UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Física e Química de São Carlos

Departamento de Física e Ciência dos Materiais

**“UM MODELO SEMICLÁSSICO PARA
A EMISSÃO ESPONTÂNEA”**

ROGÉRIO C. T. DA COSTA

(Tese apresentada ao Instituto de Física
e Química de São Carlos, USP, para a
obtenção do título de Livre-Docente).

SÃO CARLOS

1978

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE S CARLOS

UM MODELO SEMICLÁSSICO PARA A
EMIÇÃO ESPONTÂNEA

por

Rogério C.T.da Costa

Tese apresentada ao Instituto
de Física e Química de São /
Carlos, USP, para a obtenção
do Título de Livre-Docente.

Departamento de Física e Ciência dos Materiais-São Carlos

1 9 7 8

Í N D I C E

CAPÍTULO I

Introdução: Um Modelo Semi-Clássico para a Emissão Espontânea.....	1
---	---

CAPÍTULO II

As Equações do Meio Material.....	13
II.A A Aproximação de Dipolo Elétrico.....	13
II.B A Equação de Schrödinger para Átomos de Dois Níveis.....	15

CAPÍTULO III

O Problema da Emissão para o Decaimento $\Delta m = \pm 1$	22
III.A A Solução das Equações Auto-Consistentes.....	22
III.B Discussão das Soluções: Acoplamento Fraco.....	30
III.C Discussão das Soluções: Acoplamento Forte.....	36

CAPÍTULO IV

O Problema da Emissão para o Decaimento $\Delta m = 0$	42
--	----

CAPÍTULO V

O Problema da Emissão com um Nível Degenerado.....	50
V.A Obtenção das Equações Auto-consistentes.....	50
V.B Solução das Equações para Acoplamento Fraco.....	66

APÊNDICE I

O Tratamento de Dicke para a Emissão Coletiva de Áto- mos de Dois Níveis.....	82
--	----

APÊNDICE II

Radiação Emitida por um Plano de Dipolos Girantes....	94
---	----

REFERÊNCIAS.....	100
------------------	-----

CAPÍTULO I

UM MODELO SEMICLÁSSICO PARA A EMISSÃO ESPONTÂNEA

INTRODUÇÃO

A emissão de radiação eletromagnética pela matéria excitada é, em princípio, um problema bastante complexo. Entre as razões que concorrem para este fim podemos citar: a) O fato da matéria conter muitos átomos; b) O fato de mesmo os átomos mais simples (hidrogênio, por exemplo) possuírem muitos níveis de energia e, finalmente; c) O fato da Teoria Quântica dos Campos, utilizada no tratamento destes problemas, dar origem a equações matemáticas de solução muito difícil.

O primeiro tratamento que se pode fazer, e que vem sendo efetivamente utilizado, ainda que com várias modificações, desde o começo da Mecânica Quântica (Weisskopf e Wigner, (1930)⁽¹⁾), consiste em resolver perturbativamente um átomo de dois níveis. A justificativa para este cálculo baseia-se na possibilidade de reduzir o número de transições a considerar (regras de seleção, etc.) e, especialmente, na idéia de que a emissão de radiação por um só átomo é um processo essencialmente lento, levando muitos ciclos das oscilações atômicas para ser completado. Para o caso da emissão coletiva de vários átomos o trabalho clássico é o de Dicke⁽²⁾ (1954) o qual, pela proximidade apresentada em relação ao problema de nos

so interesse, merece ser descrito com um pouco mais de detalhe⁽⁺⁾.

Dicke considerou um sistema de N átomos iguais, distinguíveis, com dois níveis separados pela energia E . Devido à completa analogia existente com um sistema de N partículas de spin $1/2$, podemos introduzir autoestados comuns, $\psi_{v,m}$, da energia não perturbada H_0 (análogo da componente L_z na direção do eixo de quantização) e de um novo operador R^2 (correspondente ao quadrado $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ do momentum angular) de modo que

$$H_0 \psi_{v,m} = mE \psi_{v,m} ,$$

(1.1)

e
$$R^2 \psi_{v,m} = v(v+1) \psi_{v,m} ,$$

onde $v = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0$ ou $\frac{1}{2}$, e $-v \leq m \leq v$. O número quântico v , chamado número de cooperação, e que representa o análogo quântico das diferenças de fase entre os dipolos radiantes da teoria clássica, desempenha, como veremos logo a seguir, um papel relevante no processo de emissão. De fato, suponhamos que os nossos átomos interagem apenas através de um campo eletromagnético quantizado, tratado na aproximação de dipolo elétrico. Como a interação é linear nas componentes de $\vec{R}$ o operador R^2 ainda será uma constante de movimento, de modo que v mantém-se constante duran-

(+) O cálculo de alguns dos resultados de Dicke pode ser visto no Apêndice I deste trabalho. Acreditamos, entretanto, que a discussão apresentada nesta Introdução seja suficiente para uma primeira leitura.

te a emissão, enquanto que o valor de m diminui. Usando a Teoria das Perturbações em primeira ordem, Dicke mostrou que a taxa de emissão num estado v, m é dada por

$$I = I_0(v+m)(v-m+1) , \quad (1.2)$$

onde I_0 , que não depende de v e m , é a taxa de emissão correspondente a um sistema com um único átomo ($v=1/2, m=\pm 1/2$). Este resultado pode ser escrito numa soma de duas parcelas, a primeira, $I_0(v^2 - m^2)$, contendo os termos quadráticos nos números quânticos, e a segunda, $I_0(v+m)$, os termos lineares. Para sistemas com muitas partículas podemos desprezar, supondo $v \neq m$, a contribuição do segundo termo na emissão produzida pelos estados com $v \sim N$ ("super-radiantes"). Esta aproximação é chamada, algumas vezes, de "semi-clássica", pois é possível mostrar⁽³⁾ que ela está relacionada com o fato de se tratar os operadores do campo, na representação de Heisenberg, como simples funções do tempo.

Seguindo este caminho e supondo para m uma variação quase contínua (análoga ao caso de grandes momentos angulares) Dicke obteve, para a taxa de emissão, uma dependência temporal da forma $\text{sech}^2(at)$, $a=I_0 v/E$. É importante notar que além do decréscimo de tipo exponencial para $t \rightarrow +\infty$, existe um curioso crescimento exponencial para $t \rightarrow -\infty$; fato este devido ao abandono do termo linear $I_0(v+m)$. Realmente, consideremos, para exemplificar, a situação onde todos os átomos estão inicialmente excitados ($v=m=N/2$). Vemos por (1.2) que a taxa de emissão neste estado não é nula, sendo apenas de ordem N (em vez de N^2). Considerar apenas o termo quadrático equi

vale então a introduzir um falso "equilíbrio instável" nos estados com $v=m$, o qual será inicialmente quebrado pela emissão espontânea (termo linear) até que a emissão induzida, que pode ser tratada classicamente, predomine e possa tomar sozinha conta de todo o processo. (Note-se que no estado fundamental do sistema temos $v = -m = N/2$, o que anula simultaneamente os dois termos presentes em (I.2)). É fácil ver, destes resultados, que a validade da aproximação semiclássica requer essencialmente uma dupla limitação sobre a vida média do nosso sistema. De fato, por um lado ela deve ser muito menor do que a vida média de um átomo isolado, uma vez que a energia de excitação é proporcional a N enquanto a taxa de emissão cresce com N^2 ($v-N \gg 1$). Por outro lado, entretanto, ela tem de ser muito maior do que o período $1/\nu_0 = h/E$ de uma oscilação atômica, de modo a justificar o uso da Teoria das Perturbações.

Desde os resultados de Dicke o problema da interação eletromagnética dos sistemas atômicos tem sido discutido por muitos autores⁽⁴⁻¹⁰⁾. Os tratamentos mais recentes, sobre os quais não pretendemos nos alongar, consistem em, partindo de um sistema de átomos de dois níveis, que interagem com um campo de cavidade quantizado, obter as equações de movimento para os operadores da matéria e do campo na representação de Heisenberg. Como estas equações não podem ser resolvidas exatamente, utiliza-se um tratamento não-perturbativo que consiste numa integração aproximada das equações do campo (lineares) e na substituição dos resultados nas equações do meio material (não-lineares). Entre as aproximações

mais comumente empregadas estão a chamada aproximação de onda girante (onde se despreza as interações fora de fase com a solução não perturbada) e novamente a hipótese de que a emissão da radiação é um processo relativamente lento. As equações obtidas também fornecem um resultado semiclássico, onde os operadores são tratados como números e os autovalores considerados no limite de grandes números quânticos.

Todos estes fatos sugerem a idéia de se investigar a possibilidade de uma solução puramente clássica, isto é, um cálculo onde o campo eletromagnético seja tratado classicamente desde o começo, através das equações de Maxwell. Tal idéia, aliás, não é de maneira nenhuma nova, pois um tratamento baseado no eletromagnetismo clássico vem sendo abundantemente utilizado, junto com outras hipóteses (envoltória lentamente variável, etc.), no estudo da propagação de pulsos luminosos em meios não lineares⁽¹¹⁾. Nossa intenção, portanto, consiste simplesmente em aplicar o mesmo tipo de tratamento na solução de um problema mais simples; simplicidade esta que nos permitirá, como veremos mais adiante, obter uma solução exata (respeitadas naturalmente as limitações impostas pelo modelo escolhido).

Antes de começar qualquer cálculo específico vale a pena fazer um julgamento a-priori dos prós e contra envolvidos no uso de um modelo deste tipo. É claro que do lado desfavorável da balança irão certamente pesar dois tipos de argumento:

- 1) Teremos certamente de abandonar a emissão espontânea em benefício da emissão induzida, isto é, o campo que atua num

átomo é simplesmente o campo produzido pelos outros átomos. 2) Além do uso exclusivo da interação eletromagnética (inerente a todos tratamentos deste tipo) teremos dificuldades ao definir as "fontes" das equações de Maxwell, sendo necessária alguma hipótese de natureza drástica para relacionar grandezas macroscópicas e locais. Como o estado totalmente excitado tem momento de dipolo nulo (Simetria de Carga) já é previsível, desde agora, o aparecimento do fenômeno de "equilíbrio instável".

Quanto aos argumentos favoráveis, é claro que eles só poderão ser apresentados de um modo convincente após a obtenção dos resultados. Entretanto, é sempre possível alinhar, como uma forma de motivação, as vantagens que se espera obter caso os cálculos sejam bem sucedidos:

A) Sendo o modelo clássico muito mais simples, existe sempre a possibilidade de descobrir um arranjo geométrico onde ele possa ser resolvido exatamente. Embora a vantagem de se conhecer uma situação onde todas as dificuldades estão concentradas nas hipóteses, e não no método de solução, seja muitas vezes ilusória, é difícil ficarmos indiferentes ao apelo estético que inegavelmente possuem os chamados "modelos solúveis".

B) De posse de uma solução fechada será igualmente difícil resistir à tentação de realizar algumas incursões no terreno das altas densidades, onde a hipótese da emissão lenta não é certamente aplicável. Embora não haja, na solução do nosso modelo, restrições a-priori sobre a intensidade do campo elétrico, limitações de outro tipo, conforme veremos mais adiante, impedirão o aproveitamento completo desta possibilidade.

C) A relativa simplicidade das soluções poderá ser aproveitada na investigação da emissão por sistemas de átomos com mais de dois níveis.

Esperamos que tenha ficado claro, das observações acima, que os nossos esforços devem estar orientados na obtenção de uma solução exata que compense, de alguma forma, as concessões feitas na estrutura do modelo escolhido. Sendo assim, é natural que voltemos a nossa atenção para o arranjo geométrico mais simples possível, que é o caso da emissão unidimensional de radiação por um plano material infinito. Para esta escolha concorre a necessidade de evitar situações onde a emissão originada em um ponto é influenciada pelo comportamento passado de outros pontos do próprio sistema, o que certamente dará origem a complexidades matemáticas indesejáveis. São assim eliminados todos os emissores volumétricos (tridimensionais), por causa da existência de propagação interna (equações de derivadas parciais) ou mesmo sistemas como uma casca esférica, por causa do aparecimento de equações diferenciais com retardamento.

Começemos então considerando as equações de Maxwell : Para um meio material descarregado, não magnético, descrito apenas pela polarização macroscópica $\vec{P}$, temos:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{com} \quad \vec{B} = \vec{H} \quad \text{e} \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (1.4)$$

De (I.3) e (I.4) vem:

$$\begin{aligned}
 \text{rot rot } \vec{E} &= \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = \\
 &= - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E} + 4\pi \vec{P})
 \end{aligned}
 \quad (1.5)$$

Supondo que toda matéria está concentrada uniformemente no plano $z=0$ (Fig.1) dando origem a dois pulsos planos que se propagam no vácuo, nas direções $\pm \hat{z}$, teremos:

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t) \hat{x} + E_y(z,t) \hat{y} \quad (1.6)$$

onde

$$\text{div } \vec{E} = 0. \quad (1.7)$$

De (1.5), (1.6) e (1.7) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Sendo a densidade do plano dada por

$$\rho(xyz) = \sigma \delta(z), \quad (1.9)$$

onde σ é o número de átomos por unidade de área, podemos escrever:

$$\vec{P}(z,t) = \sigma \delta(z) \vec{P}(t), \quad (1.10)$$

onde $\vec{p}(t) = p_x(t)\hat{x} + p_y(t)\hat{y}$ é o valor médio, no tempo t , do momento de dipolo dos átomos do plano. A Equação (I.8) passa então a ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \delta(z) \frac{d^2}{dt^2} \vec{p}(t). \quad (I.11)$$

Fora do plano material o campo elétrico é descrito pelas soluções livres de (I.11) (Veja Fig.1)

$$\begin{aligned} \vec{E}^d(z,t) &= \vec{E}_I^d(z+ct) + \vec{E}_R^d(z-ct), \quad z > 0, \\ \vec{E}^e(z,t) &= \vec{E}_I^e(z-ct) + \vec{E}_R^e(z+ct), \quad z < 0, \end{aligned} \quad (I.12)$$

onde, d, e, I e R representam, respectivamente abreviações de "direita", "esquerda", "incidente" e "refletido". Estas soluções devem, naturalmente, satisfazer as condições de contorno para a componente tangencial do campo elétrico:

$$\vec{E}^d(0,t) = \vec{E}^e(0,t) = \vec{E}(t), \quad (I.13)$$

onde $\vec{E}(t)$ é o valor do campo elétrico sobre o plano material. Integramos agora (I.11) desde $z = -\epsilon$ até $z = +\epsilon$, tomando o limite do resultado quando $\epsilon \rightarrow 0$. Obtemos então:

$$\left. \frac{\partial \vec{E}^d}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \vec{E}^e}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}, \quad (I.14)$$

o que, com o auxílio de (I.12) transforma-se em:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \vec{E}_I^d - \vec{E}_R^d - (\vec{E}_R^e - \vec{E}_I^e) \}_{z=0} = \frac{4\pi}{c^2} \sigma \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} . \quad (I.15)$$

Integrando (I.15) em relação ao tempo e levando em conta o fato de que o estado fundamental (onde naturalmente $d\vec{p}(t)/dt \equiv 0$) deve ser compatível com a ausência de campos externos, obtemos:

$$\vec{E}_I^d(0,t) - \vec{E}_R^d(0,t) + \vec{E}_I^e(0,t) - \vec{E}_R^e(0,t) = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} . \quad (I.16)$$

Este resultado pode ser escrito numa forma mais conveniente com o auxílio das condições de contorno (I.13). De fato, usando as relações

$$-\vec{E}_R^d(0,t) = \vec{E}_I^d(0,t) - \vec{E}(t) , \quad (I.17)$$

$$-\vec{E}_R^e(0,t) = \vec{E}_I^e(0,t) - \vec{E}(t) ,$$

podemos eliminar os campos refletidos que aparecem em (I.16), obtendo

$$\{ \vec{E}_I^d(0,t) + \vec{E}_I^e(0,t) \} - \vec{E}(t) = \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} . \quad (I.18)$$

A equação (I.18) nos permite obter o campo elétrico $\vec{E}(t)$ em função do dipolo médio $\vec{p}(t)$ e de uma excitação exterior, supostamente co

nhecida, $\vec{E}_I^d + \vec{E}_I^e$. Como estamos interessados numa situação de emissão espontânea vamos admitir que não existem campos incidentes colocando $\vec{E}_I^d + \vec{E}_I^e = 0$:

$$\vec{E}(t) = - \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} . \quad (1.19)$$

Esta relação constitui, na verdade, a equação básica do nosso trabalho. O que vamos fazer daqui para frente é utilizar métodos bastante bem conhecidos para descobrir uma maneira de relacionar as derivadas de $\vec{p}(t)$ (a partir da equação de Schrödinger) com o campo elétrico $\vec{E}(t)$. Obteremos assim um sistema de equações ordinárias para as variáveis que definem simultaneamente o estado da matéria e do campo em $z=0$. (O valor de $\vec{E}$ nos demais pontos do espaço é obtido simplesmente das condições (I.13)). Note-se que como $\vec{E}$ aparece explicitado na Equação (I.19) é sempre possível eliminá-lo das equações que descrevem o comportamento do meio material. Nosso sistema, portanto, será sempre redutível à equações de primeira ordem que envolvem apenas variáveis atômicas. Bastará dar então a função de onda inicial do problema para resolvê-lo completamente. Devemos lembrar mais uma vez o papel desempenhado pela geometria plana na obtenção da expressão (I.19). Seria muito mais interessante se o nosso sistema possuisse um comprimento característico (como no caso da superfície esférica, ou mesmo dois planos paralelos); mas este é o preço que vamos pagar para reduzir o problema a um sistema diferencial ordinário, com mais possibilidades portanto de obter uma solução exata.

Nos cálculos subsequentes suporemos que os estados fun

damental e excitado dos átomos do plano possuem, respectivamente, momentos angulares $l=0$ e $l=1$. No Capítulo II deste trabalho discutiremos as equações de Schrödinger para os casos $m=\pm 1$ e $m=0$ (tomando o eixo de quantização perpendicular ao plano emissor no primeiro caso e paralelo no segundo), sendo as soluções do sistema acoplado matéria-campo tratados separadamente nos Capítulos III e IV. Finalmente, no Capítulo V, apresentaremos um exemplo de emissão unidimensional utilizando átomos com mais de 2 níveis.

Figura 1: Emissão e absorção de radiação por um plano material ($z=0$), mostrando as convenções utilizadas para indicar os campos incidentes e refletidos (Veja a Eq. I. 12).

CAPÍTULO II

AS EQUAÇÕES DO MEIO MATERIAL^(*)

II-A A aproximação de dipolo elétrico

Consideremos a Hamiltoniana de um átomo de N elétrons sob a ação de um campo de radiação exterior descrito pelo potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m} (\vec{p}_j - e/c \vec{A}(\vec{x}_j, t))^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \quad , \quad (II.1)$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, $\vec{p}_j = -i\hbar \vec{\nabla}_j$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ se referem aos diferentes elétrons do átomo, e o potencial V contém todas as interações Coulombianas. Para o caso do nosso interesse o comprimento de onda da radiação emitida numa transição eletrônica é muito maior do que o tamanho de um átomo, de modo que podemos considerar, em todo volume atômico, o potencial vetor como independente da posição: $\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \vec{A}(t)$. A equação de Schrödinger toma então a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N (p_j^2 - \frac{2e}{c} \vec{A}(t) \cdot \vec{p}_j + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}(t)^2) \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) + \\ + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) \end{aligned} \quad (II.2)$$

^(*) As Seções II, III e IV correspondem a uma descrição ampliada e com maiores detalhes, do conteúdo das referências (12), (13) e (14).

É conveniente introduzir agora a transformação unitária:

$$\phi = u\psi$$

onde

$$u = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \bar{A}(t) \cdot \sum_{i=1}^N \vec{x}_i\right\} \quad (II.3)$$

Substituindo (II.3) no primeiro membro de (II.2) obtemos as relações seguintes:

$$\frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{p}_j) u\psi = \frac{2e}{c} u(\vec{A} \cdot \vec{p}_j \psi) + 2 \frac{e^2}{c^2} (\vec{A})^2 u\psi, \quad (II.4)$$

e

$$p_j^2 u\psi = u \cdot (p_j^2 \psi) + 2 \frac{e}{c} u(\vec{A} \cdot \vec{p}_j \psi) + \frac{e^2}{c^2} (\vec{A})^2 u\psi, \quad (II.5)$$

e

$$V\phi = Vu\psi. \quad (II.6)$$

Logo, o primeiro membro de (II.2) fica reduzido apenas a

$$\frac{1}{2m} \sum_j u(p_j^2 \psi) + Vu\psi. \quad (II.7)$$

Por outro lado, no segundo membro temos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (u\psi) = i\hbar u \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \right) u\psi. \quad (II.8)$$

De (II.7) e (II.8) obtemos então a forma final de (II.2):

$$(H_0 + H_I(t))\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad , \quad (II.9)$$

onde

$$H_0 = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + V \quad (II.10)$$

e

$$H_I(t) = -\vec{p} \cdot \vec{E}(t) \quad ,$$

onde $\vec{E} = -1/c \partial \vec{A} / \partial t$ é o campo elétrico e $\vec{p} = \sum_{i=1}^N e \vec{x}_i$ é o operador dipolo elétrico, o que justifica o nome dado a esta aproximação.

II.B A Equação de Schrödinger para Átomos de Dois Níveis

Devido ao fato do nosso plano ser muito fino (infinitamente fino na formulação matemática), vamos supor que o campo elétrico é o mesmo em toda sua espessura, isto é, que todos os átomos do plano "vêem", no mesmo instante, o mesmo valor de $\vec{E}$. A função de onda ψ , para todos os átomos (identificados pelo índice k), satisfaz então a:

$$\sum_k (H_{0k} - \vec{p}_k \cdot \vec{E}(t))\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad . \quad (II.11)$$

Substituindo $\psi = \sum_k \psi_k$, vemos que cada função de onda individual ψ_k satisfaz a mesma equação de Schrödinger:

$$\{H_0 - \vec{p} \cdot \vec{E}(t)\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} . \quad (\text{II.12})$$

Desta forma, desacoplamos a equação de Schrödinger para todo o sistema substituindo a interação entre os átomos pela interação com o campo elétrico clássico externo $\vec{E}(t)$. Naturalmente o sistema será novamente "reacoplado", como veremos mais adiante, através da equação (I.19), que representa a dependência do campo elétrico (macroscópico) com a polarização da matéria. Por ora, entretanto, vamos nos limitar ao estudo da equação (II.12) aplicada aos átomos de dois níveis. Consideremos então um átomo com níveis de energia $\pm 1/2\hbar\omega_0$ correspondentes, respectivamente, às funções de onda normalizadas ϕ_b e ϕ_a dos estados excitado e fundamental. Qualquer estado do átomo será então descrito pela função de onda

$$\psi(t) = b(t)\phi_b + a(t)\phi_a . \quad (\text{II.13})$$

Substituindo este resultado em (II.12), obtemos:

$$\frac{da}{dt} = i \frac{\omega_0}{2} a - i/\hbar (\phi_a, H_I(t) \phi_b) b , \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{db}{dt} = -i \frac{\omega_0}{2} b - i/\hbar (\phi_a, H_I(t) \phi_b)^* a ,$$

onde utilizamos a ortogonalidade de ϕ_a e ϕ_b e, supondo a origem de coordenadas no centro do átomo (potencial esfericamente simétrico), consideramos $(\phi_a, \vec{p} \phi_a) = (\phi_b, \vec{p} \phi_b) = 0$. No lugar das variáveis complexas

$a(t)$ e $b(t)$ é preferível utilizar três funções reais do tempo, na forma¹⁵⁾

$$v_x = \langle \sigma_x \rangle = \psi^\dagger \sigma_x \psi = ab^* + a^* b$$

$$v_y = \langle \sigma_y \rangle = \psi^\dagger \sigma_y \psi = i(ba^* - b^* a) \quad (\text{II.15})$$

$$v_z = \langle \sigma_z \rangle = \psi^\dagger \sigma_z \psi = bb^* - aa^* ,$$

onde σ_x, σ_y e σ_z são as matrizes de spin de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Em termos de v_x, v_y e v_z as equações (II.14) podem ser escritas compactamente como^(*)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} , \quad (\text{II.16})$$

onde $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$, $\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}$; com

$$\omega_x = \frac{2}{\hbar} \text{Re} (\phi_a, H_I \phi_b) ,$$

(II.17)

$$\omega_y = \frac{2}{\hbar} \text{Im} (\phi_a, H_I \phi_b) ,$$

(*) Uma vez que as partes reais e imaginárias de a e b fornecem quatro números reais, é impossível obter $\psi(t)$ partindo apenas dos valores de v_x, v_y e v_z . É sempre possível, entretanto, dados v_x, v_y e v_z determinar, através de (II.15), $|a|$, $|b|$ e a diferença de fase entre a e b , faltando apenas um fator de fase irrelevante em $\psi(t)$.

$$\omega_z = \omega_0 .$$

A Equação de Schrödinger fica então transformada numa equação de torque clássica, onde a velocidade angular é uma função do campo elétrico. O fato do módulo de $\vec{v}$ ser constante ($\vec{v} \cdot d\vec{v}/dt \equiv 0$) exprime agora a conservação da probabilidade, uma vez que, por (II.15), $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (|a|^2 + |b|^2)^2$. No futuro, suporemos sempre que as funções de onda $\psi(t)$ estão normalizadas à unidade, de modo que $\vec{v}^2 \equiv 1$.

Precisamos agora obter o valor do elemento de matriz que aparece nos segundos membros de (II.17). Como o estado fundamental é um estado s (potencial central), ϕ_b deve então ter momentum angular $\ell=1$, do contrário a Hamiltoniana de interação seria identicamente nula (consequência óbvia do acoplamento dipolar introduzido em (II.11)). Existem então duas escolhas possíveis para a projeção do momentum angular de ϕ_b : $m=\pm 1$ ou $m=0$, para as quais, usando funções de onda do tipo hidrogênio^(*)

$$\phi_a = R_{10}(r) \quad , \quad \ell=0, m=0,$$

(*) Naturalmente os elementos de matriz (II.17) dependem dos fatores de fase contidos em ϕ_a e ϕ_b . As expressões (II.18) acima correspondem à definição dos Harmônios Esféricos dada em V. Merzbacher: Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, p.186.

$$\phi_b = \begin{cases} R_{21}(r) \cos \theta, & \ell=1, m=0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) \sin \theta e^{i\phi}, & \ell=1, m=+1, \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) \sin \theta e^{-i\phi}, & \ell=1, m=-1, \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Obtemos:

$$p_x = \pm p \sigma_x, \quad p_y = p \sigma_y, \quad p_z = 0, \quad m = \pm 1, \quad (\text{II.19})$$

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = -\sqrt{2} p \sigma_x, \quad m = 0, \quad (\text{II.20})$$

onde $p = -4\pi e / 3\sqrt{2} \int_0^{\infty} R_{21} R_{10} r^3 dr$, é o resultado de uma integral de superposição que contém as partes radiais de ϕ_a e ϕ_b . De (II.17), (II.18), (II.19) e (II.20) vemos então que:

$$\omega_x = \mp \frac{2p}{\hbar} E_x, \quad \omega_y = -\frac{2p}{\hbar} E_y, \quad m = \pm 1 \quad (\text{II.21})$$

$$\omega_x = \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z, \quad \omega_y = 0, \quad m = 0 \quad (\text{II.22})$$

As equações de movimento para v_x, v_y e v_z podem ser agora obtidas de (II.16):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\omega_0 v_y - \frac{2p}{\hbar} E_y v_z, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \omega_0 v_x \pm \frac{2p}{\hbar} E_x v_z,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{2p}{\hbar} (v_x E_y + v_y E_x) , \quad (II.23)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\omega_0 v_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \omega_0 v_x - \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z v_z, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z v_y . \quad (II.24)$$

O que falta agora é juntar, conforme o caso, as expressões (II.23) ou (II.24) com a Equação (I.19) de modo a obter um sistema simultâneo para o campo elétrico e as variáveis que descrevem o meio material. A maneira mais simples de fazer isto, e que será a adotada no presente trabalho, envolve infelizmente duas hipóteses fundamentais de verificação muito difícil:

1) O campo elétrico que aparece em (I.19) é o mesmo de (II.23) e (II.24), isto é, o campo que atua num particular átomo é o mesmo que comparece nas equações de Maxwell.

2) O dipolo elétrico médio $\vec{p}(t)$ de (I.19) é igual ao valor médio do operador dipolo elétrico para um único átomo. Isto quer dizer que todos os átomos têm, no mesmo instante, a mesma função de onda, o que corresponde a uma situação de máxima "cooperação".

De (II.19) e (II.20) obtemos então

$$\vec{p}(t) = p(\pm v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) , \quad m=\pm 1 , \quad (II.25)$$

$$\vec{p}(t) = -\sqrt{2} p v_x \hat{z} , \quad m=0 . \quad (II.26)$$

Uma última observação: Como o campo elétrico é sempre paralelo ao plano emissor o eixo $\hat{z}$ deve ser perpendicular a este plano para $m = \pm 1$ e estar nele contido para $m = 0$. Assim sendo, o estado excitado/ com $m = 0$ (numa direção paralela ao plano) passa a ser uma combinação linear dos estados com $m = \pm 1$ (na direção perpendicular), o que reduz a emissão com $m = 0$ a um caso particular de um problema de três níveis, com um estado excitado degenerado (Veja Seção V).

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DA EMISSÃO PARA O DE CAIMENTO $\Delta m = \pm 1$

III.A A Solução das Equações Autoconsistentes

Vamos estudar separadamente o caso onde as transições atômicas são do tipo $\Delta m = \pm 1$. Conforme acabamos de ver, devemos usar, para esta situação, as equações (II.23) e (I.19), com o dipolo médio obtido de (II.25). Obtemos então um sistema de cinco equações para as cinco incógnitas v_x, v_y, v_z, E_x e E_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\omega_0 v_y - \frac{2p}{\hbar} E_y v_z, & \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \omega_0 v_x + \frac{2p}{\hbar} E_x v_z, & \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \\ &= \frac{2p}{\hbar} (v_x E_y - v_y E_x) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$E_x = + \frac{2\pi p_0}{c} \frac{dv_x}{dt}, \quad E_y = - \frac{2\pi p_0}{c} \frac{dv_y}{dt}, \quad (\text{III.2})$$

onde os duplos sinais se referem, respectivamente, aos dois valores de Δm . Antes de discutir a solução das equações (III.1,2) é conveniente considerar duas das suas propriedades gerais: a primeira é a já conhecida conservação da probabilidade (expressa pela constante de movimento $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$), e a segunda, que vamos ver agora, é a conservação da energia. Para isto multiplicamos as duas primeiras equações (III.1) respectivamente por $\pm E_x$ e E_y e somamos os resultados, obtendo:

$$v_x E_y - v_y E_x = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \pm E_x \frac{dv_y}{dt} + E_y \frac{dv_x}{dt} \right\}. \quad (\text{III.3})$$

Substituindo em (III.3) os valores de dv_x/dt e dv_y/dt dados em (III.2) vem

$$v_x E_y - v_y E_x = - \frac{c}{2\pi p \sigma \omega_0} (E_x^2 + E_y^2). \quad (\text{III.4})$$

Substituindo agora o 1º membro de (III.4) na última das equações/ (III.1) obtemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma v_z \right) = - \frac{c}{2\pi} \vec{E}^2, \quad (\text{III.5})$$

qualquer que seja o valor de Δm . É fácil ver de (II.15) que $1/2 \hbar \omega_0 \sigma v_z$ é o valor médio, por unidade de área, da energia não perturbada H_0 ($H_0 = 1/2 \hbar \omega_0 \sigma_z$ na representação em que $\phi_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\phi_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), de modo que (III.5) nos dá simplesmente uma expressão para a taxa de emissão do sistema (o fato da derivada ser sempre negativa é uma consequência de não haver ondas incidentes em (I.19)). Já o segundo membro de (III.5) nos diz que toda energia dos átomos é convertida em radiação (consequência aliás do modelo escolhido), pois a taxa de emissão é duas vezes (soma das duas direções opostas) o módulo de vetor de Poynting na vizinhança imediata do plano^(*).

(*) Nesta emissão bilateral o vetor $\vec{B}$ é descontínuo sobre o plano material, segundo a bem conhecida expressão⁽¹⁶⁾ $\hat{z} \wedge (\vec{B}^d - \vec{B}^e) = 4\pi/c \vec{K}$, onde $\vec{K}$ é a densidade superficial de corrente. Para o

De posse destes resultados podemos começar agora a resolver o sistema (III.1,2). Para tanto é conveniente introduzir variáveis complexas $E^+ = E_x + iE_y$ e $v^+ = v_x + iv_y$ (para, respectivamente, $\Delta m = \pm 1$). Obtemos então:

$$\frac{d}{dt} v^{\pm} = \pm i \omega_0 v^{\pm} + \frac{2p}{\hbar} i v_z E^{\pm} \quad (III.6)$$

$\Delta m = \pm 1$

$$E^+ = \mp \frac{2\pi p \sigma}{c} \frac{d}{dt} v^{\pm} \quad (III.7)$$

Substituindo (III.7) em (III.6) ficamos com

$$\frac{d}{dt} v^{\pm} = \frac{\pm i + \alpha v_z}{1 + \alpha^2 v_z^2} \omega_0 v^{\pm} \quad (III.8)$$

onde $\alpha = 4\pi p^2 \sigma / \hbar c$, é uma constante adimensional. Como a conservação da probabilidade é dada por $v^+ v^- + v_z^2 = 1$, podemos reduzir o número de variáveis introduzindo coordenadas esféricas no espaço de v_x, v_y e v_z :

$$v^{\pm} = \sin \theta e^{\pm i \phi} \quad (III.9)$$

nosso caso é fácil mostrar que, para os dois valores de Δm ,

$$\vec{K} = \frac{c}{4\pi} \hat{z} \Lambda (\hat{z} \Lambda \vec{E} - (-\hat{z} \Lambda \vec{E})) = \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \vec{p}(t)),$$

como era naturalmente de se esperar.

$$v_z = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\infty < \phi < \infty. \quad (\text{III.10})$$

Vamos interromper o cálculo por um instante para analisar o significado físico de θ e ϕ : De (III.10) vemos que $\cos\theta$ mede o valor médio de H_0 em unidades de $1/2\hbar\omega_0$; $\theta=0$ corresponde ao estado excitado e $\theta=\pi$ ao estado fundamental.

Já o valor de ϕ pode ter duas interpretações: Por um lado temos de (III.9) e (II.25) que

$$\text{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} = \pm \frac{P_y}{P_x} = \pm \text{tg}\chi, \quad \chi = \begin{cases} \phi, \Delta m = 1 \\ \pi - \phi, \Delta m = -1 \end{cases}$$

donde ϕ está relacionado com o ângulo χ que a polarização faz com o eixo dos x . Por outro lado, usando agora (II.15) e escrevendo $a = |a| e^{i\phi_a}$, $b = |b| e^{i\phi_b}$, obtemos

$$\text{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{i(ba^* - b^*a)}{ab^* + a^*b} = \text{tg}(\phi_a - \phi_b); \quad \phi = \phi_a - \phi_b$$

ou seja, ϕ também dá a diferença de fase entre a e b . A função de onda (II.13) pode ser escrita em termos de θ e ϕ através de

$$|b| = \cos\theta/2, \quad |a| = \sin\theta/2, \quad \phi_a - \phi_b = \phi; \quad (\text{III.11})$$

donde

$$\psi(t) = e^{i\gamma} \{ \cos\theta/2 \phi_b + \sin\theta/2 e^{i\phi_a} \}, \quad (\text{III.12})$$

sendo γ uma fase arbitrária.

Voltemos agora à Eq.(III.8): Substituindo $v^{\pm}$ e v_z por (III.9) e (III.10) chegamos, para os 2 valores de Δm , a

$$\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha\omega_0 \sin\theta \cos\theta}{1+\alpha^2 \cos^2\theta} \quad , \quad (\text{III.13})$$

$$\sin\theta \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_0 \sin\theta}{1+\alpha^2 \cos^2\theta} \quad . \quad (\text{III.14})$$

A solução $\theta=\pi/2$, $\phi=\omega_0 t+\phi_0$ é matematicamente espúria, pois dá origem a um campo elétrico ($E^+ = -2\pi\rho\sigma\omega_0/c \text{ ie}^{\pm i(\omega_0 t+\phi_0)}$) que não satisfaz (III.5). Já para a solução $\sin\theta=0$ temos, além do estado fundamental $\theta=\pi$, o estado excitado $\theta=0$. Repete-se então aqui a questão do falso equilíbrio instável ($d\theta/dt \geq 0$) já discutida na Introdução deste trabalho. De fato, no estado excitado temos $\vec{p}(t) \equiv 0$ (de (II.25)), de modo que a polarização clássica, por si só, é incapaz de produzir um campo elétrico que dê início ao processo de decaimento. Cancelando então $\cos\theta$ e $\sin\theta$ nos dois membros de (III.13) e (III.14) ficamos finalmente com

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \alpha \frac{\sin\theta}{1+\alpha^2 \cos^2\theta} \quad , \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{1+\alpha^2 \cos^2\theta} \quad , \quad (\text{III.16})$$

onde fizemos $\tau=\omega_0 t$. Temos agora duas equações diferenciais que dependem de um único parâmetro adimensional α no qual toda "física"

da interação está concentrada. Começemos por (III.15): como ela não depende explicitamente de τ sua solução geral será do tipo $\theta(\tau - \tau_0)$, onde τ_0 é uma constante arbitrária, o que é uma consequência natural da invariância do processo de emissão por translações temporais. Um valor particular para τ_0 deveria ser obtido, em princípio, dando o instante de tempo onde a emissão começa. Isto, naturalmente, é impossível de se fazer se a emissão começar no estado de máxima excitação, o qual, pelas razões já discutidas, só é alcançado para $t \rightarrow -\infty$. O que vamos fazer então é considerar $\theta = \pi/2$ para $t=0$, pois estes estados possuem três propriedades, independentes de α , que os tornam adequados para este tipo de escolha:

a) são os estados com metade da energia de excitação, assim sendo, com esta condição inicial, metade da energia disponível é emitida para $t < 0$ e a outra metade para $t > 0$.

b) são os estados onde a taxa de emissão é máxima (Veja (III.5) e (III.15)).

c) são os estados em relação aos quais a taxa de emissão é simétrica (mesmos valores para θ e $\pi - \theta$; veja-se novamente (III.5) e (III.15)).

Resolvido este ponto, a integração de (III.15) faz-se imediatamente. O resultado é

$$\tau = \omega_0 t = (\alpha + 1/\alpha) \ln(\operatorname{tg} \theta / 2) + \alpha \cos \theta. \quad (\text{III.17})$$

Substituindo (III.17) em (III.16) obteremos uma solução geral do tipo $\phi = \phi(t) + \phi_0$ ($\phi_0 = \text{constante arbitrária}$), o que é naturalmente u-

uma consequência da invariância do problema por rotações em torno do eixo perpendicular ao plano emissor. Como $\phi = \phi_a - \phi_b$ concluímos que as emissões originadas de estados iniciais que só se diferenciam pelo valor de ϕ estão relacionadas por meio de uma rotação rígida. Isto pode ser paradoxal, à primeira vista, quando consideramos o estado de máxima excitação ($a=0$) onde ϕ não é definido. A resposta para isto é que nossa teoria não se aplica para este estado (que não decairia), mas que se dele nos aproximarmos (fazendo $|a| \rightarrow 0$ em (II.13)) fixando de cada vez, diferentes valores de $\phi_a - \phi_b$, a radiação emitida no futuro vai sempre "lembrar-se" desta diferença de fase inicial, produzindo rotações correspondentes no campo emitido. Naturalmente este efeito é muito sensível ao valor da constante α . Se $\alpha \ll 1$ temos $d\phi/dt \gg d\theta/dt$, de modo que o dipolo elétrico executa muitas voltas praticamente sem mudar de módulo, diluindo o efeito da fase inicial. Se $\alpha \sim 1$, entretanto, a interação é tão forte que pequenas diferenças no estado inicial podem produzir, no decorrer de um tempo longo, modificações radicais na distribuição angular da radiação emitida (isto poderá ser visto novamente acompanhando a discussão que faremos sobre o comportamento de $\theta(t)$ e $\phi(t)$). Fica, de qualquer forma, claro que podemos escolher um valor arbitrário para $\phi(0)$ que todas as demais soluções serão desta obtidas por uma rotação rígida. Ponhamos então $\phi(0)=0$: obtemos de (II.15,16):

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \alpha \sec \theta, \quad (\text{III.18})$$

donde, integrando;

$$\phi = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} , \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\infty < \phi < \infty , \quad (\text{III.19})$$

Todas as soluções de (III.15,16) ficam então representadas pelas funções $\theta(t)$ e $\phi(t)$ definidas em (III.17) e (III.19), as duas constantes de integração correspondendo simplesmente a translações no tempo ou rotações no eixo $\hat{z}$.

Definidas as soluções relativas ao comportamento dos átomos, o campo elétrico pode ser obtido diretamente de (III.7). De fato, substituindo (III.9) em (III.7) vem:

$$E^+ = - \frac{2\pi p\sigma}{c} i \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \operatorname{sen}\theta \mp i \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \right\} e^{\pm i\phi} .$$

Pondo $E^+ = |\vec{E}| e^{i\psi}$ obtemos

$$|\vec{E}| = \frac{\alpha\omega_0}{k} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \theta}} , \quad (\text{III.20})$$

e

$$\psi - \chi = \mp \frac{\pi}{2} \mp \operatorname{tg}^{-1} (\alpha \cos\theta) , \quad (\text{III.21})$$

onde $k=2p/\hbar$ e $\chi=\phi$ ou $\pi-\phi$. Podemos calcular também a "velocidade angular" $d\psi/d\tau$ do campo elétrico: Derivando (III.22) em relação a τ obtemos

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \pm \frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha^2 \cos^2 \theta)^2} . \quad (\text{III.22})$$

$$\phi = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right\} , \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\infty < \phi < \infty , \quad (\text{III.19})$$

Todas as soluções de (III.15,16) ficam então representadas pelas funções $\theta(t)$ e $\phi(t)$ definidas em (III.17) e (III.19), as duas constantes de integração correspondendo simplesmente a translações no tempo ou rotações no eixo $\hat{z}$.

Definidas as soluções relativas ao comportamento dos átomos, o campo elétrico pode ser obtido diretamente de (III.7). De fato, substituindo (III.9) em (III.7) vem:

$$E^+ = - \frac{2\pi p\sigma}{c} i \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \operatorname{sen}\theta \mp i \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \right\} e^{\pm i\phi} .$$

Pondo $E^+ = |\vec{E}| e^{i\psi}$ obtemos

$$|\vec{E}| = \frac{\alpha\omega_0}{k} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\alpha^2 \cos^2 \theta}} , \quad (\text{III.20})$$

e

$$\psi - \chi = \mp \frac{\pi}{2} \mp \operatorname{tg}^{-1} (\alpha \cos\theta) , \quad (\text{III.21})$$

onde $k=2p/\hbar$ e $\chi=\phi$ ou $\pi-\phi$. Podemos calcular também a "velocidade angular" $d\psi/d\tau$ do campo elétrico: Derivando (III.22) em relação a τ obtemos

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \pm \frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha^2 \cos^2 \theta)^2} . \quad (\text{III.22})$$

III.B Discussão das Soluções. Acoplamento Fraco

Vamos proceder agora a uma análise mais detalhada das propriedades das funções $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\chi(t)$, $|\vec{E}(t)|$ e $\psi(t)$, definidas respectivamente em (III.17, 19, 20 e 21). Começemos notando que o valor máximo E_m de $|\vec{E}|$ ocorre, por (III.20), sempre para $\theta = \pi/2$, que, no nosso caso, corresponde a $t=0$. Sendo $E_m = \alpha\omega_0/k$ temos

$$\alpha = \frac{2pE_m}{\hbar\omega_0} \quad (III.23)$$

Vemos então que α nos dá uma medida da intensidade relativa da interação. Se tivermos $\alpha \ll 1$ estaremos numa região onde a interação entre os átomos é fraca em relação às forças de ligação que compõem a Hamiltoniana não perturbada. Trata-se portanto de uma situação onde pode-se perfeitamente prever o sucesso de um tratamento perturbativo (como o de Dicke). Fazendo $\alpha \ll 1$ em (III.17, 20 e 21) (o que equivale a desprezar $\alpha^2 \cos^2 \theta$ nos denominadores de (III.15 e 16)) obtemos

$$\sin \theta = \operatorname{sech}(\alpha\omega_0 t), \quad (III.24)$$

$$\cos \theta = -\operatorname{tgh}(\alpha\omega_0 t), \quad (III.25)$$

$$\phi = \omega_0 t \quad (III.26)$$

$$\chi = \begin{cases} \omega_0 t & \Delta m = +1 \\ \pi - \omega_0 t & \Delta m = -1 \end{cases} \quad (III.27)$$

$$|\vec{E}| = \frac{\alpha\omega_0}{k} \operatorname{sech}(\alpha\omega_0 t) \quad (\text{III.28})$$

$$\psi = -\pi/2 \pm \omega_0 t \quad (\text{III.29})$$

$$\vec{E}(t) = \pm \frac{2\pi p\sigma\omega_0}{c} \vec{p} \wedge \hat{z} \quad (\text{III.30})$$

A taxa de emissão, por sua vez, é imediatamente obtida de (III.5) e (III.28):

$$I = \frac{2\pi}{c} (p\sigma\omega_0)^2 \operatorname{sech}^2(\alpha\omega_0 t), \quad (\text{III.31})$$

reobtendo-se assim a dependência temporal do resultado de Dicke, o que, de certa forma, já podia ser esperado. Como já vimos na introdução, α não pode ser demasiadamente pequeno, do contrário a interação clássica chegaria a ficar da mesma ordem de magnitude das contribuições que estamos desprezando. O critério de validade discutido então (p.4) era:

$$\tau_0 \gg \tau \gg \frac{1}{\omega_0}, \quad (\text{III.32})$$

onde τ_0 é a vida média de um átomo isolado e τ a vida média da emissão coletiva que estamos estudando. Se definirmos a vida média no nosso caso como sendo o intervalo de tempo no qual a maior parte da radiação é emitida teremos (veja por exemplo (III.25)) $\tau \approx 1/\omega_0$, o que satisfaz, para $\alpha \ll 1$, a segunda desigualdade em (III.32) (é claro: a interação fraca implica num decaimento lento). Sen

do $1/\omega_0 \sim 10^{-15} \text{ s}$ ($\hbar\omega_0 \sim 1 \text{ eV}$) e $\tau_0 \sim 10^{-8} \text{ s}$ obtemos a restrição

$$10^{-7} \ll \alpha \ll 1, \quad (\text{III.33})$$

o que ainda nos deixa um razoável domínio de variação de α onde a interação é muito mais forte do que a da emissão espontânea mas ainda pode ser tratada perturbativamente.

É fácil fazer uma descrição qualitativa do que ocorre durante o processo de emissão. O vetor $\vec{r}$ "desce" lentamente (muitos ciclos $2\pi/\omega_0$) do polo superior da esfera de raio unitário (estado excitado) para o polo inferior (estado fundamental) descrevendo uma espiral de voltas muito "apertadas" ($d\phi/dt \gg d\theta/dt$). O grosso da energia irradiada é emitido perto do equador da esfera ($\theta = \pi/2$) durante um intervalo de tempo da ordem de $2/\alpha\omega_0$ (Fig. 2). Enquanto isto o campo sobre o plano acompanha as variações do dipolo elétrico mantendo-se sempre perpendicular ao mesmo. O valor do campo elétrico no resto do espaço é obtido imediatamente de (I.12) e (I.13):

$$E^+{}^d(z,t) = -i\alpha \frac{\omega_0}{k} \text{sech}(\alpha\omega_0(t - \frac{z}{c})) e^{\pm i\omega_0(t - z/c)}$$

e

$$E^+{}^e(z,t) = -i\alpha \frac{\omega_0}{k} \text{sech}(\alpha\omega_0(t + z/c)) e^{\pm i\omega_0(t + z/c)} \quad (\text{III.34})$$

o que representa a emissão simétrica de dois pulsos circularmente polarizados modulados por uma amplitude da forma $\text{sech}\{\alpha(t \pm z/c)\}$.

Figura 2: Taxa de emissão $I=I_0 \text{sech}^2(\alpha\omega_0 t)$, para $\alpha \ll 1$, como função simultânea de t e θ (Veja a Eq.III.31).

Figura 3: Campo produzido por uma distribuição contínua de dipolos girantes (Veja a discussão da Pg.33).

O resultado (III.34) pode ser interpretado em termos da emissão individual de cada um dos dipolos do plano. Notemos, para isto, que no limite $\alpha \ll 1$ é possível considerar o plano emissor como constituído de uma distribuição contínua de dipolos girantes.

$$d\vec{p}(t) = p \sin\theta \{ \pm \cos\omega_0 t \hat{x} + \sin\omega_0 t \hat{y} \} ds \quad (\text{III.35})$$

na qual podemos desprezar, para o cálculo dos campos, a influência da variação lenta da amplitude ($\sin\theta = \text{sech}(\alpha\omega_0 t)$). Seja então a expressão da indução magnética produzida num ponto P distante R_0 de um dipolo variável $\vec{d}(t)$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{prox}} + \vec{B}_{\text{rad}} \quad (\text{III.36})$$

$$\vec{B}_{\text{prox}} = \frac{\dot{\vec{d}}(t') \wedge \hat{n}}{c R_0^2}, \quad \vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\ddot{\vec{d}}(t') \wedge \hat{n}}{c^2 R_0},$$

onde $t' = t - R_0/c$ e $\hat{n}$ é o vetor unitário da direção que une o dipolo ao ponto P. É fácil compreender de (III.36) que o campo sobre o plano é dado somente pelo termo $\vec{B}_{\text{prox}}$ e que, mais ainda, para este termo só contribuem os dipolos na vizinhança imediata do ponto P(*). Seja então z a distância de P ao plano e a o raio de uma vizinhança circular com centro na projeção perpendicular de P (Fig.3), on

(*) Um cálculo detalhado das contribuições de $\vec{B}_{\text{prox}}$ e $\vec{B}_{\text{rad}}$, tanto para pontos próximos como para pontos distantes do plano, pode ser visto no Apêndice II.

de $a \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$, de modo que $a/z \rightarrow \infty$. Como $a \rightarrow 0$ podemos desprezar o retardo e escrever

$$\dot{\vec{p}}(t') = \dot{\vec{p}}(t) = \pm \omega_0 \hat{z} \wedge \vec{p}$$

e

$$\dot{\vec{p}}(t') \wedge \hat{n} = \pm \omega_0 (\hat{z} \wedge \vec{p}(t)) \wedge \{\cos \theta \hat{z} + \dots\}$$

$$= \pm \omega_0 \cos \theta \vec{p}(t) + \dots \quad (\text{III.37})$$

onde abandonamos as contribuições perpendiculares ao plano que, naturalmente, serão eliminadas pela integração angular na coordenada β . Como $\cos \theta = z/\sqrt{\rho^2 + z^2}$ não depende de β , obtemos de (III.36) e (III.37):

$$\vec{B}(t) = \pm \frac{2\pi p \omega_0 \sin \theta}{c} \int_0^a \frac{z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \{\pm \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}\} \quad (\text{III.38})$$

Fazendo $\rho = z\mu$ em (III.38) obtemos:

$$\int_0^a \frac{z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^{a/z} \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + 1)^{3/2}} \rightarrow \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + 1)^{3/2}} = 1,$$

donde (III.38) nos dá

$$\vec{B}(t) = \pm \frac{2\pi p \omega_0 \sin \theta}{c} \{\pm \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}\}, \quad (\text{III.39})$$

ou, usando (II.25)

de $a \rightarrow 0$, $z \rightarrow 0$, de modo que $a/z \rightarrow \infty$. Como $a \rightarrow 0$ podemos desprezar o retardo e escrever

$$\dot{\vec{p}}(t') = \dot{\vec{p}}(t) = \pm \omega_0 \hat{z} \wedge \vec{p}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}(t') \wedge \hat{n} &= \pm \omega_0 (\hat{z} \wedge \vec{p}(t)) \wedge \{\cos \theta \hat{z} + \dots\} \\ &= \pm \omega_0 \cos \theta \dot{\vec{p}}(t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

onde abandonamos as contribuições perpendiculares ao plano que, naturalmente, serão eliminadas pela integração angular na coordenada β . Como $\cos \theta = z/\sqrt{\rho^2 + z^2}$ não depende de β , obtemos de (III.36) e (III.37):

$$\vec{B}(t) = \pm \frac{2\pi p \omega_0 \sin \theta}{c} \int_0^a \frac{z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \{\pm \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}\} \quad (\text{III.38})$$

Fazendo $\rho = z\mu$ em (III.38) obtemos:

$$\int_0^a \frac{z \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^{a/z} \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + 1)^{3/2}} \rightarrow \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(\mu^2 + 1)^{3/2}} = 1,$$

donde (III.38) nos dá

$$\vec{B}(t) = \pm \frac{2\pi p \omega_0 \sin \theta}{c} \{\pm \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}\}, \quad (\text{III.39})$$

ou, usando (II.25)

$$\vec{B}(t) = \pm \frac{2\pi p \sigma \omega_0}{c} \vec{p}(t). \quad (\text{III.40})$$

De (III.40) segue-se imediatamente

$$\vec{E}(t) = \vec{B}(z) \wedge \hat{z} = \pm \frac{2\pi p \sigma \omega_0}{c} \vec{p}(t) \wedge \hat{z}, \quad (\text{III.41})$$

o que confere exatamente com (III.30). Destes cálculos é possível obter ainda um acordo quantitativo com os resultados de Dicke. De fato, para a transição $\Delta m = +1$ a expressão (A1-42) prevê um dipolo girante de frequência angular ω_0 e intensidade $2p \nu \sin \theta$. Ora, para considerar uma distribuição contínua de átomos sobre o plano emissor devemos introduzir um "número de cooperação por unidade de área, $v = v_s ds$, o que dá para a área ds uma intensidade $2p \nu \sin \theta v_s ds$. Comparando este resultado para o nosso dipolo elementar $d\vec{p}$ de (III.35) obtemos $v_s = 1/2\sigma$, donde o número de cooperação para os átomos em ds é $v_s ds = 1/2\sigma ds = dN/2$; ou seja, nosso modelo se mi-clássico corresponde realmente ao caso de máxima cooperação.

Para finalizar uma última observação: Conforme acabamos de ver os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ num ponto do plano são gerados pela emissão dos dipolos numa vizinhança infinitesimal em torno deste ponto, possuindo inclusive as características dos campos próximos, tanto na polarização quanto na dependência com a frequência (proporcional a ω). Já o campo longe do plano deve ser determinado exclusivamente pelos campos de radiação que são proporcionais a ω^2 e possuem uma polarização diferente (III.36). Isto pode parecer estra-

nho à primeira vista, pois os campos longe e perto do plano são essencialmente os mesmos, a menos do retardamento unidimensional z/c (III.34). Na verdade o que ocorre é que os campos a longas distâncias dependem das contribuições de toda superfície do plano, correspondentes a pontos onde o retardamento varia desde z/c até o infinito. Pode-se mostrar então (Apêndice II) que estas contribuições se somam de tal maneira que o resultado final é o mesmo de (III.40) substituindo-se apenas t por $t-z/c$.

III.C Discussão das soluções-Acoplamento Forte

Vamos procurar analisar agora o que ocorre quando violamos a segunda desigualdade em (III.33), isto é, quando consideramos valores de α próximos da unidade (ou ainda menores, se possível). Uma vez possuindo a forma analítica da solução do nosso problema, dada por (III.17) e (III.19), os cálculos necessários para este fim são naturalmente muito simples. Isto, infelizmente, não elimina a principal dificuldade relacionada com este tipo de investigação: Saber até que ponto o nosso modelo ainda pode ser aplicado nos casos onde $\alpha \geq 1$. Para isto é conveniente começar discutindo o significado da constante α com um pouco mais de profundidade. Conforme a nomenclatura introduzida em (III.8) temos:

$$\alpha = \frac{4\pi p^2 \sigma}{\hbar c}, \quad (III.42)$$

donde, fazendo $p=ed$, onde e é a carga do elétron obtemos

$$\alpha = \frac{4\pi}{137} \sigma d^2 = 0.092 \sigma d^2 = 0.092 \rho \ell d^2, \quad (\text{III.43})$$

onde ρ é a densidade volumétrica de átomos, ℓ a espessura do plano, e $\rho \ell d^2$ é portanto o número de átomos num volume cilíndrico com base na área d^2 . Para podermos usar num plano de espessura ℓ os resultados obtidos para um plano infinitamente fino é necessário que ℓ seja suficientemente pequeno, de modo a assegurar a existência/ de um campo elétrico aproximadamente constante em toda extensão do meio material. A condição para isto é $\ell \ll \lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$; o que, para $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$ nos dá $\ell \ll 20000 \text{ \AA}$. Como queremos um valor máximo para α vamos supor que ℓ é apenas uma ordem de magnitude menor que λ_0 , isto é, $\ell = 2000 \text{ \AA}$. Da mesma forma vamos escolher também um valor extremo para d ; por exemplo $d = 0,5 \text{ \AA}$ (um raio de Bohr). Se, finalmente, escrevemos $\rho = 1/x^3$, com x expresso em angstroms, obtemos de (III.43)

$$\alpha = \frac{46}{x^3}. \quad (\text{III.44})$$

Vemos de (III.44) que para ter $\alpha \sim 1$ x deve ser no máximo igual a alguns angstroms, o que corresponde a uma densidade típica de um sólido (com todos os átomos participando do processo de emissão). Este fato vem nos trazer uma grande dificuldade, pois é extremamente duvidoso que, mesmo levando em conta o caráter relativamente rápido do nosso processo ($\tau \ll 10^{-8} \text{ s}$, o que elimina as interações com tempo de relaxação mais longo), para tais densidades a interação entre os átomos seja descrita exclusivamente pelo termo $-\vec{p} \cdot \vec{E}$. Por esta razão alguns dos cálculos que faremos a seguir podem ser considerados co-

mo disgressões de carater mais ou menos acadêmico. Já o uso de / grandes valores de α em algumas figuras é justificado, em certos / casos, pela necessidade de ilustrar com mais clareza os resultados obtidos no texto.

De qualquer forma, ainda é interessante obter uma expres são que dê a vida média do sistema para qualquer valor de α . Uma vez que a emissão começa em $t \rightarrow -\infty$ e acaba em $t \rightarrow \infty$ devemos entender , como já fizemos anteriormente, que a vida média corresponde a um / intervalo de tempo no qual é emitida uma fração ponderável da ener gia total. Para dar uma definição numérica mais rigorosa procede - mos da maneira seguinte: Seja dE a energia emitida entre t e $t+dt$; definimos

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t| dE}{\int_{-\infty}^{\infty} dE} \quad (\text{III.45})$$

Mas, por (III.5) e (III.20) temos

$$dE = \frac{c}{2\pi} \vec{E}^2 dt = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\alpha \omega_0}{k} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta} dt, \quad (\text{III.46})$$

donde

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |t| \frac{\sin^2 \theta}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \theta}{1 + \alpha^2 \cos^2 \theta} dt} \quad (\text{III.47})$$

Fazendo a mudança para a variável θ obtemos de (III.15) e (III.17)

$$\begin{aligned}
 \langle t \rangle &= \frac{\int_0^\pi |t(\theta)| \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{\int_{\pi/2}^\pi t(\theta) \sin \theta d\theta}{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{\omega_0} \int_{\pi/2}^\pi [(\alpha+1/\alpha) \ln(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) + \alpha \cos \theta] \sin \theta d\theta \quad (\text{III.48})
 \end{aligned}$$

uma vez que $t(\pi-\theta) = -t(\theta)$. A integração faz-se imediatamente levando em conta que

$$\int_{\pi/2}^\pi \ln(\operatorname{tg} \theta/2) \sin \theta d\theta = 4 \left\{ \int_1^\infty \ln \mu \frac{d\mu}{(1+\mu^2)^2} \right\} = 4 \ln 2 \quad (17).$$

O resultado final é então

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\omega_0} \left[4(\alpha+1/\alpha) \ln 2 - \frac{1}{2} \alpha \right] \quad , \quad (\text{III.49})$$

o que para $\alpha \ll 1$ dá $\langle t \rangle = 4 \ln 2 / \alpha \omega_0$, o que está de acordo com a aproximação usada em (III.33). É curioso notar que $\langle t \rangle$ possui um mínimo para $\alpha \approx 1,1$, correspondente ao valor $\langle t \rangle \approx 5/\omega_0$. Para $\alpha > 1,1$ a vida média cresce com α , tendendo eventualmente para ∞ quando $\alpha \rightarrow \infty$. Este comportamento pode ser entendido pela análise da curva de emissão (III.46). De fato, para $\alpha \rightarrow \infty$ é fácil ver que a emissão só é superradiante (proporcional a α^2) numa pequena vizinhança de $\theta = \pi/2$ ($\cos \theta \lesssim 1/\alpha$) e que fora dela a taxa de emissão

$$I \rightarrow \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\omega_0}{k} \right) \operatorname{tg}^2 \theta \quad (\text{III.50})$$

é $1/\alpha^2$ vezes menor (independe da densidade). A energia emitida no pico de emissão forte pode ser estimada com facilidade. De fato, como a energia emitida por unidade de área entre os ângulos θ_1 e θ_2 é naturalmente $1/2\hbar\omega_0\sigma(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$, fazendo $\cos\theta_1 \approx 1/\alpha$, $\cos\theta_2 \approx -1/\alpha$ obtemos como resultado aproximado $\hbar\omega_0\sigma/\alpha$. Assim, para grandes valores de α a emissão mais forte (proporcional a α^2) dura um tempo tão curto (de ordem de $1/\alpha^2\omega_0$) que a energia total por ele emitido é uma fração desprezível ($1/\alpha$) da energia total disponível ($\hbar\omega_0\sigma$). O grosso da energia é emitido obedecendo a expressão (III.50), durante um intervalo de tempo muito longo (Note-se que nesta região a Eq. (III.17) nos diz que θ varia lentamente com o tempo: $\theta = \theta(\omega_0 t/\alpha)$). Este fato também pode ser visto a partir do decaimento exponencial da radiação para $t \rightarrow +\infty$. Realmente, pondo $\theta = \pi - \epsilon$, $\epsilon \ll 1$ em (III.15) obtemos

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \epsilon, \quad \epsilon = \epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha^2} t\right\},$$

donde

$$I = A \exp\left\{-\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} t\right\}. \quad (\text{III.51})$$

Vemos então que o coeficiente de atenuação é proporcional a α apenas para $\alpha \ll 1$, passando a decrescer a partir de $\alpha=1$, o que está de acordo com a vida longa do sistema para $\alpha > 1$. Estes resultados aparecem ilustrados nas Figuras 4 e 5 onde apresentamos o comportamento do campo elétrico, para $\alpha=1$ e $\alpha=2$, através do valor $|\vec{E}|$ do campo e da "velocidade angular" $d\psi/dt$. Comparando com os resultados de Dicke

extrapolados para os mesmos valores de α , podemos ver o aparecimento de um pico mais estreito em $t=0$ e o decaimento mais lento para $t \rightarrow \pm\infty$.

Figura 4: Dependência temporal do módulo E do campo elétrico emitido, em unidades arbitrárias, para dois valores / da constante α (linhas cheias). As linhas tracejadas representam valores de E extrapolados a partir das fórmulas de Dicke, para os mesmos valores de α .

Figura 5: Dependência temporal da velocidade angular $d\psi/dt$ da fase do campo elétrico emitido, para dois valores de α .

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DA EMISSÃO PARA O DECAIMENTO

$$\Delta m = 0$$

Vamos considerar agora o caso das transições $\Delta m=0$. Conforme já vimos na Seção II a direção $\hat{z}$ de quantização, na qual apontam os vetores $\langle \vec{p} \rangle$ e $\vec{E}$, está agora contida no plano emissor. Nosso sistema de equações autoconsistentes é obtido então de (I.19), (II.26) e (II.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\omega_0 v_y, & \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \omega_0 v_x - \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z v_z, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{2p}{\hbar} \sqrt{2} E_z v_y, \end{aligned} \quad (\text{IV-1})$$

$$E_z = \frac{2\pi p \sigma}{c} \sqrt{2} \frac{dv_x}{dt}, \quad (\text{IV.2})$$

onde devemos ter sempre em mente que

$$\vec{p}(t) \cdot \langle \vec{p} \rangle \hat{z} = -\sqrt{2} p v_x \hat{z}. \quad (\text{IV.3})$$

Juntando (IV.2) com a primeira das equações (IV.1) vem

$$v_y = - \frac{\sqrt{2} p E_z}{\alpha \hbar \omega_0}. \quad (\text{IV.4})$$

Substituindo agora este resultado na expressão de $\partial v_z / \partial t$ em (IV.1) obtemos

$$\frac{d}{dt} (1/2 \hbar \omega_0 \sigma v_z) = - \frac{c}{2\pi} E_z^2, \quad (\text{IV.5})$$

que é simplesmente a repetição do resultado (III.5), como, de resto, não podia deixar de acontecer.

Para resolver o sistema (IV.1,2) é conveniente primeiro usar (IV.4) para escrevê-lo na forma

$$\frac{dv_x}{d\tau} = -v_y, \quad \frac{dv_z}{d\tau} = -2\alpha v_y^2, \quad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1, \quad (\text{IV.6})$$

onde $\tau = \omega_0 t$. Fazendo a mesma substituição de coordenadas (III.9,10)

$$v_x = \text{sen}\theta \cos\psi,$$

$$v_y = \text{sen}\theta \text{sen}\psi, \quad (\text{IV.7})$$

$$v_z = \cos\theta,$$

obtemos de (IV.6):

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha \text{sen}\theta \text{sen}^2\psi, \quad (\text{IV.8})$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = 1 + \alpha \cos\theta \text{sen}(2\psi), \quad (\text{IV.9})$$

onde eliminamos a solução "instável" $\text{sen}\theta=0$ e a solução espúria / $\text{sen}\psi=0$, $\theta=\text{cte.}$ (que não satisfaz as equações originais IV.1). O sentido físico de θ é o mesmo da Seção III, uma vez que estamos usando

em (IV.7) a mesma definição $v_z = \cos\theta$. Quanto à variável ψ ela continuará dando a diferença de fase entre os coeficientes a e b de (II.13) pois aqui também continuamos utilizando as convenções da Seção III. É claro que o significado espacial de ψ não pode ser / mais o mesmo de antes uma vez que agora v_y e v_x simbolizam grandezas diferentes. De fato, por (IV.3), (IV.4) e (IV.7) passamos a/ ter

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2p^2}{\alpha\hbar\omega_0} \frac{E_z}{\langle p \rangle} . \quad (\text{IV.10})$$

É importante notar que o fato de ψ não estar mais relacionado com a orientação do dipolo no espaço faz com que esta grandeza não tenha o caráter relativamente irrelevante do ângulo ϕ no caso $\Delta m = \pm 1$. Para entender melhor este ponto basta considerar os dois fatos seguintes: a) A taxa de emissão, ao contrário do caso anterior, não depende apenas da variável θ ; b) Por causa disto dois estados iniciais com a mesma energia média e valores diferentes de ψ produzem radiações intrinsecamente diferentes (e não apenas ligadas por uma rotação rígida).

Antes de discutir a integração do sistema (IV-8,9) para todos os valores de α , vamos considerar o limite correspondente ao acoplamento fraco. Fazendo $\alpha \ll 1$ em (IV.9) obtemos $d\psi/d\tau = 1$; de modo que a solução correspondente às condições iniciais $\theta(0) = \pi/2$ (mesma escolha do caso $\Delta m = \pm 1$) e $\psi(0) = \psi_0$ é obtida com facilidade:

$$\psi = \tau + \psi_0 , \quad (\text{IV.11})$$

$$\theta = 2\text{tg}^{-1}\{\exp(\alpha(\tau - \cos(\tau + 2\psi_0)\text{sen}\tau))\}. \quad (\text{IV.12})$$

Uma vez que estamos considerando $\alpha \ll 1$ podemos aproximar mais ainda a expressão (IV.12) notando que

$$\exp(\alpha\tau)\exp\{-\alpha\cos(\tau + 2\psi_0)\text{sen}\tau\} \approx \exp(\alpha\tau) ; \quad (\text{IV.13})$$

o que faz com que $\theta(\tau)$ fique independente de ψ_0 . De (IV.7), (IV.11, 12) e (IV.13) temos as soluções aproximadas.

$$v_x = \text{sech}(\alpha\tau)\cos(\tau + \psi_0) , \quad (\text{IV.14})$$

$$v_y = \text{sech}(\alpha\tau)\text{sen}(\tau + \psi_0) ,$$

$$v_z = -\text{tgh}(\alpha\tau) ,$$

onde a amplitude de v_x e v_y é uma modulação lentamente variável (vida média $\approx 1/\alpha\omega_0$) comparada com as oscilações rápidas ($1/\omega_0$) de $\cos(\tau + \psi_0)$ e $\text{sen}(\tau + \psi_0)$. A influência de ψ_0 em (IV.14) aparece como um deslocamento dos termos rápidos em relação à modulação, o que produz efeitos desprezíveis quando $\alpha \ll 1$. Este resultado também pode ser observado na taxa de emissão. De fato, de (IV.5) temos

$$\frac{1}{2} \hbar\omega_0\sigma \frac{dv_z}{dt} = -\hbar\omega_0^2\sigma\alpha\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\psi \approx -\hbar\omega_0^2\sigma\alpha\text{sech}^2(\alpha\omega_0 t)\text{sen}^2(\omega_0 t + \psi_0).$$

$$(\text{IV.15})$$

Se supusermos agora que nossas medidas possuem um tempo de resolução Δt , $l/\omega_0 \ll \Delta t \ll l/\alpha\omega_0$, e tomarmos a média de (IV.15) neste intervalo de tempo obteremos

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma \frac{\overline{dv_z}}{dt} = - \frac{1}{2} \hbar \omega_0^2 \sigma a \operatorname{sech}^2(\alpha \omega_0 t) , \quad (\text{IV.16})$$

que é independente de ψ_0 .

A solução para $\alpha > 1$ pode ser melhor compreendida se analisarmos primeiro as propriedades de simetria do sistema (IV.8,9). Sejam $\theta_1(\tau)$ e $\psi_1(\tau)$ a solução deste sistema que satisfaz as condições iniciais $\theta_1(0) = \pi/2$, $\psi_1(0) = \psi_0$. Fazendo $\tau \rightarrow -\tau$, $\psi \rightarrow -\psi$ e $\theta \rightarrow \pi - \theta$ em (IV.8) e (IV.9) é fácil ver que

$$\theta_2(\tau) = \pi - \theta_1(-\tau) , \quad \psi_2(\tau) = -\psi_1(-\tau) \quad (\text{IV.17})$$

é uma outra solução do mesmo sistema, satisfazendo agora a $\theta_2(0) = \pi/2$, $\psi_2(0) = -\psi_0$. Podemos, portanto, concentrar nossa atenção nos valores positivos de ψ_0 , uma vez que a Eq.(IV.17) fornece o restante das soluções. Como um caso particular podemos observar que a solução $\theta(\tau)$, $\psi(\tau)$ correspondente a $\psi_0 = 0$ satisfaz a simetria especial $\theta(\tau) = \pi - \theta(-\tau)$, $\psi(\tau) = -\psi(-\tau)$. É fácil de ver também que

$$\theta_3(\tau) = \theta_1(\tau) , \quad \psi_3(\tau) = \psi_1(\tau) + \pi \quad (\text{IV.18})$$

é outra solução de (IV.8,9), associada agora às condições iniciais $\theta_3(0) = \pi/2$, $\psi_3(0) = \psi_0 + \pi$ (correspondente à uma inversão do campo e do dipolo elétrico). Concluimos então que basta concentrar nossa aten

ção nos valores de ψ_0 contidos num intervalo arbitrário de comprimento π . Para ilustrar melhor a simetria exposta em (IV.17) preferimos, daqui por diante, considerar sempre o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

O próximo passo para a integração do nosso sistema consiste em observar a existência de dois tipos diferentes de soluções: para $\alpha < 1$ e para $\alpha > 1$. No primeiro caso temos sempre $d\psi/d\tau > 0$, de modo que ψ é uma função crescente e ilimitada do tempo. Já para o segundo caso o comportamento de $\psi(\tau)$ pode ser melhor compreendido através da forma assintótica das soluções de (IV.8,9) para $\tau \rightarrow \pm\infty$. Fazendo então $\cos\theta \rightarrow \pm 1$ em (IV.9) (correspondendo respectivamente a $\tau \rightarrow \pm\infty$) obtemos $d\psi/d\tau \sim l \pm \alpha \sin 2\psi$, o que tem para solução as constantes ψ' , tais que $\sin(2\psi') = \pm 1/\alpha$. Definindo $\psi_\infty = l/2 \sin^{-1}(1/\alpha)$, $0 < \psi_\infty \leq \pi/2$ temos os seguintes valores assintóticos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \psi' &= \psi_\infty + n\pi, & \text{b) } \psi' &= \frac{2n+1}{2} \pi - \psi_\infty, & n=0, \pm 1, \dots & \text{ para } \tau \rightarrow \infty, \\ \text{c) } \psi' &= \psi_\infty - n\pi, & \text{d) } \psi' &= \frac{2n+1}{2} \pi + \psi_\infty, & n=0, \pm 1, \dots & \text{ para } \tau \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

(IV.19)

Podemos imaginar estes valores de ψ como dividindo o plano (τ, ψ) numa infinidade de faixas paralelas ao eixo dos τ . O caráter da solução $\psi(t)$ assintoticamente contida em cada uma destas faixas depende da estabilidade das soluções constantes apresentadas em (IV.19). Para discutir este ponto fazemos em (IV.8,9) $\theta = \epsilon$ e $\psi = \psi' + \mu$, $\sin(2\psi') = 1/\alpha$, para $\tau \rightarrow \infty$ e $\theta = \pi - \epsilon$, $\psi = \psi' + \mu$, $\sin(2\psi') = -1/\alpha$, para $\tau \rightarrow -\infty$, onde $0 < \epsilon \ll 1$ e $|\mu| < 1$. Após algumas aproximações simples obtemos

$$\epsilon = A \exp\{-2\alpha|\tau|\sin^2\psi'\} , \quad \tau \rightarrow \pm\infty , \quad (\text{IV.20})$$

$$\mu = B \exp\{-2\alpha|\tau|\cos(2\psi')\} , \quad \tau \rightarrow \pm\infty , \quad (\text{IV.21})$$

onde A e B são constantes. Segue-se de (IV.21) que as soluções a) e c) em (IV.19) são estáveis ($\cos(2\psi') > 0$) enquanto que b) e d) são instáveis ($\cos(2\psi') < 0$). Destes resultados é fácil obter uma descrição aproximada do comportamento de $\psi(\tau)$ para $\alpha > 1$: Para $\tau \rightarrow +\infty$ e $\tau \rightarrow -\infty$ os gráficos das soluções tendem para as retas dadas em a) e c) e divergem das dadas em b) e d).

Os dois tipos de solução, para $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$, aparecem nas Figs. 6 e 7, onde estão ilustrados os resultados de cálculos numéricos relativos às condições iniciais $\theta(0) = \pi/2$ e $\psi(0) = \psi_0$, $-\pi/2 < \psi_0 < \pi/2$. Para encerrar nossas observações sobre $\psi(\tau)$ devemos notar que, para $\alpha > 1$, o campo e o dipolo elétrico (proporcionais respectivamente a $\sin\psi$ e $\cos\psi$) não são oscilantes nos limites em que $\tau \rightarrow \pm\infty$ (como acontece para $\alpha < 1$, onde τ é sempre crescente). Esta situação possui uma grande analogia com as vibrações amortecidas de um oscilador harmônico. Realmente, para $\alpha < 1$ temos uma espécie de amortecimento / fraco, onde uma pequena perda de energia em cada ciclo do movimento produz uma série infinita de vibrações que vão se atenuando aos poucos. Já para $\alpha > 1$ estaremos na região super-amortecida onde esta perda é da ordem de magnitude de toda energia armazenada, dando origem a uma situação onde a amplitude diminui sem trocar de sinal.

Podemos agora concentrar nossa atenção no comportamento da taxa de emissão (IV.5). Usando (IV.7) e (IV.8) obtemos

$$-\frac{d}{dt} (1/2 \hbar \omega_0 \sigma v_z) = \frac{c}{2\pi} E_z^2 = \sigma \hbar \omega_0^2 \alpha \sin^2 \theta \sin^2 \psi \quad (\text{IV.22})$$

donde é fácil de ver como a emissão depende criticamente da escolha do valor inicial de ψ (estamos supondo sempre $\theta(0)=\pi/2$). Para $\psi(0)=0$, por exemplo, teremos $E_z(0)=0$, enquanto que para $\psi(0)=\pi/2$ a taxa de emissão tem o valor máximo $\hbar \omega_0^2 \sigma \alpha$. É então fácil de prever que, para valores relativamente grandes de α , teremos no segundo caso um pico pronunciado para $\tau=0$, enquanto que no primeiro caso a curva de emissão apresentará provavelmente dois picos menores, simetricamente dispostos em relação à origem do tempo.

Aqui novamente o decaimento exponencial para grandes valores do tempo apresenta características diferentes conforme $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. Para $\alpha < 1$, conforme foi mostrado em (IV.16), a atenuação aumenta com o valor de α . Para $\alpha > 1$, entretanto, o expoente em (IV.20), dado por $2\alpha \sin^2 \psi' = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (solução estável) é uma função decrescente de α (Fig.8), fato este já observado no caso $\Delta m = \pm 1$. Exemplos de comportamento da taxa de emissão para vários valores de α e ψ_0 podem ser vistos nas Figuras 8, 9 e 10. O campo e o dipolo elétrico aparecem ilustrados nas figuras 11 e 12 para os dois tipos de decaimento, oscilante e não-oscilante.

Figura 6: Gráficos das funções $\psi(\tau)$ para $\alpha=0.5$. Os diferentes valores iniciais, $\psi_0=0, \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm3\pi/4$ e $\pm\pi$, são dados pelas interseções com o eixo vertical.

Figura 7: Gráficos das funções $\psi(\tau)$ para $\alpha=1.5$. Os diferentes valores iniciais ψ_0 , variando de $-\pi/2$ a $+\pi/2$, são dados pelas interseções com o eixo vertical. Estão também representadas as soluções assintóticas $\psi_\infty=0.365$ rad (estável) e $\pi/2-\psi_\infty=1.206$ rad (instável).

Figura 8: Gráficos de $\alpha \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \psi$ (proporcional à taxa de emissão) para $\alpha=0,1$, com $\psi_0=\pi/2$ (linha cheia) e $\psi_0=0$ (linha tracejada). A envoltória destas curvas é dada aproximadamente por $\alpha \text{sech}^2(\alpha \tau)$.

Figura 9: Gráficos de $\alpha \sin^2 \theta \sin^2 \psi$ (proporcional à taxa de emissão) para $\alpha=1,5$ ($\psi_0=\pi/2, \pm\pi/4$) e $\alpha=2$ ($\psi_0=\pi/2$). São utilizadas linhas cheias ($\psi_0=\pi/2$), tracejadas ($\psi_0=\pi/4$) e pontilhadas ($\psi_0=-\pi/4$).

Figura 10: Gráficos de $\alpha \sin^2 \theta \sin^2 \psi$ (proporcional à taxa de emissão) para $\psi_0 = 0$ e $\alpha = 1, 1.5, 2.5, 4.0$ e 7.5 (na mesma ordem da altura dos picos).

Figura 11: Gráficos de $\alpha \sin \theta \sin \psi$ (proporcional a E_z) para $\psi_0 = 0$ / (com $\alpha = 0.5, 1.0$ e 1.5 ; linhas tracejadas) e $\psi_0 = \pi/2$ (com $\alpha = 0.5$ e 1.5 ; linhas cheias). Os valores de α acompanham a altura dos picos.

Figura 12: Gráficos de $v_x = \sin \theta \cos \psi$ (proporcional ao dipolo elétrico) para $\psi_0 = 0$, com $\alpha = 0.5$ (linha tracejada), $\alpha = 1.0$ (linha pontilhada), $\alpha = 1.5$ (linha cheia); e $\psi_0 = \pi/2$, com / $\alpha = 0.5$ e 1.5 (linhas cheias passando pela origem).

CAPÍTULO V

O PROBLEMA DA EMISSÃO COM UM NÍVEL DEGENERADO

V.A Obtenção das Equações Autoconsistentes

Já nos referimos, na Seção II, ao problema da emissão por um plano infinito com um estado excitado degenerado ($m=0, \pm 1$), o qual deve envolver três funções de onda, uma para o estado fundamental e duas para o estado excitado ($m=\pm 1$, no caso de considerarmos o eixo de quantização perpendicular ao plano emissor). Usando as mesmas convenções (II.18) estas funções de onda são dadas por

$$\begin{array}{l} \text{estado} \\ \text{excitado} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = - \frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta e^{i\phi}, \quad \ell=1, m=+1 \quad (V.1a) \\ \psi_2 = \frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta e^{-i\phi}, \quad \ell=1, m=-1 \quad (V.1b) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{estado} \\ \text{fundamen-} \\ \text{tal} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \psi_3 = R_{10}(r), \quad \ell=0, m=0. \quad (V.2) \end{array} \right.$$

Foi dito então também que a emissão (no caso de 2 níveis) com um estado excitado que satisfaz $L_s \psi = (\vec{L} \cdot \hat{s}) \psi = 0$, onde $\hat{s}$ é uma direção do plano, era um caso particular do problema definido por (V.1, 2). No que concerne apenas às funções de onda este é um resultado trivial: De fato, consideremos uma combinação linear de ψ_1 e ψ_2 em

(V.1) com coeficientes de módulos iguais

$$\psi = \frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\theta \{-e^{i(\beta_1+\phi)} + e^{i(\beta_2-\phi)}\}, \quad (\text{V.3})$$

e uma componente qualquer do momentum angular que pertença ao plano emissor

$$L_S = L_X \cos\delta + L_Y \operatorname{sen}\delta, \quad (\text{V.4})$$

onde⁽¹⁸⁾

$$L_X = \frac{\hbar}{i} \left(-\operatorname{sen}\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right), \quad (\text{V.5})$$

e

$$L_Y = \frac{\hbar}{i} \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{sen}\phi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right).$$

De (V.3), (V.4) e (V.5) vem:

$$L_S \psi = \frac{R_{21}(r)}{\sqrt{2}} \hbar \cos\theta \{e^{i(\beta_1+\delta)} + e^{i(\beta_2-\delta)}\}, \quad (\text{V.6})$$

donde obtemos

$$L_S \psi = 0, \quad \text{para } \delta = \frac{1}{2} (\pi + \beta_2 - \beta_1). \quad (\text{V.7})$$

Assim sendo qualquer função de onda ψ de (V.3) é sempre uma auto -

função, com autovalor nulo, de uma conveniente componente de $\vec{L}$ (V.4) paralela ao plano $z=0$. É possível mostrar ainda, conforme veremos posteriormente, que realmente existe uma solução das equações autoconsistentes onde o meio material evolui segundo uma função de onda $\psi(t)$ que satisfaz a Eq.(V.7) para todos os valores do tempo, o que corresponde ao resultado desejado.

Para iniciar o trabalho desta Seção vamos construir o sistema de equações, para a matéria e o campo, que corresponde à situação que estamos estudando. Primeiro escrevemos a função de onda mais geral

$$\psi = a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2 + a_3(t)\psi_3 \quad (\text{V.8a})$$

na forma do vetor coluna

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{V.8b})$$

o que faz com que todos os operadores do sistema sejam representados por matrizes 3×3 . Usando as mesmas convenções da Seção II obtemos para a Hamiltoniana não-perturbada

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (\text{V.9})$$

Para a parte que contém a interação precisamos das matrizes relati

vas aos operadores de dipolo elétrico p_x e p_y . Usando

$$(p_x)_{ij} = (\psi_i, p_x \psi_j), \quad (V.10)$$

$$(p_y)_{ij} = (\psi_i, p_y \psi_j),$$

com os ψ_i definidos por (V.1,2), de modo a ficar consistente com (V.9), obtemos (veja também (II.19)):

$$p_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & -p \\ p & -p & 0 \end{vmatrix}, \quad (V.11)$$

$$p_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -ip \\ 0 & 0 & ip \\ ip & ip & 0 \end{vmatrix}, \quad (V.12)$$

onde p é dado pela mesma expressão da Seção II:

$$p = -\frac{4\pi e}{3\sqrt{2}} \int_0^\infty R_{21}(r) R_{10}(r) r^3 dr. \quad (V.13)$$

De (V.11) e (V.12) obtemos a Hamiltoniana de interação

$$H_I = -\vec{p} \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p(E_x - iE_y) \\ 0 & 0 & p(E_x + iE_y) \\ -p(E_x + iE_y) & p(E_x - iE_y) & 0 \end{vmatrix}; \quad (V.14)$$

donde, usando (V.9), podemos escrever a representação matricial da

Equação de Schrödinger $(H_0 + H_I)\psi = i\hbar \partial\psi/\partial t$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \hbar \omega_0 & 0 & -p(E_x - iE_y) \\ 0 & 1/2 \hbar \omega_0 & p(E_x + iE_y) \\ -p(E_x + iE_y) & p(E_x - iE_y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (V.15)$$

Desenvolvendo (V.15) ficamos com

$$\frac{da_1}{dt} = -i/2 \omega_0 a_1 + \frac{ip}{\hbar} a_3 (E_x - iE_y) , \quad (V.16)$$

$$\frac{da_2}{dt} = -i/2 \omega_0 a_2 - \frac{ip}{\hbar} a_3 (E_x + iE_y) ,$$

$$\frac{da_3}{dt} = i/2 \omega_0 a_3 + \frac{ip}{\hbar} a_1 (E_x + iE_y) - \frac{ip}{\hbar} a_2 (E_x - iE_y)$$

Para o campo elétrico teremos, como sempre, a Eq. (I.19):

$$\vec{E} = - \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{2\pi\sigma}{c} \frac{d}{dt} (\langle p_x \rangle \hat{x} + \langle p_y \rangle \hat{y}) , \quad (V.17)$$

onde $\langle p_x \rangle$ e $\langle p_y \rangle$ são obtidos através de (V.11, 12):

$$\langle p_x \rangle = (a_1^* a_2^* a_3^*) p_x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = p [a_3^* (a_1 - a_2) + a_3 (a_1^* - a_2^*)] , \quad (V.18a)$$

$$p_y = (a_1^* a_2^* a_3^*) p_y \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = p [a_3^* (a_1 + a_2) - a_3 (a_1^* + a_2^*)] , \quad (V.18b)$$

Substituindo (V.18) em (V.17) obteremos, junto com (V.16), um sistema de equações para as variáveis a_1, a_2, a_3, E_x e E_y . Para evitar o uso de expressões excessivamente extensas vamos reduzi-lo a uma forma mais compacta usando as novas variáveis

$$w_1 = a_1 - a_2 ,$$

$$w_2 = a_1 + a_2 , \quad (V.19)$$

$$a = a_3 .$$

Após algumas manipulações transformamos (V.16) e (V.17) em:

$$\frac{dw_1}{dt} = -i/2 \omega_0 w_1 + \frac{2p}{\hbar} i a E_x , \quad (V.20a)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = -i/2 \omega_0 w_2 + \frac{2p}{\hbar} a E_y , \quad (V.20b)$$

$$\frac{da}{dt} = i/2 \omega_0 a + ip/\hbar E_x w_1 - p/\hbar E_y w_2 , \quad (V.20c)$$

$$\frac{dE_x}{dt} = - \frac{2\pi p \sigma}{c} \frac{d}{dt} (a^* w_1 + a w_1^*) , \quad (V.21a)$$

$$\frac{dE_y}{dt} = - \frac{2\pi p \sigma}{c} \frac{d}{dt} i (a^* w_2 - a w_2^*) , \quad (V.21b)$$

que será a forma utilizada daqui por diante.

Naturalmente a probabilidade tem de ser conservada, o que pode ser visto a partir das 3 primeiras equações (V.20):

$$\frac{d}{dt} \{ |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (|w_1|^2 + |w_2|^2) + |a|^2 \right\} = 0 . \quad (V.22)$$

É claro, também, que o sistema (V.20) não está escrito numa forma conveniente, pois ele ainda contém variáveis complexas, como w_1, w_2 e a . O ideal seria utilizar apenas variáveis que tivessem um conteúdo físico bem conhecido, como no caso dos valores médios do dipolo elétrico e da energia não perturbada utilizados nos exemplos anteriores. Como aqui temos um número maior de graus de liberdade (3 estados em vez de dois) será necessário procurar novas variáveis. A maneira mais razoável de começar esta busca é considerar a componente z do momento angular o que é, de resto, sugerido pela própria estrutura das nossas funções de base. Isto aliás já foi feito, de uma certa forma, quando consideramos a última das equações (II.23). De fato, substituindo (II.25) nesta equação obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= \frac{2p}{\hbar} (v_x E_y - v_y E_x) = \pm \frac{2}{\hbar} (\langle p_x \rangle E_y - \langle p_y \rangle E_x) = \\ &= \pm \frac{2}{\hbar} [\langle \vec{p} \rangle \wedge \vec{E}]_z . \end{aligned} \quad (V.23)$$

Lembrando agora a Eq. (III.12) podemos escrever o valor médio da componente z do momento angular na forma

$$\langle L_z \rangle = \pm \hbar \cos^2 \theta/2 = \pm \frac{1}{2} \hbar (1 + v_z) \quad (V.24)$$

Usando (V.24) podemos transformar (V.23) em

$$\frac{d}{dt} \langle L_z \rangle = (\langle \vec{p} \rangle \wedge \vec{E})_z, \quad (V.25)$$

onde no segundo membro aparece, de uma forma perfeitamente previsível, o torque produzido no dipolo $\langle \vec{p} \rangle$ pela ação do campo elétrico $\vec{E}$. Esta dupla interpretação de (II.23) é, como mostra (V.24), uma simples consequência da excessiva simplicidade dos sistemas considerados na Seção II, onde a energia é função de uma componente do momento angular. Como no nosso caso atual (3 estados) a energia e L_z são variáveis independentes, é de se esperar o aparecimento de equações separadas para as derivadas dos valores médios destas duas grandezas.

Vamos então aplicar este tipo de raciocínio na função de onda definida por (V.8) e (V.1,2): Usando (V.19) temos

$$\langle L_z \rangle = \hbar(|a_1|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} \hbar(w_1 w_2^* + w_1^* w_2), \quad (V.26)$$

o que, com o auxílio de (V.20) e (V.18), nos dá

$$\frac{d}{dt} \langle L_z \rangle = p \{ E_y (a^* w_1 + a w_1^*) + i E_x (a w_2^* - a^* w_2) \} , \quad (V.27)$$

$$= \langle p_x \rangle E_y - \langle p_y \rangle E_x ,$$

que é a equação de torque do nosso problema. Para reduzir este problema às equações diferenciais que contenham apenas valores médios de grandezas físicas relevantes, devemos obrigatoriamente considerar $E_x, E_y, \langle p_x \rangle, \langle p_y \rangle$ (por causa de (V.21)), $\langle L_z \rangle$ (por causa de (V.27)) e, com toda a certeza, $\langle H_0 \rangle$ também. Tirando o campo elétrico externo, em princípio, um número suficiente de variáveis do meio (4) para definir a função de onda (V.9) (desprezados o fator de fase e o fator de normalização). A dificuldade, naturalmente, está em obter, a partir de (V.20) e (V.21), as equações autoconsistentes em função das variáveis escolhidas (supondo que elas não sejam excessivamente complicadas do ponto de vista matemático).

É conveniente, para este fim, definir as variáveis reais adimensionais^(*)

$$R_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^* w_1 + a w_1^*) = \frac{\langle p_x \rangle}{\sqrt{2} p} \quad (V.28a)$$

$$R_y = \frac{1}{\sqrt{2}} i (a^* w_2 - a w_2^*) = \frac{\langle p_y \rangle}{\sqrt{2} p} \quad (V.28b)$$

(*) As definições (V.28) e (V.30) são idênticas, a menos de um sinal, às utilizadas na Seção IV (Confira com (IV.5) e (IV.4)).

$$S_x = \frac{i}{\sqrt{2}} (aw_1^* - a^* w_1) \quad , \quad (V.29a)$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^* w_2 + aw_2^*) \quad , \quad (V.29b)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{2}pE_x}{\hbar\omega_o\alpha} \quad , \quad (V.30a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sqrt{2}pE_y}{\hbar\omega_o\alpha} \quad , \quad (V.30b)$$

$$\ell = \frac{\langle L_z \rangle}{\hbar} \quad , \quad (V.31)$$

$$e = \frac{\langle H_o \rangle}{\hbar\omega_o} \quad , \quad (V.32)$$

$$\tau = \omega_o t \quad . \quad (V.33)$$

Vamos agora reescrever as equações já obtidas com base na nomenclatura acima. A conservação da probabilidade (V.22) é expressa agora por

$$\frac{1}{2} (|w_1|^2 + |w_2|^2) + |a|^2 = \vec{R}^2 + \vec{S}^2 + e^2 = 1 \quad , \quad (V.34)$$

enquanto a equação de torque (V.25) fica reduzida a

$$\frac{d\ell}{d\tau} = \alpha(R_x\varepsilon_y - R_y\varepsilon_x) \quad , \quad (V.35)$$

$$= \alpha \{ \vec{R} \wedge \vec{\varepsilon} \}_z \quad .$$

Sendo agora

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle &= 1/2 \hbar \omega_0 (|a_1|^2 + |a_2|^2 - |a_3|^2) , \\ &= 1/2 \hbar \omega_0 \left(\frac{1}{2} (|w_1|^2 + |w_2|^2) - |a|^2 \right), \end{aligned} \quad (V.36)$$

obtemos de (V.33) e (V.20) após algumas transformações

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = 2\alpha \vec{S} \cdot \vec{\epsilon} . \quad (V.37)$$

Já para as equações do campo o resultado é (veja (V.27), (V.28) e (V.29)):

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = - \vec{\epsilon} . \quad (V.38)$$

Resta agora obter as novas equações para $d\vec{R}/d\tau$ que são conseqüência das relações (V.20): Lembrando os resultados (V.28), (V.29) e (V.30) é possível provar que

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = \vec{S} + \alpha \vec{L} \wedge \vec{\epsilon} , \quad (V.39)$$

onde, para obter uma expressão mais compacta, definimos $\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{\epsilon}$. O problema agora é eliminar as componentes da variável $\vec{\epsilon}$ que não pertencerem ao conjunto, previamente escolhido, de variáveis básicas que são descrever o estado da matéria. Para esta finalidade empregaremos a Eq. (V.33), substituindo $d\vec{R}/d\tau$ em (V.39). Temos então:

$$\vec{S} = -\vec{\epsilon} - \alpha \vec{\ell} \wedge \vec{\epsilon} \quad . \quad (\text{V.40})$$

Quadrando (V.40) e lembrando que $\vec{\ell}$ e $\vec{\epsilon}$ são perpendiculares vem

$$S^2 = \epsilon^2 (1 + \alpha^2 \ell^2) \quad , \quad (\text{V.41})$$

o que permite escrever (V.34) na forma

$$R^2 + \epsilon^2 (1 + \alpha^2 \ell^2) + e^2 = 1 \quad . \quad (\text{V.42})$$

Para a equação da energia usamos o resultado

$$\vec{S} \cdot \vec{\epsilon} = -\epsilon^2 \quad (\text{V.43})$$

(tirado de (V.40)), substituindo-o em (V.37). Obtemos então

$$\frac{de}{d\tau} = -2\alpha \epsilon^2 \quad (\text{V.44})$$

que corresponde à equação da conservação da energia já discutida em exemplos anteriores (Veja (IV.6)).

Vejamos se o nosso sistema já está completo: Como já vimos antes precisamos para isso de 6 variáveis (4 da matéria e duas do campo), para as quais escolhemos E_x, E_y, R_x, R_y, ℓ e e . Precisamos, portanto, de 6 equações e já temos (V.44), (V.42), (V.38) (2 equações), e (V.35), num total de 5 equações. A equação que falta pode ser obtida notando que há uma relação entre $\vec{R}$, $\vec{\ell}$ e $\vec{S}$. De fato, a partir

das definições (V.28), (V.29) e (V.31) mostra-se, sem muita dificuldade, que

$$\vec{R}\wedge\vec{S} = (1-e)\vec{\ell}. \quad (V.45)$$

Por outro lado, multiplicando vetorialmente (V.40) por $\vec{R}$ vem

$$\vec{R}\wedge\vec{S} = -\vec{R}\wedge\vec{\epsilon} - \alpha(\vec{R} \cdot \vec{\epsilon})\vec{\ell}, \quad (V.46)$$

uma vez que $(\vec{R} \cdot \vec{\ell})=0$. Substituindo agora (V.45) em (V.46) obtemos a última equação que nos faltava:

$$\vec{\epsilon}\wedge\vec{R} = \{1-e+\alpha(\vec{R} \cdot \vec{\epsilon})\}\vec{\ell}. \quad (V.47)$$

Reunindo todas as equações encontradas até agora obtemos a forma final do sistema autoconsistente

$$\frac{dR_x}{d\tau} = -\epsilon_x, \quad (V.48a)$$

$$\frac{dR_y}{d\tau} = -\epsilon_y, \quad (V.48b)$$

$$\frac{d\ell}{d\tau} = \alpha(R_x\epsilon_y - R_y\epsilon_x), \quad (V.49)$$

$$\frac{de}{d\tau} = -2\alpha(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2), \quad (V.50)$$

$$\vec{R}^2 + \vec{\epsilon}^2 (1 + \alpha^2 \ell^2) + e^2 = 1 \quad , \quad (V.51)$$

$$\epsilon_x R_y - \epsilon_y R_x = \{1 - e + (\vec{R} \cdot \vec{\epsilon})\} \ell. \quad (V.52)$$

Note-se que o sistema acima admite uma solução com $\ell=0$ e $\vec{\epsilon}$ paralelo a $\vec{R}$. Se escolhermos então um sistema de referência / onde $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ estão alinhados ao longo de um dos eixos de coordenadas reproduziremos o sistema (IV.6), obtendo, conforme já dissemos antes, as soluções da Seção IV como um caso particular. É importante notar, entretanto, que os resultados da Seção III não são casos particulares de soluções do sistema (V.48,-52); isto é, que, começando o decaimento num dos estados excitados $m=\pm 1$, é impossível ter u ma emissão em que o outro estado, $m=\mp 1$, não venha a participar / também (absorvendo temporariamente uma parte da energia de excitação). Como era de esperar, uma vez que a transição direta entre os estados excitados é proibida, este é um efeito ligado ao acoplamento forte, sendo desprezível a sua contribuição no caso em que $\alpha \ll 1$. Para observar melhor este fato basta representar os resultados da Seção III na nomenclatura que estamos agora utilizando:

$$v_z = \cos\theta \rightarrow e \quad , \quad (V.53a)$$

$$\vec{E} \rightarrow \frac{\hbar\omega_0\alpha}{\sqrt{2}p} \vec{\epsilon} \quad , \quad (V.53b)$$

$$v_{x \rightarrow \pm} = \sqrt{2} R_x \quad , \quad (V.53c)$$

$$V_y \rightarrow \sqrt{2} R_y \quad . \quad (V.53d)$$

Assim, lançando mão de (V.53b,c,d) transformamos (II.2) em

$$\frac{d\vec{R}}{d\tau} = -\vec{\epsilon} \quad ,$$

que coincide exatamente com (V.48a,b). Substituindo agora (V.53a) em (II.3), obtemos

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -2\alpha\vec{\epsilon}^2 \quad ,$$

que reproduz o resultado (V.50). Eliminemos $d\vec{v}/dt$ no sistema (V.49), lançando simultaneamente mão das equações (V.53). Obtemos com alguma dificuldade as relações

$$\vec{\epsilon}^2 = \pm [\epsilon_x R_y - \epsilon_y R_x] \quad (V.54)$$

$$\vec{R}^2 = \vec{\epsilon}^2 (1 + \alpha^2 \epsilon^2) \quad (V.55)$$

válidas para $\Delta m = \pm 1$. Se usarmos agora (V.24) e (V.54) obtemos finalmente a equação (V.40)

$$\frac{d\ell}{d\tau} = \alpha (R_x \epsilon_y - R_y \epsilon_x) \quad ,$$

que está perfeitamente de acordo com (V.49). Assim, as eqs. (V.49)

diferenciais são as mesmas nos dois problemas, mas a diferença vai aparecer nas constantes de movimento (V.51) e (V.52). Realmente, introduzindo (V.53c,d) e (V.55) na equação da conservação da probabilidade vem

$$\vec{R}^2 + e^2(1 + e^2 \alpha^2) + e^2 = 1 ,$$

o que só coincide com (V.51) para $\alpha \ll 1$. Coisa análoga acontece para a outra constante de movimento: usando (V.54), (V.55) e (V.29) obtemos

$$\epsilon_x R_y - \epsilon_y R_x = \frac{(1-e)\ell}{1 + \alpha^2 e^2} ,$$

que é igual a (V.52) apenas para $\alpha \ll 1$. Notemos que $\vec{R} \cdot \vec{E}$ para as soluções da Seção III é da ordem de α quando $\alpha \rightarrow 0$, de modo que as soluções para apenas 2 estados satisfazem o sistema de equações (V.48-52) excetuados termos da ordem de α^2 (o que está de acordo com a Teoria das Perturbações).

Mesmo sem resolver o sistema autoconsistente é possível obter informações quantitativas sobre a intensidade da radiação emitida. Para isto observamos em (V.50) que a taxa de emissão máxima coincide, como sempre, com o maior valor do módulo do campo elétrico. Ora, este valor está limitado, por (V.51), pela condição $e^2 \leq 1$; sendo o sinal de igualdade obtido somente quando $\ell = e = R_x = R_y = 0$. Usando então (V.30) e (V.32) podemos reescrever esta desigualdade como

$$-\frac{d}{dt} (1/2 \hbar \omega_0 \sigma_e) < \hbar \omega_0^2 \sigma_a , \quad (V.56)$$

que serve para complementar o resultado (IV.22). O sinal de igualdade é obtido quando consideramos $a_1=a_2=1/2$ e $a_3=1/\sqrt{2}$ em (V.8a), o que nos dá $\ell=e=0, \vec{R}=0$ (Veja (V.26), (V.28) e (V.36). Veja também (IV.22) e (IV.7) para $\sin\psi=0$ e $\sin\theta=1$).

V.B Solução das Equações para Acoplamento Fraco

Vamos estudar as soluções do sistema (V.48-52) para pequenos valores de α , isto é, $\alpha \ll 1$. Como $|\ell| \leq 1$ vamos desprezar em (V.51) o termo $\alpha^2 \ell^2$, escrevendo em seu lugar

$$\vec{R}^2 + \vec{\varepsilon}^2 + e^2 = 1. \quad (V.57)$$

A condição (V.57) sugere o uso da substituição de variáveis

$$e = \cos\theta \quad (V.58)$$

$$R_x = \sin\theta \cos\gamma \cos\phi \quad (V.59a)$$

$$R_y = \sin\theta \cos\gamma \sin\phi \quad (V.59b)$$

$$\varepsilon_x = \sin\theta \sin\gamma \cos\psi \quad (V.60a)$$

$$\varepsilon_y = \sin\theta \sin\gamma \sin\psi \quad (V.60b)$$

onde, como antes, $0 \leq \theta \leq \pi$ (as limitações de γ serão discutidas posteriormente). Substituindo (V.58) e (V.60) em (V.50) com (após elimi-

narmos a solução instável $\sin\theta=0$).

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha \sin\theta \sin^2\gamma, \quad (V.61)$$

que é a mesma expressão (IV.8). (De fato, fazer $\alpha \rightarrow 0$ em (V.51) é mesmo que considerar $l \equiv 0$). As equações (V.48), com as convenções introduzidas em (V.59) e (V.60), nos fornecem agora, após uma longa série de transformações elementares,

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \cos(\phi-\psi) + \alpha \cos\theta \sin(2\gamma), \quad (V.62)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \operatorname{tg}\gamma \sin(\phi-\psi). \quad (V.63)$$

Note-se o nosso interesse em utilizar ao máximo a variável $\phi-\psi$ uma vez que, pela própria natureza do problema, (invariância por rotações no eixo $\hat{z}$), deve haver um sistema completo de equações envolvendo apenas θ , γ e $\phi-\psi$.

Restam ainda duas equações a utilizar: (V.49) e (V.52). Para levá-las em conta procedemos da maneira seguinte: a) Substituímos $\vec{E}$ e $\vec{R}$ nas duas equações pelas expressões correspondentes / (V.58, 59, 60). b) Derivamos (V.52) em relação a τ e eliminamos $d\vec{l}/d\tau$ nas duas equações. c) Levamos em conta neste processo apenas os termos da ordem de α , lembrando que $d\vec{l}/d\tau$ e $d\theta/d\tau$ já são desta ordem de magnitude. d) Fatoramos o resultado de modo a analisar separadamente as soluções estranhas. Agindo desta maneira chegamos finalmente, após uma longa série de operações que seria tedioso repetir, a

$$\frac{d}{d\tau} (\phi - \psi) = -2\cotg(2\gamma)\text{sen}(\phi - \psi) . \quad (V.64)$$

juntando este resultado com (V.61) e (V.62) obtemos nosso desejado sistema de equações na forma

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha\text{sen}\theta\text{sen}^2\gamma, \quad (V.65)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \cos(\phi - \psi) + \alpha\cos\theta\text{sen}(2\gamma) , \quad (V.66)$$

$$\frac{d}{d\tau} (\phi - \psi) = -2\cotg(2\gamma)\text{sen}(\phi - \psi) , \quad (V.67)$$

onde ϕ e ψ satisfazem individualmente a

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \tg\gamma\text{sen}(\phi - \psi) \quad (V.68)$$

e

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \cotg\gamma\text{sen}(\phi - \psi) . \quad (V.69)$$

sendo esta última equação fruto de (V.63) e (V.67). É fácil de ver que o sistema (V.65, 66, 67) contém o sistema (IV.3, 9) como um caso particular, válido para $\phi = \psi$. Vemos então que conservar a até primeira ordem nas expansões em série dá bons resultados para θ , $\phi - \psi$, mas que isto deixa de ser verdade quando α se afasta de zero. Notemos também que, embora não seja evidente à primeira vista, as soluções da Seção III satisfazem realmente a (V.65, 66, 67) até a pró-

$$\frac{d}{d\tau} (\phi - \psi) = -2\cotg(2\gamma)\text{sen}(\phi - \psi) . \quad (\text{V.64})$$

Junstando este resultado com (V.61) e (V.62) obtemos nosso desejado sistema de equações na forma

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha\text{sen}\theta\text{sen}^2\gamma , \quad (\text{V.65})$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \cos(\phi - \psi) + \alpha\cos\theta\text{sen}(2\gamma) , \quad (\text{V.66})$$

$$\frac{d}{d\tau} (\phi - \psi) = -2\cotg(2\gamma)\text{sen}(\phi - \psi) , \quad (\text{V.67})$$

onde ϕ e ψ satisfazem individualmente a

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \tg\gamma\text{sen}(\phi - \psi) \quad (\text{V.68})$$

e

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \cotg\gamma\text{sen}(\phi - \psi) , \quad (\text{V.69})$$

sendo esta última equação fruto de (V.63) e (V.67). É fácil de ver que o sistema (V.65, 66, 67) contém o sistema (IV.3, 2) como um caso particular, válido para $\phi = \psi$. Vemos então que conservar a até primeira ordem nas expansões em série dá bons resultados para $\dot{\theta}$, $\dot{\gamma}$ e $\dot{\phi} - \dot{\psi}$, mas que isto deixa de ser verdade quando α se afasta de zero. Notemos também que, embora não seja evidente à primeira vista, as soluções da Seção III satisfazem realmente a (V.65, 66, 67) até a pri-

meira ordem em α . Para esclarecer este ponto basta utilizar (V.54), (V.55) e (V.56), obtendo

$$\cos(\phi-\psi) = \cos(\pi/2 + \text{tg}^{-1}(\alpha \cos \theta)) \approx -\alpha \cos \theta + O(\alpha^2),$$

$$\gamma = \pi/4 + O(\alpha^2).$$

Daí resulta para (V.66) um resultado perfeitamente consistente

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = O(\alpha^2) = -\alpha \cos \theta + \alpha \cos \theta + O(\alpha^2) \quad \text{QED.}$$

O que ocorre então é a existência de uma contribuição de ordem α , embutida no termo $\cos(\phi-\psi)$, que cancele o 2º membro de (V.66).

Vamos nos limitar agora ao caso mais simples possível, desprezando a contribuição de ordem α em (V.66) (o que contém a a aproximação feita em (IV.11,12)). Naturalmente isto não dá um resultado absolutamente preciso quando $\phi-\psi \rightarrow \pi/2$, pois, conforme acabamos de ver, neste caso os 2 termos no 2º membro de (V.66) são da mesma ordem de magnitude. Não obstante, o valor do limite ainda é o correto, pois, de qualquer maneira, os 2 membros de (V.66) anula-se anulam. Com esta nova aproximação obtemos

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 2\alpha \sin \theta \sin^2 \gamma, \quad (\text{V.70})$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \cos(\phi-\psi), \quad (\text{V.71})$$

$$\frac{d}{d\tau} (\phi-\psi) = -2 \cotg(2\gamma) \sin(\phi-\psi), \quad (\text{V.72})$$

que é o sistema que vamos efetivamente resolver. Para começar notamos que ele admite a constante de movimento

$$\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\phi-\psi) = C. \quad (\text{V.73})$$

(o que é facilmente verificado derivando (V.73) em relação a τ), para a qual é possível atribuir um significado físico bem definido. Realmente, fazendo em (V.52) as substituições angulares (V.58) a (V.60), e desprezando os termos da ordem de α obtemos

$$\mathfrak{L} = \cos^2 \theta / 2 \text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\phi-\psi). \quad (\text{V.74})$$

Ora, definindo a energia de excitação racionalizada como

$$e_{\text{exc}} = \frac{\langle H_0 \rangle - (-1/2\hbar\omega_0)}{\hbar\omega_0} = \frac{e+1}{2} = \cos^2 \theta / 2, \quad (\text{V.75})$$

podemos escrever de (V.74)

$$\frac{\mathfrak{L}}{e_{\text{exc}}} = C. \quad (\text{V.76})$$

Assim senão, $|\mathfrak{L}|$ diminui, nesta aproximação, do mesmo modo que a energia de excitação, o que, em outras palavras, pode ser expresso como

$$\frac{\mathfrak{L}}{e_{\text{exc}}} = \frac{|a_2|^2 - |a_3|^2}{|a_2|^2 + |a_3|^2} = C ;$$

ou seja:- que a relação $|a_2|^2/|a_3|^2$ entre as probabilidades de ocupação dos dois estados excitados se mantém constante. Destas considerações é possível obter uma expressão conveniente para a constante C observando que quando $\tau \rightarrow -\infty$ e $e_{exc} \rightarrow 1$ de modo que C é igual ao valor médio inicial ℓ_0 do momento angular. Escrevemos então de (V.73):

$$\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\phi-\psi) = \ell_0 . \quad (\text{V.75})$$

Os resultados acima já nos permitem obter algumas informações qualitativas sobre o comportamento das soluções do sistema (V.70 a 72). Por exemplo de (V.68) e (V.69) vem

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \text{tg}\gamma\text{sen}(\phi-\psi) = \frac{\ell_0}{2\cos^2\gamma} , \quad (\text{V.78})$$

e

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \text{cotg}\gamma\text{sen}(\phi-\psi) = \frac{\ell_0}{2\text{sen}^2\gamma} , \quad (\text{V.79})$$

donde vemos que os ângulos ϕ e ψ variam sempre num único sentido obedecendo ao sinal de ℓ_0 . Estas velocidades angulares do dipolo e do campo elétrico, obedecem ainda a outras relações. De fato, de (V.78) e (V.79) segue-se imediatamente que

$$\frac{1}{\ell_0} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{d\phi}{d\tau}} + \frac{1}{\frac{d\psi}{d\tau}} \right\} , \quad (\text{V.80})$$

isto é, que a constante ℓ_0 é a média harmônica das 2 velocidades

angulares. Usando ainda as mesmas duas relações temos também

$$\frac{d\psi}{d\tau} \sin^2 \gamma = \frac{d\phi}{d\tau} \cos^2 \gamma = \frac{\ell_0}{2} ,$$

ou, usando (V.59) e (V.60)

$$\frac{d\psi}{d\tau} |\vec{\epsilon}|^2 = \frac{d\phi}{d\tau} |\vec{R}|^2 , \quad (V.81)$$

onde concluímos que as velocidades areolares de $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ são sempre iguais em cada instante. Não precisamos nos estender mais sobre as relações recíprocas entre $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ pois elas serão melhor vistas, de qualquer forma, quando tivermos as soluções exatas do sistema (V.76 a 78).

Para a integração do sistema aproximado (V.76 a 78) usamos a constante de movimento (V.77) para obter de (V.77)

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \sqrt{1 - \sin^2(\psi - \phi)} = \frac{\ell_0}{\sin(2\gamma)} \sqrt{\frac{\sin^2(2\gamma)}{\ell_0^2} - 1} . \quad (V.82)$$

Quando agora ⁽¹⁹⁾

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\frac{1}{\ell_0^2} \sin^2 x - 1}} = -\ell_0 \sin^{-1} \frac{\frac{1}{\ell_0} \cos x}{\sqrt{\frac{1}{\ell_0^2} - 1}} + C.$$

temos de (V.82)

$$\frac{\cos(2\gamma)}{\sqrt{1 - \ell_0^2}} = -\sin(2(\tau + C)) . \quad (V.83)$$

Aqui novamente podemos escolher a origem do tempo para eliminar uma das constantes de integração. Vamos supor que para $\tau=0$ $\cos(2\gamma)$ tem o valor máximo $+\sqrt{1-\ell_0^2}$, o que equivale a escolher $C=3\pi/4$. Substituímos então de (V.83)

$$\cos(2\gamma) = +\sqrt{1-\ell_0^2} \cos(2\tau) \quad (\text{V.84})$$

Vamos, para fixar as idéias considerar, de agora em diante, $\ell_0 > 0$. Como $\cos(2\gamma)$ oscila simetricamente entre os valores $\pm\sqrt{1-\ell_0^2}$ então $\sin(2\gamma)$ tem sempre um único sinal que vamos escolher positivo, de modo que γ seja um ângulo do 1º quadrante, o que faz com que $\sin\theta$, $\cos\gamma$ e $\sin\theta\sin\gamma$ sejam realmente os módulos de $\vec{R}$ e $\vec{E}$. Desta forma $\sin(2\gamma)$ varia entre ℓ_0 e 1 enquanto γ oscila simetricamente em torno do valor médio $\pi/4$. De (V.84) e (V.70) obtemos agora a variação de θ (energia):

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \alpha \sin\theta \{1 - \cos 2\gamma\} = \alpha \sin\theta \{1 - \sqrt{1-\ell_0^2} \cos(2\tau)\}. \quad (\text{V.85})$$

Temos então uma taxa de emissão rapidamente oscilante com uma amplitude que depende de ℓ_0 : máxima para $\ell_0 \rightarrow 0$ e mínima quando $\ell_0 \rightarrow 1$, o que corrobora os resultados das Seções III e IV. Em qualquer caso a média destas oscilações rápidas num intervalo $1 \ll \Delta\tau \ll 1/\alpha$ nos dá

$$\left\langle \frac{d\theta}{d\tau} \right\rangle = \alpha \sin\theta, \quad (\text{V.86})$$

Independente do valor de ℓ_0 .

Nosso interesse agora estará voltado para o estudo da polarização de $\vec{E}$ e $\vec{R}$, isto é, para o comportamento do campo e do dipolo elétrico num intervalo de tempo em que θ é praticamente constante. Este comportamento é expresso naturalmente pelas variáveis "rápidas" γ, ϕ e ψ . Usando então (V.78), (V.79) e (V.84) obtemos

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l_0}{2\cos^2\gamma} = \frac{l_0}{1+\sqrt{1-l_0^2}\cos(2\tau)}, \quad (V.87)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{l_0}{2\sin^2\gamma} = \frac{l_0}{1-\sqrt{1-l_0^2}\cos(2\tau)}. \quad (V.88)$$

Notemos de (V.87) e (V.88) que $d/d\tau\phi(\tau) = d/d\tau\psi(\tau+\pi/2)$ e que, ao mesmo tempo, as derivadas de ϕ e ψ são funções periódicas de período π que oscilam entre os extremos $l_0/(1-\sqrt{1-l_0^2})$ e $l_0/(1+\sqrt{1-l_0^2})$. Os valores médios são dados então por

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\phi}{d\tau} \\ \frac{d\psi}{d\tau} \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{l_0}{1 \pm \sqrt{1-l_0^2}\cos(2\tau)} \quad (V.89)$$

Fazendo $x=2\tau$ e usando⁽²⁰⁾

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} \operatorname{tg} x/2 \right\}, \quad a > |b| \quad (V.90)$$

obtemos de (V.89)

$$\left\langle \frac{d\phi}{d\tau} \right\rangle = \left\langle \frac{d\psi}{d\tau} \right\rangle = 1 \quad (\text{V.91})$$

(para $\lambda_0 < 0$ o resultado é -1). Esta independência dos valores médios com o módulo de λ_0 pode parecer estranha à primeira vista, uma vez que as polarizações devem ficar retilíneas quando $\lambda_0 \rightarrow 0$. Acontece que estamos esquecendo as mudanças de sinal das componentes de $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$, as quais correspondem a uma variação instantânea de π nos ângulos ϕ e ψ . De fato, é fácil de ver de (V.87) e (V.88) que $d\phi/d\tau$ e $d\psi/d\tau$ tendem para zero quando $\lambda_0 \rightarrow 0$, a não ser quando $\cos(2\tau) = \mp 1$ caso em que as duas derivadas tendem para ∞ , o que dá para as mesmas um comportamento deltiforme (Isto pode ser verificado diretamente pela tradicional integração de (V.87) e (V.88) numa vizinhança que contém os valores máximos de $d\phi/d\tau$ e $d\psi/d\tau$, obtendo-se o resultado π quando $\lambda_0 \rightarrow 0$). Para esclarecer ainda mais a situação basta observar que as descontinuidades das derivadas de ϕ e ψ correspondem, por (V.84), aos seguintes valores de γ

$$\begin{aligned} \text{Descontinuidade de } \frac{d\phi}{d\tau}: \cos 2\tau \rightarrow -1 & \left\{ \begin{array}{l} \cos(2\gamma) \rightarrow -1 \\ \sin(2\gamma) \rightarrow 0 \end{array} \right. , \gamma \rightarrow \pi/2 , \quad (\text{V.92}) \\ \text{Descontinuidade de } \frac{d\psi}{d\tau}: \cos 2\tau \rightarrow +1 & \left\{ \begin{array}{l} \cos(2\gamma) \rightarrow +1 \\ \sin(2\gamma) \rightarrow 0 \end{array} \right. , \gamma \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ora, lembrando as convenções introduzidas em (V.59) e (V.60) vemos imediatamente que

$$\text{Descontinuidade de } \frac{d\phi}{d\tau}: \gamma \rightarrow \pi/2, \cos \gamma \rightarrow 0, \rightarrow |\vec{R}| = 0 , \quad (\text{V.93})$$

Descontinuidade de $\frac{d\psi}{d\tau}$: $\gamma \rightarrow 0$, $\text{sen } \gamma \rightarrow 0$, $\rightarrow |\vec{\epsilon}| = 0$,

o que mostra claramente que a inversão de sinal das componentes de $\vec{E}$ e $\vec{\epsilon}$ ocorre exatamente quando os módulos destes vetores se anulam. Aliás é bom ter sempre em mente que dentro da nossa convenção de manter γ limitado ao primeiro quadrante teremos para $\ell_0 \rightarrow 0$

$$\text{sen } \gamma \rightarrow |\text{sen } \tau| \quad \text{e} \quad \cos \gamma \rightarrow |\cos \tau|, \quad (\text{V.94})$$

de modo que as variações de sinal ficam exclusivamente por conta de ϕ e ψ . É claro que quando se estuda isoladamente o caso $\ell_0 = 0$ é muito mais conveniente tomar $\phi = \psi$ constante e abolir os módulos em (V.94), passando o ângulo γ a ser simplesmente igual a τ (este aliás foi o método usado na Seção IV).

Após esta digressão voltemos ao estudo das polarizações de $\vec{\epsilon}$ e $\vec{E}$: De (V.88) e (V.90) obtemos, sem muita dificuldade,

$$\begin{aligned} \text{tg } \psi &= k \text{tg } \tau, \\ k &= \frac{\ell_0}{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}}{\ell_0}, \end{aligned} \quad (\text{V.95})$$

onde já lançamos mão da invariância do sistema por rotações no círculo $\hat{z}$ para escolher o valor da constante de integração. De (V.95) temos

$$\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + k^2 \text{tg}^2 \tau}, \quad (\text{V.96})$$

$$\operatorname{sen}^2 \psi = \frac{k^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \tau}.$$

Por outro lado, usando (V.84) temos também

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \gamma &= \frac{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2} \cos(2\tau)}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \tau - \sqrt{1 - \ell_0^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \tau)}{1 + \operatorname{tg}^2 \tau} \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2} + (1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}) \operatorname{tg}^2 \tau\} \cos^2 \tau. \end{aligned} \quad (\text{V.97})$$

Multiplicando e dividindo (V.97) por $1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}$ ficamos com

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{1}{2} \ell_0^2 \frac{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}} \cos^2 \tau. \quad (\text{V.98})$$

Usando agora (V.96) e (V.98) obtemos de (V.60)

$$\begin{aligned} \epsilon_x^2 &= \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \gamma \cos^2 \psi = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2} \cos^2 \tau, \\ \epsilon_y^2 &= \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \psi = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2} \operatorname{sen}^2 \tau. \end{aligned} \quad (\text{V.99})$$

Assim, eliminando a variável temporal, temos, descrita pela equação de $\vec{r}$, a curva

$$\frac{\epsilon_x^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2}} + \frac{\epsilon_y^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2}} = 1. \quad (\text{V.100})$$

Assim o campo elétrico obedece a uma elipse "instantânea" cujos eixos vão encurtando lentamente (em relação ao período de rotação) mas sempre com a mesma excentricidade.

Para o dipolo elétrico o procedimento é análogo: Usando (V.87) e (V.90) obtemos

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{1}{k} \text{tg} \tau \right\} + \phi_0, \quad (\text{V.101})$$

onde agora a constante ϕ_0 precisa ser calculada, pois já arbitramos a orientação inicial do campo elétrico (para $\tau=0$). Para isto notamos que

$$\begin{aligned} \phi - \psi &= \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{1}{k} \text{tg} \tau \right\} + \phi_0 - \text{tg}^{-1} \{ k \text{tg} \tau \} \\ &= \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{(1/k - k) \text{tg} \tau}{1 + \text{tg}^2 \tau} \right\} + \phi_0 = \phi_0 - \text{tg}^{-1} \omega(\tau), \end{aligned} \quad (\text{V.102})$$

onde $\omega(\tau) = \sqrt{1 - \epsilon_0^2} / \epsilon_0 \sin(2\tau)$. De (V.102) segue-se então que

$$\sin(\phi - \psi) = \frac{\sin \phi_0 - \omega \cos \phi_0}{\sqrt{1 + \omega^2}}. \quad (\text{V.103})$$

Por outro lado, de (V.84) temos

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma) &= \sqrt{1 - \cos^2(2\gamma)} = \sqrt{1 - (1 - \epsilon_0^2) \cos^2 2\tau} \\ &= \epsilon_0 \sqrt{1 + \omega^2(\tau)}. \end{aligned} \quad (\text{V.104})$$

Junstando agora (V.103) e (V.104) com (V.77) obtemos a identidade

$$\sin(\phi - \psi) \sin(2\gamma) = \epsilon_0 = \epsilon_0 \{ \sin \phi_0 - \omega(\tau) \cos \phi_0 \}. \quad (\text{V.105})$$

da qual decorre $\phi_0 = \pi/2$ e que, portanto, nos dá

$$\phi(\tau) = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{1}{k} \operatorname{tg} \tau \right\} + \pi/2 . \quad (\text{V.106})$$

De (V.106) podemos escrever

$$\operatorname{tg} \phi = - \frac{k}{\operatorname{tg} \tau} ,$$

donde

$$\cos^2 \phi = \frac{1/k^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{1 + 1/k^2 \operatorname{tg}^2 \tau} , \quad (\text{V.107})$$

e

$$\operatorname{sen}^2 \phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2} \operatorname{tg}^2 \tau} .$$

Seguindo os mesmos passos utilizados na obtenção de (V.98) p^o se-
se mostrar que

$$\cos^2 \gamma = \frac{\ell_0^2}{2} \frac{1 + 1/k^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}} \cos^2 \tau , \quad (\text{V.108})$$

onde, usando (V.107), obtemos os quadrados das componentes de $\vec{R}$

$$R_X^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \gamma \cos^2 \phi = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2} \operatorname{sen}^2 \tau . \quad (\text{V.109})$$

$$R_Y^2 = \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \phi = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2} \cos^2 \tau .$$

A extremidade de $\vec{R}$ descreve então a elipse instantânea

$$\frac{R_x^2}{\sin^2 \theta \frac{1 - \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2}} + \frac{R_y^2}{\sin^2 \theta \frac{1 + \sqrt{1 - \ell_0^2}}{2}} = 1 \quad (\text{V.110})$$

que é a mesma curva percorrida pela extremidade de $\vec{e}$ (elipse de eixos $\sin \theta (1 \pm \sqrt{1 - \ell_0^2})/2$ vista em (V.100).

Para terminar só falta comparar a posição dos vetores $\vec{e}$ e $\vec{R}$ num mesmo intervalo de tempo. As componentes de $\vec{e}$ são obtidas tirando as raízes quadradas de (V.99). O problema dos duplos sinais é facilmente resolvido observando que o sentido de percurso é antihorário para $\ell_0 > 0$ ($d\psi/d\tau > 0$). Obtemos então

$$e_x = a \sin \theta \cos \tau, \quad (\text{V.111})$$

$$e_y = b \sin \theta \sin \tau,$$

$$\text{onde } a = \frac{(1 - \sqrt{1 - \ell_0^2})}{2^{1/2}} \quad \text{e} \quad b = \frac{(1 + \sqrt{1 - \ell_0^2})}{2^{1/2}} \quad (\text{a hipótese em que } e_x = e_y$$

têm sinais trocados em relação aos que aparecem em (V.111) corresponde a um fator π a mais na fase τ , o que é irrelevante). No caso contrário ao vetor $\vec{R}$ a condição $d\phi/d\tau > 0$ para $\ell_0 > 0$ (novamente rotacional anti-horária) implica na escolha de sinais opostos nas raízes quadradas de (V.109). É fácil de ver que a escolha correta corresponde a $\sin(\phi - \psi) > 0$ é então

$$R_x = -a \sin \theta \sin \tau = a \sin \theta \cos(\tau + \pi/2), \quad (\text{V.112})$$

$$R_y = b \sin \theta \cos \tau = b \sin \theta \sin(\tau + \pi/2).$$

Vemos de (V.111) e (V.112) que os vetores $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ têm exatamente o mesmo comportamento, com a única diferença de um atraso constante no tempo $\Delta t = \pi/2\omega_0$. Quando $a=b$ este atraso resulta numa defasagem $\pi/2$ que dá origem à ortogonalidade entre os 2 vetores já observada na Seção III ($\lambda_0 = \pm 1$). As expressões (V.111) e (V.112) aparecem ilustradas na Fig.13, onde estão representados os vetores $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ e a trajetória percorrida pelas extremidades dos mesmos.

Figura 13: Trajetórias percorridas pelas extremidades dos vetores $\vec{\epsilon}$ e $\vec{R}$ no caso $\alpha \ll 1$, mostrando a posição relativa dos mesmos num instante arbitrário (Caso de 3 níveis).

APÊNDICE I

O TRATAMENTO DE DICKE PARA A EMISSÃO COLETIVA DE ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS

Consideremos um sistema de N átomos (distinguíveis) de dois níveis que interagem apenas através do campo eletromagnético. Começamos analisando as características do sistema não-perturbado: A Hamiltoniana do j^o átomo, na representação em que os estados excitado e fundamental são dados respectivamente por

$$|+\rangle_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A1.1)$$

$$|-\rangle_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

escreve-se na forma

$$H_{0j} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_{3j} = E R_{3j} \quad ,$$

onde $E = \hbar\omega_0/2$

$$R_{3j} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (A1.2)$$

$$R_{3j} |+\rangle_j = \frac{1}{2} |+\rangle_j \quad , \quad j=1,2,\dots \quad (A1.3)$$

$$R_{3j} |-\rangle_j = -\frac{1}{2} |-\rangle_j, \quad j=1,2,\dots$$

Como R_{3j} atua somente nas coordenadas da j^a partícula temos também

$$[R_{3j}, R_{3j}] = 0. \quad (\text{AI.4})$$

A Hamiltoniana total do sistema, dada por

$$H_0 = \sum_{j=1}^N H_{0j} = E \sum_{j=1}^N R_{3j} = ER_3, \quad (\text{AI.5})$$

com

$$R_3 = \sum_{j=1}^N R_{3j}, \quad (\text{AI.6})$$

tem para autofunções uma base de funções de onda do tipo

$$\psi = | \begin{matrix} 1 & 2 & & N-1 & N \\ +, & -, & \dots & +, & - \end{matrix} \rangle, \quad (\text{AI.7})$$

$$= |+\rangle_1 |-\rangle_2 \dots |+\rangle_{N-1} |-\rangle_N$$

onde os sinais + e - representam, respectivamente, os átomos nos estados excitado e fundamental. Como H_{0j} tem autovalores $\pm 1/2E$, é fácil ver que H_0 terá $N+1$ autovalores distribuídos da forma

$$\frac{N}{2} E, \left(\frac{N}{2} - 1\right)E, \dots, \left(-\frac{N}{2} + 1\right)E, -\frac{N}{2} E. \quad (\text{AI.8})$$

Sendo n_+ e n_- os números de átomos nos estados excitado e fundamental presentes na função de onda (AI.7), podemos escrever os autovalores (AI.8) na forma

$$H_{om} = mE \quad (\text{AI.9})$$

onde: $m = (n_+ - n_-)/2$, $m = -N/2, \dots, +N/2$.

Naturalmente o nível de energia mE é, em geral, degenerado, exceção feita dos valores extremos $m = \pm N/2$. Realmente, dados dois números inteiros n_+ e n_- satisfazendo às condições

$$n_+ + n_- = N, \quad (\text{AI.10})$$

$$n_+ - n_- = 2m,$$

é fácil ver que o número $g(n_+, n_-)$ de estados da base com energia igual a mE é dado por

$$g(n_+, n_-) = \frac{N!}{n_+! n_-!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!} \geq 1, \quad (\text{AI.11})$$

valendo o sinal de igualdade apenas para $m = \pm N/2$. Naturalmente que a soma de todos os valores de g vale

$$\sum_{n_+ + n_- = N} g(n_+, n_-) = 2^N \quad (\text{AI.12})$$

o que corresponde ao número de funções de onda (AI.7) da base.

Vamos definir agora dois novos operadores úteis na des-

crição do sistema

$$R_{1j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{AI.13})$$

$$R_{2j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Do ponto de vista formal os operadores R_{ij} , $i=1,2,3$ são inteiramente análogos às componentes S_x, S_y e S_z do momento angular de uma partícula de spin $1/2$:

$$R_{1j} | \dots \pm \dots \rangle = \frac{1}{2} | \dots \mp \dots \rangle,$$

$$R_{2j} | \dots \pm \dots \rangle = \pm \frac{i}{2} | \dots \mp \dots \rangle, \quad (\text{AI.14})$$

$$R_{3j} | \dots \pm \dots \rangle = \pm \frac{1}{2} | \dots \pm \dots \rangle,$$

onde os sinais $\pm$ se referem ao estado do j^o átomo (o único a ser afetado por estes operadores). Sendo assim estes operadores satisfazem a bem conhecida regra de comutação⁽²¹⁾

$$[R_{\alpha j}, R_{\beta j}] = i\delta_{\alpha\beta} R_{3j}, \quad \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} R_{\gamma j}. \quad (\text{AI.15})$$

Por analogia ao que fizemos em (AI.4) vamos definir os operadores globais

$$R_{\alpha} = \sum_{j=1}^N R_{\alpha j}, \quad \alpha=1,2,3 \quad (\text{AI.16})$$

que correspondem, dentro da nossa analogia, às componentes do momento angular total do sistema, e que, como tal, satisfazem a

$$[R_\alpha, R_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} R_\gamma. \quad (\text{AI.17})$$

Prosseguindo dentro desta idéia é natural introduzir agora o operador

$$R^2 = \sum_{\alpha=1}^3 R_\alpha^2 \quad (\text{AI.18})$$

que sabidamente comuta com as 3 componentes R_α e cujos autovalores são:

$$v(v+1), \quad |m| \leq v \leq \frac{N}{2}, \quad (\text{AI.19})$$

onde v recebe aqui (por razões que veremos mais adiante) o nome de "número de cooperação". Seguindo o mesmo caminho utilizado na composição de momentos angulares vamos introduzir as autofunções comuns $\psi_{v,m}$ de R^2 e R_3 , isto é, do número de cooperação e da energia

$$\begin{aligned} H_0 \psi_{v,m} &= mE \psi_{v,m} \\ R^2 \psi_{v,m} &= v(v+1) \psi_{v,m} \end{aligned} \quad (\text{AI.20})$$

onde $-v \leq m \leq v$, $v = N/2, N/2-1, \dots, \frac{1}{2}$.

É claro que o simples fato de dar v e m não basta, em geral, para determinar um único estado $\psi_{v,m}$, havendo ainda uma degenerescência que é dada por⁽²⁾

$$g(v) = \frac{N! (2v+1)}{\left(\frac{1}{2}N+v+1\right)! \left(\frac{1}{2}N-v\right)!} \quad (\text{AI.21})$$

Vamos considerar agora o efeito da interação entre os á-

tomos. Para tanto devemos, em primeira aproximação, introduzir na Hamiltoniana de cada átomo o termo

$$-\vec{A}(\vec{r}_j) \left\{ \sum_{\vec{k}} \frac{e_{\vec{k}}}{m_{\vec{k}} c} \vec{p}_{\vec{k}j} \right\}, \quad (\text{AI.22})$$

onde $\vec{p}_{\vec{k}j}$ é o momento canônico associado às coordenadas da $\vec{k}^{\text{a}}$ partícula do j^{o} átomo (estamos supondo que os N átomos são iguais). Independente de qual possa ser a estrutura interna dos nossos átomos (se é que tem sentido falar com muito detalhe na estrutura de um átomo de 2 níveis) é claro que o termo entre parenteses em (AI.22) terá valores médios nulos nos dois estados estacionários do átomo. Sendo assim a representação matricial de suas componentes será, para todos os átomos, do tipo

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{\ell} - i\beta_{\ell} \\ \alpha_{\ell} + i\beta_{\ell} & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{\ell} R_{1j} + \beta_{\ell} R_{2j}, \quad \ell = 1, 2, 3, \quad (\text{AI.23})$$

onde utilizamos (AI.13) e, devido à identidade dos átomos, colocamos α e β independentes de j . A Hamiltoniana de interação individual de (AI.22) pode então ser escrita como

$$-\sum_{\ell} A_{\ell}(\vec{r}_j) [\alpha_{\ell} R_{1j} + \beta_{\ell} R_{2j}] = -\vec{A}(\vec{r}_j) \cdot \{\vec{e}_1 R_{1j} + \vec{e}_2 R_{2j}\}, \quad (\text{AI.24})$$

onde $\vec{e}_1 = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} \hat{x}_{\ell}$ e $\vec{e}_2 = \sum_{\ell} \beta_{\ell} \hat{x}_{\ell}$. Vamos supor ainda que o nosso sistema ocupa um volume muito pequeno em torno da origem de coordenadas, de modo que o potencial vetor é praticamente igual a $\vec{A}(0)$ em toda a sua extensão. Com esta hipótese, a Hamiltoniana total ganha a forma

$$H = H_0 - \vec{A}(0) \cdot \sum_j \{ \vec{e}_1 R_{1j} + \vec{e}_2 R_{2j} \} = ER_3 - \vec{A}(0) \cdot \{ \vec{e}_1 R_1 + \vec{e}_2 R_2 \}. \quad (AI.25)$$

Vemos de (AI.25) que R^2 continua sendo uma constante de movimento, pois ainda comuta com a Hamiltoniana de interação. Sendo assim o número quântico v é conservado durante a emissão, havendo portanto transições apenas entre estados com o mesmo valor de v e diferentes valores de m (variação da energia). Limitando / nossa análise à primeira ordem da Teoria das Perturbações precisa remos, para começar, ao valor dos elementos de matriz $(\psi_{v,m}, R_1 \psi_{v',m'})$ e $(\psi_{v,m}, R_2 \psi_{v',m'})$. Para este fim aproveitamos a completa analogia existente com a Teoria do Momento Angular para introduzir os operadores

$$R_{\pm} = R_1 \pm iR_2, \quad (AI.26)$$

que, como é bem sabido⁽²²⁾, satisfazem a

$$R_{\pm} \psi_{v,m} = \sqrt{(v \mp m)(v \pm m + 1)} \psi_{v,m \pm 1}. \quad (AI.27)$$

De (AI.27) obtemos então

$$\begin{aligned} (\psi_{v,m} R_1 \psi_{v',m'}) &= \frac{1}{2} \delta_{v,v'} \left[\sqrt{(v' - m')(v' + m' + 1)} \delta_{m,m'+1} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(v' + m')(v' - m' + 1)} \delta_{m,m'-1} \right] \end{aligned} \quad (AI.28)$$

$$(\psi_{v,m} R_2 \psi_{v',m'}) = \frac{1}{2i} \delta_{v,v'} \left[\sqrt{(v'-m')(v'+m'+1)} \delta_{m,m'+1} - \sqrt{(v'+m')(v'-m'+1)} \delta_{m,m'-1} \right].$$

resultados estes que dão origem à regras de seleção $\Delta v = v' - v = 0$ (sobre o qual já nos referimos) e $\Delta m = m - m' = \pm 1$. De (AI.28) obtemos a contribuição dos átomos para o elemento de matriz de transição:

$$(\psi_{v,m}, (R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2) \psi_{v,m \mp 1}) = \frac{1}{2} (\vec{e}_1 \mp \vec{e}_2) \sqrt{(v \pm m)(v \mp m + 1)} \quad (\text{AI.29})$$

A taxa de emissão correspondente a uma transição $m \rightarrow m-1$ pode ser calculada com o auxílio da "regra de ouro" (23)

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H_I | m-1 \rangle|^2 \rho_f(E_m) \quad (\text{AI.30})$$

onde ω é a probabilidade de transição por unidade de tempo, $\rho_f(E_m)$ é a densidade dos estados finais com a mesma energia do estado inicial e $|m\rangle$ e $|m-1\rangle$ simbolizam os estados iniciais e finais, incluindo a participação do campo quantizado. É fácil ver de (AI.29) que a taxa de emissão I terá a forma

$$I = I_0 (v+m)(v-m+1), \quad (\text{AI.31})$$

onde I_0 não depende dos números quânticos v e m . O significado de I_0 torna-se evidente notando que num sistema com um só átomo temos dois estados, descritos por $v=1/2$ e $m=\pm 1/2$, havendo portanto uma única transição $m \rightarrow m-1$. De fato, colocando $v=m=1/2$ em (AI.31) obte-

mos $I=I_0$, donde I_0 é simplesmente a taxa de emissão correspondente a um átomo isolado⁽²⁴⁾

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{c} \left| (\psi_{1/2, 1/2}, (\sum_k \frac{e_k}{m_k c} \vec{p}_{kj}) \psi_{1/2, -1/2}) \right|^2 \\
 &= \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{c} \left| (\psi_{1/2, 1/2}, (\vec{e}_1 R_{1j} + \vec{e}_2 R_{2j}) \psi_{1/2, -1/2}) \right|^2 \quad (A1.32)
 \end{aligned}$$

cu, usando (A1.29)

$$I_0 = \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{c} (\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2) .$$

O resultado (A1.31) nos permite entender como a emissão coletiva coletiva dos N átomos varia em função dos parâmetros relevantes v e m . Para grandes valores de N , por exemplo, o máximo de (A1.31) é obtido para $v=N/2$ e $m=0$, o que dá a taxa de emissão $I=I_0 N^2/4$, proporcional portanto ao quadrado do número de átomos. Note-se que tal emissão forte ("super-radiante" na nomenclatura de Dicke) não ocorre quando todos os átomos estão excitados, mas somente a metade deles. Na verdade, o estado de excitação máxima ($v=m=N/2$) possui por (A1.31) uma taxa de emissão "normal" (i.é: proporcional ao número de átomos): $I=NI_0$. Não é difícil entender, de resto, que, tanto para uma emissão muito forte ($\gg NI_0$), como para uma emissão muito fraca ($\ll NI_0$), é preciso um alto grau de organização interna do sistema ("cooperação" na linguagem de Dicke), o que corresponde, na linguagem clássica, às correlações de fase entre as emissões de átomos diferentes capazes de produzir reforço ou atenuação.

A expressão (A1.31) ainda é passível de um tratamento /

clássico aproximado no limite em que $v \gg 1$ (o que implica naturalmente em $N \gg 1$). Realmente, para $v \gg 1$ podemos considerar os autovalores de R^2 como aproximadamente iguais a v^2 e definir pela relação $m = v \cos \theta$ um ângulo que varia quase continuamente. Desta forma, excetuados os casos onde $v \sim m$ teremos

$$I = I_0(v^2 - m^2) = I_0 v^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{AI.33})$$

e

$$I = - \frac{d}{dt} (mE) = - \frac{d}{dt} (Ev \cos \theta).$$

Juntando as duas expressões (AI.33) e lembrando que v permanece constante durante a emissão, obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{I_0 v}{E} \right) \sin \theta,$$

cujas integração dá

$$\sin \theta = \operatorname{sech} \left(\frac{I_0 v}{E} t \right) \quad (\text{AI.34})$$

e

$$I = I_0 v^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{I_0 v}{E} t \right). \quad (\text{AI.35})$$

Notamos, em (AI.35) que, além da emissão máxima corresponder à metade da excitação total ($t=0, \theta=0$), o estado totalmente excitado só é obtido recuando até $t \rightarrow -\infty$. Este é, naturalmente, uma consequência da aproximação $(v+m)(v-m+1) \sim v^2 - m^2$, a qual atribui uma taxa de emis-

são nula para o estado $v=m$, em vez do valor correto que é apenas proporcional a v .

Para finalizar vamos considerar com mais detalhe o caso da transição $\Delta m = \pm 1$, estudado na Seção III deste trabalho. Para tanto lembramos a relação⁽²⁵⁾ que existe entre os elementos de matriz das componentes de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ (vetor posição) relativos a dois auto-estados $|k\rangle$ e $|s\rangle$ de H_0 :

$$\langle k | p_i | s \rangle = i m \omega_{ks} \langle k | q_i | s \rangle, \quad (\text{AI.36})$$

sendo $\omega_{ks} = 1/\hbar (E_k - E_s)$. Usando este resultado em (AI.32) vem

$$I_0 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} |\langle \psi_{1/2, 1/2} | \vec{p} | \psi_{1/2, -1/2} \rangle|^2 \quad (\text{AI.37})$$

onde $\vec{p}$ agora representa o operador de dipolo elétrico. Ora, para o caso $\Delta m = \pm 1$ já vimos em (II.25) que:

$$\vec{p} = p(\pm \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y}) \quad (\text{AI.38})$$

onde $\langle \psi_{1/2, 1/2} | \sigma_x | \psi_{1/2, -1/2} \rangle = 1$ e $\langle \psi_{1/2, 1/2} | \sigma_y | \psi_{1/2, -1/2} \rangle = -i$.

Substituindo então estes resultados em (AI.37) podemos escrever:

$$I_0 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p^2 |\pm \hat{x} - i \hat{y}|^2 = \frac{8}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p^2, \quad (\text{AI.39})$$

que, pela primeira expressão em (AI.33) nos dá

$$I = \frac{8}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p^2 v^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{AI.40})$$

Ora, por outro lado sabemos do eletromagnetismo que a energia emitida por unidade de tempo por um dipolo de amplitude p_{class} girando com uma velocidade angular ω_0 é⁽²⁶⁾

$$I = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p_{\text{class}}^2 \quad (\text{AI.41})$$

o que, comparado com (AI.40) nos dá

$$p_{\text{class}} = 2pv \sin \theta, \quad (\text{AI.42})$$

resultado este utilizado na Seção III.B.

APÊNDICE II

RADIAÇÃO EMITIDA POR UM PLANO DE DIPOLOS GIRANTES

Conforme vimos em (III.36) a indução magnética gerada no ponto P por um dipolo variável $\vec{d}(t)$ que dista R_0 de P é dada pela soma de dois termos

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{prox}} + \vec{B}_{\text{rad}} , \quad (\text{AII.1})$$

$$\vec{B}_{\text{prox}} = \frac{\dot{\vec{d}}(t') \wedge \hat{n}}{c R_0^2} , \quad \vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\ddot{\vec{d}}(t') \wedge \hat{n}}{c^2 R_0} ,$$

onde $t' = t - R_0/c$ e $\hat{n}$ é o vetor unitário da direção que liga o dipolo ao ponto P (ver Fig.3). Estamos interessados em calcular o campo eletromagnético produzido por uma distribuição contínua de dipolos, os quais giram, em fase, com a mesma velocidade angular ω_0 (27). Seguindo (III.35) consideremos o dipolo elementar $\vec{d}(t)$, associado a área ds

$$\vec{d}(t) = \sigma p ds \sin\theta \{ \pm \cos\omega_0 t \hat{x} + \sin\omega_0 t \hat{y} \} , \quad (\text{AII.2})$$

onde podemos desprezar a dependência temporal (muito lenta) de $\sin\theta$. Utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas $P(\rho, \phi, z)$ definido na Fig.3 temos

$$R_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} , \quad (\text{AII.3})$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad \sin\theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (\text{AII.3})$$

$$\hat{n} = \cos\theta \hat{z} - \sin\theta \{\cos\beta \hat{x} + \sin\beta \hat{y}\}.$$

Vamos calcular a contribuição da parte de radiação num ponto qualquer do espaço: De (AII.2) obtemos

$$\ddot{\vec{d}}(t') = -\omega_0^2 \vec{d}(t'),$$

donde

$$\ddot{\vec{d}}(t') \wedge \hat{n} = -\omega_0^2 \rho ds \sin\theta \{\pm \cos\omega_0 t' \hat{x} + \sin\omega_0 t' \hat{y}\} \wedge \{\cos\theta \hat{z} - \sin\theta (\cos\beta \hat{x} + \sin\beta \hat{y})\}. \quad (\text{AII.4})$$

A contribuição da área ds para a indução magnética no ponto P fica sendo então

$$\begin{aligned} d\vec{B}_{\text{rad}} = \frac{\omega_0^2 \rho \sin\theta ds}{c^2 R_0} & \left[\cos\theta (\pm \cos\omega_0 t' \hat{y} - \sin\omega_0 t' \hat{x}) + \right. \\ & \left. + \sin\theta \sin[\pm\beta - \omega t'] \hat{z} \right] \end{aligned} \quad (\text{AII.5})$$

Vamos integrar primeiro em β : Como θ, t' e R_0 são dependentes de ρ e $ds = \rho d\rho d\beta$, o 1º termo em (AII.5) fica simplesmente multiplicado por um fator 2π . Já o segundo termo anula-se completamente uma vez que $\int_0^{2\pi} \sin(\pm\beta - \omega t'(\rho)) d\beta = 0$. Com estes resultados, podemos escrever este termo da indução magnética, a uma distância z do plano, na forma

$$\vec{B}_{\text{rad}}(z) = \frac{2\pi p_0 \sin^2 \theta \omega_0^2}{c^2} z \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + z^2} \left[\pm \cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) \hat{y} - \sin\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\rho^2 + z^2}\right) \hat{x} \right]. \quad (\text{AII.6})$$

Vamos calcular o valor de $\vec{B}_{\text{rad}}$ sobre o plano emissor, isto é: tomar o limite de (AII.6) quando $z \rightarrow 0$. Para isto é conveniente dividir a integral de 0 a ∞ em duas, uma de 0 a ϵ e a outra de ϵ a ∞ , onde ϵ é um número qualquer. É fácil ver que a segunda destas integrais é convergente quando $z \rightarrow 0$, de modo que sua contribuição desaparece com o fator z que multiplica toda a integral. A primeira integral, por seu turno pode ser majorada por

$$\int_0^\epsilon \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + z^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z^2 + \epsilon^2}{z^2} \right),$$

o que nos leva outra vez a um limite nulo, uma vez que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \ln \left(\frac{1}{z^2} \right) = 0.$$

Vemos então, como já havíamos antecipado na Seção III.B, que a parte de radiação não contribui para o cálculo do campo sobre o próprio plano emissor.

Vejamos agora o que ocorre para pontos longe do plano, fazendo $z \rightarrow \infty$ em (AII.6). Pondo primeiramente $\rho = zu$ obtemos

$$\vec{B}_{\text{rad}}(z) = \frac{2\pi p_0 \sin \theta \omega_0^2}{c^2} z \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{\mu^2 + 1} \begin{cases} \pm \cos\left\{ \frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t \right\} \hat{y} \\ - \sin\left\{ \frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t \right\} \hat{x} \end{cases}, \quad (\text{AII.7})$$

que ainda pode ser escrito como

$$\vec{B}_{\text{rad}}(z) = \frac{2\pi p_0 \sin \theta \omega_0}{c} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \frac{d}{d\mu} \begin{cases} \pm \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{y} \\ - \cos\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{x} \end{cases}, \quad (\text{AII.8})$$

Integrando (AII.8) por partes vem

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{rad}}(z) &= \left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \begin{cases} \pm \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{y} \\ - \cos\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{x} \end{cases} \right]_0^\infty \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \right) \begin{cases} \pm \sin\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{y} \\ - \cos\left(\frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2 + 1} - \omega_0 t\right) \hat{x} \end{cases} \frac{2\pi p_0 \sin \theta \omega_0}{c} d\mu \end{aligned} \quad (\text{AII.9})$$

Tomando agora o limite $z \rightarrow \infty$ vemos que a integral em (AII.9) obviamente se anula, deixando-nos com

$$\vec{B}_{\text{rad}}(z \rightarrow \infty) = \frac{2\pi p \sigma}{c} \omega_0 \sin \theta \begin{cases} \pm \sin\{\omega_0(t-z/c)\} \hat{y} + \\ + \cos\{\omega_0(t-z/c)\} \hat{x}, \end{cases} \quad (\text{AII.10})$$

que corresponde exatamente ao resultado (III.39), exceção feita do retardamento unidimensional z/c , confirmando desta forma as observações feitas no final da Seção (III.B).

Para o campo próximo procede-se da mesma maneira: Usando (AII.2) temos

$$\begin{aligned} \vec{d}(t') \wedge \hat{n} &= \sigma p \omega_0 \sin \theta ds \{ \pm \sin \omega_0 t' \hat{x} + \cos \omega_0 t' \hat{y} \} \wedge \\ &\quad \wedge \{ \cos \theta \hat{z} - \sin \theta \{ \cos \beta \hat{x} + \sin \beta \hat{y} \} \} \\ &= \sigma p \omega_0 \sin \theta ds \{ \cos \theta (\pm \sin \omega_0 t' \hat{y} + \cos \omega_0 t' \hat{x}) + \\ &\quad + \sin \theta (\cos(\beta \mp \omega_0 t')) \hat{z} \}. \end{aligned} \quad (\text{AII.11})$$

Usando (AII.1) podemos escrever:

$$\begin{aligned} d\vec{B}_{\text{prox}} &= \frac{\omega_0 p \sigma \sin \theta}{c R_0^2} ds \left[\cos \theta (\pm \sin \omega_0 t' \hat{y} + \cos \omega_0 t' \hat{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos(\beta \mp \omega_0 t') \hat{z} \right]. \end{aligned}$$

Integrando em β de 0 a 2π ficamos logo com

$$\vec{B}_{\text{prox}}(z) = \frac{2\pi\rho\sigma\omega_0 \text{sen}\theta}{c} z \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \left(\cos(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\rho^2+z^2}) \hat{x} \right. \\ \left. \pm \text{sen}(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\rho^2+z^2}) \hat{y} \right)$$

ou, fazendo $\rho = z\mu$

$$\vec{B}_{\text{prox}}(z) = \frac{2\pi\rho\sigma\omega_0 \text{sen}\theta}{c} \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(\mu^2+1)^{3/2}} \left(\cos(\omega_0 t - \frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2+1}) \hat{x} \right. \\ \left. \pm \text{sen}(\omega_0 t - \frac{\omega_0 z}{c} \sqrt{\mu^2+1}) \hat{y} \right).$$

(AII.11)

É claro de (AII.12) que $\lim_{z \rightarrow \infty} B_{\text{prox}}(z) = 0$, e que

$$\vec{B}_{\text{prox}}(0) = \frac{2\pi\rho\sigma\omega_0 \text{sen}\theta}{c} (\cos\omega_0 t \hat{x} \pm \text{sen}\omega_0 t \hat{y}) \int_0^\infty \frac{\mu d\mu}{(\mu^2+1)^{3/2}} \\ = \frac{2\pi\rho\sigma\omega_0 \text{sen}\theta}{c} (\cos\omega_0 t \hat{x} \pm \text{sen}\omega_0 t \hat{y}),$$

resultados estes que estão novamente de acordo com as discussões feitas em (III.B).

REFERÊNCIAS

1. V.Weisskopf e E.P.Wigner: *Z.Physik* 63, 54 (1930).
2. R.H.Dicke: *Phys.Rev.* 93, 99 (1954).
3. R.Bonifacio e G.Preparata: *Phys.Rev.A*, 2, 336 (1970).
4. M.Dillard e H.Robl: *Phys.Rev.*, 184, 312 (1969).
5. J.H.Eberly e N.E.Rehler: *Phys.Rev.A*, 2, 1607 (1970).
6. R.H.Lemberg: *Phys.Rev.A*, 2, 883 (1970).
7. N.E.Rehler e J.H.Eberly: *Phys.Rev.A*, 3, 1735 (1971).
8. R.K.Nesbet: *Phys.Rev.Lett.*, 27, 553 (1971).
9. I.R.Senitzky: *Phys.Rev.A*, 6, 1175 (1972).
10. J.A.Ackerhalt, P.L.Knight e J.H.Eberly: *Phys.Rev.Lett.*, 30, 456 (1973).
11. S.L.McCall e E.L.Hahn: *Phys.Rev.*, 183, 457 (1969).
12. G.A.P.Munguia: *Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, R.J.*, (1973).
13. R.C.T.da Costa e G.A.P.Munguia: *Phys.Rev.A*, 14, 1745 (1976).
14. R.C.T.da Costa e S.Crestana: *Rev.Bras.Fís.* 8, nº 2 (1978), (a aparecer).
15. R.P.Feynman, F.L.Vernon e R.W.Hellwarth: *J.Appl.Phys.*, 28, 49 (1957).
16. J.D.Jackson: *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, p. 155.
17. I.S.Gradshteyn e I.M.Ryzhik: *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, p.534.
18. V.Merzbacher: *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, p.178.
19. Veja referência 17, p.174.
20. Veja referência 17, p.148.
21. Veja referência 18, p.173.

22. Veja referência 18, p.188.
23. Veja referência 18, p.479.
24. W.Heitler: *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford, p.106.
25. Veja referência 18, p.465.
26. L.Landau e E.Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, Addison Wesley, p.192.
27. O.Baiocchi: *Tese de Mestrado*, COPPE, R.J., 1971.