

## Percolação Acessível

**Ricardo de Jesus Caldas Assis**

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Ricardo de Jesus Caldas Assis**

## Percolação Acessível

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martín Rodriguez

**USP – São Carlos**  
**Abril de 2020**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d278p de Jesus Caldas Assis, Ricardo  
Percolação Acessível / Ricardo de Jesus Caldas  
Assis; orientador Pablo Martín Rodríguez. -- São  
Carlos, 2020.  
41 p.

Dissertação (Mestrado - Programa  
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,  
Universidade de São Paulo, 2020.

1. percolação acessível. 2. transição de fase. 3.  
árvore n-ária . 4. árvore esfericamente simétrica .  
I. Martín Rodríguez, Pablo , orient. II. Título.

**Ricardo de Jesus Caldas Assis**

## Accessible Percolation

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP and to the Department of Statistics – DEs- UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Interagency Program Graduate in Statistics.  
*FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez

**USP – São Carlos**  
**April 2020**



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

---

## Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Ricardo de Jesus Caldas Assis, realizada em 17/02/2020:



---

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez  
USP



---

Prof. Dr. Cristian Favio Coletti  
UFABC



---

Prof. Dr. Mário Andrés Estrada López  
UFPE

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Cristian Favio Coletti e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ão) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.



---

Prof. Dr. Pablo Martín Rodríguez



# Resumo

ASSIS, R. J. C. **Percolação Acessível**. 2020. 41p. Dissertação (Mestrado em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2020.

Consideramos o modelo de percolação acessível na árvore  $n$ -ária finita de altura  $h$ . O modelo é definido associando-se uma variável aleatória contínua  $X_v$  para cada vértice  $v$  da árvore. A principal questão a ser considerada e estudada é a existência ou não de um caminho de vizinhos mais próximos  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , conectando a raiz com a fronteira da árvore, de tal modo que  $X_{v_0} < X_{v_1} < \dots < X_{v_n}$ . O evento definido pela existência desse caminho é chamado de percolação acessível. Neste trabalho estudamos a probabilidade do evento de percolação acessível quando o valor  $n$  é dado por  $n(h) = \alpha(h)h$  em que  $h$  é a altura da árvore e  $\alpha(h)$  é constante. Os resultados são obtidos fazendo  $h \rightarrow \infty$ . Adicionalmente, discutiremos outros resultados recentes na literatura.

**Palavras chave:** Transição de Fase, Percolação Acessível, Árvore  $n$ -ária



# Abstract

ASSIS, R. J. C. **Accessible Percolation**. 2020. 41p. Dissertação (Mestrado em Estatística - Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2020.

We consider the accessibility percolation model on the  $n$ -ary tree height the finite  $h$ . The model is defined by associating a continuous random variable  $X_v$  for each vertex  $v$  in the tree. The main issue to consider and study is whether or not there is a nearest neighbor path  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , connecting the root to the tree boundary, such that  $X_{v_0} < X_{v_1} < \dots < X_{v_n}$ . The event defined by the existence of this path is called the accessible percolation. In this paper we study the probability of the accessible percolation event. when  $n$  is given by  $n(h) = \alpha(h)h$  where  $h$  is the height of the tree and  $\alpha(h)$  is constant. Results are obtained by making  $h \rightarrow \infty$ . Additionally, we will discuss other recent results in the literature.

**keywords:** Phase Transition, Accessible Percolation,  $n$ -ary Tree

# Lista de Figuras

1.1	grafo orientado com laço . . . . .	4
1.2	árvore dos vértices numerados de 1 a 15 . . . . .	5
1.3	árvore dos vértices numerados de 1 a 12 . . . . .	6
1.4	2-árvore de raiz $\omega$ . . . . .	7
1.5	árvore esféricamente simétrica $T$ . . . . .	9
1.6	Uma representação da árvore $T_i$ , até o nível $i = 4$ . . . . .	10
2.1	realização de um modelo de percolação acessível na 2-árvore $T$ . . . . .	12
2.2	A correlação entre dois caminhos depende apenas do número $h - k + 1$ de vértices que ambos os caminhos têm em comum. . . . .	15
3.1	árvore $T_1$ . . . . .	26
3.2	árvore $T_2$ . . . . .	26



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares e notação de grafos</b>	<b>3</b>
<b>2 Modelo de percolação acessível em árvores <math>n</math>-árias</b>	<b>11</b>
2.1 O modelo . . . . .	11
2.2 Número de caminhos acessíveis . . . . .	13
2.2.1 Cálculo do primeiro momento de $N(\mathbb{E}\{N\})$ . . . . .	13
2.2.2 Cálculo do segundo momento de $N$ . . . . .	14
2.3 Probabilidade de existir caminhos acessíveis na $n$ -árvore . . . . .	17
<b>3 Discussão</b>	<b>24</b>
3.1 Discussão . . . . .	24
<b>Conclusão</b>	<b>29</b>

# Introdução

O modelo de percolação acessível em árvores foi introduzido no artigo [1], inspirado em questões de Biologia Evolutiva (A questão principal é supor uma população de alguma forma de vida que tenha o mesmo tipo genético (genótipo). Se ocorrer uma mutação, é criado um novo genótipo que pode morrer ou substituir o antigo. Desde que a seleção natural seja suficientemente forte, o último só acontece se o novo genótipo tiver maior aptidão). Nesse artigo uma  $n$ -árvore de altura  $h$  é considerada e uma variável aleatória absolutamente contínua  $X_v$  é dada e está associada a cada vértice  $v$ , independentemente de todo o resto. Uma das principais questões neste modelo é se existe um caminho de vizinhos mais próximos  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_h$  de tal modo que  $X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \dots < X_{v_h}$ . Esse tipo de caminho é chamado de caminho acessível. No artigo [1] os autores derivaram um resultado assintótico para a probabilidade de ter pelo menos um caminho acessível conectando a raiz com o nível  $h$  de uma árvore  $n(h)$  com  $n(h) := \alpha(h)h$ , e  $\alpha$  alguma constante positiva arbitrária. Consequentemente, eles provaram a existência de um valor crítico de percolação para este modelo quando  $h \rightarrow \infty$ . De fato, eles mostraram que a probabilidade de ter pelo menos um caminho acessível vai para zero para  $\alpha < \alpha_c$  e converge para um número positivo para  $\alpha > \alpha_c$  com  $1/e \leq \alpha_c \leq 1$ , onde  $\alpha_c$  é o valor crítico de percolação. Mais tarde, este resultado foi complementado no artigo [2], onde os autores mostraram que essa probabilidade converge para 1 quando  $\alpha > 1/e$ . Recentemente, um problema relacionado foi analisado no hipercubo  $H_N = \{0, 1\}^N$ , com  $N \in \mathbb{N}$ , para mais confira os artigos [4, 6]. Sugerimos consultar também artigos [8, 9, 10, 11, 12] para questões relacionadas. No artigo [3], a principal questão estudada é a existência de um caminho acessível infinito na árvore esfericamente simétrica. Neste modelo para cada vértice  $v$  de uma árvore esfericamente simétrica associa-se uma variável aleatória absolutamente contínua  $X_v$  com distribuição uniforme  $(0, 1)$ . Prova-se que para uma dada função de crescimento da árvore existe um valor crítico de percolação.

Nesta dissertação vamos descrever os argumentos usados em [1] para a prova de transição de fase do modelo. Além disto, vamos discutir problemas relacionados e problemas em aberto. O capítulo 1 é dedicado para estudarmos um pouco de teoria de grafos (definição, exemplos e propriedades) e conceituarmos árvores e algumas de suas principais propriedades. No capítulo 2 foi feito um estudo sistemático do artigo [1]. Por fim, no capítulo 3 foi feita uma discussão sobre [3].

# Capítulo 1

## Preliminares e notação de grafos

Neste capítulo veremos o que é um grafo e algumas definições relacionadas a grafos. Também veremos o conceito de  $n$ -árvore ou árvore  $n$ -ária e árvore esfericamente simétrica.

**Definição 1.1** (Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. (2009)). *Um grafo orientado finito  $G$  é uma par  $G = (V, E)$ , onde*

1.  $V$  é um conjunto finito, chamado de **conjunto de vértices**;
2.  $E$  é uma relação binária em  $V$ , chamado de **conjunto de arestas**.

Em um **grafo não orientado**  $G = (V, E)$ ,  $E$  consiste de pares de vértices não ordenados. Se  $E$  é infinito, dizemos que  $G$  é um **grafo infinito**.

**Observação 1.1.** *Os grafos podem ser representados graficamente: Os vértices são desenhados como círculos e as arestas são desenhadas como curvas (retas ou não) ligando dois círculos, no caso de grafos orientados, as curvas tem um seta em uma das extremidades.*

**Exemplo 1.1.** O grafo a seguir é um exemplo de grafo orientado com **laço** (arestas de um vértice para ele mesmo).

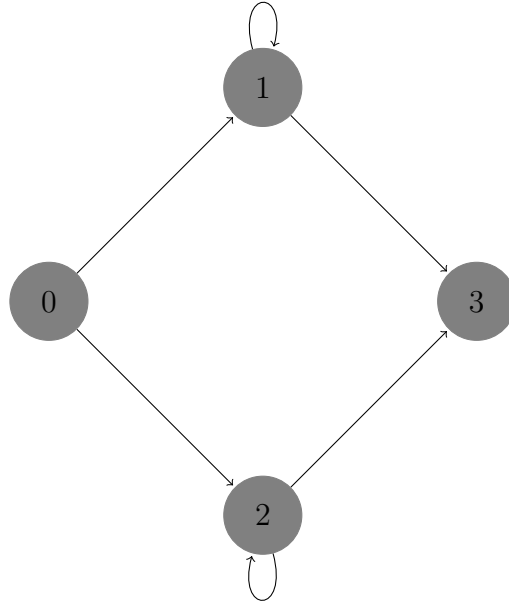


Figura 1.1: grafo orientado com laço

Para este grafo, temos os seguintes conjuntos de vértices e arestas

$$V = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } E = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um caminho de comprimento  $k$  de um vértice  $u$  até um vértice  $u'$  em  $G$  é uma sequência  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices tal que  $u = v_0, u' = v_k$  e  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  para  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Além disso, dizemos que um caminho é **simples** se todos os vértices no caminho são distintos. Por outro lado, um caminho  $v_0, v_1, \dots, v_k$  forma um ciclo se  $v_0 = v_k$  e o caminho contém pelo menos uma aresta. O ciclo é **simples** se além disso  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são distintos. Agora, se  $G$  é sem ciclo, então ele é dito ser **acíclico**. Finalmente,  $G$  é **conexo** se cada vértice é acessível a partir de todos os outros. Agora, dizemos que se  $G$  é **conexo acíclico**, então  $G$  é uma **árvore**. Em outras palavras, uma árvore  $T$  é um grafo tal que todo par de vértices de  $T$  é unido por um único caminho.

**Observação 1.2.** Dizemos que uma árvore  $T$  é infinita se  $V$  e  $E$  são infinitos. Mais ainda, se  $T$  é infinita, então dizemos que  $T$  é localmente finita, se cada vértice  $v$  da árvore tem um número finito de vizinhos mais próximos em  $T$ .



**Exemplo 1.2.** A figura abaixo é uma ilustração de uma árvore não-orientada.

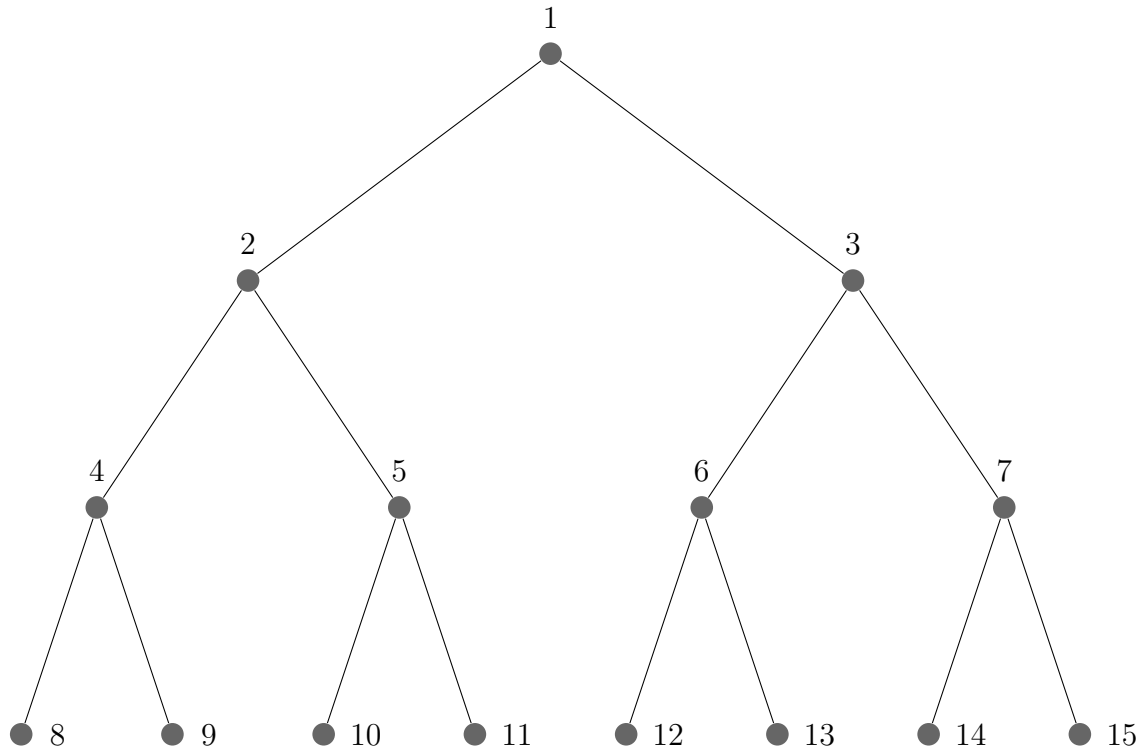


Figura 1.2: árvore dos vértices numerados de 1 a 15

Já vimos que uma árvore é um grafo acíclico conexo não orientado. Agora, uma árvore com raiz é uma árvore que tem um vértice de origem denotado por  $\mathbf{0}$ .

**Exemplo 1.3.** O grafo da Figura 1.2 é uma árvore com origem (raiz) exatamente no vértice de número 1.

As definições que seguem valem para quaisquer grafos. Entretanto, vamos restringi-las a árvores.

**Definição 1.2.** Seja  $T = (\vartheta, \xi)$  uma árvore. Um caminho de tamanho  $n$  em  $T$  é uma sequência de vértices  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  conectados por uma sequência de elos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , tais que  $\varepsilon_i = (v_{i-1}, v_i)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Denotamos esse caminho por  $v_0 \rightarrow v_n$ .

**Observação 1.3.** No caso da definição anterior, dizemos que a distância de  $v_0$  até  $v_n$  é  $n$  e denotamos por  $d(v_0, v_n) = n$ .

**Definição 1.3.** Seja  $T = (\vartheta, \xi)$  uma árvore. Dizemos que  $u$  e  $v$  de  $\vartheta$  são vizinhos mais próximos se  $d(u, v) = 1$ .

**Definição 1.4.** Seja  $T = (\vartheta, \xi)$  uma árvore. Dizemos que o grau de  $v$ , denotado por  $g(v)$ , é o número de vizinhos mais próximos de  $v$ .

**Observação 1.4.** Considere o conjunto  $G_v = \{u \in \vartheta; d(v, u) = 1\}$ . Então,  $g(v) = |G_v|$ .

**Exemplo 1.4.** Seja a árvore finita, abaixo.

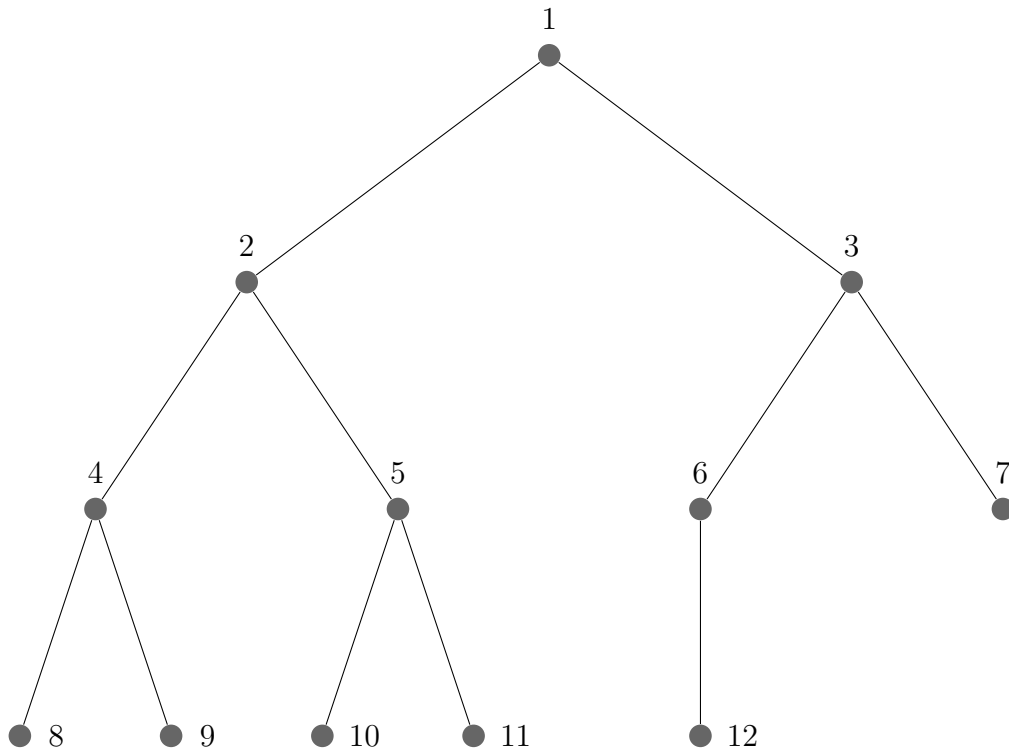


Figura 1.3: árvore dos vértices numerados de 1 a 12

Para esta árvore finita, temos  $g(i) = 3$  se  $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $g(i) = 2$  se  $i \in \{1, 6\}$  e  $g(i) = 1$  se  $i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

Agora, vamos definir o que é uma  $n$ -árvore e estudar alguns conceitos relacionados a este tipo de árvore.

**Definição 1.5.** Uma  $n$ -árvore ou árvore  $n$ -área completa é uma árvore com raiz onde cada vértice de qualquer nível está conectado a  $n$  vértices do próximo nível, exceto pelos vértices que estão no último nível da árvore.

**Observação 1.5.** A origem  $\mathbf{0}$  é o nível 0 da árvore. O nível de cada vértice da árvore é igual a sua distância em relação a origem.

**Exemplo 1.5.** A figura abaixo representa uma  $n$ -árvore de raiz  $\omega$ , com  $n = 2$ .

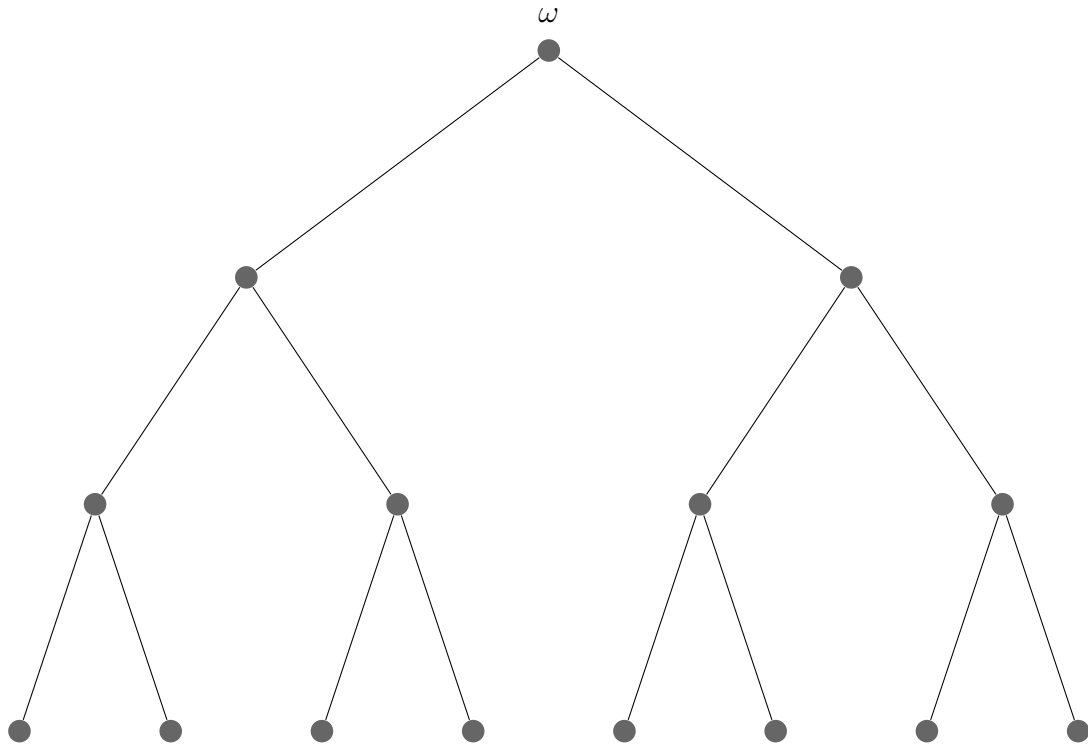


Figura 1.4: 2-árvore de raiz  $\omega$

**Definição 1.6.** A altura de uma  $n$ -árvore é definida como a distância da raiz até o último nível da árvore. Denotamos essa altura por  $h$ . Daí, qualquer caminho da raiz ao último nível da árvore consiste de  $h + 1$  vértices.

**Exemplo 1.6.** Considere a Figura 1.4. Neste caso, temos a altura da 2-árvore igual a 3 e que cada caminho da raiz  $\omega$  ao último nível da árvore consiste de exatamente 4 vértices.

**Proposição 1.1.** Seja  $T = (\vartheta, \xi)$  uma árvore  $n$ -ária. Então, o número de vértices do último nível de  $T$  é igual a  $n^h$ .

*Demonstração.* A prova é por indução sobre  $h$ . Com efeito, para  $h = 1$  temos o último nível de  $T$  com exatamente  $n$  vértices. Agora, suponha válido para  $h$ . Devemos mostrar válido para  $h + 1$ . De fato, cada vértice do nível  $h$  está conectado a  $n$  vértices do nível  $h + 1$ . Como, por hipótese de indução, existem  $n^h$  vértices no nível  $h$  concluímos que existem  $n \cdot n^h = n^{h+1}$  vértices no nível  $h + 1$ .

□

**Observação 1.6.** *Cada vértice do último nível corresponde a um único caminho partindo da raiz. Logo, o número de caminhos partindo da raiz que conectam a algum dos vértices do último nível da  $n$ -árvore é igual a  $n^h$ .*

Agora, vamos definir o que é uma árvore esfericamente simétrica, sua função de crescimento e um exemplo deste tipo de árvore.

**Definição 1.7.** *Seja uma árvore infinita, localmente finita,  $T = (\vartheta, \xi)$  com raiz  $\mathbf{0}$ . Dizemos que  $T$  é uma árvore esfericamente simétrica se qualquer par de vértices que tem a mesma distância da origem, têm o mesmo grau. Em outras palavras,  $T$  é uma árvore esfericamente simétrica se o grau de qualquer vértice  $v$  de  $\vartheta$  depende apenas da sua distância da raiz  $\mathbf{0}$ .*

**Observação 1.7.** 1. *Por definição, para cada  $v$  de  $\vartheta$ , temos  $|v| = d(\mathbf{0}, v)$ ;*

2. *Na árvore esfericamente simétrica, com raiz  $\mathbf{0}$ , vale que  $g(v) = f(|v|) + 1$ , onde  $f := (f(i))_{i \geq 0}$  é uma sequência de inteiros positivos e  $f$  é denominada função crescimento de  $T$ .*

**Exemplo 1.7.** *Seja a árvore esféricamente simétrica  $T$ , abaixo.*

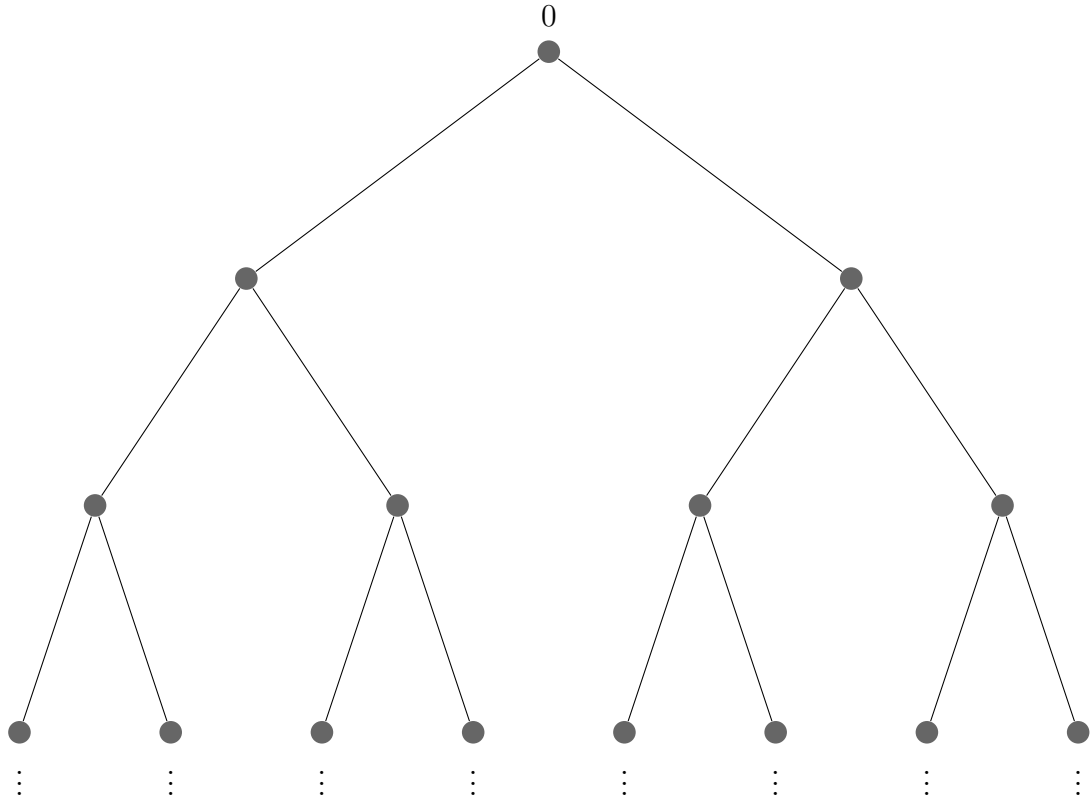


Figura 1.5: árvore esféricamente simétrica  $T$

Para esta árvore, temos a função de crescimento dada por  $f(i) = 2, \forall i \geq 0$ . Logo,  $g(v) = f(|v|) + 1 = 3, \forall v \in \vartheta$  com  $v \neq \mathbf{0}$ .

Agora, para cada  $n > 1$ , seja  $\partial T_n = \{v \in \vartheta; |v| = n\}$ .

**Proposição 1.2.** *Seja  $T$  uma árvore esféricamente simétrica. Então,  $|\partial T_n| = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$ .*

*Demonstração.* Indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$  é válido, pois  $|\partial T_1| = f(0)$ . Suponha válido para  $n$ , ou seja,  $|\partial T_n| = \prod_{i=0}^{n-1} f(i)$ . Logo,  $|\partial T_{n+1}| = |\partial T_n| \cdot f(n) = (\prod_{i=0}^{n-1} f(i)) \cdot f(n) = \prod_{i=0}^n f(i)$ .

□

**Definição 1.8.** Uma árvore esfericamente simétrica infinita cuja função de crescimento é dada por  $f(i) = i+1, \forall i \geq 0$ , é dita árvore fatorial. Denotamos por  $T_1$  a árvore fatorial. A figura abaixo, é uma representação da árvore  $T_1$ .

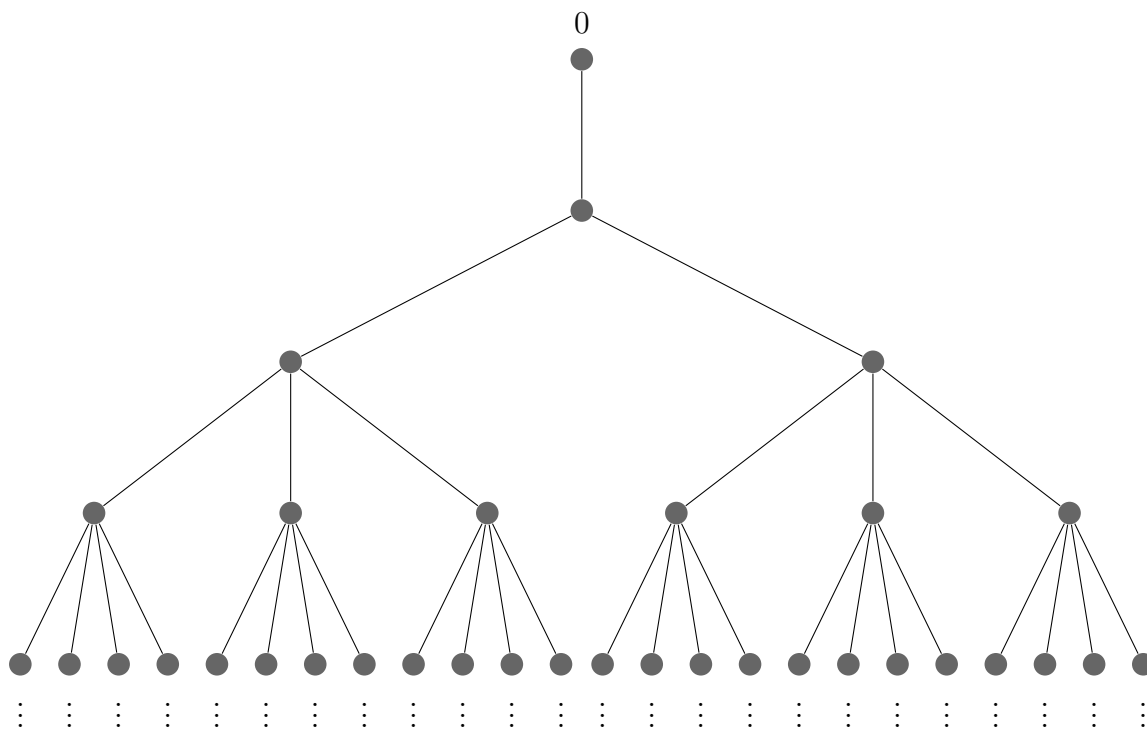


Figura 1.6: Uma representação da árvore  $T_1$ , até o nível  $i = 4$

**Observação 1.8.** Pela proposição 1.2, segue que  $|\partial T_{1,n}| = 1.2.3\dots n = n!$ .

# Capítulo 2

## Modelo de percolação acessível em árvores $n$ -árias

Neste capítulo vamos estudar o modelo de percolação acessível na  $n$ -árvore. O modelo consiste em associar uma variável aleatória contínua  $X_v$  para cada vértice  $v$  da  $n$ -árvore. Consideremos que as variáveis aleatórias contínuas  $X_v$  tem distribuição uniforme  $(0, 1)$ . Suporemos, sem perda de generalidade, que para a raiz  $\mathbf{0}$  atribuímos o valor 0. Vamos estudar sob quais condições existe pelo menos um caminho acessível na  $n$ -árvore, definindo assim a percolação acessível. Começaremos definindo o modelo e posteriormente estudando o número de caminhos acessíveis na  $n$ -árvore.

### 2.1 O modelo

Para este modelo, a cada vértice  $v$  da árvore associamos uma variável aleatória  $X_v$ , tal que essa variável aleatória pertence a uma família de variáveis aleatórias contínuas  $(X_v)_{v \in \vartheta}$  i.i.d. Chamamos modelo de percolação acessível o par formado pela árvore  $T$  e a família de variáveis aleatórias contínuas  $(X_v)_{v \in \vartheta}$ .

**Definição 2.1.** Um caminho de tamanho  $n, v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$  em  $T$  é acessível se

$$X_{v_0} < X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \dots < X_{v_n}.$$

Denotamos este evento por  $v_0 \xrightarrow{c.a} v_n$

**Exemplo 2.1.** Seja a árvore 2-árvore  $T$ , abaixo.

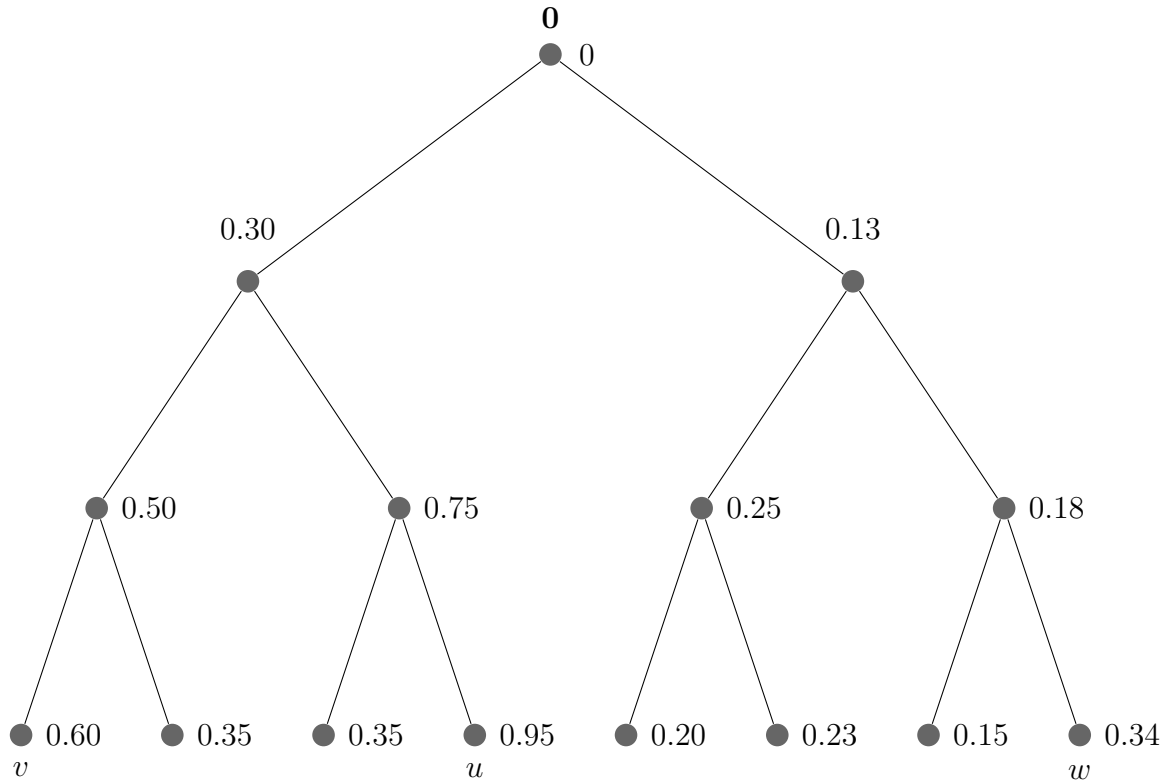


Figura 2.1: realização de um modelo de percolação acessível na 2-árvore  $T$

A figura 2.1 é uma realização de um modelo de percolação acessível, tal que para cada  $v \in \mathcal{V}$  associamos  $X_v \sim \mathbf{U}(0,1)$  de uma sequência i.i.d. Neste caso, temos que os caminhos  $\mathbf{0} \rightarrow v, \mathbf{0} \rightarrow u$  e  $\mathbf{0} \rightarrow w$  são caminhos acessíveis em  $T$ .



O próximo resultado nos fornece a probabilidade exata de um caminho de tamanho  $h$  ser acessível.

**Proposição 2.1.** *Seja um caminho  $v_1, v_2, \dots, v_h$ , na árvore  $T$ . Então,  $\mathbb{P}(v_1 \xrightarrow{\text{c.a.}} v_h) = \frac{1}{h!}$ .*

*Demonstração.* Seja um caminho  $v_1, v_2, \dots, v_h$  na árvore  $T$ , tal que  $X_{v_i}$  está associado a  $v_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ . Vamos facilitar a notação escrevendo  $X_{v_i} \equiv X_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ . Existem  $h!$  ordenações de  $X_1, X_2, \dots, X_h$ , ou seja, ao longo do caminho podemos organizar os valores atribuídos as variáveis aleatórias, após uma dada realização, de  $h!$  modos. Por exemplo, para uma dada realização do modelo de percolação uma dessas ordens é  $X_1 < X_2 < \dots < X_h$ . Outra ordem possível é  $X_2 < X_3 < \dots < X_h < X_1$ . Por simetria, desde que  $X_1, X_2, \dots, X_h$  são i.i.d ( independentes e identicamente distribuídas), todas as possíveis ordenações tem a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja,  $\frac{1}{h!}$ , então por exemplo,  $\mathbb{P}(X_2 < X_3 < \dots < X_h < X_1) = \frac{1}{h!}$ . Portanto,  $\mathbb{P}(v_1 \xrightarrow{\text{c.a.}} v_h) = \frac{1}{h!}$ .

□

**Observação 2.1.** *Considere um caminho de tamanho  $h$  que começa na origem ( $v_0$  até  $v_h$ ), na  $n$ -árvore. Como a variável aleatória associada a origem assume o valor 0, segue pela proposição 2.1 que  $\mathbb{P}(v_0 \xrightarrow{\text{c.a.}} v_h) = \mathbb{P}(v_1 \xrightarrow{\text{c.a.}} v_h) = \frac{1}{h!}$ .*

## 2.2 Número de caminhos acessíveis

Denotamos por  $N = \#$  de caminhos acessíveis, conectando a origem ao nível  $h$ , na  $n$ -árvore. Nesta seção, computaremos o primeiro e segundo momento da variável aleatória  $N$ .

### 2.2.1 Cálculo do primeiro momento de $N(\mathbb{E}\{N\})$

Esta seção tem por objetivo computar o primeiro momento da variável aleatória  $N$ . Para isto, veremos a proposição a seguir que nos fornecerá o valor da  $\mathbb{E}\{N\}$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $N$  dado acima. Então, o primeiro momento de  $N$  é dado por*

$$\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!} \quad (2.1)$$

*Demonstração.* Vamos definir uma variável aleatória indicadora  $\mathbb{I}_i$  para cada caminho, conectando a origem ao nível  $h$ , da  $n$ -árvore com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n^h\}$ . Seja a variável aleatória

$$\mathbb{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo caminho for acessível} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Por linearidade da esperança, temos

$$\mathbb{E}\{N\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{I}_i\right\} = \sum_{i=1}^{n^h} (\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\}) = \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1) = \sum_{i=1}^{n^h} \frac{1}{h!} = n^h \cdot \frac{1}{h!} = \frac{n^h}{h!}.$$

□

**Exemplo 2.2.** Considere a Figura 2.1. Para este caso, temos  $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!} = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ .

## 2.2.2 Cálculo do segundo momento de $N$

Esta seção tem por objetivo encontrar um limitante superior para o segundo momento da variável aleatória  $N$ .

**Proposição 2.3.** Seja  $\mathbb{E}\{N^2\}$  o segundo momento da variável aleatória  $N$ . Então,  $\mathbb{E}\{N^2\} \leq \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}$ .

*Demonstração.* Vamos usar as variáveis  $\mathbb{I}_i$  da proposição 2.2. Ou seja,

$$\mathbb{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo caminho for acessível} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Note que, as variáveis aleatórias  $\mathbb{I}_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, n^h\}$ , são dependentes e identicamente distribuídas, tais que  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\} = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i^2\} = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1) = \frac{1}{h!}$ . Agora, considere que  $N = \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{I}_i$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{N^2\} &= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{I}_i\right)^2\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i^2\} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} \\
&= \sum_{i=1}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\}
\end{aligned}$$

Agora, vamos obter uma forma fechada para o correlacionador  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\}$ . Primeiramente, notemos que este correlacionador depende apenas do número de vértices que o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo caminho tem em comum, pois se o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo caminhos não possuem vértices em comum, temos  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} = \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i\} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_j\}$ , por outro lado se o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo caminhos compartilham vértices, temos  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j / \mathbb{I}_j\}\}$ . Note também que para quaisquer dois caminhos  $i$  e  $j$  (com  $i \neq j$ ) que compartilham  $h - k + 1$  vértices,  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\}$  é dado pela probabilidade  $\pi_k$  de ambos os caminhos serem acessíveis, ou seja,  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1) = \pi_k$ . Seja  $x$  o valor atribuído a  $X_v$ , onde  $v$  é o vértice de divergência dos dois caminhos. Notemos que, estes dois caminhos podem ser decompostos em três caminhos menores e independentes, dois de tamanhos  $k$  e um de tamanho  $h - k$  conectados ao vértice  $v$  (veja figura 2.2).

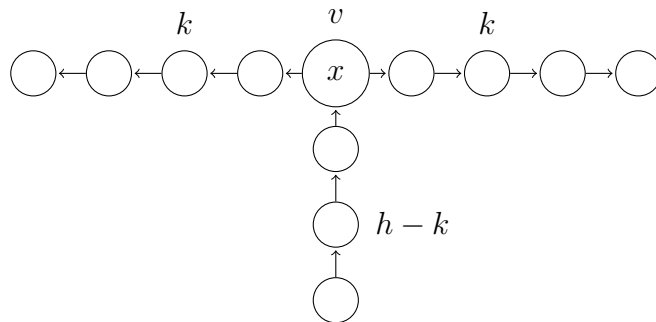


Figura 2.2: A correlação entre dois caminhos depende apenas do número  $h - k + 1$  de vértices que ambos os caminhos têm em comum.

Considerando  $v$  como raiz, todos os vértices que estão mais próximos de  $v$  devem ter um valor atribuído menor que  $x$  e todos os vértices mais próximos aos últimos níveis da árvore devem ter um valor maior que  $x$ . Além disso, todos os valores devem estar

em ordem crescente nesses caminhos menores. Daí, usando o fato de que as variáveis aleatórias tem distribuição uniforme  $(0, 1)$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1 / X_v = x) \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(\mathbb{I}_i = 1; \mathbb{I}_j = 1 / X_v = x) f(x) dx \\
&= \int_0^1 \mathbb{P}(X_1 < X_2 < \dots < X_{h-k-1} < x) \mathbb{P}(x < X_{h-k+1} < \dots < X_h)^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{[F(x)]^{h-k-1}}{(h-k-1)!} \left[ \frac{(1-F(x))^k}{k!} \right]^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{h-k-1}}{(h-k-1)!} \left[ \frac{(1-x)^k}{k!} \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{(h-k-1)!(k!)^2} \int_0^1 x^{h-k-1} (1-x)^{2k} dx \\
&= \frac{B(h-k, 2k+1)}{(h-k-1)!(k!)^2} \\
&= \frac{(h-k-1)!(2k)!}{(h+k)!} \left( \frac{1}{(h-k-1)!(k!)^2} \right) \\
&= \binom{2k}{k} \frac{1}{(h+k)!}
\end{aligned}$$

onde  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$  é uma função beta de Euler.

Para avaliar a soma sobre a correlação entre dois caminhos  $i$  e  $j$  em  $\pi_k$  também é necessário o número  $m_k$  de pares de caminhos que possuem  $h-k+1$  vértices comuns. Este número pode ser avaliado com uma simples combinatória, considerando que: Para o primeiro caminho entre os três na Figura 2.2, digamos o de tamanho  $k$ , qualquer vértice pode ser escolhido, isto é, existem  $n^h$  possibilidades (que é o número de caminhos da árvore). O segundo caminho compartilha  $h-k+1$  vértices, então existem  $n-1$  vértices, que dista 1 de  $x$  em potencial para escolher (se o  $n$ -ésimo vértice, também pertence ao primeiro caminho) e finalmente, pode-se escolher qualquer vértice subsequente até que se alcance o último nível de outro caminho e isso equivale a  $n^{k-1}$  possibilidades. Logo, existem ao todo  $m_k = (n-1)n^h n^{k-1} = (n-1)n^{h+k-1}$  pares diferentes. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{N^2\} &= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n^h} \mathbb{E}\{\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j\} \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \sum_{k=1}^h \pi_k m_k \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \\
&\leq \mathbb{E}\{N\} + \binom{2h}{h} \frac{n^{2h}}{(2h)!} + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}, \text{ pois } \frac{n-1}{n} \leq 1 \\
&= \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\{N^2\} \leq \mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \quad (2.2)$$

□

## 2.3 Probabilidade de existir caminhos acessíveis na $n$ -árvore

Nesta seção, vamos usar o primeiro e o segundo momento da variável aleatória  $N$  para obter informações sobre a existência de caminhos acessíveis na  $n$ -árvore. Vejamos primeiramente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e depois um lema, que relaciona o primeiro e o segundo momento de uma variável aleatória  $X$  que assume valores inteiros  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Lema 2.1** (desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias com segundo momento finito, então  $|\mathbb{E}\{XY\}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{E}\{Y^2\}}$ .*

**Lema 2.2.** *Seja  $X$  uma variável aleatória que assume apenas valores inteiros  $\{0, 1, 2, \dots\}$  com segundo momento finito. Então vale a inequação*

$$\mathbb{E}\{X\} \geq \mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}} \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Por definição da esperança, temos

$$\mathbb{E}\{X\} = \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(X = i) \geq \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) \right] = \mathbb{P}(X \geq 1) \quad (2.4)$$

Agora, vamos mostrar que  $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}$ . Com efeito, usando a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, temos  $\mathbb{E}\{X\} = |\mathbb{E}\{XI_{\{X \geq 1\}}\}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{E}\{I_{\{X \geq 1\}}\}}$ . Logo,  $\mathbb{E}\{X^2\}\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \mathbb{E}\{X\}^2$ . Consequentemente,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}. \quad (2.5)$$

Portanto, a combinação de (2.4) e (2.5) nos fornece o resultado desejado, ou seja,

$$\mathbb{E}\{X\} \geq \mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{X\}^2}{\mathbb{E}\{X^2\}}.$$

□

Como consequência imediata do Lema 2.2, concluímos que combinando as desigualdades (2.2) e (2.3), obtemos

$$\mathbb{E}\{N\} \geq \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}\{N\}^2}{\mathbb{E}\{N^2\}} \geq \frac{\mathbb{E}\{N\}^2}{\mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + S(h)}, \quad (2.6)$$

onde

$$S(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}.$$

Vamos tratar o número de ramificações  $n$  como uma função de  $h$ . Já que vamos distinguir os três casos de crescimento linear, crescimento mais rápido que linear e crescimento mais lento que linear, nós escrevemos

$$n = n(h) = h\alpha(h).$$

Os três casos acima correspondem a:

1.  $\alpha(h) = \alpha = \text{constante}$  (crescimento constante da árvore);
2.  $\alpha(h) \rightarrow \infty$  (expansão muito rápido das laterais); e
3.  $\alpha(h) \rightarrow 0$  (compressão das laterais).

Além disso, suponhamos que  $n(h+1) \geq n(h)$ . Como  $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!}$ , vamos usar a fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

para obter um valor médio para  $N$ . Logo,

$$\mathbb{E}\{N\} \approx \frac{n(h)^h}{\sqrt{2\pi h} h^h e^{-h}} = \frac{[e\alpha(h)]^h}{\sqrt{2\pi h}} \quad (2.7)$$

Pela relação (2.7), concluímos o seguinte:

1.  $\mathbb{E}\{N\} \approx 0$  se  $\alpha(h) \rightarrow 0$  ou  $\alpha(h) \equiv \alpha \leq e^{-1}$
2.  $\mathbb{E}\{N\} \rightarrow \infty$  se  $\alpha(h) \rightarrow \infty$  ou  $\alpha(h) \equiv \alpha > e^{-1}$ .

Primeiro, vamos considerar o caso  $\alpha(h) \rightarrow 0$  para mostrarmos que  $S(h)$  cresce mais lentamente que  $\mathbb{E}\{N\}$ . Para isto, vejamos a proposição a seguir.

**Proposição 2.4.** *Sejam  $S(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}$  e  $\mathbb{E}\{N\} = \frac{n^h}{h!}$ . Então,  $S(h) \cdot \mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq 0$  para  $h$  suficientemente grande. Consequentemente,  $\mathbb{P}(N \geq 1)$  é assintoticamente equivalente a  $\mathbb{E}\{N\}$ .*

*Demonstração.* Aplicando a fórmula de Stirling em  $S(h)$ , obtemos  $\binom{2k}{k} \leq \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}$ , logo

$$\begin{aligned}
S(h) &= \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!} \\
&= \mathbb{E}\{N\} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^k}{(h+k) \cdot (h+k-1) \dots (h+1)}, \text{ aplicando Stirling} \\
&\leq \mathbb{E}\{N\} \sum_{k=1}^{h-1} \frac{(4n)^k}{\sqrt{\pi k} (h+k) \cdot (h+k-1) \dots (h+1)} \\
&= \mathbb{E}\{N\} (x) \left( \frac{1-x^{h-1}}{1-x} \right)
\end{aligned}$$

com  $x = \frac{4n}{h+1}$ . Daí,  $S(h) \cdot \mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq (x) \left( \frac{1-x^{h-1}}{1-x} \right)$ . Logo, para  $h$  suficientemente grande, quando  $x \rightarrow 0$ , concluímos que  $S(h) \cdot \mathbb{E}\{N\}^{-1} \leq 0$ . Ou seja,  $S(h) \rightarrow 0$ . Consequentemente, pela desigualdade (2.6), temos  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(N \geq 1)}{\mathbb{E}\{N\}} = 1$ , i.é,  $\mathbb{P}(N \geq 1)$  é assintoticamente equivalente a  $\mathbb{E}\{N\}$ .

□

Para o caso  $\alpha(h) \rightarrow \infty$  é um pouco mais complicado. Semelhantemente ao caso anterior, mostraremos que  $S(h)$  cresce mais lentamente do que  $\mathbb{E}\{N\}^2$ , o que vai implicar em  $\mathbb{P}(N \geq 1) \rightarrow 1$  quando  $h \rightarrow \infty$ . Para isto, vamos demonstrar a proposição seguir.



**Proposição 2.5.** *Seja a função*

$$\xi(h) = S(h)\mathbb{E}\{N\}_h^{-2} \quad (2.8)$$

*Então,*

$$\xi(h+1) \leq \frac{1 + \xi(h)}{\alpha(h)} \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Consideremos que  $n(h+1) \geq n(h)$  e  $n(h) = h\alpha(h)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \xi(h+1) &= S(h+1)\mathbb{E}\{N\}_{h+1}^{-2} \\ &= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h+1)]^{2(h+1)}} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{[n(h+1)]^{h+k+1}}{(h+k+1)!} \\ &= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h+1)]^{h+1}} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{[n(h+1)]^k}{(h+k+1)!} \\ &\leq \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h)]^{h+1}} \sum_{k=1}^h \binom{2k}{k} \frac{[n(h)]^k}{(h+k+1)!}, \text{ pois } n(h+1) \geq n(h) \\ &= \frac{[(h+1)!]^2}{[n(h)]^{h+1}} \left[ \frac{[n(h)]^h}{(2h+1)(2h)!} \frac{(2h)!}{(h!)^2} + \frac{1}{[n(h)]^h(h+2)} \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{[n(h)]^{h+k}}{(h+k)!} \right] \\ &= \frac{(h+1)^2}{(2h+1)n(h)} + \frac{(h+1)^2(h!)^2}{[n(h)]^{2h+1}(h+2)} S(h) \\ &= \frac{1}{n(h)} \left[ \frac{(h+1)^2}{(2h+1)} + \frac{(h+1)^2(h!)^2}{[n(h)]^{2h}(h+2)} S(h) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha(h)} \left[ \frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} \left( \frac{n(h)^h}{h!} \right)^{-2} S(h) \right], \text{ pois } n(h) = h\alpha(h) \\ &= \frac{1}{\alpha(h)} \left[ \frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} S(h)\mathbb{E}\{N\}_h^{-2} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha(h)} \left[ \frac{(h+1)^2}{h(2h+1)} + \frac{(h+1)^2}{h(h+2)} \xi(h) \right] \\ &\leq \frac{1}{\alpha(h)} (1 + \xi(h)) \\ &= \frac{1 + \xi(h)}{\alpha(h)} \end{aligned}$$

□

Agora, desde que  $\alpha(h) \rightarrow \infty$ , podemos tomar uma constante fixa  $C > 1$  e encontrar  $h_0$  tal que  $\alpha(h) > C, \forall h > h_0$ . Daí, teremos

$$\xi(h+1) \leq \frac{1 + \xi(h)}{\alpha(h)} < \frac{\xi(h)}{C} + \frac{1}{C}, \forall h > h_0.$$

Agora, mostraremos por indução que

$$\xi(h) \leq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \quad (2.10)$$

Para  $k = 1$ , temos  $\frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} = \frac{\xi(h_0)}{C^1} + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{C^1} = \frac{\xi(h_0)}{C} + \frac{1}{C} > \xi(h)$ .

Suponha válido para  $k$ , ou seja,  $\xi(h) \leq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k}$  é verdadeiro. Logo,

$\frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=0}^{h-h_0} \frac{1}{C^{k+1}} \geq \frac{\xi(h_0)}{C^{h-h_0}} + \sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \geq \xi(h)$ . Portanto, a desigualdade (2.10) é verdadeira.

Notemos que quando  $h \rightarrow \infty$ , temos

$$\sum_{k=1}^{h-h_0} \frac{1}{C^k} \rightarrow \frac{1}{C-1}.$$

Portanto, para  $C$  arbitrariamente grande concluímos que  $\xi(h) \rightarrow 0$ . Consequentemente, concluímos pela desigualdade (2.7) que  $\mathbb{P}(N \geq 1) \rightarrow 1$  quando  $h \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.2.** *Suponha que  $n = n(h) = h\alpha(h)$ . Então,*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha(h) \rightarrow 0, \\ 1, & \text{se } \alpha(h) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

*Demonstração.* A demonstração consiste na combinando das proposições 2.4 e 2.5. Portanto, o resultado segue. □

Finalmente, vamos considerar o caso  $\alpha(h) = \alpha = \text{constante}$ . Usando a forma recursiva dada por (2.10), provaremos que  $\xi(h) \leq (\alpha - 1)^{-1}$  com  $\alpha > 1$ . Para isto, veja a proposição a seguir.

**Proposição 2.6.** *Seja  $\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)}$ . Então,  $\xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$  com  $\alpha > 1$ .*

*Demonstração.* Indução sobre  $h$ . Suponha válido para  $h$ , ou seja,  $\xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$ . Devemos mostrar que  $\xi(h+1) \leq (\alpha-1)^{-1}$ . Com efeito,

$$\xi(h+1) \leq \frac{1+\xi(h)}{\alpha(h)} \leq \frac{1+(\alpha-1)^{-1}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} = (\alpha-1)^{-1}.$$

□

**Observação 2.2.** *Notemos que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \xi(h) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} (\alpha-1)^{-1} = (\alpha-1)^{-1}$ . Ou seja,  $\xi(h)$  tem limite finito.*

Agora, demonstraremos o resultado principal para o caso  $\alpha(h) = \alpha = \text{constante}$ .

**Teorema 2.3** (Nowak e Krug.(2013)). *Se  $n = \alpha h$ , com  $\alpha > 0$  uma constante, então*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \begin{cases} = 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ \geq 1 - \alpha^{-1}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos supor que  $\alpha \leq e^{-1}$ . Pela desigualdade (2.6) e a relação (2.7) concluímos que

$$0 \geq \lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \geq 0.$$

Logo,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = 0$ . Agora, suponha que  $\alpha > 1$ . Pela desigualdade (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}(N \geq 1)} &\leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\{N\} + \mathbb{E}\{N\}^2 + S(h)}{\mathbb{E}\{N\}^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\mathbb{E}\{N\}} + 1 + \frac{S(h)}{\mathbb{E}\{N\}^2} \right) \\ &= 1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \xi(h). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{h \rightarrow \infty} \xi(h) \leq (\alpha-1)^{-1}$ , temos  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{P}(N \geq 1)} \leq 1 + (\alpha-1)^{-1}$ . Consequentemente,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) \geq \frac{1}{1+(\alpha-1)^{-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \alpha^{-1}$ .

□

# Capítulo 3

## Discussão

Neste capítulo vamos discutir sobre outros resultados recentes do modelo de percolação. Vamos centralizar a discussão na prova complementar do teorema de Nowak e Krug, e posteriormente sobre o trabalho recente do modelo de percolação na **árvore esfericamente simétrica infinita**.

### 3.1 Discussão

No final do Capítulo 2 enunciamos e provamos o Teorema 2.3. Existe um resultado importante que completa este teorema. Notemos que, no Teorema 2.3 é razoável supor que o limite é uma sequência monótona em  $\alpha$ . Este fato pode ser verificado da seguinte forma: sejam duas árvores  $n$ -árias de altura  $h$ , digamos  $T_1$  e  $T_2$ , associadas aos valores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, com  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Suponhamos que  $T_1$  é subárvore de  $T_2$ . Logo, todo caminho acessível em  $T_1$  também o é em  $T_2$ . Daí, concluímos que  $\mathbb{P}(N_1 \geq 1) \leq \mathbb{P}(N_2 \geq 1)$ . Consequentemente,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_1 \geq 1) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_2 \geq 1)$ . Portanto, podemos supor o limite como uma sequência monótona em  $\alpha$ . Concluímos, devido a monotonicidade da sequência formado por esse limite, que deve existir um valor crítico  $\alpha_c \in [e^{-1}, 1]$ , tal que  $\mathbb{P}(N \geq 1) \rightarrow 0$  para  $\alpha < \alpha_c$  e  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) > 0$  para  $\alpha > \alpha_c$ . Este resultado pode ser encontrado em [2], no teorema de Roberts e Zhao, que diz: Se  $n = \alpha h$ , então  $\alpha_c = e^{-1}$ , i.e.,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \geq 1) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq e^{-1}, \\ 1, & \text{se } \alpha > e^{-1}. \end{cases}$$

Agora, abordaremos alguns resultados mais recentes sobre percolação acessível obtidos em [3]. De acordo com o capítulo 1, uma árvore  $T = (\vartheta, \xi)$  é dita **esfericamente simétrica** se qualquer par de vértices na mesma distância da origem, têm o mesmo grau. O modelo consiste em associar uma variável aleatória contínua  $X_v$  para cada vértice  $v$  da **árvore esfericamente simétrica infinita**. Para o modelo em apreço, tomamos as  $X_v$  como tendo distribuição uniforme  $(0, 1)$  ( $\mathbb{U}(0, 1)$ ). Agora, para cada  $n > 1$ , seja  $\partial T_n = \{v \in \vartheta; |v| = n\}$  e considere  $\Lambda_n := \Lambda_n(T) = \bigcup_{v \in \partial T_n} \{ \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v \}$ . Dizemos que  $N_n$  é o número de caminhos acessíveis conectando a origem ao  $n$ -ésimo nível da árvore  $T$ . Ou seja,  $N_n = |\{v \in \partial T_n; \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v\}|$ . A definição a seguir, caracteriza quando há percolação acessível na **árvore esfericamente simétrica**.

**Definição 3.1.** *Dizemos que há percolação acessível na árvore  $T = (\vartheta, \xi)$  se o evento  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  ocorre com probabilidade positiva.*

**Observação 3.1.** *Note que  $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência decrescente de eventos  $(\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n, \forall n, \Lambda_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$ , então o nosso interesse é estudar  $\theta(T) := \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n)$ .*

**Definição 3.2.** *Seja  $T_1 = (\vartheta_1, \xi_1)$  e  $T_2 = (\vartheta_2, \xi_2)$  duas árvores com comum origem  $\mathbf{0}$ . Nós dizemos que  $T_1$  é sub-árvore de  $T_2$ , denotamos  $T_1 \prec T_2$ , se  $\vartheta_1 \subset \vartheta_2$  e  $\xi_1 \subset \xi_2$ .*

**Lema 3.1.** Se  $T_1 \prec T_2$ , então  $\theta(T_1) \leq \theta(T_2)$ .

*Demonstração.* Basta mostrar que todo caminho acessível conectando  $\mathbf{0}$  a  $\partial T_{1,n}$  também é caminho acessível conectando  $\mathbf{0}$  a  $\partial T_{2,n}$ . Com efeito, seja um caminho acessível  $\mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v$  para algum  $v \in \partial T_{1,n}$ . Como, por hipótese,  $T_1 \prec T_2$ , então  $\mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v$  é caminho acessível em  $T_2$ . Veja as árvores  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente:

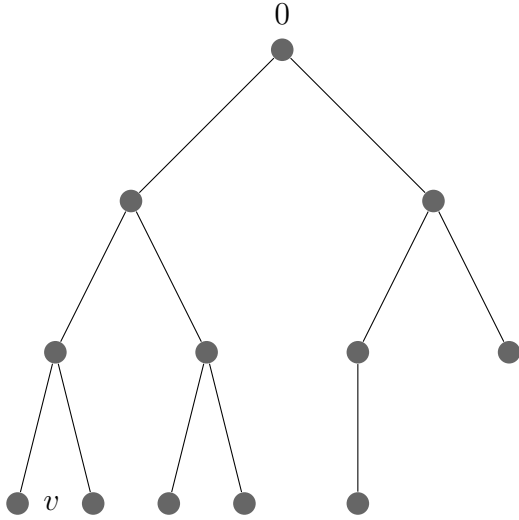


Figura 3.1: árvore  $T_1$

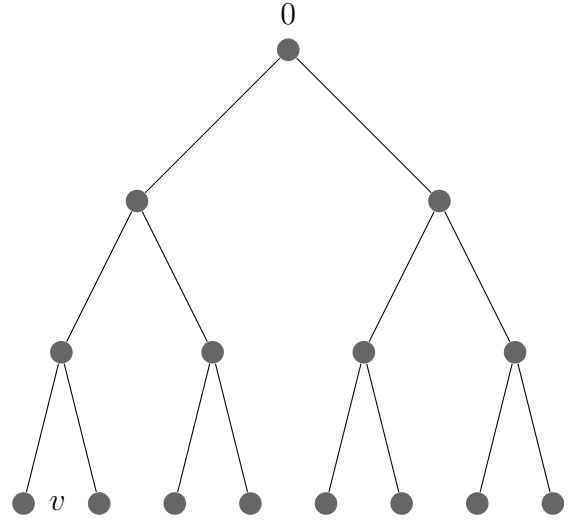


Figura 3.2: árvore  $T_2$

Notemos que as Figuras 3.1 e 3.2 são duas árvores, tais que  $T_1$  é sub-árvore de  $T_2$ . Portanto, como  $\Lambda_n(T) = \bigcup_{v \in \partial T_n} \{ \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v \}$ , temos  $\Lambda_n(T_1) \subset \Lambda_n(T_2)$ . Portanto,  $P(\Lambda_n(T_1)) \leq P(\Lambda_n(T_2))$  implicando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Lambda_n(T_1)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Lambda_n(T_2))$  implicando que  $\theta(T_1) \leq \theta(T_2)$ .

□

**Observação 3.2.**  $\theta(T)$  é uma função não-decrescente em  $T$ .

**Proposição 3.1.** *Seja a árvore  $T_1$ . Então,  $\mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \frac{|\partial T_{1,n}|}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ .*

*Demonstração.* Note que,  $\Lambda_n(T_1) = \bigcup_{v \in \partial T_{1,n}} \{ \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v \}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_n(T_1)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{v \in \partial T_{1,n}} \{ \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v \}\right) \leq \sum_{v \in \partial T_{1,n}} \mathbb{P}(\{ \mathbf{0} \xrightarrow{\text{c.a.}} v \}) \\ &= \sum_{v \in \partial T_{1,n}} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{|\partial T_{1,n}|}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

□

Pela observação 3.1, temos

$$\theta(T_1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ou seja,  $\theta(T_1) = 0$ . Consequentemente, não há percolação acessível na árvore fatorial.

Consideremos a árvore esfericamente simétrica  $T_\alpha$  cuja função de crescimento é dada pela função  $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil$ ,  $i \geq 0$ , ( $\lceil (i+1)^\alpha \rceil = \min\{n \in \mathbb{N}; n \geq (i+1)^\alpha\}$ ) onde  $\alpha > 0$  é uma constante. Pela observação 3.2,  $\theta(\alpha) := \theta(T_\alpha)$  é uma função não-decrescente em  $\alpha$  e o valor crítico

$$\alpha_c := \inf \{ \alpha; \theta(\alpha) > 0 \}$$

está bem definido. O teorema a seguir computa o valor exato onde ocorre a transição de fase para o modelo de percolação acessível em  $T_\alpha$ .

**Teorema 3.3** (Coletti, Gava, R.(2018)). *Seja  $T_\alpha$  tal que  $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil, i \geq 0$ , onde  $\alpha > 0$  é uma constante. Então,*

$$\theta(T_\alpha) \begin{cases} = 0, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ > 0, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

O valor crítico é dado por  $\alpha_c = 1$ .

*Demonstração.* Se  $\alpha = 1$ , então  $f(i) = i + 1$ . Daí,  $T_\alpha = T_1 = T_!$  e já vimos que  $\theta(T_!) = 0$ . Agora, se  $\alpha < 1$ , então  $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil \leq f(i) = i + 1$ . Daí,  $T_\alpha \prec T_!$ . Logo, pelo lema 3.1, temos  $\theta(T_\alpha) \leq \theta(T_!) = 0$ . Portanto,  $\theta(T_\alpha) = 0$  se  $\alpha \leq 1$ . Para  $\alpha > 1$ , devemos fazer uma comparação com o processo de ramificação com seleção cuja sobrevivência implica em percolação acessível em  $T_\alpha$ . Para tanto, vamos usar um resultado que pode ser encontrado em [7], no teorema de Bertacchi, R. e Zucca, que diz: Suponha que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m_i} < \infty$ , e que para algum  $C > 0$  existe  $g : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$  tal que  $(m_n^{(2)})/(m_n^2) \leq g(n)$ , para algum  $n$  suficientemente grande e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(g(n+1)/g(n)) < C$ . Então, o processo de ramificação com seleção (PRS) sobrevive com probabilidade positiva. Portanto, Se  $T$  é esfericamente simétrica com função de crescimento  $f$ , podemos interpretar  $m_i = f(i)$ , para todo  $i \geq 0$  e a condição

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty$$

implica percolação acessível com probabilidade positiva.

□

**Observação 3.3.** *Para uma prova mais detalhada dessa segunda parte do Teorema 3.3 confira [7].*



# Conclusão

Neste trabalho fizemos uma estudo detalhado do artigo [1], destacando os principais conceitos relacionados nesse artigo. Buscamos, em todo tempo, deixar o mais claro possível todos os pormenores de cada conceito e resultados que foram abordados, sempre visando uma melhor compreensão da teoria abordada e suas aplicações. Ainda em relação ao artigo [1], discutimos um resultado da literatura que se encontra em [2] que completa o principal resultado obtido no artigo em questão. Sequencialmente, concluimos com uma discussão sobre os resultados recentes obtidos em percolação acessível tomando por base a teoria desenvolvida em [3]. Discutimos os principais conceitos e os resultados fundamentais que foram obtidos em [3]. Vale ressaltar que em [3] foram estabelecidas novas propriedades do modelo de percolação de acessibilidade em árvores. Contudo, alguns problemas de percolação acessível em árvores permanecem em aberto. Por exemplo, em [3] foi desenvolvida a teoria em cima de árvores esfericamente simétricas e com função de crescimento específica, mas ainda é um problema em aberto obter condições necessárias e suficientes para que exista ou não percolação acessível para uma dada função de crescimento. É fato que, existe uma família inteira de árvores que não valem os resultados obtidos nos artigos [1, 2, 3]. Portanto, é necessário uma busca por novos métodos a serem explorados, que é muito provável o uso do recursos computacionais (simulações numéricas), com o objetivo de resolver estas questões em aberto e que ainda surgirão.

# Referências Bibliográficas

- [1] Nowak, S. and Krug, J., *Accessibility percolation on  $n$ -trees*, *EPL* **101** (2013), 66004.
- [2] Roberts, M. and Zhao, L., *Increasing paths in regular trees*, *Electron. Commun. Probab.* **18** (2013), 1-10.
- [3] Colleti, C. F., Gava, R. J. and Rodriguez, P. M., *On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model*, *Physica A* **492** (2018), 382-388.
- [4] Li, L., *Phase transition for accessibility percolation on hypercubes*, *J. Theor. Probab.* **31** (2018), 2072-2111.
- [5] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L. and Stein, C., *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. Massachusetts Institute of Technology, London-England, 2009.
- [9] Berestycki, J., Brunet, É. and Shi, Z., *The number of accessible paths in the hypercube*, *Bernoulli* **22** (2016), 653-680.
- [7] Bertacchi, D., Rodriguez, P. M. and Zucca, F., *Galton-Watson processes in varying environment and accessibility percolation*, *Braz. J. Probab. Stat. In Press*.
- [8] Krug, J., *Accessibility percolation in random fitness landscapes*, *arXiv:1903.11913* (2019).
- [9] Berestycki, J., Brunet, É. and Shi, Z., *Accessibility percolation with backsteps*, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **14** (2017), 45-62.
- [10] Duque, F., Correa, A. R. and Valencia, L. A., *Accessibility percolation with crossing valleys on  $n$ -ary trees*, *J. Stat. Phys.* **174** (2019), 1027-1037.

- [11] Hegarty, P. and Martinsson, A., *On the existence of accessible paths in various models of fitness landscapes*, *Ann. Appl. Probab.* **24** (2014), 1375-1395.
- [12] Martinsson, A., *Accessibility percolation and first-passage site percolation on the unoriented binary hypercube*, *arXiv:1501.02206* (2015).

