Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Departamento de Matemática - SMA

Concurso Público

Editais ATAc/ICMC-USP núm. 072/2011

Professor Livre Docente

Título

Topologia de Singularidades Analíticas

Tese Livre Docência

Raimundo N. Araújo dos Santos

São Carlos, 28 de julho de 2011.

Agradecimentos

Agradeço a todos os colaboradores científicos que contribuíram para o desenvolvimento da linha de pesquisa deste trabalho, em especial, ao Professor Mihai Tibar, University of Lille 1 - Lille/France, pela colaboração e excelentes discussões sobre ideias matemática.

Resumo

A fibração de Milnor aparece como a principal ferramenta no estudo local da topologia de singularidades analíticas reais e complexas. Neste trabalho apresento alguns avanços obtidos nos últimos anos, em conjunto com alguns colaboradores científicos, na direção da existência da fibração de Milnor real para singularidades isoladas e não isoladas, usando técnicas da teoria de singularidade, teoria de estratificação, decomposição open book de variedade e topologia diferencial. Além disso, usamos técnicas da teoria de Morse para exibir uma fórmula para a característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real.

Abstract

The Milnor fibration appears as the main tool in the study of local topology of real and complex analytic singularities. In this work, I present some of my recent research progress together with my collaborators toward the existence of real Milnor fibrations for isolated and non-isolated singularities, using the techniques from stratification theory, decomposition of open book of manifolds and differential topology. In addition, we use techniques from Morse theory to show a formula for the Euler-Poincaré characteristic of the real Milnor fiber.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
0.1 Definições e conceitos básicos	1
0.2 Caso Complexo	3
0.3 Caso Real	4
1 Teoria de estratificação e fibração de Milnor real	10
1.1 (C) –regularidade e fibração de Milnor forte	10
1.2 Condição (m) uniforme	15
2 Estrutura Open Book e fibração de Milnor real	20
2.1 Estrutura Open Book e singularidades não isoladas	22
2.2 Existência da Estrutura Open Book Superior	23
2.3 Caracterização da Condição Milnor forte na origem	26
2.4 Conclusão: Comparando os resultados obtidos	28
3 Característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real	29

3.1	Introdução	29
3.2	Revisão de algumas fórmulas	30
3.3	Ferramentas da teoria de Morse	32
3.4	Característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real	34
3.4.1	Descrição Geométrica/Topológica da fibra - Aplicações para baixa dimensão	36
3.4.2	Topologia da fibra de Milnor no par $(4, 2)$	37
3.4.3	Descrição Geométrica/Topológica da fibra	39
Bibliografia		41

Introdução

0.1 Definições e conceitos básicos

Denotaremos por $\psi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $n \geq 1$, o germe de função holomorfa definidas numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ com $\psi(0) = 0$ e por $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com $n \geq p \geq 2$, o germe das aplicações analíticas reais. Em ambos os casos, denotaremos o conjunto singular de ψ por $\Sigma(\psi) := \{x \in K^n : \text{rank}(D\psi(x)) \text{ não é máximo}\}$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Como o objetivo de facilitar a notação e não sobrecarregar o texto, estaremos utilizando a mesma notação tanto para o germe como para o representante.

O objeto principal de estudo é mostrar a existência da fibração de Milnor real para certas classes de aplicação. Para tanto, a definição que utilizaremos de uma fibração suave (fibrado suave) ou fibração suave localmente trivial é:

0.1.1 Definição. Uma fibração suave localmente trivial é uma quadrupla (p, E, B, F) no qual E , B e F são variedades suaves, com B conexa, e uma aplicação suave $p : E \rightarrow B$, satisfazendo:

- (1) p é uma submersão sobrejetora;
- (2) para cada $x \in B$ existe uma vizinhança aberta U_x de x em B e um difeomorfismo suave $h_{U_x} : U_x \times F \rightarrow p^{-1}(U_x)$, que torna o seguinte diagrama

comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_x \times F & \xrightarrow{h_{U_x}} & p^{-1}(U_x) \\ \pi_1 \downarrow & \swarrow p & \\ U_x & & \end{array}$$

A variedade F é chamada a fibra da fibração e decorre do diagrama acima e da conexidade de B (veja observação 0.1.3 abaixo) que F é difeomorfa a $p^{-1}(y)$ para qualquer $y \in B$. A variedade E é chamada o espaço total e B o espaço base. A aplicação p é chamada a projeção da fibração.

0.1.2 OBSERVAÇÃO. Se podemos escolher a vizinhança $U_x = B$ na definição acima, diremos neste caso que a fibração é trivial, logo E é difeomorfo ao produto $B \times F$.

0.1.3 OBSERVAÇÃO. Observe que do diagrama acima temos que $p \circ h_{U_x} = \pi_1$, logo para cada $y \in B$, temos $p^{-1}(y) = h_{U_x} \circ \pi_1^{-1}(y) = h_{U_x} \circ (\{y\} \times F)$. Como toda variedade conexa é conexa por caminho, dado dois pontos quaisquer de B , basta ligar por um caminho e usar a transitividade do difeomorfismo. Portanto, todas as fibras são difeomorfas.

0.1.4 OBSERVAÇÃO. Novamente para facilitar a apresentação e não carregar no formalismo, quando nos referirmos a aplicação $p : E \rightarrow B$ como a projeção suave de um fibrado localmente trivial (ou simplesmente: fibrado suave, fibração suave), queremos dizer que o par (p, E, B, F) satisfaz a definição acima para a variedade $F = p^{-1}(y)$, $y \in B$.

O objetivo deste capítulo é introduzir as principais ideias iniciadas por Milnor em [Mi] sobre o estudo local da topologia da singularidade mostrando para isto a existência de uma fibração suave localmente trivial definidas em pequenas esferas em torno do ponto singular. Começaremos apresentando os principais resultados no caso complexo e a seguir do caso real.

0.2 Caso Complexo

Em [Mi] John Milnor mostrou que dado um representante $\psi : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ de um germe de função holomorfa, $\psi(0) = 0$, existe um número real $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{2n+1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1 \quad (1)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial, onde $K_\epsilon = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{2n+1}$ é chamado o link da singularidade na origem. Decorre da geometria analítica complexa que sendo $n \geq 1$ o link K_ϵ é sempre não vazio.

0.2.1 OBSERVAÇÃO. Vamos denotar por $F_\theta = \psi^{-1}(e^{i\theta})$, para $e^{i\theta} \in S^1$ a fibra da fibração acima. O fecho topológico da fibra $\overline{F_\theta} = F_\theta \cup K_\epsilon$.

0.2.2 OBSERVAÇÃO. Decorre dos resultados básicos de variedades diferenciáveis que, se $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ for um ponto regular da função ψ , então $K_\epsilon = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{2n+1}$ é difeomorfo a uma esfera sem nó mergulhada em S_ϵ^{2n+1} e a fibra F_θ é difeomorfa ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$.

Ainda em [Mi] Milnor mostrou que se $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ for um ponto singular isolado da função ψ , então temos os seguintes resultados:

0.2.3 Lema (Corolário 2.9, pag. 18). *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a esfera S_ϵ com centro na origem intersecta o conjunto $\psi^{-1}(0) \setminus \{0\}$ transversalmente. No caso $K = \mathbb{R}$, a interseção $K_\epsilon = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon$ pode ser vazia.*

0.2.4 Lema (Teorema 2.10, pag. 18). *Para $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o conjunto $\psi^{-1}(0) \cap \overline{B_\epsilon}$ é homeomorfo a um cone sobre K_ϵ com centro na origem. (Um cone sobre K_ϵ é definido por $\frac{K_\epsilon \times [0, 1]}{K_\epsilon \times \{0\}}$.)*

0.2.5 Teorema (pag. 45, pag 57). *Cada fibra F_θ é paralelizável¹ e tem o tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n . De fato, a fibra F_θ é*

¹o fibrado tangente TF_θ é trivial

$(n-1)$ -conexa e tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas $S^n \vee S^n \vee \dots \vee S^n$, onde o número de esferas do bouquet é dado pelo grau topológico da aplicação $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : S_\varepsilon^{2n+1} \rightarrow S_1^{2n+1}$.

0.2.6 Teorema (Teorema 5.2, pag. 45). *O espaço K_ε é $(n-2)$ -conexo. Ou seja, $\pi_i(K_\varepsilon) = 0$ para todo $i = 0, \dots, n-2$.*

Portanto, para $n \geq 2$ o link K_ε é conexo e para $n \geq 3$ ele é simplesmente conexo.

0.3 Caso Real

Considere agora $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação polinomial com $\psi(0) = 0$. Em [Mi], capítulo 11, Milnor assume a seguinte condição:

Condição de Milnor: *Suponha que exista uma vizinhança aberta U de 0 no $\mathbb{R}^m$ tal que $\Sigma(\psi) \cap U \subseteq \{0\}$, ou seja, $0 \in \mathbb{R}^m$ é um ponto singular isolado da aplicação ψ .*

Logo o conjunto $V = \{x \in \mathbb{R}^m : \psi(x) = 0\}$ define um conjunto algébrico real e $V \cap (U \setminus \{0\})$ é uma variedade suave (analítica real) de dimensão $(m-p)$. Além disso, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a interseção $K_\epsilon = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{m-1}$, se não for vazia, é uma variedade suave (analítica real) de dimensão $(m-p-1)$.

Do ponto de vista da teoria de singularidades a Condição de Milnor pode ser caracterizada da seguinte forma.

0.3.1 Definição. Sejam $f, g : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações analíticas. Dizemos que f e g são $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}$ -equivalentes, e denotamos por $f \underset{\mathcal{C}^l - \mathcal{R}}{\sim} g$, se existir um germe de difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^l$, $l > 0$, $h : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, tal que $g = f \circ h$.

0.3.2 OBSERVAÇÃO. Dado um germe de aplicação analítica $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$,

denotaremos por $j^k f(0)$, e chamamos o k -jato de f na origem, o polinômio de Taylor até ordem k de um representante de f .

0.3.3 Definição. Um germe analítico f é $k - \mathcal{C}^l - \mathcal{R}$ - determinado se para todo germe analítico g , tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$ temos que $f \underset{\mathcal{C}^l - \mathcal{R}}{\sim} g$. Simplesmente diremos que f é finitamente determinado, se f for k -determinado para algum k .

0.3.4 Teorema. [Wa] Dado um germe analítico $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. São equivalentes:

(a): ψ satisfaz a condição de Milnor em 0;

(b): ψ é $\mathcal{C}^l - \mathcal{R}$ -finitamente determinado para todo $l \in [0, \infty)$.

No que segue estaremos usando as seguintes notações: por $B_\epsilon^m \subset \mathbb{R}^m$ denotaremos a bola aberta de raio $\epsilon > 0$ com centro na origem, $\overline{B}_\epsilon$ a bola fechada e $S_\epsilon^{m-1} := \partial \overline{B}_\epsilon$.

Dado um germe analítico satisfazendo a condição de Milnor, em [Mi] páginas 97–98 foi provado o seguinte resultado:

0.3.5 Teorema. Dado ψ acima, existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo que: para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, existe η , $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que

$$\psi| : \psi^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap \overline{B}_\epsilon \rightarrow S_\eta^{p-1} \quad (2)$$

é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Além disso, usando campo de vetores Milnor construiu um difeomorfismo em $\overline{B}_\epsilon \setminus \{\psi = 0\}$ que leva a variedade com bordo $\psi^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap \overline{B}_\epsilon$ para $S_\epsilon^{n-1} \setminus N_{K_\epsilon}$, onde N_{K_ϵ} denota o interior do conjunto $T = \{x \in S_\epsilon^{m-1} : \|\psi(x)\| \leq \eta\}$. Com isso ele obtém que a aplicação

$$S_\epsilon^{m-1} \setminus N_{K_\epsilon} \rightarrow S_\eta^{p-1} \quad (3)$$

é um fibrado suave localmente trivial.

Usando mais uma vez que $\Sigma(\psi) \cap U \subseteq \{0\}$ temos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $0 \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular da aplicação $\psi| : S_\epsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$. Logo para cada $\epsilon > 0$ existe um $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que, todo $y \in \overline{B}_\eta^p \subset \mathbb{R}^p$ é valor regular de $\psi|$. Portanto, $T = S_\epsilon^{m-1} \cap \psi^{-1}(\overline{B}_\eta^p)$ é uma subvariedade com bordo da esfera, com $\partial(T) = \{x \in S_\epsilon^{m-1} : \|\psi(x)\| = \eta\}$. Da construção do difeomorfismo (ver [Mi], pag. 99, Lema 11.3) decorre que ele é a identidade sobre o bordo $\partial(\psi^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap \overline{B}_\epsilon) = \{x \in S_\epsilon^{m-1} : \|\psi(x)\| = \eta\} = \partial(T)$. Além disso, se K_ϵ não for vazio, temos que N_{K_ϵ} é uma vizinhança tubular aberta de K_ϵ na esfera e que sempre podemos estender a fibração (3) acima sobre $N_{K_\epsilon} \setminus K_\epsilon$ de tal forma que:

$$S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S_\eta^{p-1} \quad (4)$$

é uma fibração suave localmente trivial.

0.3.6 OBSERVAÇÃO. Da construção no parágrafo anterior decorre que, se K_ϵ for não vazio, ele vai ser difeomorfo ao bordo da fibra, digamos $\overline{F} = (\psi|)^{-1}(y)$, da fibração (2). Além disso, em [Mi], pags. 100–101, nos dois primeiros parágrafos da prova do Lema.11.4, Milnor mostra que a fibra $\overline{F}$ é $(p-2)$ -conexa. Usando o fato que qualquer variedade suave com bordo é equivalente homotópica a seu interior (neste caso, $\overline{F} \setminus K_\epsilon$), podemos concluir que a fibra da fibração (4) é também $(p-2)$ -conexa.

Milnor também observa que, em geral, não podemos esperar que a projeção da fibração (4) seja dada por $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ (veja o caso holomorfo (1)) como o seguinte exemplo mostra (veja [Mi], pag. 99):

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi(x, y) = (x, x^2 + y(x^2 + y^2))$$

Com efeito, observe que neste caso $V(\psi) = \Sigma(\psi) = (0, 0)$, logo para todo $\epsilon > 0$ o link K_ϵ é vazio. Pelo Teorema.0.3.7 abaixo é fácil ver que a aplicação

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^1 \rightarrow S_1^1$$

não é submersão, para todo ϵ suficientemente pequeno.

Em [Ja1, Ja2] A. Jacquemard apresentou uma caracterização dos pontos críticos da projeção $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1$ como segue

0.3.7 Teorema. [Ja1, Ja2]

Dada $\psi = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação analítica com singularidade isolada na origem. Um ponto $x \in S_\epsilon^{m-1}$ é crítico da projeção $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P(x)\nabla Q(x) - Q(x)\nabla P(x) = \lambda x$.

A prova deste teorema apresentada nas referências acima não é tão simples, no entanto, em [Ar2] usamos ferramentas básicas do cálculo avançado para apresentar uma prova bastante elementar da caracterização acima.

Seguindo a definição dada por M. Ruas, J. Seade e Verjovsky em [RSV], temos o seguinte :

0.3.8 Definição. Diremos que um germe de aplicação $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ satisfaz a **condição de Milnor forte na origem**, se ψ satisfaz a condição de Milnor e $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ for a projeção da fibração (4).

0.3.9 OBSERVAÇÃO. Claro que, para toda função holomorfa f com singularidade isolada na origem, a aplicação dada por $\psi = (\Re(f), \Im(f))$ satisfaz a condição de Milnor forte na origem. Além disso, em [RSV] os autores mostram como encontrar uma classe de aplicações analíticas (genuinamente) reais que satisfazem a definição acima.

De forma geral, o estudo de singularidades analítica reais ψ cuja aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S_\eta^{p-1}$ é a projeção de um fibrado suave localmente trivial, tem sido estudado por vários matemáticos, por exemplo: A. Jacquemard [Ja1, Ja2], M. Ruas, J. Seade e A. Verjovsky [RSV, RS, Se], A. Pichon [PS] e referências, M. Tibar [AT1, TYA], D. Massey [Ma] e T. Gaffney [GA].

Nos capítulos a seguir farei uma exposição de algumas ferramentas e resultados desenvolvidos nesta direção em conjunto com alguns matemáticos citados acima. Para tal, utilizamos ideias da teoria de estratificação, decomposição open book de variedade, teoria de singularidade, etc.

Ainda em [Mi] pag. 100, Milnor propôs chamar uma aplicação polinomial ψ de **trivial** se a fibra da fibração (2) for difeomorfa à bola fechada $\overline{B}^{m-p}$, $(m-p)$ -dimensional.

É claro que, se ψ acima for a projeção canônica nas p primeiras variáveis, então ela é trivial.

Em [CL] Church e Lamotke, seguindo a abordagem de E. Looijenga em [Lo], responderam amplamente esta pergunta da seguinte forma:

0.3.10 Teorema. [CL]: *Dada ψ como acima, temos:*

- a) *Para $0 \leq m-p \leq 2$ exemplos não triviais ocorrem precisamente para $(2,2)$, $(4,3)$ e $(4,2)$;*
- b) *Para $m-p \geq 4$, exemplos não triviais ocorrem para todo (m,p) ;*
- c) *Para $m-p = 3$, exemplos não triviais ocorrem para $(5,2)$ e $(8,5)$. Além disso, se a conjectura de Poincaré (3-dimensional) for falsa, então existem exemplos não triviais para todo (m,p) . Se a conjectura de Poincaré for verdadeira, todos os exemplos são triviais exceto para $(5,2)$, $(8,5)$ e possivelmente em $(6,3)$.*

Mais recentemente em [ADD] num trabalho conjunto com D. Dreibelbis

e N. Dutertre, utilizamos técnicas da teoria de Morse, teoria de singularidade, topologia e geometria diferencial para encontrar uma fórmula para a característica de Euler da fibra da fibração de Milnor real em todas as dimensões (m, p) . Como aplicação, utilizamos o resultado para encontrar uma descrição topológica da fibra em dimensão baixa e uma caracterização da aplicação trivial para o par $(4, 2)$.

Capítulo 1

Teoria de estratificação e fibração de Milnor real

Neste capítulo usaremos algumas ferramentas da teoria de estratificação para mostrar a existencia da fibração de Milnor forte para germes de aplicações analíticas reais. As técnicas e resultados apresentadas aqui se baseiam nos trabalhos em conjunto com M. Ruas [RS] e em [Ar1].

1.1 (C) –regularidade e fibração de Milnor forte

A seguir vamos relembrar alguns fatos e definições básicas sobre teoria de estratificação. Mais detalhes podem ser obtidos em [BK], [B2].

Seja M uma variedade riemanniana, X e Y subvariedades de M , tal que $Y \subset \overline{X}$. Seja (T_Y, π, ρ) uma vizinhança tubular de Y em M junto com uma projeção $\pi : T_Y \rightarrow Y$, associada a uma função controle suave e não negativa ρ com $\rho^{-1}(0) = Y$ e $\nabla \rho(x) \in \ker(d\pi(x))$.

1.1.1 Definição. [BK] (**Whitney (a)-regularidade**): Dizemos que (X, Y) é (a)-

regular em $y_0 \in Y$ se : para cada sequência de pontos $\{x_i\}$ em X , $x_i \rightarrow y_0$ tal que a sequência de espaços tangentes $\{T_{x_i}X\}$ tende no espaço de Grassmann de dim X —planos para algum plano T , então $T_{y_0}Y \subset T$. Se essa condição valer para todo y_0 em Y , diremos que o par (X, Y) satisfaz a condição (a) de Whitney.

1.1.2 Definição. [BK]:

Diremos que o par (X, Y) satisfaz a condição (m) se existir um número real $\epsilon > 0$ tal que

$$(\pi, \rho) |_{X \cap T_Y^\epsilon}: X \cap T_Y^\epsilon \rightarrow Y \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\pi(x), \rho(x))$$

é uma submersão, onde $T_Y^\epsilon := \{x \in T_Y / \rho(x) < \epsilon\}$.

Geometricamente, a condição (m) significa que a subvariedade X é transversal aos níveis $\rho = c$ dentro da vizinhança tubular aberta T_Y^ϵ .

1.1.3 Definição. (Bekka's condition) [BK]

Diremos que o par de estratos (X, Y) satisfaz a condição (c)— regular com respeito a função controle suave não negativa $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}^+$, se as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) $\rho^{-1}(0) = Y$;
- ii) $\rho |_X$ é uma submersão;
- iii) Dada $\{x_i\}$ uma sequência de pontos em X tal que $\{x_i\} \rightarrow y \in Y$ e $\ker(d_{x_i}\rho |_X) \rightarrow \tau$, então $T_y Y \subset \tau$.

1.1.4 OBSERVAÇÃO. Considerando $Star(Y) = \{X : X \text{ é estrato tal que } \bar{Y} \subset X\}$, de forma geral, a propriedade ii) da definição diz que $\rho |_{Star(Y)}$ é uma aplicação estratificada e iii) diz que $\rho |_{Star(Y)}$ é uma aplicação de Thom. A proposição a seguir fornece uma melhor descrição geométrica do item iii).

1.1.5 Proposição. [BK] *A propriedade iii) da definição acima é equivalente a*

$$\lim_{x \rightarrow y} \Pi_Y \left(\frac{\text{grad}_x(\rho|_X)}{\|\text{grad}_x(\rho|_X)\|} \right) = 0$$

onde Π_Y é a projeção ortogonal sobre $T_y Y$ e $0 \in T_y Y$.

A seguir apresento uma reformulação do Teorema.2.4, pag. 47, em [BK].

1.1.6 Teorema. [BK]: *Se o par (X, Y) é (c) -regular com respeito a uma função controle ρ , então o (X, Y) é (a) -regular e satisfaz a condition (m) .*

Agora considere $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 0$ uma família a um parâmetro de germes de funções analíticas reais, $F(x, \theta) = F_\theta(x)$, e suponha que o conjunto singular $\Sigma(F(x, \theta)) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}$. Denote por $X := F^{-1}(0) \setminus (0 \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $Y := 0 \times \mathbb{R}$ e, para cada θ fixo, denote $X_\theta = F_\theta^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m, 0$. Neste caso, diremos que o par (X, Y) é associado a família F .

O seguinte resultado foi provado em [B1] e [AV]. Em [RS], pag. 209, num trabalho conjunto com M. Ruas apresentamos uma ideia mais direta da prova.

1.1.7 Teorema. ([B1],[AV]) *Se o par (X, Y) como acima for (c) -regular com respeito a alguma função controle ρ , então existe uma família contínua de homeomorfismos $h_\theta : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, tal que, $h_\theta(X_\theta) = X_0$ e $\rho(h_\theta(x)) = \rho(x)$ sobre $F^{-1}(0)$.*

1.1.8 OBSERVAÇÃO. A ideia da prova é considerar a projeção $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, t) = t$ e aplicar o primeiro Lema de Isotopia de Thom. Além disso, decorre da prova que a família de homeomorfismos acima é um difeomorfismo suave ao longo de cada estrato X e Y .

Considere o sistema de coordenadas usual do plano $\mathbb{R}^2$. Para cada θ real fixo considere $L_{-\theta}$ a reta que passa pela origem do $\mathbb{R}^2$ com inclinação $-\theta$ em relação

a semi-reta positiva do eixo Ox . Denote por $\pi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow L_{-\theta}$ a projeção ortogonal sobre a reta $L_{-\theta}$.

Dada $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, considere $\Psi_\theta(x) = \pi_\theta \circ \psi(x)$. Logo temos uma família a um parâmetro $\Psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 0$, $\Psi(x, \theta) = \pi_\theta \circ \psi(x)$, de germes de aplicações analíticas.

1.1.9 OBSERVAÇÃO. Em [RS] mostramos que se ψ satisfaz a Condição de Milnor, então a família $\Sigma(\Psi(x, \theta)) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}$.

1.1.10 Definição. Dada a família de germes $\Psi(x, \theta) = \pi_\theta \circ \psi(x)$, diremos que a família Ψ é (c) -regular com respeito a uma função controle ρ , se o par (X, Y) associado à Ψ for (c) -regular com respeito a função controle ρ .

Com a notação acima provamos em [RS] o seguinte resultado.

1.1.11 Teorema. *Seja $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com singularidade isolada na origem, tal que a família Ψ é (c) -regular para a função $\rho(x, \theta) = \sum_i x_i^2$, então ψ é Milnor forte na origem.*

Prova. Ver [RS], pag. 211.

1.1.12 Corolário. *Se $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ for um germe de aplicações polinomiais quase-homogêneo, do tipo $(w_1, \dots, w_m; d)$ satisfazendo a condição de Milnor, então ψ é Milnor forte na origem.*

Prova. Segue do fato que o par de estratos oriundos de uma família quase-homogênea é (c) -regular. Ver detalhes em [B2].

1.1.13 OBSERVAÇÃO. A recíproca do teorema acima não é verdadeiro em geral. Basta considerar a aplicação

$$\begin{cases} P(x, y) = x \\ Q(x, y) = y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Por cálculo direto é possível mostrar que a aplicação $\psi = (P, Q)$ é Milnor forte na origem (ou os resultados da seção.2.3). No entanto, considerando a sequência de pontos $p_i = (x_i, y_i, \theta_i) \in X$, onde $x_i \rightarrow 0$, $y_i = 0$, $\theta_i = \frac{\pi}{2}$, temos que a estratificação (X, Y) associada a família $\Psi(x, y, \theta)$ não é (a) -regular.

Em [Ja1, Ja2] A. Jacquemard mostrou o seguinte resultado

1.1.14 Teorema ([Ja1, Ja2]). *Seja $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de aplicação analítica real com singularidade isolada na origem. Suponha que existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{R}^m$ tal que:*

$$(A) \quad \frac{\|\langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle\|}{\|\nabla P(x)\| \cdot \|\nabla Q(x)\|} \leq 1 - \rho, \quad \forall x \in V \setminus \{0\}, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

(B) *O fecho integral (real) dos ideais gerados por $\nabla P(x)$ e $\nabla Q(x)$ no anel (local) dos germes de funções analíticas reais $\mathcal{A}_m$, coincidem.*

Então, existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1$ é a projeção de uma fibração suave localmente trivial.

Ainda em [RS], página 215, provamos o seguinte

1.1.15 Teorema. *Se $\psi = (P, Q) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ satisfaz as hipóteses do Teorema.1.1.14, então o par associado (X, Y) é (c) -regular.*

E apresentamos o exemplo abaixo para mostra que a nossa condição de (c) -regularidade é mais fraca que as dadas por Jacquemard acima.

1.1.16 EXEMPLO. Considere $\begin{cases} P = xy \\ Q = x^2 - y^4 \end{cases}$. Mostramos em [RS], pag. 216–217

que o par (X, Y) associado é (c) -regular. Por cálculo direto, é fácil ver que condição (B) do teorema acima falha.

1.2 Condição (m) uniforme

No que segue apresentaremos um pequeno refinamento do Teorema.2.8 da seção anterior. Mais detalhes podem ser encontrados em [Ar1]

1.2.1 Definição. Seja ρ uma função controle como definida anteriormente (ver Definição.1.1.2). Diremos que a família a um parâmetro de germe de funções $F(x, \theta)$ tem raio de Milnor ρ - uniforme, se existir $\epsilon_0 > 0$ tal que o par (X, Y) , satisfaz a condição (m) .

1.2.2 OBSERVAÇÃO.

1. Se a definição vale para algum $\epsilon_0 > 0$, é claro que também valerá para todo ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$;
2. Usando a função controle $\rho(x_1, \dots, x_m, \theta) = \sum_{i=1}^m x_i^2$ em $\mathbb{R}^{m+1}$, esta definição diz que o estrato X é transversal a todo cilindro euclidiano sobre a vizinhança tubular $T_Y^{\epsilon_0}$. Mais precisamente, as variedades $X_\theta = F_\theta^{-1}(0)$ são transversais a todas as esferas S_ϵ^{m-1} , for all $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

A seguir apresentaremos dois lemas que serão úteis na prova da Proposição.1.2.5 abaixo. A prova deles são diretas e podem ser encontradas em [Ar1]. No que segue ainda estamos considerando a família $\Psi(x, \theta) = \pi_\theta \circ \psi(x)$, para $\psi = (P, Q)$ uma aplicação satisfazendo a condição de Milnor.

1.2.3 Lema. *Existe $\epsilon_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que para todo $x \in B_{\epsilon_0}^m(0) \setminus \{\psi^{-1}(0)\} \subset U$, os campos de vetores $\nabla_x \Psi_\theta(x)$ e $\gamma(x) := P(x)\nabla Q(x) - Q(x)\nabla P(x)$ são paralelos.*

1.2.4 Lema. *Existe um campo de vetores suave ω tangente a $S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon$, tal que:*

$$(i) \quad \langle \omega(x), \frac{P(x)\nabla Q(x) - Q(x)\nabla P(x)}{P^2(x) + Q^2(x)} \rangle = 1,$$

(ii) $|\langle \omega(x), \frac{P(x)\nabla P(x) + Q(x)\nabla Q(x)}{P^2(x) + Q^2(x)} \rangle| \leq M$; $M > 0$, para cada $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

1.2.5 Proposição. [Ar1]

Seja $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com ponto crítico isolado em $0 \in \mathbb{R}^m$, tal que a família associada $\Psi(x, \theta)$ tem raio de Milnor uniforme com respeito a função euclidiana $\rho(x_1, \dots, x_m, \theta) = \sum_i x_i^2$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1$ é a projeção suave de um fibrado localmente trivial.

Prova.

Pelo Lema.1.2.3, temos que a projeção $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1$ é submersão para todo ϵ suficientemente pequeno.

Fazendo a identificação natural de $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ e considerando $\psi(x) = (P(x), Q(x)) \sim P(x) + iQ(x)$, podemos considerar a projeção $\frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|} = e^{i\theta(x)}$.

Pelo Lema.1.2.4, existe um campo de vetores suave ω tangente à $S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon$, satisfazendo as condições *i*) e *ii*) do lema. Agora, considerando o fluxo $\phi_t(x)$ de $\omega \in T_x(S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon)$, com $\phi_0(x) = x$ e $\frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|} = e^{i\theta(x)}$, temos $\theta(x) = \text{Re}(-i \ln \psi(x))$ e

$$\frac{d}{dt}(\theta(\phi_t(x))) = \langle \dot{\phi}_t(x), \frac{P(\phi_t(x))\nabla Q(\phi_t(x)) - Q(\phi_t(x))\nabla P(\phi_t(x))}{P^2(\phi_t(x)) + Q^2(\phi_t(x))} \rangle = 1$$

então, $\theta(\phi_t(x)) = t + c$; $\theta(\phi_t(x)) = t + \theta_0$, onde $\theta(\phi_0(x)) = \theta(x) = \theta_0$ é o valor inicial.

Se o fluxo ϕ_t estiver bem definido $\forall t \in \mathbb{R}$, temos $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1$ é uma submersão sobre S^1 , pois a função projeção $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ aplica $\phi_t(x)$ sobre S^1 , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo tivermos que $t \rightarrow t_0 \implies \phi_t \rightarrow K_\epsilon$, então $\|\psi(\phi_t)\| \rightarrow 0$ e

$\log \|\psi(\phi_t)\| \rightarrow \infty$.

Porém, $|\frac{d}{dt}(\log(\|\psi(\phi_t)\|^2))| = |\langle \dot{\phi}_t, \frac{\nabla(\|\psi(\phi_t)\|^2)}{P(\phi_t)^2 + Q(\phi_t)^2} \rangle| \leq M$ tem derivada limitada, logo $\log \|\psi(\phi_t)\| \rightarrow \infty$. Portanto, o fluxo está bem definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora usando uma ideia análoga ao [Mi], pag. 43, veja também [Ja1, page 22], considere $\pi = \frac{\psi}{\|\psi\|}$, $x_0 \in S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon$ fixo, defina $h_{x_0}(t) = \phi_{x_0}(t)$. Para cada t , temos que $h_t : S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S_\epsilon^{m-1} \setminus K_\epsilon$ é um C^∞ -difeomorfismo dado pelo fluxo de ω no Lema 1.2.4, e se $e^{is} \in S^1$, $h_t(\pi^{-1}(e^{is})) = \pi^{-1}(e^{i(s+t)})$. Isso significa que o fluxo é transversal a toda fibra $F_t := \pi^{-1}(t)$. Além do mais, se consideramos U_α uma vizinhança de $e^{i\alpha}$ em S^1 suficientemente pequena, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \pi^{-1}(\alpha) & \xrightarrow{h_t} & \pi^{-1}(U_\alpha) \\ \pi_1 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.

1.2.6 Corolário. *Se o par (X, Y) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.11, então ele tem raio de Milnor ρ -uniforme para $\rho(x, \theta) = \sum_i x_i^2$.*

Prova. Acontece que pelo Teorema.1.1.6 a condição (c)-regular de Bekka, implica a condição (m) (e a condição (a) de Whitney para o para de estratos (X, Y)). Ver detalhes em [BK].

O exemplo abaixo mostra uma aplicação analítica que satisfaz as hipóteses da Proposição.1.2.5 mas o par de estrato associado (X, Y) não satisfaz a condição (a) de Whitney, portanto o par não satisfaz a condição (c)-regular de K. Bekka conforme o Teorema.1.1.6. Mais detalhes pode ser visto em [ACS]:

1.2.7 EXEMPLO.

$$\begin{cases} P = x \\ Q = yx^2 + y^3 \end{cases}$$

Observe que $\Psi(x, y, \theta) = \cos(\theta)x - \sin(\theta)(yx^2 + y^3)$, logo $\nabla\Psi_\theta(x, y) = (\cos(\theta) - 2xy\sin(\theta), -(x^2 + 3y^2)\sin(\theta))$. Vamos verificar que num aberto do tipo $U \setminus \{0\}$ os campos de vetores $\nabla\Psi_\theta(x, y)$ e o vetor posição (x, y) não são paralelos, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Para isso será suficiente resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \langle \nabla_{(x,y)} \Psi_\theta(x, y), (-y, x) \rangle = 0 \\ \Psi_\theta(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ou,

$$\begin{cases} y\cos(\theta) + (xy^2 + x^3)\sin(\theta) = 0 \\ x\cos(\theta) - (yx^2 + y^3)\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} y & xy^2 + x^3 \\ x & -(yx^2 + y^3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como o vetor $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ é não nulo, então basta verificar o rank da matriz da direita. Mas, seu determinante é dado por

$$-y(yx^2 + y^3) - x(xy^2 + x^3) = -(x^2 + y^2)^2,$$

que é nulo se, e somente se, $x = y = 0$. Portanto, o par associado (X, Y) satisfaz a condição (m) para a função controle $\rho(x, y, \theta) = x^2 + y^2$.

Para ver que o par associado (X, Y) não satisfaz a condição (a) de Whitney, conforme Observação.1.1.13 anterior, considere a sequência x_i, y_i, θ_i , com $x_i \rightarrow$

$0, y_i = 0, \theta_i = \frac{\pi}{2}$. É fácil ver que a condição (a) de Whitney falha ao longo desta sequência.

1.2.8 OBSERVAÇÃO. Em [GA] num trabalho conjunto com T. Gaffney mostramos como utilizar a ferramenta de fecho integral real para módulos para garantir a existência da fibração de Milnor para germes com singularidade não isolada. A ideia geral foi mostrar que sob certas condições naturais podemos utilizar o fecho integral do modulo jacobiano de uma aplicação f para garantir a propriedade A_f –Thom ao longo de uma estratificação (a) de Whitney de $f^{-1}(0)$.

Capítulo 2

Estrutura Open Book e fibração de Milnor real

Neste capítulo utilizaremos algumas técnicas da estrutura open book para mostrar a existência da fibração de Milnor real para germes de aplicações polinomiais $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $\text{Sing } \psi \cap \psi^{-1}(0) \subseteq \{0\}$. Esta exposição é baseada nos trabalhos conjunto com M. Tibar publicado em [AT1, AT2].

Seja $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica real não trivial e $V := \{\psi = 0\}$ a variedade de um representante ψ , $S_\varepsilon^{m-1} := \partial \overline{B_\varepsilon}$ e $K_\varepsilon := V \cap S_\varepsilon^{m-1}$ o link da singularidade (que pode ser vazio).

Como já discutimos na introdução, em [Mi, §11] apresentou um estudo para $\text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$ o qual significa que o conjunto singular da aplicação ψ consiste de no máximo a origem $0 \in \mathbb{R}^m$. Ele mostra que para qualquer $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe uma fibração suave:

$$S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1}. \quad (2.1)$$

Mas que no geral, a aplicação projeção

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1} \quad (2.2)$$

não é necessariamente uma fibração suave. Mais detalhes pode ser visto no capítulo da introdução.

No capítulo anterior vimos como podemos usar a teoria de estratificação para abordar esse problema no caso $p = 2$ e $\text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$. Nosso propósito neste capítulo é ampliar esse contexto para qualquer $p \geq 2$ com singularidades não isoladas. Mais precisamente, estaremos considerando $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com $m \geq p \geq 2$, um germe de aplicação analítica satisfazendo o seguinte critério sobre o conjunto singular:

$$V \cap \text{Sing } \psi \subseteq \{0\} \quad (2.3)$$

o qual é a condição mais ampla possível que possamos garantir que o link K é uma variedade suave, e portanto, que ainda possa admitir uma “estrutura open book superior” como definida na próxima seção.

Observamos no entanto que, sobre a condição (2.3) and $\dim \text{Sing } \psi > 0$, a prova de Milnor para garantir a fibração (2.1) não funciona mais (veja por ex. o comentário após o Teorema. 0.3.5 na introdução) pois não existe uma fibração suave no “ tubo” (Teorema.0.3.5, fibração (2) - introdução) e consequentemente o processo de inflar o tubo para a esfera forneceria uma fibração singular também. Nesta situação, o Teorema 2.2.2 a seguir prova numa versão estendida um critério no qual a aplicação projeção (2.2) define uma “ estrutura open book ” conforme nossa definição. Isto foi um problema implícito no livro de Milnor [Mi, §11]. Nossa abordagem é baseada no método do pencil de Lefschetz o qual foi usado em particular

em [Ti] para abordar vários tópicos em teoria de singularidade complexa.

2.1 Estrutura Open Book e singularidades não isoladas

O conceito de *estrutura open book* foi denominado por Winkelnkemper em [Wi], mas aparece na literatura com vários outros nomes, como: fibered knot or link (veja por ex. [Du]), Milnor ou Lefschetz fibration (veja por ex. [Ti] para uma ampla discussão e referência), spinnable structure, etc.

Classicamente, uma **estrutura open book** (open book structure) de uma variedade suave real M é um par (K, θ) consistindo de uma subvariedade K com codimensão 2 em M , e uma fibração suave localmente trivial $\theta : M \setminus K \rightarrow S^1$ sobre o círculo $S^1 := \partial B^2$, tal que, K admite uma vizinhança N difeomorfa ao produto $B^2 \times K$ no qual K é identificada com $\{0\} \times K$ e a restrição $\theta|_{N \setminus K}$ é a seguinte composição com projeção natural

$$N \setminus K \xrightarrow{\text{difeo}} (B^2 \setminus \{0\}) \times K \xrightarrow{\text{proj}} B^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1,$$

onde a última aplicação é a projeção radial. Diremos neste caso que K é o *binding* e que o fecho das fibras de θ são as páginas do *open book*.

Em [AT1] colocamos essa definição num contexto mais geral permitindo que a codimensão p de K seja maior ou igual a 2, mais precisamente:

2.1.1 Definição ([AT1], pag. 179). Uma *estrutura open book superior* (higher open book structure) de uma variedade suave M é um par (K, θ) onde K é uma subvariedade não vazia de codimensão $p \geq 2$ em M , e $\theta : M \setminus K \rightarrow S^{p-1}$ é uma fibração suave localmente trivial sobre a esfera $S^{p-1} = \partial B^p$, tal que, K admite uma vizinhança N difeomorfa ao produto $B^p \times K$ no qual K é identificada com $\{0\} \times K$ e a restrição $\theta|_{N \setminus K}$ é a composição

$$N \setminus K \xrightarrow{\text{difeo}} (B^p \setminus \{0\}) \times K \xrightarrow{\text{proj}} B^p \setminus \{0\} \rightarrow S^{p-1},$$

onde a última aplicação é a projeção radial.

2.1.2 OBSERVAÇÃO. A construção de Milnor da fibração $\frac{\psi_f}{\|\psi_f\|}$ para funções holomorfas f , com singularidade isolada na origem, produz uma *estrutura open book* de S_ε^{2n+1} . De acordo com a definição acima, a fibração de Milnor (2.1) para aplicações reais com singularidade isolada fornece uma *estrutura open book superior* de S_ε^{m-1} , desde que o link K_ε seja não vazio. Com nossa abordagem mais geral, a existência da fibração (2.2) associada a aplicação $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com singularidade não isolada fornecerá uma estrutura open book superior de S_ε^{m-1} .

2.2 Existência da Estrutura Open Book Superior

O conjunto singular $\text{Sing } \psi$ pode intersectar a variedade V num conjunto de dimensão positiva. Isso significa que o link K é uma variedade algébrica singular. A condição (2.3) é portanto a mais geral sobre a qual uma estrutura open book com binding não singular K poderia existir.

Na seção §2.3 a seguir explicamos como nossa condição cobre os resultados obtidos anteriormente, em particular, para o caso $p = 2$ de aplicações com singularidade isolada na origem.

Seja $\psi = (P_1, \dots, P_p) : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, para $m \geq p \geq 2$, um germe de aplicação analítica real. Seja $\omega_{i,j}(x) := P_i(x) \nabla P_j(x) - P_j(x) \nabla P_i(x)$, para $i, j = 1, \dots, p$, onde ∇ denota o gradiente das funções coordenadas.

Defina a seguinte $[(p-1)p/2 + 1] \times m$ matriz:

$$\Omega_\psi(x) := \begin{bmatrix} \omega_{1,2}(x) \\ \vdots \\ \omega_{i,j}(x) \\ \vdots \\ \omega_{p-1,p}(x) \\ x_1, \dots, x_m \end{bmatrix}$$

tendo em cada linha um vetor $\omega_{ij}(x)$ com $i < j$, exceto na última linha que contém o vetor posição $(x_1, \dots, x_m)$.

Em [AT1] provamos o seguinte resultado geral

2.2.1 Teorema ([AT1], pags. 179–181). *Se $V \cap \text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$ como germe de conjunto, temos a seguinte equivalência:*

- (a) *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1}$ é uma C^∞ fibração suave localmente trivial, para qualquer $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.*
- (b) $\text{rank } \Omega_\psi(x) = p, \forall x \in B_{\varepsilon_0}^m \setminus V$.

Em particular, sempre que $K_\varepsilon \neq \emptyset$ este critério fornece uma decomposição do tipo open book superior de S_ε^{m-1} .

Da técnica desenvolvida na prova (ver, [AT1], pag. 180, final do terceiro parágrafo) segue que a condição (b) acima é equivalente a seguinte

condição (b'): A aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1}$ é uma submersão, para todo ε suficientemente pequeno.

Neste caso podemos enunciar o teorema anterior da seguinte forma:

2.2.2 Teorema. *Se $V \cap \text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$ como germe de conjunto, temos a seguinte equivalência:*

- (a) *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1}$ é uma C^∞ fibração suave localmente trivial, para qualquer $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.*
- (b') *A aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus K_\varepsilon \rightarrow S^{p-1}$ é uma submersão, para todo ε suficientemente pequeno.*

Em particular, sempre que $K_\varepsilon \neq \emptyset$ este critério fornece uma decomposição do tipo open book superior de S_ε^{m-1} .

Prova. Seguindo a ideia apresentada em [AT1].

A direção (a) implica (b') é trivial. Basta checar que a direção (b') implica (a). Para isso vamos fixar um $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Por hipótese temos que a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é submersão. No caso $V = \{0\}$, temos que $K_\varepsilon = \emptyset$ e a aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é própria e podemos aplicar o Teorema de Ehresmann para garantir que (2.2) é uma fibração suave. Mas, se $\dim V > 0$ a aplicação já não é mais própria, pois já sabemos que as fibras de $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ não são compactas pelo fato de seu fecho conter $K_\varepsilon \neq \emptyset$.

Como $V \cap \text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$, para cada $\epsilon > 0$, tome $\eta = \eta(\epsilon)$, $0 < \eta \ll \varepsilon$, tal que a restrição de ψ :

$$\psi| : S_\varepsilon^{m-1} \cap \psi^{-1}(\bar{B}_\eta^p) \rightarrow \bar{B}_\eta^p \quad (2.4)$$

é uma fibração suave trivial. Isso é possível pois da hipótese segue que para ϵ suficientemente pequeno 0 é valor regular da aplicação $\psi|_{S_\epsilon^{m-1}}$. Vamos fixar agora tal trivialização. Segue da fibração (2.4) acima que a restrição:

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \cap \psi^{-1}(S_\eta^{p-1}) \rightarrow S^{p-1} \quad (2.5)$$

é uma fibração trivial também.

Por outro lado, como por hipótese $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é submersão (observe que ela é sobrejetora por (2.5)), temos que:

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\varepsilon^{m-1} \setminus \psi^{-1}(B_\eta^p) \rightarrow S^{p-1} \quad (2.6)$$

é uma fibração suave sobre a variedade compacta com bordo $S_\varepsilon^{m-1} \setminus \psi^{-1}(B_\eta^p)$. Claro que as fibrações (2.5) e (2.6) coincidem em $S_\varepsilon^{m-1} \cap \psi^{-1}(S_\eta^{p-1})$. Logo, isso estende a trivialização da aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ para o interior da vizinhança tubular do link K_ε usando o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S_\varepsilon^{m-1} \cap \psi^{-1}(\bar{B}_\eta^p \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\psi} & \bar{B}_\eta^p \setminus \{0\} \\ & \searrow \frac{\psi}{\|\psi\|} & \downarrow \frac{y}{\|y\|} \\ & & S^{p-1} \end{array}$$

onde $\frac{\psi}{\|\psi\|}$ é uma composição de fibrações triviais suaves.

2.3 Caracterização da Condição Milnor forte na origem

Uma consequência do nosso Teorema. 2.2.2 é a seguinte:

2.3.1 Corolário. *Seja $p = 2$ e $\psi := (P, Q)$ tal que satisfaz a condição de Milnor. Então, são equivalentes:*

(a) *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a aplicação (2.2) é uma fibração suave;*

(b) $\bar{\Gamma} \not\ni \{0\}$, onde

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^m \setminus V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } P(x)\nabla Q(x) - Q(x)\nabla P(x) = \lambda x\}.$$

(c) existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $x \in B_\varepsilon \setminus V$, temos a seguinte desigualdade:

$$|\langle x, \omega(x) \rangle| < \|x\| \|\omega(x)\|,$$

onde $\omega(x) := P(x) \nabla Q(x) - Q(x) \nabla P(x)$.

Prova. Imediato. Ver detalhes em [AT2] ou [AT1].

Segue também do nosso resultados em [AT2, AT1] a seguinte generalização

2.3.2 Corolário. *Seja $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação quase-homogênea com peso $(w_1, \dots, w_m)$ e grau α , com $\text{Sing } \psi \subseteq \{0\}$. Então, a projeção (2.2) é uma fibração suave.*

Prova. Neste caso o campo de Euler $\gamma(x) := \sum_{j=1}^m w_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ sobre $\mathbb{R}^m$ mostra um papel fundamental.

A ideia geral é a seguinte:

Como

$$\langle \gamma(x), \omega_{ij}(x) \rangle = \alpha [P_i(x) P_j(x) - P_j(x) P_i(x)] = 0, \text{ para todo } i, j,$$

isso significa que o campo de Euler é tangente as fibras da aplicação $\frac{\psi}{\|\psi\|}$.

Além disso, como

$$\langle \gamma(x), x \rangle = \sum_i w_i x_i^2 > 0, \quad (2.7)$$

para $x \neq 0$, isso mostra que as fibras tem que ser transversais as esferas.

Logo, a projeção (2.2) é uma submersão.

2.4 Conclusão: Comparando os resultados obtidos

A seguir faço uma comparação dos resultados obtidos em [AT2, AT1] com os obtidos anteriormente, o qual valiam somente no caso $p = 2$.

Em [Ja1, Ja2] Jacquemard (Teorema.1.1.14) exibiu condições suficientes para a existência da fibração de Milnor forte as quais eram: numa vizinhança da origem, o ângulo entre os vetores gradientes ∇P and ∇Q deve ser limitado por baixo (Condição (A)) e esses gradientes deveria ter ordens iguais ao longo de qualquer curva analítica que passa pela origem. (Condição (B)). Usando as equações de Cauchy-Riemann para várias variáveis complexas, não é difícil ver que a parte real e imaginária de uma função holomorfa claramente satisfazem essas condições. No entanto, o primeiro exemplo genuinamente real aparece somente em [RSV]. A seguir, em [RS] apresentamos uma condição suficiente de outra natureza baseada na condição (C)–regular de K. Bekka, como respeito a função controle euclidiana. Lá provamos que essa condição é mais geral que a dada por Jacquemard, visto que as condições (A) e (B) torna o par de estratos (X, Y) relativos a família $\Psi(x, \theta) = \pi_\theta \circ \psi(x)$ (w)–regular (regularidade de Verdier), o qual é reconhecidamente mais forte que a (c)–regularidade. Por sua vez, a (c)–regularidade implica a condição (m) que é de fato equivalente à submersão referida no Teorema.2.2.2(b) (para qualquer p) ou Corolário.2.3.1.

Capítulo 3

Característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real

Neste capítulo utilizaremos técnicas da teoria de Morse, geometria e topologia diferencial, para apresentar uma fórmula para a característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor para germes de aplicações polinomiais reais $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com singularidade isolada na origem. Como aplicação, apresentaremos uma descrição topológica da fibra de Milnor e uma caracterização das aplicações triviais de $(\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Esta exposição é baseada no artigo [ADD] conjunto com D. Dreibelbris e N. Dutertre.

3.1 Introdução

É bastante conhecido que a existência da fibração de Milnor local para singularidades reais e complexas é a principal ferramenta no estudo da topologia da singularidade. Em [HK] H. King mostrou que uma condição necessária e suficiente para dois germes de aplicações analíticas reais com singularidade isolada na origem

serem $\mathcal{C}^0 - \mathcal{A}$ —equivalentes é que seus respectivos links sejam cobordantes invertíveis e suas fibrações de Milnor sejam isomorfas (fibrados equivalentes). Isto significa que, a fibração de Milnor desempenha um papel importante na classificação topológica de aplicações analíticas.

Como visto no capítulo introdutório, no caso complexo várias informações são obtidas sobre a existência da fibração de Milnor (para singularidades isoladas ou não) e sobre a topologia da fibra no caso isolada, no entanto, o mesmo não pode ser dito no caso real. Por exemplo, apenas recentemente alguns resultados sobre a existência da fibração de Milnor real para singularidade não isoladas foram obtidos, veja por exemplo [AT1, AT2, TYA, GA, CA, RS] e referências. Contudo, em alguns casos é possível obter fórmulas interessantes para a característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real (veja, por ex. [Du3] e referências). A seguir faremos uma pequena revisão de alguns resultados sobre a topologia da fibra de Milnor real para funções e aplicações.

3.2 Revisão de algumas fórmulas

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de função analítica com singularidade isolada na origem. Em [Kh] Khimshiashvili provou a seguinte fórmula:

$$\chi(f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) = 1 - \text{sign}(-\delta)^n \deg_0 \nabla f,$$

onde $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$, ∇f é o gradiente de f e $\deg_0 \nabla f$ é o grau topológico da aplicação $\frac{\nabla f}{|\nabla f|} : S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow S_1^{n-1}$.

Agora seja $\psi = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, $2 \leq k \leq n$, um germe de aplicação analítica e denote por ϕ o germe de aplicação $(f_1, \dots, f_{k-1}) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k-1}, 0)$. Assuma que $\psi^{-1}(0)$ and $\phi^{-1}(0)$ tem uma singularidade isolada em 0 (note que aqui as aplicações ϕ e ψ não necessitam ter ponto singular isolado na origem).

Alguns autores investigaram a seguinte diferença:

$$D_{\delta,\alpha} = \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap \{f_k \geq \alpha\} \cap B_\varepsilon) - \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap \{f_k \leq \alpha\} \cap B_\varepsilon),$$

onde (δ, α) é um valor regular de ψ tal que $0 \leq |\alpha| \ll |\delta| \ll \varepsilon$.

Em [Du2], N. Dutertre provou que:

$$D_{\delta,\alpha} \equiv \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,0}}{I} \pmod{2},$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,0}$ é o anel dos germes das funções analíticas na origem e I é o ideal gerado por $f_1, \dots, f_{k-1}$ e todos os $k \times k$ menores $\frac{\partial(f_k, f_1, \dots, f_{k-1})}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}$. Isto é somente uma relação mod 2, logo podemos perguntar se é possível obter uma relação mais precisa.

Quando $k = n$ e $f_k = x_1^2 + \dots + x_n^2$, de acordo com Aoki e autores em [AFN1, AFS] temos:

$D_{\delta,0} = \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) = 2\deg_0 H$, em que $2\deg_0 H$ é o número de semi-ramos de $\phi^{-1}(0)$ e

$$H = \left(\frac{\partial(f_n, f_1, \dots, f_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}, f_1, \dots, f_{n-1} \right).$$

Eles provaram uma fórmula similar no caso $f_k = x_n$ em [AFN] e Szafraniec generalizou os resultados para qualquer f_k em [Sz].

Quando $k = 2$ e $f_2 = x_1$, Fukui [Fu1] afirma que

$$D_{\delta,0} = -\text{sign}(-\delta)^n \deg_0 H,$$

onde $H = (f_1, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n})$

Várias generalizações da fórmula de Fukui foram dadas em [Du1, FK, Du3].

Ainda em [Du3] Dutertre forneceu uma fórmula para a característica de Euler-Poincaré para germes de aplicações $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ chamados “parcialmente paralelizáveis”.

3.3 Ferramentas da teoria de Morse

A seguir relembrarei alguns resultados da teoria de Morse para variedades suaves com bordo. A referência principal aqui é [HL] onde os resultados foram estabelecidos para C^∞ variedade M com bordo ∂M . Para facilitar a exposição apresentaremos os resultados sem demonstração e para variedades com bordo do tipo $M \cap \{g \leq 0\}$, onde M é uma variedade suave e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave tal que 0 é valor regular de g . De fato, este é o caso que vamos precisar na seção seguinte.

Seja M uma variedade suave de dimensão d e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que 0 é valor regular de g . Assuma que $M \cap g^{-1}(0)$ é não vazio. Isto implica que $M \cap \{g \leq 0\}$ é uma variedade suave com bordo. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto crítico de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ é um ponto crítico de $f|_{M \cap \{g < 0\}}$ ou um ponto crítico de $f|_{M \cap g^{-1}(0)}$.

3.3.1 Definição. Seja $q \in M \cap g^{-1}(0)$. Diremos que q é um ponto crítico correto de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ se q é um ponto crítico de $f|_{M \cap \{g=0\}}$ e q não é um ponto crítico de $f|_M$.

Diremos que q é ponto crítico correto não degenerado de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ se q é um ponto crítico de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ e q é um ponto crítico não degenerado de $f|_{M \cap g^{-1}(0)}$.

Se q é um ponto crítico correto de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ então $\nabla f(q) \neq 0$, $\nabla f(q)$ e $\nabla g(q)$ são colineares e existe $\tau(q) \neq 0$ tal que $\nabla f(q) = \tau(q)\nabla g(q)$.

3.3.2 Definição. Seja q um ponto crítico de $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$. Diremos que $\nabla f(q)$ aponta para o interior (resp. o exterior), se $\tau(q) < 0$ (resp. $\tau(q) > 0$).

3.3.3 Definição. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^∞ uma função. Diremos que $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ é correta, se todos os pontos críticos de $f|_{M \cap g^{-1}(0)}$ são corretos.

Diremos que $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ é uma função de Morse correta, se $f|_{M \cap \{g < 0\}}$ admite somente pontos críticos não degenerados e se $f|_{M \cap \{g = 0\}}$ admite somente pontos críticos corretos não degenerados.

3.3.4 Proposição. *Seja M uma variedade suave e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que 0 é um valor regular de g . Então o conjunto de funções suaves $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ é uma função de Morse correta é denso em $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

3.3.5 Teorema. *Seja M variedade suave e $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que 0 é valor regular de g . Assuma que $M \cap \{g \leq 0\}$ é compacto. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{M \cap \{g \leq 0\}}$ é Morse correto. Seja $\{p_i\}$ o conjunto dos pontos críticos de $f|_{M \cap \{g < 0\}}$ e seja $\{\lambda_i\}$ o conjunto de seus respectivos índices. Seja $\{q_j\}$ o conjunto dos pontos críticos de $f|_{M \cap \{g = 0\}}$ e seja $\{\mu_j\}$ o conjunto de seus respectivos índices. Então temos:*

$$\chi(M \cap \{g \leq 0\} \cap \{f \geq 0\}) - \chi(M \cap \{g \leq 0\} \cap \{f = 0\}) =$$

$$\sum_{i: f(p_i) > 0} (-1)^{\lambda_i} + \sum_{j: \substack{f(q_j) > 0 \\ \tau(q_j) < 0}} (-1)^{\mu_j}$$

$$\chi(M \cap \{g \leq 0\} \cap \{f \leq 0\}) - \chi(M \cap \{g \leq 0\} \cap \{f = 0\}) =$$

$$(-1)^d \sum_{i: f(p_i) < 0} (-1)^{\lambda_i} + (-1)^{d-1} \sum_{j: \substack{f(q_j) < 0 \\ \tau(q_j) > 0}} (-1)^{\mu_j}.$$

3.4 Característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor real

Seja $\psi = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$, $2 \leq k \leq n$, um germe de aplicação analítica real satisfazendo a condição de Milnor. Seja $\phi = (f_1, \dots, f_{k-1}) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k-1}, 0)$ e $V = \phi^{-1}(0)$. Logo, ϕ tem ponto crítico isolado na origem e o conjunto analítico V tem singularidade isolada em 0. Além do mais, $f_k|_{V \setminus \{0\}}$ não tem ponto crítico isolado numa vizinhança da origem.

Seja $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\omega(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Sabemos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a esfera $S_\varepsilon = \omega^{-1}(\varepsilon^2)$ intersecta V transversalmente. Seja p^ε um ponto crítico de $f_k|_{V \cap S_\varepsilon}$. Isto significa que existe $\tau(p^\varepsilon)$ tal que:

$$\nabla f_k|_V(p^\varepsilon) = \tau(p^\varepsilon) \nabla \omega|_V(p^\varepsilon).$$

Note que $\tau(p^\varepsilon) \neq 0$, pois f_k não tem ponto crítico sobre $V \setminus \{0\}$.

Os próximos dois resultados também estabeleceremos sem prova. Uma prova detalhada pode ser encontrada em [ADD].

3.4.1 Lema. *Se ε é suficientemente pequeno, então $f_k(p^\varepsilon) \neq 0$. Além disso, $\nabla f_k|_V(p^\varepsilon)$ aponta para o exterior (resp. interior) de $V \cap B_\varepsilon$ se, e somente se, $f_k(p^\varepsilon) > 0$ (resp. $f_k(p^\varepsilon) < 0$).*

Prova. [ADD], pag. 5.

3.4.2 Lema. *Para todo δ e ε tal que $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$, temos que $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon}$ é uma função de Morse correta. Além do mais, temos:*

- (1) *em todos os pontos crítico corretos de $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon}$ com $f_k > 0$, temos que $\nabla f_k|_{\phi^{-1}(\delta)}$ aponta para o exterior,*

- (2) em todos os pontos crítico corretos de $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon}$ com $f_k < 0$, temos que $\nabla f_k|_{\phi^{-1}(\delta)}$ aponta para o interior,
- (3) não existe pontos críticos correto de $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon}$ em $f_k^{-1}(0)$.

Prova. [ADD], pag 5.

Nosso principal resultado é o seguinte:

3.4.3 Proposição. *Dado ψ e ϕ como acima, temos o seguinte resultado:*

(i) Se n é par, então:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 1 - \deg_0 \nabla f_1.$$

Além disso, $\deg_0 \nabla f_1 = \dots = \deg_0 f_k$.

(ii) Se n é ímpar, então $\deg_0 \nabla f_i = 0$, para todo i e

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 1.$$

Prova. Aplicando a teoria de Morse para a variedade com bordo $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon}$, temos:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap \{f_k \geq 0\} \cap B_\varepsilon) - \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 0,$$

pelo fato que $f_k|_{\phi^{-1}(\delta)}$ não tem ponto crítico pois $\Sigma(\psi) = \{0\}$ e, pelo Lema anterior, $\nabla f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon}$ aponta para o exterior nos pontos críticos de $f_k|_{\phi^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon}$ que estão em $\{f_k > 0\}$.

Similarmente, temos:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap \{f_k \leq 0\} \cap B_\varepsilon) - \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 0.$$

Somando as duas igualdades e usando a sequência de Mayer-Vietoris, obtemos:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon) = \chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon).$$

Aplicando o procedimento acima $k - 1$ vezes, obtemos que:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = \chi(f_1^{-1}(\alpha_1) \cap B_\varepsilon),$$

onde α_1 é um valor regular de f_1 suficientemente pequeno.

Pela fórmula de Khimshiashvili, sabemos que:

$$\chi(f_1^{-1}(\alpha_1) \cap B_\varepsilon) = 1 - \text{sign}(-\alpha_1)^n \deg_0 \nabla f_1.$$

Consequentemente, se n for par temos:

$$\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 1 - \deg_0 \nabla f_1.$$

Se n for ímpar, basta mudar α_1 por $-\alpha_1$ e obtemos que $\deg_0 \nabla f_1 = 0$ e $\chi(\phi^{-1}(\delta) \cap f_k^{-1}(0) \cap B_\varepsilon) = 1$.

3.4.4 Corolário. *Seja γ um valor regular de ψ , suficientemente pequeno. Então, se n for par, temos que:*

$$\chi(\psi^{-1}(\gamma) \cap B_\varepsilon) = 1 - \deg_0 \nabla f_1 = \cdots = 1 - \deg_0 \nabla f_k,$$

e $\deg_0 \nabla f_1 = \cdots = \deg_0 \nabla f_k$. Se n for ímpar, temos que $\deg_0 \nabla f_1 = \cdots = \deg_0 \nabla f_k = 0$ and $\chi(\psi^{-1}(\gamma) \cap B_\varepsilon) = 1$.

3.4.1 Descrição Geométrica/Topológica da fibra - Aplicações para baixa dimensão

Dado um germe analítico $\psi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ satisfazendo a condição de Milnor, em [CL] os autores provaram o resultado a seguir o qual diz para quais pares

(m, p) o ponto $0 \in \mathbb{R}^m$ é isolado em $\psi^{-1}(0)$; ou seja, com germe de conjunto temos $\psi^{-1}(0) = \{0\}$. Isto é equivalente a dizer que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o link $K = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{m-1}$ é vazio.

3.4.5 Lema. *Se 0 for isolado em $\psi^{-1}(0)$, então $m = p$ ou $(m, p) = (4, 3), (8, 5), (16, 9)$. Se $m = p$ a singularidade é trivial, a menos que $p = 2$. Os outros casos nunca são triviais.*

Prova. See [CL], Lema 1, page 151.

3.4.6 EXEMPLO. Todos os germes $\psi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ satisfazendo a condição de Milnor são triviais.

3.4.7 EXEMPLO. Para qualquer $\psi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ analítica satisfazendo a condição de Milnor o link K_ϵ , para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é sempre não vazio.

Como uma consequência do Lema 3.4.8 abaixo (veja Corolário 3.4.9) obtemos uma caracterização das aplicações triviais no par $(4, 2)$.

3.4.2 Topologia da fibra de Milnor no par $(4, 2)$.

Vamos considerar um germe de aplicação $\psi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com singularidade isolada na origem. Vamos lembrar que, como $p = 2$, a fibra de Milnor é conexa e como o link é não vazio temos que a fibra, digamos F_ψ , é uma superfície compacta com bordo, conexa, e orientável.

Em [Ru] Lee Rudolph mostrou uma relação entre a característica de Euler-Poincaré da fibra da fibração de Milnor de ψ e $\beta_1(F_\psi)$, o primeiro número de betti da fibra F_ψ , no qual ele definiu com o número de Milnor de ψ . A relação é:

$$\chi(F_\psi) = 1 - \text{rank}(H_1(F_\psi)),$$

onde como usual, $H_1(F_\psi)$ denota o primeiro grupo de homologia de F_ψ ¹.

Logo, pela Proposição.3.4.3 segue que

$$\beta_1(F_\psi) = \deg_0 \nabla f.^2$$

Da classificação de superfícies fechadas (compacta e sem bordo) orientáveis S , é conhecido que $\chi(S)$ é um inteiro par e menor que ou igual a 2, e o número de betti de S são $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2g(S), \beta_2 = 1$, onde $g(S)$ denota o gênero de S .

Por outro lado, é bastante conhecido que dada uma superfície compacta com bordo, digamos S_B , então os bordos são curvas fechadas difeomorfas a círculos e sua característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(S_B) = \chi(S) - k,$$

onde agora S é a superfície fechada obtida de S_B após “ colarmos ” k discos abertos sobre os bordos (um disco para cada bordo).

Podemos juntar todas as informações acima no seguinte resultado:

3.4.8 Lema. *Seja F a superfície fechada obtida de F_ψ colando os discos abertos nos bordos e $k \geq 1$ o número de curvas fechada que compõe os bordos. Então:*

$$(i.) \quad \chi(F) = k + 1 - \deg_0 \nabla f,$$

$$(ii.) \quad 2g(F) = \deg_0 \nabla f + 1 - k.$$

Prova.

¹com coeficientes em $\mathbb{Z}$

²Como no caso de singularidades complexas, o grau topológico da função coordenada é o primeiro número de betti da fibra.

O item (i) é fácil. Para ver o item (ii), basta usar o fato que $\beta_1(F_\psi) = \beta_1(F) + k - 1$.

3.4.9 Corolário. *Seja $\psi = (f, g) : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com singularidade isolada na origem. Então, ψ é trivial se, e somente se, $\deg_0 \nabla f = 0$.*

Prova. Se F_ψ for um disco fechado, temos que $k = 1$ e colando um disco aberto no bordo temos que F é homeomorfa a esfera. Aplicando, por exemplo, Lema.3.4.8, item (ii.), temos que $\deg_0 \nabla f = 0$, pois $g(F) = 0$. Reciprocamente, se assumirmos que $\deg_0 \nabla f = 0$, pelo Lema.3.4.8 item (i.), temos que $\chi(F) = k + 1$ e como $\chi(F) \leq 2$ e $k \geq 1$, temos $k = 1$. Então, $\chi(F) = 2$ e F_ψ é um disco fechado.

3.4.10 EXEMPLO. Seja $\psi(x, y, u, v) = (x, 3x^2y + y^3 + u^2 + v^2)$. É fácil ver que $\sum(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Como $\nabla f = (1, 0, 0, 0)$, então $\deg_0 \nabla f = 0$. Portanto, ψ é uma aplicação trivial.

3.4.3 Descrição Geométrica/Topológica da fibra

Ainda estamos assumindo $\psi = (f, g) : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ como singularidade isolada na origem.

Utilizaremos a notação D , S^2 , T , T^2 para: o disco fechado, a esfera 2-dimensional, o toro e o bitoro, respectivamente. Por $S^2 - 2D$, por exemplo, queremos dizer que a fibra é difeomorfa a *esfera menos dois disco abertos e disjuntos*, ou seja o cilindro. E assim por diante.

Para ilustrar a situação, na coluna que contém o par (f, g) aparece um exemplo do germe de aplicação com as propriedades descrita em linha.

	$\deg_0 \nabla f$	k	Topology	$(f, g) : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$
a)	0	1	D	$(x, 3x^2y + y^3 + u^2 + v^2)$
b)	1	2	$S^2 - 2D$	$z^2 + w^2$
c)	2	1	$T - D$	$z^2 + w^3$
d)	2	3	$S^2 - 3D$	$zw(\bar{z} + \bar{w})$
e)	2	3	$S^2 - 3D$	$z^3 + w^3 + zw(\bar{z} - z + \bar{w} - w)$
f)	3	2	$T - 2D$	$z^2 + w^2\bar{z}$
g)	3	4	$S^2 - 4D$	$\bar{z}\bar{w}(z^2 + w^4)$
h)	4	1	$T^2 - D$	$z^2 + w^5$
i)	4	3	$T - 3D$	$w^3 + z^3$
j)	4	5	$S^2 - 5D$	$z^2\bar{w} + w^2\bar{z}$

3.4.11 OBSERVAÇÃO. Os exemplos b), c), h) e i), são as singularidades de *Pham-Brieskorn* ([Mi], pag. 71) e são holomorfas. O exemplo j) é uma singularidade do tipo *twisted Pham-Brieskorn* ([Se, RSV]), enquanto o exemplo g) é baseado na família de singularidades estudadas em ([PS]). O Exemplo d) provém do artigo de A'Campo ([AC]) por essa razão chamamos de *exemplo de A'Campo*. O exemplo e) é aparentemente novo. Apesar das fibras do exemplos d) e e) serem topologicamente equivalentes, suas respectivas fibrações de Milnor não são isomorfas. Pois, o exemplo de A'Campo apresenta como link três círculos dois a dois linkados, enquanto o link do exemplo e) tem dois dos três círculos não linkados.

Referências Bibliográficas

- [AC] N. A'Campo, *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*. Indag. Math. 35 (1973), 113–118.
- [ACS] A. Fernandes, C. Humberto Soares, R.dos Santos, *Topological Triviality of family of function and sets*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol.36 , 4, pp.1235–1247, 2006
- [ADD] R. N. Araújo dos Santos, D. Dreibelbis and N. Dutertre, *Topology of the Real Milnor fiber for isolated singularities*. Accepted for publication in the Contemporary Mathematics, AMS, 2011 (Proceedings of David Mond's 60th birthday event, São Carlos - Brazil).
- [AFN] K. Aoki, T. Fukuda, T. Nishimura, *On the number of branches of the zero locus of a map germ $(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^{n-1}, 0)$* . Topology and Computer Science: Proceedings of the Symposium held in honor of S. Kinoshita, H. Noguchi and T. Homma on the occasion of their sixtieth birhtdays, 1987, 347–363.
- [AFN1] K. Aoki, T. Fukuda, T. Nishimura, *An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **108** (1989), 247–265.
- [AFS] K. Aoki, T.Fukuda, W.Z. Sun, *On the number of branches of a plane curve germ*, Kodai Math. Journal, **9**, (1986), 179–187.

- [Ar1] R.N. Araújo dos Santos, *Uniform (M)-condition and strong Milnor fibrations*, Singularities II, 189–198, Contemp. Math., 475, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Ar2] R.N. Araújo dos Santos, *Equivalence of real Milnor fibrations for quasi-homogeneous singularities*, Accepted for publication in the Rocky Mountain Journal of Math, 2009.
- [AT1] R.N. Araújo dos Santos, M. Tibăr, *Real mapping germs and higher open books*, manuscript, December 7, 2007. preprint arXiv:0801.3328.
- [AT2] R.N. Araújo dos Santos, M. Tibăr, *Real mapping germs and higher open book structures*, Geometriae Dedicata 147 (2010), 177–185.
- [AV] A. Verona, *Stratified Mappings: Structure and Triangulability*, Lecture Notes in Mathematics (LNM), 1102, Springer-Verlag, 1984.
- [B1] K. Bekka, *(c)-Régularité et Trivialité Topologique*, Lecture Notes in Mathematics (LNM), 1462, 42–62, Springer-Verlag.
- [B2] K. Bekka, *Regular Quasi-Homogeneous Stratifications*, Stratification, singularities and differential equations II: Stratifications and Topology of Singular Space, Travaux en cours 55, Hermann, 1997, 1–14.
- [BK] K. Bekka and S. Koike, *The Kuo condition, an Inequality of Thom's Type and (c)-Regularity*, Topology, vol.37, 1, pp.45–62, 1998.
- [CA] J. L. Cisneros-Molina, R. N. Araújo dos Santos, *About the Existence of Milnor Fibrations*, London Mathematical Society, LNS, 380, 82–103, 2010.
- [CL] P. T. Church, K. Lamotke, *Non-trivial polynomial isolated singularities*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78=Indag. Math. 37 (1975), 149–154.
- [CM] J.L. Cisneros-Molina, *Join theorem for polar weighted-homogeneous singularities*. Singularities II, 43–59, Contemp. Math., 475, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

- [CSS] J.L. Cisneros-Molina, J. Seade, J. Snoussi, *Milnor fibrations and d -regularity for real analytic singularities*. Internat. J. Math. 21 (2010), no. 4, 419–434.
- [Du1] N. Dutertre, *Degree formulas for a topological invariant of bifurcations of function germs*, Kodai Mathematical Journal **23**, no. 3 (2000), 442–461.
- [Du2] N. Dutertre, *On the Milnor fibre of a real map-germ*, Hokkaido Mathematical Journal **31** (2002), 301–319.
- [Du3] N. Dutertre, *On the Euler characteristics of real Milnor fibres of partially parallelizable maps of $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$* . Kodai Math. J. 32 (2009), no. 2, 324–351.
- [DTY] R. Dias, M. Tibăr, Chen Ying, *Sebastiani-Thom type theorems and Thom condition*, manuscript.
- [Du] A. Durfee, *Fibered knots and algebraic singularities*, Topology 13 (1974), 47–59.
- [Eh] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 29–55. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.
- [Et] J.B. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact structures*, Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology, 103–141, Clay Math. Proc., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [FK] T. Fukui, A. Khovanskii, *Mapping degree and Euler characteristic*. Kodai Math. J. 29 (2006), no. 1, 144–162.
- [Fu] T. Fukui, *An algebraic formula for a topological invariant of bifurcation of 1-parameter family of function-germs*, in Stratifications, singularities, and differential equations, II (Marseille, 1990; Honolulu, HI, 1990) , Travaux en cours **55**, Hermann, Paris, 45–54 1997.
- [Fu1] T. Fukui, *Mapping degree formula for 2-parameter bifurcation of function-germs*, Topology, **32**, 1993, 567–571.

- [GA] T. Gaffney, R. N. Araújo dos Santos *Real Integral Closure and Milnor Fibrations*, London Mathematical Society, LNS, 380, 146–157, 2010.
- [HK] H. King, *Topological type of isolated critical points*, Ann. Math. (2) 107 (1978), no. 2, 385–397.
- [HL] H. Hamm, Lê D.T., *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 317–355.
- [Hi] H. Hironaka, *Stratification and flatness*. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 199–265. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [Ja1] A. Jacquemard, *Thèse 3ème cycle Université de Dijon*, 1982.
- [Ja2] A. Jaquemard, *Fibrations de Milnor pour des applications réelles*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 3 (1989), no. 3, 591–600.
- [Kh] G.M. Khimshiashvili, *On the local degree of a smooth map*, Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR, **85**, 1977, 309–311.
- [Lê] Lê D.T., *Some remarks on the relative monodromy*, in: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijhoff en Norhoff, Alphen a.d. Rijn 1977, pp. 397–403.
- [Lo] E.J.N. Looijenga, *A note on polynomial isolated singularities*. Indag. Math. 33 (1971), 418–421.
- [Ma] D. Massey, *Real Analytic Milnor Fibrations and a Strong Lojasiewicz Inequality*, arXiv:math/0703613v5.
- [Mi] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton University Press, 1968.
- [Oka1] M. Oka, *Topology of polar weighted-homogeneous hypersurfaces*, Kodai Math. J. 31 (2008), no. 2, 163–182.

- [Oka2] M. Oka, *Non degenerate mixed functions*, Kodai Math. J. 33 (2010), no. 1, 1-62.
- [PS] A. Pichon, J. Seade, *Fibred multilinks and singularities $f\bar{g}$* . Math. Ann. 342 (2008), no. 3, 487–514.
- [Ru] L. Rudolph, *Isolated critical points of mappings from $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ and a natural splitting of the Milnor number of a classical fibered link*. I. Basic theory; examples. Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 4, 630-645.
- [RS] M.A.S. Ruas and R.N. Araújo dos Santos, *Real Milnor Fibrations and (C) -regularity*, Manuscripta Math., 117, (2005), no. 2, 207–218.
- [RSV] M.A.S. Ruas, J. Seade and A. Verjovsky, *On Real Singularities with a Milnor Fibration*, in: Trends in Singularities, 191–213, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2002.
- [Se1] J. Seade, *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*. Progress in Mathematics, 241. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. xiv+238 pp.
- [Se] J. Seade, *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, monograph. Series “Progress in Mathematics” vol. 241, 2005, Birkhäuser.
- [Sz] Z. Szafraniec, *On the number of branches of a 1-dimensional semi-analytic set*, Kodai Math. Journal, **11**, 1988, 78–85.
- [Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 249–312.
- [Ti] M. Tibăr, *Polynomials and vanishing cycles*. Cambridge Tracts in Mathematics, 170. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xii+253 pp.
- [TY] M. Tibăr, Chen Ying, *Bifurcation values of mixed polynomials*, arXiv:1011.4884v1, submitted August 2010.

- [TYA] M. Tibar, C. Ying, R. Araújo dos Santos, *Singular open book structures from real mappings*, arXiv:1011.1757v2
- [Wa] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London. Math. Soc. 13, pp.481–539, 1981.
- [Wi] H.E. Winkelnkemper, *Manifolds as open books*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 45–51.
- [Wo] J.A. Wolf, *Differentiable fibre spaces and mappings compatible with Riemannian metrics*. Michigan Math. J. 11 (1964), 65–70.