

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ARTES, CIÊNCIAS E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM DE SISTEMAS COMPLEXOS

ANTONIO CARLOS DOS SANTOS JUNIOR

**Agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir da geração de
rankings com correlação fixada**

São Paulo

2023

ANTONIO CARLOS DOS SANTOS JUNIOR

Agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir da geração de rankings com correlação fixada

Dissertação apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos.

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em 16 de março de 2023. A versão original encontra-se em acervo reservado na Biblioteca da EACH/USP e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP (BDTD), de acordo com a Resolução CoPGr 6018, de 13 de outubro de 2011.

Área de Concentração: Modelagem de Sistemas Complexos.

Orientador: Prof. Dr. Esteban Fernandez Tuesta.

São Paulo
2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Artes, Ciências e Humanidades,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)
Brenda Fontes Malheiros de Castro CRB 8-7012; Sandra Tokarevicz CRB 8-4936

Santos Junior, Antonio Carlos dos
Agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir da geração de rankings com correlação fixada / Antonio Carlos dos Santos Junior; orientador, Esteban Fernandez Tuesta. -- São Paulo, 2023.
84 p: il.

Dissertacao (Mestrado em Ciencias) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, 2023.
Versão corrigida

1. Agregação de rankings. 2. Medidas de complexidade econômica. 3. Coeficiente de correlação de Kendall. I. Fernandez Tuesta, Esteban, orient.
II. Título.

Dissertação de autoria de Antonio Carlos dos Santos Junior, sob o título "**Agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir da geração de rankings com correlação fixada**", apresentada à Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-graduação em Modelagem de Sistemas Complexos, na área de concentração Sistemas Complexos, aprovada em 16 de março de 2023 pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

Julgamento: Aprovado

Prof. Dr. Esteban Fernandez Tuesta

Instituição: Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo -

EACH/USP

Presidente

Julgamento: Aprovado

Prof. Dr. Fernando Fagundes Ferreira

Instituição: Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo -

EACH/USP

Julgamento: Aprovado

Prof. Dr. Luís Gustavo Esteves

Instituição: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo - IME-USP

Julgamento: Aprovado

Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Instituição: Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Agradecimentos

A minha esposa, Amanda, por todo o amor, apoio e paciência durante todo o processo até a elaboração desta dissertação, sem o que eu não teria conseguido superar todos os desafios que encontrei pelo caminho.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, em especial Cesar Botura, Pedro Pompeia, Jorge Fernando, Guilherme Vieira, Michelly Santana e Tenente-Coronel Sérgio, que sempre me incentivaram a continuar buscando conhecimento e crescendo profissionalmente. A troca de ideias e o compartilhamento de experiências foram fundamentais para o meu desenvolvimento como pesquisador.

Aos meus colegas da pós-graduação, que compartilharam suas experiências, conhecimentos e momentos enriquecedores durante os estudos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Esteban Fernandez Tuesta, por sua orientação, paciência e sabedoria durante todo o processo. Seus conselhos e críticas construtivas foram cruciais para meu crescimento acadêmico e pessoal.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, Professores Doutores Fernando Ferreira, Luís Gustavo e Pedro Pompeia, e à Prof.^a Dra. Karina Valdivia Delgado, pela disponibilidade em avaliar e contribuir para a minha dissertação. Seus comentários e sugestões foram essenciais para aprimorar o meu trabalho.

Por fim, agradeço a todos os professores, funcionários e colaboradores da universidade, que tornaram possível a minha formação acadêmica. Suas contribuições e dedicação são muito valorizadas.

Resumo

SANTOS JUNIOR, Antonio Carlos dos. **Agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir da geração de rankings com correlação fixada**. 2023. 84 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Artes, Ciências e Humanidades, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023.

Embora muito utilizado como referência, o coeficiente de concordância de Kendall não oferece uma métrica para o caso de ordenamentos incompletos. Nesta dissertação, os objetivos principais consistem em apresentar uma métrica de agregação de rankings e outra métrica de competitividade para sequência de rankings, utilizando como estudos de caso dois rankings ou classificações bibliométricas para instituições: o *Round University Ranking* (RUR) e um ranking gerado do *InCites* a partir do ordenamento de indicadores bibliométricos.

Palavras-chave: Agregação de rankings. Medidas de complexidade econômica. Coeficiente de correlação de Kendall.

Abstract

SANTOS JUNIOR, Antonio Carlos dos. **Aggregation of rankings with measures of economic complexity from the generation of rankings with fixed correlation**. 2023. 84 p. Dissertation (Master of Science) – School of Arts, Sciences and Humanities, University of São Paulo, São Paulo, 2023.

Although widely used as a reference, Kendall's concordance coefficient does not provide a metric for the case of incomplete rankings. In this dissertation, the main objectives are to present a metric for aggregating rankings and another metric for competitiveness for sequences of rankings, using as case studies two bibliometric rankings or classifications for institutions: Round University Ranking (RUR) and a ranking generated from InCites based on the ordering of bibliometric indicators.

Keywords: Ranking aggregation. Measures of economic complexity. Kendall's correlation coefficient.

Lista de figuras

Figura 1 - Grafo de competitividade da família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$	27
Figura 2 - Grafo de competitividade evolutiva da família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$	27
Figura 3 – Redes multiplex e projetada de competitividade evolutiva associadas à família de rankings R	33
Figura 4 – Representação pedagógica do problema de interesse.....	34
Figura 5 – (a) Exemplo de ordenamento de preferência parcial com os blocos top, bottom e intermediário. (b) Ordenamento parcial transformado em relações de comparação em pares.	35
Figura 6 – Representação gráfica de ordenamento parcial com incertezas associadas.....	36
Figura 7 – Visualização de dados referentes a m rankings completos.....	36
Figura 8 - Processo para cálculo de confiabilidade.....	42
Figura 9 - Matriz de coincidência para o exemplo da Tabela 5.....	43
Figura 10 – Mapeamento de uma rede genérica.....	46
Figura 11 – Aplicação de uma transformação T para obtenção de um novo vetor de característica.....	46
Figura 12 – Os 4 tipos de redes complexas e suas transformações.....	47
Figura 13 - Representação da relação entre países e produtos por redes tripartida e bipartida	50
Figura 14 – Representação visual do Algoritmo 1 para geração de séries aleatórias com $\tau = 1/3$	55
Figura 15 – Histograma dos valores de τ amostrados.....	59
Figura 16 - Distribuição de frequência da simulação baseada no Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001) com 1000 amostras.....	62
Figura 17 - Distribuição de frequência da simulação baseada no Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001) com 10.000 amostras.....	62
Figura 18 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do RUR (curvas sobrepostas).....	64
Figura 19 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do RUR (curvas separadas por ano).....	64
Figura 20 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do InCites (curvas sobrepostas).....	70

Figura 21 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do InCites (curvas separadas).....	70
Figura 22 - Grafo de competitividade evolutiva para o ranking RUR.....	72

Lista de tabelas

Tabela 1 – Exemplo de ranking completo.....	18
Tabela 2 – Esquema de referência para determinação dos midranks para cada objeto, dependendo dos parâmetros t , b , k e n	39
Tabela 3 – Síntese dos resultados da aplicação de W para os seis problemas, conforme a abordagem proposta.....	40
Tabela 4 - Matriz $2N$	43
Tabela 5 - Exemplo de matriz 210 com 20 valores.....	43
Tabela 6 - Ranking das primeiras 10 universidades avaliadas pelo RUR em 2011.....	65
Tabela 7 - Pontuações das primeiras 10 universidades avaliadas pelo RUR em 2011.....	65
Tabela 8 - Método de Reflexões.....	66
Tabela 9 - Variação do tau de Kendall em função do número de iterações.....	67
Tabela 10 - Valores de tau de Kendall entre rankings dos indicadores.....	68
Tabela 11 - Comparação entre medidas de agregação e concordância para o ranking RUR....	68
Tabela 12 - Comparação entre medidas de agregação e concordância para o ranking InCites	70
Tabela 13 - Medidas de competitividade para o ranking RUR - 2011 a 2021.....	71

Sumário

1 Introdução.....	13
1.1 Justificativa, objetivos e aplicações.....	16
2 Método.....	18
2.1 Análise da Concordância.....	18
2.2 Métrica de Complexidade Econômica.....	19
3 Revisão da literatura.....	21
3.1 Agregação de rankings.....	21
3.1.1 Classificação dos métodos de agregação de rankings.....	22
3.1.2 Agregação de rankings de Kemeny.....	22
3.1.3 Teorema de Arrow.....	23
3.1.4 Modelo de agregação (ou contagem) de Borda.....	25
3.2 Análise de Competitividade.....	26
3.2.1 Comparação de rankings por redes complexas.....	26
3.2.2 Comparação de séries de rankings com empates.....	30
3.2.3 Ordenamentos parciais.....	33
3.3 Análise de concordância.....	36
3.3.1 Coeficiente de Kendall.....	36
3.3.2 Alfa de Krippendorff.....	40
3.4 Conceitos teóricos sobre redes complexas.....	44
3.4.1 Caracterização de Redes Complexas.....	44
3.4.2 Conceitos básicos sobre redes complexas.....	47
3.5 Complexidade econômica.....	50
3.6 Geração de rankings com Tau de Kendall fixado.....	54
3.6.1 Algoritmo 1.....	55
3.6.2 Algoritmo 2.....	57
3.6.3 Seleção de parâmetros.....	59
4 Resultados.....	61
4.1 Algoritmo desenvolvido para este trabalho.....	61

4.2 Principais pacotes computacionais.....	62
4.3 Estudo de caso 1: agregação de rankings globais de universidades RUR.....	63
4.4 Estudo de caso 2: agregação de rankings bibliométricos INCITES.....	68
4.5 Estudo de caso 3: análise de competitividade.....	71
5 Conclusões.....	73
6 Trabalhos futuros.....	74
REFERÊNCIAS.....	75
ANEXOS.....	80
ANEXO A - Pseudocódigo do Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001).....	80
APÊNDICES.....	81
APÊNDICE A - Algoritmo em R elaborado com base no pseudocódigo do Anexo A.....	81

1 Introdução

A literatura sobre rankings e classificações contém inúmeros exemplos e maneiras de construção, cada uma delas com diferentes propriedades e similaridades. Entre os problemas mais estudados aparecem os de agregação de rankings, os de competitividade e as redes de formação, ligação e adaptação. Alguns exemplos conhecidos são, por exemplo, o estudo dos rankings fornecidos por clientes conforme a preferência de certos produtos, os rankings de m juízes para n objetos, os rankings dinâmicos de sequências de classificações em disputas esportivas, ou rankings de avaliação de performance esportiva ou performance artística.

Neste trabalho, assim como em Criado et al. (2013) e Pedroche et al. (2015), os termos “rankings” e “classificações” são considerados sinônimos.

As distintas formas de modelagem matemática de aspectos como sequências e competitividade de rankings podem ser vistos em Criado et al. (2013), sobre a discretização de métricas contínuas para a construção de limiares de separação entre objetos (PEDROCHE et al. 2015), ou sobre uso do coeficiente de Kendall para ordenamentos parciais e incompletos (FRANCESCHINI; MAISANO, 2020), entre outros.

Segundo Vidmar e Rode (2007), os dados para o cálculo das medidas de concordância são frequentemente coletados em problemas de gestão de recursos humanos, educação, marketing e outros. Candidatos a emprego ou promoção são classificados por executivos, produtos são classificados por especialistas, candidatos a cargos políticos são classificados pela população e muitos outros problemas reais são exemplos de aplicação desse tema.

O estudo de rankings apresenta uma série de abordagens, sendo algumas delas bastante conhecidas na literatura. Por exemplo, o problema de agregação de rankings de Kemeny (*Kemeny Rank Aggregation* – KRA), no campo da Escolha Social, que possui uma gama de aplicações em diferentes áreas como bases de dados e motores de busca. Intuitivamente, dado um conjunto de votos sobre um conjunto de candidatos, esse problema objetiva encontrar um ranking agregado de candidatos que minimize, em geral, a insatisfação em relação aos votos (FIERGOLLA et al., 2023).

Outro exemplo é o modelo de agregação (ou contagem) de Borda, desenvolvido por Jean-Charles de Borda em 1770 e considerado um dos mais antigos e mais conhecidos métodos de agregação de preferências em eleições. Basicamente, esse método consiste na soma das pontuações de cada candidato, com cada posição recebendo uma pontuação

conforme sua classificação, ou seja, posição mais alta com pontuação mais alta (EMERSON, 2013; FRANCESCHINI E MAISANO, 2019).

Na literatura, encontram-se, também, trabalhos que utilizam o Teorema da Impossibilidade de Arrow como base de avaliação para métodos de agregação de rankings. Com base na teoria da escolha social, que advoga ser imprescindível para a democracia a necessidade de se considerarem as preferências individuais nos julgamentos sociais e nas decisões públicas (BELTRAME E MATTOS, 2017), Kenneth Arrow desenvolveu um teorema estabelecendo condições para que uma função de bem-estar social pudesse satisfazer, simultaneamente, a critérios de eficiência e democracia. No entanto, como resultado, constatou-se uma impossibilidade lógica da existência de tal função (ou método de agregação) que atendessem a essas condições (FRANCESCHINI E MAISANO, 2019).

Franceschini e Maisano (2019) abordam o problema de como os designers podem tomar decisões em projetos com múltiplos objetivos, e como as preferências individuais podem ser combinadas em uma preferência coletiva. Esse trabalho relata um experimento para avaliar como as preferências individuais dos designers são combinadas em uma preferência coletiva, utilizando-se a Teoria da Escolha Social de Arrow e a Teoria da Concordância de Designers, mostrando que a preferência coletiva pode ser influenciada por fatores como a ordem de apresentação das opções, a quantidade de opções e a diversidade das opções, e destacando que os resultados podem ser úteis para designers, gerentes de projeto e outros tomadores de decisão, ajudando-os a entender como as preferências individuais podem ser combinadas de forma justa e eficiente em uma preferência coletiva.

Em Franceschini e Maisano (2020), é explorado o problema de tomada de decisões em aplicações de manufatura com base em rankings parciais fornecidos por especialistas (em que nem todos os especialistas podem classificar todos os itens). O trabalho propõe um algoritmo com uma abordagem de otimização baseada em uma técnica de busca iterativa e um modelo de probabilidade que considera a incerteza na classificação de itens pelos especialistas. O algoritmo é projetado para encontrar a melhor solução possível, mesmo com rankings incompletos ou imprecisos, sendo testado em um estudo de caso em que os especialistas fornecem rankings parciais de fornecedores em diferentes critérios. Os resultados mostram que o algoritmo proposto consegue obter soluções que atendem às preferências da maioria dos especialistas e que são robustas à incerteza nos rankings parciais. Nesse trabalho, destaca-se que o algoritmo pode ser aplicado em diversas áreas, como design de produtos, seleção de fornecedores, avaliação de desempenho e classificação de itens, onde é necessário tomar decisões com base em rankings parciais ou imprecisos fornecidos por especialistas.

Franceschini e Maisano (2021) abordam o problema de como combinar múltiplas classificações de produtos em um único ranking, com base na opinião de vários especialistas. Esse trabalho propõe o uso do Coeficiente de Concordância de Kendall para medir a concordância entre as classificações parciais fornecidas pelos especialistas, bem como uma abordagem de otimização baseada em um algoritmo genético para encontrar a melhor combinação de classificações. O método proposto é testado em um estudo de caso com 15 produtos de engenharia, classificados por 6 especialistas em três critérios diferentes. Os resultados mostram que a abordagem proposta consegue encontrar um ranking agregado que representa bem as preferências dos especialistas. O trabalho destaca, também, que o método pode ser aplicado em várias áreas, como design de produtos, avaliação de desempenho, seleção de fornecedores e classificação de itens, onde é necessário combinar múltiplas classificações de especialistas em um único ranking.

Por outro lado, também, estudam-se as sequências de rankings com objetos diferentes a cada ranking, assim como a medida de mudança entre os elementos dos rankings. Criado et al. (2013), por exemplo, apresentam um método para comparar rankings de equipes de futebol, que se baseia na criação de uma rede complexa a partir dos dados de classificação de cada equipe em uma liga. Essa rede é criada conectando-se as equipes com posições semelhantes em diferentes rodadas da liga. Aplicando o método a partir de dados de 4 principais ligas de futebol europeias, esse trabalho faz uma análise comparativa da competitividade entre essas ligas tendo como base medidas de centralidade e modularidade da rede.

A medida de concordância tem interesse não apenas na similaridade ou na proximidade entre elementos em dois ou mais rankings, mas, também, na ordem ou posição dos elementos ou objetos ao longo da sequência de classificações. Se, por exemplo, analisarmos a concordância nas avaliações de um grupo de juízes, as medidas resultantes devem evidenciar posições não aleatórias.

Franceschini e Maisano (2018) se aprofundam na questão da concordância, denotando relacionamentos de preferência aos ordenamentos em que os objetos são posicionados de tal forma que se possa dizer que um objeto é “melhor” do que outro. Denotam também como “indiferença” ao ordenamento em que dois objetos ocupam a mesma posição ou não podem ser discriminados conforme a métrica da construção do ranking, ou, ainda, a “incomparabilidade” entre objetos avaliados, em que não é possível se definir uma posição no ranking. Os autores também discutem a suposição de ordenamentos incompletos ou parciais, em que alguns objetos não tiveram qualquer tipo de avaliação.

A principal medida de concordância foi apresentada em Kendall e Babington-Smith (1939), definida pela observação do julgamento de m juízes sobre n objetos. O exemplo dado por esses autores consiste na classificação dada por um grupo de estudantes sobre um conjunto de poemas em ordem de preferência, perguntando-se se o ranking obtido poderia indicar algum grau de unanimidade, apoiando (ou não) a hipótese de que os estudantes possuíam gostos poéticos similares.

Ainda de acordo com esses trabalhos, o problema colocado de forma mais geral não permite suposições sobre a qualidade com a qual os objetos são classificados. Nenhuma hipótese é feita sobre o fato de essa qualidade ser mensurável. A qualidade é pensada como linear no sentido em que quaisquer dois objetos são coincidentes ou podem ser colocados numa relação “antes e depois”. Uma métrica pode ser imposta nesse espaço linear por convenção, mas a relação entre objetos é invariante sob qualquer transformação que estenda a escala de medição. Em particular, não é condição do problema que o ranking seja baseado numa variável com distribuição paramétrica conhecida.

A possibilidade de aplicação da metodologia de avaliação de concordância, tanto no aspecto prático como no desafio científico, é o principal elemento de motivação para a realização deste trabalho.

1.1 Justificativa, objetivos e aplicações

O presente trabalho tem como objetivo principal a apresentação de uma proposta de agregação de rankings, com base no chamado Índice de Complexidade Econômica (ICE), conforme definido por Hidalgo e Hausmann (2009a), cujo método consiste em encontrar uma medida de participação entre as classificações, de forma a que, quanto maior a participação, maior será a posição do objeto no ranking.

Entre os objetivos específicos temos o da aplicação da medida de agregação para duas classificações: o *Round University Ranking* (RUR), que se trata de um ranking global de universidades, estabelecida por meio de indicadores bibliométricos, e o InCites, que avalia universidades a partir de indicadores de produtividade e performance. A proposta de avaliação consiste na agregação alternativa dos rankings por meio do uso do ICE e, posteriormente, uma comparação do ranking resultante com a agregação original via medidas de concordância, entre as quais o coeficiente de correlação *tau* de Kendall.

Somado a esta agregação, o presente trabalho procura também encontrar as medidas de competitividade entre os rankings finais originais ano a ano para ambas as classificações escolhidas.

O estudo sobre concordância em rankings ou classificações de objetos é um tema de pesquisa consolidado. A ampla gama de aplicações do estudo da concordância em problemas de classificação permite que novos modelos possam ser gerados a partir de problemas reais.

Este trabalho apresenta como objetivo geral o estudo das classificações em termos da sua concordância.

Em relação às aplicações, nota-se que a classificação de objetos pode gerar diversas implicações nos distintos cenários e, quanto maior o grau de importância, maiores os cuidados a serem tomados com as classificações geradas.

2 Método

2.1 Análise da Concordância

A análise de concordância permite verificar se a classificação de objetos gerada a partir de um conjunto de avaliações (podendo ser juízes, indicadores, experts, entre outros) tem ou não um comportamento aleatório ou entrópico, sinalizando que, quanto maior o valor da métrica de concordância, mais afastada estarão as avaliações de um comportamento randômico.

Considere uma classificação formada por n juízes $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ que avaliam m objetos $\{o_1, o_2, \dots, o_m\}$, cujo exemplo é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 – Exemplo de ranking completo

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8	o_9	o_{10}
j_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j_2	4	1	10	9	5	2	6	8	3	7
j_3	5	2	3	4	7	6	10	9	8	1
j_4	8	4	5	6	10	7	3	2	1	9
j_5	3	4	9	2	1	5	6	7	10	8
j_6	2	6	9	1	7	10	3	8	4	5
j_7	1	3	2	5	4	7	6	10	9	8
j_8	2	5	1	8	7	3	10	4	9	6

Se os valores da matriz apresentada na Tabela 1 trata-se de pontuações ou valores de uma métrica contínua, estas pontuações podem gerar uma classificação em que será possível estabelecer uma distância métrica entre dois objetos quaisquer do conjunto (observa-se que, dependendo do modelo de ponderação, os resultados serão diferentes). Deixando de lado as pontuações, esta classificação pode também gerar um ranking ordinal.

A fim de se estudar o problema em pauta, optou-se por modelá-lo a partir dos conceitos sobre complexidade econômica (que, na versão original, propõe uma estrutura de rede, onde os nós correspondem aos países e produtos, e as arestas, às interações entre esses nós). No contexto tradicional, segundo Hidalgo (2021), métricas de complexidade econômica têm sido utilizadas para se avaliar o impacto das estruturas econômicas em resultados como crescimento econômico, desigualdade de renda, emissões de gases do efeito estufa, emprego e concentração espacial de atividades econômicas, ou seja, valores expressos em quantidades (variáveis quantitativas).

Ainda que sejam definidas pontuações (ou escores) a partir das quais os rankings são consolidados, independentemente do método para obtenção dos resultados, nem sempre esses valores quantitativos estão disponíveis para consulta, motivo pelo qual um dos objetos de estudo neste trabalho são os estudos dos rankings ordinais.

2.2 Métrica de Complexidade Econômica

A Medida de Complexidade Econômica pode se basear, também, na abordagem de concentrações de empregos industriais e ocupacionais, conforme visto em Mealy, Farmer e Teytelboym (2019). Esse trabalho utiliza dados da *Business Register and Employment Survey* (BRES), do Reino Unido, relativos ao ano de 2011, e apresenta uma matriz binária região-indústria W com base no quociente de locação (LQ) de uma região r em uma indústria i :

$$LQ_{ri} = \frac{e_{ri} / \sum_i e_{ri}}{\sum_r e_{ri} / \sum_r \sum_i e_{ri}}, \quad (1)$$

onde e_{ri} se refere ao número de pessoas empregadas na indústria i na região r e $W_{ri} = 1$ se $LQ_{ri} > 1$ e $LQ_{ri} = 0$, caso contrário. Como descrito nesse trabalho, é possível observar que essa equação é análoga à equação referente à Vantagem Comparativa Revelada - VCR (ou *Revealed Comparative Advantage* - RCA), definido em Hidalgo e Hausmann (2009).

Mealy, Farmer e Teytelboym (2019) demonstram, também, que o Método de Reflexões proposto por Hidalgo e Hausmann (2009a) é equivalente, nessa abordagem, a encontrar autovalores de uma matriz \widehat{W} , cujas linhas e colunas correspondem às autoridades locais. Sendo assim, é possível calcular o ICE para essas autoridades locais, baseado em indústrias, encontrando-se o autovetor associado ao segundo maior autovalor de \widehat{W} .

A partir de dados do censo para os EUA, fornecidos por *Integrated Public Use Microdata Series* (IPUMS), relativos ao ano de 2010, Mealy, Farmer e Teytelboym (2019) aplicam a mesma metodologia para calcular o ICE para alguns estados norte-americanos, com base em ocupação. A base para essa aplicação foi a construção de uma matriz ocupação-estado utilizando LQ do estado s na ocupação i .

Neste trabalho, identificam-se os elementos da matriz de avaliações, adaptando-se ao problema real os elementos da proposta original de Hidalgo e Hausmann (2009). As posições

dos objetos dentro das classificações são convertidas em valores numéricos atribuindo o valor para o primeiro elemento o número total de objetos na classificação, com decréscimo unitário para cada objeto na classificação. Havendo empates, ambos os elementos empatados receberão o mesmo valor e o próximo objeto na classificação, o valor correspondente à posição.

Os valores ordinais, que expressam os rankings, são transformados em quantidades, invertendo-se a sequência das classificações. Por exemplo, um determinado ranking $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é convertido no vetor de quantidades $Q = \{5, 4, 3, 2, 1\}$.

Tal adaptação se baseia na lógica de considerar que cada juiz atribui pesos aos objetos avaliados em ordem decrescente de importância, ou seja, quanto maior o peso atribuído, maior a classificação do objeto.

Para mensurar a robustez das medidas de concordância utilizadas para as diferentes classificações, fez-se necessário obter um conjunto de rankings, gerados a partir de simulações, definidos segundo um coeficiente de correlação *tau* de Kendall conhecido. Para isso, foram elaborados dois algoritmos em linguagem *R* com base em Arndt e Magnotta (2001): um para geração de vetores tronco por meio de permutações de valores de 1 a K_0 (que representa a quantidade de elementos desse vetor); outro para implementação do Algoritmo 2, conforme visto na seção 3.6.1.2 deste trabalho.

3 Revisão da literatura

Neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica relativa a trabalhos sobre conceitos teóricos envolvidos neste trabalho.

3.1 Agregação de rankings

Segundo Lin (2010), métodos baseados em classificação (ou rankings) são frequentemente usados em análise estatística, especialmente em abordagens não-paramétricas. Segundo a autora, uma vantagem da utilização desses métodos, principalmente em relação à análise de dados a partir de diferentes experimentos biológicos, é que os rankings permanecem invariantes a transformação e normalização, desde que os ordenamentos relativos sejam preservados. Além disso, métodos baseados em rankings demonstram robustez a *outliers*, embora algumas informações sejam inevitavelmente perdidas em comparação aos métodos baseados no tamanho do efeito.

Franceschini e Maisano (2019) apresentam duas razões para a grande difusão, na literatura científica, sobre problemas de tomada de decisão baseados em rankings: (i) rankings são, provavelmente, a forma mais efetiva e intuitiva para representar julgamentos de preferência, e (ii) rankings não exigem uma escala de referência comum, seja numérica, linguística ou ordinal.

Conforme Franceschini e Maisano (2021), a agregação de rankings constitui um problema comum em várias áreas do conhecimento, o qual consiste basicamente em se agregarem múltiplos rankings ordinais de um conjunto de alternativas em um ranking coletivo. Pode-se formular a questão considerando m agentes de decisão (D_1 a D_m) que formam seus rankings individuais de n objetos (O_1 a O_n). No caso mais simples, os rankings são completos, ou seja, cada agente consegue ordenar todos os objetos de interesse, sem omitir nenhum, e cada ranking pode ser decomposto em comparações por pares de estrita preferência ($O_1 > O_2$ ou $O_1 < O_2$) e/ou indiferença ($O_1 \sim O_2$).

O desafio nesse tipo de problema é obter uma agregação dos rankings individuais para refleti-los com confiabilidade tanto quanto possível, mesmo quando haja divergência de preferências. Por esta razão, o ranking coletivo é frequentemente definido como ranking social, de consenso ou de compromisso.

3.1.1 Classificação dos métodos de agregação de rankings

Segundo Lin (2010), os métodos de agregação de rankings podem ser divididos em três categorias: algoritmos baseados em distribuição, heurísticos e de otimização estocástica.

Algoritmos de otimização são, normalmente, dependentes da medida de distância. Um exemplo é a agregação ótima de Kemeny, que otimiza as distâncias médias de Kendall entre um agregado candidato e cada uma das listas de entrada (LIN, 2010). No entanto, esse trabalho alerta sobre o fato de que computar o agregado ótimo de Kemeny é NP-difícil mesmo havendo um número pequeno de rankings individuais a serem agregados.

Uma alternativa é um grupo de algoritmos que fornecem soluções aproximadas, sem visar otimização de qualquer critério, os quais são heurísticos por natureza com propriedades desconhecidas. Embora esses algoritmos sejam bem efetivos em algumas aplicações, eles podem não ter um desempenho tão bom comparados ao algoritmo de busca estocástica em relação aos critérios das diretrizes generalizadas de Kemeny.

Ainda segundo Lin (2010), o problema de agregação de rankings pode ser dividido em duas categorias: agregar muitas listas curtas ou agregar algumas listas longas. Métodos para agregação de rankings surgiram pela primeira vez para resolver o primeiro tipo; as classificações de consumidores de produtos, por exemplo, enquadram-se nessa categoria.

O problema de agregar algumas listas longas foi apresentado pela primeira vez na agregação de resultados de mecanismos de busca na Internet. Este problema foi abordado, principalmente, a partir da perspectiva da Ciência da Computação, e vários algoritmos heurísticos baseados em cadeia de Markov foram propostos para aliviar a carga computacional associada à natureza NP-difícil do problema. Problemas semelhantes surgiram na Bioinformática, onde resultados de diferentes experimentos ômicos (na mesma ou em diferentes plataformas tecnológicas e no mesmo ou em diferentes aspectos do sistema biológico) precisaram ser conciliados e consolidados.

3.1.2 Agregação de rankings de Kemeny

Conforme Fiergolla et al. (2023), eleger comitês ou encontrar uma classificação que concorde tanto quanto possível com um conjunto de votos constituem-se como problemas-chave no campo da Escolha Social. Um dos problemas mais estudados nessa área é o problema de agregação de rankings de Kemeny (*Kemeny Rank Aggregation – KRA*), no

qual, conforme visto anteriormente, é dado um conjunto de votos sobre um conjunto de candidatos e a tarefa é encontrar um ranking dos candidatos que maximize a satisfação dos eleitores. Os autores citam que o problema é relevante em uma variedade de áreas diferentes, como busca por similaridade e classificação em bancos de dados de alta dimensão, construção de mapas genéticos em Bioinformática, agregação de resultados de busca e detecção de spam em um mecanismo de busca, entre outras.

Ainda segundo os autores, o problema KRA é NP-completo e permanece NP-difícil quando restrito a apenas quatro votos, motivando estudos de heurísticas e algoritmos de aproximação para KRA. A relevância prática no campo da inteligência artificial também é destacada pelos autores por uma série de estudos experimentais de heurísticas e aproximações do problema, além de estudos experimentais de limites inferiores para soluções exatas de KRA.

Formalmente, Fiergolla et al. (2023) definem a KRA da seguinte forma: considerando um conjunto finito C de candidatos, um voto (ou ranking) π sobre C é uma ordem total sobre C . Se, para dois candidatos $a, b \in C$, o candidato a aparece como mais bem classificado em relação a b no ranking π , tem-se $a <_{\pi} b$. Sendo assim, o menor candidato a conforme $<_{\pi}$ é o vencedor do ranking π , ocupando, assim, a posição 1 nesse ranking.

Para dois rankings π_i e π_j , o número de pares de candidatos ordenados de forma diferente nesses rankings é chamado distância *tau* de Kendall de π_i e π_j , descrita como:

$$\text{KT-distância}(\pi_i, \pi_j) = \left| (c_1, c_2) \in C \times C \mid c_1 <_{\pi_i} c_2 \wedge c_1 >_{\pi_j} c_2 \right|. \quad (2)$$

Dado um ranking π sobre C e um conjunto Π de rankings sobre C , o escore Kemeny de π em relação a Π é a soma das distâncias *tau* de Kendall entre π e cada $\pi_i \in \Pi$. O objetivo do KRA é computar um ranking $\pi_{min} \in C$ com o menor escore Kemeny possível. Tal ranking é chamado ranking de Kemeny.

3.1.3 Teorema de Arrow

Segundo Franceschini e Maisano (2019), o Teorema de Arrow define os chamados *critérios de justiça*, que funcionam como fundamentos para que um modelo de agregação possa ser devidamente avaliado:

1. Domínio irrestrito (universalidade): o modelo de agregação deve ser definido para quaisquer problemas, independentemente do número de agentes de tomada de decisão, do número de alternativas e de qualquer composição de classificações de preferência sobre alternativas;
2. Não-ditadura: o modelo de agregação não pode retornar sempre o mesmo ranking de preferência de um determinado agente de tomada de decisão (chamado ditador);
3. Independência de alternativas irrelevantes: a preferência coletiva entre duas alternativas x e y deve depender apenas das preferências relativas entre x e y nos rankings individuais;
4. Monotonicidade (fraca): Se algum agente decisório modificar seu ranking de preferência promovendo uma determinada alternativa, então o ranking de preferência coletiva deve refletir a promoção da mesma alternativa ou sua posição inalterada;
5. Eficiência de Pareto (unanimidade): se todos os agentes decisórios preferem x a y , então o ranking coletivo também deve preferir x a y .

No entanto, ainda conforme Franceschini e Maisano (2019), o Teorema de Arrow afirma que, baseado em previsões (e não em resultados reais), não se pode obter um modelo de agregação que reflita de forma mais consistente os rankings de preferência pelos agentes tomadores de decisão, pois nenhum modelo pode atender sempre a todos os critérios definidos acima. Sendo assim, a classificação coletiva resultante se torna imperfeita devido à imperfeição do modelo de agregação. De fato, essa imperfeição pode depender, em parte, além do próprio modelo, dos rankings individuais, e esses fatores não são facilmente distinguíveis.

Franceschini e Maisano (2019) citam exemplos na literatura científica sobre modelos de agregação que apresentam certa efetividade, embora não satisfaçam alguns dos critérios de justiça de Arrow. Apesar disso, embora esse teorema apresente um considerável problema teórico, as implicações práticas, geralmente, não são tão preocupantes. Vale ressaltar que esse teorema considera como premissa o fato de se lidar com rankings completos, ou seja, todos os m agentes decisórios avaliam todos os n objetos, como visto anteriormente.

3.1.4 Modelo de agregação (ou contagem) de Borda

Um dos modelos tratados por Franceschini e Maisano (2019) é o modelo de agregação de Borda, que não atende ao critério de independência de alternativas irrelevantes, fato que não interfere nas alternativas preferidas dentro dos rankings.

Segundo Emerson (2013), em 1435, sobre o tema da eleição do Sacro Imperador Romano, o cardeal Nicholas de Cusa (ou Cusanus) propôs um sistema em que cada eleitor atribuiria um número variando entre 1 e o número total de candidatos. Assim, havendo, por exemplo, 10 candidatos, o melhor teria o número 10 após o nome, e o pior teria o número 1, ou, na forma matemática, teria-se a sequência $(n, n - 1, \dots, 1)$. Nesse sistema, ao somarem-se os votos, o candidato que obtivesse o maior número de pontos seria eleito.

Ainda segundo esse trabalho, o engenheiro militar Jean Charles de Borda, promovendo uma análise científica ao método de Cusanus, definiu o seguinte procedimento: numa lista de alternativas (ou candidatos), partindo da última preferência, seriam atribuídos pontos conforme a regra $a, a + b, a + 2b, \dots$, com $a = b = 1$. Assim, em uma votação individual de n candidatos, o último classificado do eleitor receberia 1 ponto, o penúltimo, 2 pontos, e assim por diante, até a primeira preferência que, em uma votação completa, obteria n pontos. Sendo assim, a classificação de n candidatos seria, do menos ao mais preferido, $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Emerson (2013) cita, ainda, a sequência $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$, ou seja, considerando o menos preferido com pontuação 0, uma variação do método de Cusanus comumente aceito na literatura. Um exemplo de aplicação dessa variação é apresentado por Franceschini e Maisano (2019).

É possível encontrar na literatura, também, aplicações da contagem de Borda na forma ordinal, isto é, o mais preferido receberia 1 ponto, o segundo mais preferido, 2 pontos, e assim por diante. Um exemplo dessa aplicação pode ser vista em Franceschini e Maisano (2021). Neste caso, no processo de agregação, ou seja, pela soma dos votos, o vencedor obteria o menor número de pontos.

3.2 Análise de Competitividade

3.2.1 Comparação de rankings por redes complexas

Criado et al. (2013) apresentam uma técnica para comparar rankings usando algumas medidas derivadas da Teoria dos Grafos, analisando o nível de competitividade das quatro maiores ligas de futebol europeias nas temporadas 2011-2012 e 2012-2013: a alemã *Fußball-Bundesliga* (ou simplesmente, *Bundesliga*), a italiana *Lega Serie A*, a espanhola *Liga BBVA* e a britânica *Barclays Premier League*.

Os autores propõem uma medida de competitividade para n objetos $N = 1, 2, \dots, n$, chamados também de nós, que compõem uma sequência de rankings, denotados por $R = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$, em que o par de nós $(i, j) \in N$ competem se existe $t \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$ tal que i e j trocam suas posições relativas entre rankings consecutivos c_t e c_{t+1} . O grafo de competitividade da família de rankings R , denotado como $G_c(R) = (N, E_R)$, onde E_R se refere ao conjunto de arestas, é um grafo não direcionado com nós N e links entre os nós i e j para o caso em que (i, j) competem.

Por exemplo, considerando um conjunto com 6 nós, rotulados de 1 a 6, e os seguintes rankings:

$$c_1: (1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$c_2: (1, 3, 4, 2, 5, 6),$$

$$c_3: (1, 2, 5, 3, 4, 6),$$

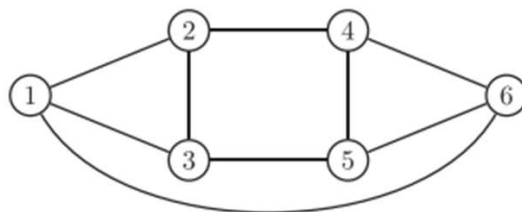
$$c_4: (3, 2, 6, 1, 5, 4),$$

onde a posição do ranking é dada da esquerda para a direita. Nesse sentido, por exemplo, o ranking c_4 possui o nó 3 com a maior posição, o nó 2 com a segunda maior posição, e assim por diante. O grafo de competitividade desse conjunto de nós e a família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ é mostrado na Figura 1.

Criado et al. (2013) definem, também, o grafo de competitividade evolutiva $G_c^e(R) = (N, E_R^e)$, que se trata de um grafo não direcionado ponderado com nós N e arestas dadas pela seguinte regra: há uma aresta entre os nós i e j , rotuladas com peso k , se (i, j) competem k vezes, ou seja, trocam de posição entre k rodadas consecutivas. O grafo de

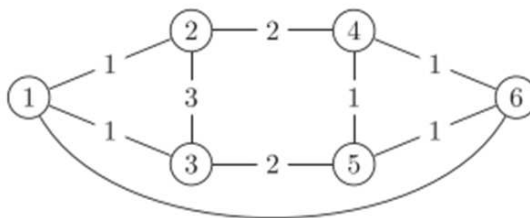
competitividade evolutiva do conjunto de nós $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ é mostrado na Figura 2.

Figura 1 - Grafo de competitividade da família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$.



Fonte: Criado et al (2013)

Figura 2 - Grafo de competitividade evolutiva da família de rankings $R = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$.



Fonte: Criado et al (2013)

Criado et al. (2013) consideram alguns parâmetros pertinentes a redes complexas como medidas de competitividade. São elas:

1. Grau médio normalizado: soma de todos os graus dos nós no grafo de competitividade $G_c(R)$ dividido pela soma de todos os nós de seus graus mais altos possíveis:

$$ND(R) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \in N} k_i, \quad (3)$$

onde k_i é o número de vizinhos do nó i . Este parâmetro provê uma ideia global sobre o número relativo de vezes que dois possíveis concorrentes trocaram suas respectivas posições através da família de rankings correspondente. Diz-se que R é mais competitivo que S com respeito ao grau médio normalizado se $ND(R) > ND(S)$.

2. Força média normalizada: a força de um nó em um grafo ponderado é a soma dos pesos de suas arestas incidentes. A força média normalizada de uma família de rankings R é definida como a soma de todos os pesos das arestas no grafo de competitividade evolutiva $G_c^e(R)$ dividida pela soma de todas as arestas possíveis de seus pesos mais altos:

$$NS(R) = \frac{w(E_R^e)}{C_{n,2}(r-1)}, \quad (4)$$

onde $w(E_R^e)$ e $C_{n,2}$ a combinação de n nós em pares, denota a soma de todos os pesos das arestas do grafo de competitividade evolutiva e . Diz-se que R é mais competitivo que S com respeito à força média normalizada se $NS(R) > NS(S)$.

3. Coeficiente de clustering (ou agrupamento): dada uma família de rankings R , o coeficiente de clustering de R é a média dos coeficientes de clustering dos nós do grafo de competitividade $G_c(R)$:

$$C(R) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} C_i, \quad (5)$$

onde C_i se refere ao coeficiente de clustering de um nó, calculado como:

$$C_i = \frac{e_i}{C_{k_i,2}}, \quad (6)$$

sendo $C_{k_i,2}$ o número de pares conectados entre os vizinhos do nó i , e o denominador representando todos os pares possíveis de vizinhos de i . Diz-se que R é mais competitivo que S com respeito ao coeficiente de clustering se $C(R) > C(S)$.

4. Coeficiente de correlação de Kendall generalizado: consiste no número de pares que não competem $\widehat{K}(R)$ menos o número de pares que competem $K(R)$, dividido pelo número de todos os pares possíveis

$$\tau(R) = \frac{\widehat{K}(R) - K(R)}{C_{n,2}} = 1 - \frac{2|E_R|}{C_{n,2}} = 1 - \frac{4|E_R|}{n(n-1)} \quad (7)$$

5. Coeficiente de correlação de Kendall evolutivo: coeficiente de correlação de Kendall que considera o número de vezes que cada par de nós competem

$$\tau_e(R) = 1 - \frac{2w(E_R^e)}{C_{n,2}(r-1)}, \quad (8)$$

onde $w(E_R^e)$ denota a soma de todos os pesos das arestas do grafo de competitividade evolutiva e $C_{n,2}(r-1)$ representa a soma de todas as arestas possíveis de seus maiores pesos possíveis.

Esse coeficiente está diretamente relacionado à força normalizada da família de rankings R :

$$\tau_e(R) = 1 - 2NS(R). \quad (9)$$

Diz-se que R é mais competitivo que S com respeito ao coeficiente de correlação de Kendall evolutivo se $t_e(R) < t_e(S)$. Neste caso, quanto menor o coeficiente de Kendall $t_e(R)$, menos competitivo é o ranking R .

Criado et al (2013) estabelecem comparações estáticas e dinâmicas entre os parâmetros pertinentes a essas redes, esclarecendo que isso se configura como um exemplo, abrindo a possibilidade de utilização de outras medidas estruturais em estudos futuros, com o intuito de se analisarem diferentes propriedades e relacionamentos.

Os autores também estabelecem comparações entre o método desenvolvido por eles e outros métodos ou técnicas utilizados normalmente para análise do equilíbrio competitivo, o que, no campo dos rankings esportivos, mede o grau de incerteza sobre o resultado de uma competição.

Um dos métodos para o cálculo das distâncias entre objetos em classificações é o *Adjusted Churn*, apresentado por Mizak, Neral e Stair (2007). A métrica Churn é definida como:

$$C_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_{i,t} - c_{i,t-1}|, \quad (10)$$

onde $c_{i,t}$ é o ranking da equipe i na temporada t .

O Adjusted Churn é definido como

$$C_{ad} = \frac{C_t}{C_{tmax}}, \quad (11)$$

onde C_{tmax} é o máximo valor de C_t dada uma liga de n equipes.

Este índice indica o equilíbrio competitivo. Por exemplo, se dois rankings não se alteraram, então $C_t = 0$. Considera-se que altos valores de C_t implicam altos valores de equilíbrio competitivo. Criado et al. (2013) apresentam a comparação entre os valores de *Adjusted Churn* e o coeficiente de correlação de Kendall para as quatro ligas analisadas. Os coeficientes identificam a liga que apresenta o maior nível de competitividade nas temporadas consideradas, visto que obteve o maior valor de C_{ad} e o menor valor de τ .

De forma geral, Criado et al. (2013) enfatizam que, embora um grafo de competitividade associado a uma família de rankings seja muito útil para esse tipo de análise, podem ser obtidas diferentes conclusões dependendo do tipo de métrica utilizada.

3.2.2 Comparação de séries de rankings com empates

Pedroche et al. (2015) estudam a avaliação de séries de rankings por meio de redes complexas, utilizando como estudo de caso o índice IBEX-35 (mercado de ações espanhol) no período de 2003 a 2013. A grande motivação para esse trabalho foi estudar a computação de um ranking de consenso (ou agregado) que melhor resumisse uma série de rankings. A pesquisa feita por esses autores indicou que os estudos interessados em obter um ranking de consenso frequentemente definiam uma distância para estabelecer apropriadamente seu objetivo, ou seja, um ranking que minimizasse tal distância. E uma das mais bem-sucedidas abordagens para medir a distância entre dois rankings é baseada no número de permutações (ou cruzamentos) que ocorrem quando um elemento passa de um ranking para outro. Esses autores se interessaram especialmente pelos cruzamentos que ocorrem entre sucessivos rankings quando há empates.

Pedroche et al. (2015) definem o ranking com empates da seguinte forma: dado um conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$, um ranking com empates de N é uma ordem fraca $<_r$ em N , ou seja, é uma relação binária em N tal que:

1. $<_r$ é reflexiva, isto é, $i <_r i$ para qualquer $i \in N$;
2. $<_r$ é transitiva, isto é, se $i <_r j$ e $j <_r k$, então $i <_r k$;
3. $<_r$ é total, isto é, se $i \neq j \in N$, então $i <_r j$ ou $j <_r i$.

Se r é um ranking com empates, e há dois elementos $i \neq j \in N$, diz-se que i e j estão empatados se $i <_r j$ e $j <_r i$.

Esses autores afirmam que muitas vezes, em problemas reais, os rankings (com ou sem empates) de um conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$ são estabelecidos a partir de uma função numérica que “pesa” a relevância de cada elemento de N . Essa função é chamada *score* e é definida por Pedroche et al. (2015) a partir de um dado conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$; neste caso, um score (ou classificação) de N é uma função $s : N \rightarrow \mathbb{R}$.

É possível observar que s induz um ranking (com ou sem empates) $r = r_s$ dado para cada par de elementos $i, j \in N$ da seguinte forma:

$$i <_r j \Leftrightarrow s(i) \geq s(j)$$

Grosso modo, o ranking é a versão qualitativa de um ordenamento e o score, sua versão quantitativa.

É importante notar que r é um ranking sem empates se, e somente se, o escore s é injetivo, considerando que dois diferentes elementos $i \neq j \in N$ estão empatados em um ranking r_s se, e somente se, $s(i) = s(j)$. Isto faz com que a existência de empates em rankings da realidade possam ser muito instáveis, pois, se o ranking é dado por um escore empírico com valores não inteiros, os empates poderiam desaparecer por erros de arredondamento. Para evitar esse problema, Pedroche et al. (2015) sugerem considerar empates aproximados, quando os escores de dois elementos estão abaixo de um pequeno limiar de precisão, a partir da seguinte definição.

Dados um conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$, um escore $s : N \rightarrow R$ e $\Delta x \in (0, +\infty)$, definem-se os intervalos de precisão $[L_1, L_2)$, $[L_2, L_3)$, ..., $[L_{\hat{n}}, L_{\hat{n}+1})$, onde:

1. $\hat{n} = \left\lfloor \frac{M-m}{\Delta x} + 1 \right\rfloor$, com $M = \max\{s(i); i \in N\}$, $m = \min\{s(i); i \in N\}$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função *floor*,
2. $\delta x = \frac{M-m+\Delta x}{\hat{n}}$,
3. $L_1 = m - \frac{\Delta x}{2}$,
4. $L_i = L_1 + (i-1)\delta x$, para todo $2 \leq i \leq \hat{n} + 1$.

O ranking com empates aproximados associados ao escore s e ao limiar de precisão Δx é o ranking \prec , também denotado por $\prec_{s, \Delta x}$, tal que, se $i \neq j \in N$:

1. $i \prec j$, mas $j \not\prec i$ se, e somente se, há $1 \leq k < \ell \leq \hat{n}$ tal que $s(j) \in [L_k, L_{k+1})$ e $s(i) \in [L_\ell, L_{\ell+1})$,
2. i e j estão empatados se há $1 \leq k \leq \hat{n}$ tal que $s(i), s(j) \in [L_k, L_{k+1})$.

Os autores explicam que a ideia intuitiva por trás desse formalismo é considerar empates entre elementos cujos escores estão abaixo de um limiar de precisão fixado.

A partir desses conceitos e definições básicas, somados aos conceitos sobre redes de competitividade e redes evolutivas de competitividade apresentados por Criado et al. (2013), Pedroche et al. (2015) apresentam o conceito de redes multiplex associadas a uma família de rankings, alguns deles com empates entre seus nós. Os autores estendem a noção da distância de Kendall com penalidade e mostram que ela também pode ser computada considerando a rede multiplex projetada associada. Os autores relacionam, também, a clássica noção de força média normalizada de tal rede com a extensão da distância de Kendall. Neste sentido, os autores apresentam as seguintes definições.

1) Distância de Kendall evolutiva

Trata-se de uma extensão da noção da distância de Kendall $K^{(p)}$ dada por Fagin et al. (2006). Dado um conjunto de n nós $N = \{1, \dots, n\}$, $\alpha \in [0, +\infty)$, $p \in [0, 1/2]$ e uma família finita de rankings com empates $R = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de N , a distância de Kendall evolutiva com parâmetro de penalidade p é dada por

$$K_{ev}^{(p)}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \sum_{i=1}^{m-1} K^{(p)}(\sigma_i, \sigma_{i+1}). \quad (12)$$

2) Rede multiplex evolutiva de competitividade

Sejam $\alpha, p, q, \gamma \geq 0$ quatro parâmetros dados. Dado um conjunto de n nós $N = \{1, 2, \dots, n\}$ e uma família finita de rankings com empates $R = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de N , a rede multiplex evolutiva de competitividade, denotada por $M_G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, contém quatro camadas, chamadas *crossing layer*, *semi-crossing layer*, *long-term-crossing layer* e *tie layer* (esses termos foram mantidos em inglês para facilitar o entendimento). Todas essas camadas possuem n nós e as arestas em cada camada são dadas conforme segue:

- Camada 1 (*crossing layer*): arestas com peso $k\alpha$ quando o cruzamento ocorre entre rankings adjacentes;
- Camada 2 (*semi-crossing layer*): arestas com peso kp quando o cruzamento é uma mudança de uma situação de empate para não-empate ou vice-versa;
- Camada 3 (*long-term-crossing layer*): arestas com peso kq quando o cruzamento ocorre após um período de empates consecutivos;
- Camada 4 (*tie layer*): arestas com peso $k\gamma$ quando há uma situação de empate entre dois elementos em dois rankings consecutivos.

3) Rede projetada de competitividade evolutiva

Pode ser chamada simplesmente de rede de competitividade evolutiva, denotada por $P_G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, e é associada a uma família finita de rankings com empates $R = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de n nós $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Trata-se da projeção das quatro camadas da rede multiplex em um único rótulo, consistindo numa rede com n nós e arestas entre pares de nós i e j com peso $k_1\alpha + k_2p + k_3q + k_4\gamma$ se existir um link entre i e j de peso $k_1\alpha$ na *crossing layer*, um link entre i e j de peso k_2p na *semi-crossing layer*, um link

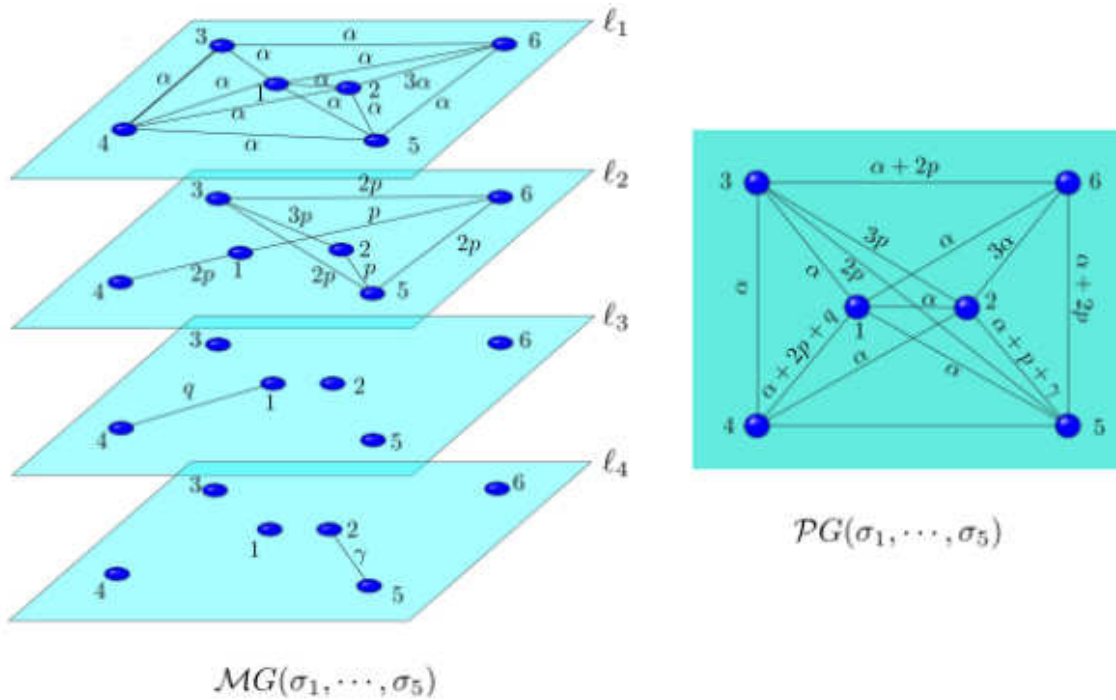
entre i e j de peso $k3q$ na *long-term-crossing layer*, e um link entre i e j de peso $k4\gamma$ na *tie layer*.

A Figura 3 ilustra exemplos de rede multiplex competitividade evolutiva $M_G(\sigma_1, \dots, \sigma_5)$ e de rede projetada de competitividade evolutiva $P_G(\sigma_1, \dots, \sigma_5)$, associadas a uma família de rankings R . A camada ℓ_1 se refere à *crossing layer*, ℓ_2 , à *semi-crossing layer*, ℓ_3 , à *long-term-crossing layer* e ℓ_4 , à *tie layer*.

3.2.3 Ordenamentos parciais

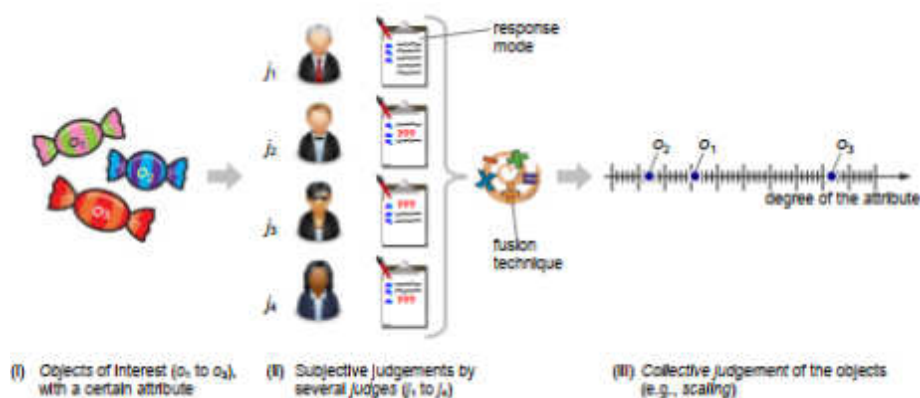
Franceschini e Maisano (2018) apresentam uma técnica para produzir um julgamento coletivo a partir de julgamentos individuais sobre objetos de interesse, os quais são expressos na forma de ordenamentos parciais. A Figura 4 representa esse problema de forma pedagógica.

Figura 3 – Redes multiplex e projetada de competitividade evolutiva associadas à família de rankings R .



Fonte – Pedroche et al (2015)

Figura 4 – Representação pedagógica do problema de interesse.



Fonte – Franceschini e Maisano (2018)

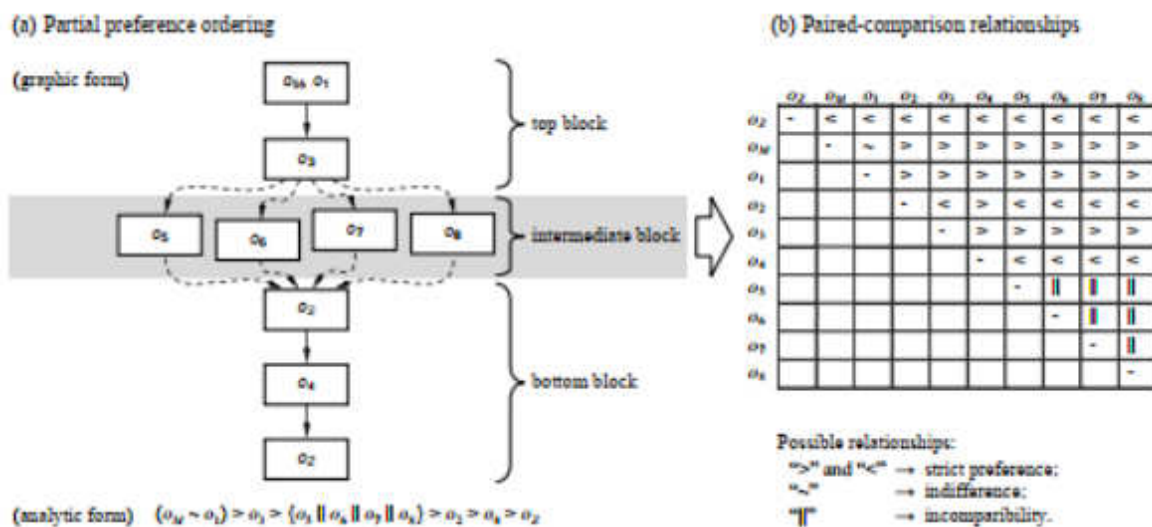
Os ordenamentos parciais caracterizam-se pelo fato de os juizes (ou experts) realizarem avaliações incompletas, em que alguns atributos pertinentes aos objetos de interesse não são considerados por um ou mais desses juizes.

Os autores consideram três tipos de relação nas comparações entre pares de objetos: preferência estrita (representada por " $>$ " ou " $<$ "), indiferença (" \sim ") e incomparabilidade (" \parallel ").

Além dos objetos regulares de interesse, os autores classificam dois objetos *dummies* nesses ordenamentos: o_Z , correspondente à falta do atributo de interesse, e o_M , correspondente ao máximo grau imaginável do atributo. Neste caso, o_Z deveria ser posicionado na última posição do ordenamento, nenhum outro objeto poderia ser posicionado abaixo dele. Objetos regulares cujos atributos estão faltantes são considerados indiferentes a o_Z e colocados no mesmo nível hierárquico. Similarmente, o_M deveria ser posicionado no topo das preferências do ordenamento, de forma que não houvesse outro objeto acima dele; objetos regulares considerados com o máximo grau imaginável são indiferentes a o_M e colocados no mesmo nível hierárquico.

Em seu método, os autores propõem uma simplificação do modo de resposta para os juizes pela decomposição em três blocos: um incluindo os objetos *top* (os mais preferidos e mais o o_M), um bloco com os objetos *bottom* (os menos preferidos e mais o o_Z) e um bloco intermediário, no qual se incluiriam os objetos que não se classificam nem como os mais preferidos, nem como os menos preferidos. Um exemplo é demonstrado pelos autores via Figura 5.

Figura 5 – (a) Exemplo de ordenamento de preferência parcial com os blocos top, bottom e intermediário. (b) Ordenamento parcial transformado em relações de comparação em pares.



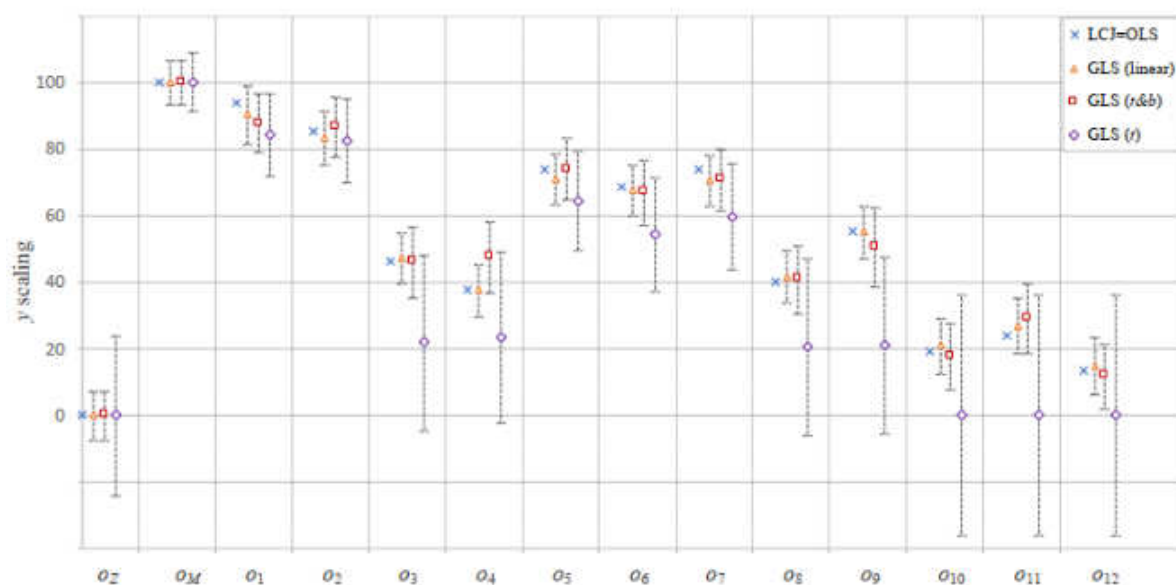
Fonte – Franceschini e Maisano (2018)

Franceschini e Maisano (2018) aplicam a técnica proposta num projeto de assento para aeronave civil, em que os requisitos dos clientes (objetos) precisam ser priorizados conforme seu nível de importância, avaliados por 20 passageiros regulares (juizes). Os autores optam por agregar e processar os ordenamentos por meio da construção de um sistema de equações e sua solução via o método dos mínimos quadrados generalizados, que se mostrou mais adequado para o tratamento dos dados incompletos. Em sua análise, os autores traçam comparações com o Thurstone LCJ (THURSTONE, 1927), que se equipara ao método dos mínimos quadrados ordinários, e com ordenamentos de preferência com "critérios de degradação" estabelecidos abaixo:

- *Tipo t&b*, nos quais as relações entre os t objetos mais preferidos (e objetos empatados) e os b menos preferidos (e outros empatados) foram preservadas. Os objetos remanescentes são alocados num bloco intermediário.
- *Tipo-t*, nos quais as relações entre os t objetos mais preferidos (e outros empatados) foram preservadas. Todos os objetos remanescentes são alocados num nível mais baixo, com relações mútuas de incomparabilidade. Neste caso, o bloco *bottom* permanece vazio.

Os resultados obtidos, apresentados na Figura 6, foram transformados numa escala convencional (de 0 a 100), com as respectivas incertezas expandidas, expressando a falta de avaliação de alguns atributos.

Figura 6 – Representação gráfica de ordenamento parcial com incertezas associadas.



Fonte – Franceschini e Maisano (2018)

3.3 Análise de concordância

3.3.1 Coeficiente de Kendall

Como visto na introdução deste trabalho, a preocupação com a análise de concordância entre ordenamentos dados a um grupo de objetos por um grupo de avaliadores (ou juízes, experts) é bastante antiga. Alguns artigos tornaram-se clássicos e de referência praticamente obrigatória para aqueles que pretendem buscar novas soluções sobre essa questão, como, por exemplo, Kendall (1938), Kendall e Babington-Smith (1939) e Kendall (1945). A base para os cálculos fornecidos por esses autores é a posição estabelecida por cada expert a cada objeto avaliado, conforme o esquema mostrado na Figura 7, considerando m experts e n objetos.

Figura 7 – Visualização de dados referentes a m rankings completos.

		Objects				Row totals
		o_1	o_2	...	o_n	
Experts	e_1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1n}	$n \cdot (n+1)/2$
	e_2	R_{21}	R_{22}	...	R_{2n}	$n \cdot (n+1)/2$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
	e_m	R_{m1}	R_{m2}	...	R_{mn}	$n \cdot (n+1)/2$
Col. totals		R_1	R_2	...	R_n	$m \cdot n \cdot (n+1)/2$

Fonte – Franceschini e Maisano (2020)

Em situações nas quais há rankings completos e sem empates, o chamado coeficiente de concordância de Kendall é definido como:

$$W = \frac{\text{S real observado}}{\text{S para concordância perfeita}} = \frac{\sum_{j=1}^n [R_j - \bar{R}]^2}{[m^2 n(n^2 - 1)]/12}, \quad (13)$$

sendo que

$$S = \sum_{j=1}^n \left[R_j - \frac{m(n+1)}{2} \right]^2 = \sum_{j=1}^n [R_j - \bar{R}]^2. \quad (14)$$

Uma vez que a média total da coluna é $\bar{R} = m(n+1)/2$, para a concordância perfeita, a soma dos quadrados dos desvios dos totais da coluna da média do total da coluna se torna constante:

$$\sum_{j=1}^n \left[jm - \frac{m(n+1)}{2} \right]^2 = m^2 \sum_{j=1}^n \left[j - \frac{n+1}{2} \right]^2 = [m^2 n(n^2 - 1)]/12, \quad (15)$$

Conforme apontado por Franceschini e Maisano (2020), com base em Kendall (1945) e Legendre (2010), a soma dos quadrados dos desvios de qualquer conjunto de n posições é reduzida se houver empates. Sendo assim, o valor corrigido do denominador no cálculo de W

é $\frac{[m^2 n(n^2 - 1) - m \sum_{i=1}^m T_i]}{12}$, onde $T_i = \sum_{k=1}^{g_i} (t^3 - t_k)$ é um fator de correção para empates, sendo t_k o

número de posições empatadas no k -ésimo grupo de posições empatadas (onde um grupo é um conjunto de valores que possuem classificação empatada constante) e g_i , o número de grupos de empates no conjunto de posições (de 1 a n) para o expert i , ou seja, considera-se T_i como o fator de correção requerido para o conjunto de classificações fornecido pelo expert i . Sendo assim, tem-se:

$$W = \frac{\sum_{j=1}^n [R_j - \bar{R}]^2}{\frac{[m^2 n(n^2 - 1) - m \sum_{i=1}^m T_i]}{12}}. \quad (16)$$

Embora os artigos clássicos sirvam de referência para vários pesquisadores sobre rankings, eles não abordam situações com rankings incompletos, em que um ou mais experts deixam de avaliar um ou mais objetos de interesse. Nesse sentido, alguns autores procuraram desenvolver métodos para analisar o grau de concordância nessas situações. Por exemplo, Franceschini e Maisano (2020) procuram estender o uso do tradicional coeficiente de concordância W de Kendall em rankings incompletos, preservando seu sentido prático e sua simplicidade. O método proposto por esses autores se baseia no conceito de *midranks*, associados a cada objeto, mesmo aqueles que não podem ser comparados com, pelo menos,

uma fração dos demais. Os autores utilizam os conceitos relativos a preferência estrita, indiferença e incomparabilidade referenciados em Franceschini e Maisano (2018). A Tabela 2 sintetiza o esquema para se determinarem os midranks.

Nesse esquema, é considerado o seguinte:

- n : número total de objetos;
- t : número de t -objetos, objetos explicitamente indicados pelo expert com maior grau do atributo que os demais;
- b : número de b -objetos, objetos explicitamente indicados pelo expert com menor grau do atributo que os outros;
- k : número de objetos isolados, objetos que o expert acredita que deveriam ser excluídos da avaliação por não os conhecerem suficientemente. Cada i -ésimo objeto é considerado incomparável com qualquer outro j -ésimo objeto;
- $n - t - b - k$: número de objetos remanescentes, os quais, embora não tenham sido explicitamente mencionados pelo expert, não são excluídos da avaliação dele. Esses objetos, bem conhecidos, são radicalmente diferentes dos objetos isolados e são caracterizados por relações mútuas de incomparabilidade;
- $r \in [1, t]$: classificação de um t -objeto genérico em um sub-ranking completo incluindo somente os t -objetos;
- $s \in [1, b]$: classificação de um b -objeto em um sub-ranking completo incluindo somente os b -objetos;
- R_{ij}^L : limite inferior do intervalo de classificação, correspondente à mínima classificação possível do objeto, um dos possíveis rankings completos que são compatíveis com o incompleto. Qualquer ranking completo é definido como compatível se, quando convertido em relações de comparação em pares, é caracterizado pelas mesmas relações utilizáveis (dominância estrita ou indiferença) que caracterizam o ranking incompleto, excluindo aquelas de incomparabilidade;
- R_{ij}^U : limite superior do intervalo de classificação, correspondente à máxima classificação possível do objeto, em um dos possíveis rankings completos que são compatíveis com o incompleto;
- R_{ij} : midrank do intervalo de classificação de interesse.

Outra questão que os autores levam em consideração é o fato de os t -objetos ou b -objetos poderem ser ordenados ou não ordenados, o que depende da disponibilidade ou da

experiência do expert e pode, juntamente com os parâmetros n, t, b, k , determinar diferentes tipos de rankings incompletos e, conseqüentemente, suas respectivas relações de comparações em pares.

Tabela 2 – Esquema de referência para determinação dos midranks para cada objeto, dependendo dos parâmetros t, b, k e n .

		No. of objects	Rank interval			Midrank sum
			R_{ij}^L	R_{ij}^U	R_{ij}	
t -objects (ordered)	t	r	$r+k$	$r + \frac{k}{2}$	$t \cdot \left(\frac{1+t+k}{2} \right)$	
Unordered	idem	1	$t+k$	$\frac{1+t+k}{2}$	idem	
b -objects (ordered)	b	$s+n-b-k$	$s+n-b$	$s+n-b - \frac{k}{2}$	$b \cdot \left(n + \frac{1-b-k}{2} \right)$	
Unordered	idem	$1+n-b-k$	n	$n + \frac{1-b-k}{2}$	idem	
Isolated objects	k	1	n	$\frac{1+n}{2}$	$k \cdot \left(\frac{1+n}{2} \right)$	
Remaining objects	$n-t-b-k$	$t+1$	$n-b$	$\frac{(t+1)+(n-b)}{2}$	$(n-t-b-k) \cdot \frac{(t+1)+(n-b)}{2}$	

Fonte – Franceschini e Maisano (2020)

Com relação à aplicabilidade das relações de comparações em pares, Franceschini e Maisano (2020) utilizam o chamado grau de completude de um ranking genérico, definido por:

$$c = \frac{\text{número de relações de comparação pareadas no ranking}}{C_{n,2}} \tag{17}$$

Quanto mais completo o ranking, maior o $c \in [0, 1]$, sendo o valor 1 atingido no caso de um ranking completo. Os autores estendem o indicador c , que se aplica a um ranking simples, para um novo indicador, aplicável a conjuntos de m rankings:

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^m \text{número de relações de comparação pareadas no } i\text{-ésimo ranking}}{\sum_{i=1}^m \text{total de relações de comparação pareadas no } i\text{-ésimo ranking}},$$

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i \cdot C_{n,2}}{m \cdot C_{n,2}} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i}{m} \tag{18}$$

Franceschini e Maisano (2020) aplicaram o método proposto em seis diferentes problemas, todos considerando $m = 10$ experts e $n = 8$ objetos, e com diferentes graus de completude, sendo o primeiro (0) caracterizado como um ranking completo, quatro problemas (1-4) com rankings incompletos compatíveis com o do problema (0), e o sexto problema (5) com uma situação deliberadamente extrema de incompletude. Os resultados são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Síntese dos resultados da aplicação de W para os seis problemas, conforme a abordagem proposta.

Problem	Description	\bar{c} (%)	$\sum_{i=1}^m T_i$	Num	Den	W	Q	$\chi_{n-1,\alpha}^2$	Reject H_0 ?
(0)	Complete	100.0	0	2586	4200	61.6%	43.100	14.067	Yes
(1)	Incomplete	73.2	834	2277	3505	65.0%	45.475	14.067	Yes
(2)	Incomplete	57.9	480	1269	3800	33.4%	23.376	14.067	Yes
(3)	Incomplete	42.9	300	733	3950	18.5%	12.981	14.067	No
(4)	Incomplete	25.7	1392	337	3040	11.1%	7.760	14.067	No
(5)	Incomplete	0.0	5040	0	0	Indeterminate	Indeterminate	14.067	Indeterminate

Fonte – Franceschini e Maisano (2020)

Esses autores alertam que, embora a abordagem proposta seja simples, versátil e automatizável, algumas limitações devem ser consideradas: a determinação de um *midrank* pressupõe que a classificação de um objeto seja simetricamente distribuída em relação ao intervalo de classificação; o método proposto para o cálculo dos *midranks* cobre somente rankings incompletos que possam ser descritos a partir dos parâmetros t , b , k e n ; a síntese dos intervalos de classificação em *midranks* é, de certa forma, questionável, pois leva a equalizar objetos com intervalos de classificação muito diferentes.

3.3.2 Alfa de Krippendorff

Hayes e Krippendorff (2007) tratam da necessidade de um método padronizado para avaliar a confiabilidade de dados codificados, ressaltando que muitas pesquisas em ciências sociais e outras áreas envolvem o processo de codificação de dados, ou seja, a atribuição de categorias ou rótulos a unidades de análise por juízes, avaliadores ou classificadores, entre outros. Porém, a confiabilidade desses dados codificados é frequentemente questionada, especialmente quando diferentes codificadores são utilizados.

A partir da revisão da literatura sobre medidas de confiabilidade em codificação de dados, o artigo destaca que existem várias opções disponíveis, mas que muitas são inadequadas ou pouco compreensíveis. Sua crítica se baseia no entendimento de que a maioria das medidas existentes se concentra apenas na concordância entre os codificadores, ignorando a relevância das diferenças entre as categorias de codificação.

Sendo assim, Hayes e Krippendorff (2007) propõem uma nova medida de confiabilidade, denominada "Alfa de Krippendorff" (KRIPPENDORFF, 1970), que leva em consideração tanto a concordância entre os codificadores quanto a distribuição dos rótulos de codificação. O método é baseado em uma matriz de frequência de categoria observada, em

que as categorias de codificação são comparadas em termos de frequência e peso. O resultado é uma medida de confiabilidade que varia de 0 a 1, em que 1 representa uma concordância perfeita e 0 representa ausência de concordância. O artigo ilustra a utilização do Alfa de Krippendorff e afirma sua superioridade em termos de precisão e sensibilidade com base em comparações com outras medidas de confiabilidade existentes.

Por sua vez, Krippendorff (1970), base principal do trabalho de Hayes e Krippendorff (2007), apresenta seu coeficiente como um método para estimar a confiabilidade e erro sistemático e aleatório de dados intervalares, que é, segundo o autor, uma forma de dados comumente coletados em pesquisas de opinião pública, avaliação de desempenho de funcionários, entre outros.

Esse método é baseado em uma extensão da teoria clássica de testes, em que os dados intervalares são convertidos em dados pontuais e, então, são aplicadas as fórmulas clássicas de estimativa de confiabilidade e erro.

Krippendorff (1970) aplica o método em dois conjuntos de dados intervalares: uma pesquisa de opinião sobre a qualidade de serviços públicos e uma avaliação de desempenho de funcionários de uma empresa. Pelos resultados obtidos, esse artigo afirma que a abordagem proposta é capaz de estimar com precisão a confiabilidade e os erros sistemático e aleatório dos dados intervalares, fornecendo informações importantes para a interpretação correta desses dados.

Krippendorff (2011) afirma que seu alfa é amplamente aplicável sempre que dois ou mais métodos de geração de dados são aplicados ao mesmo conjunto de objetos, unidades de análise ou itens, e pode considerar dados nominais, ordinais, intervalares ou de razão.

Matematicamente, a forma geral do alfa de Krippendorff é definida como:

$$\alpha = 1 - \frac{D_o}{D_e}, \quad (19)$$

onde D_o é o desacordo observado entre os valores atribuídos às unidades de análise:

$$D_o = \frac{1}{n} \sum_c \sum_k o_{ck} \delta_{ck}^2, \quad (20)$$

e D_e é a discordância que se esperaria quando a codificação das unidades é atribuível ao acaso e não às propriedades dessas unidades:

$$D_e = \frac{1}{n(n-1)} \sum_c \sum_k n_c \cdot n_k \delta_{ck}^2. \quad (21)$$

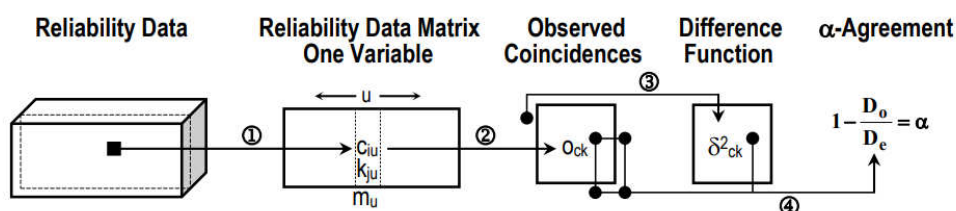
Os argumentos nas duas medidas de desacordo, o_{ck} , n_c , n_k e n , referem-se às frequências de valores em matrizes de coincidência e dependem da escala de medição utilizada (nominal, ordinal, intervalo, razão).

De forma algébrica, quando observadores concordam perfeitamente, $D_o = 0$ e $\alpha = 1$, indicando confiabilidade perfeita. Quando os observadores concordam como se o acaso tivesse produzido os resultados, $D_o = D_e$ e $\alpha = 0$, que, por sua vez, indica falta de confiabilidade e ocorre quando os observadores são incapazes de distinguir entre unidades ou atribuir valores a elas extraídos aleatoriamente de uma estimativa coletiva da população de dados. Para que os dados gerados por qualquer método possam ser confiáveis, essas duas situações devem ser evitadas (KRIPPENDORFF, 2011).

Diferentemente de outros coeficientes especializados, α é uma generalização de vários índices de confiabilidade conhecidos, permitindo que os pesquisadores julguem uma variedade de dados com o mesmo padrão de confiabilidade. Esse método se aplica a qualquer número de observadores (não apenas dois), qualquer número de categorias, valores de escala ou medidas, qualquer métrica ou nível de medição (nominal, ordinal, intervalo, razão), dados incompletos ou ausentes e quaisquer tamanhos de amostra.

Krippendorff (2011) fornece mais detalhes técnicos e computacionais sobre a construção das matrizes de coincidências observadas e esperadas e matrizes delta, incluindo sobre os argumentos nas duas medidas de desacordo, o_{ck} , n_c , n_k e n . Esse artigo ilustra, também, o processo para cálculo da confiabilidade, que engloba quatro etapas computacionais, conforme visto na Figura 8. Nesse processo, os dados de confiabilidade duplicam o processo de geração de dados cuja confiabilidade está em questão.

Figura 8 - Processo para cálculo de confiabilidade



Fonte: Krippendorff, 2011.

Krippendorff (2011) apresenta, também, exemplos de aplicação para o processo ilustrado na Figura 8, considerando diferentes tipos de dados e de complexidade. Um deles se

refere a dados binários ou dicotômicos, a partir de dois observadores e sem dados faltantes. Neste caso, o processo para cálculo de confiabilidade se desenvolve da seguinte forma:

Passo 1: Constrói-se uma matriz de dados de confiabilidade, sendo uma matriz de 2 observadores por N unidades contendo $2N$ valores, c e k , conforme visto na Tabela 4.

Tabela 4 - Matriz $2 \times N$

Units:	1	2	...	n	...	N
Observers:						
i :	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{in}	...	c_{iN}
j :	c_{j1}	c_{j2}	...	c_{jn}	...	c_{jN}

Fonte: Krippendorff, 2011.

A Tabela 5 ilustra um exemplo considerando dois observadores avaliando $N = 10$ unidades, obtendo-se, assim, uma matriz 2×10 com 20 valores.

Tabela 5 - Exemplo de matriz 2×10 com 20 valores

Items judged:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meg:	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Owen:	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

Fonte: Krippendorff, 2011.

Passo 2: As matrizes de coincidência representam todos os valores contidos em uma matriz de dados de confiabilidade. Eles diferem das conhecidas matrizes de contingência, que representam unidades em duas dimensões, não valores.

Em uma matriz de coincidência 2×2 , as unidades são incluídas duas vezes, sendo uma vez como pares $c-k$ e outra como pares $k-c$. No exemplo dado pela Tabela 5, a unidade 1 é inserida como um par de valores **0-1** e outro par **1-0**; a unidade 2 é inserida como dois pares de valores **1-1**; e daí por diante. Como exemplo, obtém-se a Figura 9.

Figura 9 - Matriz de coincidência para o exemplo da Tabela 5

Values:	0	1	
	0 o_{00} o_{01} n_0	0 o_{10} o_{11} n_1	0 o_{00} o_{01} n_0
	1 o_{10} o_{11} n_1	1 o_{10} o_{11} n_1	1 o_{10} o_{11} n_1
Number of Values:	n_0	n_1	$n=2N$

0	10	4	14
1	4	2	6
	14	6	20

Fonte: Krippendorff, 2011.

Neste exemplo, o_{00} representa os 10 pares 0-0 nas unidades 4,5,7,8 e 10; o_{01} representa os 4 pares 0-1 nas unidades 1,3,6 e 9; o_{10} representa os 4 pares 1-0 nas mesmas 4 unidades anteriores; e o_{11} , por sua vez, representa os 2 pares 1-1 encontrados somente na

unidade 2. $n_0 = 14$ é o número de 0 (“zeros”) na matriz de dados de confiabilidade, $n_1 = 6$ é o número de 1 (“uns”), e $n = 2N = 20$, o número total de valores pareados.

Para esses dados binários, coincidências incompatíveis ocorrem em duas células, o_{01} e o_{10} , ambos com frequência 4.

Passo 3: Neste exemplo, conforme Krippendorff (2011), o passo 3 do processo de cálculo de confiabilidade não é executado.

Passo 4: Para o cálculo do α , faz-se:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \frac{D_o}{D_e} = 1 - (n - 1) \frac{o_{01}}{n_0 n_1} = \\ &= 1 - (20 - 1) \frac{4}{14 \cdot 6} = 0,095\end{aligned}$$

3.4 Conceitos teóricos sobre redes complexas

Neste capítulo, são apresentados alguns aspectos teóricos de interesse sobre redes complexas.

3.4.1 Caracterização de Redes Complexas

Costa et al. (2007) afirmam que a pesquisa sobre redes complexas pode ser conceitualizada como estando na intersecção entre a Teoria dos Grafos e a Mecânica Estatística, o que lhe confere um caráter verdadeiramente multidisciplinar. Redes reais possuem características que não são explicadas pela conectividade uniformemente aleatória; em vez disso, redes derivadas de dados reais podem envolver estrutura de comunidade, distribuição de graus em lei de potência e hubs, entre outras características estruturais. Três desenvolvimentos específicos têm contribuído particularmente para desenvolvimentos relacionados em andamento: a investigação de redes *small-world*, de Watts e Strogatz, caracterização de modelos livres de escala, de Barabási e Albert, e a identificação de estruturas de comunidade, de Girvan e Newman, presentes em muitas redes.

Embora a Teoria dos Grafos seja uma área bem estabelecida e desenvolvida em Matemática e Ciência da Computação Teórica, muitos dos desenvolvimentos em redes complexas têm tido lugar em áreas como Sociologia, Biologia e Física. Muito do interesse nisso tem focado não somente em aplicar os conceitos desenvolvidos a muitos dados e

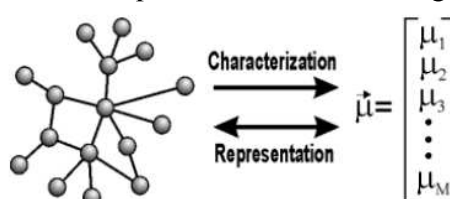
situações reais, mas também em estudar a evolução dinâmica da topologia de rede. Com apoio da disponibilidade de computadores de alto desempenho e grandes coleções de dados, resultados como a descoberta da estrutura livre de escala da internet e da *World Wide Web* foram da maior importância para o aumento de interesse na área de redes complexas, cuja crescente relevância tem sido substanciada por inúmeras publicações relacionadas.

Segundo Costa et al. (2007), uma das principais razões da popularidade das redes complexas é sua flexibilidade e generalidade para representar virtualmente qualquer estrutura natural, incluindo aquelas que passam por mudanças dinâmicas de topologia. Na verdade, qualquer estrutura discreta, como listas, árvores ou mesmo grades, pode ser adequadamente representada como um caso especial de grafo. Portanto, não é surpreendente que várias investigações em redes complexas envolvam a representação da estrutura de interesse como uma rede, seguida de uma análise das características topológicas da representação obtida realizada em termos de um conjunto de medidas informativas. Outro problema de interesse consiste em medir as propriedades estruturais de redes evolutivas a fim de caracterizar como a conectividade das estruturas investigadas se alteram ao longo do processo. Ambas as atividades podem ser compreendidas como direcionadas à caracterização topológica das estruturas estudadas. Outra aplicação relacionada é a utilização das medidas obtidas para identificar diferentes categorias de estruturas, o que está diretamente relacionado à área de reconhecimento de padrões. Mesmo quando se está modelando redes, há a necessidade de se compararem as realizações do modelo com as redes reais, o que pode ser feito nos termos das respectivas medidas. Desde que as medições sejam abrangentes (de forma ideal, a representação pelas medições deve ser um-para-um ou invertível), o fato de as redes simuladas produzirem medições semelhantes às das contrapartes reais apoia a validade do modelo.

Medidas de redes são essenciais como um recurso direto ou auxiliar em muitas investigações de rede, incluindo representação, caracterização, classificação e modelagem. A Figura 10 mostra o mapeamento de uma rede complexa genérica num vetor de característica, um vetor de medidas relacionadas como grau médio de vértice, coeficiente de clustering médio, diâmetro da rede, entre outros. No caso do mapeamento ser invertível, no sentido de a rede poder ser resgatada do vetor de característica, diz-se que esse mapeamento provê uma representação da rede. Um exemplo de mapeamento invertível para redes com vértices e arestas é a matriz de adjacência. No entanto, a caracterização e a classificação de redes não requerem necessariamente medidas invertíveis.

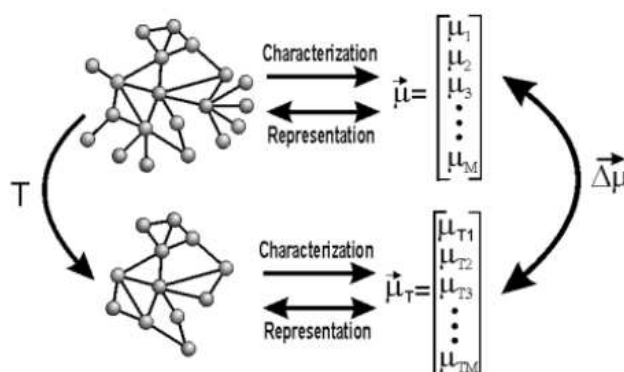
Uma estratégia interessante para se obter informação adicional sobre a estrutura de redes complexas envolve aplicar uma transformação à rede original e obter as medidas da rede resultante, como ilustrado na Figura 11. Nela, a transformação T (neste caso, deleção dos vértices adjacentes a apenas outro vértice) é aplicada sobre a rede original para obter uma estrutura transformada da qual novas medidas são extraídas. No caso de os vetores de característica corresponderem ao mesmo conjunto de medidas, é possível também considerar a diferença entre esses dois vetores para se obter informação adicional sobre a rede sob análise.

Figura 10 – Mapeamento de uma rede genérica



Fonte – Costa et al (2007)

Figura 11 – Aplicação de uma transformação T para obtenção de um novo vetor de característica



Fonte – Costa et al (2007)

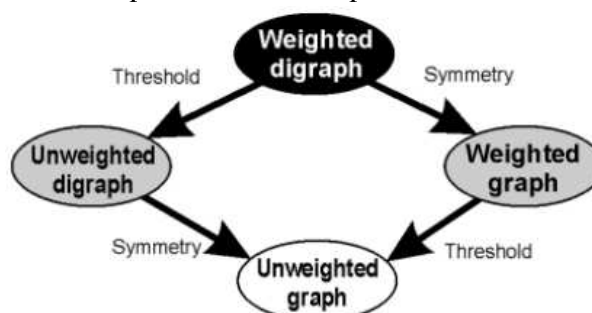
A caracterização e a classificação de estruturas naturais e feitas por humanos com o uso de redes complexas implicam a mesma importante questão: como escolher as medidas mais apropriadas. Embora tal escolha deva refletir interesses e aplicações específicas, é lamentável, segundo os autores, que não haja nenhum procedimento matemático para identificar as melhores medições. Há um ilimitado conjunto de medidas topológicas que possuem correlação, implicando redundância. Abordagens estatísticas para decorrelação (por exemplo, análise de componente principal e análise canônica) podem ajudar a selecionar e

realçar medidas, mas não é possível a garantia de produção de ótimos resultados. Em última análise, deve-se confiar no conhecimento do problema e medidas disponíveis para se selecionar um conjunto adequado de características a serem consideradas. Por essas razões, é de extrema importância ter um bom conhecimento não apenas das medidas mais representativas, mas também de suas respectivas propriedades e interpretação.

3.4.2 Conceitos básicos sobre redes complexas

A Figura 12 mostra os 4 tipos de redes complexas: digrafos (grafos direcionados) ponderados e não ponderados, grafos ponderados e não ponderados. A operação de simetria pode ser usada para transformar um digrafo em um grafo, e a operação de limiarização (*thresholding*), para transformar um grafo ponderado em sua versão não ponderada. Esses tipos de grafos e operações são definidos mais formalmente a seguir, começando pelo conceito de digrafo ponderado, a partir do qual todos os outros 3 tipos podem ser derivados.

Figura 12 – Os 4 tipos de redes complexas e suas transformações.



Fonte – Costa et al (2007)

Um grafo direcionado ponderado G é definido por um conjunto $N(G)$ de N vértices (ou nós), um conjunto $E(G)$ de M arestas (ou links) e um mapeamento $w : E(G) \rightarrow R$. Cada vértice pode ser identificado por um valor inteiro $i = 1, 2, \dots, N$; as arestas são identificadas por um par (i, j) que representa uma conexão indo do vértice i ao vértice j para o qual um peso $w(i, j)$ é associado. Na literatura sobre redes complexas, frequentemente assume-se que não existem autoconexões ou conexões múltiplas; isto quer dizer que não há arestas da forma (i, i) e que, para cada par de arestas (i_1, j_1) e (i_2, j_2) , temos $i_1 \neq i_2$ e $j_1 \neq j_2$. Grafos com autoconexões ou conexões duplicadas são chamados, às vezes, de multigrafos ou grafos degenerados. Em um digrafo não ponderado, as arestas não possuem peso e o mapeamento w

não é necessário. Para grafos não direcionados (ponderados ou não), as arestas não possuem direção; a presença de uma aresta (i, j) em $E(G)$, então, significa que uma conexão existe de i para j e de j para i .

Um digrafo ponderado pode ser completamente representado em termos de sua matriz de peso W , de forma que cada elemento $w_{ij} = w(i, j)$ expressa o peso da conexão do vértice i ao j . A operação de limiarização pode ser aplicada a um digrafo ponderado para produzir seu correspondente não ponderado. Esta operação, representada como $\delta T(W)$, é aplicada a cada elemento da matriz W , fornecendo a matriz $A = \delta T(W)$. Os elementos da matriz A são computados comparando-se os elementos correspondentes de W com um limiar especificado T ; caso $|w_{ij}| > T$, temos $a_{ij} = 1$, do contrário $a_{ij} = 0$. A matriz resultante pode ser entendida como a matriz de adjacência do digrafo ponderado obtida como resultado da operação de limiarização. Qualquer digrafo ponderado pode ser transformado em um grafo usando-se a operação simetria $\sigma(W) = W + W^T$, onde W^T é a transposta de W .

Para grafos não ponderados, dois vértices i e j são ditos adjacentes ou vizinhos se $a_{ij} = 0$. Para grafos direcionados, os conceitos correspondentes são os de predecessor e sucessor: se $a_{ij} \neq 0$, então i é um predecessor de j e j é um sucessor de i . O conceito de adjacência pode, também, ser usado em digrafos considerando predecessores e sucessores como vértices adjacentes. A vizinhança de um vértice i , então representado como $v(i)$, corresponde ao conjunto de vértices adjacentes a i .

O grau de um vértice i , chamado k_i , é o número de arestas conectadas a esse vértice, isto é, a cardinalidade do conjunto $v(i)$ (na literatura Física, esta quantidade é frequentemente chamada de "conectividade"). Para redes não direcionadas, isso pode ser computado como

$$k_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}. \quad (22)$$

O grau médio de uma rede é a média de k_i para todos os vértices na rede,

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i = \frac{1}{N} \sum_{ij} a_{ij}. \quad (23)$$

No caso de redes direcionadas, há dois tipos de graus: o grau de saída k_i^{out} , igual ao número de arestas que saem (isto é, a cardinalidade do conjunto de sucessores), e o grau de entrada k_i^{in} , correspondente ao número de arestas que entram (a cardinalidade do conjunto de predecessores),

$$k_i^{out} = \sum_j a_{ij}, \quad (24)$$

$$k_i^{in} = \sum_j a_{ji}. \quad (25)$$

Neste caso, o grau total é definido como $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$. As médias de entrada e saída são as mesmas (supondo-se uma rede isolada):

$$\langle k_i^{out} \rangle = \langle k_i^{in} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{ij} a_{ij} \quad (26)$$

Para redes ponderadas, as definições de grau dadas acima podem ser usadas, mas uma quantidade chamada *força* de i , s_i , definida como a soma dos pesos das arestas correspondentes, é mais geralmente utilizada:

$$s_i^{out} = \sum_j w_{ij}, \quad (27)$$

$$s_i^{in} = \sum_j w_{ji}. \quad (28)$$

No caso geral, dois vértices de uma rede complexa não são adjacentes. De fato, a maioria das redes de interesse são esparsas, uma vez que somente uma pequena fração de todas as possíveis arestas estão presentes. Mesmo assim, dois vértices não adjacentes i e j podem estar conectados por meio de uma sequência de m arestas $(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_{m-1}, j)$; tal conjunto de arestas é chamado de passeio entre i e j , e m é o comprimento do passeio. Diz-se que dois vértices estão conectados se há, pelo menos, um passeio os conectando. Muitas medidas são baseadas no comprimento desses passeios. Um *loop* ou ciclo é definido como um passeio começando e terminando no mesmo vértice i e passando somente uma vez por cada vértice k_n . Caso todos os vértices e arestas ao longo de um passeio sejam distintos, o passeio é chamado de caminho.

Em grafos não direcionados, se os vértices i e j estão conectados e os vértices j e k estão conectados, então i e k também estão conectados. Esta propriedade pode ser usada para partição de vértices de um grafo em subconjuntos sem sobreposição de vértices conectados. Esses subconjuntos são chamados componentes conectados ou *clusters*.

Se uma rede possui muito poucas arestas, ou seja, se a conectividade média de seus vértices $\langle k \rangle$ é muito pequena, há muitos vértices isolados e clusters com um pequeno número de vértices. À medida que mais arestas são adicionadas à rede, os pequenos clusters são

conectados a clusters maiores; após algum valor crítico de conectividade, a maioria dos vértices são conectados em um cluster gigante, caracterizando a percolação da rede. Para o grafo Erdos-Rényi, no limite $N \rightarrow \infty$, isso acontece quando $\langle k \rangle = 1$. De especial interesse é a distribuição de tamanhos dos clusters no ponto de percolação e a fração de vértices no cluster gigante. A densidade crítica de arestas (bem como a média e o desvio padrão) necessária para se alcançar a percolação pode ser usada para caracterizar modelos de rede ou fenômenos experimentais.

3.5 Complexidade econômica

O interesse no estudo sobre complexidade econômica e, conseqüentemente, suas métricas, reside no fato de que, segundo Hidalgo e Hausmann (2009a), é possível interpretar dados conectando países e produtos que eles exportam como uma rede bipartida, como resultado de uma rede maior, tripartida, conectando países às capacidades necessárias para elaborar seus produtos, como visto na Figura 13.

Figura 13 - Representação da relação entre países e produtos por redes tripartida e bipartida



Fonte: Hidalgo e Hausmann (2009, p. 10571)

Além disso, Hidalgo (2021) cita que as duas ideias fundamentais para a complexidade econômica (*parentesco* e *complexidade*) utilizam métodos de rede para criar variáveis que satisfaçam a chamada “complexidade organizada”, definida por Weaver (1948) como a “terceira ciência”, pela qual considera que não se podem ignorar a identidade dos elementos envolvidos e seus padrões de interação.

De fato, ainda conforme Hidalgo (2021), o trabalho em complexidade econômica mudou do uso de parentesco e complexidade como fatores explicativos para se concentrar em

descompactar essas métricas e explorar seus fatores, causas e consequências. A ideia de parentesco foi ampliada a conjuntos de dados que combinam vários tipos de atividades (como patentes, papéis e produtos) e a relações comerciais bilaterais. Foram focados esforços em explorar o papel do parentesco nos resultados trabalhistas, no crescimento da empresa, na sustentabilidade e no empreendedorismo. Além disso, o estudo do parentesco envolve também o desenvolvimento de estratégias destinadas a otimizar os caminhos da diversificação industrial e a avaliação dos esforços da política industrial.

O trabalho sobre a complexidade econômica também se ampliou e começou a considerar as consequências da complexidade em uma variedade de resultados, como desigualdade de renda, desigualdade de gênero, desenvolvimento humano, volatilidade da produção, produtividade, saúde e emissões de gases de efeito estufa, entre outros.

A aplicação do conceito sobre complexidade econômica requer, basicamente, a organização de dados sobre a geografia das atividades usando matrizes que conectam locais (como países, cidades ou regiões, normalmente denotados com o subscrito c) e atividades (como produtos, indústrias ou tecnologias; denotados com o subscrito p). Exemplos de matrizes localização-atividade incluem exportações por região e produto, folha de pagamento total por cidade e indústria ou patentes por área metropolitana e tecnologia.

Na notação proposta por Hidalgo (2021), tal matriz é definida por:

$$X_{cp} = \text{volume da atividade } p \text{ na locação } c,$$

onde o volume de uma atividade pode se referir a exportações, vendas, folha de pagamento total, valor adicionado, emprego ou outras quantidades.

Para tornar os países e produtos comparáveis entre eles, usa-se o índice de vantagem comparativa revelada - VCR (ou RCA , pela sua sigla em inglês), também conhecido como “Índice de Balassa”, o qual é apresentado por Mealy, Farmer e Teytelboym (2019) como:

$$RCA_{cp} = \frac{x_{cp} / \sum_p x_{cp}}{\sum_c x_{cp} / \sum_c \sum_p x_{cp}}. \quad (29)$$

Aplicando-se uma matriz binária país-produto M com elementos M_{cp} (neste caso, c para países e p para produtos), obtém-se $M_{cp} = 1$ se o país c apresenta um $RCA > 1$ para um determinado produto p , e $M_{cp} = 0$, caso contrário.

Em outras palavras, um país possui RCA em determinado produto se exporta mais do que uma fração “justa”, isto é, a fração que é igual à fração do comércio total mundial que aquele produto representa. Por exemplo, em 2020, a soja, com aproximadamente \$63 bilhões

em exportações, representou 0,38% do comércio mundial. Desse percentual, o Brasil exportou quase \$28 bilhões. E como as exportações totais do Brasil foram de \$235 bilhões, a soja representou 11,9% das exportações totais brasileiras. Isso representa mais de 30 vezes a “parte justa” do Brasil nas exportações de soja (11,9% dividido por 0,38%); então, podemos dizer que o Brasil possui vantagem comparativa em exportação de soja.

Como visto anteriormente, após encontrar o RCA de cada país, constrói-se uma matriz na qual as linhas representam os países e as colunas, os produtos; os elementos desta matriz podem receber valor 1 ou 0 conforme o RCA calculado. Essa matriz é a ferramenta para a construção do espaço de produtos - gráfico onde se visualiza a proximidade existente entre um país e outro, conforme a similaridade das suas cestas de exportação - e outras métricas de complexidade econômica para países e produtos, denominadas Índice de Complexidade Econômica (ICE) e Índice de Complexidade de Produto (ICP), definidos pelo “Método de Reflexões” (HIDALGO e HAUSMANN, 2009a), técnica elaborada com base na simetria da rede bipartida que representa as relações entre países e produtos.

Esse método consiste em se calcular de forma iterativa o valor médio das propriedades de nível anterior dos vizinhos de um nó, definido como o conjunto de observáveis:

$$k_{c,N} = \frac{1}{k_{c,0}} \sum_p M_{cp} k_{p,N-1}, \quad (30)$$

$$k_{p,N} = \frac{1}{k_{p,0}} \sum_c M_{cp} k_{c,N-1}, \quad (31)$$

para $N \geq 1$, e considerando que:

$$k_{c,0} = \sum_p M_{cp}, \quad (32)$$

$$k_{p,0} = \sum_c M_{cp}. \quad (33)$$

Nas equações acima, $k_{c,0}$ e $k_{p,0}$ correspondem, respectivamente, aos níveis observados de diversificação de um país e a ubiquidade de um produto. Sendo assim, cada país é caracterizado pelo vetor $k_c = (k_{c,0}, k_{c,1}, k_{c,2}, \dots, k_{c,N})$, e cada produto ao vetor $k_p = (k_{p,0}, k_{p,1}, k_{p,2}, \dots, k_{p,N})$. Utilizando termos associados a redes, $k_{c,1}$ e $k_{p,1}$ se referem ao grau médio do vizinho mais próximo. Variáveis com ordens maiores, ou seja, $N > 1$, podem ser entendidas como uma combinação linear das propriedades de todos os nós na rede com coeficientes dados pela probabilidade de um andarilho partir de um dado nó e chegar a outro após N passos.

Conforme Hausmann et al. (2014), ao se fundirem as equações (30) e (31), temos:

$$k_{c,N} = \sum_{c'} \widehat{M}_{cc'} k_{c',N-2}, \quad (34)$$

onde

$$\widehat{M}_{cc'} = \sum_p \frac{M_{cp} M_{c'p}}{k_{c,0} k_{p,0}}. \quad (35)$$

Quando $k_{c,N} = k_{c,N-2} = 1$, a equação acima é satisfeita, caracterizando o autovetor de $\widehat{M}_{cc'}$ associado ao seu maior autovalor. No entanto, isso se torna irrelevante por esse autovetor ser um vetor com valores 1. Sendo assim, analisa-se o autovetor associado ao segundo autovalor, que captura a maior quantidade de variância no sistema, permitindo definir o Índice de Complexidade Econômica (ICE) como:

$$ICE = \frac{\widehat{K} - \langle \widehat{K} \rangle}{std(\widehat{K})}, \quad (36)$$

onde $\langle \rangle$ representa a média, std representa o desvio-padrão e \widehat{K} é o autovetor de $\widehat{M}_{cc'}$ associado ao segundo autovalor.

Analogamente, devido à simetria do problema, temos para o Índice de Complexidade do Produto (ICP):

$$\widehat{M}_{pp'} = \sum_c \frac{M_{cp} M_{c'p'}}{k_{c,0} k_{p,0}} \quad (37)$$

$$ICP = \frac{\widehat{Q} - \langle \widehat{Q} \rangle}{std(\widehat{Q})}, \quad (38)$$

onde \widehat{Q} representa o autovetor de $\widehat{M}_{pp'}$ associado ao segundo autovalor.

Portanto, para a construção do Índice de Complexidade Econômica (ICE) de um determinado país, calcula-se a sua diversidade, que corresponde ao número de produtos que fazem parte da cesta exportadora desse país, e a ubiquidade desses produtos, a qual é a soma dos países que os exportam. Assim, um país com exportações diversificadas é aquele que exporta mais produtos, e um produto ubíquo é aquele exportado pela maioria de países (HAUSMANN et al., 2014). Para um país possuir um alto índice de complexidade econômica, ele deve possuir uma cesta exportadora diversificada, onde está incluída a maior quantidade de produtos não ubíquos, principalmente aqueles difíceis de serem produzidos, dado o conhecimento especializado requerido para serem feitos (excetuando-se aqueles que

não são ubíquos apenas por questões naturais, por exemplo, os diamantes, as pedras preciosas, entre outros).

Mealy, Farmer e Teytelboym (2019) mostram que as métricas de complexidade econômica são matematicamente equivalentes ao clássico algoritmo de agrupamento espectral, que permite particionar um grafo de similaridade em dois componentes balanceados internamente similares e externamente dissimilares. Além disso, essas métricas podem ser interpretadas como métodos de redução de dimensionalidade.

Esses autores fornecem duas interpretações do ICE e do ICP do ponto de vista da redução de dimensionalidade. Primeiro, pode-se dizer que as métricas ICE e ICP definem uma distância entre os nós de uma rede com base em sua similaridade. Assim, por exemplo, quando usado com dados de exportação, o ICE (ICP) define países (produtos) em um intervalo unidimensional onde países (produtos) com exportações comparáveis (exportadores) estão próximos e países (produtos) com exportações diferentes (exportadores) são separados. Segundo, essas métricas podem ser interpretadas como ordenamentos que maximizam a correlação entre duas variáveis categóricas.

Conceituações anteriores das medidas de complexidade econômica, que tendiam a enquadrar o ICE como relacionado à variedade (ou quantidade) de produtos que um país consegue exportar competitivamente, são contrastadas com as interpretações matemáticas desses autores. Além de ser matematicamente ortogonal à diversidade, o ICE captura, também, dados úteis que a diversidade não revela.

Os resultados apresentados por esses autores permitem ampliar a aplicação das métricas de complexidade econômica a outros conjuntos de dados além dos dados comerciais, como, por exemplo, em dados regionais sobre concentrações de emprego industrial em autoridades locais do Reino Unido e em concentrações de empregos ocupacionais em alguns estados norte-americanos. Nessas aplicações, o ICE e o ICP revelam padrões similares de especialização, o que não é possível verificar completamente com a avaliação da diversidade.

3.6 Geração de rankings com *Tau* de Kendall fixado

Para auxílio em projetos de pesquisa, simulações computacionais se apresentam como ferramentas úteis, seja para geração de valores ou dados pré-determinados, teste ou validação de resultados, entre outras atividades. Tais algoritmos podem ser desenvolvidos pelos próprios

pesquisadores ou adquiridos gratuitamente em plataformas dedicadas, com base em determinadas linguagens de programação, como, por exemplo, *R* ou *Python*.

Na literatura científica, podem ser encontrados artigos e pacotes computacionais aplicáveis a análise de redes complexas e geração ou formação de rankings. Para o desenvolvimento deste trabalho, foi estudado o material disponível em Arndt e Magnotta (2001), que apresentam algoritmos para geração de séries de números aleatórios, a partir de uma população, com um coeficiente de correlação de Kendall (τ) esperado. Esses algoritmos produzem uma população arbitrariamente grande com base em conjuntos com pequena quantidade de valores, mantendo-se o mesmo valor de τ .

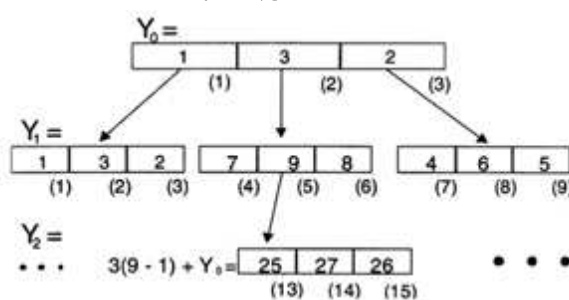
O princípio básico constituinte desses algoritmos conta com um vetor tronco de Y -valores com um τ conhecido utilizado para gerar séries maiores. Esse vetor é “aumentado” substituindo-se cada valor com uma replicação do tronco e adicionando-se uma constante para manter o ordenamento das novas subséries.

Conforme relatado pelos autores, o chamado Algoritmo 1 produz e mantém um pesado conjunto de valores, enquanto o chamado Algoritmo 2, por sua vez, comporta-se como um gerador de números aleatórios padrão e produz um conjunto de tamanho especificado menor, a partir de uma população, pela geração de pares de valores X - Y , sendo um par por vez.

3.6.1 Algoritmo 1

Como explicado anteriormente, este algoritmo requer uma série-tronco (Y_0) com um τ conhecido para definir a população resultante. Por exemplo, um tronco ordenado por $X = [1\ 2\ 3]$ de $Y_0 = [1\ 3\ 2]$ possui um $p(Y_{i+j} > Y_i)$ de $2/3$ e um τ de $1/3$. Os autores alertam para o fato de um tronco muito curto somente gerar um número limitado de valores de τ . A figura 14 ilustra graficamente esse algoritmo.

Figura 14 – Representação visual do Algoritmo 1 para geração de séries aleatórias com $\tau = 1/3$



Fonte: Arndt e Magnotta (2001), pg. 18

Os elementos de Y_0 se tornam “pais” dos novos K elementos em Y_1 . Cada Y_{0_i} valor no tronco, sendo $i = 1 a K_0$, é expandido para gerar K_0 novos valores. Sendo assim, Y_1 possui comprimento de $K_1 = K_0^2$, pois cada elemento $Y_{0,pai}$ irá gerar K_0 filhas, onde $pai = 1 a K_0$.

Para as filhas de um dado $Y_{0,pai}$, $Y_{1,filhas} = K_0 \times (Y_{0,pai} - 1) + Y_0$. No exemplo onde $Y_0 = [1\ 3\ 2]$, os primeiros três elementos em Y_1 são $3(1 - 1) + Y_0 = [1\ 3\ 2]$, os segundos três elementos são $3(3 - 1) + Y_0 = [7\ 9\ 8]$, e os três últimos, $3(2 - 1) + Y_0 = [3\ 6\ 5]$. Como resultado, tem-se o vetor particionado $Y_1 = [1\ 3\ 2\ | 7\ 9\ 8\ | 3\ 6\ 5]$, o qual tem um $p(Y_{i+j} > Y_i)$ associado de $2/3$ e um τ de $1/3$.

Esse processo pode ser repetido L vezes para formar o vetor Y_L com $K_L (= K_0^L)$ valores, que possui os mesmos valores $p(Y_{i+j} > Y_i)$ e τ referentes a Y_0 . O vetor resultante pode se tornar arbitrariamente grande em incrementos de potência de K_0 . Por exemplo, a partir de um tronco com três elementos, cada repetição se transforma, sucessivamente, em 9, 27, 81, 243, e assim por diante.

Ainda segundo os autores, a amostragem aleatória de um conjunto de tamanho n torna-se fácil após a geração do vetor de população Y_L com elementos K_L . O processo final requer um gerador de números aleatórios uniforme (ou seja, $U(0, 1)$) para acessar elementos em Y_L . Um programa definiria os índices de amostra para os valores inteiros de $RAN() \times K_L + 1$. Esses valores de índice amostrados aleatoriamente e os valores correspondentes em Y_L são a amostra aleatória de valores $X-Y$.

Os autores afirmam que, por um lado, é vantajoso criar uma grande população da qual extrair valores. Por exemplo, valores K_L muito grandes se aproximam de uma distribuição subjacente contínua. Além disso, quanto maior for o K_L quando comparado ao tamanho da amostra n , menor será a probabilidade de ocorrência de valores empatados. Quanto maior a proporção de K_L para n , menos provável é que amostras duplicadas sejam coletadas. Amostras duplicadas podem ser um problema ao se amostrarem sequências aleatórias em inúmeras vezes.

No entanto, os autores alertam que grandes valores de K_L podem produzir problemas logísticos. Por exemplo, grandes populações precisam de espaço considerável de armazenamento durante o procedimento de amostragem aleatória. Muitos aplicativos de Monte Carlo exigem que milhares de amostras aleatórias sejam geradas para análise subsequente. Consequentemente, a carga de memória pode persistir por um período prolongado. Embora os valores de Y_L sejam números inteiros, esses requisitos de memória podem ser proibitivos.

3.6.2 Algoritmo 2

Quando K é grande, uma pequena modificação do Algoritmo 1 pode torná-lo mais eficiente. Substituir Y_0 por Y_1 após cada iteração reduz o número de loops necessários. Na primeira passagem com $K_0 = 3$, K_1 se torna 9. Na segunda passagem, K_0 agora é 9 e K_1 aumenta para 81. Na terceira iteração, $K_1 = 6561$.

Este procedimento modificado usa o mesmo princípio do Algoritmo 1, e gera X e Y pares aleatórios sem a necessidade de criação da população. Para populações muito grandes, apenas pequenas porções dos valores de Y são eventualmente amostradas. Embora baseado no mesmo método intrínseco do Algoritmo 1, o Algoritmo 2 não precisa gerar a lista completa de valores Y_L . O valor do i -ésimo elemento em $Y_{L,i}$ pode ser derivado desde que a série-tronco, o índice amostrado (i) aleatoriamente de Y_L e o número de níveis (L) em Y_L são identificados, pois, gerar o caminho que teria produzido $Y_{L,i}$ é suficiente. Segundo os autores, este algoritmo se comporta como qualquer outro gerador de números aleatórios e produz um valor aleatório de Y de uma população com um valor conhecido de τ . O valor do índice amostrado aleatoriamente (i) é tomado como o X-valor. Esta função pode ser chamada repetidamente para produzir amostras com tamanho n .

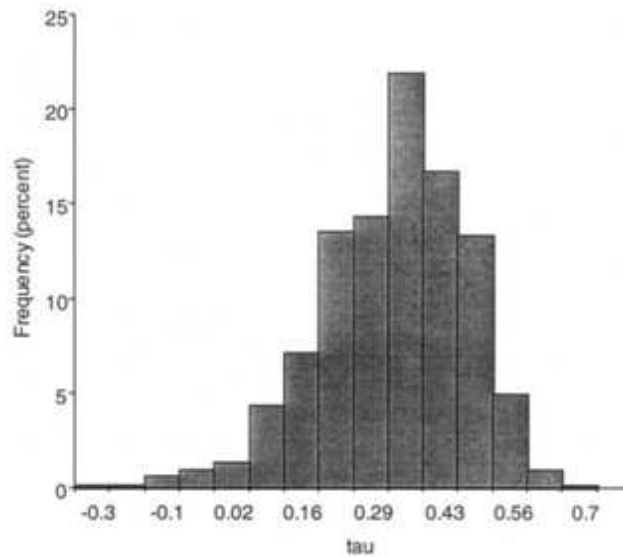
O maior índice disponível na população final é $K_L = K_0^L$ e é definido pelo comprimento do tronco (K_0) e pelo número de conjuntos de níveis (L). Este limite superior é o limite superior para os índices designados uniformemente (ou seja, $U(1, K_0^L)$) usados para selecionar

locais em Y_L . Gerar o valor de Y_L no local i requer encontrar o caminho e os valores intermediários $(Y_{L,i})$ nos vários níveis intermediários $i = 0$ a L .

Dado K_0 , os valores aleatórios de i no intervalo de 1 a K_0^L fornecem informações para traçar o caminho pelos níveis intermediários. Por exemplo, o caminho pode ser revelado dividindo repetidamente i por potências sucessivamente menores de K_0^L e, em seguida, anotando o resultado inteiro e os restos após a divisão. Ou, de forma mais fácil, segundo os autores, converter o valor de i em um valor base de K_0 ; desta forma, os dígitos de i na base K_0 revelam a sequência do caminho. O pseudocódigo elaborado pelos autores, que descreve essa sistemática, é apresentado no Anexo A. Foi mantido o texto original para se evitarem equívocos de interpretação.

Arndt e Magnotta (2001) apresentam um teste simples de implementação do Algoritmo 2 em linguagem C, utilizando um vetor tronco $Y_0 = [1\ 3\ 2]$, com $\tau = 1/3$ (conforme visto anteriormente), e gerando 1000 amostras aleatórias, cada amostra contendo 25 números sorteados aleatoriamente ($n = 25$). Foram utilizados $L = 16$ níveis e os possíveis valores de Y numa escala de 1 a 43 046 721 ($= 3^{16}$). Segundo os autores, não foram evidenciados valores duplicados em qualquer das amostras. A Figura 15 mostra a distribuição de frequência para os valores de τ calculados para as amostras.

A média de τ para as 1000 amostras foi de 0,335 (SD = 0,139, intervalo de $-0,287$ a $-0,733$), valor próximo ao esperado $\tau = 0,333$. O intervalo de 95% de confiança para a média observada $0,32604 < 0,34335$ inclui o valor esperado. Um teste t indicou que a média observada, baseando-se nas 1000 amostras, não desviou consideravelmente da expectativa ($t = 0,308, df = 999, P > 0,758$). Sendo assim, os autores concluem que essa implementação consegue produzir amostras com valores de τ observados centrados no valor esperado.

Figura 15 – Histograma dos valores de τ amostrados

Fonte: Arndt e Magnotta, 2001, pg. 22.

3.6.3 Seleção de parâmetros

Arndt e Magnotta (2001) afirmam que, para aplicações em que se almeja obter conjuntos de valores com baixa probabilidade de valores duplicados, o que seria caracterizado como empates nos rankings gerados, a utilização de valores maiores de L seria a melhor opção, a fim de se conseguir uma aproximação de uma distribuição contínua, pois, em casos envolvendo uma distribuição contínua teórica, a probabilidade de um número ser selecionado duas vezes numa série de amostras seria infinitamente pequena. Enquanto grandes valores de L produzem muitos problemas de memória computacional no caso do Algoritmo 1, isso possui efeitos mínimos no tempo de processamento requerido na utilização do Algoritmo 2. Neste caso, o limite superior de L é o maior inteiro sem sinal ($K_L = K_0^L$) que pode ser representado em um computador. De qualquer forma, na prática, segundo os autores, um L menor se torna suficiente. Para uma determinada amostra, a chance de se encontrar, pelo menos, um valor duplicado é calculada como

$$P(\text{um empate pelo menos}) = 1 - K_L! / \left[(K_L - n)! K_L^n \right], \quad (39)$$

onde n corresponde ao tamanho da amostra e K_L a quantidade de valores para a população gerada. Segundo os autores, esta fórmula é uma extensão da solução para o “Problema do Aniversário”, tratado em probabilidade básica. Em muitas aplicações, a probabilidade de

ocorrência de empates se torna uma preocupação, pois se trabalha com muitas amostras independentes (por exemplo, $r = 1000$ a 5000). Sendo assim, $P(\text{um empate pelo menos})$ deveria ser ajustado para refletir toda a série de r amostras para $1 - [(1 - p)r]$. Por exemplo, um tronco com $K_0 = 5$ e 10 níveis produz uma população total com 9.765.625 valores ($= 5^{10}$). A extração de $r = 1000$ amostras de tamanhos de $n = 20$ resulta em uma chance de 0,019 de que, pelo menos, uma amostra contenha pelo menos um valor duplicado (ou seja, um empate). Aumentar o número de níveis $L = 15$ reduz essa probabilidade para menos de 0,000007.

Para a seleção de valores-tronco (Y_0), os autores recomendam, por exemplo, gerar todas as permutações de ranks com valores de 1 a K_0 , calculando τ para cada permutação, o que permitiria obter uma gama de troncos disponíveis. É possível observar que, quanto maior o valor de K_0 , mais opções e mais passos refinados serão produzidos. Por exemplo, um tronco com $K_0 = 3$ fornece 4 valores de τ : $-1, 0$; $-1/3$; $1/3$ e $1, 0$. Já um tronco com $K_0 = 4$ propicia 7 valores de τ : $-1, 0$; $-2/3$; $-1/3$; 0 ; $1/3$; $2/3$ e $1, 0$. Com $K_0 = 5$, é possível valores de τ variando entre $-1, 0$ e $1, 0$ em incrementos de 0,2. No entanto, a partir de 7 valores, torna-se complicado gerar todas as permutações, pois a matriz de dados cresce na taxa rápida de $K_0!$. Por exemplo, trabalhando-se com 8 valores, a matriz de todas as permutações possíveis será 40 320 ($=8!$). Com um $K_0 = 9$, existem 362 880 permutações. Uma vez que uma variedade de permutações pode produzir o mesmo valor de τ , várias permutações talvez precisem ser investigadas.

4 Resultados

4.1 Algoritmo desenvolvido para este trabalho

Com base no pseudocódigo apresentado no Anexo A, foi implementado um algoritmo para geração de valores de τ de Kendall conhecido, o qual é apresentado no Apêndice A. Esse algoritmo é dividido em duas partes. A primeira parte gera o vetor tronco, a partir de permutações com quantidade reduzida de elementos, devido ao tempo de processamento, e da filtragem de permutações que produzem o valor de τ de Kendall desejado. Neste caso, também devido ao tempo de processamento, o valor do τ foi arredondado para uma casa decimal. A segunda parte do algoritmo gera pares de rankings X - Y , com base no vetor tronco obtido na primeira parte, mantendo-se o valor do τ de Kendall requerido (igualmente arredondado como antes).

Para a validação desse algoritmo (especificamente, a segunda parte), foi implementado um exemplo apresentado por Arndt e Magnotta (2001) gerando-se 1000 amostras de rankings com $Y_0 = [1, 3, 2]$, propiciando um $\tau = 1/3$, $K_o = 3$, $n = 25$ (quantidade de elementos em cada amostra), $L = 16$ (quantidade de níveis) e calculando-se o τ de Kendall para cada amostra. A Figura 16 mostra a distribuição de frequência obtida. Dessa simulação, foram obtidos 23 pares X - Y com $\tau = 0,3$.

Repetindo-se a simulação com os mesmos dados, porém, gerando-se 10.000 amostras, foi obtida a distribuição demonstrada na Figura 17, da qual se conseguiram 198 pares X - Y com $\tau = 0,3$.

Comparando-se os resultados obtidos nas simulações com o exemplo ilustrado por Arndt e Magnotta (2001), visto na Figura 15, é possível observar uma frequência menor de pares com o valor de τ de Kendall desejado, o que não prejudicou o trabalho apresentado nesta dissertação, devido ao baixo número de avaliadores considerados, como apresentado nos estudos de caso (seções 4.3 e 4.4).

Figura 16 - Distribuição de frequência da simulação baseada no Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001) com 1000 amostras

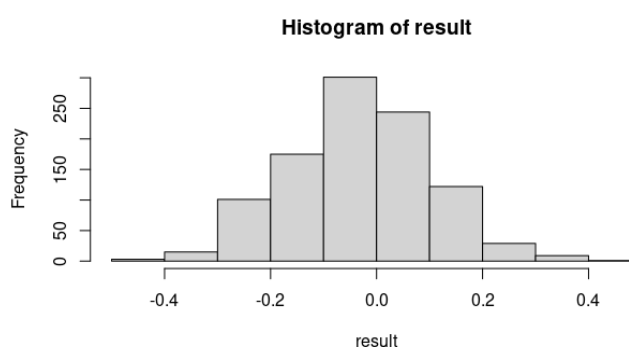
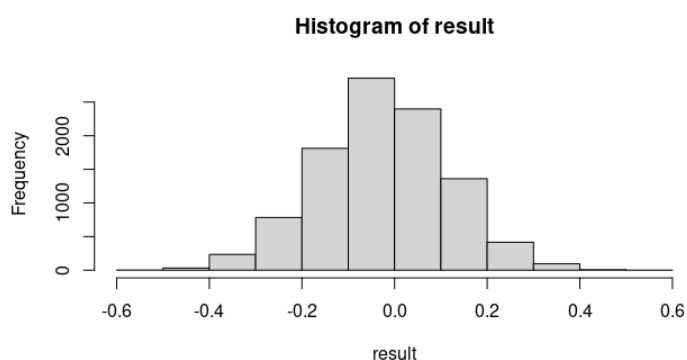


Figura 17 - Distribuição de frequência da simulação baseada no Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001) com 10.000 amostras



4.2 Principais pacotes computacionais

Nesta seção, são apresentados, resumidamente, os principais pacotes computacionais utilizados para o desenvolvimento deste trabalho.

Vargas (2022) apresenta um pacote computacional em linguagem *R* (versão $\geq 3.5.2$) que inclui diferentes métodos de álgebra linear para as equações referenciadas no *Atlas of Economic Complexity* (HAUSMANN et al. 2014) e literatura relacionada. Este pacote fornece saídas tais como índice de Balassa (ou RCA), medidas de complexidade (ICE e ICP), projeções de rede país-produto e proximidade, entre outras.

O pacote '*Kendall*' calcula a correlação de classificação de Kendall e o teste de tendência de Mann-Kendall. Neste trabalho, foi utilizado para cálculo do *tau* de Kendall.

O pacote '*irr*' permite calcular vários coeficientes de confiabilidade e acordo entre avaliadores. Neste trabalho, foi utilizado para o cálculo do coeficiente *W* de Kendall.

O pacote ‘*icr*’ fornece funções para calcular e plotar o alfa do coeficiente de confiabilidade entre codificadores de Krippendorff e estimativas de incerteza inicializadas, de acordo com Krippendorff (2004).

4.3 Estudo de caso 1: agregação de rankings globais de universidades RUR

O *Round University Ranking* (RUR) é um sistema internacional de classificação universitária mundial que mede o desempenho de 1100 universidades líderes mundiais de 82 países desde 2010 por meio de 20 indicadores únicos e 4 áreas principais de atividades universitárias: ensino, pesquisa, diversidade internacional e sustentabilidade financeira. Todos os dados brutos são fornecidos pela empresa internacional *Thomson Reuters*.

O RUR foi concebido como um sistema de avaliação destinado a fornecer informações suficientes sobre o desempenho da universidade para abordar as atividades das partes interessadas: estudantes, comunidade acadêmica, gestão da universidade e formuladores de políticas.

Foi analisada a agregação de rankings com medidas de complexidade econômica a partir de dados disponíveis no site do RUR, de 2010 a 2021 (ROUND UNIVERSITY RANKING LLC, 2021). Neste trabalho, foram considerados os rankings com seus valores ordinais.

Numa primeira etapa, foram considerados os dados originais relativos à classificação final e a cada um dos parâmetros componentes dessa classificação, conforme descrito abaixo:

- TEA: ensino (*Teaching*);
- RES: pesquisa (*Research*);
- ID: diversidade internacional (*International Diversity*); e
- FS: sustentabilidade financeira (*Financial Sustainability*).

Para cada ano referente ao RUR, essas medidas de complexidade foram obtidas a partir da quantidade total de universidades (avaliação completa) e variando-se essa quantidade em subconjuntos de 50 universidades (avaliações parciais), reordenadas conforme suas posições relativas na tabela original, e calculando-se os valores de *tau* de Kendall entre o ranking final (original) e os rankings obtidos pelos valores de Índice de Complexidade de Produto - ICP (ou *Product Complexity Index* - PCI). Esse índice foi calculado considerando-se os indicadores TEA, RES, ID e FS como países (juizes) e as universidades como produtos (objetos). Os resultados estão descritos nas Figuras 18 e 19.

Observa-se que há uma variação em relação aos valores de τ de Kendall dentro do período considerado, com tendência de certa padronização a partir de 2017. Isso se deve à quantidade de universidades participantes, que variou ao longo desses anos, e a alterações no cálculo dos parâmetros para obtenção da classificação final.

Figura 18 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do RUR (curvas sobrepostas)

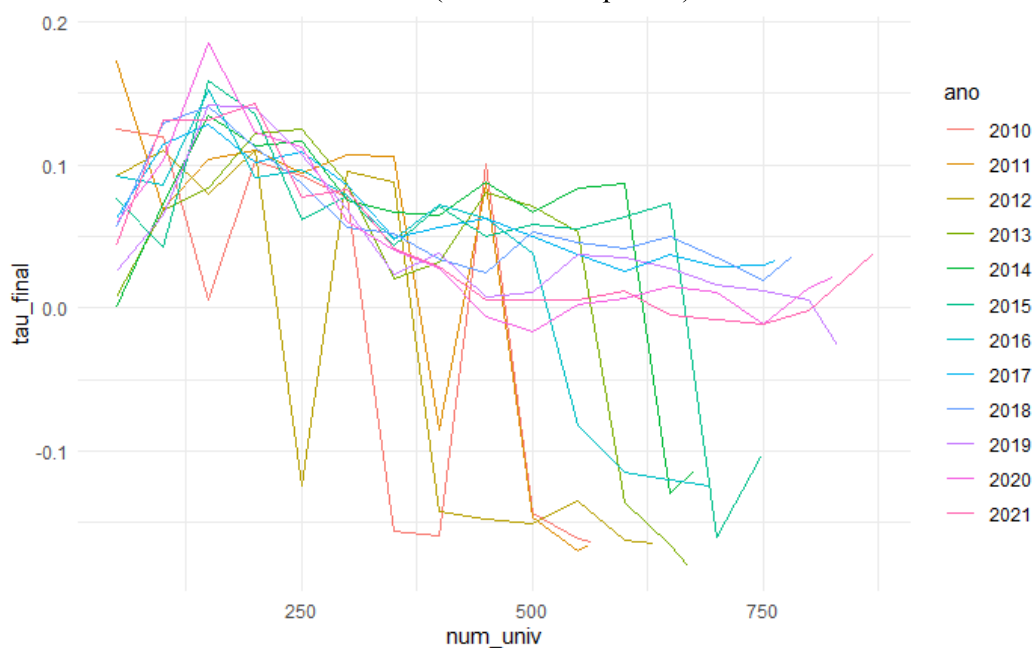
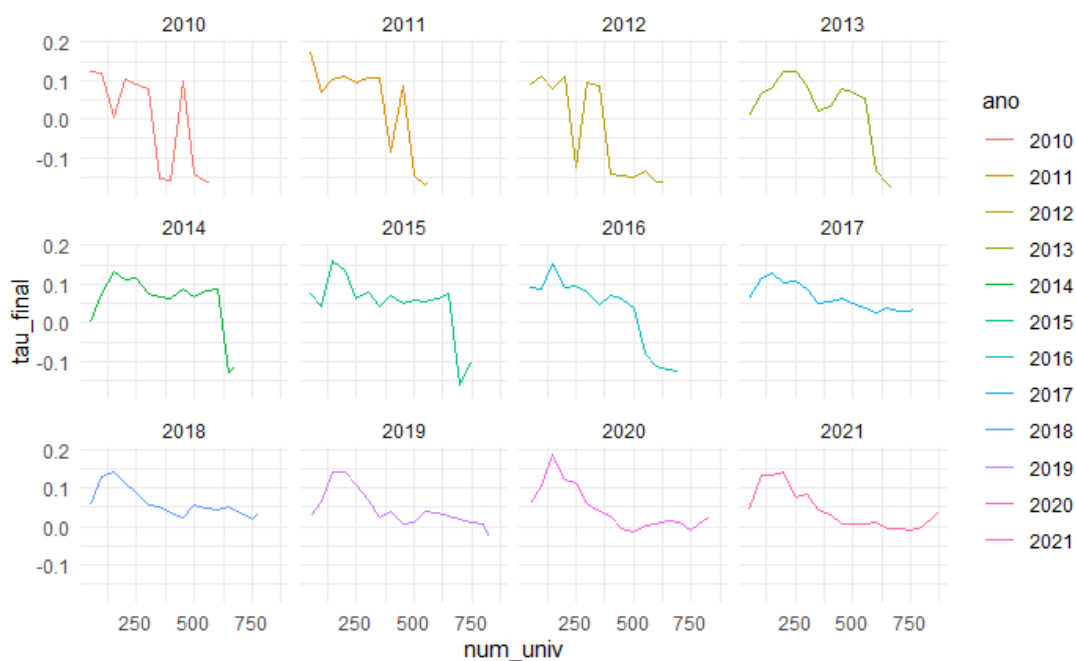


Figura 19 - Variações do τ de Kendall considerando-se quantidades de universidades do RUR (curvas separadas por ano)



Conforme descrito no capítulo sobre o método utilizado neste trabalho, os valores ordinais referentes a esses rankings foram convertidos em valores quantitativos, mantendo-se a ordem referente a essas classificações. As Tabelas 6 e 7 apresentam exemplos dessa conversão, onde estão referenciadas as 10 primeiras universidades classificadas pelo RUR em 2011 e suas respectivas classificações para os parâmetros componentes. Na Tabela 6, estão as classificações originais; na Tabela 7, os valores obtidos pelas conversões. Observa-se, por exemplo, que a Universidade de Harvard obteve, dentre as 561 universidades participantes em 2011, a 2ª colocação no parâmetro *Teaching*, a 1ª colocação no parâmetro *Research*, a 63ª colocação em *International Diversity* e a 1ª colocação em *Financial Sustainability*. Pelo sistema de conversão tratado nesta dissertação, Harvard obteve 560, 561, 499 e 561 pontos, respectivamente. Nesta interpretação, ela mantém sua primeira posição em ID e FS, por ter obtido a maior pontuação (561), e assim por diante.

Tabela 6 - Ranking das primeiras 10 universidades avaliadas pelo RUR em 2011

RANK	UNIVERSIDADE	TEA	RES	ID	FS
1	Harvard University	2	1	63	1
2	California Institute of Technology (Caltech)	1	4	76	4
3	Stanford University	3	2	127	11
4	University of Chicago	4	6	113	73
5	Columbia University	6	9	56	75
6	Yale University	9	11	99	40
7	Northwestern University	11	3	222	61
8	University of Cambridge	31	10	10	9
9	ETH Zurich (Swiss Federal Institute of Technology)	15	41	2	10
10	Princeton University	20	13	88	15

Tabela 7 - Pontuações das primeiras 10 universidades avaliadas pelo RUR em 2011

RANK	UNIVERSIDADE	TEA	RES	ID	FS
1	Harvard University	560	561	499	561
2	California Institute of Technology (Caltech)	561	558	486	558
3	Stanford University	559	560	435	551
4	University of Chicago	558	556	449	489
5	Columbia University	556	553	506	487
6	Yale University	553	551	463	522
7	Northwestern University	551	559	340	501
8	University of Cambridge	531	552	552	553
9	ETH Zurich (Swiss Federal Institute of Technology)	547	521	560	552
10	Princeton University	542	549	474	547

A função ‘*complexity_measures*’ do pacote ‘*economiccomplexity*’, utilizada para os cálculos dos índices de complexidade econômica (como nas simulações que resultaram nas Figuras 18 e 19), possui como um de seus parâmetros o número de iterações, cujo valor *default* é 20, que se referem às reflexões do método especificado por Hidalgo e Hausmann (2009a e 2009b). Especificamente, Hidalgo e Hausmann (2009b), conforme visto na Tabela 8, adaptada por Vasconcelos (2013), apresentam uma interpretação para os primeiros três pares de variáveis, obtidos por meio de iterações, que descreve a rede país-produto por meio de seu método.

Tabela 8 - Método de Reflexões

Iteração	País	Produto
0	Diversificação: número de produtos exportados pelo país <i>c</i> com VCR	Ubiquidade: número de países que exportam o produto <i>p</i> com VCR
1	Ubiquidade média dos produtos exportados por <i>c</i>	Diversificação média dos países que exportam o produto <i>p</i> com VCR
2	Diversificação média dos países com uma cesta de exportações similar ao país <i>c</i>	Ubiquidade média dos produtos exportados pelos países que exportam o produto <i>p</i> com VCR

Fonte: Vasconcelos, 2013, p. 20.

Tendo como referência o conceito sobre o índice de Balassa, que indica a vantagem comparativa revelada (VCR) como sendo a razão entre a participação de um bem nas exportações de um país e a participação do mesmo bem nas exportações mundiais, é possível adaptá-lo, neste trabalho, considerando que o VCR seria a razão entre a participação de uma universidade nas avaliações de um juiz e a participação dessa mesma universidade nas avaliações dadas por todos os juízes. Sendo assim, o juiz *j* teria VCR na universidade *u* quando as avaliações de *u* tivessem uma participação maior no total avaliado pelo juiz *j* que a participação das avaliações de *u* no total de avaliações de todos os juízes. Quando o índice é maior que 1, o juiz avalia a universidade em questão com VCR.

A partir dessa adaptação, os conceitos referentes à diversidade e à ubiquidade podem ser interpretados da seguinte forma: a medida de diversificação de um juiz seria o número de universidades avaliadas com VCR por ele, enquanto a ubiquidade de uma universidade seria o número de juízes que a avaliam com VCR.

Conforme visto em Hidalgo e Hausmann (2009a e 2009b), o Método de Reflexões permite calcular o índice de complexidade a partir de iterações entre a ubiquidade e a diversificação, a fim de se ajustarem as informações sobre um determinado nó da rede bipartida, formada por países e produtos, com informações sobre os nós vizinhos. Essas

iterações são executadas até o ponto em que alguma informação adicional não gere mais diferenças significativas, ou seja, quando se atinge uma convergência em relação ao índice de complexidade. Segundo Vasconcelos (2013), “por meio de iterações é possível, por exemplo, corrigir informações sobre ubiquidade que estejam relacionadas com a raridade de um determinado produto”.

Nesse sentido, para que fosse possível testar ajustes das informações relativas aos rankings reais e obter valores de *tau* de Kendall máximos para o método de agregação por métrica de complexidade econômica, foram feitas simulações variando-se a quantidade de universidades do ranking final de 2021 (em subconjuntos de 50, 100, 150 e 200 primeiras universidades) e o número de iterações e observando-se os resultados obtidos no cálculo do *tau* de Kendall entre o ranking final (original) e os rankings obtidos pelo método de agregação com base nos valores de Índice de Complexidade de Produto - ICP. Nessa situação, os rankings dos indicadores TEA, RES, ID e FS foram reordenados, seguindo a classificação de referência nesses subconjuntos. Os números de iterações e os valores máximos de *tau* de Kendall obtidos nas simulações explanadas acima são mostrados na Tabela 9.

Tabela 9 - Variação do *tau* de Kendall em função do número de iterações

Número de universidades	Número de iterações	<i>tau</i> de Kendall máximo
50	28	0,045
100	34	0,134
150	46	0,185
200	34	0,150
869	120	0,121

Uma segunda maneira de tratamento de agregação foi realizada considerando-se um conjunto de classificações geradas por similaridade ou concordância de Kendall fixada entre os indicadores. Para tanto, foi utilizado o algoritmo citado na seção 4.1 deste trabalho para definir os valores de *tau* de Kendall entre os indicadores TEA, RES, ID e FS. Foi considerado um subconjunto das 125 primeiras universidades no ranking final. O tamanho desse subconjunto foi definido em função da quantidade de elementos do vetor tronco $K_0 = 5$ e o número de níveis $L = 3 \left(K_0^L = 5^3 = 125 \right)$.

Uma limitação nesta etapa se deve ao fato de o algoritmo gerar somente pares de vetores com um *tau* fixado. Desta forma, apenas cada dois dos quatro indicadores teriam o *tau* fixado entre si. Nessa situação, os valores de *tau* calculados entre os demais pares se revelavam mais baixos, alguns deles negativos.

Para contornar esse problema, decidiu-se fixar o τ para um par de indicadores e, por simulação, definir os outros rankings, a partir de um dos vetores definidos previamente, com o mesmo valor de τ . Nessa configuração, foi possível elevar os valores do τ entre mais pares e obter um coeficiente de Kendall $W = 0,71$ (contabilizando apenas os rankings dos indicadores). O resultado pode ser visto na tabela 10.

Tabela 10 - Valores de τ de Kendall entre rankings dos indicadores

	TEA	RES	ID	FS
TEA	1	0.56	0.39	0.32
RES	-	1	0.62	0.56
ID	-	-	1	0.91
FS	-	-	-	1

Para efeito de comparação, foram calculados o τ de Kendall entre o ranking final e o ranking agregado dos quatro indicadores por contagem de Borda (τ_B), a partir de seus rankings ordinais, o coeficiente de Kendall (W_{m+1}) e o alfa de Krippendorff (α_K), ambos considerando os indicadores e o ranking final. O ranking por medida de complexidade econômica (r_{PCI}) foi obtido como apresentado anteriormente (maior τ de Kendall por meio de 38 iterações). Os resultados são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 - Comparação entre medidas de agregação e concordância para o ranking RUR

τ_B	W_{m+1}	α_K	r_{PCI}
0.02	0.50	0.36	0.07

Com base nesses resultados, observa-se um r_{PCI} levemente maior em relação a τ_B , indicando certa similaridade entre si. Há que se levar em conta que essas duas métricas analisam diretamente, por meio do cálculo do τ de Kendall, a correlação entre o ranking obtido pelo método de agregação proposto neste trabalho e o ranking oficial, embora não tenham sido consideradas todas as universidades concorrentes.

4.4 Estudo de caso 2: agregação de rankings bibliométricos INCITES

O InCites é uma ferramenta de avaliação baseada em citações para administradores acadêmicos e governamentais para analisar a produtividade institucional e comparar a produção com seus pares e aspirantes a pares em um contexto nacional ou internacional.

O Manual de Indicadores (CLARIVATE ANALYTICS, 2018) destina-se a fornecer uma visão geral das fontes de dados para os serviços de *Benchmarking & Analytics* do InCites™. Ele explica de onde vêm os dados e como os dados são limpos, categorizados, indexados e processados para fornecer indicadores significativos do desempenho da pesquisa. Também fornece explicações detalhadas sobre cada um dos indicadores, como são calculados, seu valor e exemplos de uso adequado.

Neste estudo de caso, foi analisada a agregação de rankings com medidas de complexidade econômica dos dados relativos ao período entre 2011 e 2018, considerando quatro variáveis quantitativas, consideradas como indicadores:

- WSD = quantidade de documentos citados na *Web of science*;
- TC = quantidade de vezes em que os artigos foram citados;
- IntCol = porcentagem de colaborações internacionais;
- IndCol = porcentagem de colaborações com indústrias.

Analogamente ao ranking RUR, neste estudo de caso, as medidas de complexidade foram obtidas a partir da quantidade total de universidades e variando-se em subconjuntos de 200 universidades, calculando-se os valores de *tau* de Kendall entre o ranking final e os rankings obtidos pelos valores de Índice de Complexidade de Produto - ICP. No entanto, diferentemente do estudo de caso anterior, esta etapa considerou as variáveis quantitativas; portanto, nessa etapa, os valores não foram reordenados. Além disso, foram observados dados faltantes, por haver universidades que não participaram em todos os anos. Sendo assim, foram imputados valores zero nessas lacunas. Os resultados estão descritos nas Figuras 20 e 21. Nelas, observa-se uma maior uniformidade nas variações dos valores de *tau* de Kendall entre os anos considerados.

Numa segunda etapa, os rankings dos indicadores foram convertidos para valores ordinais e foram calculadas as mesmas medidas feitas para o ranking RUR, considerando-se as 125 primeiras universidades no ranking final. Ou seja, foram calculados, o *tau* de Kendall entre o ranking final e o ranking agregado dos quatro indicadores por contagem de Borda (τ_B), a partir de seus rankings ordinais, o coeficiente de Kendall (W_{m+1}) e o alfa de Krippendorff (α_K), ambos considerando os indicadores e o ranking final. O ranking por medida de complexidade econômica (r_{PCI}) foi obtido como apresentado anteriormente (maior *tau* de Kendall por meio de 2 iterações). Os resultados são apresentados na Tabela 12.

Figura 20 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do InCites (curvas sobrepostas)

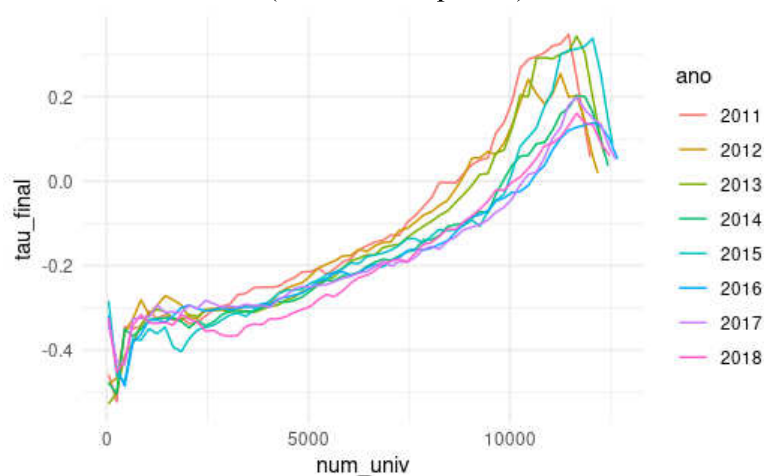


Figura 21 - Variações do tau de Kendall considerando-se quantidades de universidades do InCites (curvas separadas)

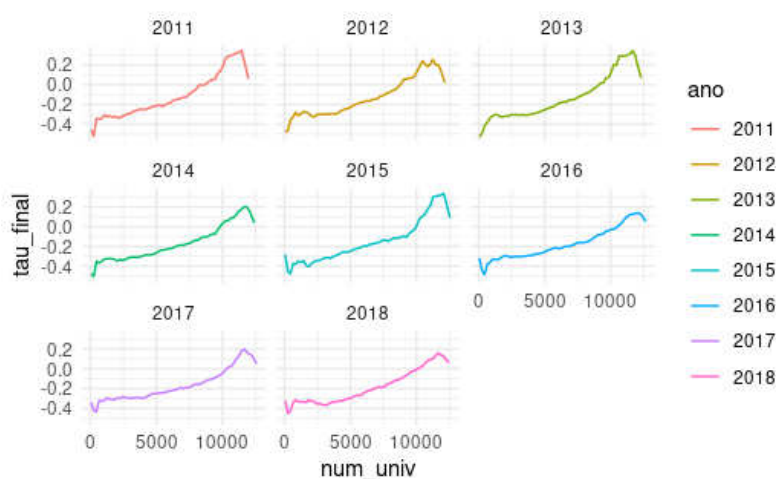


Tabela 12 - Comparação entre medidas de agregação e concordância para o ranking InCites

τ_B	W_{m+1}	α_K	r_{PCI}
0.59	0.44	0.30	0.57

Semelhantemente ao estudo de caso anterior, observa-se que as medidas r_{PCI} e τ_B , embora com valores mais altos em relação ao ranking RUR, estão próximas, indicando certa similaridade entre si.

Nestes dois primeiros estudos de caso, subconjuntos de objetos dos rankings RUR e InCites foram selecionados, com o objetivo de se obter uma agregação a ser comparada com a classificação original. Os resultados foram ao encontro do que era esperado, tanto no aspecto do incremento da concordância quanto o valor de Kendall obtido, dado que a probabilidade de

concordância decresce com o tamanho do conjunto examinado e os valores agregados originais apresentam uma ponderação metodológica que, neste caso de agregação, não foi totalmente considerada.

Uma das características importantes da classificação pelo método de complexidade econômica reside no fato de que a ponderação procura um subconjunto de elementos (variáveis, indicadores ou outra métrica utilizada) que mostre a vantagem comparativa do objeto com respeito aos outros. A principal dificuldade para se obterem valores que denotam diferenças entre os objetos é a pequena quantidade de indicadores utilizados. Acredita-se que com um incremento nesse número de indicadores, haverá uma maior concordância entre os rankings e a classificação original.

4.5 Estudo de caso 3: análise de competitividade

A segunda parte deste trabalho consiste na análise de competitividade entre os rankings considerando as classificações resultantes de cada ano. As mudanças das posições entre os elementos permitem criar uma rede complexa, cujos nós são as universidades e as arestas representam a mudança de posição entre dois ou mais objetos.

Aqui, apresenta-se uma análise de competitividade relativa ao RUR, entre os anos de 2011 e 2021, e o InCites, entre os anos de 2011 e 2018, considerando-se as primeiras 20 universidades classificadas com referência ao ano de 2011 em ambas as famílias de rankings. Assim, essas universidades foram reordenadas em relação aos demais anos, mantendo-se sua classificação sequencial.

Para essa análise, foram calculadas as medidas apresentadas por Criado et al. (2013) e descritas na seção 3.2.1 desta dissertação, apresentadas na Tabela 13. O grafo de competitividade evolutiva resultante para o ranking RUR é visto na Figura 22.

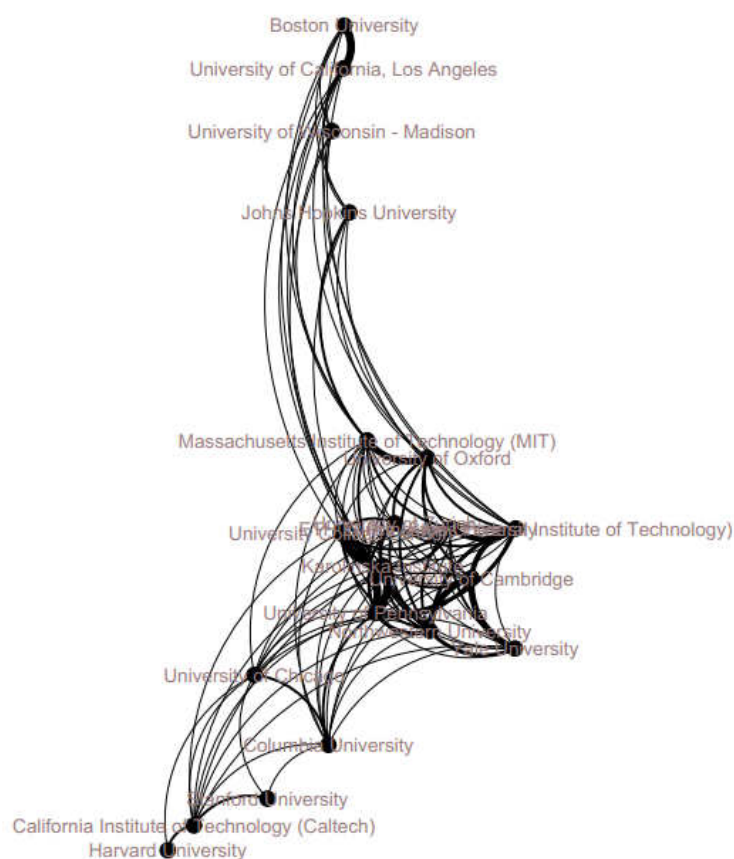
Tabela 13 - Medidas de competitividade para o ranking RUR - 2011 a 2021

	$ND(R)$	$NS(R)$	$C(R)$	$\tau(R)$	$\tau_e(R)$
<i>RUR</i>	0.56	0.13	0.83	-0.13	0.74
<i>InCites</i>	0.26	0.08	0.64	0.47	0.84

A Tabela 13 demonstra que $ND(RUR) > ND(InCites)$, $NS(RUR) > NS(InCites)$, $C(RUR) > C(InCites)$, $\tau(RUR) < \tau(InCites)$ e $\tau_e(RUR) < \tau_e(InCites)$. Sendo assim, com base nas métricas definidas por Criado et al (2013), é possível afirmar que o RUR

apresentou maior nível de competitividade, ou seja, apresentou maior troca de posições entre suas universidades participantes do que o InCites.

Figura 22 - Grafo de competitividade evolutiva para o ranking RUR



Na Figura 22, é possível apreciar, a partir das arestas e dos valores dos pesos das arestas, que as universidades que ocupam as primeiras posições intercambiam pouco com os outros, especialmente com as outras universidades do topo. Entretanto, para as instituições que compõem o meio da tabela, as mudanças são maiores e com um subconjunto maior de objetos, mostrando ainda menores valores de coeficiente de clustering entre eles.

5 Conclusões

Medidas de concordância em rankings, apesar de ser um tópico muito trabalhado ao longo dos anos, apresentam sempre alguma novidade de metodologia de construção e aplicação.

As medidas de agregação em rankings analisadas sugerem agregações visando a minimização de um funcional de custo ou a maximização de uma função esperada de ganho. Em alguns casos, observa-se a ponderação (de acordo com a metodologia proposta pelos especialistas do ranking) entre os indicadores. Entretanto, a proposta da medida de complexidade econômica permite uma agregação que busca entre os indicadores aqueles que representam alguma vantagem para cada objeto avaliado (universidade, por exemplo). A dificuldade sinalizada para este tipo de proposta está caracterizada pelo pequeno número de indicadores ou variáveis que compõem a avaliação. Em alguns casos, propõe-se uma alternativa para os indicadores que apresentam alguma discrepância ou valor faltante. A medida de complexidade econômica representa uma boa alternativa para casos em que os pesos dos indicadores utilizados não são conhecidos.

Uma segunda aplicação das técnicas de análise de rankings foi a da medida de competitividade entre os elementos dos rankings. Esta métrica pode resultar em vários indicadores de mudança de estratégias para o crescimento das instituições. Outro elemento chave de análise da competitividade pode resultar na avaliação dos elementos que determinam as maiores mudanças entre os elementos, podendo, em algum momento, gerar vários subconjuntos ou, nos termos desportivos, ligas de universidades que competem entre si.

Esta primeira parte do trabalho se concentrou em análise de agregação de rankings com base em medidas de complexidade econômica.

Para trabalhos futuros, sugere-se estender as análises aqui apresentadas para avaliação de medidas de concordância entre rankings.

6 Trabalhos futuros

Uma das principais dificuldades encontradas para o trabalho foi o limite temporal para a apresentação e sustentação do mestrado, derivado de boa parte do tempo da elaboração deste trabalho ser utilizado no estudo de conceitos básicos sobre programação computacional aplicada à modelagem.

No entanto, algumas das análises não apresentadas aqui estão em andamento ou estão nos primeiros lugares da fila de trabalho, entre as quais podem ser citadas:

1. Análise das medidas de concordância diante da falta de avaliação dos objetos (seja por recusa ou outro problema) do juiz. Para tanto, podem ser geradas redes complexas que permitam verificar a robustez do mapa diante do corte (ou poda) de algumas das ligações entre nós.
2. Simulação de indicadores por meio do valor da concordância de Kendall, de forma a caracterizar os objetos que são menos propensos a mudanças.

REFERÊNCIAS

ARNDT, Stephan; MAGNOTTA, Vincent. Generating random series with known values of Kendall's tau. **Computer Methods And Programs In Biomedicine**, [S.L.], v. 65, n. 1, p. 17-23, abr. 2001. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169260700001024>. Acesso em: 16 maio 2022.

BELTRAME, Bruno; MATTOS, Laura Valladão de. As críticas de Amartya Sen à teoria da escolha social de Kenneth Arrow. **Nova Economia**, v. 27, p. 65-88, 2017. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/neco/a/VH9vK8hc5YFrsWvf4vy4hZx/?lang=pt&format=html>. Acesso em: 15 fev. 2023.

CLARIVATE ANALYTICS. **InCites: indicators handbook**. [S. L.]: Clarivate, 2018.

Disponível em:

<http://help.prod-incites.com/inCites2Live/indicatorsGroup/aboutHandbook.html>. Acesso em: 06 abr. 2022.

COSTA, L. da F.; RODRIGUES, F. A.; TRAVIESO, G.; BOAS, P. R. V. Characterization of complex networks: A survey of measurements. **Advances in Physics**, v. 56, p. 167–242, 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0505185v5>. Acesso em: 16 maio 2022.

CRIADO, R.; GARCÍA, E.; PEDROCHE, F.; ROMANCE, M. A new method for comparing rankings through complex networks: model and analysis of competitiveness of major european soccer leagues. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 23, p. 043114–1 – 043114–10, 2013. Disponível em:

<https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4826446>.

EMERSON, P. The original Borda count and partial voting. *Soc Choice Welf* 40, 353–358 (2013). Disponível em: [The original Borda count and partial voting | SpringerLink](#). Acesso em: 18 jan. 2023.

FAGIN, R.; KUMAR, R.; MAHDIAN, M.; SIVAKUMAR, D.; VEE, E. Comparing partial rankings. In: **Journal Discrete Math**. [S.l.: s.n.], 2006. p. 628–648.

FIERGOLLA, Sven et al. **Heuristic for Diverse Kemeny Rank Aggregation based on Quantum Annealing**, 2023. Disponível em: [\[2301.05146\] Heuristic for Diverse Kemeny Rank Aggregation based on Quantum Annealing \(arxiv.org\)](#). Acesso em: 22 jan. 2023.

FRANCESCHINI, F.; MAISANO, D. Fusion of partial orderings for decision problems in quality management. In: **ICQEM** (Ed.). INTERNATIONAL CONFERENCE ON QUALITY ENGINEERING AND MANAGEMENT. World Scientific Publishing Co., 2018. p. 126–147. Disponível em: <https://iris.polito.it/handle/11583/2710839>.

_____. Design decisions: concordance of designers and effects of the Arrow's theorem on the collective preference ranking. *Res Eng Design* 30, 425–434 (2019). Disponível em: [Design decisions: concordance of designers and effects of the Arrow's theorem on the collective preference ranking | SpringerLink](#). Acesso em: 05 jan. 2023.

_____. Decision concordance with incomplete expert rankings in manufacturing applications. In: **Research in Engineering Design**. [s.n.], 2020. p. 471–490. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00163-020-00340-x>.

_____. Aggregating multiple ordinal rankings in engineering design: the best model according to the Kendall's coefficient of concordance. *Res Eng Design* 32, 91–103 (2021). Disponível em: [Aggregating multiple ordinal rankings in engineering design: the best model according to the Kendall's coefficient of concordance | SpringerLink](#). Acesso em: 03 jan. 2023.

HAUSMANN, Ricardo *et al.* **The atlas of economic complexity: mapping paths to prosperity**. [S. L.]: Mit Press, 2014.

HAYES, Andrew F.; KRIPPENDORFF, Klaus. Answering the call for a standard reliability measure for coding data. **Communication methods and measures**, v. 1, n. 1, p. 77-89, 2007. Disponível em https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/19312450709336664?casa_token=ghEyjejUiNAAAAAA%3A5xcWDY3i-luiIgDCuoxtnMERf2F16fJ78FninK8_yaV92pgKFlam94k7whsr6c0XWTgDfWzjPNBeCk. Acesso em: 27 fev. 2023.

HE, X.; GAO, M.; KAN, M.-Y.; WANG, D. Birank: Towards ranking on bipartite graphs. In: **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**. [s.n.], 2017. p. 57–71. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7572089/authors#authors>.

HIDALGO, César A.; HAUSMANN, Ricardo. The building blocks of economic complexity. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences*, [S.L.], v. 106, n. 26, p. 10570-10575, 30 jun. 2009. **Proceedings of the National Academy of Sciences**. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.0900943106>. Acesso em: 13 mar. 2022.

HIDALGO, César A.; HAUSMANN, Ricardo. Supplementary material for: the building blocks of economic complexity. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, [S.L.], v. 106, n. 26. 30 jun. 2009. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.0900943106#supplementary-materials>. Acesso em: 8 fev. 2023.

HIDALGO, César A.. Economic complexity theory and applications. **Nature Reviews Physics**, [S.L.], v. 3, n. 2, p. 92-113, 25 jan. 2021. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/s42254-020-00275-1>. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s42254-020-00275-1>. Acesso em: 13 mar. 2022.

KENDALL, M. G. A new measure of rank correlation. **Biometrika**, p. 81–93, 1938. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/pdf/2332226.pdf?seq=1>.

KENDALL, M. G. The treatment of ties in ranking problems. **Biometrika**, v. 33, n. 3, p. 239–251, 1945. Disponível em: [https://www.jstor.org/stable/2332303?casatoken=3-XAx5d4UIAAAAA%3A5goAzp5cUf447UzBJXo3Oaztie--Grq-TeBfDZQYf8V4qk5R15MG50k-kipCxwbna5IdyleNkrhE1-YTseq=1#metadata info tab contents](https://www.jstor.org/stable/2332303?casatoken=3-XAx5d4UIAAAAA%3A5goAzp5cUf447UzBJXo3Oaztie--Grq-TeBfDZQYf8V4qk5R15MG50k-kipCxwbna5IdyleNkrhE1-YTseq=1#metadata%20info%20tab%20contents).

KENDALL, M. G.; BABINGTON-SMITH, B. The problem of m rankings. **The Annals Of Mathematical Statistics**, p. 275–287, 1939. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2235668?seq=1>.

KRIPPENDORFF, Klaus. Estimating the reliability, systematic error and random error of interval data. **Educational and psychological measurement**, v. 30, n. 1, p. 61-70, 1970. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/001316447003000105?journalCode=epma>. Acesso em: 27 fev. 2023.

KRIPPENDORFF, Klaus. **Computing Krippendorff's alpha-reliability**. 2011. Disponível em: https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1043&context=asc_papers.

Acesso em: 27 fev. 2023.

LEGENDRE, P. **Coefficient of concordance**. *Research Design*, v. 1, p. 164–169, 2010.

LIN, S. (2010), Rank aggregation methods. **WIREs Comp Stat**, 2: 555-570. Disponível em: [Rank aggregation methods - Lin - 2010 - WIREs Computational Statistics - Wiley Online Library](#). Acesso em: 29 nov. 2022.

MEALY, Penny; FARMER, J. Doyne; TEYTELBOYM, Alexander. Interpreting economic complexity. **Science advances**, v. 5, n. 1, p. eaau1705, 2019. Disponível em: <https://www.science.org/doi/full/10.1126/sciadv.aau1705>. Acesso em: 10 fevereiro 2022.

MIZAK, D.; NERAL, J.; STAIR, A. The adjusted churn: an index of competitive balance for sports leagues based on changes in team standings over time. **Economics bulletin**, v. 26, n. 3, p. 1–7, 2007. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.570.8297&rep=rep1&type=pdf>).

PEDROCHE, F.; CRIADO, R.; GARCÍA, E.; ROMANCE, M.; SÁNCHEZ, V. E. Comparing series of rankings with ties by using complex networks: an analysis of the spanish stock market (ibex-35 index). **Networks and heterogeneous media**, v. 10, n. 1, p. 101–125, 2015. Disponível em: <https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/nhm.2015.10.101>.

ROUND UNIVERSITY RANKING LLC. **Round University Ranking**. 2021. Disponível em: <https://roundranking.com/ranking/world-university-rankings.html#world-2022>. Acesso em: 06 abr. 2022.

SCHUCANY, W. R.; FRAWLEY, W. H. A rank test for two group concordance. **Psychometrika**, v. 38, n. 2, p. 249–258, 1973. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02291117>.

THURSTONE, L. A law of comparative judgments. **Psychological Review**, v. 34, n. 4, p. 273–286, 1927. Disponível em: [https://www.jstor.org/stable/2332303?casatoken=3-XAx5d4UIAAAAA%3A5goAzp5cUf447UzBJXo3Oaztie--Grq-TeBfDZQYf8V4qk5R15MG50k-kipCxwbna5IdyleNkrhE1-YTseq=1#metadata info tab contents](https://www.jstor.org/stable/2332303?casatoken=3-XAx5d4UIAAAAA%3A5goAzp5cUf447UzBJXo3Oaztie--Grq-TeBfDZQYf8V4qk5R15MG50k-kipCxwbna5IdyleNkrhE1-YTseq=1#metadata%20info%20tab%20contents).

VARGAS, Maurício et al. **Computational Methods for Economic Complexity**. Versão 1.4.0. [S.l.], 13 out. 2022. Disponível em:

<https://cran.r-project.org/package=economiccomplexity>. Acesso em: 03 nov. 2022.

VASCONCELOS, Tomás da Costa e Silva. **O índice de complexidade econômica**: uma revisão teórica e aplicações ao caso brasileiro. 2013. 49 f., il. Monografia (Bacharelado em Ciências Econômicas)—Universidade de Brasília, Brasília, 2013. Disponível em

<https://bdm.unb.br/handle/10483/6658>. Acesso em: 8 fev. 2023.

VIDMAR, G.; RODE, N. Visualising concordance. **Computational statistics**, v. 22, n. 4, p. 499–509, 2007. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00180-007-0057-9>.

WEAVER, Warren. SCIENCE AND COMPLEXITY. **American Scientist**. [S. L.], p. 536-544. out. 1948.

ANEXOS

ANEXO A - Pseudocódigo do Algoritmo 2 de Arndt e Magnotta (2001)

-
1. Obtain the length of the stem vector (K_0), the number of levels to generate, (L), and the stem vector Y_0
 2. Randomly select an index value (i) in the range of 0 to $(K_0^L - 1)$ using a uniform random number generator, $i = (\text{long}) (\text{RAN}() \times K_0^L)$
 3. Convert the decimal value of i to base K_0 and store the result in PATH, maintaining any leading zeros
 4. For the L digits in PATH:
 - a. Look up the value in the vector Y_0 (indexed 0 to $K_0 - 1$) associated with each digit in PATH
 - b. subtract one from the Y_0 value, and
 - c. store each successive digit in BASEVALUE
 5. Convert the BASEVALUE from base K_0 to a decimal base and add one to form the Y -value
 6. Store i as the X -value
 7. Output the X - Y pair
-

APÊNDICES

APÊNDICE A - Algoritmo em R elaborado com base no pseudocódigo do Anexo A

```

# Pacotes necessários
library(combinat)
library(Kendall)
# Gerador do vetor tronco (stem vector)
# Calculando o tau de Kendall para todas as permutações de n elementos:
p <- 5
permut <- t(array(unlist(permn(p)), dim = c(p, gamma(p+1))))
tau_completo <- vector("numeric",length = 1)
t <- 0
for (i in 1:(gamma(p+1)-1)) {
  t <- t+1
  kend <- Kendall(c(1:p),permut[i,])
  tau_completo[t] <- kend$tau
}
ggplot(as.data.frame(tau_completo)) +
  aes(x = tau_completo) +
  geom_histogram(bins = 30L, fill = "#112446") +
  theme_minimal()
# Filtrando as permutações para um tau de Kendall específico
tau_required <- 0.6
tau_filtrado <- vector("numeric",length = 1)
index <- vector("numeric",length = 1) # índice do vetor tau_completo que possui o
#tau_required
for (i in 1:(gamma(p+1)-1)) {
  kend <- Kendall(c(1:p),permut[i,])
  if (round(kend$tau,1) == tau_required){
    tau_filtrado <- c(tau_filtrado,kend$tau)
  }
}

```

```

    index <- c(index,i)
  }
}
print(index)
length(tau_filtrado)

# Teste dos vetores filtrados
Kendall(c(1:p),permut[3,])

# Gerador de pares de vetores com tau de Kendall conhecido
Y0 <- permut[9,] # vetor tronco
K0 <- length(Y0) # número de elementos em Y0
L <- 3 # número de níveis
n <- 125 # quantidade de elementos nos vetores X_value e Y_value
m <- 10000 # Número de rodadas

result <- vector("numeric",length = m)
X_required <- matrix(0,nrow=1,ncol=n)
Y_required <- matrix(0,nrow=1,ncol=n)
for (r in 1:m) {
  # Inicialização dos vetores
  X_value <- vector("numeric",length = L)
  Y_value <- vector("numeric",length = L)
  PATH <- vector("numeric",length = L)
  BASEVALUE <- vector("numeric",length = L)
  for (v in 1:n) {
    # Seleciona i aleatoriamente
    i <- floor(runif(1)*(K0^L-1))
    # Converte decimal i para base K0 e armazena em PATH
    decimal <- i
    j <- 1
    while(decimal > 0){

```

```

PATH[j] <- decimal %% K0 # resto da divisão
decimal <- decimal %/% K0 # parte inteira da divisão
j <- j+1
}
PATH <- rev(PATH)
# Passo 4
for (k in 1:L) {
  BASEVALUE[k] <- Y0[PATH[k]+1]-1
}
# Converte BASEVALUE em decimal
decimal2 <- 0
e <- 0
for (t in length(BASEVALUE):1) {
  decimal2 <- decimal2 + BASEVALUE[t]*(K0^e)
  e <- e+1
}
Y_value[v] <- decimal2 + 1
X_value[v] <- i
}
a <- Kendall(X_value,Y_value)
result[r] <- a$tau
# Separar os pares com tau conhecido
if (round(a$tau,1) == tau_required){
  X_required <- rbind(X_required,X_value)
  Y_required <- rbind(Y_required,Y_value)
}
}
ggplot(as.data.frame(result)) +
  aes(x = result) +
  geom_histogram(bins = 50L, fill = "#112446") +
  labs(
    x = "tau de Kendall",

```

```
y = "Frequência",  
title = "Distribuição dos valores de tau de Kendall para os pares gerados"  
) +  
theme_minimal()
```