

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Propagação de rumor em uma população cética em \mathbb{N}

Lissa Kido Higashizawa

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Lissa Kido Higashizawa

Propagação de rumor em uma população cética em N

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Giacomo Grimbert Gallo

USP – São Carlos
Maio de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

K46p Kido Higashizawa, Lissa
Propagação de rumor em uma população cética em N /
Lissa Kido Higashizawa; orientador Alexsandro
Giacomo Grimbert Gallo. -- São Carlos, 2023.
69 p.

Dissertação (Mestrado - Programa
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2023.

1. Processo Firework Cético. 2. Processo
Firework. 3. Processo de Renovação. 4. Cadeia semi-
Markov. 5. Probabilidade. I. Giacomo Grimbert
Gallo, Alexsandro, orient. II. Título.

Lissa Kido Higashizawa

Rumor propagations in a skeptical population on \mathbb{N}

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Science – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Master in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Alessandro Giacomo Grimbert Gallo

USP – São Carlos
May 2023

*Dedico esta dissertação de Mestrado à minha mãe Suely, por todo o esforço, carinho e amor.
Dedico também à todos os meus amigos que me acompanharam durante esse período, por todo
o apoio e incentivo.*

Sem o apoio de todos, este trabalho não seria realizado.

AGRADECIMENTOS

Durante o período de mestrado enfrentei diversos desafios, permeada de momentos de tristeza e de alegria. Graças as pessoas que me deram apoio durante esse período, pude superar todos esses obstáculos.

Gostaria de agradecer primeiramente à minha mãe Suely por todo o carinho e apoio. Gostaria de agradecer também aos meus amigos que me acompanharam nessa jornada, observando de perto os desafios que enfrentei.

Minha gratidão especial ao Prof. Dr. Alexsandro Giacomo Grimbert Gallo, meu orientador, que me guiou e me aconselhou durante esse período. Muito obrigada por ter acreditado e depositado a sua confiança em mim.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Sem este apoio não teria condições de me dedicar ao projeto.

*“Vamos pegar nossos livros e canetas, eles são nossas armas mais poderosas.
Uma criança, um professor, uma caneta e um livro podem mudar o mundo.
A educação é a única solução.”
(Malala Yousafzai)*

RESUMO

HIGASHIZAWA, L. K. **Propagação de rumor em uma população cética em \mathbb{N}** . 2023. 69 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Consideramos dois modelos de propagação de rumor em \mathbb{N} da literatura. Em ambos os modelos, os indivíduos (um por sítio de \mathbb{N}) possuem raios aleatórios, independentes e igualmente distribuídos. No começo apenas o indivíduo da origem tem a informação. No primeiro modelo, “firework model”, cada indivíduo informado vai informar os indivíduos à sua direita que estiverem dentro do seu raio, no “reverse firework model”, cada indivíduo vai pegar a informação à sua esquerda, dos indivíduos informados que estiverem dentro do seu raio. Já são conhecidas na literatura as condições necessárias e suficientes sobre a distribuição dos raios para que tenha sobrevivência (probabilidade positiva de haver infinitos informados) em cada modelo. Nesta dissertação, vamos obter resultados para a extensão destes modelos quando os indivíduos acreditam na informação apenas se a receber (ou a pegar) de pelos menos 2 indivíduos informados.

Palavras-chave: Cadeia semi-Markov, Probabilidade, Processo de renovação, Processo firework, Processo firework cético.

ABSTRACT

HIGASHIZAWA, L. K. **Rumor propagations in a skeptical population on \mathbb{N}** . 2023. 69 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

We consider two models for information propagation in \mathbb{N} . In both models, the individuals (one per site of \mathbb{N}) have random, independent, and equally distributed radius. At the beginning only the individual at 0 has the information. In the first model, the “firework model”, each informed individual will inform the individuals to its right that are within its radius, in the “reverse firework model”, each individual will get the information from the informed individuals on its left that are within its radius. The necessary and sufficient conditions are already known in the literature about the distribution of radius to have survival (positive probability of having infinitely many informed individuals) in each model. In this dissertation, we will obtain results for the extension of these models when individuals believe the information (get informed) only if they receive it (or take it) from at least 2 informed individuals.

Keywords: Semi-Markov chain, Probability, Renewal process, Firework process, Skeptical firework process.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PF.	25
Figura 2 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PFC.	28
Figura 3 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PFR.	32
Figura 4 – Os três primeiros passos de um Processo Firework Reverso Céptico.	34
Figura 5 – A relação entre PF, PFR e PR.	38
Figura 6 – Os três primeiros passos de um Processo Firework Céptico Dual.	41
Figura 7 – As regras de um Processo Firework Céptico Dual.	41
Figura 8 – Exemplo de não dualidade entre o PFC e PFRC.	42
Figura 9 – A relação entre PFC e PFCD.	43
Figura 10 – A relação entre PFCD e CSM.	44
Figura 11 – Estrutura de contagem dos raios do PFCD para a prova do Lema 2.	44
Figura 12 – Estrutura de contagem dos raios do PFCD para os indivíduos 1 ao t	45
Figura 13 – O PFRC como uma CRM.	53
Figura 14 – Estrutura de contagem dos raios para o PFRC.	53
Figura 15 – Exemplo de um processo de renovação.	59
Figura 16 – Exemplo de realização de uma cadeia de renovação Markov.	65
Figura 17 – As sequências Z_n e N_t referentes à Figura 16.	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CRM	Cadeia de Renovação Markov
CSM	Cadeia Semi-Markov
CSM	Cadeia Semi-Markov
FGP	Função Geradora de Probabilidade
IID	Independentes e Identicamente Distribuídas
PF	Processo Firework
PFC	Processo Firework Cético
PFCD	Processo Firework Cético Dual
PFR	Processo Firework Reverso
PFRC	Processo Firework Reverso Cético
PR	Processo de Renovação

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	MODELOS DE PROPAGAÇÃO FIREWORK	25
2.1	Processos Firework	25
2.1.1	<i>Processo Firework Simples (PF)</i>	25
2.1.2	<i>Processo Firework Cético (PFC)</i>	28
2.1.3	<i>Resultados novos no PFC</i>	29
2.2	Processos Firework reversos	32
2.2.1	<i>Processo Firework Reverso (PFR)</i>	32
2.2.2	<i>Processo Firework Reverso Cético (PFRC)</i>	33
3	PROVA DOS RESULTADOS	37
3.1	Prova do Teorema 2 (Probabilidade de sobrevivência do PF)	37
3.1.1	<i>Relação entre PF e PFR</i>	38
3.1.2	<i>Relação entre PFR e PR</i>	38
3.1.3	<i>Conclusão da demonstração do Teorema 2</i>	40
3.2	Prova do Teorema 3 (Probabilidade de sobrevivência do PFC)	41
3.2.1	<i>Processo Firework Cético Dual (PFCD)</i>	41
3.2.2	<i>Relação entre PFC e PFCD</i>	42
3.2.3	<i>Relação entre PFCD e CRM</i>	43
3.2.4	<i>Continuação da demonstração do Teorema 3</i>	46
3.2.5	<i>Conclusão da demonstração do Teorema 3</i>	49
3.3	Prova do Corolário 2 (Condição de sobrevivência do PFC)	50
3.4	Prova do Teorema 5 (Proporção de informados do PFR)	51
3.5	Prova do Teorema 6 (Probabilidade de sobrevivência do PFRC)	52
3.6	Prova do Teorema 7 (Proporção de informados do PFRC)	52
4	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICE A PROCESSO DE RENOVAÇÃO	59
A.1	Processo de renovação estacionário	61
A.2	Demonstração do Teorema da renovação	63

APÊNDICE B	CADEIAS SEMI-MARKOV	65
B.1	Cadeias de renovação Markov	65
B.2	Cadeias semi-Markov	68

INTRODUÇÃO

Os estudos iniciais de um processo de propagação de rumor começaram através dos trabalhos de [Daley e Kendall \(1965\)](#) e [Maki *et al.* \(1973\)](#) que foram inspirados em modelos que descrevem a transmissão de doenças no âmbito da epidemiologia. Existem diversos modelos que descrevem a propagação de informações, mas o modelo utilizado como base para esta dissertação foi chamado de Processo Firework (PF), proposto por [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#).

A propagação de informação nesse processo acontece em tempo discreto, sobre os números naturais, como se cada número fosse um indivíduo que está suscetível ao recebimento da informação e a propagação. Uma vez que um indivíduo ignorante recebe a informação, ele passa a ser um propagador, sendo possível transmitir o rumor e depois, o mesmo continua sendo um propagador, mas inativo.

O objetivo principal é identificar as condições que levam o processo a sobreviver/percolar, ou seja, a informação é propagada até o infinito com probabilidade positiva. [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#) obtiveram uma condição “se, e somente se,” sobre a distribuição dos raios para garantir a percolação. Alguns anos depois, [Gallo *et al.* \(2014\)](#) conseguiram a probabilidade de sobrevivência exata que é mostrada na Seção 2.1.1 e demonstrada na Seção 3.1.

Agora a ideia é modificar esse processo através de uma condição que dificulta a sua sobrevivência. Este modelo que será abordado mais detalhadamente na Seção 2.1.2 é chamado de Processo Firework Cético (PFC) e foi considerado primeiramente por [Sajadi e Roy \(2019\)](#). Nele, o indivíduo necessita de pelo menos dois informantes para acreditar e se tornar um propagador.

O objetivo da dissertação é apresentar resultados novos a respeito da probabilidade de sobrevivência do processo cético, além disso o estudo é complementado por outros resultados novos de processos auxiliares necessários para alcançar o objetivo principal.

O conteúdo do trabalho está dividido em dois capítulos, o Capítulo 2 apresenta os modelos PF, PFC e os processos reversos chamados de Processo Firework Reverso (PFR) e

Processo Firework Reverso Cético (PFRC), com todos os seus resultados. Já o Capítulo 3 é dedicado às provas desses resultados.

Explicando mais detalhadamente o conteúdo do Capítulo 2, na Seção 2.1.1 apresentaremos o PF, o principal processo que baseou todo o trabalho de dissertação. Cada indivíduo possui um raio aleatório, representadas pela sequência $\{R_n\}_{n \geq 0}$ que são Independentes e Identicamente Distribuídas (IID), lançados para a direita pelos informados, determinando o quão longe eles conseguem propagar a informação. Todos os não informados que estiverem dentro do alcance do raio se tornarão informados. Discutiremos sobre as condições que levam a sobrevivência do processo e a obtenção da probabilidade exata de percolação através da relação com o PFR e o Processo de Renovação (PR).

Na Seção 2.1.2 apresentamos o PFC, a extensão natural do PF que torna os indivíduos mais céticos, de modo que os não informados precisam receber a informação pelo menos duas vezes para acreditarem e se tornarem propagadores. Já existiam alguns resultados publicados por [Sajadi e Roy \(2019\)](#), mas nesta dissertação trouxemos resultados novos para o processo, obtendo uma condição mais forte de sobrevivência do que o publicado anteriormente e também a probabilidade exata de sobrevivência.

Já na Seção 2.2, apresentamos dois processos reversos descritos brevemente abaixo.

O primeiro processo reverso apresentado é o PFR. Neste, cada indivíduo possui um raio aleatório \bar{R}_n que são lançados para a esquerda, com $\{\bar{R}_n\}_{n \geq 1}$ sendo IID e representam o quão longe os indivíduos não informados conseguem escutar a informação. Caso alcancem algum informado, estes se tornarão propagadores. De resultados, trouxemos a probabilidade de percolação e a proporção de informados durante o processo.

O segundo processo reverso apresentado é o PFRC, que pode ser considerado uma das extensões mais simples e intuitivas do PFR. Considerando a mesma definição de raios aleatórios utilizados no PFR, agora os indivíduos precisam alcançar pelo menos dois informados para acreditarem na informação, tornando os mais difíceis para se transformarem em propagadores. Apresentamos os mesmos resultados do PFR, mas agora, se trata de uma contribuição original para a proporção de informados.

Durante o Capítulo 3, na Seção 3.1, mostraremos a prova do teorema da probabilidade exata de sobrevivência do PF. Para isso, utilizaremos a abordagem de [Gallo e Garcia \(2018\)](#): eles usaram o PFR para estudar o PF. Como provaram em [Gallo et al. \(2014\)](#) que o PFR é um PR, o estudo do PF passa pelo estudo da teoria da renovação.

Na Seção 3.2, veremos que o PFRC não é um processo reverso adequado para provar o teorema da probabilidade de sobrevivência do PFC, por isso será necessário apresentar um outro processo reverso, o Processo Firework Cético Dual (PFCD) que será considerado como o processo dual do PFC. Ele também é uma extensão do PFR que torna os indivíduos mais céticos, entretanto não é considerado tão intuitivo quanto o outro. Além dos tipos de indivíduos

“informados” e “não informados” já existentes, acrescentamos um terceiro tipo chamado de “indecisos”.

O PFCD foi construído de uma forma que houvesse equivalência, mas agora este processo não é mais um PR, e sim uma Cadeia de Renovação Markov (CRM). A partir desse procedimento, conseguimos obter a probabilidade exata de percolação e um corolário equivalente ao resultado de [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#) para o PFC.

Detalhes sobre a teoria da renovação pode ser encontrado no Apêndice [A](#) e sobre a teoria da renovação markoviana, no Apêndice [B](#).

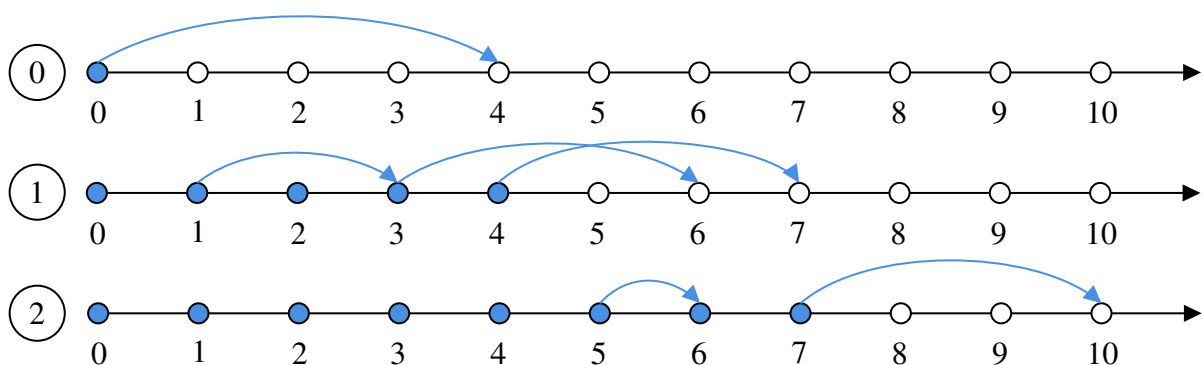
MODELOS DE PROPAGAÇÃO FIREWORK

2.1 Processos Firework

2.1.1 Processo Firework Simples (PF)

O Processo Firework (PF) é um modelo de disseminação de informação nos naturais (\mathbb{N}) que foi estudado inicialmente por [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#). Com a exceção do 0 que já começa informado, cada número natural representa um indivíduo que pode ser informado por alguém a sua esquerda e transmitir informação para indivíduos a sua direita. O alcance da transmissão dos indivíduos é definido pela sequência de raios aleatórios $\{R_i\}_{i \geq 0}$, IID, com distribuição $\alpha_k := \mathbb{P}(R_i \leq k)$, tal que R_i corresponde ao raio do i -ésimo indivíduo. A Figura 1 mostra o funcionamento do processo para dois passos iniciais:

Figura 1 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PF.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os indivíduos informados são representados pela cor azul, então ao iniciar o processo, o indivíduo 0 que está informado lança um raio de tamanho 4 para a sua direita informando os indivíduos 1, 2, 3 e 4. No próximo passo, o indivíduo 1 lança um raio de tamanho 2, o indivíduo 2 lança um raio de tamanho 0 e os indivíduos 3 e 4 lançam raios de tamanho 3, informando os

indivíduos 5, 6 e 7. Dessa forma, o processo continua indefinidamente ou até não existir mais novos informados.

Uma questão natural é saber se o processo irá sobreviver, ou seja, saber as condições necessárias para a informação continuar se propagando infinitamente com probabilidade positiva. Quando isso acontece, significa que há um número infinito de informados ao final do processo, portanto se M é o número de informados ao final do processo, o evento $\{M = \infty\}$ representa a sobrevivência do processo. Resumindo, a questão é saber se $\mathbb{P}(M = \infty) > 0$ ou $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$.

Inicialmente, o artigo de [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#) trouxe o seguinte resultado:

Teorema 1 (Condição de sobrevivência do PF).

$$\mathbb{P}(M = \infty) > 0 \iff \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i < \infty. \quad (2.1)$$

Através desse teorema é possível dizer se a probabilidade do processo sobreviver é positiva ou não, mas não a probabilidade exata.

Exemplo 1. Considere $\alpha_i = \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^\gamma$, com $\gamma > 0$. Calculando a expressão do teorema 1:

$$\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i = \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \left(\frac{i+1}{i+2}\right)^\gamma = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^\gamma \cdot \dots \cdot \left(\frac{j-1}{j}\right)^\gamma \cdot \left(\frac{j}{j+1}\right)^\gamma = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{j+1}\right)^\gamma. \quad (2.2)$$

Tem-se que a expressão (2.2) é uma série harmônica em que,

- se $\gamma \leq 1$, a série é divergente, então $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$ (o processo não sobrevive);
- se $\gamma > 1$, a série é convergente, então $\mathbb{P}(M = \infty) > 0$ (é possível o processo sobreviver).

Além disso, um outro resultado é obtido a partir do teorema anterior ([JUNIOR; MACHADO; ZULUAGA, 2011](#)):

Corolário 1. Seja

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(R_0 \geq n), \quad (2.3)$$

então

1. se $L > 1$, então $\mathbb{P}(M = \infty) > 0$;
2. se $L < 1$, então $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$;

3. se $L = 1$ e existe um N , tal que para todo $n \geq N$

$$\mathbb{P}(R_0 \geq n) \leq \frac{1}{n-1}, \quad (2.4)$$

então $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$.

Este resultado mostra condições mais intuitivas, porém mais restritivas sobre a cauda da distribuição de R_0 para ter ou não ter sobrevivência.

Em um trabalho posterior, [Gallo et al. \(2014\)](#) conseguiram obter um teorema que diz exatamente qual é a probabilidade de sobrevivência do processo:

Teorema 2 (Probabilidade de sobrevivência do PF). A probabilidade de sobrevivência do rumor no PF é dada por

$$\mathbb{P}(M = \infty) = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i}, \quad (2.5)$$

em que a probabilidade é positiva se, e somente se, $\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i < \infty$.

A prova do teorema será mostrada na Seção 3.1 e abaixo, segue um exemplo em que é possível calcular a probabilidade exata de sobrevivência do processo:

Exemplo 2. ([JUNIOR; MACHADO; RAVISHANKAR, 2019](#)) Considere $\alpha_i = \frac{i+1}{i+3}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i &= \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{i+1}{i+3} = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdots \left(\frac{j-2}{j}\right) \cdot \left(\frac{j-1}{j+1}\right) \cdot \left(\frac{j}{j+2}\right) \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{2}{(j+1)(j+2)} = \sum_{j \geq 1} \left(\frac{2}{j+1} - \frac{2}{j+2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) + \dots = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(M = \infty) = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i} = \frac{1}{2},$$

significando que a probabilidade de sobrevivência do processo é de 0.5.

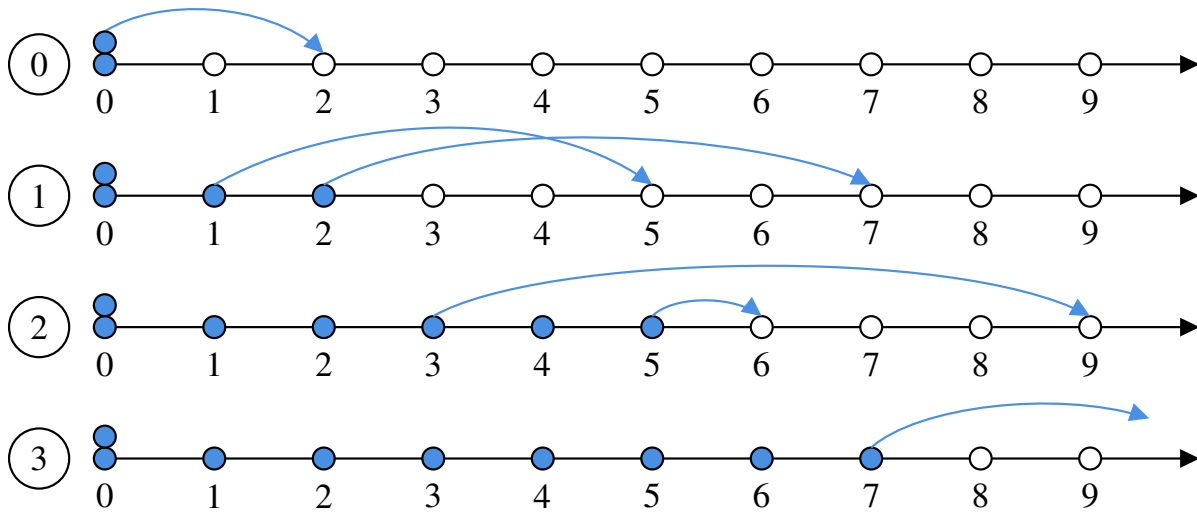
O exemplo acima é um dos poucos casos em que é possível calcular a probabilidade exata de sobrevivência. Observe que o Teorema 1, de [Junior, Machado e Zuluaga \(2011\)](#) é corolário deste Teorema 2 de [Gallo et al. \(2014\)](#).

2.1.2 Processo Firework Cético (PFC)

O Processo Firework Cético (PFC) é uma modificação do PF inicialmente estudado por [Sajadi e Roy \(2019\)](#), em que os indivíduos necessitam de pelo menos dois informados para acreditar na informação e se tornarem propagadores. A versão do PFC tratada aqui é ligeiramente diferente da abordada por esses autores, pois consideramos que há indivíduos em todos os números naturais.

O PFC começa com dois indivíduos informados na origem que lançam raios de tamanhos iguais. A partir disso, o exemplo da Figura 2 mostra os indivíduos 1 e 2 sendo informados e em seguida, o indivíduo 1 lança um raio de tamanho 4 e o indivíduo 2, um raio de tamanho 5, informando os indivíduos 3, 4 e 5, pois receberam a informação duas vezes. Por último, o raio que o indivíduo 3 lançou alcançou até o indivíduo 9, mas os informados foram apenas os indivíduos 6 e 7, pois eles já haviam recebido uma vez a informação através do indivíduo 2.

Figura 2 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PFC.



Fonte: Elaborada pela autora.

Da mesma forma que o PF, os raios aleatórios $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, com R_i correspondendo ao raio do i -ésimo indivíduo, são IID, com distribuição $\alpha_k := \mathbb{P}(R_i \leq k)$ e \bar{M} o número de indivíduos informados ao final do processo, com o evento $\{\bar{M} = \infty\}$ representando a percolação do processo, o PFC continua indefinidamente ou até não houver mais novos informados. Assim, [Sajadi e Roy \(2019\)](#) obtiveram o seguinte resultado:

Proposição 1. A probabilidade de percolação do PFC satisfaz:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(R_0 \geq n) > 1 \implies \mathbb{P}(\bar{M} = \infty) > 0 \quad (2.6)$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(R_0 \geq n) < 1 \implies \mathbb{P}(\bar{M} = \infty) = 0. \quad (2.7)$$

A proposição possui um formato semelhante ao Corolário 1, entretanto note que ela não traz informações do que acontece com o processo caso o limite seja igual à 1, então baseado apenas pela proposição, não é possível afirmar o que acontece com a probabilidade de sobrevivência do processo para este caso.

Exemplo 3. Considere novamente o Exemplo 1, com $\alpha_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\gamma$, $\gamma > 0$. De acordo com a Proposição 1,

$$\mathbb{P}(R_0 < n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\gamma \quad (2.8)$$

e

$$\mathbb{P}(R_0 \geq n) = 1 - \mathbb{P}(R_0 < n) = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\gamma = \frac{(n+1)^\gamma - n^\gamma}{(n+1)^\gamma}, \quad (2.9)$$

de tal forma que o limite é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(R_0 \geq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n+1)^\gamma - n^\gamma}{(n+1)^\gamma} = \gamma. \quad (2.10)$$

Assim, concluímos que, baseado na Proposição 1,

- se $\gamma > 1$, a probabilidade de sobrevivência do processo é positiva;
- se $\gamma < 1$, a probabilidade de sobrevivência do processo é zero e;
- se $\gamma = 1$, não é possível dizer o que acontece com a probabilidade de percolação.

2.1.3 Resultados novos no PFC

Como uma contribuição original, durante a pesquisa obtemos a probabilidade exata de sobrevivência do PFC:

Teorema 3 (Probabilidade de sobrevivência do PFC). Seja

$$u_{t|i} = \frac{\mathbb{P}(M \leq t+i) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell}. \quad (2.11)$$

A probabilidade de sobrevivência do PFC é dada por

$$\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) = \frac{1}{\bar{m}}, \quad (2.12)$$

onde

$$\bar{m} = \sum_{i \geq 0} \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell\right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+i})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|i} (1 - \alpha_{t+i})}}{\sum_{m \geq 1} \left[\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell\right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})} \right]} \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell. \quad (2.13)$$

Como será visto mais tarde no texto, a prova deste teorema é baseada no estudo de um processo reverso chamado Processo Firework Cético Reverso. Neste processo, o \bar{m} representará a distância média entre dois indivíduos informados. Apesar de obtermos uma expressão para a probabilidade exata de sobrevivência, é difícil obter $u_{t|i}$, portanto a expressão \bar{m} é também difícil de ser calculada. Assim, obtemos um corolário para este teorema, que facilita o entendimento sobre a sobrevivência do processo sem a necessidade de passar por cálculos complicados.

Corolário 2 (Condição de sobrevivência do PFC).

$$\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) > 0 \iff \sum_{j \geq 1} \prod_{\ell=0}^{j-1} \alpha_\ell < \infty. \quad (2.14)$$

A prova do teorema será feita na Seção 3.2 e a do Corolário, na Seção 3.3. Note que este corolário é idêntico ao Teorema 1, significando que este é um resultado mais forte do que a Proposição 1, por se tratar de um resultado do tipo “se, se somente se”. Apesar do PF e PFC possuírem a mesma condição de sobrevivência, note que $\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) \leq \mathbb{P}(M = \infty)$ pois os não informados do PFC precisam receber a informação pelo menos duas vezes, enquanto que no PF basta receber apenas uma vez.

Os dois exemplos abaixo mostram casos em que não é possível dizer se há ou não percolação usando a Proposição 1, mas podemos concluir pelo Corolário 2. O primeiro é um caso que o processo não sobrevive e o segundo, é um caso que o processo tem a probabilidade positiva de sobreviver.

Exemplo 4. Vamos retomar o Exemplo 3. Quando $\gamma = 1$, a expressão α_n torna-se um caso particular que não é contemplado pela Proposição 1, mas agora de acordo com o Corolário 2, vimos que $\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_\ell$ é uma série divergente quando $\gamma = 1$, portanto é possível concluir que a probabilidade de sobrevivência do processo é zero para este caso.

Exemplo 5. Considere mais um exemplo, com $\alpha_n = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)} \right)^\gamma$, $\gamma > 0$. Pela Proposição 1,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}(R_0 \geq n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{n}{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \right)^\gamma \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)(\ln(n+2))^\gamma - n(\ln(n+1))^\gamma}{(\ln(n+2))^\gamma} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

O Teorema do valor médio nos diz que se f é uma função definida e derivável no intervalo $]a, b[$, então existe um ponto $c \in [a, b]$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2.16)$$

Utilizando o teorema com $b = n + 1$, $a = n$ e $f(x) = x(\ln(x + 1))^\gamma$, teremos $f'(x) = (\ln(x + 1))^\gamma + \frac{x^\gamma}{x + 1}(\ln(x + 1))^{\gamma-1}$, então a expressão dentro do limite da Equação (2.15) é equivalente à

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{(\ln(c+1))^\gamma + \frac{c^\gamma}{c+1}(\ln(c+1))^{\gamma-1}}{(\ln(n+2))^\gamma} \right), \quad (2.17)$$

para algum $c \in [n, n + 1]$. Substituindo $c = n$ para o denominador de $\frac{c^\gamma}{c+1}$ e $c = n + 1$ para o resto, teremos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)(\ln(n+2))^\gamma - n(\ln(n+1))^\gamma}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(\ln(n+2))^\gamma + \frac{(n+2)^\gamma}{n+1}(\ln(n+2))^{\gamma-1}}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{(n+2)^\gamma}{(n+1)\ln(n+2)} \right) = 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Agora, substituindo $c = n + 1$ para o denominador de $\frac{c^\gamma}{c+1}$ e $c = n$ para o resto, teremos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)(\ln(n+2))^\gamma - n(\ln(n+1))^\gamma}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(\ln(n+1))^\gamma + \frac{(n+1)^\gamma}{n+1}(\ln(n+1))^{\gamma-1}}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(\ln(n+1))^\gamma}{(\ln(n+2))^\gamma} + \frac{\gamma(\ln(n+1))^{\gamma-1}}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) = 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)(\ln(n+2))^\gamma - n(\ln(n+1))^\gamma}{(\ln(n+2))^\gamma} \right) = 1, \quad (2.20)$$

que é inconclusivo de acordo com a Proposição 1.

Observando através do Corolário 2,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 1} \prod_{n=0}^{j-1} \alpha_n &= \sum_{j \geq 1} \prod_{n=0}^{j-1} \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)} \right)^\gamma \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right)^\gamma \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{\ln(3)}{\ln(4)} \right)^\gamma \cdot \dots \cdot \frac{j}{j+1} \left(\frac{\ln(j+1)}{\ln(j+2)} \right)^\gamma \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j+1} \left(\frac{\ln(2)}{\ln(j+2)} \right)^\gamma \\ &= (\ln(2))^\gamma \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(j+1)(\ln(j+2))^\gamma}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A expressão do somatório em (2.21) converge para $\gamma > 1$, portanto o PFC possui a probabilidade positiva de percolar quando $\gamma > 1$.

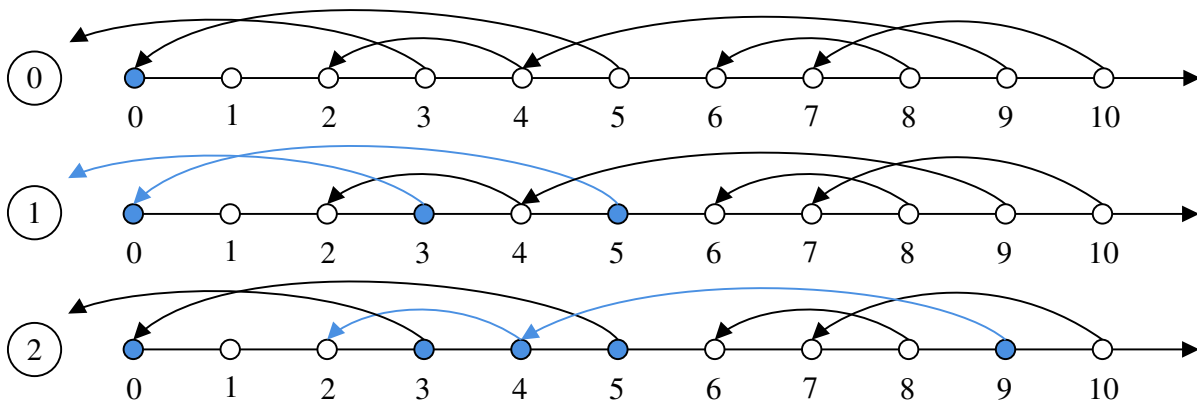
Observação: definindo ϕ como o número mínimo de vezes que o indivíduo tem que receber a informação para acreditar (o PF possui $\phi = 1$ e PFC possui $\phi = 2$), sabemos que a Proposição 1 é válida para extensões com $\phi \geq 3$ (SAJADI; ROY, 2019), assim para o Corolário 2, acreditamos que a extensão seja válida também.

2.2 Processos Firework reversos

2.2.1 Processo Firework Reverso (PFR)

O Processo Firework Reverso (PFR) é um processo de disseminação de informações que acontece ao longo dos naturais, em que os indivíduos não informados tentam buscar a informação através dos raios $\{\bar{R}_n\}_{n \geq 1}$, com \bar{R}_i correspondendo ao raio do i -ésimo indivíduo. São IID, com distribuição de probabilidade $\alpha_\ell := \mathbb{P}(\bar{R}_n \leq \ell)$ que são lançados para a esquerda pelos indivíduos não informados e representam o quão longe cada indivíduo consegue escutar a informação. A Figura 3 mostra um exemplo com dois passos iniciais:

Figura 3 – Exemplo ilustrativo de uma realização do PFR.



Fonte: Elaborada pela autora.

Começando com apenas o indivíduo 0 como informado, os indivíduos 3 e 5 lançaram raios que conseguiram alcançar ou ultrapassar 0, então eles se tornaram informados. Em seguida, o indivíduo 4 lançou um raio de tamanho 2 que ultrapassou o indivíduo 3 e o indivíduo 9 lançou um raio de tamanho 5 que ultrapassou o indivíduo 5, portanto se tornaram informados também e assim por diante. Note que, visualizando apenas a figura não é possível dizer se o processo sobrevive ou não, pois dependendo da distribuição dos raios, é possível que algum indivíduo mais longe tenha um raio grande o suficiente para ultrapassar a origem ou algum dos já informados, por exemplo o indivíduo 9.

Seja N o total de informados durante o processo. O teorema a seguir apresentado por Junior, Machado e Zuluaga (2011) diz respeito à probabilidade de percolação do PFR:

Teorema 4 (Probabilidade de sobrevivência do PFR). Seja N o número de informados durante o processo. A sobrevivência do rumor no PFR depende do comportamento de α_ℓ , de tal forma que

1. se $\prod_{\ell \geq 0} \alpha_\ell = 0$, então $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$ e,
2. se $\prod_{\ell \geq 0} \alpha_\ell > 0$, então $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$.

A prova deste teorema segue diretamente da prova do Teorema 2, que será detalhado na Seção 3.1. O próximo teorema obtido por Gallo *et al.* (2014) diz respeito à proporção de informados ao final do processo. Essa proporção é definida como o limite da razão entre o número de informados até o tempo t ($N(t)$) e a quantidade total de indivíduos (t):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}, \quad (2.22)$$

que se trata de uma lei forte dos grandes números e o limite acima vale quase-certamente.

Teorema 5 (Proporção de informados do PFR). A proporção de informados ao final do processo no PFR é dada por

$$\frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i} \quad (2.23)$$

e é positiva, se e somente se, $\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i < \infty$.

A prova do teorema será feita na Seção 3.4.

Exemplo 6. Vamos retomar o Exemplo 2, com $\alpha_i = \frac{i+1}{i+3}$. Calculando o produtório

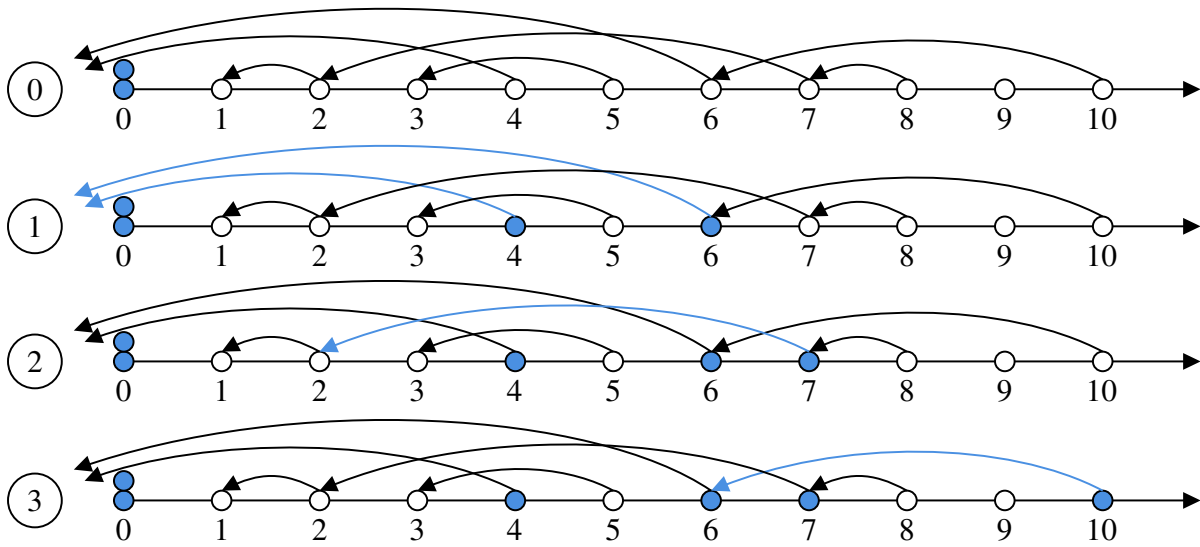
$$\prod_{i \geq 0} \alpha_i = \prod_{i \geq 0} \frac{i+1}{i+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \dots = 0, \quad (2.24)$$

temos que o processo sobrevive com probabilidade 1. Como a expressão para a proporção de informados é idêntica à expressão da probabilidade de sobrevivência do PF e já tínhamos obtido no Exemplo 2 que a probabilidade de sobrevivência é $\frac{1}{2}$, então temos que a proporção de informados no PFR para este caso é $\frac{1}{2}$.

2.2.2 Processo Firework Reverso Cético (PFRC)

Ligeiramente diferente do processo anterior, agora os indivíduos do Processo Firework Reverso Cético (PFRC) devem alcançar pelo menos dois informados para acreditarem na informação e passarem a ser informantes. Os raios $\{\bar{R}_n\}_{n \geq 1}$ continuam IID, com $\alpha_\ell := \mathbb{P}(\bar{R}_n \leq \ell)$, mas o processo começa com dois indivíduos na origem somente por uma questão de inicialização. A Figura 4 mostra um exemplo em dois passos.

Figura 4 – Os três primeiros passos de um Processo Firework Reverso Cético.



Fonte: Elaborada pela autora.

Iniciando o processo com dois indivíduos informados na origem, após lançarem os raios, os indivíduos 4 e 6 alcançaram a origem tornando-se informados. Depois, o indivíduo 7 alcançou os indivíduos 4 e 6 e por fim, o 10 alcançou o 6 e 7.

Abaixo, segue o resultado sobre a probabilidade de percolação do processo obtido por [Sajadi e Roy \(2019\)](#):

Teorema 6 (Probabilidade de sobrevivência do PFRC). Seja \bar{N} o número de informados durante o processo. A sobrevivência do rumor no PFRC depende do comportamento de α_ℓ , de tal forma que

1. se $\prod_{\ell \geq 1} \alpha_\ell = 0$, então $\mathbb{P}(\bar{N} = \infty) = 1$ e,
2. se $\prod_{\ell \geq 1} \alpha_\ell > 0$, então $\mathbb{P}(\bar{N} = \infty) = 0$.

A prova deste teorema será feita na Seção 3.5. Semelhante ao PFC com relação ao PF, este teorema é idêntico ao Teorema 4 do PFR. Definindo ϕ como o número de informados que o indivíduo tem que alcançar para acreditar na informação (o PFR possui $\phi = 1$ e PFRC possui $\phi = 2$), o resultado vale para qualquer $\phi \geq 3$.

O próximo resultado é um resultado original. Obtemos a proporção de indivíduos informados ao final do processo:

Teorema 7 (Proporção de informados do PFRC). A proporção de informados ao final do processo no PFRC é dada por

$$\frac{1 + \sum_{\ell > 1} \prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k}{1 + \sum_{i > 1} i \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}. \quad (2.25)$$

A prova deste teorema será vista na Seção 3.6.

Exemplo 7. Vamos retomar o Exemplo 6, com $\alpha_i = \frac{i+1}{i+3}$. Vimos que o processo sobrevive com probabilidade 1 no PFR, então como o PFRC possui as mesmas condições, o processo sobreviverá com probabilidade 1 também. Entretanto, note a diferença quando calculamos a proporção de informados no PFRC:

Para o numerador de (2.25), conseguimos um valor exato

$$\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i = 1, \quad (2.26)$$

mas para o denominador,

$$\sum_{j \geq 1} j \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i = \sum_{j \geq 1} j \frac{2}{(j+1)(j+2)} = \infty, \quad (2.27)$$

a soma não é convergente. Portanto, a proporção de informados é zero.

No PFR, a proporção de informados é $\frac{1}{2}$, mas no PFRC essa proporção é 0 apesar de ambos terem as mesmas condições de sobrevivência. Isso significa que ambos sobrevivem, mas a distância média entre os informados no PFRC é maior que a do PFR, tão distantes que a proporção se tornou zero.

PROVA DOS RESULTADOS

Neste capítulo, os diversos processos serão citados e relacionados, portanto é importante notar o paralelo entre as variáveis e seus significados.

O raio do n -ésimo indivíduo:

- R_n : pertence aos processos PF e PFC;
- \bar{R}_n : pertence aos processos reversos PFR, PFRC e PFCD (que será visto na Seção 3.2.1).

Número de informados durante o processo:

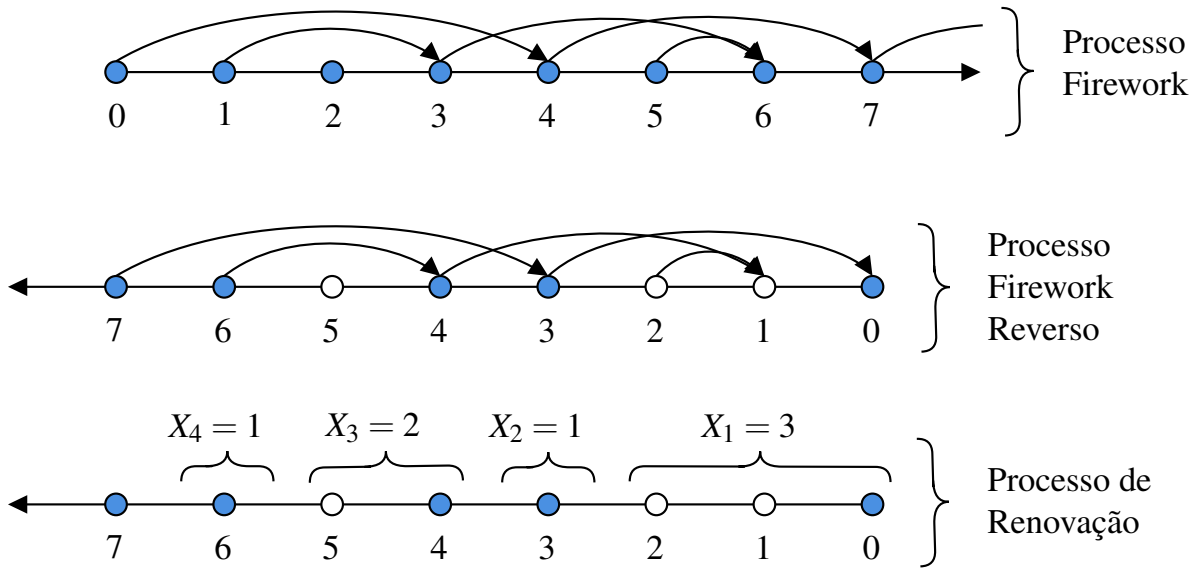
- M : pertence ao PF;
- \bar{M} : pertence ao PFC;
- N : pertence ao PFR;
- \bar{N} : pertence ao PFRC.

3.1 Prova do Teorema 2 (Probabilidade de sobrevivência do PF)

A ideia da prova do Teorema 2 consiste em relacionar o PF com o Processo de Renovação (PR) através do PFR da forma como mostra a Figura 5. Primeiro, será explicado como acontece a relação entre PF e PFR, depois a relação entre PFR e PR e por fim, a conclusão com a relação entre PF e PR, obtendo o resultado desejado.

A descrição sobre a teoria da renovação encontra-se no Apêndice A.

Figura 5 – A relação entre PF, PFR e PR.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.1.1 Relação entre PF e PFR

Formalmente, se $i \geq 1$ é um indivíduo qualquer de um PF com raio R_i , então o processo dual do PF, o PFR, possui raios da forma $\bar{R}_i = R_{n-i}$, para $n \geq 1$. De forma intuitiva, se o PF caminha para a direita como na figura, o seu dual PFR possui a origem no indivíduo n , com o processo caminhando para a esquerda.

Note que se o indivíduo n do PF é um propagador ao final do processo, então existe uma combinação de raios que o conecta com a origem (indivíduo 0). Dessa forma, ao olhar para o seu dual PFR, existe uma combinação de raios que conecta o indivíduo n do PFR com a origem, tornando-o um propagador. O mesmo raciocínio é válido para quando o indivíduo n do PF não é um propagador ao final do processo, ou seja, isso implica que o indivíduo n do PFR não será um propagador.

Então, definindo $\{\zeta_n\}_{n \geq 0}$ como uma sequência de indicadores, em que $\{\zeta_n = 1\}$ significa que o n -ésimo indivíduo do PFR é um propagador ao final do processo e $\{\zeta_n = 0\}$, caso não seja propagador, a probabilidade de sobrevivência do PF pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(M = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M \geq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta_n = 1). \quad (3.1)$$

3.1.2 Relação entre PFR e PR

Primeiramente, segue a definição de um PR:

Definição 1 (Processo de renovação). Seja uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variáveis aleatórias IID em \mathbb{N}^* , com $S_n := X_1 + \dots + X_n$ e $S_0 = 0$, então $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de processo de renovação

(sem atraso).

Com isso, relação entre PFR e PR segue do seguinte lema:

Lema 1. A sequência $\{\zeta_n\}_{n \geq 0}$ é um Processo de Renovação com

$$\mathbb{P}(X_1 = t) = \left(\prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i \right) \times (1 - \alpha_{t-1}), \quad (3.2)$$

em que X_1 é o tempo entre renovações.

Demonstração. Seja $\zeta_a^b = (\zeta_a, \zeta_{a+1}, \dots, \zeta_b)$ um vetor que representa uma partição da sequência $\{\zeta_n\}_{n \geq 0}$. Definindo $\ell(\zeta_a^b) := \inf\{i \geq 0 : \zeta_{b-i} = 1\}$ como o número de zeros após a última ocorrência de 1 no vetor ζ_a^b , com $\ell(\zeta_a^b) = \infty$ para $\zeta_i = 0$ para todo $a \leq i \leq b$, temos a seguinte equivalência de eventos:

$$\{\zeta_n = 1\} = \{\bar{R}_n > \ell(\zeta_0^{n-1})\}, \quad (3.3)$$

pois o indivíduo n se tornará propagador se, e somente se, o seu raio alcançar ou ultrapassar o último indivíduo informado antes de n .

A probabilidade condicional do indivíduo n ser um propagador dado todo o passado depende apenas do último propagador antes de n , ou seja,

$$\mathbb{P}(\zeta_n = 1 \mid \zeta_0^{n-1} = v_0^{n-1}) = \mathbb{P}(\bar{R}_n > \ell(v_0^{n-1})) = 1 - \alpha_{\ell(v_0^{n-1})}. \quad (3.4)$$

Isso significa que a sequência ζ_n é formada por blocos IID de tamanho X_1 da forma

$$(0^{X_1-1}, 1) := \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{X_1-1 \text{ vezes}}, 1, \quad (3.5)$$

que caracteriza um PR. A distribuição entre renovações $\mathbb{P}(X_1 = t)$, $t \geq 1$, pode ser obtida desta forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = t) &= \mathbb{P}(\zeta_1^t = (0^{t-1}, 1) \mid \zeta_0 = 1) \\
&= \mathbb{P}(\zeta_1 = 0 \mid \zeta_0 = 1) \times \mathbb{P}(\zeta_2 = 0 \mid \zeta_0^1 = (1, 0^1)) \times \dots \times \\
&\quad \mathbb{P}(\zeta_{t-1} = 0 \mid \zeta_0^{t-2} = (1, 0^{t-2})) \times \mathbb{P}(\zeta_t = 1 \mid \zeta_0^{t-1} = (1, 0^{t-1})) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{t-1} \mathbb{P}(\zeta_i = 0 \mid \zeta_0^{i-1} = (1, 0^{i-1})) \right) \times \mathbb{P}(\zeta_t = 1 \mid \zeta_0^{t-1} = (1, 0^{t-1})) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{t-1} \mathbb{P}(\bar{R}_i \leq i-1) \right) \times \mathbb{P}(\bar{R}_t > t-1) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{t-1} \alpha_{i-1} \right) \times (1 - \alpha_{t-1}) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i \right) \times (1 - \alpha_{t-1}). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

□

3.1.3 Conclusão da demonstração do Teorema 2

Além das relações mostradas anteriormente, vamos utilizar também um resultado da teoria da renovação (para mais detalhes, ver Apêndice A):

Teorema 8 (Teorema da renovação). Seja $\mu := \mathbb{E}(X_1)$. Para um PR $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ recorrente, com $S_n := X_1 + \dots + X_n$ e $S_0 = 0$, segue que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu}, \tag{3.7}$$

em que $\frac{1}{\mu} = 0$ se $\mu = \infty$.

Assim, podemos resumir as relações desta forma:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M \geq n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta_n = 1) \quad \Leftarrow \text{Dualidade entre PF e PFR} \\
&= \frac{1}{\mu} \quad \Leftarrow \text{Teorema 8 (Teorema da renovação) e Lema 1,}
\end{aligned}$$

com $\mu = \mathbb{E}(X_1) = 1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i$, obtido a partir de (3.2), provando que $\mathbb{P}(M = \infty) = \frac{1}{\mu}$.

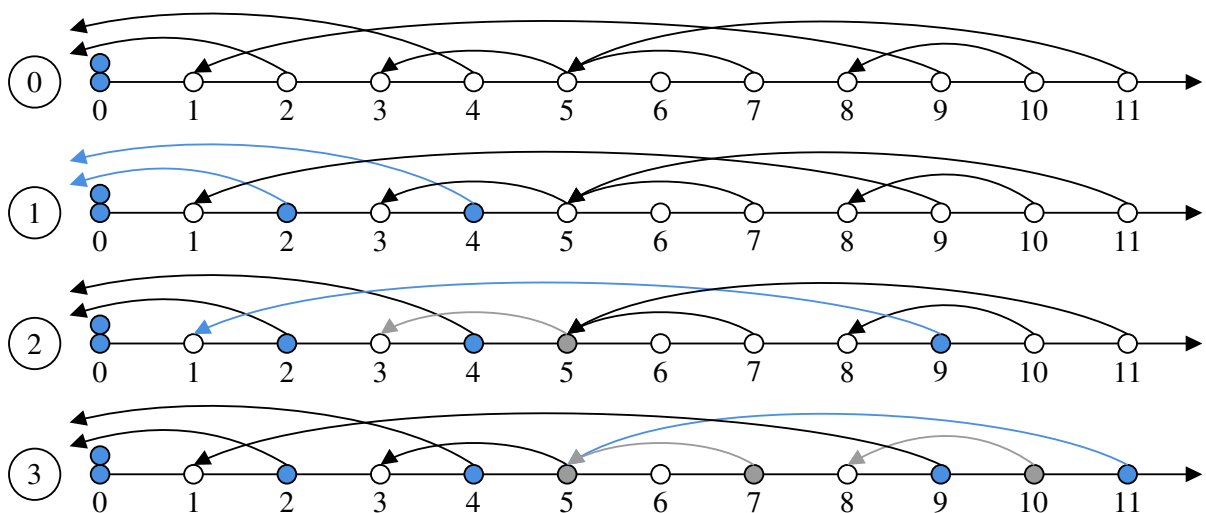
3.2 Prova do Teorema 3 (Probabilidade de sobrevivência do PFC)

De forma semelhante à Seção 3.1, em que o conhecimento sobre PR permitiu obter informações sobre PFR e posteriormente do PF, a ideia agora é, a partir dos conhecimentos sobre a Cadeia semi-Markov (CSM), obter informações sobre o Processo Firework Cético Dual (PFCD) e o PFC.

3.2.1 Processo Firework Cético Dual (PFCD)

O PFCD é um processo reverso similar ao PFR, no sentido de que os indivíduos não informados lançam raios $\{\bar{R}_i\}_{i \geq 1}$, IID, para a sua esquerda em busca de informação. A Figura 6 mostra um exemplo do funcionamento do processo.

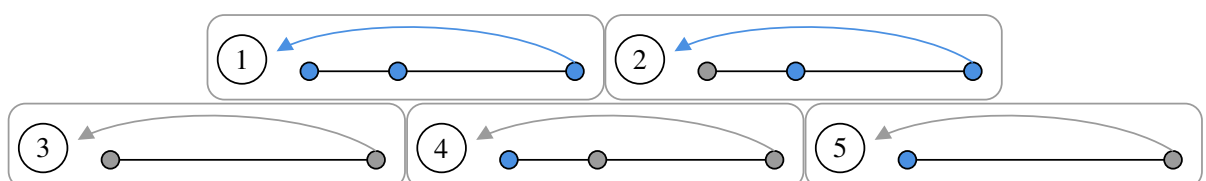
Figura 6 – Os três primeiros passos de um Processo Firework Cético Dual.



Fonte: Elaborada pela autora.

Diferentemente dos outros processos vistos, este conta com três tipos de indivíduos, o não informado (em branco), o propagador ou informado (em azul) e o indivíduo que está indeciso em acreditar na informação (em cinza), além disso o processo possui cinco regras mostradas na Figura 7 que devem ser seguidas:

Figura 7 – As regras de um Processo Firework Cético Dual.



Fonte: Elaborada pela autora.

1. O indivíduo se torna um informado se o seu raio ultrapassar pelo menos dois propagadores;
2. O indivíduo se torna um informado se o seu raio ultrapassar primeiro um informado e depois, pelo menos um indivíduo indeciso;
3. O indivíduo se torna indeciso se o seu raio ultrapassar apenas indivíduos indecisos;
4. O indivíduo se torna indeciso se o seu raio ultrapassar primeiro um indeciso e depois, apenas um informado;
5. O indivíduo se torna indeciso se o seu raio ultrapassar apenas um indivíduo informado.

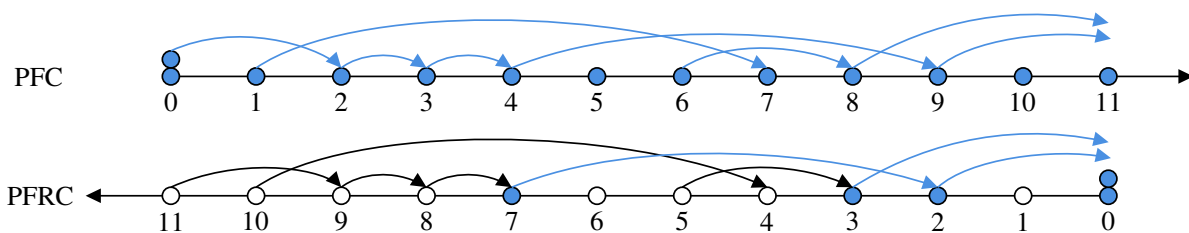
Voltando ao exemplo da Figura 6, a origem deve começar com dois indivíduos informados. Lançando os raios, os indivíduos 2 e 4 se tornaram informados, depois o indivíduo 5 se tornou indeciso pela regra número 5 e o indivíduo 9 se tornou um informado pela regra número 1. No terceiro passo, o indivíduo 7 se tornou indeciso pela regra número 3 e o indivíduo 11 se tornou informado pela regra número 2.

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado para o PF, a probabilidade de sobrevivência do processo foi obtido relacionando o PFR ao PR, mas agora o PFCD não seria mais relacionado ao PR e sim ao processo semi-Markov descrito mais detalhadamente no Apêndice B. De fato, os tempos entre informados não são mais independentes, uma vez que, para se tornar informado, o raio do indivíduo deve ultrapassar um informado e depois um informado ou indeciso. Mas observamos que não é necessário ter informações que antecedem dois informados, por esta razão, a teoria da renovação markoviana se encaixa bem para esta situação.

3.2.2 Relação entre PFC e PFCD

A primeira vista, poderíamos pensar que o processo dual do PFC fosse o PFRC, mas vamos mostrar através de um contra exemplo que este não é o caso. Para ter a dualidade, a condição $\mathbb{P}(\bar{M} \geq n) = \mathbb{P}(\zeta_n = 1)$ deve ser respeitada, significando que no exemplo da Figura 8, o indivíduo 11 do PFRC deveria ser um propagador ao final do processo, mas não é isto que acontece.

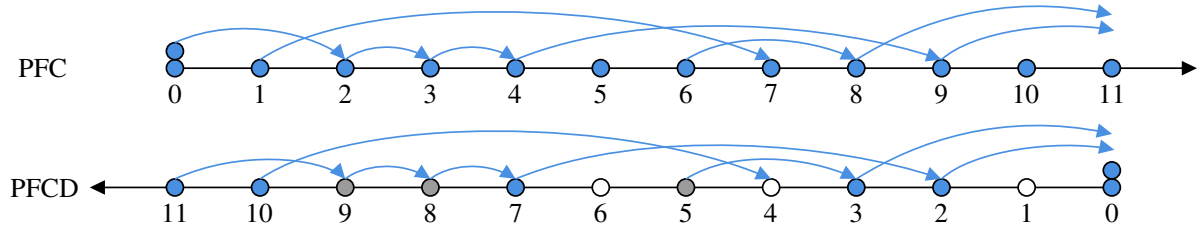
Figura 8 – Exemplo de não dualidade entre o PFC e PFRC.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como alternativa, o PFCD foi construído de uma forma que houvesse essa dualidade. A Figura 9 mostra o mesmo exemplo da figura anterior, agora com o PFCD que possui o indivíduo 11 como propagador.

Figura 9 – A relação entre PFC e PFCD.



Fonte: Elaborada pela autora.

Acabamos não apresentando a prova de que o PFCD é de fato o dual do PFC por questão de tempo e provavelmente necessitar a listagem de muitos casos a serem estudados.

3.2.3 Relação entre PFCD e CRM

Para obtermos a relação entre PFCD e a cadeia de renovação Markov (CRM), segue primeiramente a definição de uma CRM (para mais detalhes, ver Apêndice B):

Definição 2. O processo discreto $\{J_n, S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de cadeia de renovação Markov (CRM) se

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k \mid J_0, \dots, J_n; S_0, \dots, S_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k \mid J_n), \quad (3.8)$$

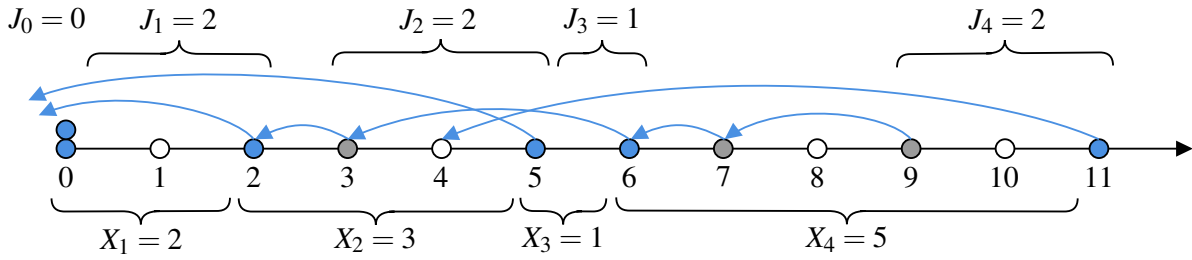
para todo $j \in E$, $k \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, considere $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ o processo que fornece o estado do sistema no tempo t do processo original.

Definição 3. O processo Z_t é uma Cadeia Semi-Markov (CSM) associada à cadeia de renovação Markov $\{J_n, S_n\}$ se $Z_t = J_{N_t}$, $t \in \mathbb{N}$, ou $J_n = Z_{S_n}$.

Definindo $X_n := S_n - S_{n-1}$ para $n \geq 1$, a Figura 10 mostra intuitivamente como é a relação entre PFCD e CSM:

Figura 10 – A relação entre PFCD e CSM.



Fonte: Elaborada pela autora.

Em relação as sequências X_n e J_n :

- X_n é a distância entre o n -ésimo e o $(n + 1)$ -ésimo indivíduo informado e;
- J_n é a distância entre o último indeciso antes do $(n + 1)$ -ésimo informado e o $(n + 1)$ -ésimo informado.

Formalmente, a relação entre o PFCD e a CSM segue conforme o lema abaixo:

Lema 2. O PFCD é uma CSM com kernel semi-Markov da forma:

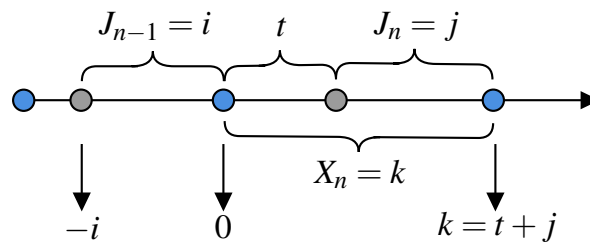
$$\mathbb{P}(J_n = j, X_n = t + j \mid J_{n-1} = i) = u_{t|i} \left(\prod_{\ell=0}^{j-2} \alpha_\ell \right) (1 - \alpha_{t+j+i-1}), \quad (3.9)$$

com $i, j = 1, 2, 3, \dots, t = 0, 1, 2, 3, \dots$ e

$$u_{t|i} = \frac{\mathbb{P}(M \leq t + i) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell}. \quad (3.10)$$

Demonstração. A fim de facilitar a construção das expressões que virão a seguir, considere a Figura 11. O ponto de partida para os raios serão sempre os indivíduos informados, chamaremos de i o valor observado de J_{n-1} , de j para J_n e k para X_n , tal que $t = k - j$.

Figura 11 – Estrutura de contagem dos raios do PFCD para a prova do Lema 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Por construção, o evento $\{J_n = j, X_n = t + j\}$ depende apenas do estado anterior $J_n = i$. Nenhum raio entre os indivíduos 1 ao $k - 1$ deve alcançar o último indivíduo indeciso $(-i)$,

ou seja, $\bar{R}_n \leq i + n - 1$ para todo $n = 1, 2, \dots, k - 1$ e o indivíduo k deve alcançar o ponto $-i$. Portanto, estes eventos não dependem do que acontece antes de $-i$ e assim o processo respeita a suposição para ser considerado uma CSM.

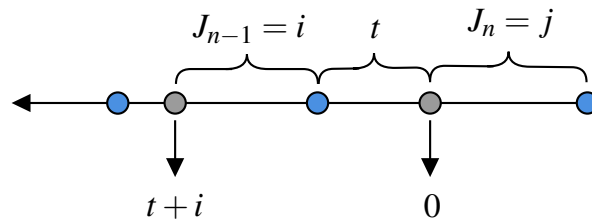
O cálculo do kernel semi-Markov $\mathbb{P}(J_n = j, X_n = t + j \mid J_{n-1} = i)$ depende dos indivíduos que podem ser divididos desta forma:

Do indivíduo 1 ao t :

Nenhum deles deve alcançar o último indivíduo indeciso ($-i$) e o ponto t deve ser um indivíduo indeciso:

Observando o processo dual iniciando com o indivíduo t temos a seguinte estrutura:

Figura 12 – Estrutura de contagem dos raios do PFCD para os indivíduos 1 ao t .



Fonte: Elaborada pela autora.

Neste sentido reverso, vemos que os eventos sobre os raios R_0, \dots, R_{t-1} podem ser interpretados como um PF:

- O processo deve se propagar pelo menos até o t : $M \geq t$ e;
- Nenhum indivíduo deve possuir raios que alcancem o ponto $t + i$: $R_0 \leq t + i - 1, R_1 \leq t + i - 2, \dots, R_{t+i-1} \leq 0$, ou seja, $M \leq t + i$, lembrando que M foi definido na Seção 2.1.1.

Defina

$$\mathcal{B} := \mathbb{P}(R_0 \leq t + i - 1, R_1 \leq t + i - 2, \dots, R_{t+i-1} \leq 0, M \geq t). \quad (3.11)$$

Primeiro, temos

$$\mathcal{B} = \mathbb{P}(M \leq t + i, M \geq t) = \mathbb{P}(M \leq t + i) - \mathbb{P}(M \leq t). \quad (3.12)$$

Em seguida, dividindo a probabilidade (3.11) em duas partes (primeira parte dependendo de t e segunda parte independente de t)

$$\mathcal{B} = \underbrace{\mathbb{P}(R_0 \leq t + i - 1, \dots, R_{t-1} \leq i, M \geq t)}_{u_{t|i}} \underbrace{\mathbb{P}(R_t \leq i - 1, \dots, R_{t+i-1} \leq 0)}_{\prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell}, \quad (3.13)$$

definimos

$$u_{t|i} := \mathbb{P}(R_0 \leq t+i-1, \dots, R_{t-1} \leq i, M \geq t), \quad (3.14)$$

que é a probabilidade de interesse.

Assim,

$$\mathbb{P}(M \leq t+i) - \mathbb{P}(M \leq t) = u_{t|i} \prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell \implies u_{t|i} = \frac{\mathbb{P}(M \leq t+i) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell}. \quad (3.15)$$

Do indivíduo $t+1$ ao $t+j-1$:

Nenhum deles deve ser um indivíduo indeciso, ou seja, $\mathbb{P}(\bar{R}_{t+1} \leq 0, \bar{R}_{t+2} \leq 1, \dots, \bar{R}_{t+j-1} \leq j-2) = \prod_{\ell=0}^{j-2} \alpha_\ell$, com $\prod_{\ell=0}^{j-2} \alpha_\ell = 1$, para $j = 1$.

Indivíduo $t+j$:

Deve alcançar o último indivíduo indeciso, ou seja, $\mathbb{P}(\bar{R}_{t+j} \geq t+j+i) = 1 - \alpha_{t+j+i-1}$.

Juntando as probabilidades para obter o kernel semi-Markov:

Como cada um destes intervalos são independentes:

$$\mathbb{P}(J_n = j, X_n = t+j | J_{n-1} = i) = u_{t|i} \left(\prod_{\ell=0}^{j-2} \alpha_\ell \right) (1 - \alpha_{t+j+i-1}), \quad (3.16)$$

em que $u_{t|i}$ é obtido em (3.15). □

3.2.4 Continuação da demonstração do Teorema 3

Para o PFCD sobreviver é necessário que a CSM seja recorrente, ou seja, deve haver mudanças de estado do longo do tempo. Então, vamos utilizar a Equação (3.35) que diz qual é o limite da probabilidade de haver uma mudança de estado na CSM.

Assim, vamos prosseguir calculando $\bar{m} = \mathbb{E}(X_n)$ desta forma:

$$\bar{m} = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | J_{n-1})) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(J_{n-1} = i) \mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i) = \sum_{i \geq 0} \pi_i \mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i), \quad (3.17)$$

em que π_i é a distribuição estacionária da cadeia de Markov $\{J_n\}_{n \geq 0}$. Assim, precisamos encontrar a probabilidade de transição de estados P_{ij} para encontrar a distribuição estacionária $\{\pi_i\}_{i \geq 1}$ e a esperança $\mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i)$.

Probabilidade de transição de estados

A partir do kernel semi-Markov apresentado no Lema 2, conseguimos obter a probabilidade de transição de estados

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \mathbb{P}(J_n = j \mid J_{n-1} = i) = \sum_{t \geq 0} \mathbb{P}(J_n = j, X_n = t + j \mid J_{n-1} = i) \\ &= \sum_{t \geq 0} u_{t|i} \left(\prod_{\ell=0}^{j-2} \alpha_\ell \right) (1 - \alpha_{t+j+i-1}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Distribuição estacionária

Para calcular a distribuição estacionária, vamos utilizar a reversibilidade da cadeia com as equações de balanço detalhadas:

$$\begin{cases} \pi_m P_{m1} = \pi_1 P_{1m} \\ \sum_{m \geq 1} \pi_m = 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \pi_m P_{m1} &= \pi_1 P_{1m} \\ \pi_m &= \frac{\pi_1 P_{1m}}{P_{m1}} \\ \pi_m &= \frac{\pi_1 \sum_{t \geq 0} u_{t|1} \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})} \\ \pi_m &= \pi_1 \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

definindo

$$\mathcal{A}_m := \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})}, \quad (3.21)$$

de forma que

$$\pi_m = \pi_1 \mathcal{A}_m. \quad (3.22)$$

A segunda condição nos diz que $\sum_{m \geq 1} \pi_m = 1$, então

$$1 = \sum_{m \geq 1} \pi_m = \pi_1 \sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m, \quad (3.23)$$

obtendo que

$$\pi_1 = \frac{1}{\sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m}, \quad (3.24)$$

com \mathcal{A}_m definido em (3.21). Mas para que esta expressão defina a medida invariante, é necessário utilizar o Lema 3.

Lema 3. A seguinte afirmação é válida:

$$\sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m < \infty. \quad (3.25)$$

Demonstração. Note que $u_{t|1} = \frac{\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\alpha_0}$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_m &= \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})} \\
&= \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} \left(\frac{\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\alpha_0} \right) (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} \left(\frac{\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)}{\prod_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell} \right) (1 - \alpha_{t+m})} \\
&= \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \left(\prod_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell \right) \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}{\alpha_0 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})} \\
&= \frac{\alpha_{m-1} \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}{\alpha_0 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m = \sum_{m \geq 1} \frac{\alpha_{m-1} \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}{\alpha_0 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}. \tag{3.27}$$

Como $\mathbb{P}(M \leq t+1) \leq \mathbb{P}(M \leq t+m)$ para $m \geq 1$, então

$$\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t) \leq \mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t) \tag{3.28}$$

e

$$\frac{\sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})} \leq 1. \tag{3.29}$$

Além disso, $\alpha_{m-1} \leq 1$. Portanto

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\alpha_{m-1} \left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})}{\alpha_0 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+m) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+m})} \leq \sum_{m \geq 1} \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2}{\alpha_0}. \tag{3.30}$$

Agora, como $\alpha_\ell < 1$, podemos concluir que $\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2 < \prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell$ e portanto, se $\sum_{m \geq 1} \prod_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell < \infty$, então

$$\sum_{m \geq 1} \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right)^2}{\alpha_0} < \infty, \tag{3.31}$$

provando que $\sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m < \infty$. □

Expressão de π_i

A partir de (3.22) e (3.24), obtemos π_i em função dos raios:

$$\pi_i = \frac{\mathcal{A}_i}{\sum_{m \geq 1} \mathcal{A}_m} = \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+i})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|i} (1 - \alpha_{t+i})}}{\sum_{m \geq 1} \left[\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})} \right]}. \quad (3.32)$$

Esperança do tamanho do bloco

Aqui a ideia é obter a esperança de X_n utilizando a igualdade $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | J_{n-1}))$. Então, calculamos primeiramente a esperança condicional

$$\mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i) = \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} \mathbb{P}(X_n = k | J_{n-1} = i) = \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell \quad (3.33)$$

e logo em seguida, obtemos \bar{m} de acordo com a Equação (3.17):

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sum_{i \geq 0} \pi_i \mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i) \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{\left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+i})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|i} (1 - \alpha_{t+i})}}{\sum_{m \geq 1} \left[\left(\prod_{\ell=0}^{m-2} \alpha_\ell \right) \frac{\sum_{t \geq 0} u_{t|1} (1 - \alpha_{t+m})}{\sum_{t \geq 0} u_{t|m} (1 - \alpha_{t+m})} \right]} \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell. \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.2.5 Conclusão da demonstração do Teorema 3

Para obtermos a conclusão do teorema, vamos precisar deste resultado descrito no Apêndice B:

Definindo $\psi_i(k) := \sum_{j \in E} \psi_{ij}(k)$ como a probabilidade de que, começando no tempo 0 no estado i , a cadeia semi-Markov fará um salto no tempo k .

Proposição 2. Para uma CRM recorrente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_i(k) = \frac{1}{\bar{m}}. \quad (3.35)$$

A partir das relações mostradas anteriormente e da Equação (3.35), conseguimos obter a probabilidade de sobrevivência do processo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{M} = \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bar{M} \geq n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\zeta_n = 1) \quad \Leftarrow \text{Dualidade entre PFC e PFCD} \\ &= \frac{1}{\bar{m}} \quad \Leftarrow \text{Equação (3.35) e Lema 2,} \end{aligned}$$

provando que $\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) = \frac{1}{\bar{m}}$, com \bar{m} de acordo com (3.34).

3.3 Prova do Corolário 2 (Condição de sobrevivência do PFC)

Impondo a condição de que $\sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_\ell < \infty$, teremos que a CSM será recorrente positiva, concluindo que em todo instante de tempo há algum indivíduo recebendo a informação. Então, utilizando π_i de acordo com (3.22), mantendo π_1 como uma constante e \mathcal{A}_i de acordo com (3.26), temos que

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \mathbb{E}(X_n) = \sum_{i \geq 0} \pi_i \mathbb{E}(X_n | J_{n-1} = i) \\ &= \sum_{i \geq 0} \left(\pi_1 \frac{\alpha_{i-1} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right)^2 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+1) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+i})}{\alpha_0 \sum_{t \geq 0} (\mathbb{P}(M \leq t+i) - \mathbb{P}(M \leq t)) (1 - \alpha_{t+i})} \right) \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell \\ &\leq \frac{\pi_1}{\alpha_0} \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right)^2 \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi_1}{\alpha_0} \sum_{i \geq 0} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \left(\prod_{\ell=i}^{i+k-2} \alpha_\ell \right) \left(\prod_{\ell=0}^{i-1} \alpha_\ell \right) \\ &= \frac{\pi_1}{\alpha_0} \sum_{i \geq 0} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+k-2} \alpha_\ell \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que (3.36) foi obtida utilizando o mesmo argumento de (3.30). Note que existe uma soma telescópica

$$\begin{aligned} &\sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+k-2} \alpha_\ell \right) \\ &= (1 - \alpha_{i+s-1}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+s-2} \alpha_\ell \right) + (1 - \alpha_{i+s}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+s-1} \alpha_\ell \right) + (1 - \alpha_{i+s+1}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+s} \alpha_\ell \right) + \dots \\ &= \left(\prod_{\ell=0}^{i+s-2} \alpha_\ell - \prod_{\ell=0}^{i+s-1} \alpha_\ell \right) + \left(\prod_{\ell=0}^{i+s-1} \alpha_\ell - \prod_{\ell=0}^{i+s} \alpha_\ell \right) + \left(\prod_{\ell=0}^{i+s} \alpha_\ell - \prod_{\ell=0}^{i+s+1} \alpha_\ell \right) + \dots \\ &= \prod_{\ell=0}^{i+s-2} \alpha_\ell, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que a última igualdade é apenas o primeiro termo da soma.

A partir disto, temos que

$$\prod_{\ell=0}^{i+s-2} \alpha_\ell \leq \prod_{\ell=0}^{s-2} \alpha_\ell \quad (3.39)$$

e (3.37) pode ser reescrito desta forma:

$$\bar{m} \leq \frac{\pi_1}{\alpha_0} \sum_{i \geq 0} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq s} (1 - \alpha_{i+k-1}) \left(\prod_{\ell=0}^{i+k-2} \alpha_\ell \right) \leq \frac{\pi_1}{\alpha_0} \sum_{i \geq 0} \left(\prod_{\ell=0}^{i-2} \alpha_\ell \right) \sum_{s \geq 1} \left(\prod_{\ell=0}^{s-2} \alpha_\ell \right). \quad (3.40)$$

Considerando que $\sum_{j \geq 1} \prod_{\ell=0}^{j-1} \alpha_\ell < \infty$, \bar{m} será finita também por ser o produto de duas expressões finitas, portanto a probabilidade de sobrevivência é positiva.

Assim, o que foi provado até então é o seguinte:

$$\sum_{j \geq 1} \prod_{\ell=0}^{j-1} \alpha_\ell < \infty \implies \mathbb{E}(X_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\bar{M} = \infty) > 0, \quad (3.41)$$

em que a última passagem decorre do Teorema 3. Por outro lado, temos que o PFC é um processo naturalmente mais difícil de percolar que o PF por ter uma condição mais restrita para propagar a informação, de forma que

$$\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) \leq \mathbb{P}(M = \infty) \quad (3.42)$$

por argumento de acoplamento, tal que \bar{M} é o número de informados do PFC e M , do PF.

Se $\mathbb{P}(\bar{M} = \infty) > 0$, então $\mathbb{P}(M = \infty) > 0$, implicando em $\sum_{j \geq 1} \prod_{\ell=0}^{j-1} \alpha_\ell < \infty$ pelo Teorema 1, provando que o sentido contrário também é válido.

3.4 Prova do Teorema 5 (Proporção de informados do PFR)

Relembrando que o PFR é um PR como mostrado na Seção 3.1.2, para a prova deste teorema vamos utilizar o Lema 1 a seguinte proposição:

Proposição 3. Seja $N(t)$ o número de renovações até o passo t . Para um PR, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \quad (3.43)$$

Então basta calcular μ para obter a expressão desejada:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}(X_1) = \sum_{t=1}^{\infty} t \mathbb{P}(X_1 = t) = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot (1 - \alpha_{t-1}) \prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i = \sum_{t=1}^{\infty} \left(t \prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i - t \alpha_{t-1} \prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \left(t \prod_{i=0}^{t-2} \alpha_i - t \prod_{i=0}^{t-1} \alpha_i \right) \\ &= (1 - \alpha_0) + \left(2\alpha_0 - 2 \prod_{i=0}^1 \alpha_i \right) + \left(3 \prod_{i=0}^1 \alpha_i - 3 \prod_{i=0}^2 \alpha_i \right) + \left(4 \prod_{i=0}^2 \alpha_i - 4 \prod_{i=0}^3 \alpha_i \right) + \dots \\ &= 1 + \alpha_0 + \prod_{i=0}^1 \alpha_i + \prod_{i=0}^2 \alpha_i + \prod_{i=0}^3 \alpha_i + \dots = 1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i. \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\text{Portanto, } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1 + \sum_{j \geq 1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_i}.$$

3.5 Prova do Teorema 6 (Probabilidade de sobrevivência do PFRC)

Primeiro item:

Para provar este item, vamos utilizar os Lemas 4 e 5. São resultados clássicos que podem ser encontrados em [Bremaud e Fields \(2001\)](#) e [Kochen e Stone \(1964\)](#):

Lema 4. Seja $\{a_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de números no intervalo $[0, 1)$. Então,

$$\prod_{n \geq 0} (1 - a_n) = 0 \iff \sum_{n \geq 0} a_n = \infty. \quad (3.45)$$

Lema 5 (Segundo Lema de Borel-Cantelli). Seja A_n uma sequência de eventos independentes. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1, \quad (3.46)$$

significando que a probabilidade do evento A_n ocorrer infinitas vezes é igual à 1.

De acordo com o Lema 4, se $1 - \alpha_\ell$ é a sequência α_ℓ , então

$$\prod_{\ell \geq 0} \alpha_\ell = 0 \iff \sum_{\ell \geq 0} (1 - \alpha_\ell) = \infty. \quad (3.47)$$

Utilizando o Lema 5 com $A_n = \{\bar{R}_\ell > \ell\}$, se $\sum_{\ell \geq 0} (1 - \alpha_\ell) = \infty$, então a probabilidade do evento $\{\bar{R}_\ell > \ell\}$ ocorrer infinitas vezes é igual à 1, significando que sempre haverá indivíduos com raios que alcançam a origem do processo.

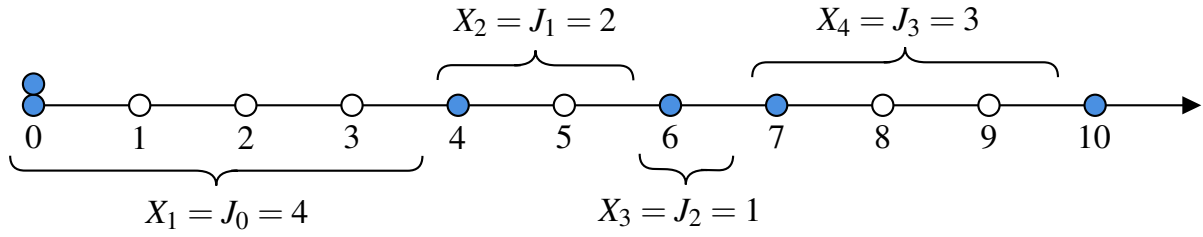
Segundo item:

Pela natureza do processo cético, a difusão da informação no PFRC acontece com mais dificuldade que no PFR, pois é necessário que o raio do indivíduo alcance dois informados ao invés de um. Isso significa, por argumento de acoplamento, que $\mathbb{P}(\bar{N} = \infty) \leq \mathbb{P}(N = \infty)$, com \bar{N} o número de informados durante o PFRC e N , do PFR. Se $\prod_{\ell \geq 0} \alpha_\ell > 0$, o Teorema 4 nos diz que o PFR não sobrevive, então teremos que $0 \leq \mathbb{P}(\bar{N} = \infty) \leq \mathbb{P}(N = \infty) = 0$. Portanto, $\mathbb{P}(\bar{N} = \infty) = 0$.

3.6 Prova do Teorema 7 (Proporção de informados do PFRC)

O PFRC é uma CRM em que $X_{n+1} = J_n$, com $n \geq 0$, é a distância entre informados como mostra o exemplo da Figura 13.

Figura 13 – O PFRC como uma CRM.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para provar o teorema, vamos utilizar a Proposição 4:

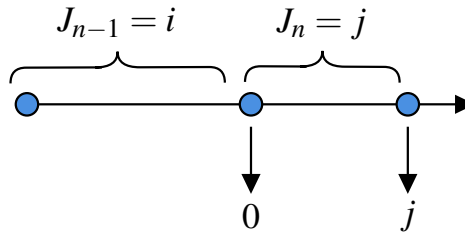
Proposição 4. Para uma CRM, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\bar{m}}. \quad (3.48)$$

Para obter \bar{m} , é preciso passar por três passos: encontrar a probabilidade de transição de estados P_{ij} , a distribuição estacionária $\{\pi_i\}_{i \geq 1}$ da cadeia e esperança $m_i = \mathbb{E}(S_1 | J_0 = i)$.

Para facilitar o entendimento dos cálculos, considere a estrutura de contagem dos raios iniciando sempre com um indivíduo informado, como mostrado na Figura 14:

Figura 14 – Estrutura de contagem dos raios para o PFRC.



Fonte: Elaborada pela autora.

Probabilidade de transição de estados

A probabilidade de transição de estados é dada por

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i) \\ &= \mathbb{P}(\bar{R}_1 \leq i, \bar{R}_2 \leq i+1, \dots, \bar{R}_{j-1} \leq i+j-2, \bar{R}_j > i+j-1) \\ &= (1 - \alpha_{i+j-1}) \prod_{\ell=i}^{i+j-2} \alpha_\ell, \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que $\prod_{\ell=i}^{i+j-2} \alpha_\ell = 1$ quando $j = 1$.

Distribuição estacionária

Para calcular a distribuição estacionária, vamos utilizar novamente as equações de balanço detalhadas descritas em (3.19).

$$\begin{aligned}\pi_i P_{i1} &= \pi_1 P_{1i} \\ \pi_i(1 - \alpha_i) &= \pi_1(1 - \alpha_i) \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k \\ \pi_i &= \pi_1 \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Utilizando que $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = \pi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \pi_1 \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k = \pi_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k \right),\tag{3.51}$$

que resulta nas expressões

$$\pi_1 = \frac{1}{1 + \sum_{i=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}\tag{3.52}$$

e

$$\pi_\ell = \frac{\prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k}{1 + \sum_{i=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}, \ell > 1.\tag{3.53}$$

Esperança $m_i = \mathbb{E}(S_1 | J_0 = i)$

Entrando nos passos finais,

- $m_i = \mathbb{E}(S_1 | J_0 = i) = i;$
- $\bar{m} = \sum_{i \geq 1} m_i \pi_i = m_1 \pi_1 + \sum_{i > 1} m_i \pi_i = \frac{1}{1 + \sum_{\ell > 1} \prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k} + \sum_{i > 1} i \frac{\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}{1 + \sum_{\ell > 1} \prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k} = \frac{1 + \sum_{i > 1} i \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}{1 + \sum_{\ell > 1} \prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k}.$

Portanto, pela Proposição 4

$$\frac{1}{\bar{m}} = \frac{1 + \sum_{\ell > 1} \prod_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k}{1 + \sum_{i > 1} i \prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k}.\tag{3.54}$$

CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos inicialmente o Processo Firework (PF) e os seus resultados principais, a condição para a probabilidade positiva de sobrevivência do rumor e a probabilidade exata de sobrevivência, que já foram desenvolvidos por outros autores. Em seguida, apresentamos o Processo Firework Cético (PFC) e os seus principais resultados: a Proposição 1 que diz respeito as condições de sobrevivência não abrange todos os casos possíveis, podendo levar a resultados inconclusivos, portanto apresentamos resultados novos e mais fortes, o Teorema 3 que traz a probabilidade exata de sobrevivência do processo e o Corolário 2 que diz respeito a condição para a probabilidade positiva de sobrevivência, porém abrangendo todos os casos possíveis.

Em seguida apresentamos dois processos reversos. Primeiramente apresentamos o Processo Firework Reverso (PFR), o processo dual do PF, mostrando também a condição de sobrevivência do processo e agora, a proporção de informados ao final do processo. O segundo processo apresentado foi o Processo Firework Reverso Cético (PFRC), a extensão natural do PFR, com os mesmos resultados do processo anterior. Vimos que o PFR foi necessário para demonstrar o teorema da probabilidade de sobrevivência do PF, mas o PFRC, que a primeira vista parece ser um processo dual natural do PFC, não se mostrou adequado para ser utilizado na prova do mesmo teorema para o processo cético, sendo necessário obter outro processo, o Processo Firework Cético Dual (PFCD).

O capítulo seguinte tratou somente das provas dos teoremas. Para a prova do Teorema da probabilidade de sobrevivência do PF utilizamos a relação entre PF, PFR e Processo de Renovação e para a prova do teorema e do corolário referente ao PFC utilizou-se da mesma ideia, relacionando PFC, PFCD e Cadeias semi-Markov. As últimas três provas são referentes aos processos reversos citados anteriormente.

Futuramente, é possível dar continuidade a pesquisa construindo a prova formal da relação entre PFC e PFCD e tentando simplificar a probabilidade de sobrevivência do PFC de uma forma que seja mais compreensível e calculável. Além disso, é possível pensar em

outros tipos de estudo e diversas modificações para o PFC, por exemplo tornar os raios não IID, acrescentar *fake news* ou estudar o processo reverso em que os raios são lançados para a esquerda e direita ao mesmo tempo.

REFERÊNCIAS

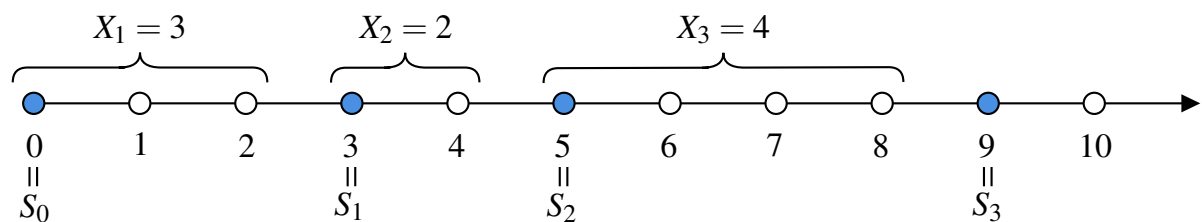
- BARBU, V. S.; LIMNIOS, N. **Semi-Markov chains and hidden semi-Markov models toward applications: their use in reliability and DNA analysis**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 191. Citado nas páginas [59](#), [64](#), [66](#) e [69](#).
- BREMAUD, P.; FIELDS, M. C. G. Monte carlo simulation, and queues (texts in applied mathematics 31). **Statistics & Decisions**, v. 19, p. 315–330, 2001. Citado na página [52](#).
- DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. Stochastic rumours. **IMA Journal of Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 1, n. 1, p. 42–55, 1965. Citado na página [21](#).
- GALLO, S.; GARCIA, N. L. Discrete one-dimensional coverage process on a renewal process. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 173, n. 2, p. 381–397, 2018. Citado na página [22](#).
- GALLO, S.; GARCIA, N. L.; JUNIOR, V. V.; RODRÍGUEZ, P. M. Rumor processes on \mathbb{N} and discrete renewal processes. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 155, n. 3, p. 591–602, 2014. Citado nas páginas [21](#), [22](#), [27](#) e [33](#).
- JUNIOR, V. V.; MACHADO, F. P.; RAVISHANKAR, K. The rumor percolation model and its variations. In: **Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics-II**. [S.l.]: Springer, 2019. p. 208–227. Citado na página [27](#).
- JUNIOR, V. V.; MACHADO, F. P.; ZULUAGA, M. Rumor processes on n . **Journal of applied probability**, Cambridge University Press, v. 48, n. 3, p. 624–636, 2011. Citado nas páginas [21](#), [23](#), [25](#), [26](#), [27](#) e [32](#).
- KOCHEN, S.; STONE, C. A note on the borel-cantelli lemma. **Illinois Journal of Mathematics**, Duke University Press, v. 8, n. 2, p. 248–251, 1964. Citado na página [52](#).
- MAKI, D. P.; MAKI, D. P.; MALI, D.; THOMPSON, M.; THOMPSON, M. **Mathematical models and applications: with emphasis on the social, life, and management sciences**. [S.l.]: Prentice Hall, 1973. Citado na página [21](#).
- SAJADI, F. A.; ROY, R. On rumour propagation among sceptics. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 174, n. 4, p. 935–952, 2019. Citado nas páginas [21](#), [22](#), [28](#), [32](#) e [34](#).

PROCESSO DE RENOVAÇÃO

O Processo de Renovação (PR) é um processo que observa a ocorrência de um evento de interesse ao longo do tempo, tal que a distribuição do tempo entre essas ocorrências são IID. Neste texto, consideramos apenas processos em tempo discreto, que são do nosso interesse para o estudo dos modelos de propagação.

A Figura 15 mostra um exemplo de um PR, cujo evento de interesse é representado pela cor azul. O processo inicia-se com o evento de interesse, caracterizando-o como um processo sem atraso, levando 3 passos para ocorrer o segundo evento no tempo 3, depois 2 passos para ocorrer o terceiro evento no tempo 5, 4 passos para o quarto evento no tempo 9 e assim por diante.

Figura 15 – Exemplo de um processo de renovação.



Fonte: Elaborada pela autora.

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser interpretado como o tempo em que o evento ocorre pela $(n + 1)$ -ésima vez e $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ como a distância entre dois eventos adjacentes, dessa forma segue a definição de um processo de renovação em tempo discreto (BARBU; LIMNIOS, 2009):

Definição 4 (Processo de renovação). Seja uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variáveis aleatórias IID em \mathbb{N}^* , com $S_n := X_1 + \dots + X_n$ e $S_0 = 0$, então $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de processo de renovação (sem atraso).

Pela sequência X_n ser IID, a partir do momento em que ocorre o evento de interesse, o processo pode ser reiniciado ou renovado, assim esse evento de interesse pode ser chamado apenas de *renovação*.

Uma das características mais importantes de um processo estocástico é a recorrência, então para um PR a definição é dada da seguinte forma:

Definição 5 (Recorrência). Um processo de renovação é *recorrente* se $\mathbb{P}(X_1 = \infty) = 0$. Se $\mathbb{E}(X_1) < \infty$, o processo é *recorrente positivo* e se $\mathbb{E}(X_1) = \infty$, o processo é *recorrente nulo*. Se $\mathbb{P}(X_1 = \infty) > 0$, então o processo é *transiente*.

Denote $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como uma sequência de variáveis aleatórias indicadoras que determinam se houve uma renovação no tempo n . Desta forma, $u_n := \mathbb{P}(Z_n = 1)$ é a probabilidade de ocorrer uma renovação no tempo n . Essa probabilidade pode ser encontrada através de uma relação de recorrência chamada de *equação de renovação*:

$$u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k}, \quad (\text{A.1})$$

em que $f_n := \mathbb{P}(X_1 = n)$ é a distribuição do tempo entre renovações.

A Definição 5 é interessante para entender o que pode acontecer com u_n ao longo do processo. Intuitivamente, se a probabilidade do tempo entre renovações ser infinito for zero, ou seja, $\mathbb{P}(X_1 = \infty) = 0$, significa que sempre haverá uma renovação ao longo do processo e se $\mathbb{P}(X_1 = \infty) > 0$, significa que há uma probabilidade positiva de não haver mais renovações. Dessa forma, observe o teorema a seguir:

Teorema 9 (Teorema da renovação). Seja $\mu := \mathbb{E}(X_1)$. Para um PR $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ recorrente, com $S_n := X_1 + \dots + X_n$ e $S_0 = 0$, segue que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu}, \quad (\text{A.2})$$

em que $\frac{1}{\mu} = 0$ se $\mu = \infty$.

A prova do teorema utiliza um acoplamento entre uma cadeia de renovação sem atraso e uma cadeia de renovação estacionária, que iremos definir em A.1. Assim, a prova do Teorema 8 será feita em A.2.

Outro resultado importante diz respeito a proporção de renovações do PR:

Proposição 5. Seja $N(t)$ o número de renovações até o passo t . Para um PR, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \quad (\text{A.3})$$

A.1 Processo de renovação estacionário

Primeiramente, será necessário introduzir a definição de um PR com atraso. Quando o PR possui um atraso, significa que a primeira renovação do processo acontece após o início do processo:

Definição 6 (Processo de renovação com atraso). Seja uma sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias IID em \mathbb{N} , com $S_n := X_0 + X_1 + \dots + X_n$ e $S_0 = X_0 > 0$, então $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de processo de renovação com atraso.

A probabilidade da primeira renovação ocorrer no tempo n é definida por $b_n := \mathbb{P}(S_0 = n)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que, para voltar ao caso sem atraso, basta ter $b_0 = 1$ e $b_n = 0$ para $n \geq 1$, implicando em $S_0 = X_0 = 0$.

Já o processo de renovação estacionário com atraso é um caso particular, em que a probabilidade de renovar no tempo n é invariante no tempo, ou seja, $v_n := \mathbb{P}(Z_n = 1)$ não depende de $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 6. Se

$$\mathbb{P}(S_0 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 > n)}{\mu}, \quad (\text{A.4})$$

então a probabilidade de ocorrer uma renovação em n é constante para todo $n \geq 1$ e é dada por:

$$v_n = \frac{1}{\mu}. \quad (\text{A.5})$$

Demonstração. No caso sem atraso, seja a Função Geradora de Probabilidade (FGP) de X_n definida como

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n s^n \quad (\text{A.6})$$

e defina também

$$U(s) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a Equação (A.1), é possível relacionar as duas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} \\
\sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} s^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_k u_{n-k} s^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} s^{n-k} \\
\sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \\
U(s) - 1 &= F(s)U(s) \\
U(s) &= \frac{1}{1 - F(s)}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

No caso com atraso, a FGP de S_0 é dada por

$$B(s) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \tag{A.9}$$

e definimos também

$$V(s) := \sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n. \tag{A.10}$$

De uma forma semelhante ao caso sem atraso, a *equação de renovação* é dada por

$$v_n = \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k}, \tag{A.11}$$

em que é possível relacionar $V(s)$ com $B(s)$ e $F(s)$ utilizando a Equação (A.8) e (A.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k} \\
\sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k} s^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} b_k u_{n-k} s^n \\
\sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} s^{n-k} \\
\sum_{n=0}^{\infty} v_n s^n &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \\
V(s) &= B(s)U(s) \\
V(s) &= \frac{B(s)}{1-F(s)}. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 > n)}{\mu} s^n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) s^n = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} s^n \mathbb{P}(X_1 = k) \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-s^k}{1-s} f_k = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-s} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k \right) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-s} (1-F(s)). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Pela relação (A.12) e (A.13)

$$V(s) = \frac{B(s)}{1-F(s)} = \frac{\frac{1}{\mu} \frac{1}{1-s} (1-F(s))}{1-F(s)} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} s^n, \tag{A.14}$$

portanto

$$v_n = \frac{1}{\mu} \tag{A.15}$$

e o processo é estacionário pois v_n é constante para todo $n \geq 1$.

□

A.2 Demonstração do Teorema da renovação

Seja $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma cadeia de renovação sem atraso, tal que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ é o tempo entre renovações com $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma cadeia de renovação estacionária com atraso, tal que $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ é o seu correspondente tempo entre renovações. Considere também que Y_n possui

a mesma distribuição de X_n para $n \geq 1$. Além disso, considere a cadeia de Markov $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida abaixo, que mostra o quão distante a n -ésima renovação de Y_n está da n -ésima renovação de X_n :

$$\begin{cases} W_0 = X_0 - Y_0 \\ W_n = W_{n-1} + (X_n - Y_n) = (X_1 + \dots + X_n) - (Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Para a demonstração do Teorema 8, será utilizado também o teorema citado por Barbu e Limnios (2009), que não será provado:

Lema 6. Dada uma cadeia de Markov $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ irredutível com $S_n := X_1 + \dots + X_n$, sendo $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ IID, se $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ e $\mathbb{E}(X_1) = 0$, então $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é recorrente.

Dessa forma, seja $N := \min\{n \in \mathbb{N} \mid W_n = 0\}$ a primeira vez que ocorre o mesmo número de renovações no mesmo instante de tempo. Como $\mathbb{E}(X_n - Y_n) = 0$, de acordo com o Teorema 6, a cadeia de Markov $(W_n - W_0)_{n \in \mathbb{N}}$ é recorrente e conseqüentemente, $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$.

Pelo acoplamento, $X_n = Y_n$ para $n \geq N$, S_n terá a mesma distribuição de T_n para $n \geq N$. Dessa forma, é possível escrever u_n desta forma:

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k \in \mathbb{N}) \\ &= \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k \geq N) + \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k < N) \\ &= \mathbb{P}(T_k = n \text{ para algum } k \geq N) + \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k < N) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$= \mathbb{P}(T_k = n \text{ para algum } k \in \mathbb{N}) - \mathbb{P}(T_k = n \text{ para algum } k < N) + \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k < N). \quad (\text{A.18})$$

Para a primeira parcela da soma (A.18), já que T_k é um PR estacionário,

$$\mathbb{P}(T_k = n \text{ para algum } k \in \mathbb{N}) = \frac{1}{\mu}. \quad (\text{A.19})$$

Para a terceira parcela, note que $S_k < S_N$ para $k < N$, portanto $\{S_k = n \text{ para algum } k < N\} \subset \{S_N > n\}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_k = n \text{ para algum } k < N) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_N > n) = \mathbb{P}(S_N = \infty) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Utilizando o mesmo raciocínio para a segunda parcela, $T_k < T_N$ para $k < N$, portanto $\{T_k = n \text{ para algum } k < N\} \subset \{T_N > n\}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_k = n \text{ para algum } k < N) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_N > n). \quad (\text{A.21})$$

Agora como $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$, $\mathbb{P}(Y_0 < \infty) = 1$ e como S_n é recorrente, T_n também será recorrente. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_N > n) = 0$ e o segundo termo de (A.18) converge para zero.

Dessa forma, foi provado que $u_n \rightarrow \frac{1}{\mu}$ quando $n \rightarrow \infty$.

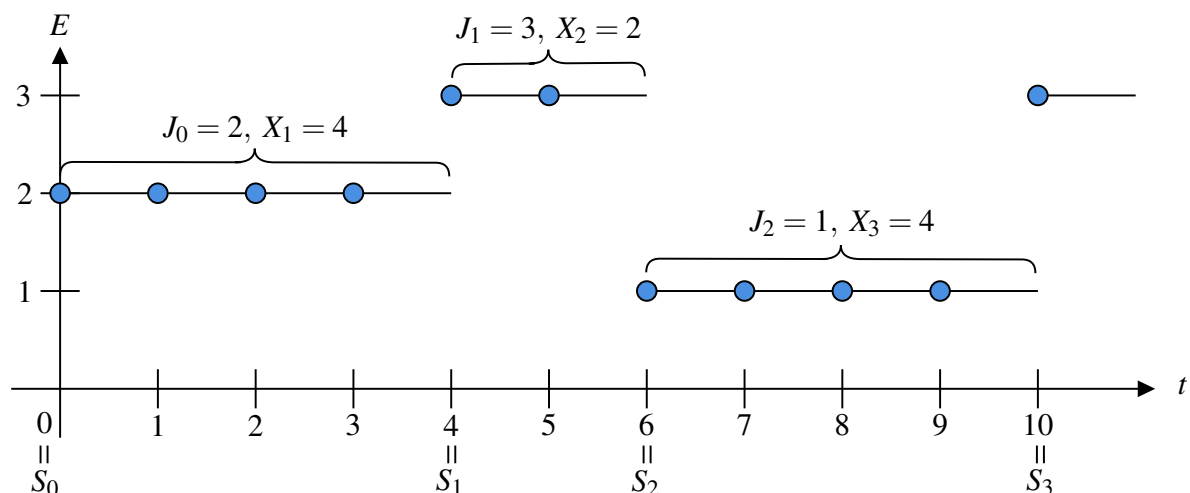
CADEIAS SEMI-MARKOV

B.1 Cadeias de renovação Markov

Com uma finalidade ilustrativa, considere o exemplo da Figura 16, um processo estocástico com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ que acontece sobre o tempo t , discreto. Com o círculo em azul representando o estado da cadeia no tempo t , o processo começa no tempo $t = 0$ no estado 2, com $t = 1$ o processo continua no mesmo estado, até que em $t = 4$ o processo vai para o estado 3. Após permanecer neste estado em $t = 5$, o processo muda e vai para o estado 1 em $t = 6$, permanecendo neste estado até $t = 9$.

A CRM é definida por $\{J_n, S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, em que J_n representa o estado da cadeia no n -ésimo salto (mudança de estado) e S_n representa o tempo (ou passo) t em que esse salto acontece. Por convenção, considere $S_0 = 0$. A variável $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ representa o período em que o processo permaneceu no estado J_{n-1} , então $X_n = S_n - S_{n-1}$.

Figura 16 – Exemplo de realização de uma cadeia de renovação Markov.



Fonte: Elaborada pela autora.

Dessa forma, apresentamos a seguir a definição formal da CRM (BARBU; LIMNIOS, 2009):

Definição 7. O processo discreto $\{J_n, S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é chamado de cadeia de renovação Markov (CRM) se

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k \mid J_0, \dots, J_n; S_0, \dots, S_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n = k \mid J_n), \quad (\text{B.1})$$

para todo $j \in E$, $k \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}$.

Em outras palavras, a probabilidade do processo permanecer X_{n+1} passos no estado J_n e ir para o estado J_{n+1} depende apenas do estado J_n e não mais dos tempos de permanência e estados anteriores, que pode ser visto como algo semelhante à propriedade que caracteriza uma cadeia de Markov.

Quando a probabilidade em (B.1) não se altera conforme n , é dito que o processo $\{J_n, S_n\}$ é *homogêneo*, assim a probabilidade

$$q_{ij}(k) := \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k \mid J_n = i) \quad (\text{B.2})$$

é chamado de *kernel semi-Markov*. Ele pode ser interpretado como a probabilidade de ficar k passos no estado i e no $(k+1)$ -ésimo passo, o processo ir para o estado j .

O kernel é a probabilidade mais importante a ser definida na CRM, pois a partir desta que é possível obter todas as outras probabilidades de interesse, mas abaixo são apresentadas mais algumas probabilidades que podem ser úteis e que ajudam na compreensão do processo.

- **Probabilidade p_{ij}**

Ao observar somente as trocas de estados J_n ao longo de n , o processo segue propriedades markovianas, o chamando de *cadeia de Markov embutida associada à CRM* $\{J_n, S_n\}$ com matriz de probabilidade de transição

$$p_{ij} := \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i), \quad (\text{B.3})$$

que pode ser escrita em função de $q_{ij}(k)$, somando para todos os valores de k obtendo a distribuição marginal de J_{n+1} condicionado ao $J_n = i$, ou seja,

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k \mid J_n = i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{ij}(k). \end{aligned}$$

Além disso, note que $p_{ii} = 0$.

- **Probabilidade** $f_{ij}(k)$

É a distribuição de probabilidade do tempo de permanência no estado atual sabendo qual é esse estado e o próximo:

$$f_{ij}(k) := \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid J_{n+1} = j, J_n = i). \quad (\text{B.4})$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} q_{ij}(k) &= \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k \mid J_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid J_{n+1} = j, J_n = i) \cdot \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i) \\ &= f_{ij}(k) \cdot p_{ij}. \end{aligned}$$

Então, $f_{ij}(k) = \frac{q_{ij}(k)}{p_{ij}}$ se $p_{ij} \neq 0$ e por convenção, tem-se que $f_{ij}(k) = \mathbb{1}_{\{k=\infty\}}$ para $p_{ij} = 0$.

Portanto,

$$f_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{q_{ij}(k)}{p_{ij}}, & \text{se } p_{ij} \neq 0, \\ 1, & \text{se } p_{ij} = 0 \text{ e } k = \infty, \\ 0, & \text{se } p_{ij} = 0 \text{ e } k < \infty. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

- **Probabilidade** $h_i(k)$

A distribuição de probabilidade do tempo de permanência no estado atual sabendo qual é esse estado é definida por

$$h_i(k) := \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid J_n = i), \quad (\text{B.6})$$

tal que

$$\begin{aligned} h_i(k) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid J_n = i) \\ &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} = k \mid J_n = i) \\ &= \sum_{j \in E} q_{ij}(k). \end{aligned}$$

Além disso, temos a sua distribuição de probabilidade acumulada:

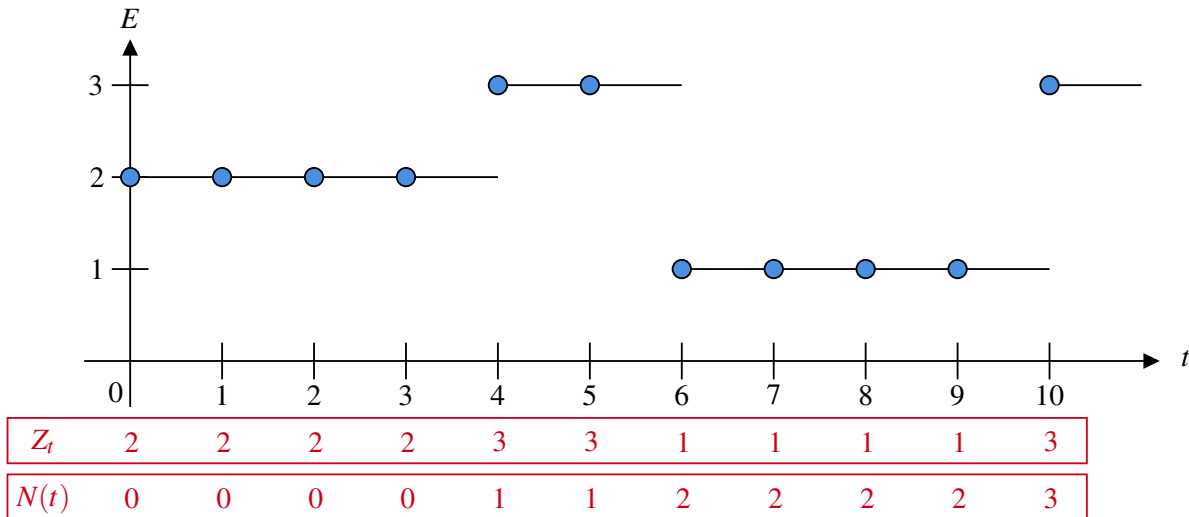
$$H_i(k) := \mathbb{P}(X_{n+1} \leq k \mid J_n = i) = \sum_{l=1}^k h_i(l). \quad (\text{B.7})$$

B.2 Cadeias semi-Markov

A unidade de tempo n considerada para definir os processos J_n e S_n na CRM foram os saltos que aconteciam no processo original, mas agora considere $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ o processo que fornece o estado do sistema no tempo t do processo original.

Veja a Figura 17. A imagem mostra o mesmo exemplo ilustrativo da Figura 16, mas agora note que na parte inferior, é mostrada a sequência Z_t para o exemplo. No início da sequência tem-se que $Z_0 = 2$, pois o processo se encontra no estado 2 no tempo 0 e observando a sequência um pouco mais a frente, $Z_5 = 3$, pois o processo se encontra no estado 3 no tempo 5, assim por diante.

Figura 17 – As sequências Z_n e N_t referentes à Figura 16.



Fonte: Elaborada pela autora.

A sequência N_t mostrada abaixo da sequência Z_t é definida como $N_t := \max\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}$, o processo de contagem do número de saltos no intervalo $[0, t]$. Então até o tempo $t = 3$, para o exemplo tem-se que $N_t = 0$, no tempo 4 ocorre o primeiro salto, portanto $N_4 = 1$ e $N_5 = 1$ e por fim, no tempo 6 ocorre o segundo salto, portanto $N_6 = 2$ e assim por diante.

Desta forma, abaixo segue a definição de uma cadeia semi-Markov.

Definição 8. O processo Z_t é uma Cadeia Semi-Markov (CSM) associada à cadeia de renovação Markov $\{J_n, S_n\}$ se $Z_t = J_{N_t}$, $t \in \mathbb{N}$, ou $J_n = Z_{S_n}$.

Definindo

$$\psi_{ij}(k) := \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^k \{J_n = j, S_n = k\} \mid J_0 = i \right) \quad (\text{B.8})$$

como a probabilidade de que, começando no tempo 0 no estado i , a CSM fará um salto para o estado j no tempo k e definindo as sucessivas passagens ao estado j como um PR da forma

$$\begin{cases} S_0^j = S_m, \text{ com } m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid J_k = j\}, \\ S_n^j = S_m, \text{ com } m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid J_k = j, S_k > S_{n-1}^j\}, \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$\mu_{ij} := \mathbb{E}_i(S_0^j)$ é o tempo médio da primeira passagem do estado i para o estado j . Com isso, é possível definir também, a recorrência de uma CSM:

Definição 9 (Recorrência de uma CSM). Uma CSM é *recorrente* se $\mathbb{P}(S_1^j = \infty) = 1$ e *transiente* se $\mathbb{P}(S_1^j = \infty) < 1$. Caso o processo seja recorrente, será *recorrente positivo* se $\mu_{jj} < \infty$ e *recorrente nulo* se $\mu_{jj} = \infty$.

Dessa forma, é possível obter um resultado semelhante ao Teorema 8 utilizando o Teorema 10 e a Proposição 7 (BARBU; LIMNIOS, 2009) mostrados a seguir:

Teorema 10 (Teorema da renovação Markov). Para uma CRM recorrente positiva,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{ij}(k) = \frac{1}{\mu_{jj}}. \quad (\text{B.10})$$

Proposição 7. O tempo médio de recorrência de um estado j é dado por

$$\mu_{jj} = \frac{\bar{m}}{\pi_j}, \quad (\text{B.11})$$

onde π_j é a distribuição estacionária da cadeia e $\bar{m} = \sum_{i \in E} \pi_i m_i$, com $m_i = \mathbb{E}(S_1 \mid J_0 = i) = \sum_{k>0} (1 - H_i(k))$.

Definindo $\psi_i(k) := \sum_{j \in E} \psi_{ij}(k)$ como a probabilidade de que, começando no tempo 0 no estado i , a cadeia semi-Markov fará um salto no tempo k , então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} \psi_{ij}(k) = \sum_{j \in E} \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{ij}(k) = \sum_{j \in E} \frac{1}{\mu_{jj}} = \sum_{j \in E} \frac{\pi_j}{\bar{m}} = \frac{1}{\bar{m}}, \quad (\text{B.12})$$

portanto obtemos a seguinte proposição:

Proposição 8. Para uma CRM recorrente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_i(k) = \frac{1}{\bar{m}}. \quad (\text{B.13})$$

E como um último resultado deste apêndice, a próxima proposição diz respeito a proporção de saltos no processo Z_t :

Proposição 9. Para uma CRM, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\bar{m}}. \quad (\text{B.14})$$

