \geq 2$ e $k \geq 2$.

Proposição 3.3.1. *Dado $d \geq 2$ e para todo $k \geq 2$, vale a desigualdade*

$$\mathbb{E}X^{(k)} \geq \mathbb{E}X^{(2)}.$$

Demonstração. Considere o modelo de MT ADF- k em \mathbb{T}_d , nesse ambiente um propagador possui d vizinhos pertencentes ao próximo nível da árvore, os quais iremos supor que seguem uma enumeração $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$. Vamos construir modelos MT ADF- k simultâneos para cada $k \geq 2$. Cada tentativa de transmissão é dada pelo sorteio de uma uniforme $(0, 1]$, fazendo com que tenhamos uma sequência $(U_\ell)_{\ell \geq 1}$ de variáveis aleatórias mutuamente independentes. Dizemos que houve uma tentativa frustrada de transmissão do rumor sempre que o propagador tenta informar um indivíduo que já sabe do boato. No modelo ADF- k , um propagador permanece interessado em transmitir o boato até que ocorra a k -ésima tentativa frustrada.

Para acoplar os diversos tipos de modelos ADF- k , vamos tomar uma partição $I_d = \{A_1, A_2, \dots, A_{d+1}\}$ do intervalo $[0, 1)$ em que $A_i = ((i-1)/(d+1), i/(d+1)]$. O resultado de cada sorteio vai contabilizar se temos uma transmissão ou uma tentativa frustrada. Cada interação entre o propagador e v_i é dada pelo contemplamento do intervalo A_i por alguma uniforme. Cada uma delas resulta numa tentativa frustrada sempre que v_i não for mais ignorante. Sem perda de generalidade, vamos supor que o intervalo A_{d+1} já tenha sido contemplado uma única vez antes de iniciarmos os sorteios das uniformes $\{U_1, U_2, \dots\}$.

O próximo passo da nossa demonstração é associar cada intervalo A_i às funções indicadoras $\chi_i^{(k)}$ e $\chi_i^{(k+1)}$ para $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Dado $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, a i -ésima indicadora é dada por

$$\chi_i^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{se alguma uniforme cai no } i\text{-ésimo intervalo da partição } I_d \\ & \text{antes de observar } k+1 \text{ uniformes caindo num mesmo intervalo;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente, vamos definir uma sequência de variáveis aleatórias indicadoras $\chi_i^{(k+1)}$ com $i \in \{1, 2, \dots, d\}$,

$$\chi_i^{(k+1)} = \begin{cases} 1, & \text{se alguma uniforme cai no } i\text{-ésimo intervalo da partição } I_d \\ & \text{antes de observar } k+2 \text{ uniformes caindo num mesmo intervalo;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que ambas sequências foram definidas a partir da mesma sequência de uniformes e portanto pertencem ao mesmo espaço de probabilidade. A ideia agora é expressar as variáveis $X^{(k)}$ e $X^{(k+1)}$ como uma soma das funções indicadoras. Note que

$$X^{(k)} = \sum_{j=1}^{d+1} \chi_j^{(k)}.$$

Analogamente, temos que

$$X^{(k+1)} = \sum_{j=1}^d \chi_j^{(k+1)}.$$

Pela construção, $X^{(k+1)}$ domina $X^{(k)}$ estocasticamente. De fato, se $\chi_i^{(k)} = 0$, naturalmente, temos $\chi_i^{(k)} \leq \chi_i^{(k+1)}$. Caso tenhamos $\chi_i^{(k)} = 1$, isso significa que o i -ésimo intervalo da partição foi contemplado por alguma uniforme antes da $(k+1)$ -ésima tentativa frustrada. Como $k+1 < k+2$, segue que o i -ésimo intervalo foi contemplado antes da $(k+2)$ -ésima tentativa frustrada. Logo, $\chi_i^{(k+1)} = 1$ e conseqüentemente, $\chi_i^{(k)} \leq \chi_i^{(k+1)}$. Portanto, temos a majoração $\chi_i^{(k)} \leq \chi_i^{(k+1)}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Isso faz com que $X^{(k+1)}$ domine $X^{(k)}$ estocasticamente, veja a majoração

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \sum_{j=1}^d \chi_j^{(k)} \\ &\leq \sum_{j=1}^d \chi_j^{(k+1)} \\ &= X^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Como $X^{(k)} \leq X^{(k+1)}$, segue via propriedade de esperança que $\mathbb{E}X^{(k)} \leq \mathbb{E}X^{(k+1)}$. Daí, pela monotonicidade da esperança em k , podemos concluir que

$$\mathbb{E}X^{(2)} \leq \mathbb{E}X^{(k)}.$$

□

As somas $S^*(i, k)$ e $S(i, k)$ já foram definidas no início desta seção e suas expressões podem ser encontradas em (3.2) e (3.3), respectivamente.

Proposição 3.3.2. *A variável aleatória $N^{(k)}$ tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}\left(N^{(k)} = i\right) = \binom{d+1}{i} \frac{i!}{(d+1)^i} \frac{i S^*(i, k)}{(d+1)^k}, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, d+1\}.$$

Da mesma forma que na seção anterior, aqui também temos duas variáveis que tem comportamentos idênticos, no sentido de que $\mathbb{P}\left(X^{(k)} = i\right) = \mathbb{P}\left(N^{(k)} = i+1\right)$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, d\}$. Desse modo podemos, sem perda de generalidade, nos dedicar apenas em demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 3.3.3. *A variável aleatória $X^{(k)}$ tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}\left(X^{(k)} = i\right) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} S(i, k), \quad i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, d\}. \quad (3.12)$$

Ademais, $\mathbb{E}X^{(k)} > 1$ para todo $d \geq 2$.

Demonstração. Seja $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1$ e $A_{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}}$ o evento em que as tentativas frustradas ocorrem na m_1 -ésima, m_2 -ésima, \dots , m_{k-1} -ésima, e na $(i+k)$ -ésima interação com outro indivíduo, respectivamente. Denotando por B_i (ou por B_i^c) o evento dado pela ocorrência de uma transmissão (ou de uma tentativa frustrada de transmissão) na i -ésima interação. Como o evento $\{X^{(k)} = i\}$ é dado por i transmissões nas $(i+k-1)$ -ésimas primeiras tentativas, seguido de uma tentativa frustrada na $(i+k)$ -ésima interação com outro indivíduo que muda o estado do propagador, segue que

$$\{X^{(k)} = i\} = \bigcup_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \left(\bigcap_{j=1, j \notin \{m_1, \dots, m_{k-1}\}}^{k+i-1} B_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_{m_j}^c \right) \cap B_{i+k}^c. \quad (3.13)$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \left(\bigcap_{j=1, j \notin \{m_1, \dots, m_{k-1}\}}^{k+i-1} B_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_{m_j}^c \right) \cap B_{i+k}^c \right).$$

Como a união dada por (3.13) é disjunta e denotando por $M := \{m_1, \dots, m_{k-1}\}$ e por $N := \{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1\}$, segue que

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \sum_N \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{j=1, j \notin M}^{k+i-1} B_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_{m_j}^c \right) \cap B_{i+k}^c \right).$$

Pela fórmula da multiplicação de probabilidade, podemos escrever

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \sum_N \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}} \frac{\prod_{\ell=1}^{k-1} \phi_\ell}{(d+1)^{k-1}}.$$

Denotando por ϕ_ℓ o número de possibilidades de ocorrer uma tentativa frustrada na m_ℓ -ésima interação com outro indivíduo e utilizando a fórmula da multiplicação de probabilidades generalizada, temos que

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \frac{\prod_{\ell=1}^{k-1} \phi_\ell}{(d+1)^{k-1}} \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+1}}.$$

Colocando para fora do somatório os termos que não dependem dos índices, temos

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} \phi_\ell.$$

De modo geral, podemos escrever $\phi_\ell = m_\ell - \ell + 1$. Para ver esta igualdade, basta notar que antes da m_ℓ interação com outro indivíduo tivemos $m_\ell - 1$ interações, das quais $(\ell - 1)$ não triunfaram. Fazendo as contas, chegamos que $m_\ell - \ell$ vizinhos já não são mais ignorantes. Além desses, temos o vizinho informante do nível anterior que faz com que o número total de vizinhos não ignorantes seja igual a $m_\ell - \ell + 1$. Assim sendo, temos que o número de possibilidades de ocorrer uma tentativa frustrada na m_ℓ -ésima interação com outro indivíduo é dada por $\phi_\ell = m_\ell - \ell + 1$. Considerando que $\phi_\ell = m_\ell - \ell + 1$, vamos ter a seguinte expressão para probabilidade do evento $\{X^{(k)} = i\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{(k)} = i) &= \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} \phi_\ell \\ &= \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m_\ell - \ell + 1). \end{aligned}$$

Utilizando o Lema B.2.1, podemos escrever

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} \sum_{m_1=1}^{i+1} \sum_{m_2=m_1}^{i+1} \dots \sum_{m_{k-1}=m_{k-2}}^{i+1} \prod_{\ell=1}^{k-1} m_\ell.$$

Ou seja,

$$\mathbb{P}(X^{(k)} = i) = \binom{d}{i} \frac{(i+1)!}{(d+1)^{i+k}} S(i, k).$$

Pela Proposição 3.3.1, sabemos que dado $d \geq 2$ e para todo $k \geq 2$, vale que $\mathbb{E}X^{(k)} \geq \mathbb{E}X^{(2)}$. Como pela Proposição 3.2.3, temos que $\mathbb{E}X^{(2)} > 1$ para todo $d \geq 2$. Consequentemente, $\mathbb{E}X^{(k)} > 1$ para todo $d \geq 2$. Isto completa a demonstração. \square

Observação 3.3.1. Voltando ao Problema do Colecionador de Cupons, analogamente ao caso $k = 1$, $X^{(k)}$ tem a mesma distribuição que o número de cupons que devem ser sorteados para ver o k -ésimo cupom repetido, desde que a coleção seja formada inicialmente por um cupom.

Vamos finalizar este capítulo provando o Teorema 3.1.2 que generaliza os resultados para o modelo MT em \mathbb{T}_d .

3.3.1 Demonstração do Teorema 3.1.2

A prova do Teorema 3.1.2 também é feita utilizando o fato bem conhecido de que um processo de ramificação sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, a média da distribuição de prole é maior do que 1. Além disso, a probabilidade de sobrevivência pode ser obtida a partir da raiz em $(0, 1]$ da equação $G^{(k)}(s) = s$, onde $G^{(k)}$ é a função geradora de probabilidade da distribuição de prole. Portanto, a prova do Teorema 3.1.2 é uma consequência do Lema 2.2.6 e da Proposição 3.12. Na verdade, o processo-MT sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, o processo de ramificação subjacente o fizer, o que acontece se, e somente se, $\mathbb{E}(X^{(k)}) > 1$. Portanto, podemos afirmar que o modelo MT ADF- k sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, $d \geq 2$.

Denotando por $E^{(k)}$ o evento extinção do processo-MT ADF- k , a ideia é obter a expressão de $\theta(d, k)$ a partir da probabilidade de $E^{(k)}$. A probabilidade de extinção do processo pode ser calculada aplicando a fórmula da probabilidade total juntamente com a igualdade $\mathbb{P}(E^{(k)} | N^{(k)} = i) = \psi^i$, onde ψ é a menor raiz em $(0, 1]$ da equação $G^{(k)}(s) = s$. Fazendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E^{(k)}) &= \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(E^{(k)} | N^{(k)} = i) \mathbb{P}(N^{(k)} = i) \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} \psi^i \binom{d+1}{i} \frac{i!}{(d+1)^i} \frac{i S^*(i, k)}{(d+1)^k} \\ &= \sum_{i=1}^{d+1} i \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i!}{(d+1)^k} \binom{d+1}{i} S^*(i, k). \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E^{(k)})$ na seguinte equação

$$\begin{aligned} \theta(d, k) &= 1 - \mathbb{P}(E^{(k)}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{d+1} i \left(\frac{\psi}{d+1} \right)^i \frac{i!}{(d+1)^k} \binom{d+1}{i} S^*(i, k). \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos explicitar a equação $G^{(k)}(s) = s$. Utilizando a definição de função geradora de probabilidade podemos concluir que

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)!}{(d+1)^k} S(i, k) = s.$$

4 ÁRVORES ALEATÓRIAS

4.1 Modelo e principais resultados

Neste capítulo, vamos estudar o modelo de Maki-Thompson nas árvores aleatórias. Seja ξ uma variável aleatória discreta que toma valores em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e que tem $p_d := \mathbb{P}(\xi = d)$ como distribuição de probabilidade. Tipicamente, um processo de ramificação começa com um único indivíduo que dá origem a novos indivíduos os quais são chamados filhos e fazem parte da primeira geração, os filhos deles são chamados de segunda geração, e assim por diante; o número de filhos de indivíduos diferentes são cópias independentes de ξ . A distribuição da variável aleatória ξ é chamada de distribuição da prole.

Todo processo de ramificação gera uma árvore aleatória \mathbb{T} (finita ou infinita) com raiz, tendo o indivíduo inicial como raiz. Os principais resultados do processo-MT podem ser generalizados para as árvores aleatórias em decorrência das semelhanças estruturais existentes entre esses dois tipos de grafos.

Para o caso determinístico das árvores homogêneas mostramos que a probabilidade de sobrevivência do modelo-MT é dada em função da dimensão da árvore; além disso, chegamos a conclusão de que o modelo MT tem probabilidade positiva de sobrevivência sempre que $d \geq 3$. No cenário das árvores aleatórias, o papel de determinar a probabilidade de sobrevivência do modelo MT é desempenhado pelos parâmetros da distribuição de prole dos vértices. Utilizaremos $\theta(\vartheta)$ para denotar a probabilidade de sobrevivência do processo-MT em uma árvore aleatória \mathbb{T} cujo parâmetro da variável geradora é um vetor representado por ϑ . Dado um vértice $v \in \mathbb{T}$, denotamos por $X(v)$ o número de propagadores que este único vértice gera em \mathbb{T} . Por simplicidade, vamos escrever apenas X , sem mencionar o vértice. Nosso primeiro teorema deste capítulo caracteriza a probabilidade de sobrevivência do processo-MT em \mathbb{T} a partir da média de X .

Teorema 4.1.1. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT com configuração inicial η_0 , tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$, em uma árvore aleatória \mathbb{T} com variável ξ . Então, sua probabilidade de sobrevivência é dada por*

$$\theta(\vartheta) \begin{cases} = 0, & \text{se } \mathbb{E}(X|\vartheta) \leq 1; \\ > 0, & \text{se } \mathbb{E}(X|\vartheta) > 1. \end{cases}$$

onde ϑ é o parâmetro de ξ .

Teorema 4.1.2. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT com configuração inicial η_0 , tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$*

e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$, em uma árvore aleatória \mathbb{T} com variável ξ . Então

$$\theta(\vartheta) = 1 - \psi$$

onde ψ é a menor raiz não negativa da equação

$$\sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^d \ell! \binom{d}{\ell} \left(\frac{s}{d+1} \right)^\ell \frac{(\ell+1)\mathbb{P}(\xi=d)}{d+1} = s.$$

Uma vez obtidas as expressões gerais abstratas para orientar a maneira como pensamos sobre este assunto, passaremos agora para um tratamento mais específico, onde vamos abordar o processo-MT em \mathbb{T} tendo como variável geradora as distribuições binomial, de poisson e geométrica, uma em cada item do próximo teorema. Sejam $s, \alpha \in \mathbb{R}^+$, o valor da função gama incompleta no ponto (α, s) é dado por

$$\Gamma(\alpha, s) = \int_s^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (4.1)$$

Teorema 4.1.3. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT com configuração inicial η_0 , tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$, em uma árvore aleatória \mathbb{T} com variável ξ . Então*

(i) *Se ξ tem distribuição binomial com parâmetro (n, p) , com $n \geq 3$, então $\theta(n, p) > 0$ se, e somente se,*

$$\sum_{d=1}^n \frac{1}{(n-d)!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j} \frac{1}{(d-j)!} > \frac{1}{n!(1-p)^n}.$$

(ii) *Se ξ tem distribuição de Poisson com parâmetro λ , então $\theta(\lambda) > 0$ se, e somente se,*

$$\sum_{d=1}^{\infty} \lambda^d \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{(d+1)^\ell (d-\ell)!} > e^\lambda.$$

(iii) *Se ξ tem distribuição geométrica de parâmetro p , então $\theta(p) > 0$ se, e somente se,*

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{pe}{d+1} \right)^d \Gamma(d+1, d+1) > \frac{2+p}{ep}.$$

Vale ressaltar que as desigualdades do Teorema 4.1.3 que caracterizam a sobrevivência dos três modelos não especificam de forma direta os valores críticos em cada situação. Esta lacuna será preenchida pelo próximo teorema na qual são apontados os intervalos limitantes que contém cada parâmetro crítico.

Teorema 4.1.4. *Seja $(\eta_t)_{t \geq 0}$ o processo-MT com configuração inicial η_0 , tal que $\eta_0(\mathbf{0}) = 1$ e $\eta_0(x) = 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$, em uma árvore aleatória \mathbb{T} com variável ξ . Então*

(i) Se ξ tem distribuição binomial com parâmetro (n, p) , com $n \geq 3$, então existe um único parâmetro crítico $p_n^* \in (0, 1)$, tal que $\theta(n, p) > 0$ se, e somente se, $p > p_n^*$.

(ii) Se ξ tem distribuição de Poisson com parâmetro λ , então existe um único parâmetro crítico $\lambda^* \in (1, 3)$, tal que $\theta(\lambda) > 0$ se, e somente se, $\lambda > \lambda^*$.

(iii) Se ξ tem distribuição geométrica com parâmetro p , então existe um único parâmetro crítico $p^* \in (15/100, 1/2)$, tal que $\theta(p) > 0$ se, e somente se, $p < p^*$.

Fixado n , seja p_n^* o valor crítico de sobrevivência do processo-MT em \mathbb{T} para uma distribuição binomial de parâmetro (n, p) . A curva pontilhada a seguir apresenta o comportamento do valor crítico p_n^* em função de n para as binomiais $\xi \sim b(n, p)$ para todo $n \geq 3$. Por meio da figura abaixo, podemos perceber duas regiões distintas, uma de sobrevivência e a outra de extinção do processo.

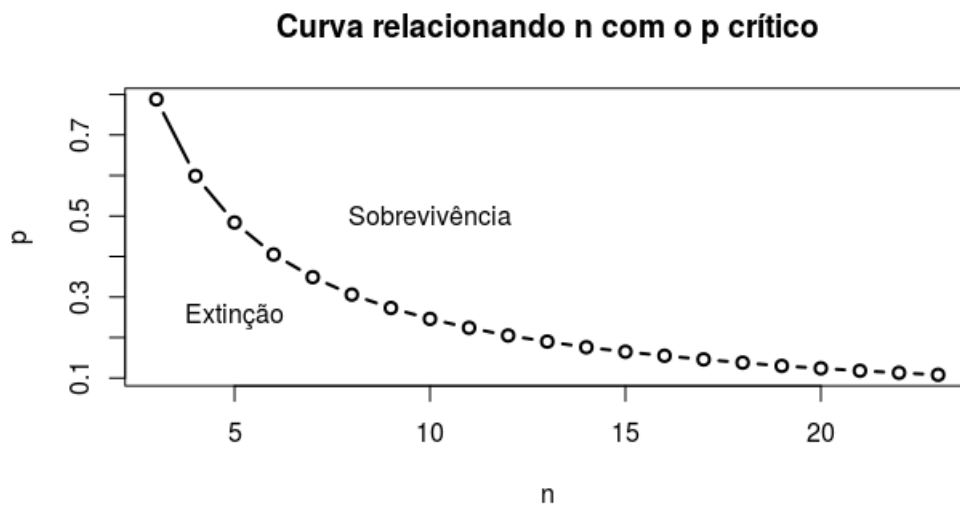


Figura 1 – Exibição dos pontos críticos para alguns valores de n .

4.2 Resultados auxiliares

As árvores aleatórias que nós estamos trabalhando são árvores tais que o número de vizinhos de um vértice obedece a uma mesma distribuição de probabilidade, seja qual for o vértice. Desta forma, o número de vizinhos que um vértice possui depende do parâmetro da distribuição que estamos tomando. Com relação à probabilidade de sobrevivência do processo-MT em \mathbb{T} vai depender do número médio de indivíduos informados por um vértice propagador.

Ainda neste trabalho, vamos mostrar que o número médio de indivíduos que um propagador informa está diretamente relacionado com o vetor ϑ parâmetro da variável ξ , distribuição de prole de vértices de \mathbb{T} . Dito isto, a distribuição de probabilidade da variável

X estará condicionada ao número de filhos do vértice propagador. No próximo lema, vamos utilizar o fato de que o número de filhos de um vértice da árvore \mathbb{T} é dado pela variável aleatória ξ que toma valores no conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ para determinar a probabilidade de um indivíduo informar i vizinhos.

Lema 4.2.1. *Seja $(p_d)_{d \geq 0}$ uma distribuição de prole de \mathbb{T} , em que $p_d = \mathbb{P}(\xi = d)$. Então a variável aleatória X tem distribuição de probabilidade dada por*

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{d=i}^{\infty} i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)p_d}{d+1}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.2)$$

Demonstração. Levando em consideração o fato de que o número de propagadores gerados por um indivíduo fica condicionado ao número de filhos que ele possui, a expressão da probabilidade do evento $\{X = i\}$ é dada por

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{d=i}^{\infty} \mathbb{P}(X = i | \xi = d) \mathbb{P}(\xi = d). \quad (4.3)$$

Essa expressão pode ser melhor entendida utilizando os resultados obtidos para o caso determinístico. Pelo Lema 2.2.3, sabemos que a expressão de $\mathbb{P}(X = i | \xi = d)$, para $i \leq d$, é dada por

$$\mathbb{P}(X = i | \xi = d) = i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)}{d+1}. \quad (4.4)$$

Agora substituindo o valor $\mathbb{P}(X = i | \xi = d)$ em (4.3), obtemos

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{d=i}^{\infty} i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1} \right)^i \frac{(i+1)\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4.5)$$

Tendo calculado o valor de $\mathbb{P}(X = i)$ para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, podemos verificar que, de fato, temos uma distribuição de probabilidade. Como já temos $\mathbb{P}(X = i)$ para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tudo que queremos fazer aqui é concluir que $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$. Escrevendo o somatório, temos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{d=i}^{\infty} \mathbb{P}(X = i | \xi = d) p_d.$$

Como todos os termos são positivos, pelo teorema de Fubini, podemos trocar a ordem do

somatório para obter o resultado desejado

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{d=i}^{\infty} i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)p_d}{d+1} \\
 &= \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)}{d+1} \right) p_d \\
 &= \sum_{d=0}^{\infty} p_d \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

Um outro elemento de fundamental importância para estudarmos o comportamento do modelo-MT em \mathbb{T} é o valor esperado da variável X , utilizando o fato de que podemos encontrar o valor esperado de X a partir da média ponderada da esperança condicional, podemos escrever

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{E}(X|\xi = d)\mathbb{P}(\xi = d). \quad (4.6)$$

Daqui em diante, quando for conveniente, vamos adotar a expressão $\mathbb{E}_d(X)$ ao invés de $\mathbb{E}(X|\xi = d)$, pois essa nova expressão é mais adequada por ser mais curta. Uma outra abreviação da esperança tem haver com o vetor de parâmetro ϑ da distribuição de prole da árvore aleatória, algumas vezes, quando for mais conveniente, iremos denotar a expressão dada em (4.6) por $\mathbb{E}_{\vartheta}(X)$.

Pelo Lema 2.2.4, podemos relacionar a esperança da variável X com a função gama incompleta e devido ao fato da função gama incompleta está intimamente ligada à função gama, vamos fazer um breve comentário sobre a função gama. De acordo com (ARTIN, 1964), se n é um número natural, então temos a seguinte expressão definida por meio de uma integral imprópria

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

A teoria da função gama foi desenvolvida de forma conjunta ao problema de generalizar a função fatorial dos números naturais, isto é, o problema de encontrar uma expressão que tenha o valor $n!$ quando n é um número inteiro positivo, e isso pode ser estendido para o conjunto dos números reais. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tem-se que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (4.7)$$

Desta forma é possível definir o valor da função gama para todos números reais positivos, uma vez que se α é um número natural, a função gama coincide com o conceito de fatorial que por meio desta expressão pode ser generalizado para todos os reais positivos, pois a integral apresentada em (4.7) é convergente para todo número real $\alpha > 0$. Conforme visto em (4.1), a função gama incompleta é definida a partir da função gama através de um deslocamento no limite inferior de integração. Essa função possui várias propriedades, porém em virtude do nosso propósito, estamos particularmente interessados na seguinte fórmula

$$\Gamma(s, x) = (s - 1)!e^{-x} \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{x^\ell}{\ell!} \quad \text{para todo } s \text{ inteiro positivo.} \quad (4.8)$$

Utilizando esta propriedade podemos escrever o valor esperado da variável X em termos da função gama incompleta.

Proposição 4.2.1. *Seja X a variável aleatória que descreve o número de indivíduos que um único propagador gera em \mathbb{T}_d . Então,*

$$\mathbb{E}_d(X) = \frac{e^{d+1}\Gamma(d+1, d+1)}{(d+1)^d} - 1.$$

Demonstração. Para ver esta igualdade, a ideia é utilizar a Propriedade 4.8. Primeiramente, escrevemos a expressão

$$\begin{aligned} \Gamma(d+1, d+1) &= d!e^{-(d+1)} \sum_{i=0}^d \frac{(d+1)^i}{i!} \\ &= d!e^{-(d+1)}(d+1)^d \sum_{i=0}^d \frac{1}{(d+1)^{d-i}i!} \\ &= d!e^{-(d+1)}(d+1)^d \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{(d+1)^i(d-i)!} + \frac{1}{d!} \right) \\ &= e^{-(d+1)}(d+1)^d d! \sum_{i=1}^d \frac{1}{(d+1)^i(d-i)!} + e^{-(d+1)}(d+1)^d \frac{d!}{d!} \\ &= e^{-(d+1)}(d+1)^d \mathbb{E}_d(X) + e^{-(d+1)}(d+1)^d. \end{aligned}$$

Após deixar a expressão da função gama incompleta desenvolvida nesse estágio, o nosso próximo passo agora é explicitar o valor esperado de X em função da gama incompleta

$$\begin{aligned} \frac{(d+1)^d \mathbb{E}_d(X)}{e^{d+1}} &= \Gamma(d+1, d+1) - e^{-(d+1)}(d+1)^d \\ \mathbb{E}_d(X) &= \frac{\Gamma(d+1, d+1) - e^{-(d+1)}(d+1)^d}{e^{-(d+1)}(d+1)^d} \\ \mathbb{E}_d(X) &= \frac{e^{d+1}\Gamma(d+1, d+1)}{(d+1)^d} - 1. \end{aligned}$$

□

Este resultado nos possibilita extrair um limitante para a $\mathbb{E}_d(X)$ que vai ser útil para fazer cálculos de majoração da média da variável X quando esta for expressa por uma série infinita.

Lema 4.2.2. *Seja X o número de propagadores que um propagador gera em \mathbb{T}_d . Então,*

$$\mathbb{E}_d(X) \leq \frac{d!e^{d+1}}{(d+1)^d} - 1. \quad (4.9)$$

Demonstração. Para ver esta majoração a ideia é utilizar o Proposição 4.2.1. Em particular, observando que $\Gamma(d+1, d+1) \leq d!$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d(X) &= \frac{e^{d+1}\Gamma(d+1, d+1)}{(d+1)^d} - 1 \\ &\leq \frac{e^{d+1}\Gamma(d+1, d+1)}{(d+1)^d} - 1 \\ &\leq \frac{e^{d+1}d!}{(d+1)^d} - 1. \end{aligned}$$

□

4.3 Prova dos Teoremas

4.3.1 Prova do Teorema 4.1.1

Utilizaremos $g(\vartheta)$ para denotar $\mathbb{E}(X|\vartheta)$, o número médio de propagadores que um propagador gera em \mathbb{T} . Vamos provar este teorema utilizando o fato de que um processo de ramificação sobrevive com probabilidade positiva se, e somente se, a média da sua distribuição da prole é maior que 1. Note que, se $g(\vartheta) > 1$, então o processo de ramificação subjacente ao processo-MT tem probabilidade de sobrevivência positiva. Logo, pelo Lema 2.2.6, a probabilidade $\theta(\vartheta) > 0$. Pelo mesmo argumento, podemos concluir que se $g(\vartheta) \leq 1$, então $\theta(\vartheta) = 0$.

4.3.2 Prova do Teorema 4.1.2

A demonstração do teorema está praticamente feita, teremos apenas o trabalho de organizar as ideias para obter o resultado. Vamos determinar $\theta(\vartheta)$, a probabilidade de sobrevivência, a partir da probabilidade de extinção do processo, ou seja,

$$\theta(\vartheta) = 1 - \mathbb{P}(E), \quad (4.10)$$

onde o evento E representa a extinção do processo-MT. Nas árvores aleatórias, o número de indivíduos gerados por um propagador é dado pela variável X para todo indivíduo em \mathbb{T} . Isso faz com que a propagação do rumor em \mathbb{T} se transforme em um processo de

ramificação cuja distribuição de prole de cada indivíduo é dada por X . Além disso, sua distribuição de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{d=i}^{\infty} (i+1)! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4.11)$$

Sabemos que ψ , a probabilidade de extinção de um processo de ramificação, é a menor solução positiva da equação $G(s) = s$ no intervalo $[0, 1]$, onde $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$ é a função geradora de probabilidades da distribuição de prole $p_i = \mathbb{P}(X = i)$ para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Utilizando (4.11), podemos obter a expressão da função geradora

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{E}(s^X) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=d}^{\infty} s^i \sum_{d=0}^{\infty} i! \binom{d}{i} \left(\frac{1}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1} \\ &= \sum_{i=d}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1}. \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1}. \end{aligned}$$

Uma vez obtida a função geradora de probabilidade, podemos explicitar a equação $G(s) = s$ que ficará assim

$$\sum_{d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^d i! \binom{d}{i} \left(\frac{s}{d+1}\right)^i \frac{(i+1)\mathbb{P}(\xi = d)}{d+1} = s.$$

Fazendo a substituição de $\mathbb{P}(E)$ na equação (4.10), segue que

$$\begin{aligned} \theta(\vartheta) &= 1 - \mathbb{P}(E) \\ &= 1 - \psi. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

4.3.3 Prova do Teorema 4.1.3

A prova do Teorema 4.1.3 está dividida em três partes, uma para cada item do teorema.

4.3.3.1 Demonstração do item (i) do Teorema 4.1.3.

Suponha que $\xi \sim b(n, p)$, isto é, a variável ξ tem distribuição binomial com parâmetro $\vartheta = (n, p)$. Dado que $g_n(p) = \mathbb{E}(X|(n, p))$, segue que

$$\begin{aligned}
 g_n(p) &= \sum_{d=1}^n \mathbb{E}(X|\xi = d)\mathbb{P}(\xi = d) \\
 &= \sum_{d=1}^n d! \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!} \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-p} \\
 &= \sum_{d=1}^n d! \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!} \\
 &= (1-p)^n \sum_{d=1}^n \frac{d!n!}{d!(n-d)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!} \\
 &= (1-p)^n n! \sum_{d=1}^n \frac{1}{(n-d)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!}.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1.1, sabemos que $\theta(n, p) > 0$ se, e somente se

$$g_n(p) > 1.$$

Conseqüentemente, vamos ter $\theta(n, p) > 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 (1-p)^n n! \sum_{d=1}^n \frac{1}{(n-d)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!} &> 1 \\
 \sum_{d=1}^n \frac{1}{(n-d)!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j(d-j)!} &> \frac{1}{(1-p)^n n!}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

4.3.3.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 4.1.3

Suponha que $\xi \sim pois(\lambda)$, isto é, a variável ξ tem distribuição de poisson com parâmetro λ . Dado que $g(\lambda) = \mathbb{E}(X|\lambda)$, segue que

$$\begin{aligned}
 g(\lambda) &= \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{E}(X|\xi = d)\mathbb{P}(\xi = d) \\
 &= \sum_{d=1}^{\infty} d! \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{(d+1)^\ell(d-\ell)!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^d}{d!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{d=1}^{\infty} \lambda^d \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{(d+1)^\ell(d-\ell)!}.
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1.1, sabemos que $\theta(\lambda) > 0$ se, e somente se,

$$g(\lambda) > 1.$$

Consequentemente, vamos ter $\theta(\lambda) > 0$ se, e somente se,

$$e^{-\lambda} \sum_{d=1}^{\infty} \lambda^d \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{(d+1)^\ell (d-\ell)!} > 1.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por e^λ em seus dois membros, vamos obter

$$\sum_{d=1}^{\infty} \lambda^d \sum_{\ell=1}^d \frac{1}{(d+1)^\ell (d-\ell)!} > e^\lambda.$$

Como queríamos demonstrar.

4.3.3.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 4.1.3

Suponha que $\xi \sim \text{geo}(p)$, isto é, a variável ξ tem distribuição geométrica com parâmetro p . Dado que $g(p) = \mathbb{E}(X|p)$, segue que

$$\begin{aligned} g(p) &= \sum_{d=1}^{\infty} d! \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j (d-j)!} (1-p)^d p \\ &= p \sum_{d=1}^{\infty} d! (1-p)^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{(d+1)^j (d-j)!} \\ &= p \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d!}{d!} (1-p)^d \left(\frac{e^{d+1}}{(d+1)^d} \Gamma(d+1, d+1) - 1 \right) \\ &= p \left[\sum_{d=1}^{\infty} (1-p)^d \frac{d+1}{(d+1)^d} \Gamma(d+1, d+1) - \sum_{d=1}^{\infty} (1-p)^d \right] \\ &= p \left[e \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{(1-p)e}{d+1} \right)^d \Gamma(d+1, d+1) - \frac{1-p}{p} \right] \\ &= ep \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{(1-p)e}{d+1} \right)^d \Gamma(d+1, d+1) - (1-p). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1.1, sabemos que $\theta(p) > 0$ se, e somente se,

$$g(p) > 1.$$

Consequentemente, vamos ter $\theta(p) > 0$ se, e somente se,

$$ep \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{(1-p)e}{d+1} \right)^d \Gamma(d+1, d+1) - 1 + p > 1$$

e isso resulta que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{pe}{d+1} \right)^d \Gamma(d+1, d+1) > \frac{2+p}{ep}. \quad (4.12)$$

Por conseguinte, $\theta(p) > 0$ se, e somente se, (4.12) ocorre.

Feita a demonstração do Teorema 4.1.3, vamos finalizar esta seção com a demonstração do Teorema 4.1.4.

4.3.4 Prova do Teorema 4.1.4

A demonstração do Teorema 4.1.4 está dividida em 3 partes, uma para cada item do enunciado.

4.3.4.1 Demonstração do item (i) do Teorema 4.1.4

Seja $g_n(p)$ o valor esperado do número de propagadores que um único propagador gera em \mathbb{T} sendo (n, p) o parâmetro de uma distribuição binomial. Para mostrar que existe um único valor crítico $p_n^* \in (0, 1)$ tal que se $p > p_n^*$, então $g_n(p) > 1$, para todo $n \geq 3$, vamos utilizar o Teorema do Valor Intermediário juntamente com a monotonicidade da função g_n . Para fazer isso, vamos mostrar que g_n é contínua, monótona e que satisfaz a desigualdade $g_n(0) < 1 < g_n(1)$ para todo $n \geq 3$. O próximo teorema trata da continuidade da função g_n em $[0, 1]$.

Lema 4.3.1. *Para todo $n \geq 1$, a função $g_n(p) = \sum_{d=1}^n a_d p^d (1-p)^{n-d}$, com $a_d = \binom{n}{d} \mathbb{E}_d(X)$, é contínua em $[0, 1]$.*

Demonstração. Para ver que a função g_n é contínua no intervalo $[0, 1]$, basta observar que sua expressão é um polinômio. \square

O próximo resultado vai ser utilizado na demonstração do Lema 4.3.3. Sua demonstração pode ser omitida por ser um resultado bastante conhecido.

Lema 4.3.2. *A equação $(n-i) \binom{n}{i} = (i+1) \binom{n}{i+1}$ é válida para quaisquer dois números naturais positivos n e i com $i < n$.*

Lema 4.3.3. *Para todo $n \geq 1$, a função g_n é crescente em p .*

Demonstração. Vamos mostrar que a função g_n é crescente em p para todo $n \geq 1$. Para fazer isso, vamos verificar que $g'_n(p) > 0$ para todo $p \in (0, 1)$. A expressão de g' é um

pouco extensa, porém as contas que iremos fazer são extremamente simples e conclusivas.

$$\begin{aligned}
g'(p) &= a_1 \binom{n}{1} (1-p)^{(n-1)} - a_1(n-1) \binom{n}{1} p(1-p)^{(n-2)} + 2a_2 \binom{n}{2} p(1-p)^{(n-2)} \\
&\quad - a_2(n-2) \binom{n}{2} p^2(1-p)^{(n-2)} + 3a_3 \binom{n}{3} p^2(1-p)^{(n-3)} - a_2(n-3) \binom{n}{3} p^3(1-p)^{(n-2)} \\
&\quad \dots \\
&\quad - 2a_{n-2} \binom{n}{n-2} p^{n-2}(1-p) + (n-1)a_{n-1} \binom{n}{n-1} p^{n-2}(1-p) - a_{n-1} \binom{n}{n-1} p^{n-1} \\
&\quad + na_n p^{n-1}.
\end{aligned}$$

O próximo passo da demonstração é agrupar os termos de g' em $n-1$ duplas onde cada uma delas é dada por $b_i = (i+1)a_{i+1} \binom{n}{i+1} p^i(1-p)^{n-(i+1)} - (n-i)a_i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-(i+1)}$ onde $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n-1\}$. Cada termo b_i é positivo, para ver este fato, vamos utilizar o Lema 4.3.2, que diz que $(n-i) \binom{n}{i} = (i+1) \binom{n}{i+1}$.

$$\begin{aligned}
b_i &= (i+1)a_{i+1} \binom{n}{i+1} p^i(1-p)^{n-(i+1)} - (n-i)a_i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-(i+1)} \\
&= (n-i) \binom{n}{i} a_{i+1} p^i(1-p)^{n-(i+1)} - (n-i)a_i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-(i+1)} \\
&= (a_{i+1} - a_i)(n-i) \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-(i+1)} > 0.
\end{aligned}$$

Para finalizar, note que

$$\begin{aligned}
g'(p) &= a_1 \binom{n}{1} (1-p)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \\
&> a_1 \binom{n}{1} (1-p)^{n-1} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Como $g'_n(p) > 0$ para todo $p \in [0, 1]$, segue que a função g_n é crescente em p . \square

Lema 4.3.4. Para todo $n \geq 1$, a função $g_n(p) = \sum_{d=1}^n a_d \binom{n}{d} p^d(1-p)^{n-d}$ satisfaz a desigualdade $g_n(0) < 1 < g_n(1)$, para todo $n \geq 3$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
g_n(1) &= a_1 \binom{n}{1} (1-1)^{n-1} + a_2 \binom{n}{2} 1^2(1-1)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \binom{n}{n-1} 1^{n-1}(1-1)^1 + a_n 1^n \\
&= a_1 \binom{n}{1} 0^{n-1} + a_2 \binom{n}{2} 0^{n-2} + \dots + a_{n-1} \binom{n}{n-1} 0^1 + a_n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Como $a_n > a_{n-1}$ e $a_3 > 1$, segue que $a_n > 1$ para todo $n \geq 3$. Como $g_n(1) = a_n$, segue que $g_n(1) > 1$ para todo $n \geq 3$. Por outro lado, temos que $g_n(0) = 0$ e conseqüentemente, $g_n(0) < 1$. Portanto, temos que $g_n(0) < 1 < g_n(1)$, para todo $n \geq 3$. \square

De posse dos resultados dos Lemas 4.3.1 e 4.3.4, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário para concluir que existe pelo menos um $p_n^* \in (0, 1)$ tal que $g_n(p) = 1$, para todo $n \geq 3$. Pelo Lema 4.3.3, temos que existe um único $p_n^* \in (0, 1)$ tal que se $p > p_n^*$, então $g_n(p) > 1$, para todo $n \geq 3$.

4.3.4.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 4.1.4

Seja $g(\lambda)$ o valor esperado do número de propagadores que um único propagador gera em \mathbb{T} tendo λ o parâmetro de uma distribuição de poisson. Para mostrar que existe um único valor crítico $\lambda^* \in (0, 1)$ tal que se $\lambda > \lambda^*$, então $\theta(\lambda) > 0$, vamos utilizar o Teorema do Valor Intermediário juntamente com a monotonicidade da função g . Para fazer isso, vamos mostrar que g é contínua, crescente e que satisfaz a desigualdade $g(1) < 1 < g(3)$. O próximo teorema diz respeito à continuidade da função g .

Lema 4.3.5. *A função $g(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d!$, com $a_d = \mathbb{E}_d(X)$, é contínua em \mathbb{R}_+ .*

Demonstração. Para ver que a função g é contínua, a ideia é mostrar que g é o produto de duas funções contínuas em \mathbb{R}_+ . Primeiramente, note que $g(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d!$, é o produto da função $e^{-\lambda}$ por $\sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d!$. A primeira função já sabemos ser contínua e a função $\sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d!$ também o é, basta observar que

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d! &\leq \sum_{d=1}^{\infty} d \lambda^d / d! \\ &= \lambda \sum_{d=0}^{\infty} \lambda^d / d! \\ &= \lambda e^{\lambda} \\ &< \infty, \forall \lambda > 0. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que toda série de potência é contínua em seu intervalo de convergência, temos que a função $\sum_{d=1}^{\infty} a_d \lambda^d / d!$ é contínua. \square

Antes de enunciarmos o próximo lema, observamos que se o número médio de vizinhos de um vértice é menor ou igual a 1, a árvore aleatória é finita quase certamente, e conseqüentemente, vamos ter a extinção do processo-MT com probabilidade 1. Se $\lambda \leq 1$, sabemos que o número médio de vizinhos de um vértice é menor ou igual a 1, logo o processo-MT se extingue com probabilidade 1. Para os demais casos de λ , faz sentido estudar a partir de qual valor o processo sobrevive com probabilidade positiva.

Lema 4.3.6. Se g é uma função dada por $g(\lambda) = \sum_{d=1}^{\infty} e^{-\lambda} a_d \lambda^d / d!$. Então,

$$g(1) < 1 < g(3).$$

Demonstração. Denotando por S_6 a soma dos 6 primeiros termos de $g(3)$, a idéia é mostrar que $S_6 > 1$ e como $g(3) > S_6$, segue o resultado desejado. Para calcular valor de S_6 precisamos obter a $\mathbb{P}(\xi = d)$ para $d = 1, 2, \dots, 6$. Para isso, colocamos nas tabelas a seguir, os valores da distribuição de poisson para $d = 1, 2, \dots, 6$ e do valor de $\mathbb{E}(X|\xi = d)$ para $d = 1, 2, \dots, 6$.

| d | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-----|------|
| $\mathbb{P}(\xi = d)$ | 0,149 | 0,224 | 0,224 | 0,168 | 0,1 | 0,05 |

Tabela 1 – Distribuição de Poisson para $d = 1, 2, \dots, 6$.

| d | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------------------|-----|------|------|------|------|------|
| $\mathbb{E}(X \xi = d)$ | 0,5 | 0,89 | 1,22 | 1,51 | 1,77 | 2,02 |

Tabela 2 – Média de X dado $d = 1, 2, \dots, 6$.

De acordo com os dados das Tabelas 1 e 2, o valor de S_6 é dado por

$$\begin{aligned} S_6 &= \mathbb{E}(X|d = 1)\mathbb{P}(\xi = 1) + \mathbb{E}(X|d = 2)\mathbb{P}(\xi = 2) + \dots + \mathbb{E}(X|d = 6)\mathbb{P}(\xi = 6) \\ &= 0,50.0,149 + 0,89.0,224 + 1,22.0,224 + 1,51.0,168 + 1,77.0,1 + 2,02.0,05 \\ &= 1,079. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $g(3) > 1$. Para ver que $g(1) < 1$, a ideia é utilizar a majoração dada pela Observação 2.2.1. Majorando a_d por d , temos que

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{-1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{a_d}{d!} \\ &< e^{-1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d}{d!} \\ &= e^{-1} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!} \\ &= e^{-1} e^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Desse modo, a função g assume valores maiores e menores do que 1 nos extremos do intervalo fechado $[1, 3]$. Como g é contínua em $[1, 3]$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe pelo menos um $\lambda \in (1, 3)$ tal que $g(\lambda) = 1$. \square

O próximo passo é mostrar que a função g é monótona e conseqüentemente, existe um único $\lambda \in (1, 3)$ tal que $g(\lambda) = 1$. A ideia é mostrar que g é crescente no intervalo $(0, 1)$. Para fazer isso vamos mostrar que sua derivada primeira é positiva e portanto, a função g é crescente em λ fazendo com que tenhamos a unicidade do ponto crítico. Como $g(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda^i / i!$, segue que sua derivada primeira é dada por

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= -e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \lambda^i}{i!} + e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i a_i \lambda^{i-1}}{i!} \\ &= -e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \lambda^i}{i!} + e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-a_i \lambda^i}{i!} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \right] \\ &= e^{-\lambda} \left(a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_{i+1} - a_i) \lambda^i}{i!} \right) \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.1, sabemos que a seqüência $(a_i)_{i \geq 1}$ é crescente fazendo com que tenhamos $g'(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Como conseqüência, a função g é crescente e portanto, existe um único $\lambda^* \in (0, \infty)$ tal que $g(\lambda) > 1$, se e somente, $\lambda > \lambda^*$.

4.3.4.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 4.1.4

Seja $g(p)$ o valor esperado do número de propagadores que um único propagador gera em \mathbb{T} sendo p o parâmetro de uma distribuição geométrica. Para mostrar que existe um único $p^* \in (0, 1)$ tal que, se $p > p^*$, então $g(p) > 1$, vamos utilizar o Teorema do Valor Intermediário juntamente com a monotonicidade da função g . Para fazer isso vamos mostrar que g é contínua, crescente e que satisfaz a desigualdade $g(1/2) < 1 < g(15/100)$. O próximo teorema diz respeito à continuidade da função g .

Lema 4.3.7. *A função $g(p) = \sum_{d=1}^{\infty} a_d (1-p)^d p$, com $a_d = \mathbb{E}_d(X)$, é contínua em $(0, 1)$.*

Demonstração. Para ver que a função g é contínua, a ideia é mostrar que ela é uma série

de potência convergente em $(0, 1)$. Para ver que a série é convergente em $(0, 1)$, note que

$$\begin{aligned}
 \sum_{d=1}^{\infty} a_d(1-p)^d p &\leq p \sum_{d=m}^n d(1-p)^d \\
 &= (1-p)p \sum_{d=1}^{\infty} d(1-p)^{d-1} \\
 &= \frac{(1-p)p}{(1-(1-p))^2} \\
 &= \frac{(1-p)p}{p^2} \\
 &= \frac{1-p}{p} \\
 &< \infty, \forall p \in (0, 1).
 \end{aligned}$$

Como uma série de potência é contínua em seu intervalo de convergência, segue que a função g é contínua no intervalo $(0, 1)$. \square

Antes de enunciarmos o próximo lema, observamos que se o número médio de vizinhos de um vértice é menor ou igual a 1, a árvore aleatória é finita quase certamente, e conseqüentemente, vamos ter a extinção do processo-MT com probabilidade 1. Como para $p \geq 1/2$, o número médio de vizinhos de um vértice é menor ou igual a 1, segue que para esses valores de p , o processo-MT se extingue com probabilidade 1. Para os demais casos de p , faz sentido estudar a partir de qual valor o processo sobrevive com probabilidade positiva.

Lema 4.3.8. *Seja g uma função dada por $g(p) = \sum_{d=1}^{\infty} a_d(1-p)^d p$. Então,*

$$g(1/2) < 1 < g(15/100).$$

Demonstração. Para ver que $g(1/2) < 1$, a ideia é utilizar a majoração dada pela Observação 2.2.1. Majorando a_d por d , temos que

$$\begin{aligned}
 g(1/2) &= \sum_{d=1}^{\infty} a_d(1/2)^{d+1} \\
 &< \sum_{d=1}^{\infty} d(1/2)^{d+1} \\
 &= (1/2)^2 \sum_{d=1}^{\infty} d(1/2)^{d-1} \\
 &= (1/2)^2 1/(1-1/2)^2 \\
 &= (1/4)/(1/4) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para mostrar que $g(15/100) > 1$, a ideia é fazer uma aproximação com 11 parcelas.

$$\begin{aligned}
g(p) &= \sum_{d=1}^{\infty} a_d(1-p)^d p \\
&\geq \sum_{d=1}^{11} a_d(1-p)^d p \\
&= 0,5 \times 1,128 + 0,889 \times 0,108 + 1,219 \times 0,092 + 1,51 \times 0,078 + 1,775 \times 0,067 + \\
&\quad 2,018 \times 0,057 + 2,245 \times 0,048 + 2,458 \times 0,041 + 2,660 \times 0,035 + 2,852 \times 0,030 + \\
&\quad 3,036 \times 0,025 \\
&= 1,086989.
\end{aligned}$$

□

Desse modo, a função g assume valores maiores e menores do que 1 nos extremos do intervalo fechado $[15/100, 1/2]$. Como g é contínua no intervalo $[15/100, 1/2]$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe pelo menos um $p \in (15/100, 1/2)$ tal que $g(p) = 1$.

Denotando por X_p o número de propagadores que um único propagador informa na árvore \mathbb{T} que é dada por uma geométrica de parâmetro p . Para ver que a função g é monótona, a ideia é notar que se $p < q$, então $\xi_p \stackrel{st}{>} \xi_q$. Por (2.8), se $\xi_p \stackrel{st}{>} \xi_q$, então $X_q \stackrel{st}{<} X_p$. Consequentemente,

$$g(q) = \mathbb{E}(X_q) < \mathbb{E}(X_p) = g(p).$$

Dessa forma, temos que g é estritamente monótona. Se g é estritamente monótona, segue de imediato, que temos um único parâmetro $p^* \in (0, 1)$ tal que se $p < p^*$, então $g(p) > 1$. Pelo Lema 2.2.1, sabemos que a sequência $(a_i)_{i \geq 1}$ é crescente fazendo com que tenhamos $g'(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Como consequência, a função g é crescente e portanto, existe um único $\lambda^* \in (0, \infty)$ tal que $g(\lambda) > 1$, se e somente, $\lambda > \lambda^*$.

5 CONCLUSÃO

Nesta tese abordamos o modelo transmissão da informação proposto por Maki-Thompson nas árvores homogêneas e aleatórias. Para as árvores homogêneas utilizamos o valor da dimensão da árvore como critério para estabelecer a existência ou não de sobrevivência do rumor. Mais precisamente, o valor mínimo da dimensão encontrado para que ocorra a sobrevivência do rumor é $d = 3$. Para o caso $d = 2$, em que temos a extinção quase certa do rumor encontramos que o valor esperado do número final de contidos no final do processo é 18. Outro fato relevante para o caso $d = 2$ é que o valor esperado do alcance do rumor pertence ao intervalo $[6, 144; 7, 448]$. Ainda nas árvores homogêneas, buscamos estender a dinâmica do modelo original em que o propagador para de transmitir o rumor após a primeira tentativa frustrada para uma dinâmica onde o propagador para de transmitir o rumor após k tentativas frustradas. Para todas estas extensões encontramos que o valor mínimo da dimensão da árvore para que ocorra sobrevivência do rumor é $d = 2$.

Para o modelo de Maki-Thompson nas árvores aleatórias descobrimos que os parâmetros da distribuição de prole de uma árvore aleatória são cruciais para estabelecer condições de existência ou não de sobrevivência do rumor. Mais especificamente, analisamos o modelo de Maki-Thompson nas árvores aleatórias com distribuição de prole dadas por uma binomial, uma poisson e uma geométrica. Para todos estes três modelos encontramos a existência de um parâmetro crítico de sobrevivência a partir do qual o rumor sobrevive com probabilidade positiva.

Para trabalhos futuros podemos buscar determinar os parâmetros críticos das três distribuições analisadas no contexto das árvores aleatórias com maior precisão do que o que foi feito neste trabalho. Uma sugestão para fazer tais aproximações é utilizar métodos de aproximações numéricas.

REFERÊNCIAS

- AGLIARI E.; PACHON, A.; RODRIGUEZ, P. M.; TAVANI, F. Phase transition for the maki-thompson rumor model on a small-world network. **J. Stat. Phys.**, v. 169, p. 846–875, 2017.
- AGRESTI, A. Bounds on the extinction time distribution of a branching process. **J. Appl. Probab.**, v. 6, p. 322–335, 1974.
- ARTIN, E. **The Gamma Function**. Verlag B. G. Teubner, 1964.
- BELEN, S. The behaviour of stochastic rumours. ph.d. thesis, school of mathematical sciences. <http://hdl.handle.net/2440/49472>, 2008.
- CARNAL, H. Calcul des probabilités et modélisation. **Elemente der Mathematik**, v. 49, p. 166–173, 1994.
- COLETTI, C. F.; RODRIGUEZ, P. M.; SCHINAZI, R. B. A spatial stochastic model for rumor transmission. **J. Stat. Phys.**, v. 147, p. 375–381, 2012.
- DALEY, D. J.; KENDALL, D. Stochastic rumours. **J. Inst. Maths**, v. 1, p. 42–55, 1965.
- DWASS, M. The total progeny in a branching process and a related random walk. **J. Appl. Probab.**, v. 6, p. 682–686, 1969.
- EVES, H. **An Introduction to the History of Mathematics**. University of Maine, 1969.
- HWANG, T.-Y.; WANG, N.-S. On best fractional linear generating function bounds. **J. Appl. Probab.**, v. 6, p. 449–453, 1979.
- JUNIOR, V. V.; RODRIGUEZ, P. M.; SPEROTO, A. The Maki-Thompson rumor model on infinite Cayley trees. **J. Stat. Phys.**, v. 181, n. 4, p. 1204–1217, 2020.
- LEBENSZTAYN, E.; MACHADO, F. P.; RODRIGUEZ, P. M. On the behaviour of a rumour process with random stifling. **Environ. Modell. Softw.**, v. 26, p. 517–522, 2011.
- MAKI, D.; THOMPSON, M. **Mathematical Models and Applications, with Emphasis on Social, Life, and Management Sciences**. Prentice-Hall, 1973.
- NEKOVEE M.; MORENO, Y.; BIANCONI, G.; MARSILI, M. Theory of rumour spreading in complex social networks. **Physica. A.**, v. 374, p. 457–470, 2007.
- SCHINAZI, R. B. **Classical and spatial stochastic processes: With applications to biology**. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 1999.
- SUDBURY, A. The proportion of the population never hearing a rumour. **J. Appl. Probab.**, v. 22, p. 443–446, 1985.
- WATSON, R. On the size of a rumour. **Stochastic Process. Appl.**, v. 1, n. 27, p. 141–149, 1988.

ZANETTE, D. H. Critical behavior of propagation on small-world networks. **Phys. Rev. E**, v. 64, n. 5, p. 050901, nov. 2001.

ZANETTE, D. H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks. **Phys. Rev. Lett**, v. 65, n. 4, p. 041908, abr. 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A – O ALCANCE DA PROPAGAÇÃO

Nesta sessão vamos enunciar resultados importantes para justificar algumas demonstrações que foram feitas no capítulo sobre o alcance da propagação. É bom lembrar que nós estamos buscando obter informações sobre a descendência total do processo de ramificação dado que ele tornou-se extinto. Devido as complexidades reais da função geradora de probabilidade oriunda da distribuição obtida em (2.9), iremos utilizar a classe das funções geradoras de probabilidade fracionais lineares, que abreviaremos por f.g.f.l., para delimitar tanto a distribuição do número indivíduos do processo, bem como o valor esperado do número total da prole do processo de ramificação de interesse.

A.1 Funções geradoras fracionais lineares

Definição A.1.1. *Uma função geradora fracional linear (f.g.f.l.) é uma função geradora de probabilidade da forma*

$$G(b, c; s) = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

onde os coeficientes a , b , e c cumprem as seguintes relações: $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$, e $b + c \leq 1$.

Vamos chamar de m a média da distribuição de prole, desse modo, temos que $m = G'(1)$. A expressão $G_n(s) = G(G(\dots G(s) \dots))$, ou seja, $G_n(s)$ é o resultado das composições da função G por ela mesma n vezes. Por exemplo,

$$G_2(s) = G(G(s)) \quad \text{e}$$

$$G_3(s) = G(G(G(s))).$$

Seja $T = \min\{n \geq 0, Z_n = 0\}$, T é a geração na qual o processo se extingue. Tem uma igualdade envolvendo o tempo de extinção do processo que nos permite achar a distribuição do tempo de extinção. Esta igualdade é dada pela expressão,

$$\{T \leq n\} = \{Z_n = 0\}.$$

Aplicando a probabilidade em ambos os lados, obtemos que

$$\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Por (AGRESTI, 1974), podemos obter as funções geradoras fracionais lineares que dão as melhores cotas para

$$\mathbb{P}(T \leq n) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(T).$$

Tome $L(s)$ e $U(s)$ funções geradoras de probabilidade fracionais lineares tais que

$$L(s) \leq G(s) \leq U(s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Nossa abordagem principal consiste em reduzir o problema de derivar limites para o processo de Galton-Watson para um problema envolvendo uma única família de iterações de funções geradoras de probabilidades que podem ser facilmente calculadas, as funções geradoras fracionais lineares. Se U e L são duas funções geradoras de probabilidade tais que

$$L(S) \leq G(s) \leq U(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

então

$$L_n(s) \leq G_n(s) \leq U_n(s), \quad 0 \leq s \leq 1, n \geq 1.$$

Como resultado

$$L_n(0) \leq G_n(0) \leq U_n(0), \quad n \geq 1.$$

E quando $m < 1$, o tempo esperado da extinção $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - G_n(0)]$ é limitado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} [1 - U_n(0)] \leq \mathbb{E}(T) \leq \sum_{n=0}^{\infty} [1 - L_n(0)].$$

A classe das f.g.f.l. é uma das poucas conhecidas classes de funções geradoras de probabilidade cujas iterações podem ser explicitamente indicadas e examinadas. O método de delimitar uma função geradora de probabilidade G (satisfazendo $G''(1) < \infty$) por duas funções geradoras fracionais lineares é usada para derivar limites para a distribuição do tempo de extinção do processo de ramificação de Galton-Watson com distribuição de probabilidade da descendência representada por G . Além disso, os limitantes (f.g.f.l) para uma f.g.p são úteis para obter informações sobre a distribuição do tempo de extinção de um processo de ramificação a tempo discreto de processos mais complexos.

Teorema A.1.1. *Seja $G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i)$ a fgp de X , com média $\mu \leq 1$ e com $G''(1) < \infty$ e defina $D = \max\{2, \frac{\mu}{\mathbb{P}(X=0)+\mu-1}\}$. Então, se $\mu < 1$,*

$$\frac{[1 + D(1 - \mu) - \mu^n]}{1 + D(1 - \mu) - \mu^n} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \frac{1 + (\mu(1 - \mu)/(1 - \mu^n))}{1 + D(1 - \mu) - \mu^n}, \quad n \geq 1.$$

$$\frac{n}{n + D} \leq \mathbb{P}(T \leq n) \leq \frac{1 + (\mu(1 - \mu)/(1 - \mu^n))}{1 + D(1 - \mu) - \mu^n}, \quad \text{quando } \mu = 1, n \geq 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{m^2}{2(g''(1) + m)} + \frac{m(1 - m) \log[1 - \frac{mg''(1)}{(g''(1) + m(1 - m))}]}{g''(1) \log m} \\ & \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \frac{Dm}{D + 1} + \frac{D(1 - m) \log[1 - \frac{m^{\frac{3}{2}}}{1 + D(1 - m)}]}{\log m}. \end{aligned}$$

A demonstração deste teorema   bem técnica e extensa, caso o leitor tenha interesse por ela, veja (AGRESTI, 1974).

O próximo teorema enunciado aqui foi tirado do artigo (DWASS, 1969), este resultado   importante para demonstrarmos o Teorema 2.1.3. Este teorema nos fornece a distribui o da descendência total num processo de ramifica o.

Teorema A.1.2. *Sejam A o evento que o processo se torna extinto, Z_0 uma distribui o inicial do processo de ramifica o e S_∞ a descendência total de um processo de ramifica o. Então,*

$$\mathbb{P}(S_\infty = i; A | Z_0 = n) = \mathbb{P}_i(S_\infty = i; A) = \begin{cases} \frac{n}{i} \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^i X_j = i - n \right), & i \geq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Outro teorema de fundamental importância nas demonstra es encontradas no capítulo referente ao alcance da propaga o pode ser visto no artigo do (HWANG; WANG, 1979). Antes de enunciar o teorema vamos expressar uma mesma fun o geradora fracional linear de outro modo, a saber

$$G(s; m, c) = 1 - m(1 - c) + \frac{m(1 - c)^2 s}{1 - cs} \quad (\text{A.2})$$

será chamada de fun o geradora fracional linear com mesma média que G , onde $0 \leq s \leq 1$, $m = G'(1)$ e $m(1 - c) \leq 1$. Vale apenas ressaltar aqui que esta nova maneira de expressar uma fun o geradora fracional linear   apenas uma mudança de variáveis. Vale apenas ressaltar aqui que esta nova maneira de expressar uma fun o geradora fracional linear   apenas uma mudança de variáveis.

Teorema A.1.3. *Sejam $G_X(s)$, $G(s; m, c)$ duas f.g.p's, dadas pela Defini o A.1.1 e (A.2), respectivamente e seja*

$$h(s) := G_X^{(1)}(1)G_X^{(1)}(s)(1 - s)^2 - (1 - G_X(s))^2 < 0,$$

onde $G_X^{(1)}(s) := dG_X(s)/ds$ para todo $s \in [0, 1)$. Então,

(i) $G(s; m, c_u)$   o melhor limite superior f.g.f.l. para $G_X(s)$ onde $c_u = (G_X^{(1)}(1) + G_X(0) - 1)/G_X^{(1)}(1)$;

(ii) $G(s; m, c_\ell)$   o melhor limite inferior f.g.f.l. para $G_X(s)$ onde $c_\ell = G_X^{(2)}(1)/(2G_X^{(1)}(1) + G_X^{(2)}(1))$ dado que $G_X^{(2)}(1) < \infty$.

Este apêndice não tem como propósito demonstra o deste teorema, caso haja interesse em sua demonstra o, ela pode ser encontrada em (HWANG; WANG, 1979).

APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES.

Os resultados auxiliares do apêndice estão divididos em duas seções, uma primeira que aborda resultados referentes ao processo-MT ADF-2 e por último, uma seção que traz um resultado referente ao processo-MT ADF- k .

B.1 Resultados auxiliares para o modelo ADF-2

Esta seção é composta de vários resultados que auxiliarão na conclusão de que $X^{(2)}$ tem distribuição de probabilidade dada por (3.9). Dando prosseguimento ao que foi feito na seção referente ao processo-MT ADF-2, vamos tomar os elementos da matriz A que estão situados abaixo da diagonal principal e mostrar que juntos eles tem soma igual a $d(d+1)/2$. De acordo com (3.7), os elementos situados abaixo da diagonal principal estão dispostos em diagonais. A ideia da demonstração é mostrar que cada diagonal δ_j , para $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, pode ser expressa como uma soma de um termo que dependa de p_0 com um outro termo que denotaremos por R_j . Onde esse último termo depende dos demais p_j e além disso, quando somamos todos os seus termos em j obtemos um resultado nulo. A próxima proposição explicita cada um desses dois termos que vão compor δ_j .

Proposição B.1.1. *Se $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, então a soma dos termos da j -ésima diagonal é dada por*

$$\delta_j = \begin{cases} (d+1)p_0, & \text{se } j = 1; \\ (d+1)p_1 + dp_0, & \text{se } j = 2; \\ (jd + d - j + 2)p_0 + R_j, & \text{se } j \geq 3; \end{cases}$$

onde,

$$R_j = \sum_{i=1}^{j-2} (d - 2(j-1) + i)p_i, \quad j \in \{3, 4, \dots, d\}.$$

Demonstração. Por (3.7), sabemos que $\delta_j := \sum_{i=1}^j (d+2-i)p_{j-i}$, para $j \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$. Fazendo a subtração

$$\begin{aligned} \delta_j - R_j &= (d-j+2)p_0 + (d-j+3)p_1 + \dots + (d+1)p_{j-1} - R_j \\ &= \sum_{i=2}^{j+1} (d-j+i)p_{i-2} + (2j-d-3)p_1 + (2j-d-4)p_2 + \dots + (j-d)p_{j-3} \\ &= \sum_{i=2}^{j+1} (d-j+i)p_{i-2} + \sum_{i=3}^j (2j-d-i)p_{i-2} \\ &= \sum_{i=3}^j jp_{i-2} + (d-j+2)p_0 + (d+1)p_{j-1}, \quad j \in \{3, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Dado que $\delta_j - R_j = \sum_{i=3}^j jp_{i-2} + (d-j+2)p_0 + (d+1)p_{j-1}$, o nosso próximo passo é verificar que $\sum_{i=3}^j jp_{i-2} + (d+1)p_{j-1} = jd p_0$. Para fazer isso, vamos primeiramente mudar

o índice inferior do somatório de 3 para 1, passando assim a ter $\sum_{i=3}^j jp_{i-2} = \sum_{i=1}^{j-2} jp_i$. A próxima observação a ser feita é que $\sum_{i=1}^{j-2} jp_i + (d+1)p_{j-1} = jdp_0$ é uma igualdade que pode ser demonstrada de modo semelhante ao resultado obtido no Capítulo 2, veja a Igualdade 2.6. Logo,

$$\begin{aligned}\delta_j - R_j &= \sum_{i=3}^j jp_{i-2} + (d+1)p_{j-1} + (d-j+2)p_0 \\ &= jdp_0 + (d-j+2)p_0 \\ &= (jd + d - j + 2)p_0, \quad j \in \{2, 3, \dots, d\}.\end{aligned}$$

Para $j = 1$ ou $j = 2$, o resultado segue diretamente da definição, ou seja, $\delta_1 = (d+1)p_0$ e $\delta_2 = (d+1)p_1 + dp_0 =$. Se $j \geq 3$, segue que $\delta_j = (jd + d - j + 2)p_0 - R_j$. Como queríamos demonstrar. \square

A próxima proposição retoma uma igualdade que já foi citada anteriormente e que será muito relevante para concluirmos que a soma das massas de probabilidade da variável $X^{(2)}$ é igual a 1.

Proposição B.1.2. *Seja δ_j uma das diagonais inferiores da matriz quadrada $\mathbf{A}_{(n \times n)}$, tais que $n = d + 1$ e $a_{i\ell} = ip_\ell$, sendo $1 \leq i \leq d + 1$, $0 \leq \ell \leq d$ e $p_\ell = \mathbb{P}(X = \ell)$, então*

$$\sum_{j=1}^d \delta_j = \frac{d(d+1)}{2}. \quad (\text{B.1})$$

A ideia aqui é utilizar o resultado obtido na Proposição B.1.1 para demonstrar a Proposição B.1.2. Para fazer isso vamos mostrar que

$$\sum_{j=1}^d (jd + d - j + 2)p_0 = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Além disso, precisamos mostrar que

$$\sum_{j=3}^d R_j = 0.$$

O próximo lema aborda a soma de todos os coeficientes de p_0 , com exceção do termo $(d+1)p_0$.

Lema B.1.1. *Considere duas sequências (b_j) e (c_j) tais que $b_j = j$ e $c_j = d + 1 - j$ para $j \in \{2, \dots, d\}$. Então,*

$$\sum_{i=2}^d b_i = \sum_{i=2}^d c_i = \frac{(d+2)(d-1)}{2}.$$

Demonstração. Aqui vamos utilizar a fórmula da soma de termos de uma progressão aritmética. Note que $b_2 = 2$, $b_d = d$, além disso, $c_2 = d$, $c_d = 2$. Como a primeira

sequência tem razão 1 e a segunda tem razão -1 , segue que elas possuem os mesmos termos e portanto podemos fazer a soma de apenas uma delas. Utilizando o fato de que $S_n = (a_1 + a_n)n/2$ para toda progressão aritmética finita, segue diretamente que $\sum_{i=2}^d b_i = \sum_{i=2}^d c_i = (d+2)(d-1)/2$. \square

Como nivelar os termos que compõem δ_j para que sua expressão fique no formato δ'_j ? A ideia é observar que j é o elemento que faz acontecer a simplificação de δ_j no formato da Proposição B.1.1. Além disso, o resultado simplificado de δ_j pode ser expresso em termos de duas seqüências numéricas simples, que denotaremos por b_j e c_j para todo $j \in \{2, 3, \dots, d\}$ e cuja soma vai nos deixar a um passo de concluir que a soma dos elementos das diagonais inferiores da matriz A é igual a $\binom{d+1}{2}$.

Para nivelar os termos de cada um dos δ_j , vamos acrescentar os termos que estão faltando para que a expressão de δ_j possa ser colocada no formato da Proposição B.1.1. O parâmetro chave para que ocorra o nivelamento é j e o resultado final após o nivelamento de δ_j é $\delta'_j = \delta_j + R_j$, onde

$$R_j = \sum_{i=1}^{j-2} (d - 2(j-1) + i)p_i, \quad j \in \{3, 4, \dots, d\}.$$

Denotando por R_{ju} o coeficiente referente a probabilidade p_u de R_j , de modo geral, podemos escrever

$$R_{ju} = d - 2(j-1) + u, \quad u \in \{1, 2, 3, \dots, j-2\}. \quad (\text{B.2})$$

Lema B.1.2. *Seja R_{ju} o coeficiente de p_u em R_j para $u \in \{1, 2, 3, \dots, d-3\}$, então*

$$\sum_{j=u+2}^d R_{ju} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Demonstração. De acordo com a Equação B.2, vamos ter

$$\begin{aligned} \sum_{i=u+2}^d R_{iu} &= \sum_{i=u+2}^d d - 2(i-1) + u \\ &= \sum_{i=u+2}^d (d+u+2) - 2 \sum_{i=u+2}^d i \\ &= (d-u-1)(d+u+2) - 2(d-u-1)(d+u+2)/2 \\ &= (d-u-1)(d+u+2) - (d-u-1)(d+u+2) \\ &= 0, \quad u \in \{1, 2, 3, \dots, i-2\}. \end{aligned}$$

\square

Lema B.1.3. *Seja $R_j = \sum_{i=1}^{j-2} (d - 2(j-1) + i)p_i$, para $j \in \{3, 4, \dots, d\}$. Então,*

$$\sum_{j=3}^d R_j = 0. \quad (\text{B.4})$$

Demonstração. Para verificar este lema, a ideia é substituir o valor de R_j pela sua expressão e depois trocar os índices do somatório duplo. Feito isto, utilizamos a Equação (B.3) que diz que todos os coeficientes são nulos.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=3}^d R_j &= \sum_{j=3}^d \left(\sum_{i=1}^{j-2} (d - 2(j-1) + i) p_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{d-2} \left(\sum_{j=i+2}^d (d - 2(j-1) + i) \right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{d-2} 0 p_i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Agora vamos fazer a demonstração da Proposição B.1.2

Demonstração. De acordo com o Lema B.1.1 e utilizando o fato de que $p_0 = 1/(d+1)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d-1} (b_j d + c_j) p_0 + (d+1) p_0 &= \sum_{j=1}^{d-1} (b_j d + c_j) p_0 + (d+1) p_0 \\
&= \left(d \sum_{j=1}^{d-1} b_j + \sum_{j=1}^{d-1} c_j \right) p_0 + (d+1) p_0 \\
&= \left(\frac{d(d+2)(d-1)}{2} + \frac{(d+2)(d-1)}{2} \right) p_0 + (d+1) p_0 \\
&= \left(\frac{(d+1)(d+2)(d-1)}{2} \right) \frac{1}{d+1} + (d+1) \frac{1}{d+1} \\
&= \frac{(d+2)(d-1) + 2}{2} \\
&= \frac{(d+1)d}{2}.
\end{aligned}$$

Para obter o resultado esperado, vamos substituir $\sum_{j=3}^d R_j$ por 0 nas contas que seguem

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d \delta_j &= \sum_{j=1}^{d-1} \delta'_j + (d+1) p_0 + \sum_{j=3}^d R_j \\
&= \sum_{j=1}^{d-1} (b_j d + c_j) p_0 + (d+1) p_0 + 0 \\
&= \sum_{j=1}^{d-1} (b_j d + c_j) p_0 + (d+1) p_0 \\
&= (d+1) d / 2.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

B.2 Resultado auxiliar para o modelo ADF-k

O próximo lema é importante para mostrarmos que $X^{(k)}$ tem distribuição de probabilidade dada por (3.12).

Lema B.2.1. *Seja*

$$S(i, k) := \sum_{m_1=1}^{i+1} \sum_{m_2=m_1}^{i+1} \cdots \sum_{m_{k-1}=m_{k-2}}^{i+1} \prod_{\ell=1}^{k-1} m_\ell.$$

Então

$$S(i, k) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_{k-1} \leq i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m_\ell - \ell + 1).$$

Demonstração. Primeiramente, note que $1 \leq m_1 \leq i+1$, $m_1 < m_2 \leq i+2$, $m_2 < m_3 \leq i+3$, \dots , $m_{k-2} < m_{k-1} \leq i+k-1$. Em geral, podemos escrever $m_\ell < m_{\ell+1} \leq i+\ell+1$ para todo $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$. Fazendo $\ell = 1$, obtemos a seguinte expressão $m_1 < m_2 \leq i+2$. Subtraindo uma unidade nos dois últimos membros dessa desigualdade resulta em

$$m_1 \leq m_2 - 1 \leq i + 1.$$

Fazendo $\ell = 2$, obtemos a seguinte expressão $m_2 < m_3 \leq i+3$. Subtraindo 1 unidade nos três membros dessa desigualdade resulta em

$$m_2 - 1 < m_3 - 1 \leq i + 2.$$

Subtraindo 1 unidade nos dois últimos membros dessa desigualdade resulta em

$$m_2 - 1 \leq m_3 - 2 \leq i + 1.$$

Consequentemente, vamos ter

$$m_1 \leq m_2 - 1 \leq m_3 - 2 \leq i + 1.$$

Tomando $\ell = 3$, obtemos a seguinte expressão $m_3 < m_4 \leq i+4$. Subtraindo 2 unidades nos três membros dessa desigualdade resulta em

$$m_3 - 2 < m_4 - 2 \leq i + 2.$$

Subtraindo 1 unidade nos dois últimos membros dessa desigualdade resulta em

$$m_3 - 2 \leq m_4 - 3 \leq i + 1.$$

Consequentemente, vamos ter

$$m_1 \leq m_2 - 1 \leq m_3 - 2 \leq m_4 - 3 \leq i + 1.$$

Supondo que esta desigualdade seja válida para $\ell - 1$, podemos escrever

$$m_1 \leq m_2 - 1 \leq m_3 - 2 \leq \dots \leq m_\ell - \ell + 1 \leq i + 1. \quad (\text{B.5})$$

Como $m_\ell < m_{\ell+1} \leq i + \ell + 1$, subtraindo $\ell - 1$ nos três membros da desigualdade vamos ter $m_\ell - \ell + 1 < m_{\ell+1} - \ell + 1 \leq i + 2$ e daí, subtraindo 1 unidade nos dois últimos membros, resulta em

$$m_\ell - \ell + 1 \leq m_{\ell+1} - \ell \leq i + 1. \quad (\text{B.6})$$

Juntando as desigualdades (B.5) e (B.6), vamos ter

$$1 \leq m_1 \leq m_2 - 1 \leq m_3 - 2 \leq \dots \leq m_{k-2} - (k - 3) \leq m_{k-1} - (k - 2) \leq i + 1.$$

Fazendo $m_\ell - \ell + 1 = \phi_\ell$, a última desigualdade resulta em

$$1 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3 \leq \dots \leq \phi_{k-2} \leq \phi_{k-1} \leq i + 1.$$

Como para cada m_ℓ tal que $m_{\ell-1} < m_\ell \leq i + \ell + 1$ temos um único ϕ_ℓ tal que $\phi_{\ell-1} \leq \phi_\ell \leq i + 1$. Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_{k-1} \leq i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m_\ell - \ell + 1) &= \sum_{m_1=1}^{i+1} \sum_{m_1 < m_2}^{i+2} \sum_{m_2 < m_3}^{i+3} \dots \sum_{m_{k-2} < m_{k-1}}^{i+k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m_\ell - \ell + 1). \\ &= \sum_{m_1=1}^{i+1} \sum_{m_1 \leq m_2 - 1}^{i+1} \dots \sum_{m_{k-2} - (k-3) \leq m_{k-1} - (k-2)}^{i+1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m_\ell - \ell + 1). \\ &= \sum_{\phi_1=1}^{i+1} \sum_{\phi_1 \leq \phi_2}^{i+1} \sum_{\phi_2 \leq \phi_3}^{i+1} \dots \sum_{\phi_{k-2} \leq \phi_{k-1}}^{i+1} \prod_{\ell=1}^{k-1} \phi_\ell. \\ &= S(i, k). \end{aligned}$$

□