UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE
RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

EVANDRO MARCOS SAIDEL RIBEIRO

**Árvore geradora mínima aplicada ao estudo da interligação administrativa
em empresas listadas na BM&FBOVESPA**

:

RIBEIRÃO PRETO
2015

Marco Antonio Zago
Reitor da Universidade de São Paulo

Dante Pinheiro Martinelli
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Sonia Valle Walter Borges de Oliveira
Chefe do Departamento de Administração

EVANDRO MARCOS SAIDEL RIBEIRO

Árvore geradora mínima aplicada ao estudo da interligação administrativa
em empresas listadas na BM&FBOVESPA

Tese apresentada à Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade de Ribeirão
Preto, da Universidade de São Paulo, para
obtenção do título de Livre Docente - Depar-
tamento de Administração. Área de Conhe-
cimento: Métodos quantitativos (estatística e
matemática aplicada)

:

RIBEIRÃO PRETO

2015

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Ribeiro, Evandro Marcos Saidel

Árvore geradora mínima aplicada ao estudo da interligação administrativa em empresas listadas na BM&FBOVESPA / Evandro Marcos Saidel Ribeiro – Ribeirão Preto, 2015.

91f.: il.; 30 cm

Tese apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Livre Docente - Departamento de Administração. Área de Conhecimento: Métodos quantitativos (estatística e matemática aplicada)

1. Árvore Geradora Mínima. 2. Teoria de Redes. 3. Interligação Administrativa. 4. Conselho de Empresas.

À Andréa e à Julia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais (*in memoriam*), Ary Ribeiro e Maria de Lourdes Saidel Ribeiro, pelo exemplo de vida que guiou meus passos até aqui.

À Andréa, minha querida esposa, pelo amor, amizade, compreensão e por tudo que tem dedicado à nossa vida. Sem você, meu amor, minha vida não teria sentido. Agradeço a você por me apoiar neste momento, compreendendo minha ausência em alguns momentos e também questionando os resultados obtidos, "... mas... e aí?", o que ajudou a manter o espírito científico.

À Julia, minha adorável filha, pelos momentos de diversão que servem para renovar as forças para continuar o trabalho. Minha querida, obrigado pelas várias vezes que perguntou: "- Pai, você está muito ocupado?". Sei que compreende que algumas vezes tive que responder: "- Sim, estou". Que bom que muitas vezes pude dizer que "- Não estou!"

A vocês duas, Andréa e Julia, por cederem o tempo necessário para que eu pudesse escrever este trabalho e por todos os maravilhosos momentos juntos.

Ao Departamento de Administração (RAD) da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto (FEARP) pelo incentivo e apoio ao desenvolvimento profissional de seus docentes.

À Luciana, ao Henrique e à Valquíria, da secretaria do RAD, pelo trabalho que realizam, sempre com muita dedicação, atenção e disponibilidade.

Ao Prof. Gilberto, pelas discussões e parceria em pesquisas acadêmicas.

À Maria Angélica, pelo grande suporte técnico dedicado com muita atenção neste trabalho, desde o início com a definição da base de dados, até o final com a atenção ao texto final.

Ao Prof. Alberto pelo constante apoio e incentivo à interdisciplinaridade nas atividades de ensino, pesquisa e extensão.

Ao Lucas, ao André, à Simone e à Maria Eduarda, estagiários do RAD, pela dedicação na organização do meu memorial.

Ao André, da secretaria do Departamento de Economia, pelo apoio em diversas etapas da pesquisa.

À Érika, ao Matheus e ao Thiago, da secretaria de Pós-Graduação da FEARP, pela ajuda com a obtenção de documentos e comprovantes necessários.

À Marta e à Iza, do setor de Recursos Humanos, pela informação e obtenção de parte de documentos e comprovantes necessários.

À Denise, da secretaria de Graduação, pela ajuda com a obtenção de documentos

e comprovantes necessários.

À Rita e à Angela, da secretaria de Apoio Acadêmico, pela ajuda na obtenção de vários comprovantes de atividades de extensão e pela constante ajuda em esclarecimentos em assuntos relacionados à extensão universitária.

À equipe de desenvolvimento do `abnTeX2`, pelo excelente trabalho no desenvolvimento da classe `abnTeX2` para `LATEX`, que atende aos requisitos das normas da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas) para elaboração de documentos técnicos e científicos brasileiros.

“The surest remedy, however, for combating and overcoming the abuse of fiduciary relation of directors, whether through the power and influence of interlocking interests represented by common and dual directorships, or otherwise, lies in publicity and in public vigilance”.
(Max Pam, 1913)

RESUMO

Neste trabalho a interligação administrativa em empresas brasileiras de capital aberto, listadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA), é descrita sob a vertente de teoria de redes. Nesta análise são consideradas 310 empresas e 1997 diretores, numa amostra extraída em setembro de 2013, dos relatórios de Informações Anuais disponibilizados no site da BM&FBOVESPA. A participação de um diretor no conselho de uma empresa define uma ligação conselheiro-empresa e a participação de um mesmo conselheiro em mais de um conselho leva a formação de uma rede bipartida com vértices do tipo empresa e do tipo conselheiro. Três modos da rede bipartida são estudados: a rede completa com arestas do tipo conselheiro-empresa, a rede de empresas e a rede de conselheiros. Como proposta, este trabalho apresenta a árvore geradora mínima como uma estrutura base para o estudo de influências na rede. A determinação da árvore geradora mínima é feita para a componente com o maior número de vértices conectados, tanto para o modo de rede de empresas como também para o modo de rede de conselheiros. A obtenção das ligações com maiores influências é feita com a aplicação do algoritmo de Kruskal para árvore geradora mínima. Os resultados obtidos das estatísticas das redes são comparados com as estruturas de árvores mínimas. O alinhamento entre as estatísticas e a análise gráfica sugere que a árvore geradora mínima seja vista como um núcleo que evidencia as potenciais influências na interligação administrativa em empresas de capital aberto no Brasil.

Palavras-chave: Interligação administrativa, Árvore geradora mínima, Conselho de Administração, Teoria de Redes, Sistemas complexos.

ABSTRACT

The interlocking board in Brazilian publicly traded companies on the BM&FBOVESPA (BM&FBOVESPA S.A. – Securities, Commodities and Futures Exchange), is described with the tenets of network theory. In this analysis, it is considered a sample of 310 companies and 1997 directors, extracted in September 2013 from the Annual Information Report, available on the BM&FBOVESPA website. The participation of a director on the company's board sets a director-firm link. The participation of one director in more than one board leads to a bipartite network formation, with two types of nodes, company and directors. The modes of bipartite network are studied: a two-mode complete network with company-director edges, a one-mode companies network and the one-mode directors network. Here, a minimum spanning tree is proposed as a central structure for studies on influences over the network. The minimum spanning tree is obtained, considering the largest network component, for the companies network as well as for the directors network. The links with major influences are obtained by applying the Kruskal algorithm for minimum spanning tree. Network statistics results are compared with the minimum spanning tree. The alignment between the statistical and graphical analysis allows to suggest the minimum spanning tree as a core of potential influences on interlocking board in Brazil.

Keywords: Interlocking Board, Minimum Spanning Tree, Board of directors, Network Theory, Complex Systems.

LISTA DE SÍMBOLOS

$A_{i,j}$	Elemento da matriz de adjacência $\mathbf{A}$.
c'_i	Medida de centralidade de proximidade.
$d_{i,j}$	Distância geodésica entre os vértices i e j .
γ	Expoente presente em distribuições do tipo lei de potência.
k_i	Grau do vértice i .
ℓ	Comprimento de caminho característico, em inglês: <i>Average Path Lenght</i>
ℓ_i	Distância média do vértice i aos demais vértices.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Apresentação e delimitação do tema	19
1.2	Justificativa para escolha do tema	20
1.3	Estrutura do trabalho	21
2	INTERLIGAÇÃO ADMINISTRATIVA	25
2.1	Estudos sobre <i>Interlocking</i>	27
2.2	Estudos específicos no exterior sobre Interligação Administra- tiva	28
2.3	Estudos no Brasil sobre Interligação Administrativa	30
3	ESTUDOS DE REDES	33
3.1	Características gerais de redes	34
3.1.1	Representação da rede	36
3.1.2	Redes dirigidas	38
3.1.3	Redes bipartidas	39
3.2	Principais métricas de redes	40
3.2.1	Grau	41
3.2.2	Comprimento de caminho médio	41
3.2.3	Proximidade	42
3.2.4	Intermediação para um vértice	42
3.2.5	Classe da Modularidade	43
3.2.6	PageRank	43
3.2.7	Intermediação de aresta	43
3.2.8	Grupos de vértices	44
3.2.9	Medidas globais	44
3.2.10	Métricas para uma rede exemplificada	45
4	MODELOS DE FORMAÇÃO DE REDES	49
4.1	Redes aleatórias	49
4.2	Redes mundo-pequeno	50
4.3	Ligações preferenciais e redes livres de escala	52
5	ÁRVORE GERADORA	55
5.1	Árvore geradora mínima	55
5.2	O algoritmo de Kruskal	57
5.3	Árvore geradora e interligação administrativa	58

6	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	59
6.1	Caracterização da pesquisa	59
6.2	Amostra de empresas e dados obtidos	59
6.3	Técnicas de análise de dados	61
7	RESULTADOS E DISCUSSÃO	63
7.1	Formação da rede bipartida	63
7.1.1	Rede de empresas	68
7.1.2	Rede de conselheiros	73
7.2	Árvores mínimas obtidas	78
7.2.1	Árvore geradora mínima para rede de empresas	79
7.2.2	Árvore geradora mínima para rede de conselheiros	81
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	87
	Índice	91

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura do trabalho	23
Figura 2 – <i>Interlocking Board</i> Direto	25
Figura 3 – <i>Interlocking Board</i> Indireto	26
Figura 4 – Königsberg, Prússia, 1736	33
Figura 5 – Grafo para as pontes de Königsberg	34
Figura 6 – Kaliningrado, Rússia, 2014	35
Figura 7 – Exemplo de rede com 14 vértices e 15 arestas	35
Figura 8 – Rede da FEARP no Facebook	39
Figura 9 – Exemplo de rede bipartida	40
Figura 10 – Rede aleatória, exemplo no <i>software</i> Netlogo	50
Figura 11 – Procedimento de rewiring	51
Figura 12 – Redes de ligações preferenciais, exemplo no <i>software</i> NetLogo	53
Figura 13 – Árvore geradora, exemplo de Sedgewick e Wayne (2011)	55
Figura 14 – Ilustração do algoritmo de Kruskal para Árvore Geradora Mínima	57
Figura 15 – Tela do sistema de divulgação externa da BM&FBOVESPA	60
Figura 16 – Aplicação de técnicas para aquisição e análise de dados	62
Figura 17 – Rede bipartida com 310 empresas e 1997 diretores	64
Figura 18 – Componente gigante, 184 empresas e 1363 conselheiros.	66
Figura 19 – Rede bipartida reduzida	67
Figura 20 – Rede de empresas: Componente gigante com 184 empresas	72
Figura 21 – Rede de Conselheiros: Componente gigante com 257 conselheiros	76
Figura 22 – Árvore Geradora Mínima da rede de empresas	80
Figura 23 – Árvore Geradora Mínima da rede de conselheiros	82
Figura 24 – Principais conselheiros na MST da rede de conselheiros	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Métricas de vértices, exemplo	46
Tabela 2 – Métricas de arestas, exemplo	46
Tabela 3 – Métricas globais, exemplo	47
Tabela 4 – Componentes da rede bipartida completa	65
Tabela 5 – Estatísticas: empresas ordenadas por PageRank	68
Tabela 6 – Estatísticas: empresas ordenadas por Grau	69
Tabela 7 – Estatísticas: empresas ordenadas por Intermediação	69
Tabela 8 – Estatísticas: empresas ordenadas por Proximidade	70
Tabela 9 – Estatísticas de interligação de empresas ordenadas por Intermediação	70
Tabela 10 – Estatísticas de interligação de empresas ordenadas por Peso	71
Tabela 11 – Métricas globais para a componente gigante - empresas	71

Tabela 12 – Estatísticas: conselheiros ordenados por PageRank	73
Tabela 13 – Estatísticas: conselheiros ordenados por Grau ponderado	73
Tabela 14 – Estatísticas: conselheiros ordenados por Intermediação	74
Tabela 15 – Estatísticas de ligação entre conselheiros, ordenadas por Intermediação	75
Tabela 16 – Estatísticas de ligação entre conselheiros, ordenadas por Peso	75
Tabela 17 – Métricas globais para a componente gigante - conselheiros	77

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação e delimitação do tema

Na pesquisa acadêmica uma rede é um conjunto de itens, chamados de vértices, com conexões entre eles, denominadas por arestas (NEWMAN, 2003). Vários sistemas podem ser estudados sob a forma de redes, alguns exemplos incluem redes de computadores, redes biológicas, redes de relacionamentos pessoais, redes de negócios, relações entre empresas, redes de citações, redes neurais, redes de variáveis e muitas outras (NEWMAN, 2010). Dentre os vários tipos de redes, neste trabalho são consideradas aplicações de redes complexas ao estudo de problemas na área de administração de organizações. Uma motivação para a aplicação de redes na área de administração de organizações é a caracterização das relações entre as empresas, com o levantamento de atores e ligações de grande influência nos negócios. Tal caracterização pode ser utilizada como apoio na tomada de decisão.

Como apontado por Newman (2010), a área de redes tem se beneficiado muito com a grande interdisciplinaridade existente nas pesquisas, com aplicações e pontos de vista relacionados a diversas disciplinas. Mas, como continua o autor, a área é prejudicada com a dificuldade da dispersão do conhecimento, pois pesquisadores de uma área não têm acesso direto às descobertas feitas em outras áreas. Para minimizar este problema alguns livros foram escritos de maneira a atribuir uma linguagem e notação consistente com a teoria matemática de redes e apresentar, nesta linguagem, as aplicações nas mais variadas áreas. Dentre estes livros estão os trabalhos de Newman, Barabási e Watts (2006), Koller e Friedman (2009), Jackson (2010) e Newman (2010), que são considerados no presente trabalho.

As diversas sub áreas da Administração de Organizações (como por exemplo: produção, pesquisa operacional, recursos humanos, finanças, mercados, negócios internacionais, organizações públicas, contabilidade) apresentam contextos adequados e até mesmo naturais para utilização da teoria de redes complexas como apoio à tomada de decisão. Na pesquisa internacional estas aplicações já podem ser observadas de forma bem expressiva em centros de estudos multidisciplinares como o *Santa Fe Institute* ¹ que tem um grande foco interdisciplinar; ou como o *Centre for Risk Studies* em Cambridge-UK ² que aplica redes para análise de uma série de fenômenos como choques financeiros, cadeias de suprimentos, etc. Nesta linha interdisciplinar, um projeto europeu que tem ganhado relevância

¹ Página do *Santa Fe Institute* <<http://www.santafe.edu/research/themes/>> que apresenta pesquisas voltadas para a área de ciências sociais aplicadas.

² Página do *Centre for Risk Studies* <<http://cambridgeriskframework.com/networks>> que tem foco destinado ao gerenciamento de redes globais.

é o *FutureICT* ³ um projeto que tem como objetivo compreender e gerenciar sistemas complexos, globais, socialmente interativos, com foco na sustentabilidade e resiliência.

Entre as diversas aplicações de redes complexas na área de ciências sociais, o tema explorado neste trabalho é a interligação administrativa em empresas. Como descrito por Falcão (2013), “diversas são as terminologias utilizadas para a identificação do fenômeno por meio do qual duas companhias estabelecem vínculos entre suas esferas administrativas”. Neste trabalho considera-se que o vínculo é feito através do conselho de administração, se um conselheiro participa em conselhos de duas empresas distintas então estes conselhos estão interligados, ou seja, existe uma interligação administrativa de empresas.

Este tema é caracterizado em pesquisas internacionais de forma mais frequente pela expressão *interlocking board*. Assim, neste trabalho a expressão interligação administrativa é utilizada com o mesmo significado de *interlocking board*.

Esta pesquisa considera empresas brasileiras de capital aberto listadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBovespa). Os conceitos de *interlocking board* direto e indireto, presentes na literatura relacionada à interligação administrativa, são utilizados como base para a formação de uma rede bipartida, cujas propriedades são analisadas por meio da ótica da teoria de redes complexas. Vários estudos abordam este tema e neste trabalho a delimitação da pesquisa abrange estudos de influência na componente da rede com maior número de vértices conectados, sendo proposta a descrição de uma estrutura-núcleo de influências através da chamada árvore geradora mínima - MST (do inglês *Minimum Spanning Tree*).

1.2 Justificativa para escolha do tema

A área de ciências sociais aplicadas fornece inúmeras possibilidades de aplicações de teoria de sistemas complexos. Atualmente, a disponibilidade de softwares para tratamento e análise de dados de redes complexas torna viável investigações de sistemas reais. Assim, aplicações antes impossibilitadas pelo volume de dados e necessidade de computação avançada, hoje fazem parte da realidade presente na academia e inclusive em periódicos especializados.

Em particular, observa-se um aumento nos estudos de redes, com o objetivo de obter análises gráficas e visualização de redes sociais, redes de colaboradores, redes tecnológicas, redes de inovação, redes de empresas, etc. Assim, entende-se que o domínio das técnicas de análise de redes é de interesse atual para a área ciências sociais aplicadas e em específico para a área de administração de empresas.

³ Página do *FutureICT* <<http://www.futurict.eu/>>, projeto com o objetivo de construir uma plataforma “Terra Viva” que simule, visualize e apoie a tomada de decisão de políticos, empresários e cidadãos

O tema interligação administrativa no Brasil é bastante estudado, com várias vertentes que vão desde a descrição matemática de redes até estudos conceituais na área de direito administrativo. No entanto, ainda há lacunas a serem preenchidas, que justificam a continuação destes estudos. Uma das lacunas percebida está diretamente relacionada à proposta delimitada nesta pesquisa: a descrição de uma estrutura de rede central que reflita a rede como um todo e destaque as principais influências na interligação administrativa.

A escolha deste tema é importante pois denota o aspecto estratégico para o desenvolvimento de atividades de ensino e pesquisa. Atualmente é crescente a busca por ferramentas de análise de redes e embora a oferta de softwares seja abundante, existe uma carência na oferta de cursos para uma formação teórico-prática. Desta forma, espera-se que um dos desdobramentos desta pesquisa seja a criação de disciplinas de graduação e de pós-graduação relacionadas ao tema de análise de redes em geral.

1.3 Estrutura do trabalho

Após a introdução, a estrutura do trabalho prossegue com o conteúdo de quatro capítulos relacionados à fundamentação teórica, os quais abordam conceitos de interligação administrativa, estudos de redes em geral, modelos específicos de redes e o conceito de árvore geradora. Após os capítulos de fundamentação teórica são apresentados, nos dois capítulos seguintes, os procedimentos metodológicos e os resultados obtidos. Por fim são feitas as considerações finais.

A Figura 1 categoriza a estrutura do trabalho em formato de rede. Os capítulos e referências são representados pelos círculos maiores e as seções, pelos círculos menores. A sequência dos capítulos são marcadas por linhas mais grossas e cada seção está ligada ao seu capítulo por linhas com espessura intermediária. Linhas mais finas indicam que as duas partes do trabalho estão relacionadas, mesmo não estando na sequência.

O capítulo 2 trata da interligação administrativa, sendo que a seção 2.1 apresenta o conceito utilizado como base neste trabalho. É interessante apontar aqui que, embora existam vários estudos sobre *interlocking board* em nenhum deles o conceito de *interlocking board* direto e indireto foram relacionados explicitamente ao conceito de ligação para formação da rede. Além disto, a proposta de descrever a influência na rede tem como base os trabalhos apresentados nesta seção. As seções 2.2 e 2.3 apresentam alguns estudos realizados sobre interligação administrativa no exterior e no Brasil, respectivamente.

As características gerais de redes e as métricas mais relevantes são discutidas no capítulo 3, nas seções 3.1 e 3.2, respectivamente. O desenvolvimento quantitativo na área de redes é resumido nas seções do capítulo 3 e as características consideradas são frequentes em diversas partes do trabalho.

O capítulo 4 descreve os três principais modelos para formação de redes. O primeiro modelo, na seção 4.1, é o de redes aleatórias, interessante para observar propriedades como o aparecimento de componentes gigantes, densidade de conexões na rede, etc. O segundo modelo, considerado na seção 4.2, é o modelo mundo-pequeno que tem sido bastante explorado na literatura e contém conceitos interessantes para estudos descritivos e dinâmicos de redes. Na seção 4.3 é apresentado o modelo de ligações preferenciais. O sucesso deste modelo foi a explicação da obtenção de leis de potências em diversas redes. Vale a pena notar ainda que, a rede obtida neste modelo tem uma estrutura na forma de árvore. Estes três modelos são úteis na consolidação de conceitos e também como referências nas comparações de redes.

O capítulo 5 apresenta os conceitos relacionados à árvore geradora mínima. A obtenção da árvore mínima é feita a partir de uma otimização que encontra uma rede com ligações mínimas, ou mais próximas. Este tipo de otimização tem sido aplicado, na área de negócios, na investigação de correlações de ativos. A seção 5.1 aborda os conceitos básicos relacionados à árvore geradora mínima. Os passos do algoritmo de otimização são ilustrado na seção 5.2. Na seção seguinte, 5.3, argumenta-se a ideia de utilizar a árvore mínima para estudos de interligação administrativa.

A caracterização da pesquisa é feita no capítulo 6, na seção 6.1 e em seguida, na seção 6.2 é descrito o procedimento de obtenção da amostra. Na seção 6.3 são indicadas as técnicas de análise de dados que, como indicado na Figura 1, são técnicas relacionadas às estatísticas gerais de redes e ao problema de otimização, através do algoritmo de Kruskal.

O capítulo 7 está dividido em duas seções, a seção 7.1 que apresenta os resultados obtidos para a rede bipartida bimodal e a seção 7.2 que ilustra as redes transformadas com o *layout* obtido pela otimização de árvore geradora mínima.

No capítulo 8, de considerações finais, os resultados são comentados e confrontados com as diversas partes deste trabalho propondo, ainda, uma sugestão de futuros trabalhos que podem ser derivados a partir da abordagem do presente trabalho.

Figura 1 – Estrutura do trabalho: Círculos maiores representam capítulos e a parte de Referências. Círculos menores representam seções. Linhas mais grossas indicam a sequência dos capítulos, linhas médias são ligações de seções aos seus capítulos, linhas mais finas indicam que as duas partes específicas do trabalho estão relacionadas.

Fonte: Elaborada pelo autor com o software Gephi e aplicação do algoritmo Force Atlas 2 para *layout*.

2 INTERLIGAÇÃO ADMINISTRATIVA

A interligação administrativa analisada neste trabalho está relacionada ao conceito de *interlocking board* ou *interlocking directorates*. Como pode ser observado no trabalho de Mizruchi e Bunting (1981), este assunto foi abordado em um grande número de estudos. Em Falcão (2013) o autor apresenta uma proposta para compreensão do *interlocking board* de forma abrangente:

... propõe-se a compreensão do *interlocking board*, como toda e qualquer vinculação que ocorra entre as esferas administrativas de duas companhias e que permita, direta ou indiretamente, de forma efetiva ou potencial, que uma das companhias tenha acesso a informações geradas pelos órgãos de administração da outra companhia, independentemente da identidade de conselheiro ou do nível de relacionamento que essas companhias tenham no mercado, podendo esse vínculo representar, ou não, um mecanismo de influência de uma das companhias em relação à outra (FALCÃO, 2013, p. 16).

Com base na definição citada acima, o autor considera “diversos mecanismos aptos para estabelecer interdependências entre companhias” e então classifica os tipos de *interlocking board*. É interessante notar as formas direta e indireta de *interlocking board* descritas por Falcão (2013). De acordo com a descrição do autor, o *interlocking board* é considerado direto quando o indivíduo A ocupa simultaneamente, lugar no conselho das empresas X e Y, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – *Interlocking Board* Direto. (a) Ilustração semelhante à apresentada em Falcão (2013); (b) Rede bipartida equivalente.

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Falcão (2013, p. 25).

Na Figura 2-(a) é apresentado o conceito desenvolvido em Falcão (2013) para o

interlocking board direto e na parte (b) desta mesma figura é apresentada a rede bipartida ¹, formada por empresa-conselheiro, equivalente ao exemplo apresentado em (a).

Considerando, ainda, o trabalho de Falcão (2013), o conceito de *interlocking board indireto* é apresentado como um vínculo entre as companhias, não pelo compartilhamento do mesmo conselheiro, mas pelo contato de seus conselheiros, diferentes entre si, em um conselho de uma terceira empresa. Por exemplo: o indivíduo A pertence ao conselho das empresas X e Z e o indivíduo B pertence ao conselho das empresas Z e Y. Neste caso, (ilustrado na Figura 3) embora as empresas X e Y não tenham conselheiros em comum, considera-se que existe um *interlocking board indireto* entre as empresas X e Y, pois, seus conselheiros estão em contato no conselho de uma terceira empresa (empresa Z).

Figura 3 – *Interlocking Board* Indireto. (a) Ilustração semelhante à apresentada em Falcão (2013); (b) Rede bipartida equivalente

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Falcão (2013, p. 26).

A descrição feita por Falcão (2013) para o *interlocking board direto* e *indireto* é a base para a formação de redes de empresas, ou rede de conselheiros, estudadas neste trabalho. Embora esta base teórica seja contundente, até a realização da presente pesquisa não foram encontrados trabalhos acadêmicos sobre este tema que apresentassem esta abordagem mais formal.

Neste trabalho, optou-se por utilizar o termo “interligação administrativa” como sinônimo de *interlocking board*. Assim, a interligação administrativa é considerada neste

¹ O conceito de rede bipartida é apresentado adiante na seção 3.1.3 deste trabalho.

trabalho nas formas direta e indireta, sendo que, a análise desta interligação feita pela ótica da teoria de redes pode proporcionar novos tipos de análise. Permite-se questionar, por exemplo: qual é o distanciamento médio entre empresas quando considerado o *interlocking* direto? Em termos de teoria de redes, esta mesma pergunta seria: qual é o grau de separação médio entre os vértices da rede?

Nas próximas três seções são apresentados alguns desenvolvimentos realizados na pesquisa de *interlocking* de forma geral.

2.1 Estudos sobre *Interlocking*

O estudo de interligação administrativa permite várias abordagens. Este trabalho segue a definição de [Falcão \(2013\)](#) que reúne conceitos apresentados em diversas pesquisas e publicações específicas. Nesta seção são abordados os resultados de algumas pesquisas que contribuem para a discussão e fundamentação da pesquisa desenvolvida neste trabalho.

O trabalho de [Pam \(1913\)](#) aponta que o interesse no assunto da interação entre diretor e corporação ocorreu, na época, devido a circunstâncias não usuais de negócios no período de 1896 até a data de publicação do seu trabalho. Segundo o autor, houve grandes mudanças nas condições e nos métodos de negócios e aparentemente foi necessária uma consolidação e combinação de organizações envolvidas numa mesma linha de atividade. Embora escrito no início do século 20, o texto de [Pam \(1913\)](#) apresenta temas que são atuais. Por exemplo, o autor afirma ser bem conhecido o fato de que a influência nas deliberações e decisões nos conselhos de administração não é medida pelo número de votos, mas sim pelo poder exercido por meio de relações de interesse comum. O autor também argumenta sobre a perda de valor das empresas devido ao domínio de interesses relacionados à interligação administrativa. Mais ainda atual, são as palavras do autor relacionadas à vigilância das atitudes dos conselhos de administração:

A solução certa, no entanto, para combater e superar a abuso de relação fiduciária de administração, seja através do poder e da influência de interesses convergentes representados por diretorias comuns e dual, ou de outra forma, encontra-se na divulgação e na vigilância pública ([PAM, 1913](#), p. 491).

Considerando uma abordagem inferencial, uma estrutura de redes de corporações foi proposta por [Burt \(1978\)](#), para explicar onde a interligação administrativa entre setores de uma economia deve ocorrer e onde não deve ocorrer de forma a obter rentabilidade em uma interligação corporativa eficiente. O autor deriva duas classes de hipóteses: (1) Empresas num setor devem estar interligadas a empresas num outro setor na proporção da extensão na qual o setor restringe os lucros das empresas, (2) Sem considerar diferenças de mercado e produção, a habilidade de empresas num setor em obter altos lucros reflete seu sucesso em criar interligações com setores mais problemáticos em gerar lucros no seu setor. A estrutura apresentada em [Burt \(1978\)](#) é composta por duas redes num fenômeno

simbiótico, a estrutura do mercado criando um padrão para estrutura de interligação e a estrutura de interligação criando uma estrutura de mercado.

A abordagem matemática tem sido bastante utilizada para investigar a estrutura de redes de corporações por meio do estudo das métricas da rede. É interessante notar, no trabalho específico de [Mizruchi e Bunting \(1981\)](#) que os autores discutem as diferenças entre influência e controle, na interligação administrativa. Seus resultados sugerem que estudos de centralidade e influência na rede podem aumentar a predição de modelos de crescimento corporativo. Algumas medidas quantitativas de influência em redes de grandes corporações são propostas: (1) o número absoluto de interligação, (2) o índice de Bonacich de centralidade ([BONACICH, 1972](#)), (3) uma modificação do índice de Bonacich utilizando apenas ligações fortes, (4) uma modificação do índice de Bonacich utilizando ligações fortes ponderadas pela direção.

[Mizruchi e Bunting \(1981\)](#) argumentam que, num conselho de administração típico existem entre 10 a 25 (ou até mais) membros. Ter duas ou três representações não garante controle. Ademais, vários teóricos argumentam que interligação envolve mais cooptação de interesses externos do que submissão à eles [Mizruchi e Bunting \(1981\)](#). Assim, continuam os autores, como os conselhos são frequentemente representados por uma pluralidade de interesses, uma descrição mais acurada de interligação seria de que ela promove mais influência do que controle.

No trabalho de [Fennema e Schijf \(1978\)](#) os autores apontam que na época, despon-taram duas tradições na pesquisa sobre interligação administrativa: abordagem sociológica e estudo de grupos financeiros. Considerando a abordagem sociológica, os estudos se concentraram no sistema de interligação administrativa e as questões frequentes das pesquisas são referentes à operação do sistema de negócios, como quantas e de que forma são feitas as interligações dos conselhos de administração, e quanto destes conselhos estão ligados a pequenas e grandes empresas americanas? Já os estudos de grupos financeiros se referem ao problema de controle de corporações. Por exemplo, qual o papel das instituições financeiras nos grupos de corporações? [Fennema e Schijf \(1978\)](#) citam, ainda, que num período de dez anos antes de seu trabalho, pesquisadores estavam utilizando conceitos de teoria de grafos para realizarem estudos mais sistemáticos e rigorosos sobre interligação administrativa.

2.2 Estudos específicos no exterior sobre Interligação Administrativa

Nesta seção são considerados trabalhos mais recentes de interligação administrativa em alguns países, mais especificamente, pesquisas realizados após o desenvolvimento dos modelos de redes apresentados adiante no capítulo 4. A maior parte destes estudos recentes apresentam ferramentas que possibilitam a análise de grafos, ou redes para visualização e extração de medidas quantitativas.

Uma análise comparativa entre a rede bipartida obtida de empresas-conselheiros e uma rede do tipo mundo-pequeno é feita por [Robins e Alexander \(2004\)](#), considerando empresas americanas e australianas. Neste tipo de estudo, a comparação da rede real é feita com uma rede criada por simulação, de forma a reproduzir uma rede aleatória com restrições específicas para reproduzir uma rede mundo-pequeno. As estatísticas são comparadas e, neste caso, os autores observaram muitas similaridades. Com relação aos dois países estudados, os autores verificaram que o poder está mais difuso no caso americano.

O assunto de interligação administrativa atrai a atenção, especialmente em ocasiões nas quais ocorrem grandes escândalos. A seguir são apresentados trechos da publicação de [Krantz \(2012\)](#) na qual o autor apresenta características sobre a interligação administrativa nos Estados Unidos.

The USA's worst period for corporate scandals in decades has made painfully clear how vital it is that a company's board of directors is qualified, actively involved and — above all — unbiased. The problem is, that may not be the case. An analysis by USA TODAY and The Corporate Library reveals the boards of the nation's leading companies have a startling amount of overlap.

Behind the controls of the nation's top businesses lurks an inner sanctum of friends, colleagues and partners who sit on corporate boards together. This clique of powerful people is supposed to oversee corporations and protect the rights of millions of shareholders.

Critics say that creates the potential for serious conflicts of interest and negates what is supposed to be an independent watchdog in Corporate America's system of checks and balances. "We're certainly not suggesting that every (relationship) indicates some sort of impropriety," says Ric Marshall, CEO of The Corporate Library. "But they do contain that potential."

... Directors who sit on different boards together tend to gravitate toward a common way of thinking, says Eric Bonabeau, a researcher at Icosystem, a consulting firm that has used the laws of nature and science to study interlocks. "If we sit on boards together, we will tend to look at each other before making a decision," he says.

... Corporate governance experts say, at the very least, investors should realize that some boards are so tangled that shareholders might not always be a director's top concern. "When you have an interlocking network, decisions are not based on intellect and logic, but rather what your friends decide," Bonabeau says ([KRANTZ, 2012](#)).

Estudos do poder relacionado à interligação administrativa podem ser visto no trabalho realizado por [Domhoff \(2006\)](#). Especificamente, a abordagem de teoria de redes é detalhada no Apêndice A de [Domhoff \(2006\)](#). Atualmente, o autor mantém um *website* ² no qual apresenta grande parte do conteúdo de seu livro e ainda disponibiliza uma ferramenta para analisar sub-redes de empresas.

É interessante observar a página web [<http://theyrule.net/>](http://theyrule.net/) destinada à visualização de redes corporativas. Este projeto disponibiliza ferramentas que acessam bases de

² Página web: WhoRulesAmerica.net ou <http://www2.ucsc.edu/whorulesamerica/>.

dados atualizadas de corporações em diversos mercados. O foco do site está nas maiores empresas americanas e permite navegar entre os conselhos e observar as interligações entre as empresas. O site serve como um ponto inicial para pesquisas sobre os indivíduos e as corporações.

Na Europa, as relações na elite corporativa é estudada sob a ótica de redes no trabalho de [Heemskerk \(2011\)](#). O autor comprova a formação da interligação administrativa na Europa entretanto num grupo muito pequeno, restrito a membros da elite. A rede tem uma base maior nas ligações entre instituições financeiras e indústrias.

No estudo de [Au, Peng e Wang \(2000\)](#) os autores argumentam que os estudos de interligação administrativa na sua grande maioria estão concentrados no ocidente e como contribuição apresentam um estudo nas 200 maiores corporações de Hong Kong, para períodos anteriores a 1997. Os autores identificaram quatro grupos separados de empresas em Hong Kong e apresentam propostas de estratégias para explorar a prática da interligação administrativa.

Como mencionado, a pesquisa na área de interligação administrativa é bastante ampla e de característica interdisciplinar o que permite uma grande variedade de publicações. No entanto, até a presente data nenhum estudo nesta área, pertencente à base de dados *Web of Science*, aplicou a técnica de árvore geradora mínima para a compreensão das influências mais fortes na rede. As palavras-chave utilizadas na busca por publicações, foram “*Minimum Spanning Tree*” e “*Interlocking*”.

Na próxima seção são apresentadas algumas pesquisas desenvolvidas no Brasil na área de interligação administrativa diretamente relacionada à área de negócios.

2.3 Estudos no Brasil sobre Interligação Administrativa

No Brasil, o trabalho de [Falcão \(2013\)](#) faz uma revisão sobre o tema na área de Direito. Como resultado, o autor apresenta um conceito abrangente para a interligação administrativa, que serve como fundamentação teórica para a formação da rede bipartida.

Do ponto de vista da área de negócios, no Brasil algumas pesquisas em administração de empresas exploram a relação entre a interligação administrativa e desempenho, ou então entre valor de empresas. Por exemplo, [Santos e Silveira \(2007\)](#) estudam empresas listadas na Bolsa de Valores nos anos de 2003 e 2005 e encontram que, em todas as regressões, a prática de interligação é prejudicial ao valor da companhia, mensurado pelo seu Q de Tobin e por sua capitalização de mercado. Em termos de desempenho, os autores verificaram uma relação quadrática com um ponto ideal de interligação de 5 ligações por empresa. A partir dos resultados os autores entendem que, a participação excessiva em conselhos é negativa, porém pode se mostrar uma contribuição relevante para a maximização do valor de longo prazo das empresas ([SANTOS; SILVEIRA, 2007](#)).

No trabalho de [Mendes-da-Silva et al. \(2008\)](#) os autores investigaram a existência de associações entre o nível de centralidade, densidade e coesão dos conselhos de empresas brasileiras e o desempenho da firma. Os autores verificaram que as organizações mais bem posicionadas nas redes de relações corporativas tendem a apresentar maior rentabilidade e menor endividamento. O recorte foi feito para as empresas listadas no Novo Mercado da Bovespa em 2007.

Um estudo que investigou a aderência do modelo mundo-pequeno à interligação administrativa no Brasil foi feito por ([MENDES-DA-SILVA, 2011](#)). O resultado do estudo é que a interligação administrativa analisada, para mais de 400 empresas listadas entre os anos de 1997 e 2007, reflete uma rede do tipo mundo-pequeno. Ainda, o autor encontrou uma relação significativa entre as medidas de centralidade das empresas e seu valor na forma de “U” invertido, sugerindo um ponto ótimo para a centralidade da empresa na rede.

Mais recentemente, [Ribeiro e Colauto \(2014\)](#) investigaram a influência da interligação nas práticas de suavização de resultados em companhias de capital aberto listadas na BM&FBOVESPA. Os resultados obtidos, a partir de uma amostra de 53 empresas, denotam que em empresas que compartilham conselheiros com outras organizações há prática de suavização de resultados com maior frequência.

Também no caso de trabalhos no Brasil, não foram encontradas pesquisas nas quais o procedimento de obtenção de uma estrutura de influência com base na árvore geradora mínima seja aplicado. Assim, espera-se que os resultados deste trabalho estimulem a associação da estrutura definida pela árvore mínima com o desempenho, ou com o valor da empresa, e também com as diversas práticas de gestão em corporações.

No próximo capítulo são apresentados alguns tópicos sobre a teoria de redes. Estes tópicos, juntamente às definições apresentadas no início deste capítulo, fornecem a base teórica para a análise da interligação administrativa em empresas.

3 ESTUDOS DE REDES

Em 1736, o matemático Leonard Euler se interessou pelo estudo de um desafio matemático chamado de Problema das Pontes de Königsberg. Na época, a cidade de Königsberg (Prússia) tinha sete pontes (ver ilustração nas Figuras 4 e 5(a)) e as pessoas perguntavam se era possível ter um caminho que cruzasse as sete pontes sem passar duas vezes por uma mesma ponte. Euler provou que a existência de tal caminho é impossível. De acordo com [Newman, Barabási e Watts \(2006\)](#), diz a lenda que as pessoas de Königsberg passavam horas tentando achar tal caminho antes de Euler provar a impossibilidade de sua existência.

Figura 4 – Imagem da cidade de Königsberg, Prússia, no ano de 1736.

Fonte: [Diestel \(2005, p. 22\)](#).

A prova não era óbvia em 1736 e Euler fez uso de um grafo, um objeto matemático que consiste de pontos (vértices) e ligações (arestas), para representar as características do problema original. A Figura 5(b) apresenta o grafo correspondente ao Problema das Pontes de Königsberg. Os pontos representam o solo e as linhas representam as pontes.

A cidade, hoje em dia, tem o nome de Kaliningrado (Rússia) e na região (ilustrada na Figura 5(a)) permanecem cinco pontes, pois duas delas não resistiram aos bombardeios sofridos durante a Segunda Guerra Mundial. A Figura 6, obtida pelo aplicativo Google Earth, mostra uma imagem atual da região de Kaliningrado e também um esquema do grafo correspondente ao problema das pontes.

Este problema marcou o início histórico da teoria de grafos, que na Matemática é um campo bem desenvolvido. Como descreve [Newman, Barabási e Watts \(2006\)](#), uma rede é um conjunto de elementos discretos (vértices) e um conjunto de conexões (arestas) que ligam os elementos aos pares. Os autores esclarecem que os elementos e suas conexões

Figura 5 – Grafo correspondente ao Problema das Pontes de Königsberg.

Fonte: http://www.nature.com/nbt/journal/v29/n11/fig_tab/nbt.2023_F1.html.

podem ser quase qualquer coisa - pessoas e amigos (RAPOPORT; HORVATH, 1961); artigos científicos e citações (PRICE, 1965); e outros.

A estrutura de redes ganhou desenvolvimento nas décadas de 1940, 50 e 60. Entre alguns trabalhos importantes, destacam-se o de Solomonoff e Rapoport (1951), no qual os autores apresentam um primeiro estudo sistemático de grafos aleatórios, e o de Erdős e Rényi (1960), considerados os pais da teoria moderna de grafos aleatórios. Os detalhes matemáticos das pesquisas destes autores não são apresentados no presente trabalho por estar fora do escopo, porém vários resultados da teoria de grafos são utilizados ao longo deste texto e serão apresentados nas próximas seções.

Na seção seguinte (seção 3.1) são apresentadas propriedades matemáticas relacionadas a redes, como por exemplo medidas da rede (densidade, grau médio, tamanho médio), ou medidas individuais como grau e intermediação. A observação destas propriedades pode ser útil para a modelagem de redes na tomada de decisão.

Os principais modelos de formação de redes são apresentados na seção 4. São revistos os modelos de redes aleatórias; os modelos de redes do tipo mundo pequeno, cuja ideia foi desenvolvida por Milgram (1967) e depois retomada e modelada por Watts e Strogatz (1998) e o modelo de redes livre de escala de Barabási e Albert (1999).

3.1 Características gerais de redes

Conforme descrito por Newman (2010, p. 109), os vértices e arestas de redes assumem nomes específicos de acordo com a área ou aplicação, por exemplo, nós e ligações. Neste trabalho são empregadas as palavras vértices e arestas de forma geral. Para exem-

Figura 6 – Imagem da cidade de Kaliningrado, Rússia, obtida pelo software Google Earth em setembro de 2014. Os círculos foram inseridos na imagem para representar os vértices (solo) de um grafo, as linhas inseridas representam as arestas do grafo, (pontes que ainda existem na cidade em amarelo e as que existiam na época de Euler em vermelho).

Fonte: Google Earth, setembro de 2014, palavra pesquisada: Kaliningrad.

plificar as características de redes neste capítulo, considere-se o grafo apresentado na Figura 7, ou seja, uma rede com 14 vértices (círculos com rótulos V_i) e 15 arestas.

Figura 7 – Exemplo de grafo ou rede com 14 vértices e 15 arestas.

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

3.1.1 Representação da rede

Existem algumas maneiras de representar uma rede em termos matemáticos. Uma delas é informar a matriz de adjacência. A matriz de adjacência $\mathbf{A}$ de uma rede simples é uma matriz com os elementos $A_{i,j}$ definidos de tal forma que:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se existe uma aresta entre os vértices } i \text{ e } j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Newman (2010, p. 110) apresenta vários detalhes sobre a matriz de adjacência, inclusive para redes que possuem pesos diferentes para as conexões. Para a rede exemplificada na Figura 7, a matriz de adjacência completa para o exemplo ($\mathbf{A}_{Ex}$) pode ser representada pela expressão (3.2) a seguir.

$$\mathbf{A}_{Ex} = \begin{pmatrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 & V_9 & V_{10} & V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_{14} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Na expressão 3.2, a primeira linha e a primeira coluna contém os nomes dos vértices da rede e foram inseridas na expressão apenas para facilitar a leitura da matriz de adjacência. Esta expressão é bastante explícita, porém, para construção de redes a partir de dados torna-se conveniente listar os vértices e as arestas num formato específico para leitura por alguns softwares.

Um dos formatos mais fáceis de serem compreendidos e até mesmo modificados é formato **.net** que é reconhecido por vários softwares, inclusive pelo software utilizado neste trabalho, o Gephi (BASTIAN; HEYMANN; JACOMY, 2009). Para qualquer rede pode-se utilizar o Notepad ou outro editor de texto do tipo ASCII e obter um arquivo no formato **.net**. Para o exemplo descrito na Figura 7 foi escrito o arquivo **Exemplo.net** (com a utilização do Notepad) cujo conteúdo são as seguintes linhas:

```
*Vertices 14
```

```
1  "V1"  
2  "V2"  
3  "V3"  
4  "V4"  
5  "V5"  
6  "V6"  
7  "V7"  
8  "V8"  
9  "V9"  
10 "V10"  
11 "V11"  
12 "V12"  
13 "V13"  
14 "V14"
```

```
*Edges
```

```
1   2   1  
4  14   1  
5  14   1  
6  14   1  
7   8   1  
7   9   1  
7  10   1  
8   9   1  
8  10   1  
9  10   1  
10  11   1  
11  12   1  
11  13   1  
12  13   1  
13  14   1
```

A primeira parte do arquivo **Exemplo.net** transcrito acima contém os números e os nomes atribuídos aos 14 vértices. A segunda parte do arquivo contém informações sobre as arestas, ou seja, as ligações entre vértices específicos sendo a primeira e segunda colunas referentes aos números dos vértices que se conectam entre si e a terceira coluna apresenta o peso da conexão (que neste caso é igual a um para todas as conexões) reproduzindo, assim, a matriz de adjacência do exemplo, apresentada em (3.2).

- **Aplicação:** Considere uma rede com conselheiros de empresas - por exemplo,

quatro conselheiros e três empresas - sendo que apenas um dos conselheiros participa do conselho de duas empresas. Esta rede pode ser escrita no formato `.net` apresentado a seguir.

```
*Vertices 7
1  "Conselheiro A"
2  "Conselheiro B"
3  "Conselheiro C"
4  "Conselheiro D"
5  "Empresa X"
6  "Empresa Y"
7  "Empresa Z"

*Edges
1  5  1
1  6  1
2  5  1
3  6  1
4  7  1
```

A ilustração da rede listada acima no formato `.net` é feita na página 40, como exemplo de uma rede bipartida na Figura 9(a).

3.1.2 Redes dirigidas

As ligações entre dois vértices pode ser do tipo dirigida, ou seja, a aresta tem uma direção que aponta de um vértice para outro. Neste caso, ao invés de aresta, a ligação tem o nome de arco. Quando se considera aplicação em softwares como mostrado na seção anterior, ao invés de *Edges*, escreve-se *Arcs*. Para redes dirigidas, a matriz de adjacência não é simétrica, pois cada elemento indica a existência de um arco que vai de um vértice para outro. Assim, de acordo com a notação de Newman (2010), para uma rede dirigida a matriz de adjacência é dada por:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se existe um arco do vértice } j \text{ para o vértice } i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

• **Aplicação 1:** Várias aplicações podem ser ilustradas com redes dirigidas na área de negócios, uma delas é a análise de páginas do Facebook de instituições. Um arco que aponta de A para B indica que a página A “curte” a página B. A Figura 8 apresenta a rede dirigida da página do Facebook da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto (FEARP), para apenas um nível de relação, ou seja as páginas que a FEARP “curte” e as relações entre estas páginas. Tal visualização é possível pois o aplicativo Netvizz, atualmente, possibilita a análise até dois estágios.

As informações foram obtidas com o aplicativo **Netvizz** disponibilizado no **Facebook** e para o desenho da rede foi utilizado o software **Gephi**.

Figura 8 – Rede dirigida: Primeiro nível de relações entre as páginas “curtidas” pela página da FEARP no **Facebook**. Extração de dados do Facebook através do aplicativo **Netvizz** em 30/07/2014. Desenho do grafo feito no software **Gephi**.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na rede apresentada na Figura 8, pode-se observar as setas que indicam as páginas “curtidas”. Como a rede foi feita a partir da página da FEARP (indicada na figura como **FEA-RP/USP**), todas as páginas recebem “curtidas” da FEARP, mas nem todas “curtem” a página da FEARP. Atualmente o aplicativo **Netvizz** possibilita a análise até dois estágios, ou seja, estende a análise para todas as páginas que as páginas da Figura 8 “curtem”.

3.1.3 Redes bipartidas

Algumas vezes, pode ser conveniente representar os vértices de uma rede de acordo com um grupo ao qual este vértice pertence. Quando existem dois tipos de vértices, um representando o vértice original e o outro representando o grupo ao qual ele pertence, a rede pode ser representada de forma mais conveniente por um grafo bipartido (NEWMAN, 2010, p. 123).

Este tipo de estudo é considerado neste trabalho, no problema de diretores que participam no conselho de empresas. Uma ilustração de rede bipartida com sete vértices pode ser vista na Figura 9, que considera a aplicação vista na seção 3.1.1.

Figura 9 – Rede bipartida formada por empresas (círculos X, Y e Z) e diretores (círculos A, B, C e D). (a) Modo composto da rede bipartida com os dois grupos; (b) modo simples, rede de empresas; (c) modo simples, rede de conselheiros.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Principais métricas de redes

Muitas medidas locais e globais foram desenvolvidas pela teoria de redes. No trabalho de Mizruchi e Bunting (1981) busca-se medir influências e para tanto foi considerada a centralidade de autovetor que pode ser vista no trabalho de Bonacich e Lloyd (2001). Neste trabalho são apresentadas várias estatísticas relacionadas à rede. Como medida de influência optou-se pela utilização do PageRank (PAGE et al., 1998), que é uma variante do conceito de centralidade mais geral desenvolvido por Bonacich (1987) que, de forma resumida, diz que o poder de alguém na sociedade depende do poder de seus contatos sociais.

Nesta seção serão consideradas as métricas mais utilizadas, que serão empregadas no problemas tratados nesta tese. Para os vértices foram selecionadas as métricas: Grau, Centralidade de Proximidade, Centralidade de Intermediação, Modularidade e PageRank. Para as arestas, considerou-se o Peso e a Intermediação. As métricas globais consideradas para a rede são: densidade, comprimento de caminho médio, distribuição de graus e distribuição de caminhos mais curtos. Também considera-se nesta seção os conceitos de

Cliques e Componentes, aplicados ao estudo de grupos de vértices. Algumas métricas citadas nesta seção são apresentadas na subseção 3.2.10 para o exemplo com 14 vértices apresentado na seção 3.1.1.

3.2.1 Grau

O Grau é a característica local mais simples de um vértice e aqui é denotado por k_i . O grau do vértice i é o número total de conexões que o vértice i tem com todos os outros vértices da rede. Pode ser calculado a partir dos elementos da matriz de adjacência $(A_{i,j})$ pela expressão:

$$k_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j}, \quad (3.4)$$

sendo n o número total de vértices na rede.

As métricas obtidas são úteis na comparação de vértices. Uma das perguntas mais frequentes na pesquisa em redes é: qual é o vértice mais importante ou central na rede? Assim, uma medida de importância pode ser o grau do vértice, quanto maior o grau, maior a importância do vértice, com relação ao número de conexões. Assim, o grau pode ser visto como uma medida de centralidade.

Para o exemplo específico visto na seção 3.1.1, os graus de cada vértice são apresentados na Tabela 1, na seção 3.2.10. Nota-se que os vértices V_{10} e V_{14} são os que possuem maior medida de grau (grau = 4).

3.2.2 Comprimento de caminho médio

A menor distância entre qualquer par de vértices i e j é conhecida como o comprimento do caminho mínimo ou comprimento geodésico entre os vértices i e j . Este comprimento é denotado por $d_{i,j}$ e é uma medida que considera o número total de conexões necessárias para ir de um vértice i para um vértice j utilizando a menor rota.

Considerando um determinado vértice i , a média sobre todos os vértices j , desta distância geodésica entre i e j , é dada por

$$\ell_i = \frac{1}{(n-1)} \sum_{j(\neq i)} d_{i,j}. \quad (3.5)$$

Este resultado indica uma distância média do vértice i aos outros vértices da rede e pode ser utilizado para obter uma medida de proximidade.

É interessante notar que, calculando-se a média de todos os valores de ℓ_i , obtém-se o comprimento do caminho característico da rede, ℓ , ou seja,

$$\ell = \frac{1}{n} \sum_i \ell_i, \quad (3.6)$$

conhecido em inglês por *average path length*. É esta medida que pode ser utilizada para obter-se o grau de separação médio entre dois vértices na rede.

Uma das propostas deste trabalho é que o valor obtido pela expressão (3.6), quando aplicado na rede de empresas, seja considerado como uma medida para o grau de interligação administrativa indireta, ou *interlocking board indireto*, como apresentado no capítulo anterior.

3.2.3 Proximidade

Medidas de centralidades são tais que, para um dado vértice, quanto maior a medida, mais central ou mais influente é o vértice. Assim, a medida de comprimento de caminho vista na subseção anterior ℓ_i , não é adequada para ser usada como medida de centralidade. É comum definirmos o inverso da distância como uma medida de centralidade, neste caso centralidade de proximidade.

Considerando o comprimento do caminho geodésico entre dois vértices, $d_{i,j}$, a medida de centralidade de proximidade pode ser obtida por (NEWMAN, 2010, p. 184):

$$C'_i = \frac{1}{(n-1)} \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{d_{i,j}}. \quad (3.7)$$

As medidas de Centralidade de Proximidade para cada vértice do exemplo da seção 3.1.1 estão apresentadas na terceira coluna da Tabela 1.

3.2.4 Intermediação para um vértice

A centralidade de intermediação (*Betweenness Centrality*, em inglês), ou apenas intermediação, mede a intensidade na qual um vértice aparece em caminhos geodésicos. Vértices com alto valor de intermediação têm influência considerável na rede pois podem ter controle sobre a informação passada para outros vértices.

Para um determinado vértice i , considera-se n_{jk}^i igual a 1, se o vértice i está no caminho geodésico entre os vértices j e k , e igual a 0 se o vértice i não está em tal caminho geodésico. Com isto, a medida de intermediação x_i pode ser escrita por:

$$x_i = \sum_{jk} n_{jk}^i. \quad (3.8)$$

Esta medida pode ser normalizada, ou seja, se o vértice i aparece em todos os caminhos geodésicos então a intermediação fica sendo igual a 1.

As medidas de intermediação para os vértices da rede exemplificada na seção 3.1.1 são apresentadas na coluna quatro da Tabela 1. Existem vários vértices para os quais esta medida é igual a zero, ou seja, estes vértices não aparecem em caminhos geodésicos. Os vértices com maior centralidade de intermediação são V11, V13 e V14, com intermediação igual a 0,3077. Ou seja eles aparecem em 30,77 % dos caminhos geodésicos (Figura 7).

3.2.5 Classe da Modularidade

Módulos ou comunidades são sub-redes presentes na rede, sendo que as conexões mais numerosas ocorrem mais entre vértices pertencentes ao mesmo módulo do que entre vértices de módulos diferentes. Estes módulos podem ser definidos por algoritmos hierárquicos presentes nos diversos softwares. Para o exemplo visto na seção 3.1.1, o cálculo indica a existência de cinco classes de módulos, como pode ser visto na Tabela 1.

3.2.6 PageRank

A medida de centralidade obtida pelo grau não considera importâncias distintas para os vizinhos, ou seja, para o cálculo do grau cada conexão é equivalente. Uma medida de centralidade que leva em conta o tipo de cada conexão e que tem sido muito utilizada é o PageRank (PAGE et al., 1998). O valor do PageRank é obtido como um valor de probabilidade, entre zero e um, e reflete a probabilidade de que um vértice (uma página da web) seja visitado na rede (NEWMAN, 2010).

O PageRank¹ é uma medida de centralidade utilizada como parte da tecnologia Google de classificação de páginas da web. A obtenção desta medida é feita através de algoritmos próprios cujos detalhes podem ser vistos em Newman (2010) e também em Page et al. (1998). O software Gephi contém o algoritmo para o cálculo do PageRank (BRIN; PAGE, 1998).

O resultado do PageRank para os vértices do exemplo visto na seção 3.1.1 está apresentado na coluna seis da Tabela 1. Pode-se observar nos resultados desta tabela que o vértice com maior PageRank é o V14 com o valor de 0,1457, seguido pelo V10 com PageRank igual a 0,0992. Assim, embora estes dois vértices tenham a mesma centralidade de grau, igual a 4 pela Tabela 1, a centralidade medida pelo PageRank é maior para o vértice V14.

3.2.7 Intermediação de aresta

Uma medida de intermediação de aresta (*Edge Betweenness*, em inglês) é definida de forma similar à intermediação de vértice apresentada na subseção 3.2.4. Assim, a intermediação de aresta é definida como o número de caminhos geodésicos (ou seja, caminhos mínimos) da rede que passam através daquela aresta. Em geral, espera-se que arestas que estejam entre comunidades possuam valores altos de Intermediação de Aresta. O cálculo desta intermediação é análogo ao caso de vértice. Para o exemplo da rede apresentada na Figura 7 os valores de Intermediação de Aresta são apresentados na terceira coluna da Tabela 2.

¹ O nome PageRank foi registrado pela empresa Google e o algoritmo para o cálculo do PageRank foi desenvolvido por Lawrence “Larry” Page, cofundador da Google.

3.2.8 Grupos de vértices

Muitas redes, incluindo sociais e outras redes, são naturalmente divididas em grupos ou comunidades. Existem métodos computacionais sofisticados para análise de grupos de redes e esta é uma área de pesquisa bastante frutífera ([NEWMAN, 2010](#)).

O software **Gephi** contém um algoritmo para determinação de comunidades. As comunidades estão relacionadas diretamente às arestas quando são formados triângulos indicando que a chance dos nós que formam triângulos pertencerem a mesma comunidade é maior. O resultado das comunidades para o exemplo da Figura 7 pode ser visto na quarta coluna da Tabela 2.

Na consideração de agrupamentos de vértices, destacam-se os seguintes pontos:

- Um Clique é o máximo conjunto de vértices numa rede não dirigida tal que cada membro deste conjunto é conectado por uma aresta a cada um dos outros vértices do grupo. No exemplo visto na Figura 7, o conjunto de vértices {V7, V8, V9, V10} forma um clique. O conjunto {V11, V12, V13} também forma um clique.
- Uma Componente contém o máximo subconjunto de vértices tal que cada um dos vértices pode ser acessado por um caminho a partir de cada um dos outros vértices. No exemplo visto na Figura 7, tem-se três componentes, sendo que a maior tem onze vértices, a segunda maior tem dois vértices e a menor tem apenas um vértice.
- A distribuição de tamanho de componentes da rede é um assunto interessante que tem demandado muita atenção nos modelos de redes. É interessante observar que, de acordo com alguns parâmetros da rede, observa-se o aparecimento de uma componente bem maior do que as outras (componente gigante) de forma abrupta. No capítulo 4 esta característica de “transição de fase” é ilustrada para o modelo de redes aleatórias

3.2.9 Medidas globais

As medidas globais para a rede envolvem um número que representa, em média, uma propriedade da rede toda. Algumas medidas selecionadas são apresentadas a seguir.

- **Grau médio:** A mais simples das medidas globais é o grau médio, obtido pela média do grau de todos os vértices. No caso particular da interligação administrativa esta medida fornece a quantidade média de ligações entre empresas.
- **Densidade:** Mede o quão próximo uma rede está de ser completa. Uma rede completa tem todas as arestas possíveis e a densidade é igual a 1.
- **Número de componentes:** O Número de componentes apresenta a quantidade de grupos com vértices conectados existente na rede.

- **Diâmetro da rede:** Se dois vértices estão conectados a distância é igual a 1. O diâmetro da rede é o quão separados estão os dois vértices mais distantes.
- **Comprimento de caminho médio:** É a distância média entre os pares de vértices, considerando toda a rede. No caso de rede de empresas, esta métrica pode representar uma medida do grau de interligação administrativa indireta.

3.2.10 Métricas para uma rede exemplificada

Nesta subseção são apresentadas medidas da rede exemplificada na seção 3.1.1. Todos os valores foram obtidos pelo software **Gephi**. Uma representação gráfica da rede é aquela apresentada anteriormente na Figura 7 na página 35.

A Tabela 1 apresenta as métricas obtidas para os vértices, ou seja, grau, centralidade de proximidade, centralidade de intermediação, modularidade e PageRank.

Os vértices 10 e 14 são os que possuem maior grau (grau = 4) pois estão conectados a quatro outros vértices. Como o único vértice que não possui ligação é o vértice V3 ele é o único com grau = 0. Nota-se, também, que V12 é o único vértice que possui duas ligações.

É interessante notar as diferenças que a medida de centralidade de proximidade apresenta com relação ao grau. Por exemplo, os vértices V7, V8, V9, V11 e V13, têm grau igual a três, no entanto os vértices V11 e V13 apresentam maior medida de centralidade de proximidade. Isto pode ser observado de forma intuitiva na Figura 7 pela posição relativa dos vértices na rede.

Quando se analisa a medida de centralidade de intermediação (coluna quatro na Tabela 1) pode-se notar a presença de vários zeros. Isto ocorre porque os vértices correspondentes não participam em caminhos curtos.

A quinta coluna na Tabela 1 apresenta a classe de modularidade. Este número é utilizado como uma variável categórica e na análise gráfica pode-se atribuir a cor dos vértices de acordo com a modularidade de forma a ressaltar os agrupamentos. Observando a classe de modularidade dos vértices e a Figura 7, a separação em módulos fica evidente: quatro vértices à esquerda (classe de mod. = 3), quatro vértices à direita (classe de mod. = 2), três vértices centrais (classe de mod. = 4), dois vértices acima (classe de mod. = 0), e um vértice sozinho com classe de modularidade = 1.

A medida do PageRank é interessante para diferenciar alguns casos que, de acordo com as outras métricas são iguais. Por exemplo, o vértice V11 e V13 têm o mesmo grau, centralidade de proximidade, centralidade de intermediação e pertencem ao mesmo módulo. Mas, pelo PageRank, observa-se que V11 tem PageRank = 0,0850 e que V13 tem PageRank = 0,0927. Pela Figura 7, observa-se que uma diferença na rede são as ligações entre os vértices dos extremos: enquanto os quatro vértices à esquerda (V7, V8, V9 e

Tabela 1 – Métricas para os vértices do exemplo da seção 3.1.1. Os valores foram obtidos pelo software Gephi

Nome	Grau	Centralidade de Proximidade	Centralidade de Intermediação	Classe de Modularidade	PageRank
V1	1	1,0000	0,0000	0	0,0760
V2	1	1,0000	0,0000	0	0,0760
V3	0	0,0000	0,0000	1	0,0114
V4	1	0,3125	0,0000	2	0,0424
V5	1	0,3125	0,0000	2	0,0424
V6	1	0,3125	0,0000	2	0,0424
V7	3	0,3333	0,0000	3	0,0750
V8	3	0,3333	0,0000	3	0,0750
V9	3	0,3333	0,0000	3	0,0750
V10	4	0,4348	0,2692	3	0,0992
V11	3	0,5000	0,3077	4	0,0850
V12	2	0,4167	0,0000	4	0,0618
V13	3	0,5000	0,3077	4	0,0927
V14	4	0,4348	0,3077	2	0,1457

Fonte – Produzido pelo autor

V10) formam um clique, os vértices à direita não formam um clique. Esta característica interfere no valor do PageRank dos vértices do centro da rede.

Tabela 2 – Métricas para as arestas do exemplo da seção 3.1.1. Os valores foram obtidos pelo software Gephi.

Vértice i	Vértice j	Intermediação de aresta	Comunidade	Neighborhood Overlap	Embeddedness
1	2	0,0357	0	0	0
4	14	0,3571	1	0	0
5	14	0,3571	2	0	0
6	14	0,3571	3	0	0
7	8	0,0357	4	0,50	2
7	9	0,0357	4	0,50	2
7	10	0,2857	4	0,40	2
8	9	0,0357	4	0,50	2
8	10	0,2857	4	0,40	2
9	10	0,2857	4	0,40	2
10	11	1,0000	10	0	0
11	12	0,1786	11	0,25	1
11	13	0,8929	11	0,20	1
12	13	0,1786	11	0,25	1
13	14	1,0000	14	0	0

Fonte – Produzido pelo autor.

As principais métricas relacionadas às arestas, para o exemplo da Figura 7 da seção 3.1.1, são apresentadas na Tabela 2. As primeiras duas colunas da Tabela 2 apresentam os vértices que compõem a aresta. A principal medida relacionada a arestas, a intermediação de aresta, é apresentada na terceira coluna da Tabela 2. De forma adicional,

são apresentadas as medidas de Comunidade, Neighborhood Overlap e Embeddedness.

A medida de intermediação de aresta apresentada foi obtida pelo software **Gephi** na forma padronizada. Pelos resultados da tabela observamos que as arestas formadas pelos vértices V10-V11 e V13-V14 são as arestas que possuem maior intermediação com valor de intermediação de aresta igual a 1,0. Assim, pela definição desta medida por estas arestas passam a maior quantidade de caminhos curtos entre dois vértices específicos.

Para completar o exemplo de métricas, as medidas globais para a rede são apresentadas na Tabela 3. O Grau médio apresentado é obtido pela médias dos valores de grau para cada vértice apresentados na Tabela 1. A densidade é obtida pela fração composta pelo número das arestas presentes na rede (15 arestas) dividido pelo total de arestas possíveis numa rede de 14 vértices (neste caso 91 possibilidades, $(14 \times 14 - 14)/2$), ou seja, $15/91 = 0,165$. O número de componentes (grupos com vértices conectados que é igual a três), bem como o diâmetro da rede (maior caminho geodésico que igual a cinco), podem ser vistos na Figura 7. O grau de separação médio desta rede é representado pelo comprimento de caminho médio, igual a 2,661 para esta rede exemplo.

Tabela 3 – Métricas para a rede do exemplo da seção 3.1.1. Os valores foram obtidos pelo software **Gephi**.

Métrica	Valor
Grau médio	2,143
Densidade	0,165
Número de componentes conectados	3
Diâmetro da rede	5
Comprimento de caminho médio	2,661

Fonte – Produzido pelo autor.

O estudo de todas as métricas, de vértices, de arestas e da rede como um todo, possibilita a caracterização da rede. No capítulo seguinte são apresentados três dos principais modelos de formação de redes cujas características estão relacionadas diretamente às métricas apresentadas nesta seção.

4 MODELOS DE FORMAÇÃO DE REDES

Nos anos da década de 1950 ocorreu um grande interesse na aplicação de métodos quantitativos na área de sociologia e antropologia. A linguagem matemática de grafos foi utilizada para os pesquisadores nestas áreas explicarem diversos eventos (NEWMAN, 2010). Na matemática, os pesquisadores passaram a considerar a descrição de grafos como objetos estocásticos ao invés de determinísticos. Assim, as propriedades dos grafos passam a ser vistas em termos de distribuições de probabilidades e esta abordagem influenciou as pesquisas nos anos seguintes até os dias de hoje.

Neste capítulo são apresentados três dos principais modelos de redes, o modelo de Redes Aleatórias proposto por Erdős e Rényi (1960), o modelo de Redes Mundo-Pequeno proposto por Watts e Strogatz (1998) e o modelo de Redes Livres de Escala proposto por Barabási e Albert (1999). Para ilustrar algumas propriedades destes modelos utilizou-se o software NetLogo ¹.

4.1 Redes aleatórias

O modelo desenvolvido por Erdős e Rényi (1960) indica que a construção de uma rede aleatória pode ser feita adicionando arestas (ou ligações) entre pares de vértices de forma aleatória mas com igual probabilidade de ligação, independente de outras ligações já ocorridas.

A modelagem de uma rede aleatória, pelo modelo de Erdős e Rényi (1960), é feita da seguinte forma (SINHA; CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2011): Começando com um conjunto de n vértices desconectados, cada par de vértices é conectado com uma probabilidade constante p , ou seja, a conexão é feita de acordo com um modelo binomial.

Este procedimento simples leva a uma lista surpreendente de propriedades que, num limite de n (número de vértices) grande, podem ser obtidas de forma exata, por exemplo: O grau médio dos vértices nesta rede é descrito por

$$\langle k \rangle = p(n-1). \quad (4.1)$$

A distribuição de graus p_k pode ser obtida, considerando que um vértice tem em média k graus, por

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \simeq \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}. \quad (4.2)$$

Ou seja, a aproximação da igualdade indica a distribuição binomial sendo aproximada para uma distribuição de Poisson (SINHA; CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2011).

Uma prova relevante feita por Erdős e Rényi (1960) é que o grafo (rede) passa por uma “transição de fase” no valor crítico de probabilidade de conexão $p_c = 1/n$. A rede

¹ Página do software NetLogo acessada em 25/10/2014: <<https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>>

Figura 10 – Rede aleatória formada com 500 vértices, obtida na biblioteca de exemplos do software NetLogo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

passa de uma densidade baixa (na qual existem poucas arestas e todas as componentes são pequenas)² para uma densidade alta para a qual uma fração grande de vértices estão juntos numa única componente, a componente gigante. A Figura 10 ilustra o aparecimento de uma componente gigante para uma rede obtida pelo modelo de Erdős e Rényi (1960). O gráfico apresentado no lado esquerdo da Figura 10 demonstra que, após um determinado valor de conexões por vértice, a fração de vértices na componente gigante aumenta.

O modelo de grafos aleatórios foi muito utilizado nas pesquisas iniciais na área de redes. Mas para pesquisa com base no mundo real, o modelo falha ao descrever algumas propriedades encontradas naturalmente, por exemplo, em redes reais a distribuição de graus exibe um comportamento de lei de potência, mas o modelo de Erdős e Rényi (1960) indica uma distribuição de Poisson.

4.2 Redes mundo-pequeno

A primeira referência à ideia de redes Mundo-Pequeno (do inglês, Small-World networks) é feita por Frigyes Karinthy num texto de ficção (KARINTHY, 1929). Embora o texto de Karinthy seja considerado um texto de ficção, ele apresenta vários conceitos

² Veja definição de componente na seção 3.2.8.

importantes de redes. O autor desenvolve a ideia de que o mundo está ficando cada vez menor, devido à comunicação física e verbal, consequência da exploração humana e do desenvolvimento de tecnologias que permitem as pessoas manterem contato, mesmo estando centenas de milhas distantes umas das outras. E o curioso é que o texto é de 1929 e o autor argumenta que o “Globo” está se tornando tão interconectado que qualquer pessoa está a “cinco graus de separação” de qualquer outra pessoa na Terra.

A referência científica para o modelo de mundo-pequeno é a pesquisa de Stanley Milgram (MILGRAM, 1967; TRAVERS; MILGRAM, 1969). O experimento mais citado é de Travers e Milgram (1969), no qual os autores selecionam um indivíduo alvo e um grupo de indivíduos iniciais. Um pacote é dado ao indivíduo inicial e a tarefa é fazer o pacote chegar ao alvo. Mas cada indivíduo deve passar o pacote apenas para uma pessoa que ele conheça e que acredite que poderá fazer o pacote chegar ao alvo. Uma das características reveladas em Travers e Milgram (1969) é que as pessoas tem um alto grau de comunicação e que a conexão com o alvo era feita em média por seis passos de intermediação.

Um modelo importante para a compreensão da estrutura de redes na sociedade é apresentado em Granovetter (1973) no qual o autor desenvolve a ideia de que laços fracos são mais importantes para a manutenção da rede social do que laços fortes, que geralmente eram foco de pesquisas na área de redes. Com base nestes estudos, é de se esperar que os contatos numa sociedade não sejam totalmente aleatórios. O modelo de redes aleatórias de Erdős e Rényi (1960) não possibilita a explicação das características de modelos mundo-pequeno.

Figura 11 – Procedimento de *rewiring* proposto por Watts e Strogatz (1998).

Fonte: Figura obtida em Watts e Strogatz (1998).

O desenvolvimento de um modelo mundo-pequeno é feito por Watts e Strogatz (1998). A partir de uma rede regular, os autores propuseram um mecanismo para reconstruir as conexões (*rewiring*), fazendo com que a rede passe da forma regular para

a forma totalmente aleatória. A rede intermediária apresenta características de redes mundo-pequeno. A Figura 11, extraída de Watts e Strogatz (1998), apresenta a ideia deste mecanismo, que tem início com uma rede regular (cada vértice tem grau igual a quatro), passa por um estado intermediário com conexões sendo substituídas de forma aleatória (possibilitando grupos locais atingirem grupos distantes) e atinge um estado final totalmente aleatório, no qual o grau dos vértices seguem uma distribuição de Poisson, como no trabalho de Erdős e Rényi (1960).

4.3 Ligações preferenciais e redes livres de escala

A ideia de ligações preferenciais foi proposta pela primeira vez por Price (1965) para explicar a distribuição de graus em redes de citações científicas. Artigos mais citados tendem a receber preferência em novas citações. O modelo de ligações preferenciais, (*preferential attachment*, em inglês) foi retomado por Barabási e Albert (1999). Com este modelo de rede, os autores obtiveram uma distribuição para o grau dos vértices na forma de lei de potência.

O modelo de Barabási-Albert (BA) considera uma ordem na dinâmica de formação das redes: quanto maior o grau de um vértice, maior a chance de uma nova ligação ser estabelecida com o vértice. Estas ligações preferenciais produzem uma rede na qual a maioria dos vértices possuem poucas ligações e apenas alguns dos vértices possuem muitas ligações.

A Figura 12 apresenta uma rede com 502 vértices formada a partir do modelo BA pelo software NetLogo. Pode-se observar que a maioria dos vértices (extremos) possuem apenas uma ligação e que poucos vértices (dois ou três) possuem muitas ligações. Ainda, na Figura 12 é possível verificar a distribuição de graus na escala linear (gráfico de colunas) e na escala logarítmica (gráfico com pontos).

Em resumo, o modelo BA pode gerar redes que apresentam as seguintes propriedades (SINHA; CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2011):

- Crescimento: As redes são sistemas abertos com o número de vértices aumentando com o tempo,
- Ligação preferencial: Novos vértices são conectados aleatoriamente, mas preferencialmente aos vértices com maior grau

Para este modelo foi observado que, a probabilidade de um vértice ter k ligações diminui a medida que k aumenta, de acordo com uma lei de potência, ou seja,

$$p_k = k^{-\gamma}, \quad (4.3)$$

Figura 12 – Rede de ligações preferenciais com 502 vértices, obtida pela biblioteca de exemplos do software NetLogo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo γ um expoente maior do que zero, mas que tipicamente assume valores entre 2 e 3. Uma lei de potência implica que não há uma escala característica para o grau dos vértices, ou seja, este tipo de rede é denominado “rede livre de escala”.

Para observar a lei de potência é comum construir gráficos da distribuição de probabilidade na escala log-log, pois, nesta escala, a lei de potência é uma reta. Porém, redes reais apresentam um desvio da lei de potência apresentada, em geral apresentam uma queda exponencial dada por

$$p_k = k^{-\gamma} \phi(k/\xi), \quad (4.4)$$

sendo $\phi(k/\xi)$ o corte feito em alguma escala (SINHA; CHAKRABORTI; CHAKRABARTI, 2011).

É interessante notar que a estrutura obtida pelo modelo BA, apresentada na Figura 12 é do tipo árvore geradora, que é apresentada no capítulo 5 a seguir.

5 ÁRVORE GERADORA

Neste capítulo é apresentado o conceito de árvore geradora, uma parte da teoria de redes que considera técnicas de otimização e algoritmos de busca de forma a otimizar problemas reais que são descritos por estruturas de redes. Por exemplo, com o estudo de árvores geradoras mínimas pode-se minimizar o custo em redes de transporte, redes elétricas, redes de computadores e outras. A Figura 13, extraída do texto de [Sedgewick e Wayne \(2011\)](#), apresenta uma rede com 250 vértices e 1273 arestas que ilustra a ideia de árvores geradoras. Na parte esquerda da figura, a rede completa é apresentada, na parte direita da figura as ligações reforçadas são as da árvore geradora mínima.

Figura 13 – Figura de uma rede (à esquerda) com 250 vértices 1273 arestas e sua árvore geradora mínima (à direita).

Fonte: Extraída de [Sedgewick e Wayne \(2011, p. 61\)](#).

Este tipo de descrição foi considerada neste trabalho por apresentar características que podem contribuir na descrição de redes de empresas-conselheiros. Até a presente data, uma descrição deste problema por meio de árvore geradora mínima não havia sido feita.

O conceito de árvore e de árvore geradora mínima são apresentados na seção 5.1. Um dos algoritmos mais utilizados na determinação de árvores geradoras mínimas é o algoritmo de Kruskal, que é apresentado na seção 5.2. A proposta do presente trabalho é aplicar o conceito de árvores geradoras mínimas para o estudo de redes de empresas.

5.1 Árvore geradora mínima

Modelos de redes não dirigidas que possuem pesos ou custos nas arestas podem ser utilizados em muitas aplicações. Como descrito em [Sedgewick \(2003\)](#), num mapa de linhas aéreas, as arestas representam rotas e os pesos podem representar distâncias ou tarifas. O autor acrescenta que, numa rede elétrica, as arestas representam fios e os pesos

podem ser os comprimentos dos fios, seu custo ou o tempo que o sinal demora para se propagar através do fio.

A otimização destas redes, de forma a obter um custo mínimo, pode ser feita através do estudo de árvores geradoras, através da obtenção de uma árvore geradora mínima (*Minimum Spanning Tree* - MST, em inglês). No caso das arestas terem pesos iguais, qualquer árvore geradora será uma MST. No caso das arestas terem pesos diferentes podem existir várias MST para a mesma rede e para determinar uma solução são utilizados algoritmos. Um dos algoritmos mais conhecidos é o de Kruskal (KRUSKAL, 1956) que é apresentado na seção seguinte.

Com relação à definição de árvores, Sedgewick (2003) define que um grafo G com um número de vértices igual a V é uma árvore se satisfaz qualquer uma das seguintes propriedades:

- G tem $V - 1$ arestas e nenhum ciclo.
- G tem $V - 1$ arestas e é conectado.
- Apenas um único caminho conecta cada par de vértices em G .
- G é um grafo conectado, mas removendo qualquer aresta o grafo torna-se não conectado.

Assim, uma árvore geradora de uma rede deve conter todos os vértices da rede. Se existirem vértices desconectados na rede não será possível obter uma árvore geradora para a rede toda, neste caso pode ser estudada a árvore geradora da maior componente, ou seja, da componente gigante (que é o caso do presente trabalho).

Até esta data, não são muitos os estudos que empregam o conceito de MST na área de administração de organizações. Os principais softwares de redes ainda não incluem esta possibilidade, então a otimização deve ser feita em softwares estatísticos ou matemáticos. A maior frequência de aplicação de MST tem sido observada em trabalhos na área de finanças, nos estudos de correlação de ativos: a matriz de correlação é utilizada como uma matriz de adjacência ponderada e são construídas redes nas quais cada ativo é um vértice. A rede mínima é então utilizada para representar as maiores correlações. Esta ideia foi proposta pela primeira vez por Mantegna (1999) para o estudo de correlações de ativos com o objetivo de extrair uma sub-rede com as conexões mais relevantes. A partir do trabalho de Mantegna (1999) vários trabalhos em redes de correlações foram desenvolvidos sendo, atualmente, parte da área *Network Theory in Finance*¹, que reúne conceitos e aplicações de teoria de redes para explicar e entender melhor os mercados financeiros.

¹ Trabalhos acadêmicos nesta área farão parte do periódico criado recentemente *Journal of Network Theory in Finance* que pode ser acessado em <<http://www.risk.net/type/journal/source/journal-of-network-theory-in-finance>>

5.2 O algoritmo de Kruskal

Nesta seção é apresentado o algoritmo de Kruskal, um dos mais utilizados para a obtenção de uma árvore geradora mínima (KRUSKAL, 1956). Este algoritmo é empregado para a obtenção da árvore geradora mínima (MST do inglês *Minimum Spanning Tree*) para o estudo da rede de empresas-conselheiros. O resumo feito nesta seção foi obtido a partir do texto de Sedgewick e Wayne (2011).

A Figura 14, apresenta imagens de Sedgewick e Wayne (2011) para a ilustração do algoritmo de determinação da árvore geradora mínima, de Kruskal. A rede ilustrada possui arestas com pesos que estão definidos na parte direita (b) da Figura 14. Na parte (a) são exibidos os passos do algoritmo para formar a MST.

Figura 14 – Etapas do algoritmo de Kruskal para a definição da árvore geradora mínima. (a) Ilustração do algoritmo das arestas, (b) pesos das arestas.

Fonte: Imagens extraídas de Sedgewick e Wayne (2011, p. 624).

A árvore geradora mínima é obtida de acordo com o seguinte algoritmo: Considera-se a menor distância (vértices 0 e 7) e então uma aresta da MST é considerada. No próximo passo, considera-se novamente a menor distância para unir dois vértices, mas não pode haver círculos. Ou seja, pela lista de vértices à direita observa-se que a adição de arestas prossegue até o vértice 5-7. Depois disto a ordem para adicionar vértices seria para o vértice 1-3, pois a distância é 0.29. Mas, para obter uma rede geradora não pode

haver ciclos na rede, então a conexão 1-3 é descartada. Da mesma forma as conexões 1-5 e 2-7 não farão parte da MST, pois criariam ciclos. A próxima aresta considerada na MST é aquela entre os vértices 4-5 e por último a aresta 6-2. Todas as outras arestas da rede não podem ser consideradas na MST pois formariam ciclos.

O algoritmo de Kruskal está implementado no software R através da função `mst` do pacote `vegan`. No final da seção 6.3 é apresentado o procedimento para obtenção da árvore geradora mínima para os casos estudados no presente trabalho.

5.3 Árvore geradora e interligação administrativa

Embora pesquisas de redes bipartidas formadas por empresas-diretores sejam conhecidas, até a presente pesquisa não se tem conhecimento da aplicação da análise de árvore geradora mínima no estudo de interligação administrativa de empresas.

Uma rede bipartida possui os modos descritos pela Figura 9 na seção 3.1.3. Os modos (b) e (c) apresentados na Figura 9 formam o foco para a aplicação de árvores geradoras mínimas. De fato, não é possível obter uma MST para a rede completa pois a rede não é completamente conectada. Assim, a proposta deste estudo é considerar a maior componente da rede de empresas e a maior componente da rede de diretores.

A análise de árvore geradora mínima (MST) tem o objetivo de revelar uma sub-rede com as ligações mais relevantes numa rede complexa. Desta forma, espera-se que a aplicação da MST no problema de interligação administrativa contribua para a descrição da esfera de influências nas empresas listadas na BM&FBOVESPA.

Como apontado por Falcão (2013), não há muitos estudos dedicados ao *interlocking board indireto*. Portanto, extrair uma sub-rede que revele as ligações mais relevantes é, em outras palavras, revelar a estrutura básica do *interlocking board indireto*. Ainda, o alinhamento da árvore geradora mínima às medidas de influência, como as propostas por Mizruchi e Bunting (1981), pode levar a uma melhor compreensão da influência na rede de corporações.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

6.1 Caracterização da pesquisa

Este trabalho é caracterizado pela pesquisa descritiva, sendo utilizadas técnicas quantitativas de análise de dados para descrever o fenômeno de interligação administrativa de empresas proporcionada pelo compartilhamento de conselhos de administração.

A natureza descritiva está presente no estudo dos Conselhos de Administração por meio da aplicação da teoria para caracterizar a rede de empresas brasileiras e a rede de conselheiros das empresas. Esta caracterização é feita utilizando-se métricas obtidas para as redes e pela obtenção da árvore geradora mínima. Nem todas as empresas possuem conselheiros que participam em múltiplos conselhos, ou seja, a rede não é totalmente conectada. Isto impede a obtenção de uma árvore para a rede completa e a descrição em termos de árvore geradora mínima feita neste trabalho é restrita à maior componente observada.

Embora a caracterização do trabalho seja descritiva, as diversas medidas obtidas podem ser comparadas e analisadas sob o ponto de vista inferencial. Por exemplo, pode ser testado se a distribuição de grau é do tipo lei de potência, caracterizando a rede em estudo como sendo uma rede do tipo mundo-pequeno.

6.2 Amostra de empresas e dados obtidos

Para esta pesquisa foram consideradas empresas de capital aberto listadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros (BM&FBOVESPA). Os dados foram extraídos das Informações Anuais (IAN) contidas no Relatório Financeiro de cada empresa, no campo “Legislação Societária - Representação”, disponibilizados online em setembro de 2013. A partir da lista com todas as empresas, para cada uma das empresas o procedimento de aquisição dos dados foi:

- Entrar no site <<http://www.bmfbovespa.com.br/>>;
- Selecionar: Mercados > Ações > Empresas > Empresas Listadas;
- Na tela Empresas Listadas, inserir o nome da empresa e clicar em Buscar;
- No resultado da busca, clicar no nome da empresa;
- Selecionar: Relatórios Financeiros > Informações Anuais - IAN;
- Clicar na data dd/mm/aaaa -Legislação Societária Reapresentação (*pop-up's* precisam ser habilitados);

- Selecionar, na janela *pop-up* que aparece, o ícone de um livro azul;
- Utilizar a barra de rolagem até obter a “Composição atual do conselho de administração e da diretoria”. A tela final, para a empresa Petrobrás S.A. é apresentada na Figura 15

Figura 15 – Tela do sistema de divulgação externa da BM&FBOVESPA com informações sobre a composição atual do conselho de administração e da diretoria, para a empresa PETROBRAS.

00951-2 PETROLEO BRASILEIRO S.A. PETROBRAS IAN 31/12/2008

Grupo 2 - Administração - Quadro 01 - Composição Atual do Conselho de Administração e Diretoria

| Quadro 01.01 - Composição Atual do Conselho de Administração e Diretoria |

| Quadro 01.02 - Composição Atual do Conselho Fiscal |

| Quadro 02 - Experiência Profissional e Formação Acadêmica de Cada Conselheiro (Administração e Fiscal) e Diretor |

1 - Item	2 - Nome do Administrador	3 - CPF	4 - Data da Eleição	5 - Prazo do Mandato	6 - A
01	DILMA VANA ROUSSEFF	133.267.246-91	08/04/2009	1 ANO	
02	JOSÉ SERGIO GABRIELLI DE AZEVEDO	042.750.395-72	08/04/2009	1 ANO	
03	GUIDO MANTEGA	676.840.768-68	08/04/2009	1 ANO	
04	SILAS RONDEAU CAVALCANTI SILVA	044.004.963-68	08/04/2009	1 ANO	
05	FRANCISCO ROBERTO DE ALBUQUERQUE	351.786.808-63	08/04/2009	1 ANO	
07	LUCIANO GALVÃO COUTINHO	636.831.808-20	08/04/2009	1 ANO	
08	FABIO COLLETTI BARBOSA	771.733.258-20	08/04/2009	1 ANO	
09	JORGE GERDAU JOHANNPETER	000.924.790-49	08/04/2009	1 ANO	

* CÓDIGO: 1 - Pertence apenas à Diretoria;
2 - Pertence apenas ao Conselho de Administração;
3 - Pertence à Diretoria e ao Conselho de Administração.

volta

© Copyright Bovespa. Todos os direitos reservados.

Fonte: Obtida online no site <<http://www.bmfbovespa.com.br/>>.

As informações do conselho de administração de cada empresa foram armazenadas em planilhas do tipo Excel. Em cada linha da planilha foram considerados os seguintes campos:

- **Empresa:** O nome da empresa.
- **Setor:** O setor de atuação da empresa, classificado de acordo com a BM&FBOVESPA.
- **Nome:** O nome do administrador.

- **CPF:** O Cadastro de Pessoa Física do administrador.
- **Tipo:** O tipo do administrador, classificado em três categorias: 1 - Pertence apenas à Diretoria; 2 - Pertence apenas ao Conselho de Administração; 3 - Pertence à Diretoria e ao Conselho de Administração.

Após a obtenção dos dados, os mesmos foram processados de forma a serem excluídos da base os administradores do tipo 1, pois estes pertencem apenas à Diretoria. Desta forma, a base de dados resultante totalizou 2496 linhas, correspondendo a informações de 310 empresas com 1997 nomes de conselheiros. A próxima seção apresenta as técnicas de análise de dados utilizadas nesta pesquisa.

6.3 Técnicas de análise de dados

As técnicas de análise de dados empregadas podem ser resumidas como: *Análise gráfica e visualização de redes*, para o tratamento descritivo da rede obtida a partir dos dados e *Técnica de otimização*, para a obtenção da árvore geradora mínima. Estas técnicas foram aplicadas com a utilização de softwares já estabelecidos na área de sistemas complexos, o **Gephi** para análise gráfica e visualização de redes e o **R** para a otimização e obtenção da árvore geradora mínima.

O desenvolvimento da área de sistemas complexos tem proporcionado o aparecimento de várias ferramentas para análise gráfica e visualização de redes. A análise gráfica proporciona a extração de diversas métricas associadas à rede, métricas de vértices, de arestas e métricas globais. A visualização da rede, com a utilização de algoritmos específicos, proporciona explorar a topologia da rede. Assim, para realizar a análise dos dados descritos na seção anterior, deve-se contar com softwares específicos para análise de redes.

Um dos softwares que ganhou destaque no cenário da pesquisa em redes complexas é o **Gephi** ([BASTIAN; HEYMANN; JACOMY, 2009](#)). O **Gephi** apresenta uma plataforma adequada para exploração e visualização interativa para os diversos tipos de redes e sistemas complexos. Assim, as várias estatísticas das redes estudadas foram obtidas por meio deste software.

O **Gephi** apresenta vários *plug-ins* que incrementam a análise, com métricas adicionais ou com possibilidades de diferentes *layouts* para estudar padrões específicos. Porém, alguns estudos ainda estão em desenvolvimento e a determinação da árvore geradora mínima não estava disponível como *plug-in* para o desenvolvimento deste trabalho.

A determinação da árvore geradora mínima para uma rede deve ser feita com a utilização de um algoritmo de otimização. Um dos algoritmos mais empregados é o de Kruskal, apresentado na seção 5.2. Este algoritmo está implementado para utilização no software **R** ([R Core Team, 2014](#)), através da função **mst** (*minimum spanning tree*, em inglês),

do pacote **vegan**. A função **mst** tem como *input* uma matriz de distâncias característica da rede, a partir desta matriz de distâncias a função **mst** produz um *output* contendo as arestas da árvore geradora mínima. Esta saída pode ser analisada pelo **Gephi** para obtenção de estatísticas e gráficos.

Figura 16 – Aplicação de técnicas consideradas para a aquisição e análise de dados. A partir dos dados coletados na página BM&FBOVESPA é feita a análise gráfica da rede e a visualização. A otimização é feita para obter a MST e depois é realizada uma nova análise gráfica e visualização

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 16 apresenta um resumo da aplicação das técnicas no procedimento adotado cujos resultados são apresentados no próximo capítulo. Cabe destacar nesta seção o procedimento utilizado para a obtenção da Árvore Geradora Mínima (MST), esta opção de cálculo ainda não está incluída no Gephi.

O algoritmo de Kruskal, para obtenção da árvore geradora mínima, utiliza “distâncias” para realizar a otimização. Assim, para aplicar o modelo deve-se ter uma medida de distância entre os vértices. Para a base de dados em análise, esta medida da distância considerada foi obtida com a transformação dos elementos da matriz de adjacência.

7 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos na análise da composição do conselho de administração para a amostra considerada, definida na seção 6.2.

7.1 Formação da rede bipartida

Os vértices da rede bipartida completa são as empresas e os diretores que participam nos conselhos de administração das empresas. O fato de um mesmo diretor participar em mais de um conselho (*interlocking board*) proporciona, como descrito no capítulo 2, a formação da rede bipartida, ou seja, cada aresta da rede representa a ligação de um diretor à uma empresa pela sua participação no conselho de administração desta empresa.

Os três modos da rede bipartida exemplificados na Figura 9 da página 40, são explorados para a amostra em estudo. Especificamente, o primeiro modo apresenta a rede de forma explícita, ou seja, com os dois tipos de vértices desenhados. No segundo modo, os vértices são apenas as empresas (os diretores servem como arestas) e as estatísticas são referentes à rede formada pelas empresas. O terceiro modo contempla a rede dos diretores (sendo que as empresas são as responsáveis pela união) e as estatísticas neste modo estão relacionadas à rede de diretores.

A rede bipartida total com 2307 vértices é apresentada na Figura 17. Destes vértices, 310 correspondem a empresas (círculos mais escuros - vermelhos na versão em cores) e 1997 correspondem a diretores (círculos mais claros - verdes na versão colorida). O tamanho dos círculos são proporcionais ao Grau de cada vértice. O desenho da rede foi feito com a utilização do software Gephi (BASTIAN; HEYMANN; JACOMY, 2009) com a aplicação do *layout* Fruchterman-Reingold. Pode-se observar, na periferia da rede, que em vários casos os diretores participam apenas do conselho de uma empresa, não ocorrendo a interligação das empresas. Por outro lado, em vários outros casos, a interligação é observada. Ao todo são 110 componentes e na Tabela 4 é apresentado um resumo sobre estas componentes. Pode-se observar na tabela que a maior componente (componente gigante) contém 67,06% dos vértices de toda a rede e que componentes de tamanho 4 são mais frequentes (36 casos de uma empresa e três conselheiros).

Várias estatísticas podem ser extraídas da rede apresentada na Figura 17. Como a rede apresenta dois tipos de vértices e não há possibilidade de dois vértices de um mesmo tipo estarem conectados, não se verifica formação de triângulos. Para uma análise sistemática das estatísticas é mais conveniente observarmos os modos simples da rede bipartida, ou seja a rede empresa-empresa e conselheiro-conselheiro, que nas seções seguintes são denominadas por redes de empresas e rede de conselheiros, respectivamente.

O próximo passo é considerar na análise apenas a componente gigante. Como

Figura 17 – Rede Bipartida com 310 empresas e 1997 conselheiros. Os círculos mais escuros (vermelhos na figura colorida) representam as empresas e os círculos mais claros (verdes na figura colorida) representam os conselheiros. As arestas indicam a ligação do conselheiro à empresa.

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi e *layout* do tipo Fruchterman-Reingold.

apresentado na Tabela 4 esta componente contém 67,06% dos vértices, sendo que destes, 184 vértices são empresas e 1363 são conselheiros. Ainda assim, dos 1363 conselheiros existentes na componente gigante não são todos que participam em múltiplos conselhos.

Uma ilustração da componente gigante completa pode ser vista na Figura 18. Pode-se observar que existem casos de empresas com vários conselheiros mas que nem

Tabela 4 – Componentes na rede bipartida completa. A primeira coluna refere-se ao número de vértices que existe na componente, a segunda coluna apresenta quantas vezes ocorre uma componente desta característica e a última coluna apresenta a proporção de vértices na componente com relação ao total da rede.

Quantidade de vértices	Ocorrência	Proporção de vértices
3	2	0,0026
4	36	0,0624
5	7	0,0152
6	10	0,0260
7	23	0,0698
8	11	0,0381
9	4	0,0156
10	3	0,0130
11	2	0,0095
13	6	0,0338
15	1	0,0065
16	1	0,0069
17	1	0,0074
18	1	0,0078
34	1	0,0147
1547	1	0,6706

Fonte – Produzido pelo autor.

todos compartilham conselhos em outras empresas. Assim, outro filtro aplicado antes da análise de redes empresa-empresa ou conselheiro-conselheiro foi desconsiderar da análise os vértices com grau igual a um, ou seja são considerados na análise apenas os conselheiros que estão ligados a mais de uma empresa.

Considerando apenas a componente gigante e apenas conselheiros que participam em mais de um conselho de administração, a rede bipartida formada para a componente gigante resulta em 184 empresas e 292 conselheiros. A Figura 19 apresenta a componente gigante resultante após a aplicação do filtro que remove todos os vértices com grau igual a 1. Deve-se enfatizar que, de acordo com a definição de interligação administrativa adotada neste trabalho (ver capítulo 2) os conselheiros excluídos nesta análise não desempenham papel na formação da rede de empresas.

Como apresentado na Figura 9 da seção 3.1.3, uma rede bipartida pode ser vista em três modos. As figuras apresentadas nesta seção (Figuras 17, 18 e 19) correspondem ao modo (a), no qual os dois tipos de vértices são apresentados. O Modo (b) e (c) são redes formadas apenas com um tipo de vértice. Nas duas subseções seguintes serão apresentados os resultados para as redes empresa-empresa e conselheiro-conselheiro.

Figura 18 – Componente Gigante da rede de empresas formadas a partir de intersecção de conselhos, com 184 empresas e 1363 conselheiros.

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

Figura 19 – Rede bipartida reduzida formada por 184 empresas e 257 conselheiros que participam em dois ou mais conselhos.

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

7.1.1 Rede de empresas

Nesta seção é analisada a rede formada apenas pela componente gigante da rede bipartida, apresentada anteriormente na Figura 19. A análise é feita no modo empresa-empresa com 184 empresas. A rede resultante é apresentada na Figura 20 na qual foram inseridos os rótulos dos vértices (nomes das empresas). O *layout* utilizado para obter a figura foi o **Force Atlas 2** (JACOMY et al., 2014), executado no software **Gephi**.

Os resultados das estatísticas para esta rede são apresentados a seguir. As primeiras três tabelas apresentam as estatísticas dos vértices da rede de empresas. Na Tabela 5 são apresentados resultados para as 15 empresas com maiores valores de PageRank. Em seguida, na Tabela 6 são apresentados resultados para as 15 empresas com maiores valores de Grau ponderado (Grau do vértice é ponderado pelo peso da aresta) e como segundo ordenamento o PageRank.

Tabela 5 – Estatísticas para as 15 empresas com maiores valores de PageRank.

Empresa	Setor	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Proximidade	Centralidade de Intermediação
Magnesita SA	Mineração	0,01437	21	0,28111	0,10297
OGX Petroleo	Petróleo e Gas	0,01433	31	0,26369	0,06507
Duratex	Outros	0,01352	25	0,28864	0,06757
ItauUnibanco	Financeiro	0,01219	19	0,29612	0,11287
MPX Energia	Energia Elétrica	0,01199	29	0,24663	0,00935
AES Tiete	Energia Elétrica	0,01162	24	0,21354	0,03243
LLX Log	Outros	0,01159	28	0,24663	0,00935
Jereissati	Outros	0,01130	12	0,18827	0,04367
MMX Miner	Mineração	0,01123	27	0,24663	0,00935
Contax	Outros	0,01102	13	0,21916	0,07131
Equatorial	Energia Elétrica	0,01093	15	0,21786	0,04256
Light S/A	Energia Elétrica	0,01075	16	0,24498	0,11048
Brasilagro	Agro e Pesca	0,01073	11	0,25172	0,07469
Suzano Papel	Papel e Celulose	0,01063	15	0,27151	0,07300
BHG	Outros	0,01051	16	0,27151	0,07481

Fonte – Produzido pelo autor.

Com relação à medida de Centralidade de Intermediação, as 15 empresas com maiores valores são listadas na Tabela 7. Na Tabela 8 são apresentadas as 15 empresas com maiores valores de Centralidade de Proximidade.

A seguir são apresentadas as estatísticas das arestas para a rede de empresas formada pela componente gigante vista anteriormente na Figura 20. Na Tabela 9 são apresentados os resultados para os 15 pares empresa-empresa com maiores valores de intermediação de aresta (EdgeBetweeness). Na Tabela 10 os 15 pares com maior peso são apresentados.

Os resultados apresentados estão de acordo com a teoria de Granovetter (1973) que aponta para a força das ligações fracas, ou seja, pelas Tabelas 9 e 10 percebe-se que

Tabela 6 – Estatísticas para as 15 empresas com maiores valores de Grau Ponderado, seguido de PageRank.

Empresa	Sector	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Proximidade	Centralidade de Intermediação
OGX Petroleo	Petróleo e Gas	0,01433	31	0,26369	0,06507
Cosern	Energia Elétrica	0,00823	31	0,21010	0,02568
MPX Energia	Energia Elétrica	0,01199	29	0,24663	0,00935
Celpe	Energia Elétrica	0,00736	29	0,18410	0,00069
LLX Log	Outros	0,01159	28	0,24663	0,00935
Coelba	Energia Elétrica	0,00714	28	0,18410	0,00069
MMX Miner	Mineração	0,01123	27	0,24663	0,00935
Afluentes	Energia Elétrica	0,00668	26	0,18410	0,00069
Duralex	Outros	0,01352	25	0,28864	0,06757
AES Tiete	Energia Elétrica	0,01162	24	0,21354	0,03243
Neoenergia	Energia Elétrica	0,00587	23	0,17429	0,00000
Magnesita SA	Mineração	0,01437	21	0,28111	0,10297
Eletropaulo	Energia Elétrica	0,00909	20	0,21279	0,00000
ItaúUnibanco	Financeiro	0,01219	19	0,29612	0,11287
Coteminas	Têxtil	0,00951	18	0,19956	0,02485

Fonte – Produzido pelo autor.

Tabela 7 – Estatísticas para as 15 empresas com maiores valores de Centralidade de Intermediação.

Empresa	Sector	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Proximidade	Centralidade de Intermediação
Cemig	Energia Elétrica	0,00586	9	0,26794	0,17155
Santos Brp	Transporte Serviço	0,00535	7	0,30000	0,15225
Rodobensimob	Construção	0,00865	11	0,29421	0,15123
ItaúUnibanco	Financeiro	0,01219	19	0,29612	0,11287
Light S/A	Energia Elétrica	0,01075	16	0,24498	0,11048
Magnesita SA	Mineração	0,01437	21	0,28111	0,10297
Lojas Renner	Comércio	0,00688	9	0,27519	0,08627
Tim Part S/A	Telecomunicações	0,00692	8	0,25417	0,08489
Brookfield	Construção	0,00430	3	0,20516	0,08304
Embraer	Veículos e peças	0,00767	11	0,27812	0,07709
M,Diasbranco	Alimentos e Beb	0,00424	5	0,24079	0,07513
BHG	Outros	0,01051	16	0,27151	0,07481
Brasilagro	Agro e Pesca	0,01073	11	0,25172	0,07469
Suzano Papel	Papel e Celulose	0,01063	15	0,27151	0,07300
Contax	Outros	0,01102	13	0,21916	0,07131

Fonte – Produzido pelo autor.

para valores altos de intermediação o peso das arestas são menores (ligações mais fracas, relativamente). Já as ligações mais fortes (pesos maiores) não apresentam valores altos de intermediação.

As métricas globais para a componente gigante da rede de empresas são apresentadas na Tabela 11. Uma medida interessante é o Comprimento de Caminho Médio, igual a 4,868, que pode ser uma medida para o *interlocking board* indireto. Ou seja, o estudo

Tabela 8 – Estatísticas para as 15 empresas com maiores valores de Centralidade de Proximidade.

Empresa	Setor	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Proximidade	Centralidade de Intermediação
Santos Brp	Transporte Serviç	0,00535	7	0,30000	0,15225
ItauUnibanco	Financeiro	0,01219	19	0,29612	0,11287
Rodobensimob	Construção	0,00865	11	0,29421	0,15123
Duratex	Outros	0,01352	25	0,28864	0,06757
Magnesita SA	Mineração	0,01437	21	0,28111	0,10297
Lopes Brasil	Outros	0,00534	6	0,28111	0,03017
Embraer	Veículos e peças	0,00767	11	0,27812	0,07709
Alpargatas	Têxtil	0,00869	11	0,27685	0,06846
Lojas Renner	Comércio	0,00688	9	0,27519	0,08627
Suzano Papel	Papel e Celulose	0,01063	15	0,27151	0,07300
BHG	Outros	0,01051	16	0,27151	0,07481
Iochp-Maxion	Veículos e peças	0,00618	8	0,26912	0,04348
Cemig	Energia Elétrica	0,00586	9	0,26794	0,17155
All Amer Lat	Transporte Serviç	0,00799	9	0,26407	0,06470
OGX Petroleo	Petróleo e Gás	0,01433	31	0,26369	0,06507

Fonte – Produzido pelo autor.

Tabela 9 – Estatísticas para os 15 maiores valores de intermediação de aresta.

Vértice 1	Vértice 2	Intermediação de aresta	Peso	Embeddedness
Cemig	Santos Brp	1,00000	1	0
Cemig	Contax	0,59574	1	0
Lojas Renner	Santos Brp	0,58853	1	1
Brookfield	M,Diasbranco	0,58668	1	0
Brookfield	Embratel Part	0,52322	1	0
Cemig	Light S/A	0,51378	2	1
Rodobensimob	Tim Part S/A	0,44607	1	4
CPFL Energia	Metalfrio	0,40148	1	1
Light S/A	Rede Energia	0,39038	1	0
Rodobensimob	Santos Brp	0,38501	1	3
Banrisul	Embratel Part	0,37743	1	0
Lojas Renner	M,Diasbranco	0,34061	1	3
All Amer Lat	Magnesita SA	0,33321	2	0
Magnesita SA	Rodobensimob	0,32599	1	1
Log-In	Magnesita SA	0,32359	1	1

Fonte – Produzido pelo autor.

revela que em média são necessários aproximadamente 5 intermediações para conectar duas empresas, de forma indireta, através da interligação administrativa. Na próxima seção são apresentados os resultados para o modo conselheiro-conselheiro, para a mesma rede bipartida selecionada.

Tabela 10 – Estatísticas para os 15 maiores valores de Peso da aresta.

Vértice 1	Vértice 2	Intermediação de aresta	Peso	Embeddedness
AES Tiete	Eletropaulo	0,00148	13	2
Coteminas	Santanense	0,06179	11	2
Gerdau	Gerdau Met	0,00037	9	4
Celpe	Cosern	0,03700	8	4
Coelba	Cosern	0,03700	8	4
Bradesco	Bradespar	0,03589	8	1
AES Elpa	AES Tiete	0,00148	8	2
LLX Log	MPX Energia	0,00037	8	8
Celpe	Coelba	0,00037	8	4
Cosern	Neoenergia	0,07697	7	3
LLX Log	MMX Miner	0,00037	7	8
MMX Miner	MPX Energia	0,00037	7	8
Afluente	Celpe	0,00037	7	4
Duratex	Elekeiroz	0,05291	6	3
Duratex	Itautec	0,05291	6	3

Fonte – Produzido pelo autor.

Tabela 11 – Métricas globais para a componente gigante da rede de empresas. Os valores foram obtidos pelo software Gephi.

Métrica	Valor
Grau médio	4,228
Grau médio ponderado	7,261
Densidade	0,023
Número de componentes conectados	1
Diâmetro da rede	12
Comprimento de caminho médio	4,868

Fonte – Produzido pelo autor.

Figura 20 – Rede com 184 empresas formada a partir de intersecção de conselhos, duas empresas conectadas possuem pelo menos um conselheiro em comum. O tamanho dos círculos e das letras são proporcionais ao PageRank da empresa. As cores são correspondentes a 13 categorias de modularidade (ver arquivo pdf para melhor resolução).

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi e *layout* ForceAtlas2.

7.1.2 Rede de conselheiros

Nesta seção são apresentados os resultados da rede formada entre os conselheiros. Apenas a componente gigante da rede bipartida foi considerada, sendo um total de 257 conselheiros. Deve ser enfatizado que a ligação entre dois conselheiros representada na Figura 21 significa que eles participam em conselhos de pelo menos uma mesma empresa.

Tabela 12 – Estatísticas para os 15 conselheiros com maiores valores de PageRank.

Conselheiro	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Intermediação
Eliezer Batista da Silva	0,008603	37	0,054043
Raphael Hermeto de Almeida Magalhães	0,008225	35	0,017846
Oscar de Paula Bernardes Neto	0,008062	28	0,091376
Alfredo Eydio Arruda Villela Filho	0,007439	27	0,004640
Antônio Carlos Augusto Ribeiro Bonchristiano	0,007073	20	0,031758
Pedro Jereissati	0,006911	16	0,017640
Eike Fuhrken Batista	0,006835	31	0,002282
Pedro Pullen Parente	0,006793	20	0,100141
Maílson Ferreira da Nóbrega	0,006709	12	0,167711
Alcides Lopes Tápias	0,006647	19	0,190359
Fersen Lamas Lambranco	0,006551	18	0,039979
Ricardo Villela Marino	0,006458	23	0,004640
Britaldo Pedrosa Soares	0,006447	39	0,117647
Luiz Rodolfo Landim Machado	0,006433	29	0,002282
Paulo Carvalho de Gouvêa	0,006433	29	0,002282

Fonte – Produzido pelo autor.

Tabela 13 – Estatísticas para os 15 conselheiros com maiores valores de Grau Ponderado, seguido de PageRank.

Conselheiro	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Intermediação
Britaldo Pedrosa Soares	0,006447	39	0,117647
Gonzalo Pérez Fernandez	0,005798	39	0,001174
Joilson Rodrigues Ferreira	0,005798	39	0,001174
Luciana Freitas Rodrigues	0,005798	39	0,001174
Mário José Ruiz - Tagle Larrain	0,005798	39	0,001174
Rubens André Chagas de Brito	0,005798	39	0,001174
Eliezer Batista da Silva	0,008603	37	0,054043
Raphael Hermeto de Almeida Magalhães	0,008225	35	0,017846
Airton Ribeiro de Matos	0,005015	34	0,000000
Andrew Martin Vesey	0,005015	34	0,000000
Pedro de Freitas Almeida Bueno Vieira	0,005015	34	0,000000
Roberto Mário Di Nardo	0,005015	34	0,000000
Sérgio Ladeira Furquim Werneck Filho	0,005015	34	0,000000
Marcelo Maia de Azevedo Corrêa	0,005226	33	0,021450
Eike Fuhrken Batista	0,006835	31	0,002282

Fonte – Produzido pelo autor.

Com relação à medida de Centralidade de Intermediação, os 15 conselheiros com maiores valores são listados na Tabela 14.

Tabela 14 – Estatísticas para os 15 conselheiros com maiores valores de Centralidade de Intermediação.

Conselheiro	PageRank	Grau Ponderado	Centralidade de Intermediação
Alcides Lopes Tápias	0,006647	19	0,190359
Maria Amália Delfim de Melo Coutrim	0,002551	7	0,170158
Maílson Ferreira da Nóbrega	0,006709	12	0,167711
Francisco Roberto André Gros	0,005379	17	0,142290
Britaldo Pedrosa Soares	0,006447	39	0,117647
Israel Vainboim	0,005851	16	0,100478
Pedro Pullen Parente	0,006793	20	0,100141
Oscar de Paula Bernardes Neto	0,008062	28	0,091376
José Galló	0,002130	5	0,087108
Francisco Carlos Coutinho Pitella	0,003120	14	0,079415
Djalma Bastos de Moraes	0,005103	16	0,078250
Andrea Sandro Calabi	0,004520	9	0,077944
Ricardo Abecassis Espírito Santo Silva	0,005838	19	0,076479
Joaquim Dias de Castro	0,004222	13	0,075368
Lara Cristina Ribeiro Piau Marques	0,002806	12	0,068639

Fonte – Produzido pelo autor.

A seguir são apresentadas as estatísticas das arestas para a rede de conselheiros formada pela componente gigante vista na Figura 21. Na Tabela 15 são apresentados os resultados para os 15 pares conselheiro-conselheiro com maiores valores de intermediação de aresta (EdgeBetweeness). Na Tabela 16, os 15 pares com maior peso são apresentados.

As métricas globais para a rede (componente gigante) de conselheiros são apresentadas na Tabela 17. O Grau médio indica que em média, um conselheiro participa de 8 conselhos de administração e que, um conselheiro se conecta a outro nesta rede em média por 4,741 passos.

Tabela 15 – Estatísticas para os 15 maiores valores de intermediação de aresta.

Vértice 1	Vértice 2	Intermediação de aresta	Peso	Embeddedness
A.L.Tápias	M.A.D.M. Coutrim	1,0000	1	1
A.L.Tápias	M.F. da Nóbrega	0,9606	1	1
Lara C.R.P. Marques	M.F. da Nóbrega	0,6458	1	1
José Galló	M.A.D.M. Coutrim	0,6403	1	1
F.R.A. Gros	José Galló	0,6158	1	2
BritaldoP. Soares	M.A.D.M. Coutrim	0,5835	1	4
A.S. Calabi	M.F. da Nóbrega	0,5573	1	1
F.R.A. Gros	John Lin	0,5462	1	0
Djalma B. de Moraes	J.D. de Castro	0,4939	1	8
Djalma B. de Moraes	M.A.D.M. Coutrim	0,4778	1	4
F.C.C. Pitella	P.S. Malan	0,4304	1	1
Joel Korn	John Lin	0,4036	1	1
F.L. Lambranco	M.L. Luchetti	0,3990	1	1
G.J. Côte	M.F. da Nóbrega	0,3879	1	1
A.A. Silva	M.A.D.M. Coutrim	0,3827	1	4

Fonte – Produzido pelo autor.

Tabela 16 – Estatísticas para os 15 maiores valores de Peso da aresta.

Vértice 1	Vértice 2	Intermediação de aresta	Peso	Embeddedness
E.B. da Silva	R.H.d.A. Magalhães	0,0364	5	10
E.F. Batista	E.B. da Silva	0,0125	5	10
E.F. Batista	R.H.d.A. Magalhães	0,0005	5	10
G.P. Fernandez	JoilsonR. Ferreira	0,0002	5	11
G.P. Fernandez	Luciana F. Rodrigues	0,0002	5	11
G.P. Fernandez	M.J.R.- T. Larrain	0,0002	5	11
G.P. Fernandez	R.A.C. de Brito	0,0002	5	11
JoilsonR. Ferreira	Luciana F. Rodrigues	0,0002	5	11
JoilsonR. Ferreira	M.J.R.- T. Larrain	0,0002	5	11
JoilsonR. Ferreira	R.A.C. de Brito	0,0002	5	11
Luciana F. Rodrigues	M.J.R.- T. Larrain	0,0002	5	11
Luciana F. Rodrigues	R.A.C. de Brito	0,0002	5	11
M.J.R.- T. Larrain	R.A.C. de Brito	0,0002	5	11

Fonte – Produzido pelo autor.

Figura 21 – Rede de 257 Conselheiros formada a partir da interligação de conselhos, dois conselheiros conectados participam pelo menos de um mesmo conselho de administração (ver arquivo pdf para melhor resolução).

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi e *layout* ForceAtlas2.

Tabela 17 – Métricas globais para a componente gigante da rede de conselheiros. Os valores foram obtidos pelo software Gephi.

Métrica	Valor
Grau médio	8,000
Grau médio ponderado	12,420
Densidade	0,031
Número de componentes conectados	1
Diâmetro da rede	12
Comprimento de caminho médio	4,741

Fonte – Produzido pelo autor.

7.2 Árvores mínimas obtidas

O resultado principal deste trabalho é a proposta de uma estrutura de rede básica ou mínima que represente a interligação administrativa. Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para a árvore geradora mínima das redes analisadas nas subseções anteriores e, especificamente aquelas ilustradas nas Figuras 20 e 21.

Esta proposta tem um apoio teórico no trabalho de Mizruchi e Bunting (1981), que apresenta várias métricas para influência em redes de corporações, como resumido na página 27 deste trabalho. Especificamente, é interessante notar que em seu trabalho Mizruchi e Bunting (1981) consideram uma medida baseada nas ligações fortes, ou seja o índice modificado de Bonacich utilizando ligações fortes. Assim, o argumento de Mizruchi e Bunting (1981) para a influência em redes de corporações pode ser utilizado para a proposta de construção de uma estrutura básica com as ligações mais fortes.

Uma estrutura básica com ênfase em ligações mais fortes pode ser obtida pela árvore geradora mínima (MST, do inglês *Minimum Spanning Tree*). Para tanto cada ligação deve ser transformada em uma distância, ou seja ligações mais fortes correspondem a distâncias menores. Após obtidas todas as distâncias aplica-se o algoritmo de otimização para a determinação da árvore geradora mínima.

A análise de MST foi feita no software R com a aplicação do algoritmo de Kruskal (apresentado na seção 5.2) tanto na rede de empresas como na rede de conselheiros, cujos resultados são apresentados nas subseções seguintes.

Para a determinação dos *layouts*, todas as arestas da componente gigante foram categorizadas numa variável denominada *MST* com os valores dados por:

$$MST = \begin{cases} 0 & \text{se a aresta não pertence à árvore geradora mínima,} \\ 1 & \text{se a aresta pertence à árvore geradora mínima} \end{cases} \quad (7.1)$$

Além desta codificação, para possibilitar o destaque da árvore geradora mínima, todas as arestas com *MST* igual a um tiveram seu peso acrescido de 10. Após esta codificação e reponderação das arestas, com a utilização do Gephi, todas as arestas com *MST* igual a zero são filtradas (excluídas), ou seja, obtém-se um grafo apenas com as arestas da árvore geradora mínima. Neste grafo aplica-se o *layout* Force Atlas 2 (JACOMY et al., 2014) e, após a convergência do *layout*, as arestas excluídas são reconsideradas removendo-se o filtro. Este procedimento permite visualizar a estrutura da árvore geradora mínima e todas as outras interligações, porém com linhas mais fracas. Como apresentado nas próximas subseções, este procedimento favorece a interpretação dos resultados métricos obtidos e apresentados nas tabelas anteriores.

7.2.1 Árvore geradora mínima para rede de empresas

Nesta subseção são apresentados os resultados obtidos para a árvore geradora mínima (MST) da rede de empresas. A Figura 22 apresenta a componente gigante da rede de empresas, com as arestas pertencentes à árvore geradora mínima destacadas (mais grossas). O *layout* foi obtido a partir do procedimento descrito no parágrafo anterior à esta subseção, o tamanho da fonte de cada rótulo é proporcional ao PageRank da Empresa.

É interessante observar que a estrutura da MST está alinhada aos resultados apresentados nas Tabelas 5 à 10. Por exemplo, pela Tabela 5 observa-se que a empresa **Magnesita SA** apresenta maior medida de PageRank, seguida pela **OGX Petróleo**. Pela Figura 22 verifica-se que estas empresas estão em destaque. As três maiores intermediações apresentadas na Tabela 7 são evidenciadas no centro da Figura 22, no eixo **Cemig-Santos Brp-Rodobensimob**.

Considerando que a medida de PageRank seja uma medida similar ao índice de Bonacich, de acordo com o trabalho de Mizruchi e Bunting (1981), tem-se uma estrutura que reflete uma rede de influências, sendo que neste caso, os atores são as corporações. Não é o objetivo deste trabalho estudar os impactos destas influências em números específicos de cada empresa, mas sim observar se a estrutura representa de forma adequada as estatísticas obtidas. Na próxima seção é apresentada a árvore geradora mínima para o caso em que os atores são os conselheiros.

Figura 22 – Componente gigante da rede de empresas com as arestas da árvore geradora mínima evidenciadas (ver arquivo pdf para melhor resolução).

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

7.2.2 Árvore geradora mínima para rede de conselheiros

O estudo da árvore geradora mínima para os conselheiros é apresentado na Figura 23, que refere-se à componente gigante com as arestas da árvore geradora mínima mais grossas. Nesta figura são apresentados os nomes dos 257 conselheiros. O tamanho da fonte corresponde à medida do PageRank do conselheiro.

A rede pode ser simplificada para que a estrutura seja evidenciada, ou seja, se forem mostradas apenas as arestas pertencentes à MST, algumas estatísticas podem ser comparadas ou verificadas. A Figura 24 apresenta esta rede com apenas alguns nomes nos vértices, principalmente os nomes que aparecem como os 15 conselheiros com maior PageRank e maior Intermediação.

Aqui também é interessante observar que a estrutura da MST está alinhada aos resultados apresentados nas Tabelas 12 à 16. A evidência maior de alinhamento da estrutura proposta com as estatísticas está, não apenas nas medidas de PageRank mas principalmente nas medidas de intermediações. Observa-se, por exemplo, o eixo “Maílson Ferreira da Nóbrega - Alcides Lópes Tápias - Maria Amália Delfim de Melo Coutrim” presente no centro das Figuras 23 e 24 e no início da Tabela 14.

Também deve-se ressaltar que o objetivo deste trabalho não é a discussão de nomes específicos e nem o impacto de associações entre estes administradores. A estrutura obtida na Figura 24 pode ser utilizada para análise de rede de influências ou então para comentários específicos, baseados no conhecimento e histórico dos administradores, mas o propósito aqui é outro: apresentar uma estrutura de rede que esteja alinhada aos resultados estatísticos e revele um núcleo de relações mais intensas. Pelos resultados obtidos, esta estrutura faz sentido e esta ferramenta de análise poderá ser utilizada em estudos futuros até mesmo como gráficos estratégicos em análises econômicas ou políticas.

Figura 23 – Rede de conselheiros formada a partir de interligação de conselhos. Apenas a componente gigante é apresentada e as arestas da Árvore Geradora Mínima são mais grossas (ver arquivo pdf para melhor resolução).

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

Figura 24 – Rede de diretores formada a partir de interligação de conselhos. Apenas as arestas da Árvore Geradora Mínima são apresentadas.

Fonte: Elaborada pelo autor, com o software Gephi.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entre as diversas formas de interligação administrativa, neste trabalho foi considerada a interligação administrativa direta e indireta definida através de participação de um mesmo conselheiro em múltiplos conselhos. De acordo com esta abordagem, alinhada ao trabalho de [Falcão \(2013\)](#), obteve-se uma medida do grau de interligação indireta médio para as empresas brasileiras de capital aberto como sendo igual a 4,868 (comprimento de caminho médio apresentado na Tabela 11), ou seja, em média, as empresas Brasileiras tem um grau de *interlocking board indireto* aproximadamente igual a cinco. Em termos da terminologia de redes mundo-pequeno, o grau de separabilidade entre as empresas brasileiras é aproximadamente igual a cinco, por meio de seus conselhos de administração.

Para a rede de conselheiros, esta medida de separabilidade, dada pelo comprimento de caminho médio, é igual a 4,741 (apresentado na Tabela 17). Assim, nesta rede de conselheiros, em média, um conselheiro está a 4,7 conexões de qualquer outro conselheiro nesta rede.

O diâmetro da rede é uma informação que complementa a análise do grau de separação, neste trabalho observou-se que o diâmetro da rede é igual a 12, ou seja a maior separação entre duas empresas ou conselheiros, considerando o menor caminho possível na rede, é igual a 12.

Nota-se que, considerando o grau médio ponderado de conexões, para empresas esta medida é igual a 7,261 (Tabela 11) enquanto que para conselheiros esta medida é igual a 12,42 (Tabela 17). Isto indica a presença do mesmo grupo de conselheiros em vários conselhos, o que é pode levar ao excesso de interligação administrativa.

A representação da rede de empresas ou de conselheiros na forma de árvore geradora mínima apresentou um alinhamento às estatísticas obtidas da rede. De forma específica, a observação da medida PageRank nas tabelas e os vértices correspondentes nas figuras estão de acordo com a teoria de [Granovetter \(1973\)](#) que discute a força das ligações fracas. Observa-se que as maiores medidas de grau (número de conexões) não garante um maior PageRank, o que está de acordo com os achados de [Mizruchi e Bunting \(1981\)](#) com relação à influência e controle.

Outros estudos poderão ser derivados deste trabalho, por exemplo, a observação do histórico das empresas e a construção de uma dinâmica das interligações. Seguindo a linha de [Robins e Alexander \(2004\)](#), a dinâmica de interligação pode ser simulada como uma rede mundo-pequeno, ou como uma rede de ligações preferenciais, ou ainda um modelo misto de ligações preferenciais com o procedimento de *rewiring*. Uma outra abordagem pode ser a análise da floresta mínima, que envolve a aplicação de procedimento de otimização da árvore geradora mínima para todas as componentes, não apenas à componente gigante.

Aplicações da árvore geradora em problemas de administração ainda são incipientes. A maior frequência é observada na área de finanças, em estudos de correlação de ativos, como nos trabalhos de Mantegna (1999) e de Sinha et al. (2007). No entanto, várias áreas podem ser beneficiadas com a obtenção da MST, como por exemplo: gerenciamento da produção no estudo das relações entre atividades e funções em empresas, telecomunicações e energia elétrica no estudo de uma rede com custo mínimo, cadeia de suprimentos, e também interligação administrativa com outras definições para a interligação, como por exemplo participação acionária.

Espera-se que os resultados obtidos no presente trabalho contribuam para estimular a aplicação das técnicas aqui empregadas em novas pesquisas na área de administração de organizações. Além disto, o alinhamento entre as estatísticas e a estrutura de árvore geradora mínima, descrito aqui, pode proporcionar uma ferramenta adicional para análises de relações e cenários econômicos e políticos.

REFERÊNCIAS

- AU, Kevin; PENG, Mike W; WANG, Denis. Interlocking directorates, firm strategies, and performance in hong kong: Toward a research agenda. **Asia Pacific Journal of Management**, v. 17, p. 29–47, 2000.
- BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. **Science**, v. 286, p. 509–512, 1999.
- BASTIAN, Mathieu; HEYMANN, Sebastien; JACOMY, Mathieu. Gephi: An open source software for exploring and manipulating networks. **International AAAI Conference on Weblogs and Social Media**, 2009. Disponível em: <<http://www.aaai.org/ocs/index.php/ICWSM/09/paper/view/154>>.
- BONACICH, Phillip. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. **Journal of Mathematical Sociology**, v. 2, p. 113–120, 1972.
- _____. Power and centrality: A family fo measures. **American Journal of Sociology**, v. 92, n. 5, p. 1170–1182, 1987.
- BONACICH, Phillip; LLOYD, Paulette. Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. **Social Networks**, n. 23, p. 191–201, 2001.
- BRIN, Sergey; PAGE, Lawrence. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine,. **Proceedings of the seventh International Conference on the World Wide Web**, p. 107–117, 1998.
- BURT, Ronald S. A structural theory of interlocking corporate directorates. **Social Networks**, n. 1, p. 415–435, 1978.
- DIESTEL, Reinhart. **Graph Theory**. 3. ed. New York, NY, USA: Springer-Verlag Heidelberg, 2005. (Graduate Texts in Mathematics).
- DOMHOFF, G William. **Who rules America? Power, Politics, and Social Change**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2006. 1-281 p.
- ERDÖS, Paul; RÉNYI, A. On the evolution of random graphs. **Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences**, v. 5, p. 17–61, 1960.
- FALCÃO, Diego Billi. **Interlocking board: aspectos societários da interligação administrativa no direito brasileiro**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo - Faculdade de Direito, 2013.
- FENNEMA, Meindert; SCHIJF, Huibert. Analysing interlocking directorates: Theory and methods. **Social Networks**, v. 1, p. 297–332, 1978.
- GRANOVETTER, Mark S. The strength of weak ties. **American Journal of Sociology**, v. 78, p. 1360–1380, 1973.
- HEEMSKERK, Eelke M. The social field of the european corporate elite: a network analysis of interlocking directorates among europe’s largest corporate boards. **Global Networks**, v. 11, n. 4, p. 440–460, 2011.

JACKSON, Mathew O. **Social and Economic Networks**. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2010. 504 p.

JACOMY, Mathieu et al. Forceatlas2, a continuous graph layout algorithm for handy network visualization designed for the gephi software. **PLOS ONE**, v. 9, n. 6, p. e98679: 1–12, 2014.

KARINTHY, Frigyes. Chain-links. In: JANKÓ, Enikő (Ed.). **Everything is Different**. Budapest: [s.n.], 1929. Traduzido do Húngaro por Adam Makkai.

KOLLER, Daphne; FRIEDMAN, Nir. **Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques**. Cambridge, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2009.

KRANTZ, Matt. Web of board members ties together corporate america. **USA Today**, 2012.

KRUSKAL, Joseph B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 7, p. 48–50, 1956.

MANTEGNA, Rosario N. Hierarchical structure in financial markets. **The European Physical Journal B**, n. 11, p. 193–197, 1999.

MENDES-DA-SILVA, Wesley. Small worlds and board interlocking in brazil: A longitudinal study of corporate networks, 1997-2007. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 9, n. 4, p. 521–548, 2011.

MENDES-DA-SILVA, Wesley et al. A influência das redes de relações corporativas no desempenho das empresas do novo mercado da bovespa. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 6, n. 3, p. 337–358, 2008.

MILGRAM, Stanley. The small-world problem. **Psychology Today**, v. 1, n. 1, p. 61–67, 1967.

MIZRUCHI, Mark S; BUNTING, David. Influence in corporate networks: An examination of four measures. **Administrative Science Quarterly**, v. 26, n. 3, p. 475–489, 1981.

NEWMAN, Mark E J. The structure and function of complex networks. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003.

_____. **Networks: An introduction**. Oxford, NY, USA: Oxford University Press, 2010. 772 p.

NEWMAN, Mark E J; BARABÁSI, Albert-László; WATTS, Duncan J (Ed.). **The structure and Dynamics of Networks**. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2006. 582 p.

PAGE, Lawrence et al. The pagerank citation ranking: Bringing order to the web. **Stanford Digital Library Project**, p. 1–17, 1998.

PAM, Max. Interlocking directorates, the problem and its solution. **Harvard Law Review**, v. 26, n. 6, p. 467–492, 1913.

PRICE, Derek J de Solla. Networks of scientific papers. **Science**, v. 49, n. 3683, p. 510–515, 1965.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <http://www.R-project.org>.

RAPOPORT, Anatol; HORVATH, William J. A study of a large sociogram. **Behavioral Science**, v. 6, p. 279–291, 1961.

RIBEIRO, Flávio; COLAUTO, Romualdo Douglas. A relação entre a board interlocking e as práticas de suavização de resultado. In: **VIII Congresso Anpcont**. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 2014.

ROBINS, Garry; ALEXANDER, Malcolm. Small worlds among interlocking directors: Network structure and distance in bipartite graphs. **Computational & Mathematical Organization Theory**, v. 10, n. 1, p. 69–94, 2004.

SANTOS, Rafael Liza; SILVEIRA, Alexandre Di Miceli da. Board interlocking no brasil: A participação de conselheiros em múltiplas companhias e seu efeito sobre o valor das empresas. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 5, n. 2, p. 125–163, 2007.

SEDGEWICK, Robert. **Algorithms in Java, Part 5: Graph Algorithms**. 3. ed. Boston, MA, USA: Addison Wesley, 2003. 528 p.

SEDGEWICK, Robert; WAYNE, Kevin. **Algorithms**. 4. ed. Boston, MA, USA: Addison Wesley, 2011. 952 p.

SINHA, Sitabhra; CHAKRABORTI, Arnab Chatterjee Anirban; CHAKRABARTI, Bikas K. **Econophysics: An introduction**. Weinheim, Federal Republic of Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.KgaA, 2011. 355 p.

SINHA, Sitabhra et al. Uncovering the internal structure of the indian financial market: Large cross-correlation behavior in the NSE. In: CHATTERJEE, Arnab; CHAKRABARTI, BikasK (Ed.). **Econophysics of Markets and Business Networks**. [S.l.]: Springer Milan, 2007, (New Economic Windows). p. 3–19. ISBN 978-88-470-0664-5.

SOLOMONOFF, Ray; RAPOPORT, Anatol. Connectivity of random nets. **Bulletin of Mathematical Biophysics**, v. 13, p. 107–117, 1951.

TRAVERS, Jeffrey; MILGRAM, Stanley. An experimental study of the small world problem. **Sociometry**, p. 425–443, 1969.

WATTS, Duncan J.; STROGATZ, Steve H. Collective dynamics of “small-world” networks. **Nature**, v. 393, p. 440–442, 1998.

ÍNDICE

- Árvore geradora, [55](#)
- Árvore geradora mínima, [55](#), [57](#), [58](#)
 - Resultado para conselheiros, [82](#), [83](#)
 - Resultado para empresas, [80](#)
- Algoritmo de Kruskal, [57](#), [58](#)
- Amostra, [9](#), [59](#)
- Centralidade, [40](#)
 - de Intermediação, [42](#)
 - de Proximidade, [42](#)
- Classe da Modularidade, [43](#)
- Clique, [44](#)
- Componente, [44](#)
 - Resultados rede bipartida, [65](#)
- Componente gigante, [44](#)
- Comprimento de caminho médio, [42](#)
- Comprimento geodésico, [41](#)
- Estudos multidisciplinares, [19](#)
- Grafo, [34](#)
- Grau, [41](#)
- Interligação Administrativa, [20](#)
- Interlocking board, [25](#), [63](#)
 - Direto, [25](#)
 - Indireto, [26](#)
- Intermediação de aresta, [43](#)
- Lei de potência, [52](#)
- Matriz de adjacência, [36](#)
- Minimum Spanning Tree, [56](#)
- Modelos de redes
 - Modelo de Ligações Preferenciais, [52](#)
 - Redes Aleatórias, [49](#)
 - Redes mundo pequeno, [50](#)
- PageRank, [43](#)
- Pontes de Königsberg, [33](#), [35](#)
- Redes, [33](#)
 - Bipartida, [40](#)
 - Empresas-conselheiros completa, [64](#)
 - Empresas-conselheiros reduzida, [67](#)
 - Dirigidas, [38](#)
 - Empresas-Conselheiros, [38](#)
 - Livre de escala, [53](#)
- Software
 - Gephi, [61](#)
 - R, [61](#)