GUILHERME FONTES LEAL FERREIRA

ALGUNS CASOS INTEGRÁVEIS

em Cinética de carga espacial

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO
DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS,
USP, PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE LIVRE DOCENTE.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS
SÃO CARLOS

1973

ÍNDICE

Página

Introdução	1
Métodos de Solução	2
1º Caso	7
2º Caso	12
3º Caso	22
Referências	40
Figuras	41

AGRADECIMENTOS

É com o máximo prazer que, nesta oportunidade, expressamos nossos agradecimentos:

ao Prof. Bernhard Gross, com quem nos iniciamos nesse campo e a quem devemos, como profundo conhecedor do assunto que é, a orientação para as linhas de pesquisa ainda em aberto;

ao sr. Luíz Nunes de Oliveira, pelos cálculos realizados e pelo diálogo sempre inteligente e sugestivo;

aos colegas Milton Ferreira de Souza, Sylvio Goulart Rosa Jr. e ao Prof. Sérgio Mascarenhas pelo estímulo recebido;

a todo o pessoal do Departamento de Física e Ciência dos Materiais pelo ambiente amistoso que nele faz prevalecer;

ã D. Maria Laura Campos de Ulhoa Cintra pelo cuidado e dedicação na preparação desta tese;

e aos srs. Carlos Alberto De Simone e Paulo Roberto Beatrice pela confecção dos desenhos.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a solução de alguns problemas em que, inicialmente, cargas positivas e negativas estão presentes. Elas, quando móveis, são consideradas livres, com o que queremos dizer que não interagem com sistemas de traps, que são, então, completamente ignorados.

Apesar de todas estas simplificações, o sistema de equações diferenciais parciais não linear, a partir do qual deve ser procurada a solução, é suficientemente complicado, a ponto de se necessitar de condições iniciais e de contorno favoráveis. Entre as primeiras, conta-se considerar-se distribuições de carga uniformes e, na segunda, a condição de curto circuito, muito apropriada para o método de solução que empregaremos.

Estudaremos o desenvolvimento temporal a partir das seguintes situações iniciais:

1. cargas positivas e negativas ocupam, cada, metade do espaço entre as placas de um condensador plano. As negativas são fixas e não há recombinação;
2. situação geométrica igual a anterior. As cargas negativas são também móveis, mas a constante de recombinação entre as cargas de sinal oposto tem um valor particular, dado.
3. Cargas positivas e negativas estão superpostas, mas um campo inicia a separação entre

elas.

Esboçamos também a solução quando a separação se dá continuamente no tempo.

MÉTODO DE SOLUÇÃO

As equações que temos de resolver são as seguintes:

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial x} E(x,t) = \rho_+(x,t) - \rho_-(x,t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t}(x,t) = - \frac{\partial i_+}{\partial x}(x,t) - k \rho_+(x,t) \rho_-(x,t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_-}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial i_-}{\partial x}(x,t) - k \rho_+(x,t) \rho_-(x,t), \quad (3)$$

$$i_+ = \mu_+ \rho_+(x,t) E(x,t), \quad (4)$$

$$i_- = \mu_- \rho_-(x,t) E(x,t), \quad (5)$$

onde

ϵ - permissividade dielétrica

E - campo elétrico

ρ_+ -densidade de carga positiva

ρ_- -densidade de carga negativa

i_+ -densidade de corrente de condução das cargas
positivas

i_- -densidade de corrente de condução das cargas
negativas

μ_+ -mobilidade, constante, das cargas positivas

μ_- -mobilidade, constante, das cargas negativas

k - constante de recombinação entre cargas posi-
tivas e negativas

x, t - variáveis, respectivamente espaciais e temporais.

A Eq.(1) é a equação de Poisson. As Eqs. (2) e (3) são a equação de continuidade para as cargas positivas e negativas; o termo $k\rho_+\rho_-$ exprime recombinação, embora formas mais gerais existam para ela. As Eqs. (4) e (5) definem a densidade de corrente de condução, com o auxílio das mobilidades.

A densidade de corrente total j ,

$$j = i_+ + i_- + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6)$$

só é função do tempo, como imediatamente se verifica, a partir das Eqs. (1), (2) e (3).

As velocidades das cargas, em qualquer instante, são dadas por

$$\frac{dx_+}{dt} = \mu_+ E \quad (7)$$

e

$$\frac{dx_-}{dt} = -\mu_- E \quad (8)$$

onde os índices $+$ e $-$ indicam tratar-se de cargas positivas e negativas.

Vamos tomar as Eqs.(7) e (8) como equações de movimento das cargas. As respectivas acelerações serão dadas por

$$\frac{d^2 x_+}{dt^2} = \mu_+ \frac{d}{dt} E(x_+(t), t) = \mu_+ \left[\frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx_+}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{\mu_+}{\epsilon} [j - (\mu_+ + \mu_-) \rho_- E] , \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_-}{dt^2} &= -\mu_- \frac{d}{dt} E(x_-(t), t) = -\mu_- \left[\frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx_-}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{\mu_-}{\epsilon} [j - (\mu_+ + \mu_-) \rho_+ E] . \end{aligned} \quad (10)$$

onde se usou o sistema de Eqs.(1)-(5) e a Eq.(6). Dessas equações se vê que a condição de circuito aberto ($j=0$), simplifica de início a solução de um problema.

As trajetórias obtidas da integração das Eqs. (7) e (8) serão chamadas linhas de corrente.

A variação da densidade de carga ao longo de uma linha de corrente, também pode ser achada com o auxílio do sistema (1)-(5):

$$\frac{d\rho_+}{dt} = \frac{\partial \rho_+}{\partial x} \frac{dx_+}{dt} + \frac{\partial \rho_+}{\partial t} = -\frac{\mu_+}{\epsilon} (\rho_+ - \rho_-) \rho_+ - k \rho_+ \rho_- \quad (11)$$

$$\frac{d\rho_-}{dt} = \frac{\partial \rho_-}{\partial x} \frac{dx_-}{dt} + \frac{\partial \rho_-}{\partial t} = -\frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_- (\rho_- - \rho_+) - k \rho_+ \rho_- . \quad (12)$$

Em casos em que há um excesso de cargas só de um sinal, por exemplo, as positivas, e as de sinal oposto são imóveis ($\mu_- = 0$), as equações acima dão, para o movimento das cargas positivas:

$$\frac{d^2 x_+}{dt^2} = \frac{\mu_+}{\epsilon} j \quad (9')$$

$$\frac{d\rho_+}{dt} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_+ \quad (11')$$

Em circuito aberto $j=0$, e a primeira equação ⁽⁷⁾ pode ser diretamente integrada, dando

$$x = x_0 + \mu_+ E(x_0)t,$$

onde x_0 dá a posição inicial da linha de corrente em $t=0$. Por outro lado, (11') também pode ser integrada diretamente, dando

$$\rho_+(t) = \frac{\rho(x_0)}{1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho(x_0)t}$$

Essas duas equações resolvem completamente o problema de se determinar a função densidade de carga, em qualquer tempo, embora a obtenção da função $\rho(x,t)$ seja, em geral, praticamente impossível, se $\rho(x_0, 0)$ é suficientemente complicada. Com outras condições de contorno, por exemplo, voltagem como dada função do tempo (usualmente constante), ao nosso conhecimento, só existe solução publicada para o caso em que distribuição de carga não toca os eletródios ⁽¹⁾; é que, nestas condições, ainda é possível obter-se j por integrações convenientes, e, então, por procedimento análogo ao usado em circuito aberto, obter-se a posição das linhas de corrente no decorrer do tempo. Entretanto, conseguimos já obter a solução geral, quando uma das extremidades da distribuição encosta em um dos eletródios. Este trabalho está sendo ultimado, em colaboração com o sr. Luiz Ernesto Carrano

de Almeida.

Em circuito aberto é de muita utilidade o uso do teorema de Lindmayer^{(2),(3)}, que obteremos a partir de um resultado mais geral, conforme dedução elaborada pelo sr. Luíz Nunes de Oliveira.

Seja $x_0(t)$ o ponto na distribuição para o qual o campo tem um valor constante E_0 (não necessariamente zero). Então, a variação temporal do campo, ao longo de $x_0(t)$ se anula:

$$\frac{d}{dt} E(x_0(t), t) = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Mas, pela Eq.(6),

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (j - i_+ - i_-)$$

Levando este resultado na relação anterior, usando-se a equação de Poisson e as definições de i_+ e i_- , Eqs. (4) e (5), vem

$$j = [\mu_+ \rho_+(x_0(t)) + \mu_- \rho_-(x_0(t))] E_0$$

$$- \frac{dx_0}{dt} [\rho_+(x_0(t)) - \rho_-(x_0(t))]$$

Se na distribuição existe, inicialmente, um ponto de campo nulo, então o seu movimento ~~estará~~ estará ligado ao valor da corrente total através da relação

$$j = -[\rho_+(x_0(t)) - \rho_-(x_0(t))] \frac{dx_0}{dt}$$

Este é o teorema de Lindmayer.

Note-se que, nesta dedução, nada se afirmou a respeito da condição de contorno elétrica.

Vê-se que, em circuito aberto, um ponto de campo nulo permanece estacionário.

Ao método acima descrito, (Eqs. 7-11), chamaremos de método das características, como é conhecido no estudo das equações diferenciais. Em problemas de carga espacial, ele foi usado, pela primeira vez, por Many-Rakavy⁽⁴⁾, no estudo do transiente de estabelecimento do regime SCLC.

1º CASO

A Fig.1A mostra a situação inicial. As cargas positivas são móveis, as negativas, fixas. O campo é mostrado na Fig.1B onde assumiu-se que ele é zero junto aos eletródios.

Tem-se, então, chamando-se os intervalos $0 < x < d/2$ e $d/2 < x < d$, respectivamente, de Região I e Região II, a seguinte distribuição de cargas

carga positiva: ρ_0 , região I
 $\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ região II} \end{array} \right.$

carga negativa: 0 , região I
 $\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0, \text{ região II} \end{array} \right.$

Como as cargas negativas são fixas, precisamos somente das equações das linhas de corrente das cargas positivas. Elas dão, (Figs.9 e 11), assumindo-se $k=0$, e usando-se uma e duas barras para distinguir as grandezas

correspondentes a cada região:

Região I

$$\frac{d^2 \bar{x}_+}{dt^2} = 0 ,$$

$$\frac{d\bar{\rho}_+}{dt} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_+^2 \quad (13)$$

Região II

$$\frac{d^2 \bar{x}_+}{dt^2} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 \frac{d\bar{x}_+}{dt} \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{\rho}_+}{dt} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} (\bar{\rho}_+ - \rho_0) \bar{\rho}_+ \quad (15)$$

Na região I, a densidade de carga permanece uniforme no espaço, mas decresce no tempo, de acordo com a relação

$$\bar{\rho}_+(t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t} \quad (16)$$

que é a integral da Eq.(13). A densidade é uniforme no espaço, pois qualquer linha de corrente, independentemente de sua posição, tem a densidade no tempo t , dada pela Eq.(16).

Portanto, sabemos a densidade de carga em qualquer tempo, t_0 , em $d/2$; sabemos também o campo elétrico, pois o campo em $x=0$, sendo zero em $t=0$, permanece assim para qualquer tempo, pelo teorema de Lindmayer,

$$E\left(\frac{d}{2}, t_0\right) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t_0\right)} \frac{d}{2\epsilon} ;$$

O conhecimento da posição ($d/2$) e da velocidade num dado instante (t_0) é suficiente para se caracterizar uma linha de corrente, cuja equação diferencial é de segunda ordem no tempo. Prosseguimos, integrando as equações das trajetórias.

A integração da Eq.(14) dá, diretamente,

$$\frac{d\bar{x}_+}{dt} = \frac{d\bar{x}_+}{dt} \left(\frac{d}{2}, t_0\right) e^{-\frac{\mu_+ \rho_0}{\epsilon} (t-t_0)}$$

com

$$\frac{d\bar{x}_+}{dt} \left(\frac{d}{2}, t_0\right) = \frac{\mu_+ \rho_0 d}{2\epsilon \left(1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t_0\right)}$$

Uma segunda integração dá

$$\bar{x}_+ = \frac{d}{2} + \frac{d}{2 \left(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t_0}{\epsilon}\right)} \left[1 - e^{-\frac{\mu_+ \rho_0}{\epsilon} (t-t_0)}\right] \quad (17)$$

onde se usou o fato de todas as linhas de corrente, como aqui caracterizadas, terem como ponto de partida o ponto $d/2$.

Obtem-se a densidade de carga por integração direta da Eq.(15). Tendo-se em conta que, em t_0 , a densidade de carga é dada por

$$\bar{\rho}_+(t_0) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t_0}{\epsilon}},$$

obtem-se

$$\bar{\rho}_+(t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t_0}{\epsilon} e^{-\frac{\mu_+ \rho_0}{\epsilon} (t-t_0)}} \quad (18)$$

As Eqs. (17) e (18) resolvem o problema. Embora não seja possível eliminar-se t_0 dessas duas relações, para se obter $\bar{\rho}_+$ como função de $\bar{x}_+$ e t , pode-se, entretanto, atribuindo-se, para cada t , valores a t_0 tais que $t_0 \leq t$, obter-se, speradamente, $\bar{\rho}_+$ e $\bar{x}_+$, o que é igualmente satisfatório.

Notemos que a linha de frente, isto é, a linha de corrente emitida em $t_0 = 0$, tem como trajetória (da Eq. (17))

$$\bar{x}_{+f} = d - \frac{d}{2} e^{-\frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}} \quad (18a)$$

o que indica que $\bar{x}_{+f} = d$, só para $t \rightarrow \infty$. Portanto, não há perda de carga pelo eletródio em $x=d$ e a neutralização é total.

A diferença de potencial $V(t)$ entre os eletródios como função do tempo, pode ser obtida da seguinte maneira:

Integrando-se em x a expressão da corrente total, Eq.(6), primeiro na região I e depois na região II, obtem-se:

Região I:

$$0 = \frac{\mu_+ \bar{\rho}_+^2}{8\epsilon d} + \epsilon \int_0^{d/2} \frac{\partial E}{\partial t} dx \quad (19)$$

Região II:

$$0 = \mu_+ \left[-\frac{\epsilon}{2} E^2 \left(\frac{d}{2}, t \right) + \rho_0 \int_{d/2}^d E dx \right] + \epsilon \int_{d/2}^d \frac{\partial E}{\partial t} dx \quad (20)$$

Tendo em conta que

$$\int_{d/2}^d E dx = V - \int_0^{d/2} E dx = V - \frac{\bar{\rho}_+ d^2}{8\epsilon}$$

e, somando-se as relações (19) e (20), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\rho_0 V - \frac{\rho_0 \bar{\rho}_+ d^2}{8\epsilon} + \frac{\epsilon}{\mu_+} \frac{dV}{dt} = 0.$$

Com a condição inicial, $V(0) = \frac{\rho_0 d^2}{4}$, a integração desta equação permite escrever:

$$V(t) = \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon} e^{-\frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}} \left[\int_0^{\mu_+ \rho_0 t / \epsilon} \frac{x}{1+x} dx + 2 \right] \quad (21)$$

Resultados:

As Figs. 2 e 3, conseguidas pelo sr. Luíz Nunes de Oliveira, usando a calculadora Hewlett-Packard 9100, resumem os nossos resultados.

Na Fig.3, mostra-se ρ_+/ρ_0 como função de x/d , para diferentes valores de $\mu_+\rho_0 t/\epsilon$. Vê-se que, para tempos pequenos, a densidade de cargas positivas na região II, $\bar{\rho}_+/\rho_0$ é quase linear, mas começa a se distorcer para $\mu_+\rho_0 t/\epsilon$ da ordem de 2,5. Para tempos grandes, ρ_+/ρ_0 , tende para a função degrau, como era de se esperar.

A fig.4 mostra $\frac{\epsilon V}{\rho_0 d^2}$ como função de $\frac{\mu_+\rho_0 t}{\epsilon}$, obtida por integração da Eq.(21). O decaimento inicial é quase exponencial, mas, para grandes valores do tempo, torna-se proporcional a t^{-1} , devido à contribuição da integral.

2º CASO

A situação inicial é a mesma que no 1º caso. Entretanto, assumiremos que ambas as cargas tem mobilidade. Nesta generalidade, o sistema Eqs.(9)-(12) é ainda muito difícil de se resolver, visto que as integrações das Eqs. (9) e (10) requerem o conhecimento das densidades de carga de sinal oposto, em cada ponto da linha de corrente, o que não é fornecido pelas Eqs.(11)-(12) - as quais, diga-se de passagem, apresentam a mesma dificuldade, ou seja, a dependência com a densidade de carga de sinal oposto - pois se referem a uma dada linha de corrente. Observe-se, porém, que, se a constante de recombinação adquirir um valor particular, por exemplo $k=\mu_+/\epsilon$, a Eq.(11) pode ser diretamente integrada, o que permitirá integrar-se todo o sistema Eqs.(9)-(12).

Então, pondo-se $k=\mu_+/\epsilon$, a integração da Eq.(11) dá:

$$\rho_+(t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}} \quad (22)$$

Concluimos daí que a densidade de carga positiva é uniforme no espaço. Para delimitá-la, é suficiente conhecer-se a posição da frente de carga espacial, isto é, das cargas que, em $t=0$, estando em $x=d/2$, avançam para a região II. A equação diferencial para a frente, x_{+f} , é

$$\frac{d^2 x_{+f}}{dt^2} = - \frac{(\mu_+ + \mu_-)}{\epsilon} \rho_-(x_{+f}) \frac{dx_{+f}}{dt} \quad (23)$$

Como a frente vai encontrando sempre regiões de carga negativa, que estiveram, até então, livres de cargas positivas, podemos afirmar que

$$\rho_-(x_{+f}(t)) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}} \quad (24)$$

Quer dizer, a densidade de carga negativa, para $x > x_{+f}$, é uniforme no espaço e satisfaz a Eq.(24). Isto decorre da Eq.(12) com $\rho_+=0$. Com este resultado, a Eq. (24) pode ser integrada, conduzindo a:

$$\frac{dx_{+f}}{dt} = \frac{\mu_+ \rho_0 d}{2\epsilon} \left(1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}\right)^{-\left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_-}\right)} \quad (25)$$

onde se usou a condição inicial $\frac{dx_{+f}}{dt} (d/2, 0) = \frac{\mu_+ \rho_0 d}{2\epsilon}$.

Uma nova integração leva a:

$$x_{+f} = d - \frac{d}{2} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} \quad (26)$$

Já nesse ponto podemos calcular a quantidade total de carga que foi recombinada, Q_r , até o tempo t . Para isso é suficiente subtrair da carga total positiva inicial ($\frac{\rho_o d}{2}$), a carga positiva presente em t ($\rho_+(t)x_{+f}$), desde que, pelo teorema de Lindmayer, não haverá perda de carga pelo eletródio em $x=0$. Tem-se, assim:

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{\rho_o d}{2} - \frac{\rho_o}{1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon}} \frac{d}{2} \left\{ 1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right\}^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} \\ &= \frac{\rho_o d}{2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon} \right) \left(1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right)^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}} \right] > 0 \end{aligned}$$

Podemos também verificar se o valor do campo que se obtem da Eq.(25), para o ponto x_{+f} é igual ao que se deduz diretamente do fato de que, para $x > x_{+f}$, a distribuição é uniforme. Como, pelo teorema de Lindmayer, o campo em d permanece nulo, tem-se:

$$E(x_{+f}, t) = \frac{\rho_o}{\epsilon \left(1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right)} (d - x_{+f}),$$

que dá, usando-se a relação (26):

$$E(x_{+f}, t) = \frac{\rho_o d}{2\epsilon \left(1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right)} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} \quad (27)$$

Por outro lado, da Eq.(25) tira-se, imediatamente

$$E(x_{+f}, t) = \frac{\rho_o d}{2\epsilon} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_o t}{\epsilon} \right]^{-\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_-}}. \quad (28)$$

Vê-se que as Eqs.(27) e (28) coincidem.

Vamos agora estudar o movimento das cargas negativas que já se misturaram com cargas positivas. Caracterizando as linhas de corrente das cargas negativas pelo tempo t_e em que a mistura se inicia, pode-se integrar a Eq.(10), usando-se para ρ_+ o valor dado pela Eq.(22). Para condição inicial, isto é, a velocidade em $t=t_e$, usa-se a Eq.(25), multiplicando-a por $-\frac{\mu_-}{\mu_+}$, desde que as velocidades são proporcionais ao campo, que é o mesmo, tanto para as cargas positivas como para as negativas. Tem-se, com isto, a integral para a Eq.(10):

$$\begin{aligned} \frac{dx_-}{dt} = & -\frac{\mu_- \rho_o d}{2\epsilon} \left[\frac{(1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_o t_e)^{\frac{1}{\mu_+}}}{(1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_o t_e)^{\frac{1}{\mu_-}}} \right]^{(\mu_+ + \mu_-)} \\ & \times \left(1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon} \right)^{-\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+}} \end{aligned} \quad (29)$$

Integrando novamente a Eq.(29), com a condição inicial $x_-(t_e)$ obtida da Eq.(26), pois $x_{+f}(t_e) = x_-(t_e)$, por construção, chega-se a:

$$x_-(t, t_e) = d - \frac{d}{2} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_o t_e}{\epsilon} \right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} - \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\frac{(1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t_e)^{\frac{1}{\mu_+}}}{(1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_0 t_e)^{\frac{1}{\mu_-}}} \right]^{(\mu_+ + \mu_-)} \\
 & \times \left[(1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t_e)^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} (1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon})^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

A frente de carga negativa está, no tempo t , em x_{-f} dado por:

$$x_{-f}(t) = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon} \right)^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} \quad (31)$$

Resta-nos determinar a densidade de carga negativa ao longo de suas linhas de corrente. Usamos, então, a Eq.(12), com ρ_+ dado por (22). Então:

$$\frac{d\rho_-}{dt} = -\frac{\mu_- \rho_-^2}{\epsilon} + \left(\frac{\mu_-}{\epsilon} - k \right) \frac{\rho_0 \rho_-}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}}, \quad k = \frac{\mu_+}{\epsilon}$$

É uma equação diferencial de Riccati, de fácil integração:

$$\rho_-(t) = \rho_0 \frac{(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - 1}{(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + C} \quad (32)$$

onde C é uma constante a ser determinada pela condição inicial, que é:

$$\rho_-(t_e) = \frac{\rho_o}{1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_o t_e}$$

Determinando-se C e, introduzindo na relação (32), chega-se a:

$$\rho_-(t, t_e) = \rho_o \frac{(1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - 1}{(1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + (\mu_- - \mu_+) \frac{\rho_o t_e}{\epsilon} (1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_o t_e)^{\frac{\mu_-}{\mu_+} - 1}}$$

(33)

Em geral, não é possível eliminar-se t_e das Eqs. (30) e (33), de maneira a se obter explicitamente uma relação entre a densidade de carga negativa, o espaço e o tempo. Porém, não há dificuldade em se conseguir um gráfico das densidades de carga em qualquer tempo. Para isso, as Eqs. (22), (26), (30), (31) e (33) são necessárias.

Tem-se assim que, no tempo t , as densidades de cargas são dadas por:

Região I

$$0 < x < \frac{d}{2} \quad (1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}}$$

$$\rho_+ = \frac{\rho_o}{1 + \frac{\mu_+ \rho_o t}{\epsilon}}$$

$$\rho_- = 0$$

Região II

$$\frac{d}{2} \left(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}\right)^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} < x < d - \frac{d}{2} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}\right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}}$$

$$\rho_+ = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}}$$

$$\rho_- = \rho_0 \frac{(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - 1}{(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} + (\mu_- - \mu_+) \frac{\rho_0 t}{\epsilon} (1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - 1}$$

$$x_- = d - \frac{d}{2} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}\right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} + \frac{d}{2} \frac{(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon})^{1 + \frac{\mu_-}{\mu_+}}}{(1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon})^{1 + \frac{\mu_+}{\mu_-}}}$$

$$\times \left[\left(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}\right)^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}} - \left(1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}\right)^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} \right]$$

com $0 \leq t_e \leq t$ Região III

$$d - \frac{d}{2} \left[1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}\right]^{-\frac{\mu_+}{\mu_-}} < x < d$$

$$\rho_+ = 0$$

$$\rho_- = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_0 t}$$

Notemos que, se μ_+ é igual a zero, esta solução de verá recair, a menos de trocas geométricas, naquela estudada no 1º caso. Não procuraremos fazer isto em detalhe mas somente em uma expressão. Por exemplo, o limite superior da região I, será:

$$x = \frac{d}{2} \lim_{\mu_+ \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon} \right)^{-\frac{\mu_-}{\mu_+}}$$

ou

$$x = \frac{d}{2} e^{-\frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}}$$

Contada a partir do eletródio em d, a posição da frente negativa será:

$$d - \frac{d}{2} e^{-\frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}},$$

expressão que poderá ser comparada com $\bar{x}_{+f}$, dada em (18a).

Para se calcular a diferença de potencial V entre os eletródios em $x=0$ e $x=d$, poderíamos adotar o procedimento mais cauteloso de integrar a Eq.(6), separadamente, nas três regiões. No entanto, isto não é necessário, devido à continuidade do campo elétrico. Tem-se, então:

$$0 = \mu_+ \int_0^d \rho_+ E dx + \mu_- \int_0^d \rho_- E dx + \epsilon \int_0^d \frac{\partial E}{\partial t} dx$$

Substituindo-se ρ_- no segundo integrando por seu valor, tirado da Eq. de Poisson, vem

$$(\mu_+ + \mu_-) \int_0^d \rho_+ E dx - \frac{\epsilon \mu_-}{2} \int_0^d \frac{\partial E^2}{\partial x} dx + \epsilon \frac{d}{dt} \int_0^d E dx = 0$$

(33')

Aplicando ao nosso problema, teremos:

$$\frac{dV}{dt} + (\mu_+ + \mu_-) \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}} \int_0^{x+f} E dx = 0$$

Mas,

$$\int_0^{x+f} E dx = V - \int_{x+f}^d E dx = V - \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}} \frac{(d - x+f)^2}{2\epsilon}$$

Usando a Eq.(26), chega-se finalmente a

$$\frac{\epsilon}{\mu_+ + \mu_-} \frac{dV}{dt} + \frac{\rho_0}{1 + \frac{\mu_+ \rho_0 t}{\epsilon}} \left[V - \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon} \left(1 + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon} \right)^{-2 \frac{\mu_+}{\mu_-} - 1} \right] = 0$$

OBSERVAÇÕES:

Naturalmente que, aqui, como no caso 1, também acontece a neutralização total. Porém, a frente de carga positiva se move mais lentamente, para um mesmo valor de sua mobilidade, que no caso anterior, qualquer que seja o valor da mobilidade das cargas negativas. Isto se deduz da comparação das Eqs. (18a) e (26).

As equações acima se simplificam radicalmente se $\mu_+ = \mu_-$. As frentes avançam simetricamente a partir do centro, a região entre elas não apresentando excesso de

carga. Em cada instante o gráfico do campo com a posição teria a forma de um trapézio. Por outro lado, todas as tentativas para se integrar o sistema Eqs.(9)-(12), para outros casos além dos aqui apresentados, foram infrutíferas. Mesmo para mobilidade zero das cargas negativas, mas arbitrário, mostrou-se de manuseio difícil.

As Figs. 4-6, conseguidas pelo sr. Luíz Nunes de Oliveira, ilustram nossos resultados.

As Figs. 4 e 5 mostram as densidades de carga ρ_+' e ρ_-' (normalizadas a 1 para $t=0$), como função de $x'=x/d$, para vários valores de $t' = \frac{\mu_+\rho_0 t}{\epsilon}$, respectivamente, para $\frac{\mu_-}{\mu_+} = 4$ e 0,25. Vemos que o comportamento de ρ_-' é radicalmente diferente, na região de mistura, comparado com a região uniforme, segundo o valor da razão $\frac{\mu_+}{\mu_-}$. Para o valor 4, a densidade é maior, enquanto que, para 0,25 é menor. Bastante significativa é a tendência observada, em ambos os casos, para a uniformidade.

A Fig.6 mostra, para $\frac{\mu_-}{\mu_+} = 4, 1$ e 0,25, $V' = \epsilon V / \rho_0 d^2$, sendo V a diferença de potencial, como função de $t' = \frac{\mu_+\rho_0 t}{\epsilon}$. Vemos que a variação da voltagem é mais rápida para maiores valores de $\frac{\mu_-}{\mu_+}$, desde que, nas unidades usadas no gráfico, o termo que contém a derivada da diferença de potencial com o tempo é:

$$\frac{1}{1 + \frac{\mu_-}{\mu_+}} \frac{dV'}{dt'}$$

com o que se constata que as variações da diferença de potencial são proporcionais a $1 + \frac{\mu_-}{\mu_+}$.

3º CASO

Estudaremos agora, ainda em circuito aberto, o movimento de cargas resultante da situação inicial, em que cargas positivas e negativas, com igual densidade (ρ_0), coexistem na região $S_1(0) < x < S_2(0)$, em presença de um campo (uniforme) E_0 (Fig.7). Admite-se que haja recombinação.

As cargas positivas deslocar-se-ão para a direita, e as negativas para a esquerda. Permanece, pelo menos nos primeiros estágios do processo, uma região onde elas coexistem: afirmamos que, aí, suas densidades continuam uniformes e, com isso, conseguiremos uma solução para o problema, que, devendo ser única, justifica a hipótese inicial.

Assim sendo, na região comum às cargas de ambos os sinais, $S_1(t) < x < S_2(t)$, as Eqs. (11) e (12) coincidem e podem ser imediatamente integradas.

Então, para $S_1(t) < x < S_2(t)$

$$\rho_+(t) = \rho_-(t) = \frac{\rho_0}{1 + k\rho_0 t} \quad (34)$$

As equações de movimento para $S_1(t)$ e $S_2(t)$, são, então, logo obtidas das Eqs. (9) e (10):

$$\frac{d^2 S_1}{dt^2} = - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon} \frac{\rho_0}{1 + k\rho_0 t} \frac{dS_1}{dt},$$

$$\frac{d^2 S_2}{dt^2} = - \frac{(\mu_+ + \mu_-)}{\epsilon} \frac{\rho_0}{1 + k\rho_0 t} \frac{dS_2}{dt}$$

que, após uma primeira integração levam a:

$$\frac{dS_1}{dt} = \mu_+ E_0 (1 + k\rho_0 t) - \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon} \quad (35)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\mu_- E_0 (1 + k\rho_0 t) - \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon} \quad (36)$$

Obtem-se, finalmente:

$$S_1(t) = S_1(0) + \frac{\mu_+ E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k\rho_0 t)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon}} - 1 \right] \quad (37)$$

$$S_2(t) = S_2(0) - \frac{\mu_- E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k\rho_0 t)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon}} - 1 \right] \quad (38)$$

As duas frentes serão coincidentes no tempo t_1 tal que $S_1(t_1) = S_2(t_1)$. Deduz-se, assim:

$$(1 + k\rho_0 t_1)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon}} = 1 + \frac{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+) (S_2(0) - S_1(0))}{\epsilon E_0 (\mu_+ + \mu_-)} \quad (39)$$

Verifica-se, desta equação, não estar garantida, de forma definitiva, a existência de t_1 , pois a segunda parcela do 2º membro da Eq.(39) pode ser negativa e de módulo maior que 1. Esta análise torna-se mais simples para o caso em que $k=0$, obtendo-se

$$e^{-(\mu_+ + \mu_-) \frac{\rho_0 t_1}{\epsilon E_0}} = 1 - \frac{\rho_0 (S_2(0) - S_1(0))}{\epsilon E_0}$$

Vê-se, imediatamente, que, também aqui, t_1 pode não existir. As velocidades de $S_1(t)$ e de $S_2(t)$ são sempre respectivamente, positivas e negativas; mas os espaços que elas percorrem são "predeterminadamente" limitados pelas condições iniciais.

Desde que, na relação (39), aparece o produto da densidade de carga pela espessura $S_2(0) - S_1(0)$, as mesmas considerações se aplicam para quando $\rho_0 \rightarrow \infty$ e $(S_2(0) - S_1(0)) \rightarrow 0$, mantendo-se finito o produto. Mas, como $t_1 = 0$, vê-se que a relação não pode ser verificada.

A Eq.(39) mostra que a existência de t_1 não depende da posição absoluta das frentes consideradas, senão, da espessura contendo inicialmente as cargas de ambos os sinais.

Pode-se verificar que as densidades de carga, bem como o campo elétrico, obtidos para a região onde há mistura, obedecem à Eq.(6).

À medida em que a frente $S_2(t)$ avança para a esquerda, cargas positivas, que a atravessam, começam a se mover numa região livre de cargas negativas. Podemos, então, caracterizar as linhas de corrente das cargas positivas, pelo tempo t_e , no qual a frente negativa atingiu a posição $S_2(t_e)$. Assim, a posição, a velocidade e a densidade de cargas iniciais serão dadas por $S_2(t_e)$, $\frac{dS_1}{dt}(t_e)$ (pois o campo não varia no intervalo $S_1(t) < x < S_2(t)$) e $\rho_+(t_e)$, obtidos diretamente das Eqs.(38), (35) e (34).

A partir desses valores iniciais, determina-se o seu movimento subsequente, com as seguintes equações (eqs. (9') e 11')):

$$\frac{d^2 x_+}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d\rho_+}{dt} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_+$$

que, integradas, dão:

$$x_+(t, t_e) = S_2(t_e) + (t - t_e) \frac{dS_2}{dt}(t_e)$$

$$\rho_+(t, t_e) = \frac{\rho_+(t_e)}{1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_+(t_e)(t - t_e)}$$

Tratamento análogo pode ser feito para as linhas de corrente das cargas negativas, que são originadas em $S_1(t_e)$, com velocidade e densidade de carga iniciais dadas por $\frac{dS_1}{dt}(t_e)$ e $\rho_-(t)$. (Eqs. (37), (36) e (34)). Obtem-se, assim:

$$x_-(t, t_e) = S_1(t_e) + (t - t_e) \frac{dS_1}{dt}(t_e)$$

$$\rho_-(t, t_e) = \frac{\rho_-(t_e)}{1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_-(t_e)(t - t_e)}$$

Notemos que as linhas de corrente $x_+(t, 0)$ e $x_-(t, 0)$ movem-se com velocidade constante, pois o campo junto ao eletródios mantém-se constante no tempo, como pode ser deduzido da Eq. (6).

Resumindo, as densidades de carga, ρ_+ e ρ_- , como função do tempo e da posição, serão obtidas, nas cinco regiões em que, no início do processo, podemos naturalmente dividir a amostra, da seguinte maneira:

Região I:

$$0 < x < S_1(0) - \mu_- E_0 t$$

$$\rho_+ = 0$$

$$\rho_- = 0$$

Região II:

$$S_1(0) - \mu_- E_0 t < x < S_1(0) + \frac{\mu_+ E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \\ \times \left[(1 + k \rho_0 t) \left(1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k} - 1 \right) \right]$$

$$\rho_+ = 0$$

$$x_-(t, t_e) = S_1(0) + \frac{\mu_+ E_0}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k \rho_0 t_e) \left(1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k} - 1 \right) \right. \\ \left. - (t - t_e) \mu_- E_0 (1 + k \rho_0 t_e) \right] - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}$$

$$\rho_-(t, t_e) = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 t_e \left(k - \frac{\mu_-}{\epsilon} \right) + \frac{\mu_- \rho_0 t}{\epsilon}}$$

$$0 < t_e < t$$

Região III:

$$S_1(0) + \frac{\mu_+ E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k \rho_0 t)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} - 1 \right] < x < S_2(0)$$

$$- \frac{\mu_- E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k \rho_0 t)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} - 1 \right]$$

$$\rho_+ = \frac{\rho_0}{1 + k \rho_0 t}$$

$$\rho_- = \frac{\rho_0}{1 + k \rho_0 t}$$

Região IV:

$$S_2(0) - \frac{\mu_- E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k \rho_0 t)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} - 1 \right] < x < S_2(0)$$

$$+ \mu_+ E_0 t$$

$$x_+(t, t_e) = S_2(0) - \frac{\mu_- E_0 \epsilon}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left[(1 + k \rho_0 t_e)^{1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} - 1 \right]$$

$$+ (t - t_e) \mu_+ E_0 (1 + k \rho_0 t_e)^{-\frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}}$$

$$\rho_+(t, t_e) = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 t_e (k - \frac{\mu_+}{\epsilon}) + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_0 t}, \quad \rho_- = 0$$

Região V:

$$S_2(0) + \mu_+ E_0 t < x < d, \quad d \text{ sendo a espessura da amostra}$$

$$\rho_+ = 0$$

$$\rho_- = 0$$

É interessante calcular-se que a fração r do total de carga inicialmente separada ($\rho_0(S_2(0) - S_1(0))$) consegue, finalmente, se libertar. Para isto, considere-se a linha de corrente $S_2(t)$. A corrente de condução de carga positiva através dela é $(\mu_+ + \mu_-)\rho_+(t)E(S_2(t))$, pois a velocidade relativa das cargas positivas é $(\mu_+ + \mu_-)E(S_2(t))$. A integral no tempo da expressão da corrente de condução dada acima, fornece o que queremos calcular. Tem-se que distinguir dois casos: no primeiro, t_1 existe e pode ser calculado da expressão (39); t_1 será o limite superior da integral. Caso t_1 não exista - é o outro caso -, o limite da integral deverá ser estendido ao infinito. O cálculo é direto, razão pela qual passamos logo ao resultado:

1º caso

$$S_1(t_1) = S_2(t_1),$$

$$r = \frac{\epsilon E_0}{\rho_0(S_2(0) - S_1(0))} \left[1 - \left\{ 1 + \frac{\rho_0(\epsilon k - \mu_- - \mu_+)(S_2(0) - S_1(0))}{\epsilon E_0(\mu_+ + \mu_-)} \right\}^{-\frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k - \mu_- - \mu_+}} \right]$$

2º caso

$$t \rightarrow \infty$$

$$r = \frac{\epsilon E_0}{\rho_0(S_2(0) - S_1(0))}$$

(40)

O notável, a respeito do segundo resultado, é que a fração de carga libertada não depende da existência de recombinação. É nele, também, que se inclui a situação em que $\rho_0(S_2(0)-S_1(0))$, é finito, com $\rho_0 \rightarrow \infty$ e $(S_2(0)-S_1(0)) \rightarrow 0$, e que valerá, também, com qualquer outra condição de contorno elétrica.

Resta-nos obter a diferença de potencial, V , entre o eletródio em $x=0$ e o em $x=d$. Limitar-nos-emos a conseguir uma equação diferencial para V , enquanto nenhuma das duas nuvens de carga positiva e negativa, não atingiram, ainda, o eletródio para o qual se dirigem. Para isto, lançamos mão da Eq.(33'), que aqui reproduzimos:

$$(\mu_+ + \mu_-) \int_0^d \rho_+ E dx - \frac{\epsilon \mu_-}{2} \int_0^d \frac{\partial E^2}{\partial x} dx + \epsilon \frac{dV}{dt} = 0 \quad (33')$$

A primeira integral pode ser assim dividida:

$$\int_0^d \rho_+ E dx = \int_{S_1(t)}^{S_2(t)} \rho_+ E dx + \int_{S_2(t)}^d \rho_+ E dx \quad (41)$$

Em $S_1(t) < x < S_2(t)$, $\rho_+(t)$ é dado pela Eq.(34) e por $\frac{1}{\mu_+} \frac{dS_1}{dt}$ (Eq.37); tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{S_1(t)}^{S_2(t)} \rho_+ E dx &= \rho_0 E_0 (1 + k \rho_0 t) \left[-1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k} \right. \\ &\times \left[S_2(0) - S_1(0) - \frac{(\mu_- + \mu_+) \epsilon E_0}{\rho_0 (\epsilon k - \mu_- - \mu_+)} \left\{ (1 + k \rho_0 t) \left(1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k} - 1 \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

A segunda integral em (41) pode ser trabalhada tendo-se em conta que no intervalo $S_2(t) < x < d$, somente existem cargas positivas. Então, com o auxílio da equação de Poisson, tem-se:

$$\int_{S_2(t)}^d \rho_+ E dx = \epsilon \int_{S_2(t)}^d E \frac{\partial E}{\partial x} dx = \frac{\epsilon}{2} [E_0^2 - E^2(S_2(t))] .$$

Ou, usando a Eq.(35):

$$\int_{S_2(t)}^d \rho_+ E dx = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \left[1 - (1 + k\rho_0 t)^{-2 \frac{\mu_+ + \mu_-}{k\epsilon}} \right] . \quad (43)$$

Usando-se (42) e (43) em (41) e o resultado em (33'), e, notando-se que a integral intermediária em (40) se anula, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{\mu_+ + \mu_-} \frac{dV}{dt} + \frac{\epsilon E_0^2}{2} + E_0(1 + k\rho_0 t)^{-1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} [\rho_0(S_2(0) - S_1(0)) - \epsilon E_0] \\ - \epsilon E_0^2(1 + k\rho_0 t)^{-2 \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\mu_- + \mu_+}{\epsilon k - \mu_+ - \mu_-} \right] = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

A condição inicial é $V(0) = E_0 d$.

Não há dificuldade em integrar a equação diferencial (44), embora a expressão seja bastante complicada:

$$\begin{aligned}
 V = & (\mu_+ + \mu_-) \left[E_0 d - \{\rho_0 (S_2(0) - S_1(0)) - \epsilon E_0\} \frac{E_0}{\mu_+ + \mu_-} \right. \\
 & \times \left\{ 1 - (1 + k\rho_0 t) \frac{-\frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k}}{\rho_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k - \mu_+ - \mu_-} \right) \right. \\
 & \left. \left. \times \left\{ \frac{-2 \frac{\mu_+ + \mu_-}{\epsilon k} + 1}{\epsilon k - 2\mu_- - 2\mu_+} \right\} \right] \right. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Esta expressão é válida se $S_1(t) \neq S_2(t)$, para todo t compreendido entre 0 e a chegada de uma das frentes, (que, como já vimos, se movem com velocidade constante) ao eletródio.

Se $S_1(t_1) = S_2(t_2)$, enquanto as frentes ainda não atingiram o eletródio, é bastante fácil encontrar-se a voltagem para $t > t_1$. Pois a Eq.(33') agora dá, simplesmente

$$(\mu_+ + \mu_-) \frac{1}{2} \int_{S_1(t_1)}^d \frac{\partial E^2}{\partial x} dx + \frac{dV}{dt} = 0 ; \quad (46)$$

mas o campo em $S_1(t_1)$ tem um valor constante no tempo, de pois que as cargas positivas e negativas não mais se superpõem - como a aplicação do teorema de Gauss nos indica. Assim, o campo em $S_1(t_1)$, $E(S_1(t_1))$ será $-\epsilon\rho_0(S_2(0) - S_1(0))r$, com r dado pela expressão (40). Além disso, $E(d,t) = E_0$. Portanto,

$$\frac{1}{(\mu_+ + \mu_-)} \frac{dV}{dt} - \frac{1}{2} E^2(S_1(t_1)) = 0 \quad (47)$$

e, assim,

$$V(t) = V(t_1) + \frac{\mu_+ + \mu_-}{2} \{E^2(S_1(t_1)) - E_0^2\} (t - t_1)$$

Vê-se, então, que para $t > t_1$, a voltagem decresce linearmente com o tempo, pois $E_0 > E(S_1(t))$, pelo teorema de Gauss. A ligação entre as duas soluções dadas nas Eqs. (45) e (47) se dá sem descontinuidade na derivada de V com o tempo, pois as equações diferenciais coincidem em $t = t_1$.

A Fig. 8 nos mostra ρ_-/ρ_0 e ρ_+/ρ_0 em função de $x' = x/d$, para diversos valores de $t' = k\rho_0 t$ com os parâmetros assim escolhidos: $\mu_- = 0$, $\frac{\mu_+}{\epsilon k} = \frac{1}{3}$, $S_2(0) = \frac{2}{3} d$, $S_1(0) = \frac{1}{3} d$ e $E_0 = \epsilon\rho_0 d$. No gráfico representando ρ_-/ρ_0 , a curva A pertence à função desde o ponto a até o patamar correspondente ao valor de t' considerado. Por exemplo, para $t' = 0,2$, ρ_-/ρ_0 é representado pelo ramo a b da curva A e mais a parte horizontal. É interessante observar-se a quase linearidade da carga com o espaço na região III. Para o caso representado no gráfico, embora a frente $S_1(t)$ ultrapasse $S_2(t) = S_2(0)$, ela só o faz depois que a frente $x_+(t, 0)$ atinge o eletródio da direita. (Gráfico obtido pelo sr. Luíz Nunes de Oliveira).

OBSERVAÇÕES

I. Gostaríamos de mostrar com que dificuldades nos encontramos, quando, em vez de circuito aberto, a condi -

ção de contorno elétrica é a de voltagem constante (curto circuito não forneceria campo inicial diferente de zero, como requerido). Portanto, da expressão da corrente total, Eq.(6), e integrando em x, obtem-se

$$jd = \mu_+ \int_0^d \rho_+ E dx + \mu_- \int_0^d \rho_- E dx$$

a integral da corrente de deslocamento se anulando pela condição imposta de voltagem constante. Usando-se a equação de Poisson, vem:

$$jd = (\mu_+ + \mu_-) \int_0^d \rho_+ E dx - \frac{\mu_- \epsilon}{2} (E^2(d,t) - E^2(0,t)). \quad (48)$$

Mas, enquanto as nuvens de carga ainda não atingiram os eletródios, podemos escrever

$$j = \epsilon \frac{dE}{dt}(d,t) = \epsilon \frac{dE}{dt}(0,t). \quad (49)$$

Como $E(d,0)=E(0,0)$, conclue-se $E(d,t)=E(0,t)$, anulando-se, assim, a segunda parcela do lado direito da Eq. (48).

Parece-nos bastante claro que, na região de mistura, as duas densidades, de cargas positivas e negativas, são iguais e dadas por Eq.(34): a influência da corrente total se manifesta somente no movimento das frentes $S_1(t)$ e $S_2(t)$. Com isso, a integral na Eq.(48) pode se convenientemente desdobrada e tem-se

$$jd = (\mu_+ + \mu_-) \rho_+(t) \int_{S_1(t)}^{S_2(t)} E dx + \frac{\epsilon(\mu_+ + \mu_-)}{2} \int_{S_1(t)}^{S_2(t)} \frac{\partial E^2}{\partial x} dx,$$

usando-se a equação de Poisson na região $S_2(t) < x < d$. Mas, o campo é constante em $S_1(t) < x < S_2(t)$ e igual a $\mu_+ \frac{dS_1}{dt}$.

Daí:

$$\begin{aligned} \frac{jd}{\mu_+ + \mu_-} &= \frac{\rho_+(t)}{\mu_+} \frac{dS_1}{dt} [S_2(t) - S_1(t)] + \frac{\epsilon}{2} \\ &\times \left[E^2(d, t) - \frac{1}{\mu_+} \left(\frac{dS_1}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Com as relações

$$\frac{d^2 S_1}{dt^2} = \frac{\mu_+ j}{\epsilon} - \frac{(\mu_+ + \mu_-)}{\epsilon} \frac{dS_1}{dt} \quad (51)$$

$$\frac{d^2 S_2}{dt^2} = - \frac{\mu_- j}{\epsilon} - \frac{(\mu_+ + \mu_-)}{\epsilon} \frac{dS_2}{dt} \quad (52)$$

as relações (49), (50), (51) e (52) permitiriam obter j , $E(d, t)$, $S_1(t)$ e $S_2(t)$ com $\rho_+(t)$ substituído da Eq.(34).

As cargas positivas e negativas que se tornam livres em t_e ao atingirem respectivamente $S_2(t_e)$ e $S_1(t_e)$, estarão, em x_+ e x_- , no tempo t dado por

$$x_+(t, t_e) = S_2(t_e) + \mu_+ E(S_2(t_e))(t - t_e) + \frac{\mu_+}{\epsilon} \int_{t_e}^t dt' \int_{t_e}^{t'} j(t'') dt''$$

$$x_-(t, t_e) = S_1(t_e) - \mu_- E(S_1(t_e))(t - t_e) - \frac{\mu_-}{\epsilon} \int_{t_e}^t dt' \int_{t_e}^{t'} j(t'') dt''$$

com densidades, respectivamente,

$$\rho_+(t, t_e) = \frac{\rho_+(t_e)}{1 + \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_+(t_e)(t - t_e)}$$

$$\rho_-(t, t_e) = \frac{\rho_-(t_e)}{1 + \frac{\mu_-}{\epsilon} \rho_-(t_e)(t - t_e)} .$$

II. No problema que acabamos de estudar, as cargas positivas e negativas já estão presentes em $t=0$, criadas, pode ser, por iluminação breve mas intensa, no intervalo $S_1(0) < x < S_2(0)$. Seria interessante analisar-se o que acontece se a separação das cargas positivas e negativas se dá continuamente, numa dada razão constante no tempo, a. Limitar-nos-emos a considerar o caso em que $k=0$, e onde a geração de cargas se dá em toda a espessura da amostra, sendo fixas as cargas negativas. Então, em vez das Eqs.(2) e (3), virá:

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} = - \frac{\partial i_+}{\partial x} + a \quad (53)$$

e

$$\frac{\partial \rho_-}{\partial t} = a.$$

Daí, é muito fácil obter-se as equações das trajetórias e da variação da densidade de carga ao longo de u-

uma linha de corrente, em circuito aberto:

$$\frac{d^2 x_+}{dt^2} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} \rho_- \frac{dx_+}{dt} \quad (54)$$

$$\frac{d\rho_+}{dt} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} (\rho_+ - \rho_-) \rho_+ + a \quad (55)$$

$$\frac{d\rho_-}{dt} = a.$$

Consideremos as cargas positivas criadas em toda a espessura da amostra em $t=0$. A densidade de cargas crescerá no tempo, da mesma forma que a das cargas negativas, isto é, $\rho_+(0,t) = \rho_-(t) = at$. Portanto, em toda a região que se estende da posição ocupada em t por aquelas cargas criadas em $t=0$, $(x_{+0}(0,t))$, até o catodo, não haverá excesso de carga. O campo em $x_{+0}(0,t)$, poderá ser obtido da integração da Eq.(54), com $\rho_- = at$:

$$\frac{d^2 x_{+0}}{dt^2} = - \frac{\mu_+}{\epsilon} at \frac{dx_{+0}}{dt}$$

ou

$$\frac{dx_{+0}}{dt} = \mu_+ E_0 e^{-\frac{at^2}{2\epsilon}} + \frac{at^2}{2\epsilon}, \quad \frac{dx_{+0}}{dt} = \mu_+ E(x_{+0}) \quad (56)$$

Uma ulterior integração fornece a posição $x_{+0}(t)$:

$$x_{+0}(t) = \mu_+ E_0 \int_0^t e^{-\mu_+ \frac{at^2}{2\epsilon}} dt$$

Para se obter a densidade de carga positiva entre $x=0$ e $x=x_{+0}(t)$, consideramos todas as cargas que se originam em $x=0$ para todo $t_e < t$.

Como as cargas positivas estão sempre deixando o ponto $x=0$, a condição inicial será $\rho_+(t_e, t_e)=0$.

A integração da Eq.(55):

$$\frac{d\rho_+}{dt}(t_e, t) = -\frac{\mu_+}{\epsilon} [\rho_+(t_e, t) - at] \rho_+(t_e, t) + a, \quad (57)$$

com a condição $\rho_+(t_e, t_e)=0$, fornecerá as densidades em função de t_e .

A posição $x_+(t_e, t)$, ocupada por estas cargas, será obtida da integração da Eq.(54):

$$\frac{dx_+}{dt}(t_e, t) = \mu_+ E(0, t_e) e^{-\frac{\mu_+}{2a\epsilon}(t^2 - t_e^2)}, \quad t_e < t$$

Mas, $E(0, t_e)=E_0$, pois se $\rho(t_e, t_e)=0$, pela expressão da corrente total $\frac{dE}{dt}(0, t)=0$. Portanto,

$$x_+ = (t_e, t) = \mu_+ E_0 e^{\frac{\mu_+ t_e^2}{2a\epsilon}} \int_{t_e}^t e^{-\frac{\mu_+ t^2}{2a\epsilon}} dt, \quad t_e < t,$$

(58)

com o que a solução fica estabelecida.

A compatibilidade da hipótese $\rho_+(t_e, t_e)=0$, com as equações do problema, pode ser verificada usando-se a Eq. (53) para o ponto $x=0$. Teremos, com $\rho_+(0, t)$ indicando a densidade em qualquer tempo em $x=0$:

$$0 = -\mu_+ E_0 \frac{\partial \rho}{\partial x}(0, t) + a. \quad (59)$$

$\frac{\partial \rho}{\partial x}$ pode ser calculado seguindo uma linha de corrente que se inicia em qualquer tempo t_e . A Eq.(55), com $\rho_+=0$, nos dá:

$$\frac{d\rho_+}{dt} = a$$

que também pode ser escrita

$$\frac{d\rho_+}{dx} \frac{dx}{dt} = a$$

onde dx é o espaço percorrido em dt , ou seja, a velocidade, que é dada por $\mu_+ E_0$. Então,

$$\frac{d\rho_+}{dx} = \frac{a}{\mu_+ E_0}, \quad (60)$$

e as Eqs. (59) e (60) coincidem.

Por outro lado, o caso limite no qual também $\mu_+=0$ pode ainda ser obtido de nossa solução, pela inspeção das Eqs. (58) e (60): por (60), a derivada de ρ_+ em relação a x tende para infinito, indicando a formação de um degrau, como a Eq.(58) nos confirma.

Finalmente, a voltagem V entre os eletrodos em $x=0$ e em $x=d$, será conseguida pelo uso da relação (33'), que fornece

$$\frac{\mu_+}{\epsilon} (E^2(x_{+0}) - E_0^2) + \mu_+ atV + \epsilon \frac{dV}{dt} = 0, \quad (61)$$

com $E(x_{+0})$ dado por (56).

Não tentaremos obter as integrais das Eqs.(56) e (61). Achamos suficiente termos indicado que o método das características consegue, em princípio, levar a uma solução do problema aqui considerado.

REFERÊNCIAS

1. G.F. Leal Ferreira, B.Gross, J.Nonmetals, 1, 129 (1973).
2. J.Lindmayer, J.Appl.Phys., 36, 196 (1965).
3. B.Grodd, M.Pearlman, J.Appl.Phys., 43, 853 (1972).
4. A.Many, G.Rakavy, Phys.Rev., 126, 1980 (1962).

Fig. I A

Fig. I B

Fig. 2

Fig. 3

$$\frac{\mu^-}{\mu^+} = 4$$

fig. 4

$$\frac{\mu^-}{\mu^+} = 0.25$$

fig. 5

fig. 6

Fig. 7

Fig. 8