As Polarizabilidades Elétrica e Magnética do Nucleon e a Teoria de Quarks das Partículas Elementares

Silvestre Ragusa

**Tese apresentada à
Escola de Engenharia de São Carlos,
Universidade de São Paulo,
para a obtenção do título de
Livre Docente**

1971

AS POLARIZABILIDADES ELÉTRICA E MAGNÉTICA DO NUCLEON E A
TEORIA DE QUARKS DAS PARTÍCULAS ELEMENTARES

SILVESTRE RAGUSA

Tese apresentada à
Escola de Engenharia de São Carlos,
Universidade de São Paulo,
para a obtenção do título de
Livre Docente

OK

1971

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo I	
As polarizabilidades elétrica e magnética do <u>proton</u> e <u>neu</u> <u>tron</u>	
1.1) Determinação experimental das polarizabilidades <u>elé</u> <u>trica</u> e <u>magnética</u> do <u>proton</u>	4
1.2) Determinação experimental da polarizabilidade <u>elétr</u> <u>ica</u> do <u>neutron</u>	8
1.3) Cálculos teóricos das polarizabilidades.....	9
Capítulo II	
As expressões completas das polarizabilidades elétrica e magnética do nucleon	
2.1) Introdução	11
2.2) A amplitude de espalhamento	12
2.3) Decomposição do operador de corrente	14
2.4) Decomposição da amplitude de espalhamento	16
2.5) Derivação da identidade de Low	18
2.6) A amplitude de espalhamento na ordem ω^2 : A polarizabilidade elétrica e magnética.....	19
2.7) O termo adicional da polarizabilidade magnética.....	25
2.8) A regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn	29

Capítulo III

O modelo de Quarks Simétrico

3.1) O modelo de quarks.....	32
3.2) Construção das funções de onda	39
3.3) O modelo de oscilador harmônico.....	48

Capítulo IV

A polarizabilidade elétrica do nucleon no modelo de quarks simétrico

4.1) Introdução	50
4.2) As funções de onda da representação 70 , $L = 1^-$	50
4.3) Resultados para as polarizabilidades de <u>proton</u> e <u>neu</u> tron	54

Bibliografia	62
--------------------	----

Conclusões e problemas propostos	65
--	----

CONTRIBUIÇÕES ORIGINAIS

O Capítulo II e o Capítulo IV são inteiramente originais.

No Capítulo II estudamos as expressões das polarizabilidades elétrica e magnética do nucleon, desenvolvendo um método que permitiu resolver o problema da determinação da expressão completa da polarizabilidade magnética.

Quanto à polarizabilidade elétrica, sua expressão é já bem conhecida mas apresentamos uma demonstração mais direta e aparente. O método empregado permitiu obter a expressão completa da parte magnética.

Para a polarizabilidade magnética mostramos que, além de uma parte paramagnética contendo produtos dos elementos de matriz de transição de dipolo magnético, existe uma contribuição diamagnética adicional, que está relacionada com o raio quadrático médio da nuvem mesônica.

Obtemos também uma regra de soma, que reconhecemos ser a versão relativística da regra de Thomas-Reiche-Kuhn, e mostramos que isto implica um valor bem definido para a própria distribuição da nuvem mesônica.

No Capítulo IV calculamos os valores das polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron no esquema da Teoria de Quarks com forças de interação do tipo oscilador harmônico. Tal teoria tem dado uma descrição muito boa para os decaimentos mesônicos e eletromagnéticos das ressonâncias bariônicas e como mostra o cálculo, obtemos para as polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron valores em bom acordo com os resultados experimentais.

Finalmente, os capítulos I e III baseiam-se em seminários que tivemos a oportunidade de ministrar em Centros de Física em São Paulo e Rio de Janeiro.

INTRODUÇÃO

O espalhamento de eletrons tem sido a principal fonte de informação sobre a distribuição de carga e de momento magnético de núcleos e do nucleon (proton e neutron). Assim as experiências realizadas em Stanford¹, de eletrons espalhados em protons e deuterons, permitiram a determinação de uma estrutura eletromagnética do proton e do neutron, mostrando que ambos possuem uma distribuição de carga e momento magnético que se estendem numa região da ordem de 1 fermi (10^{-13} cm).

Entretanto a descrição da estrutura interna das partículas não é exaurida por essas distribuições em si, mas é também necessário conhecermos suas propriedades de polarizabilidade. Em outras palavras, com a idéia da existência de distribuição de carga e de momento magnético das partículas elementares vem-nos imediatamente a indagação a respeito de suas propriedades de deformação sob a ação de campos elétricos e magnéticos.

Para campos não muito intensos o sistema adquire momentos de dipolo elétrico e de dipolo magnético proporcionais respectivamente aos campos elétrico e magnético,

$$\underline{d}_e = \alpha \underline{E} \quad , \quad \underline{d}_m = \beta \underline{H} \quad ,$$

onde α e β são respectivamente as polarizabilidades elétrica e magnética do sistema. As energias de interação elétrica e magnética correspondentes são proporcionais a $\underline{E}^2$ e $\underline{H}^2$. Vemos então que essas propriedades de polarização são aparentes em processos envolvendo dois fotons como é o caso do espalhamento da luz pelo sistema (espalhamento Compton).

Uma teoria completa das interações eletromagnéticas deverá levar em conta a descrição da estrutura das partículas e de suas propriedades de polarização, de modo que é de grande importância tentarmos dar uma descrição fenomenológica dessas propriedades.

Tal programa, aplicado ao espalhamento Compton de nucleons foi iniciado por Low² e por Gell-Mann e Goldberger³. Esses autores consideram a amplitude do espalhamento Compton em nucleons até termos de primeira ordem na frequência do foton incidente e mostraram que tal amplitude está completamente determinada pelas propriedades estáticas do sistema; pela carga (e), massa (M) e momento magnético (μ).

Mais tarde Klein mostrou que para a descrição dos termos quadráticos na frequência do foton, é necessário introduzir, além do raio quadrático médio de carga $\langle r^2 \rangle$, mas dois parâmetros α e β , interpretados como sendo os coeficientes de polarizabilidade elétrica e magnética da partícula. Esses parâmetros foram introduzidos como coeficientes constantes que se originam na forma exata da função de Green na presença de um campo eletromagnético externo.

A ausência de uma forma explicita para α e β não permitia suas satisfatórias estimativas. A forma explicita da polarizabilidade elétrica α foi obtida por Baldin⁵ que também estimou seus limites inferior e superior. A determinação da forma explicita de β foi empreendida por Petrun'kin⁶ que conseguiu obter apenas uma parte, $\bar{\beta}$, da polarizabilidade magnética, aquela que contém produtos dos elementos de matriz de dipolo magnético de transição, tendo ficado em aberto a possibilidade de contribuições adicionais.

No presente trabalho estudamos dois problemas:

- a) derivamos a expressão completa da polarizabilidade magnética do nucleon e
- b) analisamos as polarizabilidades elétricas do proton e neutron à luz da Teoria de Quarks Simétrica.

No Capítulo I introduzimos as polarizabilidades elétrica e magnética do proton e neutron. Analisamos em seguida as suas determinações experimentais e assinalamos cálculos teóricos das polarizabilidades que têm sido feitos.

No Capítulo II derivamos a expressão completa da polarizabilidade magnética. A derivação baseia-se no uso de uma decomposição da corrente eletromagnética devida a Foldy⁷ e no uso da equação da continuidade. Além da parte $\vec{\beta}$ mostraremos que existe uma contribuição $\Delta\vec{\beta}$ relacionada com o raio quadrático médio da nuvem mesônica. Além disso mostraremos como é obtida a versão relativística da regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn e que isto implica um valor bem determinado para a distribuição da nuvem mesônica.

No Capítulo III esboçamos a Teoria de Quarks Simétrica das partículas elementares. Tal teoria tem alcançado relativo sucesso na interpretação e correlacionamento do espectro de ressonâncias, particularmente no que se refere aos seus decaimentos mesônicos e eletromagnéticos.

No Capítulo IV estudamos as polarizabilidades elétricas do proton e neutron à luz da Teoria de Quarks Simétrica. Como veremos os valores obtidos para as polarizabilidades elétricas do proton e neutron estão de acordo com os valores experimentais, o que constitui mais uma evidência em favor do modelo de quarks simétrico.

CAPÍTULO I

AS POLARIZABILIDADES ELÉTRICA E MAGNÉTICA

DO PROTON E NEUTRON

1.1) DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DAS POLARIZABILIDADES ELÉTRICA E MAGNÉTICA DO PROTON

A determinação das polarizabilidades elétrica e magnética do proton tem sido feita através do espalhamento Compton. Sabemos das experiências de espalhamento de elétrons por protons que o proton apresenta uma distribuição de carga e de momento magnético que se estendem numa região da ordem de 10^{-13} cm. Sob a influência de campos elétrico e magnético tal sistema extenso pode sofrer uma deformação e adquirir momentos de dipolo elétrico e magnético induzidos. Em primeira ordem esses momentos são proporcionais aos campos,

$$\underline{d}_e = \alpha \underline{E} \quad , \quad \underline{d}_m = \beta \underline{H} \quad , \quad (1-1)$$

e os coeficientes α e β são chamados respectivamente de polarizabilidade elétrica e magnética. As energias de interação elétrica e magnética correspondentes são

$$H_e = -\frac{1}{2} \alpha \underline{E}^2 \quad H_m = -\frac{1}{2} \beta \underline{H}^2 \quad . \quad (1-2)$$

Comparando a expressão teórica da seção de choque da luz por um

proton puntiforme com o resultado experimental podemos determinar os valores de α e β .

Fácilmente pode-se calcular a seção de choque de um fóton por um proton puntiforme, com carga e , massa M e momento magnético total $\mu = (1 + \lambda) \frac{e\hbar}{2Mc}$, onde $\lambda = 1.793$ é o momento anômalo do proton. Obtem-se⁸

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} = & \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{M} \right)^2 \left\{ 1 + \cos^2\theta - \frac{\omega}{M} \left[2(1 - \cos\theta)(1 + \cos^2\theta) \right] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\omega}{M} \right)^2 \left[(1 - \cos^2\theta)(4 + 3\cos^2\theta) + \left(\frac{\omega}{M} \right)^2 F(\theta) \right] \right\} + O(\omega^3) \end{aligned} \quad (1-3)$$

onde

$$\begin{aligned} F(\theta) = & 2\lambda + \frac{9}{2} \lambda^2 + 3\lambda^3 + \frac{3}{4} \lambda^4 - (4\lambda + 5\lambda^2 + 2\lambda^3) \cos\theta \\ & + \left(2 + \frac{\lambda^2}{2} - \lambda^3 - \frac{\lambda^4}{4} \right) \cos^2\theta \end{aligned} \quad (1-3a)$$

Nessa equação θ é o ângulo de espalhamento e ω é a energia do fóton incidente no proton inicialmente em repouso. Estamos usando o sistema de unidades

$$\hbar = c = 1, \quad e^2 / \hbar c = 1/137$$

Em (1-3) desprezamos os termos de ordem maior que ω^2 . Para $\lambda = 0$ a Eq. (1-3) se reduz a conhecida fórmula de Klein-Nishina.

Levando agora em conta a extensão do proton e a sua deformação a seção de choque assume a expressão^{6,20}

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} - \left(\frac{\omega}{M}\right)^2 e^4 \left[\left(\frac{\langle r_1^2 \rangle}{3} + \frac{\alpha M}{e^2} \right) (1 + \cos^2 \theta) + \frac{2\beta M}{e^2} \cos \theta \right] + O(\omega^3) \quad (1-4)$$

onde $\langle r_1^2 \rangle$ é o raio quadrático médio, α é a polarizabilidade elétrica e β a polarizabilidade magnética.

Da Eq. (1-4) segue imediatamente que o espalhamento a $\theta = \pi/2$ é independente de β . A polarizabilidade elétrica pode então, ser imediatamente determinada comparando a Eq. (1-4) com os dados experimentais a $\theta = \pi/2$.

Experimentalmente mediu-se⁹

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (90^\circ) = (1,10 \pm 0,05) 10^{-32} \text{ cm}^2/\text{sr} \quad ,$$

do que resulta

$$\langle r_1^2 \rangle \frac{M^2}{3} + \alpha \frac{M^3}{e^2} = 16 \pm 5.8 \quad (1-5)$$

Usando os resultados do grupo de Hofstadter¹ para o raio quadrático médio do proton,

$$\sqrt{\langle r_1^2 \rangle} = (0,8 \pm 0,04) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad , \quad (1-6)$$

determinamos $\alpha = (7.5 \pm 4.2) 10^{-43} \text{ cm}^3$.

Se tomarmos também em conta os resultados das Refs. (10,11,12) chega-se a um valor médio 20 ± 9 para o lado direito de (1-5) o que dá $\alpha = (10 \pm 6) 10^{-43} \text{ cm}^3$. Olhando para os outros ângulos pode-se em princípio

determinar também β . Entretanto, devido aos grandes erros experimentais tais determinações de α e β não são muito precisas.

Podemos fazer uso de relações de dispersão como uma fonte extra de informação para levar em conta o espalhamento para a frente, $d\sigma(0^\circ)/d\Omega$ e obter um valor melhor para α e uma estimativa para β . Notemos que, da Eq. (1-4) a seção de choque para frente está relacionado com a soma $\alpha + \beta$. Tal espalhamento para frente não pode presentemente ser medido com precisão mas, por meio de relações de dispersão, pode ser expresso em termos da seção de choque total para a fotoprodução de pions que é experimentalmente bem conhecida. Até a ordem ω^2 tal expressão é dada por^{13,14}

$$\frac{d\sigma(0^\circ)}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{M}\right)^2 \left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{2\mu e}\right)^2 \int_0^\infty d\omega' \frac{\sigma_\pi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} + \left(\frac{\omega}{M}\right)^2 \frac{\lambda^4}{4} \right] + O(\omega^3) \quad (1-7)$$

onde σ_π é a seção de choque total para a fotoprodução de pions com fotons não polarizados.

Da Eq. (1-4) obtemos $d\sigma(0^\circ)/d\Omega$ que comparado com (1-7) dá a relação⁵

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma_\pi(\omega)}{\omega^2} - \frac{e^2}{M} \langle r_1^2 \rangle \quad (1-8)$$

Com os valores experimentais das seções de choque $\sigma_\pi(\omega)$, a integral dispersiva pode ser calculada e obtem-se^{5,9}

$$\alpha + \beta = 7.7 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$$

Tomando fixa a soma das polarizabilidades pode-se calcular pelo método dos mínimos quadrados os valores de α e β que melhor ajustam os dados experimentais para $d\sigma(\theta)/d\Omega$. Na Ref. (9) foi obtido deste modo

$$\alpha = (5,7 \pm 2,2) 10^{-43} \text{ cm}^3, \quad (1-9a)$$

$$\beta = (2 \pm 2) 10^{-43} \text{ cm}^3. \quad (1-9b)$$

1.2) DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA POLARIZABILIDADE ELÉTRICA DO NEUTRON

A determinação da polarizabilidade elétrica do neutron, α_n , tem empregado experiências de espalhamento de neutrons rápidos¹⁵ (≈ 2 Mev) e a pequenos ângulos por núcleos pesados. Além das forças nucleares, atua sobre o neutron que se aproxima o campo Coulombiano do núcleo Ze^2/r^2 . Esse campo Coulombiano atua sobre o momento magnético λ_n do neutron produzindo o chamado espalhamento magnético de Schwinger, e além disso, polariza o neutron que adquirindo um dipolo induzido $\underline{d} = \alpha \underline{E}$, é influenciado pela força

$$\begin{aligned} \underline{F} &= (\underline{d} \cdot \nabla) \underline{E} \\ &= \frac{Ze^2}{r^2} \left[3 (\underline{r} \cdot \underline{d}) \underline{r} - \underline{d} \right], \end{aligned} \quad (1-10)$$

que produz um espalhamento adicional ao nuclear e ao de Schwinger.

A separação do espalhamento devido à polarizabilidade é difícil (é menor e menos para frente que o devido ao momento magnético), e este método tem dado apenas um limite superior de 10^{-40} cm^3 para α_n . Mais recente-

mente Thaler¹⁶ estimou de uma maneira muito mais precisa a polarizabilidade do neutron analisando as distribuições angulares de neutrons lentos (0-300ke por vários elementos, determinadas por Langsdorff et al¹⁷, obtendo o resultado $\alpha_n < 200 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$. Outro resultado obtido por Breit e Rustgi¹⁸, usando dados experimentais de fotoprodução pions é

$$\alpha_n \leq 20 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3 \quad (1-11)$$

Outra maneira ainda de estudar α_n consiste em estudar o espalhamento em deuterons. Entretanto o problema é também difícil pois como estamos a baixa energia o termo de interferência entre o proton e o neutron é importante. Hipóteses mais ou menos plausíveis a respeito do termo de interferência permitem afirmar¹⁹ que a polarizabilidade elétrica do neutron é da mesma ordem que a do proton.

1.3) CÁLCULOS TEÓRICOS DAS POLARIZABILIDADES

Estimativas da polarizabilidades elétrica do proton e neutron baseada em teorias mesônicas, têm dados valores da ordem de

$$\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{f^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^3 = 16 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3, \quad (1-12)$$

onde $e^2/\hbar c = 1/137$ é a constante de acoplamento eletromagnético, $f^2/\hbar c = 0.08$ é a constante de acoplamento piônico e $\hbar/\mu c = 1.4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ é o comprimento de onda Compton do pión.

Assim, usando a teoria do nucleon fixo de Chew com fatores de forma gaussiano e exponencial e com um parâmetro de corte igual a $5.6 \mu c/\hbar$, Barashenkov e Kaiser²⁰ estimaram $\alpha_p = \alpha_n = 15,7 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$ e $14,4 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$ respectivamente. Para a polarizabilidade magnética obtiveram $\beta_p = \beta_n = -0,50 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$ e $-0,85 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3$ respectivamente. Esses valores não contradizem os valores experimentais.

Usando relações de dispersão Sawada²¹ determinou os valores

$$\alpha_p = (7.5 \pm 2.5) \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3, \quad (1-13a)$$

$$\alpha_n = (10 \pm 4) \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3. \quad (1-13b)$$

No contexto da Álgebra de Correntes do SU(3) o presente autor²² determinou

$$\alpha_p = 7.8 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3, \quad (1-14a)$$

$$\alpha_n = 3.9 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3, \quad (1-14b)$$

que estão em acordo com os dados experimentais.

No Capítulo IV fazemos uma determinação das polarizabilidades elétricas no Modelo Simétrico de Quarks das partículas elementares e como veremos, os resultados estão também em bom acordo com os dados experimentais.

CAPÍTULO II

AS EXPRESSÕES COMPLETAS DAS POLARIZABILIDADES ELÉTRICA E MAGNÉTICA DO NUCLEON

2.1) INTRODUÇÃO

A forma explícita da polarizabilidade elétrica α foi obtida por Baldin⁵ e independentemente por Petrun'kin⁶. A determinação da forma explícita da polarizabilidade magnética β foi empreendida por Petrun'kin⁶ que conseguiu obter apenas uma parte $\bar{\beta}$ que contém produtos dos elementos de matriz de dipolo magnético de transição. A questão da existência ou não de termos adicionais à polarizabilidade magnética tem sido um problema em aberto.

No presente capítulo derivamos a expressão completa da polarizabilidade magnética. Mostramos que existe uma contribuição adicional $\Delta\beta$ para β e que tal contribuição está relacionada com o raio quadrático médio da distribuição da nuvem mesônica.

Trabalhamos no esquema da teoria específica de Low² do espalhamento da luz por um sistema de spin 1/2 localmente acoplado a um campo mesônico. A derivação baseia-se no uso de uma decomposição da corrente eletromagnética devida a Foldy⁷ e na equação da continuidade. Depois de obter uma expressão conveniente para a amplitude de espalhamento, mostramos, com o propósito de orientação, como a identidade de Low² pode ser reobtida.

Estudando a obtida decomposição da amplitude mostramos que a sua primeira parte contém todos os resultados já conhecidos: rederivamos de um

modo diferente a amplitude de Low, a expressão da polarizabilidade elétrica e a primeira contribuição à polarizabilidade magnética, que contém produtos de elementos da matriz de dipolos magnéticos.

Analisando os últimos termos da decomposição da amplitude obtemos a contribuição adicional para a polarizabilidade magnética. Mostramos que essa contribuição está relacionada com o raio quadrático médio da distribuição da nuvem mesônica. Em seguida mostramos como obter a versão relativística da regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn e que isto implica um valor bem definido para a própria densidade de distribuição da nuvem mesônica.

2.2) A AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO

A amplitude de espalhamento da luz por um sistema de spin - 1/2, localmente acoplada a um campo mesônico pseudoscalar é dada por²

$$S = - \frac{e_i e_j}{(4\omega\omega')^{1/2}} \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \langle p' | \theta(x'_0 - x_0) [j_i(x')] \rangle ,$$

$$j_j(x) \equiv |p\rangle = \frac{2ie^2}{(4\omega\omega')^{1/2}} (e' \cdot e) \int dx e^{i(k-k')x} \langle p' | \phi^*(x) \phi(x) | p \rangle ,$$

(2-1)

onde o foton vai do estado $(\underline{k}, \omega; \underline{e})$ para o estado $(\underline{k}', \omega'; \underline{e}')$: $|\underline{k}| = \omega$, $|\underline{k}'| = \omega'$, $\underline{e} \cdot \underline{k} = \underline{e}' \cdot \underline{k}' = 0$, e p e p' são os momenta inicial e final do nucleon. $\phi(x)$ é o operador de campo do meson carregado e $j_\mu(x)$ é o operador densidade de corrente. No nosso caso

$$j_{\mu}(x) = e \left[\partial_{\mu} \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) - \partial_{\mu} \phi_2(x) \cdot \phi_1(x) \right] + ie \bar{\psi}(x) \frac{1+\tau_3}{2} \gamma_{\mu} \psi(x) , \quad (2-2)$$

e

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2} , \quad \phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2} . \quad (2-3)$$

Por invariância translacional podemos extrair uma função delta no espaço de momento tridimensional e escrever

$$S = - \frac{1}{(4\pi\omega)^{1/2}} e_i^{\dagger} g_{ij} e_j , \quad (2-4)$$

onde

$$g_{ij} = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(P_f - P_i) \times \langle p' | \left\{ \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}'} \theta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \left[j_i(\mathbf{x}') , j_j(\mathbf{x}) \right] + 2ie^2 \delta_{ij} \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}} \phi^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \right\} | p \rangle , \quad (2-5)$$

com $P_f = p' + k'$, $P_i = p + k$ e V é um volume tridimensional que provém da extração da função delta tridimensional no espaço de momento. O limite $V \rightarrow \infty$ deve sempre ser subentendido.

2.3) DECOMPOSIÇÃO DO OPERADOR DE CORRENTE

Usaremos uma conveniente decomposição da corrente eletromagnética devida a Foldy⁷ que é baseada na identidade

$$\underline{e} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \int_0^1 ds \nabla(\underline{e}\cdot\vec{r} e^{i\vec{s}k\cdot\vec{r}}) - i \int_0^1 s ds e^{i\vec{s}k\cdot\vec{r}} (\underline{e} \times \vec{k}) \times \vec{r} \quad (2-6)$$

Contraindo essa equação com $\underline{j}(\underline{x})$ e fazendo uma integração espacial obtemos, depois de uma integração por partes e utilização da equação da continuidade

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{x}) + \frac{\partial \rho(\underline{x})}{\partial x_0} = 0 \quad (2-7)$$

a seguinte decomposição⁷

$$\int d\underline{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} j_i(\underline{x}) = \frac{\partial D_i(\underline{k}; x_0)}{\partial x_0} - \epsilon_{imn} k_m M_n(\underline{k}; x_0) \quad (2-8)$$

onde

$$D_i(\underline{k}; x_0) = \int_0^1 ds \int d\underline{r} x_i \rho(\underline{x}) e^{i\vec{s}k\cdot\vec{r}} \quad (2-9)$$

e

$$M_i(\underline{k}; x_0) = \int_0^1 s ds \int d\underline{r} [\underline{r} \times \underline{j}(\underline{r})]_i e^{i\vec{s}k\cdot\vec{r}} \quad (2-10)$$

Mudando para operadores independentes do tempo pela transformação

$$j_{\mu}(x) = e^{iHx_0} j_{\mu}(\underline{r}) e^{-iHx_0} , \quad (2-11)$$

podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} D_i(k; x_0) \\ M_i(k; x_0) \end{Bmatrix} = e^{iHx_0} \begin{Bmatrix} D_i(k) \\ M_i(k) \end{Bmatrix} e^{-iHx_0} , \quad (2-12)$$

onde

$$D_i(k) = \int_0^1 ds \int d\underline{r} x_i(\underline{r}) e^{isk \cdot \underline{r}} , \quad (2-13)$$

e

$$M_i(k) = \int_0^1 ds \int d\underline{r} [\underline{r} \times \underline{j}(\underline{r})]_i e^{isk \cdot \underline{r}} . \quad (2-14)$$

Para $k = 0$, D_i é o operador de dipolo elétrico e M_i é o operador de dipolo magnético,

$$D_i(k = 0) = d_i , \quad (2-15a)$$

$$M_i(k = 0) = m_i . \quad (2-15b)$$

É fácil ver que

$$iq_i D_i(k; x_0) = \int d\underline{r} e^{ik \cdot \underline{r}} \rho(x) - Q , \quad (2-16a)$$

$$iq_1 D_1(k) = \int d\vec{r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rho(\vec{r}) - Q, \quad (2-16b)$$

onde $Q = \int d\vec{r} \rho(\vec{r})$ é a carga total.

2.4) DECOMPOSIÇÃO DA AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO

Usando para $j_j(x)$ na Eq. (2-5) a decomposição da corrente da Eq. (2-8), podemos escrever após uma integração temporal por partes,

$$\begin{aligned} g_{ij} = & \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(P_f - P_i) \langle p' | \{ (i \int dx_0 dx' e^{-ik'x'} e^{-i\omega x_0} \\ & + \theta(x'_0 - x_0) [j_i(x'), \omega D_j(k; x_0) - (k \times M(k; x_0))_j] \\ & + \int dx_0 dx' e^{-ik'x'} e^{-i\omega x_0} \delta(x'_0 - x_0) [j_i(x'), D_j(k; x_0)] \\ & + 2ie^2 \delta_{ij} \int dx e^{i(k-k')x} \phi^*(x) \phi(x) \} | p \rangle \quad (2-17) \end{aligned}$$

Em seguida aplicamos a decomposição dada na Eq. (2-8) para $j_i(x')$ no primeiro termo do segundo membro da Eq. (2-17) e obtemos, tomando o núcleon inicialmente em repouso,

$$g_{ij} = (2\pi)^3 \delta(P_f - P_i) [A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij} + F_{ij}], \quad (2-18)$$

onde

$$A_{ij} = \frac{1}{V} \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega'x'_0} e^{-i\omega x_0} \\ \times \omega \theta(x'_0 - x_0) \langle p' | [D_i(-\underline{k}'; x'_0), D_j(\underline{k}; x_0)] | 0 \rangle, \quad (2-19a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{V} \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega'x'_0} e^{-i\omega x_0} \\ \times \omega' \epsilon_{jrs} k_s \theta(x'_0 - x_0) \langle p' | [D_i(-\underline{k}'; x'_0), M_r(\underline{k}; x_0)] | 0 \rangle, \quad (2-19b)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{V} \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega'x'_0} e^{-i\omega x_0} \\ \times \omega \epsilon_{ilm} k'_m \theta(x'_0 - x_0) \langle p' | [M_l(-\underline{k}'; x'_0), D_j(\underline{k}; x_0)] | 0 \rangle, \quad (2-19c)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{V} \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega'x'_0} e^{-i\omega x_0} \\ \times \epsilon_{jrs} k_s \epsilon_{ilm} k'_m \theta(x'_0 - x_0) \langle p' | [M_l(-\underline{k}'; x'_0), M_r(\underline{k}; x_0)] | 0 \rangle, \quad (2-19d)$$

e

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int dx_0 dx'_0 e^{i\omega'x'_0} e^{-i\omega x_0} \\ \times \delta(x'_0 - x_0) \langle p' | \left\{ \int dx' e^{-ik' \cdot x'} [j_i(x'), D_j(\underline{k}; x_0)] \right. \\ \left. - i\omega [D_i(-\underline{k}'; x'_0), D_j(\underline{k}; x_0)] \right. \\ \left. - i \epsilon_{jrs} k_s [D_i(-\underline{k}'; x'_0), M_r(\underline{k}; x_0)] \right\} | 0 \rangle, \quad (2-20)$$

e

$$F_{ij} = \frac{2ie^2}{V} \delta_{ij} \langle p' | \int dx e^{i(k-k')x} \phi^*(x') \phi(x) | 0 \rangle, \quad (2-21)$$

2.5) DERIVAÇÃO DA IDENTIDADE DE LOW

Antes de estudarmos nossa decomposição da amplitude de espalhamento, vamos indicar, com o propósito de orientação, como a identidade de Low⁽¹⁾ pode ser reobtida. Fazendo uso da Eq. (2-16a) obtém-se das Eqs. (2-18), (2-19), (2-20) e (2-21),

$$\begin{aligned} k_i^j g_{ij} k_j &= \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(P_f - P_i) \\ &\times \langle p' | \{ \omega' \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \theta(x'_0 - x_0) [\rho(x'), \rho(x)] \\ &- ik_i^j \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \delta(x'_0 - x_0) [j_j(x'), \rho(x)] \\ &- i\omega \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \delta(x'_0 - x_0) [\rho(x'), \rho(x)] \\ &+ 2e^2 \underline{k} \cdot \underline{k}' \int dx e^{i(k-k')x} \phi^*(x) \phi(x) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2-22)$$

Da Eq. (2-2) e das relações canônicas de comutação para os operadores de campo deriva-se

$$\delta(x'_0 - x_0) [\rho(x'), j_j(x)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(x'_0 - x_0) ie^2 \{ (\phi^*(x')\phi(x) + \phi^*(x)\phi(x')) \partial_j \delta(x' - x) \\
&- \delta(x' - x) (\phi^*(x')\partial_j \phi(x) + \partial_j \phi^*(x)\phi(x')) \}, \quad (2-23)
\end{aligned}$$

e

$$\delta(x'_0 - x_0) | \rho(x'), \rho(x) | = 0 \quad (2-24)$$

Usando a Eq. (2-23) resulta que o segundo e último termos no segundo membro da Eq. (2-22) cancelam-se e pela (2-24) o terceiro é nulo, assim como, pela Eq. (2-24). Portanto, recolocando a função delta de momento, resulta

$$k_i^1 g_{ij} k_j = \langle p' | \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \theta(x'_0 - x_0) | \rho(x'), \rho(x) | | 0 \rangle, \quad (2-25)$$

que é a identidade de Low⁽¹⁾.

2.6) A AMPLITUDE DE ESPALHAMENTO NA ORDEM ω^2 :

AS POLARIZABILIDADES ELÉTRICA E MAGNÉTICA

Retornemos às Eqs. (2-18) e (2-21). Como mostraremos em seguida os quatro primeiros termos da Eq. (2-18), $A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}$, contêm todos os resultados já conhecidos, isto é, a amplitude de Low⁽¹⁾, a equação da polarizabilidade elétrica e a primeira contribuição para a polarizabilidade magnética, a que contém produtos os elementos de matriz de transição

do dipole magnético⁽⁵⁾.

Como veremos em seguida, a parte restante, $E_{ij} + F_{ij}$ dá a contribuição adicional à polarizabilidade. Consideremos então os quatro primeiro termos da Eq.(2-18). Fazendo uso da Eq.(2-16a) temos

$$k_i^f A_{ij} k_j = \frac{\omega \omega^f}{V} \langle p' | \int dx dx' e^{ikx} e^{-ik'x'} \theta(x'_0 - x_0) | \rho(x') \rangle, \rho(x) | 0 \rangle \quad (2-26)$$

Inserindo um sistema completo de estados intermediários obtém-se

$$k_i^f A_{ij} k_j = \frac{(2)}{i} (E_f - E_i) \times \omega \omega^f \sum_n \left[\frac{\langle p' | \rho | n, \underline{k} \rangle \langle n, \underline{k} | \rho | 0 \rangle}{E_n(\underline{k}) - M - \omega} + \frac{\langle p' | \rho | n, -\underline{k}' \rangle \langle n, -\underline{k}' | \rho | 0 \rangle}{E_n(\underline{k}') - M + \omega'} \right], \quad (2-27)$$

onde pusemos $\delta(\underline{P}_f - \underline{P}_i) = \delta(0) = V/(2\pi)^3$, pois uma função delta tridimensional já está presente na Eq.(2-18). Agora separamos o estado intermediário de um nucleon e escrevemos

$$k_i^f A_{ij} k_j = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) k_i^f [A_{ij}^{(N)} + A_{ij}] k_j, \quad (2-28)$$

onde

$$k_i^f A_{ij}^{(N)} k_j = \omega \omega^f \sum_{\sigma} \left[\frac{\langle p' | \rho | \sigma, \underline{k} \rangle \langle \sigma, \underline{k} | \rho | 0 \rangle}{E(\underline{k}) - M - \omega} + \frac{\langle p' | \rho | \sigma, -\underline{k}' \rangle \langle \sigma, -\underline{k}' | \rho | 0 \rangle}{E(\underline{k}') - M + \omega'} \right], \quad (2-29)$$

e usando a Eq. (2-16b) podemos escrever a parte excitada do seguinte modo

$$k_i' \bar{A}_{ij} k_j = \frac{k_i' k_j}{V^2} \omega \omega' \sum_{n'} \left[\frac{\langle p' | D_i(-\underline{k}') | n', \underline{k} \rangle \langle n', \underline{k} | D_j(\underline{k}) | 0 \rangle}{E_n(\underline{k}) - M - \omega} + \frac{\langle p' | D_j(\underline{k}) | n', -\underline{k}' \rangle \langle n', -\underline{k}' | D_i(\underline{k}') | 0 \rangle}{E_n(\underline{k}') - M + \omega'} \right] \quad (2-20)$$

pois para a parte excitada o termo de carga na Eq. (2-16b) não pode contribuir e isto permite escrever

$$\begin{aligned} \langle p' | \rho(0) | n', \underline{k} \rangle &= \frac{1}{V} \langle p' | \int d\underline{r} \rho(\underline{r}) e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{r}} | n', \underline{k} \rangle \\ &= - \frac{i k_i'}{V} \langle p' | D_i(-\underline{k}') | n', \underline{k} \rangle \quad , \end{aligned} \quad (2-31a)$$

$$\langle n', \underline{k} | \rho(0) | 0 \rangle = \frac{i k_i}{V} \langle n', \underline{k} | D_j(\underline{k}) | 0 \rangle \quad . \quad (2-31b)$$

Entre estados de proton a corrente eletromagnética é

$$\begin{aligned} \langle p' | j_\mu | p \rangle &= i \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma_\mu - F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \frac{P_\mu}{2M} - i \left(\frac{F_1(q^2)}{2M} + F_2(q^2) \right) \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \quad , \end{aligned} \quad (2-32)$$

onde $q = p' - p$, $P = p' + p$ e $F_1(0) = e$, $F_2(0) = \lambda$, o momento magnêtico anômalo da partícula. Usando isto, segue da Eq. (2-29) que

$$A_{ij}^{(N)} = -\frac{F_1(\omega^2)}{M} \delta_{ij} + \frac{i\omega}{M} \left(2e\lambda + \frac{e^2}{2M} \right) \varepsilon_{ijk} \sigma_k + O_N(\omega^2), \quad (2-33)$$

onde $F_1(\omega^2) = e (1 - \omega^2 \langle r_1^2 \rangle / 6)$ é o fator de forma de Dirac e o último termo indica todas as contribuições da ordem ω^2 que contêm somente as propriedades estáticas do nucleon, carga e momento magnético.

Na Eq. (2-29) incluímos não somente o estado intermediário de um nucleon mas também os estados intermediários que contêm um par nucleon-antinucleon (diagramas zig-zag). Como é bem sabido²³ esses diagramas podem ser levados em conta fazendo a soma sobre estados de energia positiva e negativa do termo do nucleon intermediário. Esses diagramas são da ordem ω^2 e suas contribuições estão incluídas em $O_N(\omega^2)$ na Eq. (2-33). Excluímos esses diagramas de nucleon-antinucleon da soma sobre n' na Eq. (2-30) para seguir a definição usual das polarizabilidades. Considerando agora a Eq. (2-30) vemos que $\bar{A}_{ij}$ é pelo menos da ordem ω^2 . Na ordem ω^2 podemos colocar dentro da soma sobre os estados excitados todos os momentos igual a zero e fazendo uso da Eq. (2-16a) temos, em ordem mais baixa,

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\omega^2}{v^2} \sum_{n'} \left[\frac{\langle 0 | d_i | n', 0 \rangle \langle n', 0 | d_j | 0 \rangle}{E_{n'}(0) - M} + (i \leftrightarrow j) \right]. \quad (2-34a)$$

O coeficiente de ω^2 no segundo membro dessa equação dever ser da forma $\bar{\alpha} \delta_{ij}$ e escrevemos

$$\bar{A}_{ij} = \omega^2 \bar{\alpha} \delta_{ij} \quad (2-35)$$

onde

$$\bar{\alpha} \delta_{ij} = \frac{1}{V^2} \sum_{n'} \left[\frac{\langle 0 | d_i | n', 0 \rangle \langle n', 0 | d_j | 0 \rangle}{E_{n'}(0) - M} + (i \leftrightarrow j) \right], \quad (2-25)$$

e $\bar{\alpha}$ é a polarizabilidade elétrica do nucleon⁽⁴⁾. Coletando os resultados das Eqs. (2-33) e (2-39b) temos da Eq. (2-28),

$$\begin{aligned} A_{ij} = & \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \\ & \times \left[\left[\frac{-e^2}{M} \delta_{ij} + \frac{i}{M} (2e\lambda + \frac{e^2}{2M}) \epsilon_{ijk} \alpha_k + O_N(\omega^2) \right] \right. \\ & \left. + (\bar{\alpha} + \Delta\bar{\alpha}) \omega^2 \delta_{ij} \right], \end{aligned} \quad (2-36a)$$

onde

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{e^2}{3M} \langle r_1^2 \rangle, \quad (2-36b)$$

e o termo em colchete contém apenas as propriedades estáticas do nucleon. O raio quadrático médio é às vezes também considerado um termo de polarizabilidade.

Consideremos agora o segundo termo B_{ij} na Eq. (2-18). Usando a Eq. (2-16a) temos de (2-19b)

$$-ik_i^j B_{ij} = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) (-ik_i^j) \left[B_{ij}^{(N)} + \bar{B}_{ij} \right], \quad (2-37)$$

onde

$$-ik_i^j B_{ij}^{(N)} = \omega' \epsilon_{jrs} k_s \sum_{\sigma} \left[\frac{\langle p' | \rho | \sigma, \underline{k} \rangle \langle \sigma, \underline{k} | M_r(\underline{k}) | 0 \rangle}{E(\underline{k}) - M - \omega} \right] +$$

$$+ \frac{\langle p' | M_r(k) | \sigma, -k' \rangle \langle \sigma, -k' | p | 0 \rangle}{E(k') - M + \omega'} \quad (2-38)$$

e usando (2-16b) para a parte excitada

$$\begin{aligned} -ik_i^j \bar{E}_{ij} = \omega' \epsilon_{jrs} k_s (-ik_i^j) \sum_{n'} & \left[\frac{\langle p' | D_i(-ik') | n', k \rangle \langle n', k | M_r(k) | 0 \rangle}{E_{n'}(k) - M - \omega} \right. \\ & \left. + \frac{\langle p' | M_r(k) | n', -k' \rangle \langle n', -k' | D_i(-k') | 0 \rangle}{E_{n'}(k') - M + \omega'} \right] \quad (2-39) \end{aligned}$$

Entre estados de nucleon temos da Eq. (2-32)

$$\langle p' | M_i | p \rangle = \mu \bar{u}(p') \sigma_i u(p) \quad (2-40)$$

onde $\mu = \lambda + e/2M$ é o momento magnético total. Segue da Eq. (2-38) que

$$B_{ij}^{(N)} = - \frac{e\mu}{M\omega} k_i (\sigma \times k)_j + O_N(\omega^2) \quad (2-41)$$

Da Eq. (2-39) vemos que na ordem ω^2 , $\bar{E}_{ij}$ não pode contribuir pois podemos colocar dentro da soma sobre os estados excitados todos os momentos iguais a zero e isto não dará contribuição devido as paridades opostas dos dipolos elétrico e magnético. Portanto

$$B_{ij} = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \left[- \frac{e\mu}{M\omega} k_i (\sigma \times k)_j + O(\omega^2) \right] \quad (2-42)$$

Utilizando o mesmo raciocínio faremos para o terceiro termo da Eq. (2-19)

$$C_{ij} = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \left[-\frac{e\mu}{M\omega'} (\underline{\sigma} \times \underline{k}')_i k_j^i + O(\omega^3) \right]. \quad (2-43)$$

Por considerações análogas teremos para D_{ij} da Eq.(2-19d), depois de contrair com $e_i^i e_j$ para facilitar a notação,

$$e_i^i D_{ij} e_j = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \left\{ \left[-\frac{2i\mu^2}{\omega} (\underline{\sigma}, (\underline{k}' \times \underline{e}') \times (\underline{k} \times \underline{e})) + O_N(\omega^2) \right] + \bar{\beta} (\underline{k}' \times \underline{e}', \underline{k} \times \underline{e}) \right\}, \quad (2-44)$$

onde $\bar{\beta}$ é dado por

$$\bar{\beta} \delta_{ij} = \frac{1}{v^2} \sum_{n'} \left[-\frac{\langle 0 | \underline{m}_i | n', 0 \rangle \langle n', 0 | \underline{m}_j | 0 \rangle}{E_{n'}(0) - M} + (i \leftrightarrow j) \right], \quad (2-45)$$

e dá a primeira contribuição para a polarizabilidade magnética do nucleon ⁽⁵⁾

Coletando os resultados das Eqs.(2-36a), (2-42), (2-43) e (2-44), teremos para os quatro primeiros termos no segundo membro da Eq.(2-18)

$$e_i^i (A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} + D_{ij}) e_j = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \left[-e_i^i g_{ij} e_j + e_i^i \bar{g}_{ij} e_j \right], \quad (2-46)$$

onde

$$e_i^i g_{ij}^{(N)} e_j = \frac{-e^2}{M} \underline{e} \cdot \underline{e}' + \frac{i\omega}{M} \left(2e\lambda + \frac{e^2}{2M} \right) (\underline{\sigma}, \underline{e}' \times \underline{e})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e\mu}{M\omega} \left[(\underline{\sigma} \cdot \underline{k}' \times \underline{e}') (\underline{k}' \cdot \underline{e}) - (\underline{\sigma} \cdot \underline{k} \times \underline{e}) (\underline{k} \cdot \underline{e}') \right] \\
& + \frac{2i\mu^2}{\omega} (\underline{\sigma} \cdot (\underline{k}' \times \underline{e}') \times (\underline{k} \times \underline{e})) \\
& + \bar{O}_N(\omega^2) \quad , \quad (2-47)
\end{aligned}$$

contêm apenas as propriedades estáticas do nucleon e

$$e_i' \bar{g}_{ij} e_j = (\bar{\alpha} + \Delta\bar{\alpha}) \omega^2 \underline{e} \cdot \underline{e}' + \bar{\beta} (\underline{k}' \times \underline{e}', \underline{k} \times \underline{e}) \quad (2-48)$$

A esta expressão temos que juntar $E_{ij} + F_{ij}$, que como veremos dá uma adicional contribuição $\Delta\bar{\beta}$, para a polarizabilidade magnética. Até a ordem ω a amplitude de espalhamento é dada somente pela Eq. (2-47) e reproduzimos então o resultado derivado por Low⁽¹⁾. A Eq. (2-48) junto com as Eqs. (2-35), (2-36b) e (2-45) reproduz os conhecidos resultados de Baldin⁴ e Petrun'kin⁵.

2.7) O TERMO ADICIONAL DA POLARIZABILIDADE MAGNÉTICA

Chegamos agora ao principal problema que é a determinação da contribuição adicional para a polarizabilidade magnética. Como já antecipamos esse termo provem de $E_{ij} + F_{ij}$. Considere F_{ij} na Eq. (2-20). Esta parte da amplitude de espalhamento é simétrica pela troca $i \leftrightarrow j$, $\underline{k}_\mu \leftrightarrow -\underline{k}'_\mu$ pois A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} e D_{ij} o são. Isto é equivalente a dizer que na Secção IV nós poderíamos ter começado tudo com $j_1(x')$ em vez de $j_j(x)$. Podemos então escrever

$$E_{ij} = \frac{2\pi}{V} \delta(E_f - E_i)$$

$$\times \frac{1}{2} \{ \langle p' | \int d\underline{x} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} [j_j(\underline{x}), D_i(-\underline{k}')]] - i \epsilon_{jrs} k_s$$

$$\times [D_i(-\underline{k}'), M_m(\underline{k})] |0\rangle + (i \leftrightarrow j, k_\mu \leftrightarrow -k'_\mu) \quad , \quad (2-49)$$

onde fizemos uso da Eq.(2-24) para eliminar o termo que contém o comutador dos D's.

Usando as Eqs.(2-13) e (2-23) encontramos para o primeiro comutador na (2-49):

$$\begin{aligned} & \int d\underline{x} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} [j_j(\underline{x}), D_i(-\underline{k}')]] \\ & \times -2ie^2 \int d\underline{x} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \int_0^1 ds (\delta_{ij} - iex_i k'_j) e^{-is \underline{k}' \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \quad . \end{aligned} \quad (2-50)$$

Usando a identidade

$$\int_0^1 ds (1 - is \underline{k}' \cdot \underline{x}) e^{-is \underline{k}' \cdot \underline{x}} = e^{-i \underline{k}' \cdot \underline{x}} \quad , \quad (2-51)$$

teremos

$$\begin{aligned} & \int d\underline{x} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} [j_j(\underline{x}), D_i(-\underline{k}')]] = -2ie^2 \delta_{ij} \int d\underline{x} e^{i(\underline{k}-\underline{k}') \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \\ & + 2e^2 \int d\underline{x} \int_0^1 s ds e^{i(\underline{k}-s\underline{k}') \cdot \underline{x}} (\delta_{ij} \underline{k}' \cdot \underline{x} - k'_j x_i) \quad . \end{aligned} \quad (2-52)$$

Note que o primeiro termo do segundo membro dessa equação cancela o termo F_{ij} na Eq. (2-18).

Vamos agora do segundo termo da Eq. (2-49). Usando as Eqs. (2-19), (2-14) e (2-23) derivamos

$$\begin{aligned} \left[D_i(-\underline{k}'), M_r(\underline{k}) \right] &= 2ie^2 \int d\underline{x} \int_0^1 s ds \int_0^1 ds' e^{i(\underline{s}\underline{k}-s'\underline{k}') \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \\ &\times \{ \epsilon_{rmi} x_n - is' \epsilon_{mt} x_n k'_t x_i \} \quad , \quad (2-53) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} -i \epsilon_{jrs} k_s \left[D_i(-\underline{k}'), M_r(\underline{k}) \right] &= 2e^2 \int d\underline{x} \int_0^1 s ds \int_0^1 ds' e^{i(\underline{s}\underline{k}-s'\underline{k}') \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \\ &\times \{ \delta_{ij} \underline{k} \cdot \underline{x} - k_i x_j - is' (\underline{k} \cdot \underline{x} x'_j x_i - k'_j x_i - \underline{k} \cdot \underline{k}' x_i x_j) \} \quad . \quad (2-54) \end{aligned}$$

Adicionando as Eqs. (2-52) e (2-54) e usando novamente a Eq. (2-51) obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(2)} &= \frac{2\pi}{V} \delta(E_f - E_i) \langle p' | \{ -2ie^2 \delta_{ij} \int d\underline{x} e^{i(\underline{k}-\underline{k}') \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \\ &+ \frac{2e^2}{i} \int d\underline{x} \int_0^1 s ds \int_0^1 s' ds' e^{i(\underline{s}\underline{k}-s'\underline{k}') \cdot \underline{x}} \phi^*(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \\ &\times \left[-\delta_{ij} (\underline{k}' \cdot \underline{x})(\underline{k} \cdot \underline{x}) + (\underline{k} \cdot \underline{x}) k'_j x_i + (\underline{k}' \cdot \underline{x}) k_i x_j - (\underline{k} \cdot \underline{k}') x_i x_j \right] \} | 0 \rangle \quad . \end{aligned}$$

Quando somado com F_{ij} dado na Eq. (2-21), somente o segundo termo de (2-55) sobreviverá. Esse termo é certamente da ordem ω^2 e maior. Na ordem

ω^2 obtemos

$$E_{ij} + F_{ij} = \frac{2}{V} (E_f - E_i)$$

$$\frac{2e}{i} \frac{1}{4} \langle 0 | \int d\underline{x} \phi^{\dagger}(\underline{x}) \phi(\underline{x}) \{ -\delta_{ij} (\underline{k}' \cdot \underline{x}) (\underline{k} \cdot \underline{x}) + (\underline{k} \cdot \underline{x}) k'_j x_i + (\underline{k}' \cdot \underline{x}) k_i x_j - (\underline{k} \cdot \underline{k}') x_i x_j \} | 0 \rangle \quad (2-56)$$

Considere por exemplo o termo contendo $x_i x_j$. Podemos escrever

$$x_i x_j = (x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \quad (2-57)$$

O primeiro termo do segundo membro dessa equação dá na Eq. (7-56) um termo de quadrupolo da densidade $\phi^{\dagger} \phi$, cujo elemento de matriz entre estados de spin-1/2 em repouso é naturalmente zero. Resta-nos então o raio quadrático médio da densidade $\phi^{\dagger} \phi$. Obtemos então

$$g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(3)} = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) (\delta_{ij} \underline{k} \cdot \underline{k}' - k_i k'_j) \Delta \bar{\beta} \quad (2-58a)$$

$$e_i' (g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(3)}) e_j = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) (\underline{k}' \times \underline{e}', \underline{k} \times \underline{e}) \Delta \bar{\beta} \quad (2-58b)$$

onde

$$\Delta \bar{\beta} = - \frac{e^2}{3V} \langle 0 | \int d\underline{x} \phi^{\dagger}(\underline{x}) \phi(\underline{x}) r^2 | 0 \rangle \quad (2-59)$$

que dá a contribuição adicional à polarizabilidade magnética que estamos procurando.

Junto com a Eq. (2-46) temos então da Eq. (2-18) e Eq. (2-4)

$$S = e_i' g_{ij} e_j = \frac{(2\pi)^4}{i} \delta(p' + k' - p - k) \{ e_i' g_{ij}^{(N)} e_j + \omega^2 \underline{e} \underline{e}' + (\underline{k}' \times \underline{e}', \underline{k} \times \underline{e}) \} . \quad (2-60)$$

onde

$$\alpha = \bar{\alpha} + \Delta\alpha , \quad (2-61)$$

e

$$\bar{\beta} = \bar{\beta} + \Delta\bar{\beta} . \quad (2-62)$$

Como vemos a contribuição adicional à polarizabilidade magnética vem do raio quadrático médio da distribuição da nuvem mesônica.

2.8) A REGRA DE SOMA DE THOMAS-REICHE-KUHN

Como vimos na última secção o raio quadrático médio da distribuição da nuvem mesônica está relacionada com uma parte da polarizabilidade magnética. Queremos agora como obter a regra de Thomas-Reiche-Kuhn e que valor isto implica para a própria densidade $\phi^* \phi$. Em ordem mais baixa sabemos das Eqs. (2-47) e (2-60) que a amplitude de espalhamento é dada pelo limite Thomson

$$g_{ij}(0) = \frac{(2\pi)^4}{i} \delta(p_f - p_i) \frac{(-e^2)}{M} \delta_{ij} . \quad (2-63)$$

Se voltamos a Eq.(2-5) e inserimos um sistema completo de esta
dos intermediários obtemos

$$\begin{aligned}
 g_{ij} = & \frac{(2\pi)^4}{i} (P_f - P_i) \left(\sum_n \left[\frac{\langle p' | j_i^{(0)} | n, k \rangle \langle n, k | j_i^{(0)} | 0 \rangle}{E_n(k) - M - \omega} \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\langle p' | j_i^{(0)} | n, -k' \rangle \langle n, -k' | j_i^{(0)} | 0 \rangle}{E_n(k') - M + \omega'} \right] \\
 & \left. - 2e^2 \delta_{ij} \langle p' | \phi^{\dagger}(0) \phi(0) | 0 \rangle \right) \quad (2-64)
 \end{aligned}$$

Se calcularmos a contribuição do nucleon para o estado intermediário encontramos que é de ordem ω^2 . Portanto na ordem zero esse estado intermediário não contribui para g_{ij} e podemos escrever

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{(0)} = & \frac{(2\pi)^4}{i} \delta(P_f - P_i) \left\{ \sum_{\bar{n}} \left[\frac{\langle 0 | j_i(0) | \bar{n}, 0 \rangle \langle \bar{n}, 0 | j_i(0) | 0 \rangle}{E_{\bar{n}}(0) - M} \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\langle 0 | j_i(0) | \bar{n}, 0 \rangle \langle \bar{n}, 0 | j_i(0) | 0 \rangle}{E_{\bar{n}}(0) - M} \right] \\
 & \left. - 2e^2 \delta_{ij} \langle 0 | \phi^{\dagger}(0) \phi(0) | 0 \rangle \right\} \quad (2-65)
 \end{aligned}$$

onde $\bar{n}$ designa todos os estados intermediários que não do nucleon. Na Eq. (2-8) temos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{n}, k | j_j(0) | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \langle \bar{n}, k | \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} j_j(\mathbf{x}) | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{V} \langle \bar{n}, k | \left[-H, D_j(\mathbf{x}) \right] = \epsilon_{ilm} k_m M_n(\mathbf{x}) | 0 \rangle \quad (2-66)
 \end{aligned}$$

e portanto

$$\langle \bar{n}, 0 | j_j(0) | 0 \rangle = \frac{i}{V} \sum_{\bar{n}} (E_{\bar{n}}(0) - M) \langle \bar{n}, 0 | d_j | 0 \rangle \quad (2-67)$$

Substituindo as Eqs. (2-63) e (2-65) encontramos

$$g_{ij}(0) = \frac{(2\pi)^4}{i} \delta(P_f - P_i) \frac{1}{V^2} \sum_{\bar{n}} \sum_{\bar{n}'} (E_{\bar{n}}(0) - M) \langle 0 | d_i | \bar{n}, 0 \rangle \langle \bar{n}', 0 | d_j | 0 \rangle \\ + (i \leftrightarrow j) \quad - 2e^2 \delta_{ij} \langle 0 | \phi^{\dagger}(0) \phi(0) | 0 \rangle \quad (2-68)$$

Comparando as Eqs. (2-63) e (2-68) vemos que se

$$\langle 0 | \phi^{\dagger}(0) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{1}{M} \quad , \quad (2-69)$$

obtemos

$$\frac{e^2}{M} = \frac{1}{V^2} \sum_{\bar{n}} \sum_{\bar{n}'} (E_{\bar{n}}(0) - M) |\langle 0 | d_z | \bar{n}, 0 \rangle|^2 \quad (2-70)$$

que é a regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn.

CAPÍTULO III

O MODELO DE QUARKS SIMÉTRICO

3.1) O MODELO DE QUARKS

Estudos intensivos do espalhamento pión-núcleon nos últimos anos por meio da análise de deflexão^{24,25} levaram à descoberta de um grande número de ressonâncias. O espectro das ressonâncias nucleônicas de menor massa está mostrado abaixo, onde as ressonâncias foram rotuladas pelas correspondentes amplitudes de ondas parciais pión-núcleon:

Vários esquemas foram já sugeridos para explicar tal espectro e tentar relacionar algumas de suas propriedades, como por exemplo suas larguras parciais de decaimento. Esses esquemas tem se baseado em grupos maiores de simetria com as ressonâncias localizadas nas várias representações dos grupos²⁶ ou em modelos dinâmicos²⁷. Outra proposta, colocada em particular por Dalitz²⁸, é a de interpretar essas ressonâncias como excitações de um sistema básico de três quarks.

Os quarks foram introduzidos por Gell-Mann e Zweig como um triplet fundamental $[\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]$ também indicados respectivamente por (p, n e Λ), que geram todas as representações de SU(3).

Entre as representações de SU(3) temos, além dessa representação (3), cuja dimensão está dada pelo número entre parenteses, as representações (6), (8), (10), (27) e assim por diante. Todas essas representações são geradas por combinações da representação fundamental (3). A situação é análoga ao caso do spin usual onde temos um dubleto fundamental de dimensão $[2]$, $[\xi_1, \xi_2]$, também indicado por $[\alpha, \beta]$ ou $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, correspondente a $J = 1/2$ e com os quais geramos todas as representações do momento angular: $[1]$ correspondente a $J = 0$, $[2]$ correspondente a $J = 1/2$, $[3]$ correspondente a $J = 1$ e em geral $[2J+1]$ correspondente a J . Assim, por exemplo

$$[2] \times [2] = [1] + [3],$$

que em termos de J corresponde a

$$1/2 \times 1/2 = 0 + 1.$$

Notemos que o grupo de momentum angular é um SU(2).

No SU(3); a composição de três representações (3) gera as representações (1) e (8)

$$(3) \times (3) \times (3) = (1) + (8) \quad ,$$

e assim por diante.

No esquema do "Eight - fold Way" de Gell-Mann e Zweig os oito bar_{yons} P , N , $\Sigma(+,0,-)$, Λ e $\Xi(0,-)$ são colocados na representação (8) que é gerada por três representações (3). Assim o estado P tem a composição $\xi_1 \xi_1 \xi_2$ ou com indicação mais sugestiva, ppn; o estado N tem a composição $\xi_1 \xi_2 \xi_2$ ou pnn, o estado Σ^+ é $\xi_1 \xi_1 \xi_3$ ou pp λ e assim por diante. O singuleto (1) só tem um membro cuja composição é $\xi_3 \xi_3 \xi_3$ ou $\lambda\lambda\lambda$. A representação (10) contém as dez ressonâncias $P_{33}(++,+,0,-)$, $\Sigma_{33}(+,0,-)$, $\Xi_{33}(0,-)$, e Ω^0 , onde $P_{33}(++)$ tem a composição ppp e assim por diante.

Assumindo que cada um dos elementos da representação fundamental (3) tem spin 1/2, criamos um conjunto fundamental de dimensão 6,

$$\{ p^+ , p^+ , n^+ , n^+ , \lambda^+ , \lambda^+ \} \equiv \{ 6 \} \quad ,$$

que é a representação fundamental do SU(6). O conteúdo de SU(3) e de spin SU(2) dessa representação é

$$\{ 6 \} = \{ (3) , \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

que também indicamos por

$$\{ 6 \} = (3)^{1/2} .$$

Uma das representações do SU(6) é o $\{ 56 \}$, cuja dimensão já está indicada e cujo conteúdo é

$$\{ 56 \} = (8)^{1/2} + (10)^{3/2} ,$$

isto é, um octeto de spin total 1/2 e um decaupletto de spin 3/2. Notemos que 1/2 e 3/2 são os possíveis valores de spin total dos três quarks.

Nessa representação $\{ 56 \}$ são colocados os oito baryons da família do proton que todos spin 1/2 e de 10 ressonâncias da família do P_{33} (1236) que tem todos spin 3/2. Outra representação do SU(6) é a $\{ 70 \}$ cujo conteúdo é

$$\{ 70 \} = (1)^{1/2} + (8)^{1/2} + (10)^{1/2} + (8)^{3/2} .$$

Nessa representação foram colocadas as ressonâncias logo acima do P_{33} (1236), como por exemplo os oito elementos (octeto) da família da segunda ressonância D_{13} (1525) de spin 3/2, o octeto da família da ressonância S_{11} (1550) e assim por diante. No espectro de ressonâncias apresentado, só mente assinalamos as do tipo nucleon. Conforme vemos nesse espectro de ressonância nucleônicas, temos uma banda de estados de paridade negativa (coluna da direita), entre 1525 Mev e 1710 Mev, mas o número delas é superior ao que poderíamos esperar com base na representação 70 do SU(6): uma ressonância S_{11} , uma S_{31} e uma D_{13} . Assim temos, do espectro, duas ressonâncias do tipo D_{13} , a D_{13} (1525) e a D_{13} (1691) ambas com spin 3/2, duas ressonâncias de tipo S_{11} , a S_{11} (1550) e S_{11} (1710), ambas com spin 1/2, uma com spin 5/2,

$D_{15}(1690)$ e outra com spin $1/2$, S_{31} , com spin isotópico $3/2$. Situação análoga acontece para as outras bandas.

A existência dessas bandas bem definida sugere um modelo que as agrupe. Dessas considerações nasceu o modelo de quarks que interpreta todas as ressonâncias, inclusive os conhecidos baryons da família do nucleon, como excitações de um sistema básico de três quarks com momentum angular orbital total $L = 0^+, 1^-, 2^+ \dots$, onde indicamos também a paridade orbital, e com excitações radiais, correspondente ao número quântico principal n .

Deste modo estamos considerando o grupo $SU(6) \times O_3$, onde O_3 é o grupo do momento angular orbital. Note que O_3 é evidentemente o subgrupo de $SU(2)$ com dimensão ímpar, isto é, com momentum angular inteiro. Compondo o spin total S dos quarks com o orbital L obtemos os valores de $J = L + S$ correspondentes ao spin das ressonâncias. Assim usando a indicação { dimensão de $SU(6)$, L } para os membros de $SU(6) \times O_3$ e a indicação $\left[\begin{smallmatrix} \text{dimensão de } SU(3) \\ S \\ J \end{smallmatrix} \right]$ para os respectivos conteúdo de $SU(3)$, spin total S dos quarks e momentum angular total J , temos por exemplo

$$\{ 56, L = 0^+ \} = (8)_{1/2}^{1/2} + (10)_{3/2}^{3/2} \quad (3-1)$$

Vemos do quadro de ressonâncias que a primeira banda contém dois estados de paridades positiva, o nucleon (940) e a ressonância $P_{33}(1236)$ que são respectivamente membros de um octeto de spin-paridade $J^P = 1/2^+$ e de um decaplete de spin-paridade $J^P = 3/2^+$. Tomados em conjunto esses dois estados formam uma representação simétrica do $SU(6)$ com dimensão { 56 }. Lembrando que o spin total dos quarks é $S = 1/2$ e $S = 3/2$, os dois estados, nucleon e $P_{33}(1236)$, são considerados como estados ligados dos três quarks com momentum angular $L = 0^+$. No modelo de quarks esses dois estados estão colocados então na representação { 56, $L = 0^+$ } que constitui o estado fundamental

dos três quarks com $L = 0^+$ e sem excitação radial.

O $P_{33}(1236)$ pode evidentemente decair no nucleon $N(940)$ por emissão de um pión ou foton:

$$P_{33}(1236) \rightarrow N(940) + \pi$$

$$P_{33}(1236) \rightarrow N(940) + \gamma$$

Assumindo que a emissão tem lugar via interação de um quark Becchi e Morpurgo²⁹ calcularam as larguras parciais e encontraram valores em razoável acôrdo com os dados experimentais. O decaimento radiativo é predito ser uma transição de dipolo magnético, sendo nula a transição de octopolo elétrico, e que também é verificado experimentalmente³⁰.

A segunda banda é um conjunto de ressonâncias com paridades negativas. De acôrdo com Dalitz essas ressonâncias correspondem a uma representação de simetria mista do $SU(6)$ com dimensão 70, tendo os quarks momentum angular orbital $L = 1^-$, sem excitação radial.

Do conteúdo de $SU(3)$ e de spin total S dos quarks obtemos para $\{ 70, L = 1^- \}$:

$$\begin{aligned} \{ 70, L = 1^- \} = & (1)_{1/2}^{1/2} + (1)_{3/2}^{1/2} \\ & + (8)_{1/2}^{1/2} + (8)_{3/2}^{1/2} \\ & + (10)_{1/2}^{1/2} + (10)_{3/2}^{1/2} \\ & + (8)_{1/2}^{3/2} + (8)_{3/2}^{3/2} + (8)_{5/2}^{3/2} \quad (3-2) \end{aligned}$$

Temos a nossa disposição as ressonâncias $Y_0^*(1405)$ com $J^P = 1/2^-$ e $Y_0^*(1520)$ com $J^P = 3/2^-$, que correspondem então aos dois singuletos. Os dois decapletos correspondem a S_{31} e D_{33} enquanto que os cinco octetos correspondem aos dois S_{11} 's, aos dois D_{13} 's e ao D_{15} . No caso geral os dois S_{11} 's são misturas dos estados $(8)^{1/2}$ e $(8)^{3/2}$, o mesmo acontecendo com os dois D_{13} 's. A segunda banda de ressonâncias está então bem acomodada. Assumindo uma interação de um quark Mitra e Ross³¹ calcularam as larguras parciais dessas ressonâncias no $\{ 70, L = 1^- \}$ para decaimento mesônico e seus resultados estão em acordo razoável com os dados experimentais.

Além dessas temos outras bandas de ressonâncias e coloca-se o problema de saber as representações a que pertencem.

O esquema do modelo de quarks simétrico foi de fato sugerido por Greenberg³² e reenfatizado recentemente por Dalitz³³. É um esquema baseado em idéias do modelo de camadas da física nuclear. Esse esquema faz a importante hipótese de que os quarks obedecem para-estatística de Fermi em vez da estatística de Fermi. Notemos que como o nucleon e $P_{33}(1236)$ pertenceu à representação 56 simétrica, do SU(6), a função espacial deve ser antissimétrica e os quarks devem obedecer a estatística de Fermi. Com isto surgem vários problemas. Em primeiro lugar, do que aprendemos da física nuclear, é mais ou menos estranho encontrar um estado antissimétrico num estado de energia mais baixo. Mais ainda Majumdar e Mitra³⁴ mostraram que funções de onda antissimétricas típicas levam a um nó ou mais nos fatores de forma do nucleon contrariamente à observação. Com a hipótese de para-estatística de Fermi para os quarks a função espacial pode ser simétrica, ficando permitido um estado fundamental simétrico. Thornber³⁵ investigou um modelo que considera as ressonâncias bariônicas como estados ligados de três paraquarks

interagindo por forças harmônicas para computar os fatores de forma de várias ressonâncias que aparecem no espalhamento inelástico de elétrons. Feynman e Hendry³⁶ usaram o mesmo modelo de oscilador harmônico para computar as larguras dos decaimentos piônicos e eletromagnéticos de todas as ressonâncias conhecidas. Os decays eletromagnéticos foram também considerados por Copley et al³⁷ e também por Bowler³⁸.

O modelo de quarks tem conseguido relativo sucesso na descrição dos decaimentos piônico e eletromagnético. No capítulo seguinte daremos mais um argumento em favor de tal modelo, mostrando que podemos por meio dele obter valores para a polarizabilidade elétrica do próton e nêutron que estão de acordo com os dados experimentais.

3.2) CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES DE ONDA

Consideremos agora o problema de construir as funções de onda do sistema de três quarks com coordenadas espaciais $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ e $\underline{r}_3$, projeção de spin $(\alpha, \beta)_1$, $(\alpha, \beta)_2$ e $(\alpha, \beta)_3$, e projeções de spin-unitário $(p, n)_1$, $(p, n)_2$ e $(p, n)_3$, que se reduzem às projeções de spin isotópico pois estamos interessados apenas nos sistemas sem exotranheza, isto é, sistemas nucleônicos, estando então ausente o quark com exotranheza λ . Vejamos inicialmente as funções de onda de spin³⁹. Com três partículas de spin 1/2, as possíveis funções de onda são duas de spin total $S = 1/2$ e uma de spin total $S = 3/2$. Para construí-las componemos duas das três de spin 1/2, obtendo a função de onda de spin zero $(\alpha\beta - \beta\alpha)/\sqrt{2}$, e as funções de onda de spin 1, $\alpha\alpha$, $(\alpha\beta + \beta\alpha)/\sqrt{2}$ e $\beta\beta$ com projeções +1, 0, -1 respectivamente. Basta agora compor essas funções de spin com a restante spin 1/2.

Para o spin total $S = 1/2$ as duas funções de onda serão indicadas por $\chi^0(S_z)$ e $\chi^\lambda(S_z)$. Para $S_z = + 1/2$ temos

$$\chi^0(+1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha\beta - \alpha\beta) , \quad (3-3a)$$

$$\chi^\lambda(+1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\alpha\beta + \alpha\beta - 2\beta\alpha) . \quad (3-3b)$$

Notemos que são ambas de simetria mista: χ^0 é antissimétrica e χ^λ é simétrica pela troca das partículas 2 e 3.

Indicando por P_{ij} o operador de troca das partículas i e j temos

$$P_{23}\chi^0 = -\chi^0$$

$$P_{23}\chi^\lambda = \chi^\lambda$$

$$P_{12}\chi^0 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \chi^\lambda + \chi^0)$$

$$P_{12}\chi^\lambda = -\frac{1}{2} (\chi^\lambda - \sqrt{3}\chi^0)$$

$$P_{13} = -\frac{1}{2} (\sqrt{3} \chi^\lambda - \chi^0)$$

$$P_{13}\chi^\lambda = -\frac{1}{2} (\chi^\lambda + \sqrt{3}\chi^0) . \quad (3-4)$$

Para $S_z = - 1/2$ temos

$$\chi^0(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta\beta\alpha - \beta\alpha\beta) , \quad (3-5a)$$

$$\chi^\lambda(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\beta\beta\alpha + \beta\alpha\beta - 2\alpha\beta\beta) , \quad (3-5b)$$

que obedecem as mesmas propriedades da simetria da Eq. (3-4).

Para spin total $3/2$ temos as funções de onda completamente simétricas pela troca de qualquer par:

$$\chi^S (+3/2) = \alpha\alpha\alpha \quad .$$

$$\chi^S (+1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha\alpha\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha\alpha) \quad , \quad (3-6b)$$

$$\chi^S (-1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\beta\beta\alpha + \beta\alpha\beta + \alpha\beta\beta) \quad , \quad (3-6c)$$

$$\chi^S (-3/2) = \beta\beta\beta \quad . \quad (3-6d)$$

Consideremos agora a função de cnda de spin - unitário que, como já assinalamos, se reduz ao spin - isotópico. Temos três quarks com spin isotópico 1/2 e análogamente ao caso de spin usual teremos duas funções isotópicas 1/2, antissimétrica, $\eta^P(T_z)$, e simétrica, $\eta^\lambda(T_z)$, pela troca das partículas 2 e 3, e uma função de spin isotópico 3/2 completamente simétrica.

Indicando por p e n as componentes + 1/2 e - 1/2 de isospin teremos para spin isotópico total 1/2 e com componente $T_z = +1/2$

$$\eta^P(+1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (ppn - pnp) \quad , \quad (3-7a)$$

$$\eta^\lambda(+1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (ppn + pnp - 2npp) \quad , \quad (3-7b)$$

e para $T_z = -1/2$,

$$\eta^P(-1/2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} (nnp - npn) \quad , \quad (3-8a)$$

$$\eta^\lambda(-1/2) = \frac{-1}{\sqrt{6}} (nnp + npn - 2pnn) \quad . \quad (3-8b)$$

As duas funções presentes nas Eqs. (3-7a) e (3-7b) são apropriadas para a composição da função de onda do próton que tem $T_z = +1/2$ enquanto que as duas últimas são apropriadas ao nêutron. Para as componentes com $T_z = -1/2$ é usual a escolha feita, que difere por um sinal das correspondentes no espaço de spin usual na Eq. (3-5). Notemos que tanto para as componentes $T_z = +1/2$ como para as componentes $-1/2$ são válidas as mesmas propriedades de simetria

$$P_{23}\eta^0 = -\eta^0 \quad P_{23}\eta^\lambda = \eta^\lambda \quad \text{etc.} \quad (3-9)$$

Para isospin total $3/2$ temos as funções completamente simétricas.

$$\eta^S(+3/2) = ppp \quad , \quad (3-10a)$$

$$\eta^S(+1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (ppn + pnp + npp) \quad , \quad (3-10b)$$

$$\eta^S(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (nnp + npn + pnn) \quad , \quad (3-10c)$$

$$\eta^S(-3/2) = nnn \quad , \quad (3-10d)$$

apropriadas por exemplo à P_{33}^{++} , P_{33}^{+} , P_{33}^0 e P_{33}^{-} respectivamente.

Compondo as funções de onda de spin e spin unitário de simetria mista, obtemos

$$\phi^S = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^0 \eta^0 + \chi^\lambda \eta^\lambda) \quad , \quad (3-11a)$$

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^0 \eta^\lambda + \chi^\lambda \eta^0) \quad , \quad (3-11b)$$

$$\phi^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^0 \eta^0 - \chi^\lambda \eta^\lambda) \quad , \quad (3-11c)$$

$$\phi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi^0 \eta^a - \chi^a \eta^0) \quad , \quad (3-11d)$$

cuja simetria esta indicada pelo indice superior: ϕ^S é completamente simétrica pela troca de quaisquer duas partículas, ϕ^0 e ϕ^λ são ambas de simetria mista e respectivamente antissimétrica e simétrica pela troca das partículas 2 e 3, e ϕ^a é completamente antissimétrica. Assim por exemplo

$$\begin{aligned} P_{ij} \phi^S &= \phi^S \quad , \quad P_{ij} \phi^a = - \phi^a \\ P_{23} \phi^0 &= \phi^0 \quad , \quad P_{23} \phi^\lambda = \phi^\lambda \quad , \end{aligned} \quad (3-12)$$

e assim por diante.

Cuidamos agora da parte espacial. Em vez das coordenadas $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ e $\underline{r}_3$ dos três quarks, vamos introduzir a coordenada do centro de massa $\underline{R}$ e as coordenadas relativas $\underline{\rho}$ e $\underline{\lambda}$ por

$$\underline{R} = \frac{1}{3} (\underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3) \quad , \quad (3-13a)$$

$$\underline{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{r}_3 - \underline{r}_2) \quad , \quad (3-13b)$$

$$\underline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\underline{r}_2 + \underline{r}_3 - 2\underline{r}_1) \quad . \quad (3-13c)$$

Notemos que $\underline{R}$ é completamente simétrica enquanto que $\underline{\rho}$ e $\underline{\lambda}$ são de simetria mistas, a primeira antissimétrica e a segunda simétrica pela troca

das partículas 2 e 3, gozando das mesmas propriedades de simetria (3-4), isto é,

$$P_{23} \rho = -\rho$$

$$P_{23} \lambda = \lambda$$

$$P_{12} \rho = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \lambda + \rho)$$

etc.

(3-14)

Indicaremos a função de onda espacial por $\psi_L^Y(\underline{r})$ onde $\underline{r}=(\underline{R},\underline{p},\underline{\lambda})$. L indica o momentum orbital e Y indica o tipo de simetria (completamente simétrica, de simetria tipo ρ ou λ , e completamente antissimétrico).

Vejamus agora a construção das funções de onda dos baryons. De acordo com nosso modelo o nucleon e a primeira ressonância pertencem à representação simétrica 56 de SU(6) com momentum orbital $L = 0^+$.

Portanto a função de onda correspondente ao 56, $L = 0^+$ é

$$|56, L = 0^+\rangle = \psi_0^S(\underline{r}) \phi^S \quad (3-15)$$

onde lembramos que os quarks são parafermions. Para o octeto e o decauplato teremos respectivamente, lembrando (3-11a) e que o produto $\chi^S \eta^S$ é apropriado para $J = 3/2$, $T = 3/2$,

$$(8)_{1/2}^{1/2} = \frac{\psi_0^S(\underline{r})}{\sqrt{2}} [\chi^0 \eta^0 + \chi^\lambda \eta^\lambda] \quad (3-16)$$

$$(10)_{3/2}^{3/2} = \psi_0^S(\underline{r}) \chi^S \eta^S \quad (3-17)$$

Assim, para o proton P com spin para cima teremos

$$\begin{aligned}
|P, +\frac{1}{2}, \underline{r}\rangle &= \frac{\psi_0^S(\underline{r})}{\sqrt{2}} \left[\chi^p(+1/2) \eta^p(+1/2) + \chi^\lambda(+1/2) \eta^\lambda(+1/2) \right] \\
&= \frac{\psi_0^S(\underline{r})}{3\sqrt{2}} \left[(2\alpha\beta - \alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha)ppn + (2\alpha\beta\alpha - \alpha\alpha\beta - \beta\alpha\alpha)pnp \right. \\
&\quad \left. + (2\beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha)npp \right] \quad (3-18)
\end{aligned}$$

Para o neutron

$$\begin{aligned}
|N, +\frac{1}{2}, \underline{r}\rangle &= \frac{\psi_0^S(\underline{r})}{\sqrt{2}} \left[\chi^p(+1/2) \eta^p(-1/2) + \chi^\lambda(+1/2) \eta^\lambda(-1/2) \right] \\
&= \frac{\psi_0^S(\underline{r})}{3\sqrt{2}} \left[(-2\beta\beta\alpha + \alpha\beta\beta + \beta\alpha\beta)nnp + (-2\beta\alpha\beta + \alpha\beta\beta + \beta\beta\alpha)npn \right. \\
&\quad \left. + (-2\alpha\beta\beta + \beta\beta\alpha + \beta\alpha\beta)pnn \right] \quad (3-19)
\end{aligned}$$

Para o Δ^{++} temos, por exemplo para $m_j = +3/2$,

$$|\Delta^{++}, +\frac{3}{2}, \underline{r}\rangle = \psi^S(\underline{r}) \chi^S(+3/2) \eta^S(+3/2) \quad (3-20)$$

ou para Δ^+ com $m_j = +1/2$

$$|\Delta^+, +\frac{3}{2}, \underline{r}\rangle = \psi^S(\underline{r}) \chi^S(+3/2) \eta^S(+1/2) \quad (3-21)$$

Vejamos agora as funções de onda correspondente ao 70 , $L = 1^-$.

A função de onda correspondente à representação 70 do $SU(6)$ é de simetria mista. A função de onda espacial para $L = 1$ é também de simetria mista uma vez que deve ser proporcional a $\underline{\lambda}$ ou $\underline{\rho}$. Notando que $\chi^S \eta^p$, $\chi^p \eta^S$,

$\chi^S \eta^\lambda, \chi^\lambda \eta^S$ tem simetria definida, as duas primeiras do tipo ρ e as duas últimas do tipo λ , é fácil construir as funções de onda para a representação do 70 , $L=1$. No caso de paraestatística temos os estados simétricos

$$(8)_J^{1/2} = \{ [\chi_1^\lambda, \chi^0]_J + [\chi_1^0, \chi^\lambda]_J \} \eta^0 + \{ [\chi_1^0, \chi^0]_J - [\chi_1^\lambda, \chi^\lambda]_J \} \eta^\lambda ; J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (3-22a)$$

$$(8)_J^{3/2} = [\chi_1^0, \chi^S]_J \eta^0 + [\chi_1^\lambda, \chi^S]_J \eta^\lambda ; J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \quad (3-22b)$$

$$(10)_J^{1/2} = \{ [\chi_1^0, \chi^0]_J + [\chi_1^\lambda, \chi^\lambda]_J \} \eta^S ; J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (3-22c)$$

além dos estados

$$(8)_J^{1/2} = \{ [\chi_1^\lambda, \chi^0]_J - [\chi_1^0, \chi^\lambda]_J \} \eta^a \quad (3-22d)$$

que colocamos por completeza mas que não utilizaremos pelo fato de ser um estado com extraneza. η^a designa uma função de spin unitário completamente antissimétrica. Nas Eqs. (3-26) utilizamos a notação

$$[\chi_L^a, \chi_L^b]_J = \sum_{M_L, M_S} \langle L M_L S M_S | J M \rangle \chi_{L, M_L}^a \chi_{S, M_S}^b \quad (3-23)$$

que no nosso caso correspondem à composição de $L=1$ com $S=1/2$ ou $3/2$.

Os candidatos para o 70 , $L = 1^-$ são

$$Y_{01}^*(1405) , Y_{03}^*(1520) , S_{11}(1550) , S_{11}(1710) ,$$

$$S_{31}(1640) , D_{13}(1525) , D_{13}(1690) , D_{33}(1691) \text{ e}$$

$$D_{15}(1675) .$$

Os dois estados físicos S_{11} são misturas de $(8)_{1/2}^{1/2}$ e $(8)_{1/2}^{3/2}$ e os dois estados físicos D_{13} são misturas de $(8)_{3/2}^{1/2}$ e $(8)_{3/2}^{3/2}$. Introduzindo os respectivos ângulos de mistura θ_s e θ_d escrevemos

$$Y_{01}^*(1405) = (1)_{1/2}^{1/2} , \quad (3-24a)$$

$$Y_{03}^*(1520) = (1)_{3/2}^{1/2} , \quad (3-24b)$$

$$S_{11}(1710) = + \sin \theta_s (8)_{1/2}^{1/2} + \cos \theta_s (8)_{1/2}^{3/2} , \quad (3-24c)$$

$$S_{11}(1550) = \cos \theta_s (8)_{1/2}^{1/2} - \sin \theta_s (8)_{1/2}^{3/2} , \quad (3-24d)$$

$$S_{31}(1630) = (10)_{1/2} , \quad (3-24e)$$

$$D_{13}(1690) = \sin \theta_d (8)_{3/2}^{1/2} + \cos \theta_d (8)_{3/2}^{3/2} , \quad (3-24f)$$

$$D_{13}(1525) = \cos \theta_d (8)_{3/2}^{1/2} - \sin \theta_d (8)_{3/2}^{3/2} , \quad (3-24g)$$

$$D_{33}(1670) = (10)_{3/2}^{1/2} , \quad (3-24h)$$

$$D_{15}(1675) = (8)^{3/2}_{5/2}$$

(3-24i)

Fácilmente podemos escrever a função de onda para um dado estado de carga e de projeção de momentum angular total.

3.3) O MODELO DO OSCILADOR HARMÔNICO

O conhecimento da parte espacial da função de onda depende da dinâmica do sistema constituído pelos três quarks. No que segue adotaremos o modelo do oscilador harmônico que tem se mostrado bastante eficiente na descrição dos decaimentos mesônicos e eletromagnéticos das ressonâncias^{36,37,38} assim como na descrição da fotoprodução de pions³⁷.

A hamiltoniana do oscilador harmônico para três partículas de massas iguais, nas posições $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ e $\underline{r}_3$ interagindo via forças do tipo oscilador harmônico é

$$H = \sum_a \frac{\underline{p}_a^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \sum_{a < b} (\underline{r}_a - \underline{r}_b)^2 \quad (3-25)$$

Em função das coordenadas $\underline{R}$, $\underline{\lambda}$ e $\underline{\rho}$ introduzidas nas Eqs. (3-13) a hamiltoniana assume a forma

$$H = \frac{\underline{P}^2}{2(3M)} + \left[\frac{1}{2M} (\underline{p}_\lambda^2 + \underline{p}_\rho^2) + \frac{1}{2} M (\sqrt{3} \omega)^2 (\underline{\lambda}^2 + \underline{\rho}^2) \right] \quad (3-26)$$

onde $\underline{P}$, $\underline{p}$ e $\underline{p}$ são respectivamente os momentos conjugados de $\underline{R}$, $\underline{\lambda}$ e $\underline{\rho}$.

A função de onda espacial correspondente a essa hamiltoniana pode

então ser escrita sob a forma

$$\exp(i \underline{P} \cdot \underline{R}) \psi(\underline{\lambda}) \theta(\underline{\rho}) \quad , \quad (3-27)$$

onde ψ e θ são funções de onda do tipo oscilador harmônico. Algumas dessas funções para um potencial $m\omega^2 r^2/2$, $m\omega \equiv \gamma^2$, são, para excitação radial $n = 1$,

$$\psi_0(\underline{r}) = \left(\frac{4\gamma^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma^2 r^2\right) Y_0(\Omega) \quad , \quad (3-28a)$$

$$\psi_{1m}(\underline{r}) = \left(\frac{4\gamma^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma r \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma^2 r^2\right) Y_{1m}(\Omega) \quad . \quad (3-28b)$$

A parte da função de onda correspondente à coordenada $\underline{R}$ leva à conservação de momentum no processo. Focalizaremos então nossa atenção somente na parte que depende das coordenadas relativas.

O nosso problema é agora construir funções de onda espaciais com simetria definida. Notemos que como $\underline{p}^2 + \underline{\lambda}^2$ é completamente simétrico, $\psi_0(\underline{\lambda}) \psi_0(\underline{\rho})$ é completamente simétrico com momentum angular $L = 0$. Concluímos também que $\psi_0(\underline{\lambda}) \psi_{1m}(\underline{\rho})$, $\psi_0(\underline{\lambda})$ e $\psi_{1m}(\underline{\lambda})$ são de simetria mista, antissimétrica e simétrica respectivamente pela troca das partículas 2 e 3.

CAPÍTULO IV

A POLARIZABILIDADE ELÉTRICA DO NUCLEON

NO MODELO DE QUARKS SIMÉTRICO

4.1) INTRODUÇÃO

Como já assinalamos o modelo de quarks tem alcançado relativo sucesso na interpretação e correlacionamento das propriedades das ressonâncias particularmente no que se refere aos decaimentos eletromagnéticos. Neste capítulo estudaremos as polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron no modelo de quarks simétrico tomando funções de onda de oscilador harmônico para a parte espacial. O modelo de quarks simétrico foi introduzido por Greenberg³² e reenfatizado por Dalitz³³. Nesse modelo o nucleon e as ressonâncias paraestatística de Fermi de ordem três. Assumindo funções de onda de oscilador harmônico Faiman e Hendry³⁶ estudaram os decaimentos resônicos e eletromagnético das ressonâncias com bastante sucesso. Estudo dos decaimentos eletromagnético foi também feito por Copley, Karl e Obryk³⁷ e mais recentemente por Bowler³⁸. Como veremos, baseado em tal modelo de quarks, podemos obter valores das polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron que estão de acordo com os valores experimentais.

4.2) AS FUNÇÕES DE ONDA DA REPRESENTAÇÃO 70 , $L = 1^-$

A expressão da polarizabilidade elétrica do nucleon está dada pela

Eq. (2-35). Assumiremos que os estados intermediários são saturados pela segunda banda do espectro de ressonâncias, todas elas alocadas na representação $\{70, L = 1\}$ do modelo de quarks. Evidentemente só os estados nucleônicos de spin 1/2 e 3/2 poderão contribuir para o dipolo elétrico de transição, isto é, $S_{11}(1710)$, $S_{11}(1550)$, $S_{31}(1640)$, $D_{13}(1690)$, $D_{13}(1525)$ e $D_{33}(1691)$. Lembrando que os dois estados S_{11} 's são misturas de $(8)^{1/2}$ e $(9)^{3/2}$ o mesmo acontecendo com os dois D_{13} 's, teremos das Eqs. (3-24) e (3-22), para os estados de carga positiva e projeção de spin +1/2.

$$S_{11}^+(1710), +1/2, r > =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta_s}{2} \left\{ \left[\sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^0 + \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^0) - \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^0 + \psi_{1,0}^p \chi_{+1/2}^0) \right. \right. \\ & \times \chi_{+1/2}^\lambda \left. \right] \left[\eta_{+1/2}^0 + \left[\sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,+1}^p \chi_{-1/2}^0 - \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^\lambda) - \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{1,0}^p \chi_{+1/2}^0 \right. \right. \\ & \left. \left. - \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^\lambda) \right] \left[\eta_{+1/2}^\lambda \right] + \right. \\ & \left. \frac{\cos \theta_s}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \psi_{1,+1}^p \chi_{-1/2}^s - \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,0}^p \chi_{+1/2}^s + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{1,-1}^p \chi_{+3/2}^s \right] \left[\eta_{+1/2}^p + \right. \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^s - \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^s + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{1,-1}^\lambda \chi_{+3/2}^s \right] \left[\eta_{+1/2}^\lambda \right] \right. \end{aligned}$$

(4-1a)

$$|S_{11}^+(1550), +1/2, r > =$$

$$\left[\begin{array}{c} 2^\circ \text{ membro da equação anterior com a troca} \\ \sin \theta_s \leftrightarrow \cos \theta_s \quad \text{e} \quad \cos \theta_s \leftrightarrow -\sin \theta_s \end{array} \right] \quad (4-1b)$$

$$|S_{31}^+(1640), +1/2, \underline{r}\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,+1}^0 \chi_{-1/2}^0 + \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^\lambda) - \sqrt{\frac{1}{3}} (\psi_{1,0}^0 \chi_{+1/2}^0 + \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^\lambda) \right] |n_{+1/2}^S\rangle$$

(4-1c)

$$|D_{13}^+(1690), +1/2, \underline{r}\rangle =$$

$$\frac{\sin\theta_d}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^0 + \psi_{1,+1}^0 \chi_{-1/2}^\lambda) + \sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^0 + \psi_{1,0}^0 \chi_{+1/2}^\lambda) \right] \right.$$

$$\times |n_{+1/2}^0\rangle + \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{1,+1}^0 \chi_{-1/2}^0 + \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^\lambda) + \sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,0}^0 \chi_{+1/2}^0 + \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^\lambda) \right]$$

$$\times |n_{+1/2}^\lambda\rangle \Big\} +$$

$$\frac{\cos\theta_d}{2} \left\{ \left[-\sqrt{\frac{8}{5}} \psi_{1,+1}^0 \chi_{-1/2}^S + \frac{1}{\sqrt{15}} \psi_{1,0}^0 \chi_{+1/2}^S + \sqrt{\frac{2}{5}} \psi_{1,-1}^0 \chi_{+3/2}^S \right] |n_{+1/2}^0\rangle \right.$$

$$\left. + \left[-\sqrt{\frac{8}{5}} \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^S + \frac{1}{\sqrt{15}} \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^S + \sqrt{\frac{2}{5}} \psi_{1,-1}^\lambda \chi_{+3/2}^S \right] |n_{+1/2}^\lambda\rangle \right\},$$

(4-1d)

$$|D_{13}^+(1525), +1/2, \underline{r}\rangle =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{2º membro da equação anterior com a troca} \\ \sin\theta_d \rightarrow \cos\theta_d \quad \text{e} \quad \cos\theta_d \rightarrow -\sin\theta_d \end{array} \right]$$

(4-1e)

$$|D_{33}^+(1691), +1/2, \underline{r}\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_{1,+1}^0 \chi_{-1/2}^0 + \psi_{1,+1}^\lambda \chi_{-1/2}^\lambda) + \sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_{1,0}^0 \chi_{+1/2}^0 + \psi_{1,0}^\lambda \chi_{+1/2}^\lambda) \right] \equiv \eta_{+1/2}^S$$

(4-1f)

Para os estados de carga zero, $S_{11}^0(1710)$, $S_{11}^0(1550)$, etc, basta trocar nas expressões anteriores $\eta(+1/2)$ por $\eta(-1/2)$.

Necessitamos agora as funções de onda espaciais $\psi_0(\underline{r})$ do próton e nêutron e também das funções de onda $\psi_{1m}^{0,\lambda}(\underline{r})$ que comparecem nas ressonâncias do 70 , $L = 1^-$. Deixando de lado $\exp(i\vec{p} \cdot \underline{R})$ que descreve a conservação de momentum é fácil ver que

$$\psi_0^S(\underline{r}) = \psi_0(\underline{p}) \psi_0(\underline{\lambda}) \quad , \quad (4-2a)$$

$$\psi_{1m}^0(\underline{r}) = \psi_{1m}(\underline{p}) \psi_0(\underline{\lambda}) \quad , \quad (4-2b)$$

$$\psi_{1m}^\lambda(\underline{r}) = \psi_0(\underline{p}) \psi_{1m}(\underline{\lambda}) \quad . \quad (4-2c)$$

Feynman e Hendry³⁶ notaram que o ângulo de mistura θ_s pode ser determinado da conhecida largura $N\pi$ de $S_{11}(1710)$. Existem duas soluções $\theta_s = 0$ e $\theta_s = 90^\circ$. A solução $\theta_s = 90^\circ$ diz que $S_{11}(1710)$ é principalmente $(8)^{1/2}$ e que $S_{11}(1550)$ é principalmente $(8)^{3/2}$. Esta é a solução de Mitra e Ross³¹. Entretanto, ela contradiz uma regra de seleção deduzida por Moorhouse⁴⁰, que mostrou que estados N^* 's que se originam do $8^{3/2}$ não podem ser fotoproduzidos do próton. Experimentalmente $S_{11}(1550)$ é fortemente fotoproduzido implicando que não é principalmente $8^{3/2}$. Tal contradição não existe para $\theta_s = 30^\circ$ que é então favorecida.

Do mesmo modo θ_d pode ser medido de $\Gamma(D_{13}(1525) \rightarrow N\pi)$ e resultam dois valores, $\theta_d = 35^\circ$ e $\theta_d = 127^\circ$. Analizando os decaimentos eletromagnéticos das ressonâncias, Feynman e Hendry mostraram que a solução $\theta_d = 127^\circ$ dá bom acordo com a análise experimental de Chan et al para o $D_{13}(1525)$.

Tomaremos então na nossa análise

$$\theta_s = 35^\circ \quad \theta_d = 127^\circ, \quad (4-3)$$

junto com o valor

$$\gamma^2 = \sqrt{3} \quad M_W = 0.10(\text{Eev})^2, \quad (4-4)$$

determinado por Feynman e Hendry³⁶.

4.3) RESULTADOS PARA AS POLARIZABILIDADES DE PROTON E NEUTRON

Estamos agora em posição de calcular os momentos de dipolo elétrico de transição.

$$d_z = \sum_a Q_a z_a \quad (4-5)$$

onde Q_a é o operador de carga para o a -ésimo quark. Lembremos que

$$Q|p\rangle = \frac{2e}{3}|p\rangle, \quad Q|n\rangle = -\frac{e}{3}|n\rangle. \quad (4-6)$$

— Levando em conta que as funções de onda dos baryons são simétricas podemos simplificar o cálculo dos elementos de matriz de transição do dipolo escrevendo,

$$\langle N^{*+} | d_z | p \rangle = 3 \langle N^{*+} | Q_1 z_1 | p \rangle \quad (4-7)$$

Como

$$Q_1 \eta_{+1/2}^p = \frac{2e}{3} \eta_{+1/2}^p \quad (4-8a)$$

e

$$\begin{aligned} Q_1 \eta_{+1/2}^\lambda &= \frac{2e}{3} \frac{1}{\sqrt{6}} (ppn + pnp + npp) \\ &= \frac{2e}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{+1/2}^s, \end{aligned} \quad (4-8b)$$

teremos

$$Q_1 |p, +\frac{1}{2}, \underline{x}\rangle = \frac{2e}{3\sqrt{2}} \psi_0^s(\underline{x}) \left[\chi_{+1/2}^p \eta_{+1/2}^p + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{+1/2}^\lambda \eta_{+1/2}^s \right]. \quad (4-9)$$

Vejamos então as expressões dos dipolos de transição, considerando primeiramente $\langle S_{11}^+(1710) | d_z | p \rangle$. Pela (4-7)

$$\langle S_{11}^+(1710) | d_z | p \rangle = 3 \langle S_{11}^+(1710) | Q_1 z_1 | p \rangle \quad (4-10)$$

Lembrando a ortogonalidade das funções de onda de spin e spin isotópico teremos de (4-1a) e (4-9),

$$\langle S_{11}^+(1710) | +\frac{1}{2} , \underline{r} | Q_1 z_1 | p , +\frac{1}{2} , \underline{r} \rangle = -\frac{e}{3\sqrt{6}} \sin\theta_s \langle \psi_{1,0}^\lambda | z_1 | \psi_0^s \rangle , \quad (4-11)$$

e portanto, de (4-10),

$$\langle S_{11}^+(1710) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{\sqrt{6}} \sin\theta_s A , \quad (4-12)$$

onde

$$A \equiv \langle \psi_{1,0}^\lambda | z_1 | \psi_0^s \rangle . \quad (4-13)$$

Das Eqs. (4-1b) e (4-13) resulta para $S_{11}^+(1550)$,

$$\langle S_{11}^+(1550) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{\sqrt{6}} \cos\theta_s A . \quad (4-14)$$

Para $S_{31}^+(1640)$ teremos de (4-1c) , (4-9) e (4-11),

$$\langle S_{31}^+(1640) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{\sqrt{6}} A . \quad (4-15)$$

Analogamente, de (4-1d) , (4-1e) , (4-1f) e (4-9) resultam para as outras três ressonâncias

$$\langle D_{13}^+(1690) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{\sqrt{3}} \sin\theta_d A , \quad (4-16)$$

$$\langle D_{13}^*(1525) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{3} \cos \theta_d A, \quad (4-17)$$

$$\langle D_{33}(1691) | d_z | p \rangle = -\frac{e}{3} A. \quad (4-18)$$

Basta agora calcular o elemento de matriz $A \equiv \langle \psi_{1,0}^\lambda | z_1 | \psi_0^S \rangle$, que pode ser escrito

$$A \equiv \langle \psi_{1,0}^\lambda | z_1 | \psi_0^S \rangle = i \frac{\partial}{\partial k_z} \langle \psi_{1,0}^\lambda | e^{-ik \cdot \underline{r}_1} | \psi_0^S \rangle \Big|_{\underline{k} = 0}. \quad (4-19)$$

Levando em conta (3-13) temos

$$\underline{r}_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\lambda} + \underline{R}, \quad (4-20)$$

e portanto, de (4-2c), com $g = k \sqrt{2/3}$,

$$\langle \psi_{1,0}^\lambda | e^{-ik \cdot \underline{r}_1} | \psi_0^S \rangle = \int d\underline{\lambda} d\underline{\rho} \psi_0^*(\underline{\rho}) \psi_{1,0}^*(\underline{\lambda}) e^{ik \cdot \underline{\lambda}} \psi_0(\underline{\rho}) \psi_0(\underline{\lambda}), \quad (4-21)$$

$$g = k \sqrt{2/3},$$

onde deve-se considerar a integral em $\underline{R}$, que dá a conservação de momentum, já realizada.

Por normalização das funções de onda do oscilador harmônico, veja (3-28), teremos

$$\langle \psi_{1,0}^\lambda | e^{-ik \cdot \underline{r}_1} | \psi_0^S \rangle = \int d\underline{\lambda} \psi_{10}^*(\underline{\lambda}) e^{ig \cdot \underline{\lambda}} \psi_0(\underline{\lambda}). \quad (4-22)$$

Utilizando nessa expressão a usual expansão da exponencial em polinômios de Legendre

$$e^{ik \cdot r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} \frac{\pi}{2kr} J_{\ell+1/2}(kr) P_{\ell}(\cos\theta) \quad , \quad (4-23)$$

e as expressões das funções de onda do oscilador harmônico, Eqs. (3-28a) e (3-28b), teremos,

$$\langle \psi_{1,0}^{\lambda} | e^{-ik \cdot r} | \psi_0^s \rangle = i \frac{4\gamma^4}{\sqrt{q}} \int_0^{\infty} r^{5/2} J_{3/2}(qr) e^{-\gamma^2 r^2} dr, \quad (4-24a)$$

onde, devido à Eq. (3-26),

$$\gamma^2 = \sqrt{3} M\omega \quad . \quad (4-24b)$$

Utilizando a identidade⁴¹

$$\int_0^{\infty} r^{n+1} J_n(qr) e^{-\gamma^2 r^2} dr = \frac{q^n}{(2\alpha^2)^{n+1}} e^{-q^2/4\gamma^2} \quad , \quad (4-25)$$

teremos, lembrando que $q = k (2/3)^{1/2}$,

$$\langle \psi_{1,0}^{\lambda} | e^{-ik \cdot r} | \psi_0^s \rangle = i \frac{k}{\gamma\sqrt{3}} e^{-k^2/6\gamma^2} \quad . \quad (4-26)$$

De (4-19) resulta então

$$A \equiv \langle \psi_{1,0}^{\lambda} | z_1 | \psi_0^s \rangle = -\frac{1}{\gamma\sqrt{3}} \quad . \quad (4-27)$$

Temos então de (4-12), (4-14), (4-15), (4-16), (4-17) e (4-18)

$$\langle S_{11}^+(1710) | d_z | P \rangle = \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}} \sin\theta_s, \quad (4-28a)$$

$$\langle S_{11}^+(1550) | d_z | P \rangle = \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}} \cos\theta_s, \quad (4-28b)$$

$$\langle S_{31}^+(1640) | d_z | P \rangle = \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}}, \quad (4-28c)$$

$$\langle D_{13}^+(1690) | d_z | P \rangle = -\frac{e}{3\gamma} \sin\theta_d, \quad (4-28d)$$

$$\langle D_{13}^+(1525) | d_z | P \rangle = -\frac{e}{3\gamma} \cos\theta_d, \quad (4-28e)$$

$$\langle D_{33}^+(1691) | d_z | P \rangle = -\frac{e}{3\gamma}, \quad (4-28f)$$

Substituindo êsses dipolos de transição na expressão da polarizabilidade elétrica, Eq.(2-35), e utilizando os valores expressos nas Eqs.(4-28a) e (4-4) resulta

$$\alpha(\text{proton}) = 5.6 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3. \quad (4-29)$$

Este valor esta em bem acordo com o resultado experimental dado na Eq. (1-9a).

O cálculo para o neutron segue de maneira análoga. Temos

$$\langle N^{s0} | d_z | N \rangle = 3 \langle N^{s0} | Q_1 z_1 | N \rangle. \quad (4-30)$$

Como

$$Q_1 \eta_{-1/2}^0 = -\frac{e}{3} \eta_{-1/2}^0 \quad (4-31a)$$

e

$$Q_1 \eta_{-1/2}^\lambda = \frac{e}{3} [\eta_{-1/2}^\lambda + \sqrt{2} \eta_{-1/2}^S] \quad (4-31b)$$

teremos

$$Q_1 |N, +\frac{1}{2}, \underline{r}\rangle = \frac{e \psi_0^S(\underline{r})}{3\sqrt{2}} [\chi_{+1/2}^0 \eta_{-1/2}^0 + \chi_{+1/2}^\lambda (\eta_{-1/2}^\lambda + \sqrt{2} \eta_{-1/2}^S)] \quad (4-32)$$

Notemos que $|S_{11}^0(1710), +1/2, \underline{r}\rangle$ é dado pela (4-1a) com a substituição $\eta_{+1/2} \rightarrow \eta_{-1/2}$. Teremos então com (4-32), e lembrando (4-13),

$$\langle S_{11}^0(1710), +\frac{1}{2}, \underline{r} | Q_1 \pi_1 | N, +\frac{1}{2}, \underline{r} \rangle = \frac{e}{3\sqrt{6}} \sin \theta_s A \quad (4-33)$$

Portanto, de (4-30),

$$S_{11}^0(1710) |d_z | N \rangle = \frac{e}{\sqrt{6}} \sin \theta_s A \quad (4-34)$$

que a menos de sinal é igual ao dipolo de transição para o próton, na Eq. (4-12).

Tal resultado acontece para todas as outras ressonâncias, isto é, temos para o neutron valores para os momentos de dipolo de transição idênti

cos para os momentos de dipolo de transição idênticos ao caso do próton:

$$\langle S_{11}^0(1710) | d_z | N \rangle = - \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}} \sin\theta_s, \quad (4-35a)$$

$$\langle S_{11}^0(1550) | d_z | N \rangle = - \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}} \cos\theta_s, \quad (4-35b)$$

$$\langle S_{31}^0(1640) | d_z | N \rangle = - \frac{e}{3\gamma\sqrt{2}}, \quad (4-35c)$$

$$\langle D_{13}^0(1690) | d_z | N \rangle = \frac{e}{3\gamma} \sin\theta_d, \quad (4-35d)$$

$$\langle D_{13}^0(1525) | d_z | N \rangle = \frac{e}{3\gamma} \cos\theta_d, \quad (4-35e)$$

$$\langle D_{33}^0(1691) | d_z | N \rangle = \frac{e}{3\gamma}, \quad (4-35f)$$

Obtemos então para a polarizabilidade elétrica do nêutron o mesmo valor da do próton,

$$\alpha(\text{nêutron}) = 5.6 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^3. \quad (4-36)$$

Este valor está de acordo com as estimativas experimentais que, como assinalamos nos § 1-2, dão para o nêutron uma polarizabilidade elétrica da mesma ordem que o próton.

Os valores que obtivemos para as polarizabilidades do próton e do nêutron estão em bom acordo com os dados experimentais. Temos com estes resultados mais uma coincidência, em favor do modelo de Quarks Simétrico do tipo Oscilador Harmônico.

B I B L I O G R A F I A

1. Robert Hofstadter, Electron Scattering and Nuclear and Nucleon Structure, W.A. Benjamin Inc., 1963.
2. F.E. Low, Phys. Rev. 1428 (1954).
3. M. Gell-Mann e M.L. Goldberger, Phys. Rev. 96, 1433 (1954).
4. A. Klein, Phys. Rev. 99, 998 (1955).
5. A.M. Baldin, Nuclear Phys. 18, 310 (1966).
6. V.A. Petrun'kin, Zurn. Eksp. Teor. Fiz, 40, 1148 (1961); Sov. Phys. JETP 13, 808 (1961).
7. L.L. Foldy, Phys. Rev. 92, 178 (1953).
8. J.L. Powell, Phys. Rev. 75, 32 (1949).
9. V.I. Goldansky, O.A. Karpukhin, A.V. Kutsenko, V.V. Pavlovskaya, JETP 11, 1223 (1960), Nuclear Phys. 18, 473 (1960). Note que nos valores experimentais da polarizabilidade elétrica dados nesta referência, está incluída a parte que contém $\langle r_1^2 \rangle$.
10. L.G. Hyman, R. Ely, D.H. Frisch, G.S. Janes, Phys. Rev. 105, 982, (1957).
11. C.L. Oxley, Phys. Rev. 110, 733 (1958).
12. C.L. Oxley, V.L. Telegdi, Phys. Rev. 100, 435 (1955).
13. M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, W.E. Thirring, Phys. Rev. 95, 1612 (1954).
14. M. Cini, R. Stroffolini, Nuclear Phys. 5, 684 (1958).
15. I. Aleksandrov, J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR) 33, 294 (1957); Soviet Phys. JETP 6, 228 (1958).

16. R.H. Thaler, Phys. Rev. 114, 827 (1959).
17. A. Langsdorff, Jr, R.O. Lane and J.E. Monahan, Phys. Rev. 107, 1077 (1957).
18. G. Breit e M.L. Rustgi, Phys. Rev. 114, 830 (1959).
19. A. Tenore e A. Verganelakis: CERN preprint 9083/TH. 439 (1964).
20. V.S. Barashenkov e H.J. Kaiser, Fortschr. d. Phys. 10, 33 (1962).
21. S. Sawada, Progr. Theor. Phys. 24, 1132 (1960).
22. S. Ragusa, Nuovo Cimento 56A, 514 (1966).
23. W. Furry, Phys. Rev. 81, 115 (1957).
24. B.H. Bransden, R.G. Moorhouse, and P.J. O'Donnell, Phys. Rev. 139, B1566 (1965); Phys. Letters 19, 420 (1965); P. Bareyre, C. Brieman, A.V. Stirling and G. Villet, *ibid*, 18, 342 (1965); Phys. Rev. 165, 1730 (1968); P. Auvi, A. Donnachie, A.T. Lea, and C. Lovelace, Phys. Letters 12, 76 (1964); 19, 146 (1965).
25. A. Donnachie, R. Kirsopp, and C. Lovelace, Phys. Letters 26B, 161 (1968).
26. For exemplo, R. Delbourgo, M.A. Rashid, A. Salam, and J. Strathdee, *in* Proceedings of the International Seminar in High-Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965); H. Harari, D. Horn, M. Kugler, H.J. Lipkin, and S. Meshkov, Phys. Rev. 140, B341 (1965); J.J. Coyne, S. Meshlov, and G.B. Yodh, Phys. Rev. Letters 17, 666 (1966).
27. F. Zachariasen, *in* Proceedings of the International Seminar in High-Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965 (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965); B.M. Udagonkar, *ibid.*; R.E. Cutkosky, *ibid.* R.H. Capps, Phys. Rev. 161, 1538 (1967).

28. R.H.Dalitz, in Les Houches Lectures, 1965 (Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1965).
29. C.Becchi and G.Morpurgo, Phys. Rev. 149, 1284 (1966); 140, B687 (1965); Phys. Letters 17, 352 (1965).
30. A.Donnachie and G.Shaw, Nucl. Phys. 87, 566 (1967).
31. A.N.Mitra and M.Ross, Phys. Rev. 158, 1830 (1967).
32. O.W.Greenberg, Phys. Rev. Letters 13, 598 (1964).
33. R.H.Dalitz, in Proceedings of the Conference in Particle Physics, University of Hawaii, 1967 (University of Hawaii Press, Honolulu, 1968).
34. A.N.Mitra and R.Majumdar, Phys. Rev. 150, 1194 (1966).
35. N.S.Thornber, Phys. Rev. 169, 1096 (1968)
36. D.Faiman and A.W.Hendry, Phys. Rev. 173, 1720 (1968); Phys. Rev. 180, 1572 (1969)
37. L.A.Copley, G.Karl and E.Obrik, Phys. Letters 29B, 117 (1969); Nucl. Phys. 13B, 303 (1969).
38. K.C.Bowler, Phys. Rev. 1D, 926 (1970).
39. Veja por exemplo, M.Verde, Handbuch der Physik, editado por S.Flügge (Springer-Verlag. Berlin, 1957). Vol. 39, p. 170.
40. R.G.Moornhouse, Phys. Letters 16, 771 (1966).
41. G.N.Watson, em Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press, New York, 1952).

CONCLUSÕES E PROBLEMAS PROPOSTOS

No presente trabalho estudamos dois problemas centrais:

- a) A determinação da expressão completa da polarizabilidade magnética do nucleon.
- b) Cálculo das polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron no esquema da Teoria de Quarks do tipo oscilador harmônico.

Para a polarizabilidade magnética, mostramos que além de uma parte paramagnética $\bar{\beta}$, que contém produtos dos elementos de matriz de transição do dipolo magnético, existe uma contribuição diamagnética $\Delta\bar{\beta}$, relacionada com o raio quadrático médio da distribuição da nuvem piônica. Além disso obtemos a versão relativística da regra de Thomas-Reiche-Kuhn e mostramos que isto implica um valor bem definido para a própria distribuição da nuvem piônica.

Quanto aos valores das polarizabilidades elétricas do próton e do nêutron, vimos que os resultados obtidos dentro da Teoria de Quarks do tipo oscilador harmônico estão em bom acordo com os dados experimentais.

Como problemas a serem atacados propomos os seguintes:

1. Cálculo da polarizabilidade magnética do próton e do nêutron tomando as contribuições das ressonâncias mais baixas.
2. Calcular a contribuição da nuvem de mesons-K para a parte diamagnética, concluindo sobre a possível discrepância ou não dos valores obtidos acima com os resultados experimentais.

3. Verificação da regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn tomando como estados intermediários as ressonâncias mais baixas.
4. Cálculo das polarizabilidades magnéticas do próton e do nêutron no modelo da Teoria de Quarks.
5. Estudo das polarizabilidades elétrica e magnética do próton e nêutron utilizando os Aproximantes de Padé.