NELSON ONUCHIC

# Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Tese apresentada à Congregação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para concurso à Livre Docência da Cadeira "Cálculo Infinitesimal".

RIO CLARO
1965

NELSON ONUCHIC

# COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Tese apresentada à Congregação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo para concurso à Livre Docência da Cadeira "Cálculo Infinitesimal".

RIC CLARO
1965

À Lourdes

e

aos nossos filhos

## INTRODUÇÃO

Os problemas que nos propomos a estudar são os seguintes :

Dados os sistemas

(1) $y' = A(t)\,y$

(2) $x' = A(t)\,x + f(t\,,x)$ , (notação vetorial)

perguntamos :

$P_1$ - Para tôda solução $y(t) \neq 0$ de (1) , existe pelo menos uma solução $x(t)$ de (2) satisfazendo $x(t) = y(t) + o(\|y(t)\|)$ , isto é ,

$$\frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} \longrightarrow 0 \quad \text{com } t \longrightarrow \infty \text{ ?}$$

$P_2$ - Para tôda solução $x(t)$ de (2) , com $x(t) \neq 0$ para todo $t$ suficientemente grande, existe pelo menos uma solução $y(t)$ de (1) satisfazendo $x(t) = y(t) + o(\|y(t)\|)$ ?

O problema $P_1$ foi estudado, entre outros, por Z.Szmydt [21]* que generalizou resultados de S.Faedo [9] e E.Levi [16] , sendo que êstes últimos consideraram o problema $P_1$ no caso em que a perturbação $f(t\,,x)$ é linear . O trabalho de Z.Szmydt se baseia no método topológico de T.Ważewski [24] . Neste trabalho vamos atacar os problemas $P_1$ e $P_2$ usando um teorema bastante geral de P.Hartman e N.Onuchic [12 , Teorema 1.1] , (Teorema 2.3) , que foi inspirado em um resultado estabelecido por C.Corduneanu [6 , Teorema II] . Em verdade, a prova do teorema de C.Corduneanu está errada e, possívelmente, não seja mesmo verdadei

* As indicações entre colchetes referem-se à bibliografia no fim dêste trabalho; as demais remetem o leitor ao ponto conveniente do mesmo.

ro. Há ainda o inconveniente de o referido teorema, mesmo suposto válido, não se prestar às aplicações de problemas assintóticos. Por outro lado, o ponto interessante do Teorema 2.3 é exatamente prestar-se, de maneira natural, ao estudo de problemas assintóticos.

O ataque aos problemas $P_1$ e $P_2$ é o objetivo do Capítulo 3 dêste trabalho. Consideramos a perturbação f(t , x) de (2) "pequena" no mesmo sentido de Z.Szmydt, mas não requeremos que A(t) seja constante e nem mesmo redutível [5 , Capítulo VIII , § 4] o que seria, para êste propósito, essencialmente o caso A(t) constante. O desenvolvimento do Capítulo 3 culmina no Teorema 3.3 que responde aos problemas em consideração. Observamos que o Corolário 3.3, caso bem particular do Teorema 3.3, é muito mais geral que o resultado de Z.Szmydt não só porque aborda o problema $P_2$ que não é tratado por Z.Szmydt , como também por encerrar uma resposta ao problema $P_1$ , com hipóteses menos restritivas que a do [21 , Corolário 1].

Problemas próximos a $P_1$ e $P_2$ são tratados entre outros em [3] , [10] , [11] , [13] , [14] , [20] , [22] , [23] , [26] , [27] . Ver para outras referências [4] .

O Capítulo 2 gira em tôrno do Teorema 2.3 . Uma importante consequência dêste resultado é o Teorema 2.5 que pode ser entendido como o Teorema 2.3 em uma situação específica. O Teorema 2.5 é a principal ferramenta para a solução dos problemas $P_1$ e $P_2$ no Capítulo 3. O Teorema 2.3 , que é a parte central do Capítulo 2 , depende fortemente de resultados de J.Massera e J.Schäffer [17] , [18] e do teorema do ponto fixo de Tychonoff.

Dada a grande importância da teoria de J.Massera e J.Schäffer para o desenvolvimento do Capítulo 2 , e por conseguinte, do Capítulo 3 , e devido ao fato da referida teoria não ser ainda bem conhecida , apresentamos, no Capítulo 1 , a parte da mencionada teoria necessária ao desenvolvimento de nosso trabalho nos capítulos seguintes.

Deixamos aqui os nossos agradecimentos ao Professor Juan J. Schäffer, do Instituto de Matemática y Estadística, Uruguai, que leu o manuscrito original fazendo interessantes críticas e comentários.

A realização dêste trabalho dependeu parcialmente de auxílio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Nelson Onuchic

Rio Claro, março de 1965

# ÍNDICE

# CAPÍTULO 1

## RESULTADOS BÁSICOS SÔBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES E ANÁLISE FUNCIONAL

O conteúdo dêste capítulo é parte da teoria desenvolvida por J.Massera e J.Schäffer [17 , 18] . O material aqui apresentado é desenvolvido numa forma conveniente às aplicações feitas nos capítulos seguintes.

Sejam dados os sistemas lineares homogêneo e não homogêneo :

$$(1 . 1) \quad y' = A(t)y + g(t)$$

$$(1 . 2) \quad y' = A(t)y$$

onde $t$ pertence a $J = [0 , \infty)$ , $y$ e $g$ pertencem a $R^n$ ou $C^n$ . $R^n$ e $C^n$ são espaços de Banach sôbre o corpo dos reais $R$ e dos complexos $C$ respectivamente. Denotaremos $R^n$ ou $C^n$ por $Y$ . Ao considerarmos $Y$ um espaço de Banach vamos tomar para todo $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ a norma $\|x\|$ dada por $\sup_{1 \leq i \leq n} |x^i|$ ou $|x^1| + \dots + |x^n|$ . A razão porque tomamos para $\|x\|$ uma das duas formas acima é apenas uma questão de conveniência. Com pequenas e óbvias adaptações em alguns pontos pode-se ver que tudo funciona bem tomando-se para $\|x\|$ qualquer uma das normas compatíveis com a topologia de $Y$ .

Se $A$ é matriz $n \times n$ , definimos norma de $A$ como sendo o extremo superior dos $\|Ax\|$ para todo $x \in Y$ com $\|x\| = 1$ ; usamos a notação $\|A\|$ . É fácil ver que $\|A\|$ é o menor número $C$ com a propriedade $\|Ax\| \leq C \|x\|$ . Uma consequência imediata é que $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$ .

Naturalmente $\|A\|$ depende da norma escolhida em Y. Será suposto que A(t) e g(t) são localmente Lebesgue integráveis, isto é, A(t) e g(t) são Lebesgue integráveis sôbre todo intervalo finito e fechado de J.

Se y(t) é uma solução de (1.1) no intervalo [0, a], então segue da teoria geral dos sistemas lineares que

$$(1.3) \qquad \|y(t)\| \leq \left\{\|y(r)\| + \int_0^a \|g(s)\| ds\right\} \cdot \exp \int_0^a \|A(s)\| ds$$

para t, r pertencentes a [0, a].

Integrando-se, em relação a r, ambos os membros de (1.3) sôbre [0, a] segue

$$(1.4) \qquad \|y(t)\| \leq \left\{a^{-1} \int_0^a \|y(s)\| ds + \int_0^a \|g(s)\| ds\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp \int_0^a \|A(s)\| ds \qquad \text{para } 0 \leq t \leq a.$$

Seja L = L(Y) o conjunto das funções definidas em J com valores em Y e localmente Lebesgue integráveis. Para todo intervalo finito fechado $J' \subset J$ definimos em L a semi-norma $p_{J'}(f) = \int_{J'} \|f(t)\| dt$. O espaço L com a topologia definida pela família de semi-normas $\{p_{J'}(f)\}$ é um espaço vetorial separado e localmente convexo. Fica entendido que em L identificamos duas funções que coincidem em quase tôda parte, isto é, que coincidem exceto num conjunto de medida zero, É fácil ver que podemos nos restringir à família de semi-normas $\{p_{J'}(f)\}$ com os J' da forma [0, n], n inteiro e positivo, ou com os J' da forma [0, a], a > 0, para obtermos a mesma topologia sôbre L.

Apresentaremos a seguir alguns espaços de Banach de especial interêsse. Nestes espaços fica já estabelecido que identificamos duas funções que coincidem em quase tôda parte.

$L^p = L^p(Y)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das funções $f$ mensuráveis em $J$ com valores em $Y$, as $\|f\|^p$ Lebesgue integráveis em $J$ e com norma $|f|_p = [\int_0^\infty \|f(t)\|^p \, dt]^{1/p}$.

$L^\infty = L^\infty(Y)$ é o espaço das funções $f$ mensuráveis e essencialmente limitadas em $J$ com valores em $Y$. $f$ essencialmente limitada significa que existe uma função limitada $g$ que coincide com $f$ em quase tôda parte. A norma, neste espaço, é dada por

$$|f|_\infty = \inf_{E \in N} \left[ \sup_{t \in J-E} \|f(t)\| \right]$$

onde $N = \left\{ E \subset J \mid \text{medida } E = \text{zero} \right\}$.

$L_0^\infty = L_0^\infty(Y)$ é o subespaço de $L^\infty$ formado das funções que tendem essencialmente para zero com $t \to \infty$. $f$ tender essencialmente para zero significa que existe $g$ tendendo a zero e que coincide com $f$ em quase tôda parte.

Se $B$ é um espaço de Banach de funções $f$ mensuráveis em $J$ com valores em $Y$ denotaremos por $|f|_B$ a sua norma.

Dizemos que um espaço de Banach $D$ é <u>mais forte</u> que $L(Y)$ se forem satisfeitas as condições seguintes:

(1.5) $D$ está algèbricamente contido em $L(Y)$.

(1.6) A topologia de espaço de Banach de $D$ é mais fina que a topologia induzida por $L(Y)$.

A condição (1.6) é equivalente a dizer que para todo $a > 0$ existe um número $\alpha_D = \alpha(a, D)$ tal que

(1.7) $\int_0^a \|y(t)\| dt \leq \alpha_D |y|_D$, onde $|y|_D$ é a norma de $y \in D$.

Assim, convergência em D implica convergência em L(Y).

<u>Observação 1</u>: Os espaços $L^p(Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, e por conseguinte $L_0^\infty(Y)$, são mais fortes que L(Y). [17, Lema 3.2].

Se D é um espaço de Banach mais forte que L(Y) dizemos que $y = y(t)$ é uma <u>D-solução</u> de (1.1) ou (1.2) se $y \in D$. Seja $Y_0 = Y_{0D}$ o conjunto dos valores iniciais $y(0) \in Y$ das D-soluções $y = y(t)$ de (1.2). Seja $Y_1 = Y_{1D}$ um subespaço de Y complementar a $Y_{0D}$, isto é, Y é a soma direta de $Y_0$ e $Y_1$. Assim, todo elemento $y \in Y$ pode ser escrito de uma única maneira na forma $y = y_0 + y_1$ com $y_0 \in Y_0$, $y_1 \in Y_1$. Seja $P_0 = P_{0D}$ a projeção de Y sôbre $Y_{0D}$ anulando $Y_{1D}$ e $P_1 = P_{1D} = I - P_{0D}$ a projeção de Y sôbre $Y_1$ anulando $Y_0$. Assim, se $y = y_0 + y_1$ com $y_0 \in Y_0$, $y_1 \in Y_1$, então $P_0 y = y_0$ e $P_1 y = y_1$.

Teorema 1.1 - <u>Sejam</u> A(t) <u>matriz</u> p x p <u>localmente Lebesgue integrável em</u> J <u>e</u> D <u>espaço de Banach mais forte que</u> L(Y). <u>Então existem constantes</u> $C_0$ <u>e</u> $C_1$ <u>tais que se</u> y(t) <u>é uma D-solução de</u> (1.2) <u>segue que</u>

(1.8) $|y|_D \leq C_0 \|y(0)\|$ <u>e</u> $\|y(0)\| \leq C_1 |y|_D$.

<u>Prova</u>

A aplicação $\varphi : D \to Y_{0D}$ que leva uma D-solução y(t) de (1.2) em $y(0) \in Y_{0D}$ é linear, sôbre e biunívoca. Como estamos em dimensão finita $\varphi$ é bicontínua. Dêste fato segue a existência de constantes $C_0$ e $C_1$ de modo que $\|\varphi(y(t))\| \leq C_1 |y|_D$ e $|\varphi^{-1}(y(0))|_D \leq C_0 \|y(0)\|$, ou seja, $\|y(0)\| \leq C_1 |y|_D$ e $|y|_D \leq C_0 \|y(0)\|$.

A prova do teorema está assim completa.

Sejam B , D espaços de Banach mais fortes que L(Y).

Seja $D_T$ o conjunto das funções y(t) absolutamente contínuas nos intervalos finitos fechados, de J , com $y(t) \in D$ e $g(t) = y'(t) - A(t)\, y(t) \in B$. Definimos um operador $T = T_{BD}$ de $D_T$ em B pondo $Ty = g$.

<u>Teorema 1 . 2</u> - <u>Sejam</u> A(t) <u>matriz</u> p x p <u>localmente Lebesgue integrável em</u> J <u>e</u> B , D <u>espaços de Banach mais fortes que</u> L(Y) . <u>Então</u> $T = T_{BD}$ <u>é um operador fechado, isto é, o gráfico de</u> T , $G(T) = \left\{ (y(t), g(t)) \mid y(t) \in D_T,\, g = Ty \right\}$ , <u>é um conjunto fechado do espaço de Banach</u> D x B .

<u>Prova</u>

Devemos mostrar que se $(y_n(t))$ é uma sequência de elementos de $D_T$ de modo que existam $y(t) = \lim y_n(t)$ em D e $g(t) = \lim g_n(t)$ em B com $g_n = Ty_n$, então $y \in D_T$ e $g = Ty$, ou seja, $(y_n, g_n) \in G(T)$ implica $(y, g) \in G(T)$.

Como $y_n' - y'_m = A(t)\,(y_n - y_m) + (g_n(t) - g_m(t))$, ou seja, (1.1) é satisfeita, segue de (1.4) que $\|y_n(t) - y_m(t)\| \leq$

$$\leq \left\{ a^{-1} \int_0^a \|y_n(s) - y_m(s)\| ds + \int_0^a \|g_n(s) - g_m(s)\|\, ds \right\} \cdot$$

$$\cdot \exp \int_0^a \|A(s)\| ds\,, \quad 0 \leq t \leq a .$$

Como B , D são mais fortes que L(Y) resulta que

$$\int_0^a \|y_n(s) - y_m(s)\| ds \leq \alpha_D |y_n - y_m|_D$$

e

$$\int_0^a \|g_n(s) - g_m(s)\| ds \leq \alpha_B \,|\, g_n - g_m|_B \,.$$

Por conseguinte, em $[0\,,\,a]$ temos

$$\| y_n(t) - y_m(t) \| \leq \left\{ a^{-1} \propto_D |y_n - y_m|_D + \right.$$

$$\left. + \propto_B |g_n - g_m|_B \right\} \cdot \exp \int_0^a \| A(s) \| ds .$$

Esta desigualdade implica que $y_n(t)$ converge uniformemente para $y(t)$ em $[0\,,\,a]$.

Êste fato acarreta que $\int_a^t A(s)\, y_n(s)\, ds$ converge uniformemente para $\int_a^t A(s)\, y(s)\, ds$ em $[0\,,\,a]$.

Desde que convergência em B implica convergência em L(Y), porque B é mais forte que L(Y), resulta que $g_n(t)$ converge para $g(t)$ também em L(Y) e portanto, para todo $t > 0$, $\int_a^t g_n(s)\, ds$ converge para $\int_a^t g(s)\, ds$.

Dizer que $g_n = T\, y_n$, é equivalente a dizer que $y'_n = A(t) y_n + g_n(t)$ e que é equivalente à equação integral.

$$y_n(t) = y_n(a) + \int_a^t A(s)\, y_n(s) ds + \int_a^t g_n(s) ds .$$

Passando ambos os membros da equação integral acima ao limite com $n \to \infty$, segue, em vista dos fatos logo acima mencionados, que

$$y(t) = y(a) + \int_a^t A(s)\, y(s)\, ds + \int_a^t g(s)\, ds$$

ou seja

$$y \in D_T \quad e \quad g = T y$$

o que significa $(y\,,\,g) \in G(T)$.

A prova do teorema está completa.

<u>Observação 2</u>: Seja $\tilde{D}_T = \left\{ y(t) \in D_T \mid y(0) \in Y_{1D} \right\}$.

A prova acima mostra que o Teorema 1.2 continua válido se substituirmos $D_T$ por $\tilde{D}_T$ e tomarmos a restrição $\tilde{T}$ de T a $\tilde{D}_T$.

O par de espaços de Banach (B , D) , ambos mais fortes que L(Y) , é dito admissível em relação ao sistema (1.1) ou A(t) se, para todo $g(t) \in B$ existir uma D-solução de (1.1). Em outras palavras, a imagem de $D_T$ por $T = T_{BD}$ é B.

O lema seguinte, de fundamental importância para a prova do Teorema 1.3 abaixo, é um caso particular de um teorema mais geral cujos enunciado e prova podem ser encontrados, por exemplo, em [15 , Teorema 2.12.1 , pg 46] ou [25 , Teorema 6 , pg 163]. O referido lema é apresentado em uma forma conveniente visando a prova do teorema que o segue.

Lema. Sejam $B_1$ e $B_2$ dois espaços de Banach e $B \subset B_1$ um subespaço vetorial (não necessàriamente completo). Seja T uma transformação linear de B sôbre $B_2$, ou seja, $T(B) = B_2$. Suponhamos T fechado, isto é, o gráfico de $T = \{(x , Tx) \mid x \in B\}$ é um conjunto fechado do espaço de Banach $B_1 \times B_2$. Então existe uma constante C tal que, para todo $y \in B_2$, existe pelo menos um $x \in B$ satisfazendo $Tx = y$ e $\|x\|_1 \leq C \|Tx\|_2$. Em particular quando T é biunívoca, então $\|x\|_1 \leq C \|Tx\|_2$ para todo $x \in B$.

Teorema 1.3 - Sejam A(t) matriz p x p localmente Lebesgue integrável em J , o par (B , D) admissível em relação ao sistema (1.1) e $y_0 \in Y_{0D}$. Então, se $g(t) \in B$, o sistema (1.1) tem uma única D-solução y(t) tal que $P_{0D}\, y(0) = y_0$. Mais ainda, existem constantes $C_0$ e K, independentes de g(t) e $y_0$, tais que

(1.9) $|y|_D \leq C_0 \|y_0\| + K|g|_B$.

Prova - Observemos primeiramente que se, para um dado $y_0 \in Y_{0D}$

e $g(t) \in B$, tivermos uma D-solução $y(t)$ com $P_{0D}y(0) = y_0$, esta solução será única. De fato, se $z(t)$ fôsse uma outra solução com a mesma propriedade, $y(t) - z(t)$ seria uma D-solução de (1.2) com $y(0) - z(0) = 0$ e por conseguinte $y(t) \equiv z(t)$.

Consideremos primeiro o caso $y_0 = 0$; assim, procuremos uma D-solução $y(t)$ de (1.1) tal que $y(0) \in Y_{1D}$, ou seja, $P_{0D}y(0) = 0$.

Dado $g(t) \in B$, existe por hipótese uma D-solução $y(t)$ de (1.1). Seja $y(0) = y_0 + y_1$ onde $y_0 \in Y_{0D}$ e $y_1 \in Y_{1D}$. Seja $y_0(t)$ a solução de (1.2) tal que $y_0(0) = y_0$; portanto $y_0(t) \in D$. Então $y_1(t) = y(t) - y_0(t) \in D$ e é a solução de (1.1) com $y_1(0) = y(0) - y_0(0) = y_0 + y_1 - y_0 = y_1 \in Y_{1D}$. Está assim provado que para todo $g = g(t) \in B$ existe uma e única D-solução $y = y(t)$ de (1.1) satisfazendo $y(0) \in Y_{1D}$. Isto acarreta, em vista da Observação 2 que segue o Teorema 1.2, que a aplicação $\tilde{T}$ de $\tilde{D}_T$ em B dada por $\tilde{T}y = g$ é uma aplicação linear, biunívoca de $\tilde{D}_T$ sôbre B e cujo gráfico é fechado. Segue do lema que existe uma constante K satisfazendo $|y|_D \leq K|g|_B$. O teorema está assim verificado para o caso $y_0 = 0$.

Consideremos agora $y_0 \neq 0$ e seja $g(t) \in B$ dado. Seja $y_1(t)$ a D-solução de (1.1) satisfazendo $y_1(0) \in Y_{1D}$. Seja $z(t)$ a D-solução de (1.2) satisfazendo $z(0) = y_0$. Então $y(t) = z(t) + y_1(t)$ é a D-solução de (1.1) com $P_{0D}\, y(0) = y_0$. Temos que $|y|_D \leq |z|_D + |y_1|_D$.

Do Teorema 1.1 segue que existe constante $C_0$ tal que

$$|z|_D \leq C_0 \ \|z(0)\| = C_0 \|y_0\|$$

e da conclusão já feita para o caso $y_0 = 0$, existe K, não dependendo de $g(t) \in B$, tal que $|y_1|_D \leq K|g|_B$.

Logo , $|y|_D \leq C_0 \|y_0\| + K|g|_B$ .

A prova do teorema está assim completa.

De especial interêsse para nós, como se pode ver, por exemplo, no Teorema 3.5 , é a condição de admissibilidade para o par (B , D), onde $B = L^1$ e $D = L^\infty$ ou $L_0^\infty$. J.Massera e J.Schäffer [17 e 18] deram condições necessárias e suficientes, em têrmos das soluções do sistema (1.2) , para que o par (B , D) seja admissível. Assim, temos que

O par $(L^1, L^\infty)$ é admissível em relação a (1.1) se, e sòmente se, o par $(L^1, L_0^\infty)$ é admissível.

Uma condição necessária e suficiente para que (1.1) seja $(L^1, L^\infty)$ admissível é que exista constante C tal que

$$\| U(t)P_0 \, U^{-1}(s) \| \leq c \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t$$

e

$$\| U(t)P_1 \, U^{-1}(s) \| \leq c \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq s ,$$

onde U(t) é a matriz fundamental de (1.2) satisfazendo $U(0) = I$ = matriz identidade.

# CAPÍTULO 2

## RELAÇÕES ASSINTÓTICAS ENTRE UM SISTEMA LINEAR E UM SEU PERTURBADO

Como já observamos êste capítulo gira em tôrno do Teorema 2.3. Como preparação para chegar ao mesmo, faremos uma revisão com comentários dos teoremas de Ascoli e o do ponto fixo de Tychonoff.

Se $E$ e $F$ são espaços topológicos, $F$ completamente regular, indicamos por $C(E, F)$ o conjunto das aplicações contínuas de $E$ em $F$ e por $C_c(E, F)$ o espaço topológico obtido munindo $C(E, F)$ da topologia da convergência uniforme nas partes compactas de $E$.

Teorema 2.1. (Ascoli) - Sejam $E$ localmente compacto, $F$ completamente regular e $H \subset C_c(E, F)$. Então $H$ é relativamente compacto em $C_c(E, F)$ se e sòmente se $H$ é equicontínuo em $E$ e $H(x) = \{f(x) \mid f \in H\}$ é relativamente compacto em $F$.

Para uma prova dêste teorema ver [1, pg 43].

Teorema 2.2 (Tychonoff). Seja $E$ um espaço vetorial topológico localmente convexo e completo. Sejam $A \subset E$ um conjunto fechado e convexo, $T$ uma aplicação contínua de $A$ em $A$, e a imagem $T(A)$ de $A$ por $T$ um conjunto relativamente compacto de $E$. Então $T$ tem um ponto fixo, isto é, existe $x \in A$ tal que $Tx = x$.

O teorema acima é uma variante do lema seguinte que é usualmente mencionado na literatura como o teorema de ponto fixo de Tychonoff. Essencialmente estão dizendo a mesma coisa. Apenas, a formulação dada no Teorema 2.2 é muito mais conveniente para as aplicações em uma gran de variedade de problemas de Análise. Em particular, é a maneira natural como deve ser visto o teorema de ponto fixo de Tychonoff nas aplicações feitas neste trabalho.

Lema 2.1 - Seja $E$ um espaço vetorial topológico localmente convexo. Sejam $A \subset E$ um conjunto compacto e convexo, $T$ uma aplicação contínua de $A$ em $A$. Então $T$ tem um ponto fixo.

Para uma prova dêste lema ver [7] ou [8].

Prova do Teorema 2.2 a partir do Lema 2.1

Seja $B = \overline{T(A)}$ que, por hipótese, é compacto. Como $A$ é fechado e $T(A) \subset A$ segue que $B \subset A$. Como $A$ é convexo e fechado segue que $K$ = envoltória convexa fechada de $B$, está contido em $A$, isto é, $K \subset A$. Como $E$ é completo, segue que a envoltória convexa fechada de todo conjunto compacto é um conjunto compacto [2, pg 81]. Portanto $K$ é compacto, convexo e $T(K) \subset T(A) \subset B \subset K$. Do Lema 2.1 segue que a restrição da aplicação contínua $T$ a $K$ tem um ponto fixo.

A prova do Teorema 2.2 está assim completa.

Corolário - Sejam $H \subset C_c(J, Y)$, onde $J = [0, \infty)$, um conjunto fechado e convexo, $T$ uma aplicação contínua de $H$ em $H$, e a imagem $T(H)$ de $H$ por $T$ um conjunto relativamente compacto de $C_c(J, Y)$. Então $T$ tem um ponto fixo.

Prova - $C_c(J, Y)$ é localmente convexo e completo [1]. O corolário é então uma consequência do Teorema de Tychonoff.

Sejam $B$ e $D$ espaços de Banach mais fortes que $L(Y)$.

Para $\rho > 0$ pomos

$$V_{\rho_D} = \left\{ x = x(t) \mid x \in D, \ |x|_D \leq \rho \right\}.$$

Sejam

$S_D = V_{\rho_D} \cap C(J, Y)$

e

$\overline{S}_D$ a aderência de $S_D$ em $C_c(J, Y)$.

Os resultados seguintes se referem ao sistema não necessàriamente linear

(2.1) $\dot{x} = A(t)\,x + f(t, x)$

Teorema 2.3 - Sejam dados o sistema (2.1) e dois espaços de Banach $B$ e $D$, mais fortes que $L(Y)$, satisfazendo às seguintes hipóteses :

(a) - $A(t)$ é localmente Lebesgue integrável em $J$ ;

(b) - $(B, D)$ é admissível relativamente a $A(t)$ ;

(c) - $y(t) \longrightarrow f(t, y(t))$ é uma aplicação contínua de $\overline{S}_D$, como subespaço topológico de $C_c(J, Y)$, em $B$.

(d) - Existe uma constante $r > 0$ tal que $|f(t, y(t))|_B \leq r$ para $y(t) \in \overline{S}_D$ ;

(e) - Existe uma função real $\lambda(t)$, não negativa e localmente Lebesgue integrável em $J$, tal que $\|f(t, y(t))\| \leq \lambda(t)$ para $y(t) \in \overline{S}_D$.

Seja $\xi_0 \in Y_{0D}$.

Então existem constantes positivas $C_0$ e $K$, dependendo apenas de $A(t)$, $D$ e $X_{1D}$ e não de $f$ e $\xi_0$, tais que se

(2.2) $C_0 \|\xi_0\| + Kr \leq \rho$

segue que (2.1) tem pelo menos uma solução $x(t) \in S_D$ satisfazendo

(2.3) $P_{0D}\, x(0) = \xi_0$.

<u>Prova</u>

Se $y(t) \in \overline{S}_D$ segue da hipótese (c) que $f(t, y(t)) \in B$. Logo, pelo Teorema 1.3, o sistema

$$x' = A(t)\,x + g(t)\,,\ \text{com } g(t) = f(t, y(t))\,,$$

tem uma única D-solução $x(t)$ satisfazendo (2.3)

e

$$(2.4)\quad |x|_D \leqslant C_0 \,\|\,\xi_0\,\| + K|\,g\,|_B\,.$$

Definimos a aplicação $T_0$ de $\overline{S}_D$ em D pondo $T_0[y(t)] = x(t)$.

Da hipótese (d) combinada com (2.2) e (2.4) segue que $x(t) \in S_D$. Portanto $T_0$ é uma aplicação de $\overline{S}_D$ em $S_D$.

Sejam $y_j(t) \in \overline{S}_D$, $g_j(t) = f(t, y_j(t))$, $x_j(t) = T_0[y_j(t)]$, $j = 1, 2$.

Então $x_1(t) - x_2(t)$ é uma D-solução de $\dot{x} = A(t)\,x + g(t)$, com $g = g_1 - g_2$ e $P_{0D}(x_1(0) - x_2(0)) = 0$. Portanto

$$(2.5)\quad |x_1 - x_2|_D \leqslant K|g_1 - g_2|_B$$

Da hipótese (c) e de (2.5) segue que $T_0$ é uma aplicação contínua de $\overline{S}_D$, como subespaço topológico de $C_c(J, Y)$, em $S_D$, como subespaço topológico de D.

Vamos mostrar agora que $T_0$ é ainda uma aplicação contínua de $\overline{S}_D$ em $S_D$, considerando $S_D$ como subespaço topológico de $C_c(J, Y)$.

A fórmula (1.4), aplicada a uma D-solução $x = x(t)$ de

$$\dot{x} = A(t)\,x + g(t)\,,\ g(t) \in B\,,$$

nos dá, num intervalo $[0, T]$,

$$(2.6)\ \|x(t)\| \leqslant \left\{T^{-1}\int_0^T \|x(s)\|\,ds + \int_0^T \|g(s)\|\,ds\right\}.\exp\int_0^T \|A(s)\|\,ds.$$

Como B e D são mais fortes que $L(Y)$ existem constantes $\alpha(D, T)$ e $\alpha(B, T)$ tais que

$$(2.7) \quad \int_0^T \|x(s)\| ds \leq \alpha(D, T)\ |x|_D$$

$$(2.8) \quad \int_0^T \|g(s)\| ds \leq \alpha(B, T)\ |g|_B .$$

Portanto (2.6), (2.7) e (2.8) implicam, nos casos $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ e $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$,

$$(2.9) \quad \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \left\{ T^{-1}\ \alpha(D, T)\ |x_1 - x_2|_D + \alpha(B, T)\ |g_1 - g_2|_B \right\} . \exp \int_0^T \|A(s)\| ds .$$

(2.5) e (2.9) acarretam

$$(2.10) \quad \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \left\{ T^{-1}\ \alpha(D, T)\ K + \alpha(B, t) \right\} |g_1 - g_2|_B . \exp \int_0^T \|A(s)\| ds .$$

Da hipótese (c) e de (2.10) segue que $T_0$ é uma aplicação contínua de $\overline{S}_D$, como subespaço topológico de $C_c(J, Y)$, em $S_D$, como sub-espaço topológico de $C_c(J, Y)$.

Mostremos agora que $T_0(\overline{S}_D)$ é relativamente compacto em $C_c(J, Y)$. Se $x(t) \in T_0(\overline{S}_D) \subset S_D$, resulta de (2.6), (2.7), (2.8), do fato de $x(t) \in S_D$ implicar $|x|_D \leq \rho$ e do fato da hipótese (d) implicar $|g|_B \leq r$, que em $[0, T]$

$$(2.11) \quad \|x(t)\| \leq \left\{ T^{-1}\ \alpha(D, T)\rho + \alpha(B, T)\ r \right\} . \exp \int_0^T \|A(s)\| ds = c(T) .$$

Logo o conjunto $T_0(\overline{S}_D)$ é uniformemente limitado em $[0, T]$ qualquer que seja $T \geq 0$.

Da hipótese (e) e de (2.11) segue que se $x(t) \in T_o(\overline{S}_D)$ então

(2.12) $\|x(t) - x(s)\| \leq c(T)[\int_s^t \|A(u)\| du] + \int_s^t \lambda(u)\, du.$

para $0 \leq s \leq t \leq T$.

A fórmula (2.12) implica a equicontinuidade de $T_o(\overline{S}_D)$ em J.

Portanto, do fato de ser $T_o(\overline{S}_D)$ uniformemente limitado em todo intervalo $[0, T]$ e da equicontinuidade de $T_o(\overline{S}_D)$ em J segue, em vista do Teorema de Ascoli, que $T_o(\overline{S}_D)$ é relativamente compacto em $C_c(J, Y)$. Então, como $\overline{S}_D$ é também convexo, o conjunto $H = \overline{S}_D$ e a aplicação $T_o$ satisfazem às hipóteses do Corolário do Teorema 2.2. Logo, a aplicação $T_o : \overline{S}_D \rightarrow S_D$ tem um ponto fixo $x(t)$ e $x(t) \in S_D$.

A prova do teorema está assim completa.

As hipóteses do Corolário seguinte são casos especiais daquelas do Teorema 2.3. Elas são interessantes visto serem condições convenientes do ponto de vista das aplicações.

<u>Corolário</u>. <u>Sejam dados o sistema</u> (2.1) <u>e três espaços de Banach</u> B, D <u>e</u> E <u>com</u> B <u>e</u> D <u>mais fortes que</u> L(Y), <u>satisfazendo às seguintes hipóteses</u>:

(a') - A(t) <u>é localmente Lebesgue integrável em</u> J;

(b') - $D \subset E$ <u>e</u> (B, D) <u>é admissível relativamente a</u> A(t);

(c') - $y(t) \rightarrow f(t, y(t))$ <u>é uma aplicação contínua de</u> $S_E$, <u>como subespaço topológico de</u> $C_c(J, Y)$, <u>em</u> B <u>e</u> $S_E$ <u>é fechado em</u> $C_c(J, Y)$;

(d') - <u>Existe uma constante</u> $r > 0$ <u>tal que</u> $|f(t, y(t))|_B \leq r$ <u>para</u> $y(t) \in S_E$.

(e') - <u>Existe uma função real</u> $\lambda(t)$, <u>não negativa e localmente</u>

Lebesgue integrável em J , tal que

$$\| f(t, y(t)) \| \leq \lambda(t) \quad \underline{\text{para}}\ y(t) \in S_E$$

Seja $\xi_0 \in Y_{OD}$.

Então as conclusões do Teorema 2.3 são verificadas.

Nas aplicações do Teorema 2.3 a condição (b) é uma das mais difíceis de se testar. Para o caso $B = L^1(Y)$ e $D = L^\infty(Y)$ ou $L_0^\infty(Y)$, que são de particular interêsse, apresentamos no capítulo anterior condições necessárias e suficientes estabelecidas por J.Massera e J.Schäffer.

As considerações seguintes são em tôrno das hipóteses (c), (d) e (e) do Teorema 2.3. Elas são relativamente fáceis de serem testadas se condições adequadas, que veremos a seguir, forem impostas sôbre B, D e $f(t, x)$.

Seja $\beta$ um espaço de Banach de funções reais em J satisfazendo:

(i) $\beta$ é mais forte que $L(R)$ ;

(ii) se $\varphi \in \beta$, $\psi$ é mensurável e $|\psi(t)| \leq |\varphi(t)|$, então $\psi \in \beta$ e $|\psi|_\beta \leq |\varphi|_\beta$ ;

(iii) $h_{[0,T]} \in \beta$, onde $h_A$ é a função característica do conjunto A ;

(iv) $\beta$ é "lean" em $\infty$ [18, pg 362], isto é, se $\varphi \in \beta$, então $h_{[0,T]}\varphi$ (que pertence a $\beta$ por causa de (ii)) satisfaz $h_{[0,T]}\varphi \rightarrow \varphi$ com $T \rightarrow \infty$ em $\beta$.

É fácil ver que os espaços $\beta = L^p(R)$, $1 \leq p < \infty$, e $\beta = L_0^\infty$ satisfazem aos axiomas (i) - (iv) e que $\beta = L^\infty(R)$ não satisfaz ao axioma (iv).

Um espaço de Banach $\beta$ satisfazendo aos axiomas acima e que nos vai ser de interêsse para frente é o seguinte :

Seja $\psi(t) > 0$ uma função real mensurável em J com $\psi(t)$ e $1/\psi(t)$ localmente limitadas em J. Pomos $\beta = L^{\infty}_{\psi,0}$ = conjunto das funções reais $\varphi(t)$ definidas em J satisfazendo $\varphi(t)/\psi(t) \in L^{\infty}_{0}$. $\beta$ é um espaço de Banach com a norma $|\varphi|_{\beta} = |\varphi/\psi|_{\infty}$ e os axiomas (i) - (iv) são satisfeitos.

<u>Lema 2.2</u> - <u>Seja $\beta$ um espaço de Banach de funções reais em</u> J <u>e mais forte que</u> L(R). <u>Denotamos por</u> $\beta(Y)$ <u>o conjunto das funções mensuráveis</u> f <u>definidas em</u> J <u>com valores em</u> Y <u>satisfazendo</u> $\|f(t)\| \in \beta$. <u>Se</u> B <u>é um espaço de Banach do tipo</u> $B = \beta(Y)$ <u>onde, para</u> $f \in B$, $|f|_B = \|f(t)\|_{\beta}$, <u>então</u> B <u>é mais forte que</u> L(Y). <u>Em particular</u>

<u>Se</u> $\beta = L^{\infty}_{\psi,0}$, <u>então</u> $B = \beta(Y) = \left\{ f \in L(Y) \mid \|f(t)\| \in L^{\infty}_{\psi,0} \right\}$

<u>com a norma</u> $|f(t)|_B = \|f(t)\|_{\beta} = \left| \dfrac{\|f(t)\|}{\psi(t)} \right|_{\infty}$ <u>é um espaço de Banach mais forte que</u> L(Y).

<u>Condição</u> H <u>sôbre</u> f.

Seja f(t, x) definida em $J \times \left\{ x \mid \|x\| \leq \rho \right\}$ com valores em um subespaço X de Y. Seja f(t, x) uma função mensurável de t para x fixo e uma função contínua de x para t fixo, a continuidade em x sendo uniforme em relação a t variando em um conjunto compacto. Seja $\lambda(t)$ uma função não negativa mensurável em J tal que

(2.13) $\|f(t,x)\| \leq \lambda(t)$ para $t \geq 0$, $\|x\| \leq \rho$.

A razão porque consideramos $f(t, x)$ com valores em um subespaço $X$ de $Y$ é principalmente porque, no caso de equação de ordem superior a um, $f(t, x)$ é da forma $(0, \ldots, 0, h(t, x))$ e $f(t, x)$ assim assume valores em um subespaço de $Y$.

Lema 2.3 - <u>Seja</u> $B$ <u>um espaço de Banach do tipo</u> $B = \beta(Y)$ <u>onde</u> $\beta$ <u>satisfaz às hipóteses</u> (i) - (iv). <u>Seja</u> $D = L^{\infty}(Y)$ <u>ou</u> $D = L_0^{\infty}(Y)$ <u>e</u> $f(t, x)$ <u>satisfazendo à condição</u> H <u>com</u> $\lambda(t) \in \beta$. <u>Então as hipóteses</u> (c), (d) <u>e</u> (e) <u>do Teorema 2.3 são satisfeitas com</u> $r = |\lambda|_B$ <u>em</u> (d).

<u>Prova</u>

Da condição H, do fato de ser $\lambda(t) \in \beta$ e de (ii) segue que $f(t, y(t)) \in B$ para todo $y(t) \in C(J, Y)$, $\|y(t)\| \leq \rho$.

Dado $\varepsilon > 0$ podemos, em vista de (iv), achar $T > 0$ satisfazendo

$$|h_{[T, \infty)}(t)\ \lambda(t)|_{\beta} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Como $f(t, x)$ é contínua em $x$ uniformemente em $t$ podemos, em vista da hipótese H, determinar $\delta > 0$ tal que $y(t), z(t) \in \bar{S}_D$ (portanto, $\|y(t)\| \leq \rho$, $\|z(t)\| \leq \rho$) com $\|y(t) - z(t)\| < \delta$ em $[0, T]$ implique $\|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|h_{[0, T]}|_{\beta}}$ em $[0, T]$.

Logo.

$$\| f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \| \leq h_{[0, T]} \frac{\varepsilon}{2\,|h_{[0, T]}|_{\beta}} + $$
$$+ 2 h_{[T, \infty)}\ \lambda(t)$$

e, por conseguinte,

$$|f(t, y(t)) - f(t, z(t))|_B < \varepsilon .$$

Assim (c) está verificado.

De (ii) segue que (d) está satisfeito com $r = |\lambda|_B$ .

(e) decorre de (2.13).

O Lema 2.3 está assim verificado.

Teorema 2.4 - Sejam $A(t)$ localmente Lebesgue integrável em $J$, $(B, D)$ admissível relativamente a $A(t)$, onde $B$ é um espaço de Banach do tipo $B = \beta(X)$ com $\beta$ satisfazendo (i) - (iv) e $D = L^{\infty}(Y)$ [ou $D = L_0^{\infty}(Y)$]. Suponhamos que $f(t, x)$ satisfaça à condição H com $\lambda(t) \in \beta$ . Seja $\xi_0 \in X_{0D}$ e $r = |\lambda(t)|_{\beta}$ . Então se (2.2) é satisfeito, o sistema (2.1) tem uma solução $x(t)$ satisfazendo (2.3) e $\|x(t)\| \leq \rho$ [e $x(t) \to 0$ com $t \to \infty$].

Prova

Da observação 1 do Capítulo 1 e do Lema 2.2 segue que $B$ e $D$ são mais fortes que $L(Y)$. Mostremos que as hipóteses do Teorema 2.3 estão verificadas:

(a) e (b) são exigidos explìcitamente;

(c) , (d) e (e) decorrem do fato de $\beta$ satisfazer (i) - (iv), tendo em vista o Lema 2.3.

O nosso teorema é então uma consequência imediata do Teorema 2.3.

O Teorema seguinte é de muito interêsse não só para as nossas aplicações no Capítulo 3 como também para o estudo de integração assintótica e equivalência assintótica.

Teorema 2.5 - Seja $A(t)$ localmente Lebesgue integrável em $J$ e seja $D = L^{\infty}(Y)$ [ou $D = L_0^{\infty}(Y)$].

Suponhamos que $f(t, x)$ satisfaça à condição H.

Admitamos que

ou I) $\lambda(t) \in L^1$ e $(L^1(X), D)$ é admissível relativamente a $A(t)$,

ou II) existe uma função $\psi(t) > 0$ mensurável em $J$ com $\psi(t)$ e $1/\psi(t)$ localmente limitadas em $J$ tal que

1) $\lambda(t) \leq \psi(t)$ e $\dfrac{\lambda(t)}{\psi(t)} \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$

e

2) Para todo $g(t) \in L(X)$ satisfazendo $\dfrac{g(t)}{\psi(t)} \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$, $y' = A(t)y + g(t)$ tem uma $D$-solução.

Seja $\xi_0 \in Y_{0D}$.

Então existem constantes positivas $C_0$ e $K$ tais que, se $\|\xi_0\|$ é suficientemente pequeno e $T$ suficientemente grande de modo que

ou $C_0 \|\xi_0\| + K \int_T \lambda(t)dt \leq \rho$ (caso I)

ou $C_0 \|\xi_0\| + K\, \lambda(t)/\psi(t) \leq \rho$ para $t \geq T$ (caso II)

sejam satisfeitas, então o sistema

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$$

tem uma solução $x(t)$ para $t \geq T$ satisfazendo $\|x(t)\| \leq \rho$ [e $x(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$] e

$$P_{0D}\; U^{-1}(T)\, x(T) = \xi_0$$

onde $U(t)$ é a matriz fundamental de $y' = A(t)y$ que satisfaz $U(0) = I$.

Prova

Substituimos $f(t, x)$ e $\lambda(t)$ por $\tilde{f}(t, x) = h_{[T,\infty)}(t) f(t, x)$ e $\tilde{\lambda}(t) = h_{[T,\infty)}(t)\, \lambda(t)$.

Como $\beta = L^1(R)$ ou $\beta = L^\infty_{\psi,0}$ satisfazem (i) - (iv), podemos aplicar o Teorema 2.4 tomando $B = \beta(X)$. Logo existe uma solução $\tilde{x}(t)$ de $\dot{x} = A(t)x + \tilde{f}(t,x)$, para $t \geq 0$, satisfazendo $\|\tilde{x}(t)\| \leq$ $\leq \rho [e\ \tilde{x}(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty]$ e $P_{0D}\,\tilde{x}(0) = \xi_0$.

Mas $x(t) = \tilde{x}(t)$ para $t \geq T$ é uma solução de $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$ e, ainda, $x(T) = \tilde{x}(T) = U(T)\tilde{x}(0)$ ou seja $\tilde{x}(0) = U^{-1}(T)\,x(T)$. Logo $\|x(t)\| \leq \rho$ para $t \geq T[e\ x(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty]$ e $P_{0D}\,U^{-1}(T)\,x(T) = \xi_0$.

A prova do nosso teorema está assim completa.

<u>Nota</u> - Observamos que sempre temos tomado $J = [0,\infty)$ por mera comodidade. É claramente óbvio ver que poderíamos ter tomado $J = [t_0,\infty)$, $t_0$ real.

# CAPÍTULO 3

## ESTUDO DOS PROBLEMAS $P_1$ e $P_2$

Vamos neste capítulo aplicar o Teorema 2.5 ao estudo dos problemas $P_1$ e $P_2$ mencionados na Introdução.

Todos os sistemas aqui considerados podem ser reais ou complexos, com a variável independente $t$ sempre real.

Lema 3.1 - Seja $A(t) = (a^i_j(t))$ matriz $n \times n$ contínua em $J$, onde $J = [t_0, \infty)$, $a^i_j(t) = 0$ se $i < j$, $a^{i+1}_i(t) = \alpha^{i+1}_i + \lambda^{i+1}_i(t)$ com $\alpha^{i+1}_i =$ constante $\neq 0$, $\lambda^{i+1}_i(t) \to 0$ com $t \to \infty$, $a^i_j(t)$ limitadas para $i \neq j$ e $a^1_1(t) = a(t) = \alpha + \lambda(t)$ com $\alpha =$ constante e $\int^\infty R(\lambda(t))dt$ convergente. Então para tôda solução $y(t) \neq 0$ de $\dot{y} = A(t)y$ existe inteiro $\ell$, $0 \leq \ell \leq n-1$, tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell \exp R(\alpha)t}$$ existe e é finito diferente de zero.

Prova

Seja $U(t)$ a matriz fundamental de $y' = A(t)y$ com $U(t_0) = I$. Mostremos que para a solução $y_p(t)$ da coluna $p$, $1 \leq p \leq n$,

$$(3.1) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\|y_p(t)\|}{t^{n-p} \exp R(\alpha)t}$$ existe e é finito diferente de zero.

O nosso lema decorrerá imediatamente de (3.1). De fato, uma solução qualquer $y(t) \neq 0$ é da forma $y(t) = c_q\, y_q(t) + \ldots + c_n\, y_n(t)$, onde $q$ é o menor índice satisfazendo $c_q \neq 0$ na combinação linear única que dá $y(t)$. Como

$$|c_q| \; \|y_q(t)\| - |c_{q+1}| \; \|y_{q+1}(t)\| - \dots - |c_n| \; \|y_n(t)\| \leq$$

$$\leq \|y(t)\| \leq |c_q| \; \|y_q(t)\| + |c_{q+1}| \; \|y_{q+1}(t)\| +$$

$$+ \dots + |c_n| \; \|y_n(t)\|$$

e (3.1) é suposto verificado, segue que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^{n-q} \exp R(\alpha)t} = |c_q| \lim_{t \to \infty} \frac{\|y_q(t)\|}{t^{n-q} \exp R(\alpha)t}$$

O nosso problema então é provar (3.1).

Tomemos $p = 1$. Em verdade tôda a idéia está neste caso, os demais tendo essencialmente a mesma prova.

Indiquemos $y_1(t)$ simplesmente por $y(t) = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ \vdots \\ y^n(t) \end{pmatrix}$.

Para provar (3.1) no caso $p = 1$ é suficiente provar que

$$(3.2) \quad \lim_{t \to \infty} \frac{|y^j(t)|}{t^{n-1} \exp R(\alpha)t} = 0 \qquad \text{se } j = 1, \dots, n-1$$

e

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|y^n(t)|}{t^{n-1} \exp R(\alpha)t} \quad \text{existe e é finito diferente de zero.}$$

Para todo $m$, $m = 1, \dots, n$, temos

$$\dot{y}^m = a_1^m(t) y^1 + \dots + a_{m-1}^m(t)\, y^{m-1} + a(t)\, y^m$$

que, com a condição $y^1(t_0) = 1$, $y^j(t_0) = 0$ para $j = 2, \dots, n$, implica

$$y^1(t) = \exp \int_{t_0}^t a(s)ds,$$

$$y^2(t) = [\exp \int_{t_0}^t a(s)ds] \int_{t_0}^t a_1^2(s)\, ds$$

e para $m \geq 2$.

$$(3.3)\quad y^m(t) = [\exp \int_{t_o}^{t} a(s)\, ds] \,.$$

$$\cdot\, [\int_{t_o}^{t} a^m_{m-1}(t_{m-2})\, dt_{m-2} \int_{t_o}^{t_{m-2}} a^{m-1}_{m-2}(t_{m-3})\, dt_{m-3} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_o}^{t_1} a_1^2(s)\, ds + \sum\nolimits_m(t)\, ]$$

onde $\sum_m(t)$ é zero ou uma somatória de integrais do tipo

$$\int_{t_o}^{t} b_1(t_1)dt_1 \int_{t_o}^{t_1} b_2(t_2)\, dt_2 \cdots \int_{t_o}^{t_{q-1}} b_q(t_q)\, dt_q \,, \text{ com}$$

$q \leq m-2$,

os $b_j(t)$ sendo elementos não diagonais da matriz $A(t)$.

(3.3) é verdade para $m = 2$. Seja $2 \leq m \leq n-1$ e suponhamos (3.2) verdadeiro para $2, \ldots, m$. De

$$\dot{y}^{m+1} = a_1^{m+1}(t)\, y^1 + a_2^{m+1}(t)\, y^2 + \ldots + a_m^{m+1}(t)\, y^m + a(t)\, y^{m+1} \,,$$

segue que

$$y^{m+1}(t) = [\exp \int_{t_o}^{t} a(s)\, ds] \,.$$

$$\cdot\, [\int_{t_o}^{t} a_m^{m+1}(t_{m-1})\, dt_{m-1} \int_{t_o}^{t_{m-1}} a^m_{m-1}(t_{m-2})\, dt_{m-2} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_o}^{t_1} a_1^2(s)\, ds + \int_{t_o}^{t} a_m^{m+1}(s) \sum\nolimits_m(s)\, ds\, ] +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} [\, \exp \int_{u}^{t} a(s)\, ds\, ]\, [a_1^{m+1}(u)\, y^1(u) + \ldots$$

$$\ldots + a_{m-1}^{m+1}(u)\, y^{m-1}(u)\, ]\, du = [\exp \int_{t_o}^{t} a(s)\, ds] \,.$$

$$\cdot \left[ \int_{t_o}^{t} a_m^{m+1} (t_{m-1})\, dt_{m-1} \int_{t_o}^{t_{m-1}} a_{m-1}^{m} (t_{m-2})\, dt_{m-2} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_{t_o}^{t_1} a_1^2(s)\, ds + \sum_{m+1}(t) \right].$$

Logo (3.3) é verdadeira para $m+1$ e, por conseguinte, $y^m(t)$ é verdadeiro para todo $m$, $2 \leq m \leq n$.

Mostremos que

$$(3.4) \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\sum_{m'}(t)}{t^{m-1}} = 0 \text{ se } m' \leq m.$$

Basta provar que

$$(3.5) \quad \lim_{t \to \infty} \left[ \int_{t_o}^{t} b_1(t_1)\, dt_1 \int_{t_o}^{t_1} b_2(t_2) dt_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_{t_o}^{t_{q-1}} b_q(t_q)\, dt_q \,/\, t^{m-1} \right] = 0$$

para $q \leq m' - 2$.

Como os $b_j(t)$ são limitados existe $M$ tal que

$$\left| \int_{t_o}^{t} b_1(t_1)\, dt_1 \int_{t_o}^{t_1} b_2(t_2)\, dt_2 \ldots \int_{t_o}^{t_{q-1}} b_q(t_q) dt_q \right| \leq M(t - t_o)^q.$$

Por outro lado $q \leq m' - 2 \leq m - 2 < m - 1$.

Logo (3.5) é verdadeira para $q \leq m' - 2$.

Passemos agora à prova de (3.2).

Se $n = 1$, (3.2) é imediato. Assim, consideraremos $n > 1$.

Seja $m < n$. $y^m(t)$ é da forma

$$y^m(t) = \left[ \exp \int_{t_o}^{t} a(s)\, ds \right] \sum_{m+1}(t).$$

Como $m+1 \leqslant n$, decorre de (3.4) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\,y^m(t)\,|}{t^{n-1} \exp R(\alpha)t} = \frac{\exp\int_{t_o}^{\infty} R(\lambda(s))ds}{\exp t_o\, R(\alpha)} \lim_{t\to\infty} \frac{|\sum_{m+1}(t)|}{t^{n-1}} = 0$$

Assim, (3.2) está verificada para $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Consideremos agora $j = n$.

$$y^n(t) = [\exp\int_{t_o}^{t} a(s)ds]\,[\int_{t_o}^{t} a_{n-1}^{n}(t_{n-2})dt_{n-2} \int_{t_o}^{t_{n-2}} a_{n-2}^{n-1}(t_{n-3})dt_{n-3} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_o}^{t_1} a_1^2(s)\, ds + \sum_n(t)]$$

Sabemos que

$$(3.6) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{[\exp\int_{t_o}^{t} a(s)\, ds]\, \sum_n(t)}{t^{n-1} \exp R(\alpha)\, t} = 0$$

e que

$$(3.7) \quad \lim_{t\to\infty} \frac{|\exp\int_{t_o}^{t} a(s)\, ds\,|}{\exp R(\alpha)t} =$$

$$= \frac{1}{\exp t_o\, R(\alpha)} \exp\int_{t_o}^{\infty} R(\lambda(s))\, ds < \infty .$$

Mostremos que

(3.8)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{t_o}^{t} a_{n-1}^{n}(t_{n-2})\, dt_{n-2} \int_{t_o}^{t_{n-2}} a_{n-2}^{n-1}(t_{n-3})\, dt_{n-3} \cdots \int_{t_o}^{t_1} a_1^2(s)ds}{t^{n-1}}$$

existe e é finito diferente de zero.

$$F(t) = \int_{t_o}^{t} a_{n-1}^{n}\,(t_{n-2})\, dt_{n-2} \int_{t_o}^{t_{n-2}} a_{n-2}^{n-1}\,(t_{n-3})dt_{n-3} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_0}^{t_1} a_1^2(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \alpha_{n-1}^{n}\, dt_{n-2} \int_{t_0}^{t_{n-2}} \alpha_{n-2}^{n-1}\, dt_{n-3} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_0}^{t_1} \alpha_1^2\, ds + \sigma(t)\,,$$

onde $\sigma(t)$ é uma soma de integrais $\mu$ do tipo

$$\mu(t) = \int_{t_0}^{t} b_n(t_{n-2})\, dt_{n-2} \int_{t_0}^{t_{n-2}} b_{n-1}(t_{n-3})\, dt_{n-3} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_0}^{t_1} b_2(s)\, ds\,,$$

com todos os $b_j(t)$ limitados e pelo menos um tendendo a zero com $t \longrightarrow \infty$ . Então existem uma constante $M > 0$ e uma função contínua $h(t) > 0$ , $h(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$ , de modo que

$$|\mu(t)| \leq M(t - t_0)^{n-2} \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds\,.$$

Logo $\dfrac{\mu(t)}{t^{n-1}} \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$ e, por conseguinte,

$\dfrac{\sigma(t)}{t^{n-1}} \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$ .

$$\text{Portanto } \lim_{t \to \infty} \frac{F(t)}{t^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\, \alpha_1^2\, \alpha_2^3 \cdots \alpha_{n-1}^{n} \neq 0\,.$$

De (3.6), (3.7) e (3.8) segue que (3.2) é verdadeiro para $j = n$ e, por conseguinte, (3.1) é verdadeiro para $p = 1$ .

Para completar a prova de nosso lema resta-nos provar que (3.1) é também verdadeiro para $1 < p \leq n$ .

Fazendo $y^1 = \ldots = y^{p-1} = 0$ no sistema $\dot{y} = A(t)\, y$ temos

$$\dot{y}^p = a(t)\, y^p$$

$$(3.9) \quad \dot{y}^{p+1} = a_p^{p+1}(t)\, y^p + a(t)\, y^{p+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{y}^n = a_p^n(t)\, y^p + a_{p+1}^n(t)\, y^{p+1} + \ldots + a_{n-1}^n(t) y^{n-1} + a(t) y^n$$

A solução $y_p(t)$ da coluna p de $U(t)$ é

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^p(t) \\ \vdots \\ y^n(t) \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{pmatrix} y^p(t) \\ \vdots \\ y^n(t) \end{pmatrix} \quad \text{é a solução de (3.9)}$$

que satisfaz $y^p(t_0) = 1$, $y^{p+1}(t_0) = \ldots = y^n(t_0) = 0$.

Aplicando ao sistema (3.9), que é de ordem $m = n - [p-1] = n - p + 1$, o resultado já provado anteriormente, segue que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|y^j(t)|}{t^{m-1} \exp R(\alpha) t} = \lim_{t \to \infty} \frac{|y^j(t)|}{t^{n-p} \exp R(\alpha) t} = 0$$

para $j = p, \ldots, n-1$

e

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|y^n(t)|}{t^{n-p} \exp R(\alpha) t} \quad \text{existe e é finito diferente de zero.}$$

Portanto $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\| y_p(t) \|}{t^{n-p} \exp R(\alpha) t}$ existe e é finito diferente de zero, ou seja, (3.1) é também verdadeira para $1 < p \leq n$.

A prova de nosso lema está assim completa.

<u>Lema 3.2</u> - <u>Seja</u> $A(t) = \operatorname{diag}(A_1(t), \ldots, A_N(t))$, <u>onde os</u> $A_j(t)$, $j=1, \ldots, N$, <u>são matrizes</u> $n_j \times n_j$ <u>satisfazendo às hipóteses do Lema 3.1</u>. <u>Denotemos por</u> $\alpha_j + \lambda_j(t)$, $\alpha_j$ <u>constante, o elemento que entra na diagonal de</u> $A_j(t)$, $j=1, \ldots, N$. <u>Seja</u> $R(\alpha_1) \geq R(\alpha_2) \geq \ldots \geq R(\alpha_N)$. <u>Então para tôda solução</u> $y(t) \not\equiv 0$ <u>de</u> $\dot{y} = A(t)y$ <u>existem inteiros</u> $i$, $\ell$, <u>com</u> $1 \leq i \leq N$, $0 \leq \ell \leq n_i - 1$, <u>de modo que</u>

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|y(t)\|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_i)t}$$ <u>existe e é finito diferente de zero</u>.

<u>Prova</u>

Tôda solução $y(t) \not\equiv 0$ de $\dot{y} = A(t)\,y$ é da forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix}$$ onde $y_j(t)$, $1 \leq j \leq N$, é solução

de $\dot{y}_j = A_j(t)\, y_j$ com $y_j(t) \not\equiv 0$ para pelo menos um $j$.

Decorre do Lema 3.1 que existe inteiro $\ell_j$, $1 \leq \ell_j \leq n_j - 1$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|y_j(t)\|}{t^{\ell_j} \exp R(\alpha_j)\, t}$ existe e é finito diferente de zero para todo $y_j(t) \not\equiv 0$. Sejam $i_1, \ldots, i_q$ os índices para os quais $R(\alpha_{i_1}) = \ldots = R(\alpha_{i_q})$ é o máximo valor entre todos os $R(\alpha_j)$ para os quais $y_j(t) \not\equiv 0$. Seja $\ell = \text{máximo}\,(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_q})$ e $i$ um dos índices $i_1, \ldots, i_q$ (existe pelo menos um) tal que $\ell = \ell_i$. Então, para êste $i$ e êste $\ell$, temos que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|y(t)\|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_i)t}$ existe e é finito diferente de zero.

A prova do lema está assim completa.

Lema 3.3 - Seja $C(t) = A(t) - \frac{\ell}{t} I$, onde $\ell$ é inteiro não negativo e $A(t)$ matriz $n \times n$ satisfazendo às hipóteses do Lema 3.1 com $R(\alpha) < 0$ e $t_0 > 0$. Então tôda solução de $\dot{y} = C(t)y$ tende a zero com $t \longrightarrow \infty$.

Prova

Seja $U(t)$ a matriz fundamental de $\dot{y} = C(t)y$ com $U(t_0) = I$. Mostremos que para a solução $y_p(t)$ da coluna $p$, $1 \leq p \leq n$, temos $y_p(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$. Como para $c$ suficientemente grande e $t \geq t_0$ temos

$$|\exp \int_{t_0}^{t} [\alpha - \frac{\ell}{s} + \lambda(s)]ds| =$$

$$= | [\exp \alpha(t - t_0)]( \frac{t_0}{t})^{\ell} [\exp \int_{t_0}^{t} \lambda(s) \, ds] | \leq$$

$$\leq c[\exp R(\alpha) (t - t_0)] \frac{1}{t^{\ell}}$$

e como os elementos não diagonais de $A(t)$ são limitados, segue, da demonstração do Lema 3.1, que existe um polinômio $P_{n-p}(t)$ de gráu $(n-p)$ para o qual é satisfeito

$$\|y_p(t)\| \leq \frac{c}{t^{\ell}} [\exp R(\alpha) (t - t_0)]P_{n-p}(t) \qquad \text{para } t \geq t_0 .$$

Logo $y_p(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

O lema está assim provado.

Lema 3.4 - Seja $C(t)$ satisfazendo às hipóteses do Lema 3.3, com $\ell \geq n$ e $R(\alpha) = 0$. Então tôda solução de $\dot{y} = C(t)y$ tende a zero com $t \longrightarrow \infty$.

Prova

Da demonstração do Lema 3.3 segue que

$$\| y_p(t) \| \leqslant \frac{c}{t^{\ell}} [\exp R(\alpha)(t - t_o)] P_{n-p}(t) = \frac{c}{t^{\ell}} \; P_{n-p}(t)$$

e, por conseguinte, para $c_1$ suficientemente grande ,

$$\| y_p(t) \| \leqslant \frac{c_1}{t} \quad \text{pois} \quad \ell \geqslant n \quad \text{e} \quad 1 \leqslant p \leqslant n .$$

Logo $y_p(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$ .

O lema está assim provado.

Lema 3.5 - Seja $A(t)$ satisfazendo às hipóteses do Lema 3.2 e $q$ , $r$ índices tais que

$$R(\alpha_1) \geqslant \ldots \geqslant R(\alpha_{q-1}) > R(\alpha_q) = \ldots = R(\alpha_{q+r-1}) =$$

$$= 0 > R(\alpha_{q+r}) \geqslant \ldots \geqslant R(\alpha_N)$$

onde pode ocorrer $q = 1$ ou $q + r - 1 = N$ .

Sejam

$$s = \text{máximo} \left\{ n_q - 1 , \ldots , n_{q+r-1} - 1 \right\} \; ;$$

$\ell$ um inteiro satisfazendo $0 \leqslant \ell \leqslant s$ ;

$$s_k = \text{mínimo} \; \left\{ \ell , n_k - 1 \right\} \; , k = q , q + 1 , \ldots , q + r - 1 \; ;$$

$$p = n_{q+r} + \ldots + n_N + s_q + \ldots + s_{q+r-1} \quad \underline{\text{se}} \quad q + r - 1 < N$$

e

$$p = s_q + \ldots + s_{q+r-1} \quad \underline{\text{se}} \quad q + r - 1 = N$$

$$D = L_o^{\infty}$$

e

$Y_{t_0 D}$ = <u>o conjunto dos valores iniciais</u> $y(t_0)$ <u>das D-soluções de</u>

$\dot{y} = (A(t) - \frac{\ell}{t} I)\, y$

<u>Então dimensão</u> $Y_{t_0 D} \geq p$ .

<u>Nota</u> - Na verdade pode-se provar que dimensão $Y_{t_0 D} = p$. Mas, para nossos propósitos é suficiente provar que a dimensão $Y_{t_0 D} \geq p$.

<u>Prova</u>

Do Lema 3.3 segue que tôda solução de $\dot{y}_j = [A_j(t) - \frac{\ell}{t} I]\, y_j$ tende a zero com $t \to \infty$ , se $j = n_{q+r}, \ldots, n_N$ .

No sistema $\dot{y}_j = [A_j(t) - \frac{\ell}{t} I]\, y_j$ , $j = q, q+1, \ldots, q+r-1$ ,

$$y_j = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{n_j} \end{pmatrix} \quad , \text{ fazemos } y^1 = \ldots = y^{n_j - s_j} = 0 .$$

Isto nos conduz a um sistema de dimensão $s_j$ nas variáveis dependentes $y^{n_j - s_j + 1}, \ldots, y^{n_j}$. Êste sistema menor tem tôdas as suas soluções tendendo a zero com $t \to \infty$ em vista do Lema 3.4 . Então o sistema original tem, pelo menos, $s_j$ soluções linearmente independentes tendendo a zero com $t \to \infty$. Logo o sistema $\dot{y} = (A(t) - \frac{\ell}{t} I)\, y$ tem, pelo menos, p soluções linearmente independentes tendendo a zero com $t \to \infty$ , ou seja, dim $Y_{t_0 D} \geq p$ .

O lema está assim demonstrado.

O teorema seguinte estabelece relações entre os sistemas

(3.10) $\dot{y} = A(t)\, y$

e

(3.11) $\dot{x} = A(t)\, x + f(t, x)$

que nos conduzirão ao estudo dos problemas $P_1$ e $P_2$.

Teorema 3.1 - Seja $A(t)$ satisfazendo às hipóteses do Lema 3.2 e $q$, $r$ índices tais que

$$R(\alpha_1) \geq \ldots \geq R(\alpha_{q-1}) > R(\alpha_q) = \ldots = R(\alpha_{q+r-1}) > R(\alpha_{q+r}) \geq$$

$$\geq \ldots \geq R(\alpha_N)$$

onde pode ocorrer $q = 1$ ou $q + r - 1 = N$

Sejam

$$s = \text{máximo} \left\{ n_q - 1, \ldots, n_{q+r-1} - 1 \right\} ;$$

$\ell$ um inteiro satisfazendo $0 \leq \ell \leq s$ ;

$$s_k = \text{mínimo} \left\{ \ell, n_k - 1 \right\} , k = q, q+1, \ldots, q+r-1 ;$$

$$p = n_{q+r} + \ldots + n_N + s_q + \ldots + s_{q+r-1} \text{ se } q + r - 1 < N$$

e

$$p = s_q + \ldots = s_{q+r-1} \text{ se } q + r - 1 = N .$$

Suponhamos $f(t, x)$ contínua para $t \geq t_0$, $\|x\| < \infty$ e satisfazendo

$\| f(t, x) \| \leq h(t) \|x\|$ para todo $x$ e $t \geq t_0$. onde $h(t)$ é uma função contínua com

$$(3.12) \quad \int_{t_0}^{\infty} h(t)\, t^s \, dt < \infty .$$

Então se $y(t)$ é uma solução de (3.10) satisfazendo

$$(3.13) \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_q) t} < \infty ,$$

existe uma família de soluções $x(t)$ de (3.11) dependendo de, pelo menos , p parâmetros essenciais se $p > 0$ ou constituída de, pelo menos, uma solução se $p = 0$ , tal que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_q)\, t} = 0$$

Nota - Êste teorema é mais geral que o de Z . Szmydt [21 , Teorema 1] .

Mais precisamente , êle coincide essencialmente com o de Szmydt no caso $A(t)$ constante .

Nas hipóteses do teorema acima podemos, sem perda de generalidade, supor $t_0 > 0$ . E isto é suposto na demonstração que se segue.

Prova do Teorema 3 . 1

Seja $y(t)$ uma solução de (3.10) satisfazendo (3.13) . Pomos $\beta = R(\alpha_q)$ e fazemos a transformação $z = \dfrac{x - y(t)}{t^{\ell} \exp \beta t}$ , onde $x$ satisfaz (3.11) e $\ell$ é dado por (3.12) . Um simples cálculo mostra que

$$\dot{z} = [A(t) - \frac{\ell}{t} I - \beta I]z + f(t, t^{\ell} [\exp \beta t] z + y(t)) t^{-\ell} \exp(-\beta t)$$

Pondo $g(t, z) = f(t, t^{\ell} [\exp \beta t] z + y(t)) t^{-\ell} \exp(-\beta t)$

e

$$B(t) = [A(t) - \beta I]$$

segue que

$$(3.14) \quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t} I] z + g(t, z)$$

onde

$B(t) = \mathrm{diag}\,(B_1(t), \ldots, B_N(t))$ com os $B_j(t) = A_j(t) - \beta I$ .

O nosso teorema ficará provado se mostrarmos que existe uma família de soluções $z(t)$ de (3.14) dependendo de pelo menos $p$ parâmetros essenciais se $p > 0$ ou constituída de pelo menos uma solução se $p = 0$, tal que $z(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

Fazendo $\gamma_j = \alpha_j - \beta$, temos que $\gamma_j + \lambda_j(t)$ é o elemento que entra na diagonal de $B_j(t)$ e

$$R(\gamma_1) \geq \ldots \geq R(\gamma_{q-1}) > R(\gamma_q) = \ldots = R(\gamma_{q+r-1}) = 0 > R(\gamma_{q+r}) \geq$$
$$\geq \ldots \geq R(\gamma_N).$$

Como $\|y(t)\| \leq c\, t^{\ell} \exp \beta t$ para $t \geq t_0 > 0$ e $c$, constante suficientemente grande, segue que

$$\|g(t, z)\| = \|f(t, t^{\ell} [\exp \beta t]\, z + y(t))\, t^{-\ell} \exp(-\beta t)\| \leq$$
$$\leq t^{-\ell} [\exp(-\beta t)]\, h(t)\, \|t^{\ell} [\exp \beta t] z + y(t)\| \leq$$
$$\leq t^{-\ell} [\exp(-\beta t)]\, h(t)\, [\|t^{\ell} [\exp \beta t] z\| + \|y(t)\|] \leq$$
$$\leq t^{-\ell} [\exp(-\beta t)]\, h(t)\, [t^{\ell} [\exp \beta t]\, \|z\| + c\, t^{\ell} \exp \beta t].$$

Seja $\rho > 0$. Então $t \geq t_0$, $\|z\| \leq \rho$ implica

$$(3.15) \quad \|g(t, z)\| \leq t^{-\ell} [\exp(-\beta t)]\, h(t)\, [\rho\, t^{\ell} \exp \beta t + $$
$$+ c\, t^{\ell} \exp \beta t] \leq (\rho + c)\, h(t),$$

onde $\lambda(t) = (\rho + c)\, h(t)$ é uma função contínua satisfazendo $\int_{t_0}^{\infty} t^s \lambda(t)\, dt < \infty$ e, por conseguinte, também $\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t)\, dt < \infty$.

Para nossos propósitos vamos necessitar do seguinte fato:

Se $H(t) \geq 0$ satisfaz $\int_{t_0}^{\infty} H(t)\, dt < \infty$, então existe $\varphi(t)$ contínua para $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq 1$ e $\varphi(t) \to \infty$ com $t \to \infty$ tal que

$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, H(t)\, dt < \infty$.

Isto pode ser provado como segue. Denotando $\int_{t_0}^{\infty} H(t)\, dt = \alpha_0 < \infty$,

consideremos a sequência numérica crescente $(a_n)$ de modo que $a_0 = t_0$

e $\int_{a_{n-1}}^{a_n} H(t)\, dt = \frac{\alpha_0}{2^n}$. Obviamente $a_n \to \infty$ com $n \to \infty$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{n-1}}^{a_n} H(t)\, dt = \int_{t_0}^{\infty} H(t)\, dt = \alpha_0 .$$

Definindo $\sigma(t)$ para $t \geq t_0$ e pondo $\sigma(t) = n$ em $[a_{n-1}, a_n)$,

segue que

$$\int_{t_0}^{\infty} \sigma(t)\, H(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, \alpha_0}{2^n} < \infty .$$

É trivial agora construir uma função contínua $\varphi(t)$ satisfazendo $\varphi(t) \geq 1$, $\varphi(t) \to \infty$ com $t \to \infty$ e $\varphi(t) \leq \sigma(t)$. Para um tal $\varphi(t)$ temos $\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, H(t)\, dt < \infty$ e a nossa afirmação está verificada.

Seja $\varphi(t)$ contínua para $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq 1$ e $\varphi(t) \to \infty$ com $t \to \infty$ tal que $\int_{t_0}^{\infty} t^s\, \varphi(t)\, \lambda(t)\, dt < \infty$. A existência de um tal $\varphi(t)$ decorre do que acabamos de provar logo acima.

Pondo $\psi(t) = \varphi(t)\, \lambda(t)$, $D = L_0^{\infty}(Y)$ e usando o Teorema 2.5 no caso II, vemos que a prova de nosso teorema estará completa se mostrarmos que:

1) para todo $g(t) \in L(Y)$ satisfazendo $\frac{g(t)}{\psi(t)} \to 0$ com $t \to \infty$ o sistema

$$\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t} I]\, y + g(t)$$

tem pelo menos uma solução $y(t) \to 0$ com $t \to \infty$ , e

2) dimensão $Y_{t_o D} \geq p$ relativamente ao sistema

$$\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t} I] y .$$

Como 2) segue imediatamente ao Lema 3.5 , resta-nos provar 1). É o que vamos fazer a seguir.

O sistema considerado em 1) pode ser escrito na forma

$$(3.16) \quad \dot{y}_j = [A_j(t) - \frac{\ell}{t} I] y_j + g_j(t)$$

onde $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ , $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}$

$$y_j = \begin{pmatrix} y_j^1 \\ \vdots \\ y_j^{n_j} \end{pmatrix} , \quad g_j = \begin{pmatrix} g_j^1 \\ \vdots \\ g_j^{n_j} \end{pmatrix}$$

$g_j^i$ localmente Lebesgue integrável ,

$1 \leq j \leq N , 1 \leq i \leq n_j$ e $\dfrac{g_j^i(t)}{\psi(t)} \to 0$ com $t \to \infty$ .

Observamos que $\int_{t_o}^{\infty} \psi(t)\, dt < \infty$ implica

$\int_{t_o}^{\infty} |g_j^i(t)|\, dt < \infty$ para todo i , j .

Vamos considerar separadamente os casos $1 \leq j \leq q-1$ , $q \leq j \leq q+r-1$ e $q+r \leq j \leq N$ , mostrando que sempre podemos encontrar uma solução $y_j(t)$ de (3.16) em que $y_j(t) \to 0$ com $t \to \infty$ .

Seja $1 \leqslant j \leqslant q-1$.

Existe uma solução $y_j(t)$ de (3.16) em que

$$y_j^i(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_l^i(t)\,,\ i=1,\dots,n_j\,,$$

onde $\sigma_m^i(t)$ é do tipo

$$\sigma_m^i(t) = \int_\infty^t \left\{\exp \int_{t_1}^t [\,\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}\,]d\tau\right\} b_1(t_1)dt_1\,.$$

$$\cdot \int_\infty^{t_1} \left\{\exp \int_{t_2}^{t_1} [\,\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}\,]d\tau\right\} b_2(t_2)dt_2 \dots$$

$$\dots \int_\infty^{t_{m-2}} \left\{\exp \int_{t_{m-1}}^{t_{m-2}} [\,\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}\,]\,d\tau\right\}\,.$$

$$\cdot\ b_{m-1}(t_{m-1})dt_{m-1} \int_\infty^{t_{m-1}} \left\{\exp \int_{t_m}^{t_{m-1}} [\,\gamma_j + \lambda_j(\tau) -\right.$$

$$\left. - \frac{\ell}{\tau}\,]\,d\tau\right\}\ g_j^{i-m+1}(t_m)\ d\,t_m$$

onde cada $b_j(t)$ coincide com algum elemento não diagonal de $A_j(t)$ e, por conseguinte é limitado e $R(\gamma_j) > 0$.

É fácil ver que

$$\sigma_m^i(t) = \int_\infty^t b_1(t_1)\,dt_1 \int_\infty^{t_1} b_2(t_2)dt_2 \dots$$

$$\dots \int_\infty^{t_{m-2}} b_{m-1}(t_{m-1})\,dt_{m-1} \int_\infty^{t_{m-1}} g_j^{i-m+1}(t_m)\,.$$

$$\cdot\ [\exp \int_{t_m}^t [\,\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}\,]\,d\tau\,]\,dt_m$$

Tomando $\delta$ tal que $0 < \delta < R(\gamma_j)$ temos para $t_0 \leqslant t \leqslant u$

$$|\exp \int_u^t [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau| =$$

$$= [\exp [R(\gamma_j) - \delta](t-u)][\exp \delta(t-u)][\exp \int_u^t R(\lambda_j(\tau))\, d\tau](\frac{u}{t})^\ell$$

Como para $t_0 \leq t \leq u$, $\exp \int_u^t R(\lambda_j(\tau))\, d\tau$ e

$\left\{\exp [R(\gamma_j) - \delta](t-u)\right\} (\frac{u}{t})^\ell$ são limitados, segue que existe constante c de maneira a ser satisfeito

$$|\exp \int_u^t [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau| \leq c \exp \delta(t-u) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq u$$

Logo existem constantes $c_1$, $c_2$ tais que

$$|\sigma_m^i(t)| \leq c_1 [\exp \delta t] \left| \int_\infty^t dt_1 \int_\infty^{t_1} dt_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_\infty^{t_{m-2}} dt_{m-1} \int_\infty^{t_{m-1}} |g_j^{i-m+1}(t_m)| \, . \, [\exp(-\delta t_m)] dt_m \right| \leq$$

$$\leq c_1 [\exp \delta t] \left| \int_\infty^t [\exp \frac{(-\delta t_1)}{(m-1)}]\, dt_1 \int_\infty^{t_1} [\exp \frac{(-\delta t_2)}{(m-1)}]\, dt_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_\infty^{t_{m-2}} [\exp \frac{(-\delta t_{m-1})}{(m-1)}] dt_{m-1} \, . \int_\infty^{t_{m-1}} |g_j^{i-m+1}(t_m)|\, dt_m \right| \leq$$

$$\leq c_1 [\exp \delta t] \left| \int_\infty^t [\exp \frac{(-\delta t_1)}{(m-1)}]\, dt_1 \int_\infty^t [\exp \frac{(-\delta t_2)}{(m-1)}] dt_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_\infty^t [\exp \frac{(-\delta t_{m-1})}{(m-1)}]\, dt_{m-1} \int_\infty^t |g_j^{i-m+1}(t_m)|\, dt_m \right| \leq$$

$$\leq c_1 [\exp \delta t] \left| [\frac{-(m-1)}{\delta}]^{m-1} [\exp \frac{(-\delta t)}{(m-1)}]^{m-1} \int_\infty^t |g_j^{i-m+1}(u)|\, du \right| \leq$$

$$\leq c_2 \left| \int_\infty^t |g_j^{i-m+1}(u)|\, du \right| .$$

Logo $\sigma_m^i(t) \to 0$ com $t \to \infty$ e, por conseguinte, $y_j(t) \to 0$ com $t \to \infty$.

Seja $q + r \leq j \leq N$. Existe uma solução $y_j(t)$ de (3.16) em que $y_j^i(t) = \sigma_1^i(t) + \ldots + \sigma_i^i(t)$, onde $\sigma_m^i(t)$ é do tipo

$$\sigma_m^i(t) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \exp \int_{t_1}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right\} b_1(t_1)dt_1 \,.$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \exp \int_{t_2}^{t_1} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right\} . \; b_2(t_2)dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{t_{m-2}} \left\{ \exp \int_{t_{m-1}}^{t_{m-2}} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right\} b_{m-1}(t_{m-1})dt_{m-1} \,.$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t_{m-1}} \left\{ \exp \int_{t_m}^{t_{m-1}} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right\} g_j^{i-m+1}(t_m)dt_m$$

onde cada $b_j(t)$ coincide com algum elemento não diagonal de $A_j(t)$ e, por conseguinte, é limitado e $R(\gamma_j) < 0$. Vê-se fàcilmente que

$$\sigma_m^i(t) = \int_{t_0}^{t} b_1(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t_1} b_2(t_2)dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_0}^{t_{m-2}} b_{m-1}(t_{m-1})\, dt_{m-1} \int_{t_0}^{t_{m-1}} g_j^{i-m+1}(t_m) \,.$$

$$\cdot \left[ \exp \int_{t_m}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right] dt_m \,.$$

Para $t_0 \leq u \leq t$,

$$\left| \exp \int_{u}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right| =$$

$$= [\exp \gamma_j(t-u)] \; [\exp \int_{u}^{t} R(\lambda_j(\tau))d\tau] \,. \; (\frac{u}{t})^{\ell} \leq$$

$\leqslant c \exp(-\beta)(t-u)$

onde $c$ é constante e $\beta = -R(\gamma) > 0$.

Logo, para $t \geqslant t_o$,

$$|\sigma_m^i(t)| \leqslant \text{constante}\,[\exp(-\beta t)] \int_{t_o}^{t} dt_1 \int_{t_o}^{t_1} dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_o}^{t_{m-2}} dt_{m-1} \int_{t_o}^{t_{m-1}} |g_j^{i-m+1}(t_m)|\,[\exp \beta\, t_m]\, dt_m \leqslant$$

$$\leqslant \text{constante}\,[\exp(-\beta t)] \int_{t_o}^{t} [\exp \frac{\beta}{m} t_1]\, dt_1 \int_{t_o}^{t_1} [\exp \frac{\beta}{m} t_2]\, dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_o}^{t_{m-2}} [\exp \frac{\beta}{m} t_{m-1}]\, dt_{m-1}\,.$$

$$\cdot \int_{t_o}^{t_{m-1}} |g_j^{i-m+1}(t_m)|\,[\exp \frac{\beta}{m} t_m]\, dt_m \leqslant$$

$$\leqslant \text{constante}\,[\exp(-\beta t)] \int_{t_o}^{t} [\exp \frac{\beta}{m} t_1]\, dt_1 \int_{t_o}^{t} [\exp \frac{\beta}{m} t_2]\, dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{t_o}^{t} [\exp \frac{\beta}{m} t_{m-1}]\, dt_{m-1} \int_{t_o}^{t} |g_j^{i-m+1}(t_m)|\,[\exp \frac{\beta}{m} t_m]\, dt_m =$$

$$= \text{constante}\,[\exp(-\beta t)] \left\{ \frac{m}{\beta} [\exp \frac{\beta}{m} t - \exp \frac{\beta}{m} t_o] \right\}^{m-1}.$$

$$\cdot \int_{t_o}^{t} |g_j^{i-m+1}(u)|\,[\exp \frac{\beta}{m} u]\, du \leqslant$$

$$\leqslant \text{constante}\,[\exp(-\beta t)]\,[\exp(1-\frac{1}{m})\beta t] \int_{t_o}^{t} |g_j^{i-m+1}(u)|\,[\exp \frac{\beta}{m} u]\, du \leqslant$$

$$\leqslant \text{constante}\,[\exp(-\frac{\beta}{m} t)] \int_{t_o}^{t} |g_j^{i-m+1}(u)|\,[\exp \frac{\beta}{m} u]\, du \leqslant$$

$$\leqslant \text{constante}\,[\exp(-\frac{\beta}{m} t)] \left[ \int_{t_o}^{t/2} |g_j^{i-m+1}(u)|\,[\exp \frac{\beta}{m} u]\, du \; + \right.$$

$$+\int_{t/2}^{t} |g_j^{i-m+1}(u)| \left[\exp \frac{\beta}{m} u\right] du] \leq$$

$$\leq \text{constante} \left\{ [\exp(-\frac{\beta}{2m} t)] \int_{t_o}^{t/2} |g_j^{i-m+1}(u)| du + \int_{t/2}^{t} |g_j^{i-m+1}(u)| du \right\}$$

$$\leq \text{constante} \ [\exp(-\frac{\beta}{2m} t)] \int_{t_o}^{\infty} |g_j^{i-m+1}(u)| du \ +$$

$$+ \ \text{constante} \int_{t/2}^{t} | g_j^{i-m+1}(u) | du .$$

Portanto, $\sigma_m^i(t) \to 0$ com $t \to \infty$ e, por conseguinte,

$y_j(t) \to 0$ com $t \to \infty$.

Seja $q \leq j \leq q + r - 1$.

Observamos que $\int_{t_o}^{\infty} \Psi(t)\, t^s dt < \infty$ implica

$$\int_{t_o}^{\infty} | g_j^i(t) | t^s \, dt < \infty .$$

Como $\int_{t_o}^{\infty} | g_j^i(t) | t^{n_j - 1} \, dt < \infty$, ou seja,

$$(3.17) \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{n_j - \ell - 1} [t^{\ell} | g_j^i(t) | ] \, dt < \infty$$

porque $n_j - 1 \leq s$, resulta que existe uma solução $y_j(t)$ de (3.16), $y_j(t) \to 0$ com $t \to \infty$, definida como segue:

Para $1 \leq i \leq n_j - \ell$, $y_j^i(t)$ é da forma $y_j^i(t) = \sigma_1^i(t) + \dots + \sigma_i^i(t)$, onde $\sigma_m^i(t)$ é do tipo

$$\sigma_m^i(t) = \int_{\infty}^{t} \left\{ \exp \int_{t_1}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] d\tau \right\} b_1(t_1) dt_1 .$$

$$\cdot \int_{\infty}^{t_1} \left\{ (\exp \int_{t_2}^{t_1} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] \, d\tau \right\} b_2(t_2) \, dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{\infty}^{t_{m-2}} \left\{ \exp \int_{t_{m-1}}^{t_{m-2}} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] \, d\tau \right\} b_{m-1}(t_{m-1}) dt_{m-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{\infty}^{t_{m-1}} \left\{ \exp \int_{t_m}^{t_{m-1}} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] d\tau \right\} g_j^{i-m+1}(t_m) \, dt_m$$

onde cada $b_j(t)$ coincide com algum elemento não diagonal de $A_j(t)$ e, por conseguinte, é limitado e $R(\gamma_j) = 0$. É fácil ver que

$$\sigma_m^i(t) = \int_{\infty}^{t} b_1(t_1) dt_1 \int_{\infty}^{t_1} b_2(t_2) dt_2 \ldots \int_{\infty}^{t_{m-2}} b_{m-1}(t_{m-1}) \, dt_{m-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{\infty}^{t_{m-1}} g_j^{i-m+1}(t_m) \left\{ \exp \int_{t_m}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] \, d\tau \right\} dt_m$$

Como para $t_o \leq t \leq u$ temos

$$| \exp \int_{u}^{t} [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}] \, d\tau | \leq \text{constante } (\frac{u}{t})^{\ell} ,$$

segue que para $t_o \leq t$

$$| \sigma_m^i(t) | \leq \text{constante } \frac{1}{t^{\ell}} \left| \int_{\infty}^{t} dt_1 \int_{\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \int_{\infty}^{t_{m-2}} dt_{m-1} \int_{\infty}^{t_{m-1}} | g_j^{i-m+1}(t_m) | \, t_m^{\ell} \, dt_m \right|$$

A convergência da integral acima para $1 \leq m \leq n_j - \ell$, o que acarreta a convergência da integral que define $\sigma_m^i(t)$, decorre da (3.17), em vista de um conhecido teorema de Análise. Para um tal teorema ver, por exemplo, [21 , Lema 3].

Logo $\sigma_m^i(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$ e, por conseguinte, $y_j^i(t) \longrightarrow$ $\longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$, para $1 \leq i \leq n_j - \ell$.

Com $y_j^1(t), \ldots, y_j^{n_j-\ell}(t)$ definidos acima temos

$$\dot{y}_j^{n_j-\ell+1} = [\gamma_j+\lambda_j(t)-\frac{\ell}{t}]y_j^{n_j-\ell+1} + \sigma^1(t) + g_j^{n_j-\ell+1}(t)$$

onde $R(\gamma_j)=0$

e

$$\sigma^1(t) = (A_j(t))_1^{n_j-\ell+1}\; y_j^1(t) + \dots + (A_j(t))_{n_j-\ell}^{n_j-\ell+1}\; y_j^{n_j-\ell}(t)$$

satisfazendo $t^{\ell}\;\sigma^1(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

Logo temos uma solução $y_j^{n_j-\ell+1}(t)$ dada por

$$y_j^{n_j-\ell+1}(t) = \int_{t_0}^{t}\left\{\exp\int_u^t [\gamma_j+\lambda_j(\tau)-\frac{\ell}{\tau}]d\tau\right\}[\sigma^1(u) + $$

$$+ g_j^{n_j-\ell+1}(u)]\, du$$

Então

$$|y_j^{n_j-\ell+1}(t)| \leqslant \text{constante}\,\frac{1}{t^{\ell}}[\int_{t_0}^{t} u^{\ell}\;|\;\sigma^1(u)\;|\,du \;+$$

$$+\int_{t_0}^{t} |\;g_j^{n_j-\ell+1}(u)\;|\;u^{\ell}\;du] \leqslant \frac{1}{t^{\ell-1}}\;o(1) \;+$$

$$+ \text{constante}\;\frac{1}{t^{\ell}}\int_{t_0}^{\infty} |\;g_j^{n_j-\ell+1}(u)\;|\;u^{\ell}\,du.$$

Portanto $t^{\ell-1}\; y_j^{n_j-\ell+1}(t) \longrightarrow 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

Vê-se, por indução, que para $1 \leqslant m \leqslant \ell$ temos

$$\dot{y}_j^{n_j-\ell+m} = [\gamma_j+\lambda_j(t)-\frac{\ell}{t}]\; y_j^{n_j-\ell+m} + \sigma^m(t) + g_j^{n_j-\ell+m}(t)$$

onde

$$\sigma^m(t) = (A_j(t))_1^{n_j-\ell+m}\; y_j^1(t)+\dots+(A_j(t))_{n_j-\ell+m-1}^{n_j-\ell+m}\, y_j^{n_j-\ell+m-1}(t)$$

com $\sigma^m(t)$ satisfazendo $t^{\ell-(m-1)}\sigma^m(t) \to 0$ com $t \to \infty$.

Logo temos uma solução $y_j^{n_j-\ell+m}(t)$ dada por

$$y_j^{n_j-\ell+m}(t) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \exp \int_u^t [\gamma_j + \lambda_j(\tau) - \frac{\ell}{\tau}]\, d\tau \right\} [\sigma^m(u) +$$

$$+ g_j^{n_j-\ell+m}(u)]\, du$$

Então

$$|y_j^{n_j-\ell+m}(t)| \leq \text{constante}\ \frac{1}{t^\ell} [\int_{t_0}^{t} u^\ell\, |\sigma^m(u)|\, du +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |g_j^{n_j-\ell+m}(u)|\, u^\ell\, du] \leq$$

$$\leq \text{constante}\ \frac{1}{t^{\ell-(m-1)}} [\int_{t_0}^{t} u^{\ell-(m-1)}\, |\sigma^m(u)|\, du +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |g_j^{n_j-\ell+m}(u)|\, u^\ell\, du] \leq \frac{1}{t^{\ell-m}}\, o(1) +$$

$$+ \text{constante}\ \frac{1}{t^{\ell-(m-1)}} \int_{t_0}^{\infty} |g_j^{n_j-\ell+m}(u)|\, u^\ell\, du\ .$$

Assim $t^{\ell-m}\, y_j^{n_j-\ell+m}(t) \to 0$ com $t \to \infty$ e, portanto,

$y_j^{n_j-\ell+m}(t) \to 0$ com $t \to \infty$ para $m = 1, \dots, \ell$.

Logo para $q \leq j \leq q + r - 1$, o sistema (3.16) tem uma solução $y_j(t) \to 0$ com $t \to \infty$.

O nosso teorema está pois completamente provado.

Teorema 3 . 2 - Seja A(t) satisfazendo às hipóteses do Lema 3.2. Seja f(t , x) contínua para $t \geq t_0$ , $\|x\| < \infty$ e satisfazendo

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \|x\| \text{ para todo } x \text{ e } t \geq t_0$$

onde h(t) é uma função contínua com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)\, t^{\mu}\, dt < \infty, \mu + 1 = \text{máximo} \left\{ n_1, \ldots, n_N \right\} .$$

Então para tôda solução y(t) de (3.10) corresponde uma família x(t) de soluções de (3.11) , dependendo de pelo menos p parâmetros essenciais se $p > 0$ ou constituída de pelo menos uma solução se $p = 0$ (p será especificado na prova) , tal que

$$x(t) = y(t) + o( \|y(t)\|) .$$

Nota - Êste teorema já dá uma resposta positiva ao problema $P_1$ , com hipóteses muito menos restritivas sôbre A(t) do que aquelas de S. Szmydt [21 , Corolário 1] . Mais para a frente daremos uma resposta positiva não só ao problema $P_1$ como a $P_2$ , com hipóteses ainda menos restritivas do que as estabelecidas no teorema em consideração. Mas êsse resultado que daremos mais adiante dependerá do teorema acima.

Prova do Teorema 3.2

Dado $y(t) \neq 0$ , solução de (3.10) , existem, pelo Lema 3.2 , inteiros q , $\ell$ com $1 \leq q \leq N$ , $0 \leq \ell \leq n_q - 1$ , de modo que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_q) t}$$ existe e é finito diferente de zero.

Então, tomando p inteiro como no Teorema 3.1, existe, por êste mesmo teorema, uma família de soluções $x(t)$ de (3.11), dependendo de pelo menos p parâmetros essenciais se $p > 0$ ou constituída de pelo menos uma solução se $p = 0$, tal que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\| x(t) - y(t) \|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_q) t} = 0 .$$

Portanto

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\| x(t) - y(t) \|}{\| y(t) \|} = \lim_{t \to \infty} \frac{\| x(t) - y(t) \|}{t^{\ell} \exp R(\alpha_q) t} \cdot \frac{t^{\ell} \exp R(\alpha_q) t}{\| y(t) \|} = 0 .$$

ou seja,

$$x(t) = y(t) + o(\| y(t) \|)$$

A prova do teorema está assim completa.

O corolário seguinte nos dá mais informações que o Teorema 3.2, no caso especial em que a perturbação $f(t, x)$ é linear. A importância do referido corolário é o papel que êle desempenha na prova do Teorema 3.3 que é a resposta que damos aos problemas propostos $P_1$ e $P_2$.

<u>Corolário 3.1</u> - <u>Sejam satisfeitas as hipóteses do Teorema</u> 3.2 <u>com a perturbação</u> $f(t, x)$ <u>linear</u>. <u>Seja</u> $U(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ <u>a matriz fundamental de</u> (3.10) <u>com</u> $U(t_0) =$ <u>identidade</u>. <u>Seja</u> $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ <u>uma matriz de soluções de</u> (3.11) <u>satisfazendo</u> $x_i(t) = y_i(t) + o(\| y_i(t) \|)$, $i = 1, \ldots, n$. <u>Então os</u> $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, <u>são linearmente independentes</u>.

<u>Prova</u>

Sem perda de generalidade podemos supor que para todo par de índices $q, r$ satisfazendo

$$R(\alpha_1) \geq \ldots \geq R(\alpha_{q-1}) > R(\alpha_q) = \ldots = R(\alpha_{q+r-1}) > R(\alpha_{q+r}) \geq$$

$$\geq \ldots \geq R(\alpha_N)$$

tenhamos $n_q \geq \ldots \geq n_{q+r-1}$.

Indiquemos por $y_j^i(t)$ a linha $i$ da matriz $y_j(t)$.

$$U(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n_1}(t), y_{n_1+1}(t), \ldots, y_{n_1+n_2}(t), \ldots$$

$$\ldots, y_{n_1+\ldots+n_{N-1}+1}(t), \ldots, y_n(t))$$

e as linhas $j$, $j = 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_u$ de

$(y_{n_1+\ldots+n_u+1}(t), \ldots, y_{n_1+\ldots+n_u+n_{u+1}}(t))$ são identicamente zero.

Sejam $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ soluções de (3.11) satisfazendo $x_i(t) =$ $= y_i(t) + o(\|y_i(t)\|)$, $i = 1, \ldots, n$.

Seja $c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = 0$, isto é,

$$(3.18) \quad c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) + c_1 o(\|y_1(t)\|) + \ldots$$

$$\ldots + c_n o(\|y_n(t)\|) = 0.$$

Seja $K$ o conjunto dos índices $j$ para os quais $c_j \neq 0$. Devemos mostrar que $K$ é um conjunto vazio. Suponhamos que não seja, isto é, $K \neq \emptyset$. Todo $k$, $1 \leq k \leq n$, é da forma $k = n_1 + \ldots + n_{u-1} + j_k$, $u = u(k)$, $1 \leq j_k \leq n_u$, podendo ocorrer o caso $k = j_k$ com $u = 1$. Associemos a $k$ os números $\beta_k = R(\alpha_u)$ e $j_k$.

Seja $K_1 \subset K$ o conjunto dos índices $k \in K$ satisfazendo $\beta_k = \max_{i \in K} \{\beta_i\}$. Seja $K_2 \subset K_1$ o conjunto dos índices $k \in K_1$ satisfazendo $n_{u(k)} - j_k = \max_{i \in K_1} \{n_{u(i)} - j_i\}$.

A suposição $K \neq \emptyset$ implica $K_2 \neq \emptyset$. Tomemos um $k \in K_2$ e seja $k = n_1 + \ldots + n_{u-1} + j_k$, $1 \leq j_k \leq n_u$. Tomando a linha $n_1 + \ldots + n_u$ de (3.18) e dividindo por $[\exp R(\alpha_u)t]\, t^{n_u - j_k}$ temos

$$\frac{c_k\, y_k^{n_1 + \ldots + n_u}(t)}{[\exp R(\alpha_u)t]\; t^{n_u - j_k}} + \sum_{\substack{i \in K \\ i \neq k \\ n_1+\ldots+n_{u-1}+j_k < i \leq n_1+\ldots+n_u}} c_i \frac{y_i^{n_1+\ldots+n_u}(t)}{[\exp R(\alpha_u)t]\; t^{n_u - j_k}} +$$

$$+ \sum_{i \in K} c_i \frac{o(\|y_i(t)\|)}{[\exp R(\alpha_u)t]\; t^{n_u - j_k}} = 0$$

Da prova do Lema 3.1 segue que as parcelas da primeira somatória acima tendem a zero com $t \to \infty$. Ainda da prova do Lema 3.1, considerando que $\lim_{t \to \infty} \frac{\|y_i(t)\|}{[\exp R(\alpha_u)\, t]\; t^{n_u - j_k}} < \infty$ para todo $i \in K$, segue que as parcelas da segunda somatória acima tendem a zero com $t \to \infty$; Portanto $\lim_{t \to \infty} \frac{c_k\, y_k^{n_1+\ldots+n_u}(t)}{[\exp R(\alpha_u)\, t]\; t^{n_u - j_k}} = 0$.

Como da prova do Lema 3.1 segue também que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|y_k^{n_1 + \ldots + n_u}(t)|}{[\exp R(\alpha_u)t]\ t^{n_u - j_k}}$$ existe e é finito diferente de zero,

resulta $c_k = 0$, o que nos leva a uma contradição.

Logo $K = \emptyset$ e a prova de nosso corolário está completa.

<u>Corolário 3.2</u> - <u>Sejam satisfeitas as hipóteses do Teorema</u> 3.2 <u>com a perturbação</u> $f(t, x)$ <u>linear. Então a tôda solução</u> $x(t) \neq 0$ <u>de</u> (3.11) <u>corresponde uma solução</u> $y(t)$ <u>de</u> (3.10) <u>tal que</u>

$$x(t) = y(t) + o(\|y(t)\|)$$

<u>Prova</u>

Seja $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ a matriz $U(t)$ considerada no Corolário 3.1. Seja $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ uma matriz fundamental de (3.11) determinada de acôrdo com o Corolário 3.1, isto é,

$$x_i(t) = y_i(t) + o(\|y_i(t)\|).$$

Seja $x(t)$ uma solução de (3.11). Então

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t) +$$

$$+ c_1 o(\|y_1(t)\|) + \ldots + c_n o(\|y_n(t)\|).$$

Seja $K$ o conjunto dos índices $j$ para os quais $c_j \neq 0$.

Como $x(t) \neq 0$ temos $K \neq \emptyset$.

Pondo $y(t) = \sum_{i \in K} y_i(t)$ segue que

$$x(t) = y(t) + \sum_{i \in K} c_i\, o(\|y_i(t)\|).$$

Seja $K_2 \subset K$ definido como no corolário anterior e tomemos um elemento $k \in K_2$. Em vista do Lema 3.1 é fácil ver que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\| y_i(t) \|}{[\exp R(\alpha_u)\, t]\, t^{n_u - j_k}} < \infty$$ para $i \in K$ e êste limite é diferente de zero para $i = k$. Decorre fàcilmente dêste fato que

$$0 < \lim_{t \to \infty} \frac{\| y(t) \|}{[\exp R(\alpha_u) t]\, t^{n_u - j_k}} < \infty$$ e, por conseguinte,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\| y_i(t) \|}{\| y(t) \|} < \infty \text{ . Logo } \lim_{t \to \infty} \frac{\| x(t) - y(t) \|}{\| y(t) \|} = 0 .$$

A prova do Corolário está assim completa.

O teorema seguinte é a planejada resposta aos problemas $P_1$ e $P_2$.

Teorema 3.3 - Sejam $A(t)$ e $f(t, x)$ matrizes $n \times n$ e $n \times 1$ respectivamente, satisfazendo às hipóteses do Teorema 3.2

Seja $C(t)$ matriz $n \times n$ contínua satisfazendo

$$\int_{t_0}^{\infty} \| C(t) \| t^{\mu}\, dt < \infty .$$

Então a tôda solução $y(t) \neq 0$ de

(3.19) $\dot{y} = (A(t) + C(t))\, y$ corresponde uma solução $x(t)$ de

(3.20) $\dot{x} = (A(t) + C(t))x + f(t, x)$ satisfazendo

(3.21) $x(t) = y(t) + o( \| y(t) \| )$.

Reciprocamente, se $x(t)$ é uma solução de (3.20) com $x(t) \neq 0$ para todo $t$ suficientemente grande, existe uma solução $y(t)$ de (3.19) satisfazendo (3.21).

Prova

Seja $y(t) \neq 0$ uma solução de (3.19). Em vista das hipóteses sôbre $A(t)$ e $C(t)$ segue, do Corolário 3.2, que existe uma solução $z(t)$ do sistema

(3.22) $\dot{z} = A(t)z$

satisfazendo

(3.23) $y(t) = z(t) + o(\|z(t)\|)$

Pondo $g(t, x) = C(t)x + f(t, x)$;

$k(t) = \|C(t)\| + h(t)$

segue que

$\|g(t, x)\| \leq k(t)\|x\|$, com $\int_{t_0}^{\infty} k(t)\, t^{\mu}\, dt < \infty$.

Resulta então, do Teorema 3.2, que existe uma solução $x(t)$ de (3.21) satisfazendo

(3.24) $x(t) = z(t) + o(\|z(t)\|)$

Combinando (3.23) com (3.24) segue

(3.25) $x(t) = y(t) + o(\|z(t)\|)$

Como (3.23) implica $\lim_{t \to \infty} \frac{\|y(t)\|}{\|z(t)\|} = 1$, (3.25) acarreta

$x(t) = y(t) + o(\|y(t)\|)$.

Está assim provada a primeira parte de nosso teorema.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (3.20) com $\varphi(t) \neq 0$ para t suficientemente grande. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor $t_0 > 0$ satisfazendo $\varphi(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Consideremos o sistema linear

$$(3.26)\quad \dot{x} = [A(t) + C(t)]\, x + \frac{[\varphi^*(t) . x]}{\varphi^*(t) . \varphi(t)}\, f(t, \varphi(t))$$

onde $\varphi^*$ é a matriz $1 \times n$ transposta conjugada de $\varphi$.

Pondo

$$D(t) = \frac{1}{\varphi^*(t) . \varphi(t)} \begin{pmatrix} f_1\,(t, \varphi(t)\ \ \varphi^*(t) \\ \vdots \\ f_n\,(t, \varphi(t)\ \varphi^*(t) \end{pmatrix}$$

resulta que

$$\frac{[\varphi^*(t) . x]}{\varphi^*(t) . \varphi(t)}\, f(t, \varphi(t)) = D(t) . x$$

A hipótese sôbre $f(t, x)$ acarreta

$$\int_{t_0}^{\infty} \|D(t)\|\, t^{\mu}\, dt < \infty\ .$$

O sistema (3.26) pode então ser reescrito na forma

$$(3.26')\quad \dot{x} = [A(t) + C(t) + D(t)]\, x$$

onde $\int_{t_0}^{\infty} \|C(t) + D(t)\|\, t^{\mu}\, dt < \infty$ e

$x = \varphi(t)$ é uma sua solução. Então, decorre do Corolário 3.2 que existe uma solução $z(t)$ de (3.22) satisfazendo

$$(3.27)\quad \varphi(t) = z(t) + o(\|z(t)\|)$$

Do Teorema 3.2 decorre a existência de uma solução $y(t)$ de (3.19) satisfazendo

(3 . 28) $y(t) = z(t) + o(\|z(t)\|)$

Combinando (3.27) com (3.28) segue

(3 . 29) $\varphi(t) = y(t) + o(\|z(t)\|)$

Usando o mesmo argumento feito em seguida à fórmula (3.25) temos

$$\varphi(t) = y(t) + o(\|y(t)\|)$$

A prova do teorema está assim completa.

Dada uma matriz constante $A$, $n \times n$, com números característicos distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$, é sabido que existe uma matriz não singular $P$ tal que

$$P^{-1} A P = J = \text{diag}\,(J_1, \dots, J_N)$$

onde $J_s$ é matriz $n_s \times n_s$ com $(J_s)_i^i = \alpha_s$, $i = 1, \dots, n_s$, $\alpha_s = \lambda_r$ para algum $r$, $1 \leq r \leq m$ e $(J_s)_j^{j+1} = 1$, $j = 1, \dots, n_s - 1$, com os demais elementos iguais a zero se $n_s > 1$.

Essa é a chamada forma canônica de Jordan.

Pomos

(3 . 30) $\mu + 1 = \text{máximo}\,(n_1, \dots, n_N)$

Depois das observações acima podemos estabelecer o seguinte interessante corolário do teorema anterior.

<u>Corolário 3 . 3</u> - <u>Seja</u> $A$ <u>matriz constante</u> $n \times n$. <u>Sejam</u> $C(t)$ <u>e</u> $f(t, x)$ <u>matrizes</u> $n \times n$ <u>e</u> $n \times 1$ <u>respectivamente, satisfazendo às hipóteses do Teorema</u> 3.3 <u>com</u> $\mu$ <u>definido por</u> (3.30).

Então valem as conclusões do Teorema 3.3 com $A(t) = A$.

Prova

É fácil ver que, sem perda de generalidade, podemos supor A na forma canônica de Jordan e $R(\alpha_1) \geq \ldots \geq R(\alpha_N)$.

O nosso corolário é então uma consequência imediata do Teorema 3.3.

.:.:.:.:.:.:.:.:.

# BIBLIOGRAFIA


|1| N.Bourbaki, "Topologie Générale", Chapitre X, Hermann (1949).

|2| N.Bourbaki, "Espaces Vectoriels Topologiques", Hermann (1953).

|3| F.Brauer, "Asymptotic equivalence and Asymptotic behavior of linear systems", Michigan Journal of Mathematics, Vol. 9, (1962) 33 - 43.

|4| L.Cesari, "Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. N.F. Heft 16, Springer - Verlag, Berlin, (1959).

|5| R.Conti e G.Sansone, "Equazioni differenziali non lineari", Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 3. Edizioni Cremonese, Roma, (1956).

|6| C.Corduneanu, "Sur certains systèmes différentielles non-linéaires", Analele Stiinitifice ale Universitătii", Al. I. Cuza din Iasi, Sect. I, Vol. 6(1960), 257 - 260.

|7| M.Day, "Normed Linear Spaces", Ergebnisse, Vol. 21 (1958).

|8| N.Dunford e C.Schwartz, "Linear Operators", Interscience (1958).

|9| S.Faedo, "Propieta assintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari omogenei", Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), 26 (1947), 207 - 215.

|10| A. Ghizzetti, "Comportamento assintótico degli integrali dell' equazione differenziale $x'' + x + \varphi(x') = 0$", Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), 51 (1960), 167 - 202.

|11| Jack Hale e Nelson Onuchic, "On the Asymptotic behavior of solutions of a class of differential equations", Contributions to Differential Equations", 1964, 61 - 75.

|12| Philip Hartman e Nelson Onuchic, "On the asymptotic integration of ordinary differential equations", Pacific Journal of Mathematics, Vol. 13, 4, 1963, 1193 - 1207.

|13| P.Hartman e A.Wintner, "Asymptotic integrations of linear differential equations", American Journal of Mathematics, Vol. 77, (1955), 45-86.

|14| P.Hartman e A.Wintner, "Asymptotic integrations of non-linear differential equations", American Journal of Mathematics, Vol. 77 (1955), 692-724.

|15| E.Hille e R.Phillips, "Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol 31 (1957).

|16| E.Levi, "Sul comportamento assintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenei", Atti della Academia Nazionale dei Lincei Cl. Sci. Fis. Nat. (8) 8(1950) 465-470, (8) 9(1950) 26-31.

|17| J.L.Massera e J.J.Schäffer, "Linear differential equations and functional analysis, I", Annals of Mathematics, Vol. 67, Nº 3, (1958).

|18| J.L.Massera e J.J.Schäffer, "Linear differential equations and functional analysis, IV "Mathematische Annalen, Vol. 139, (1960) 287-342.

|19| C.Olech, "On the asymptotic behavior of the solutions of a system of ordinary non-linear differential equations", Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, cl.III, Vol. 4 (1956), 555-561.

|20| Nelson Onuchic, "Relationships among the solutions of two systems of ordinary differential equations", Michigan Journal of Mathematics, Vol. 10, (1963), 129 -139.

|21| Z.Smydt, "Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations differentielles non linéaires", Annales Polonici Mathematici, I-2 (1955) 253-276.

|22| Z.Szmydt, "Perturbations non linéaires qui n'augment pas la croissance maximale des intégrales", Annales Polonici Mathematici, XI-2(1961), 143-148.

|23| W.F.Trench , "On the asymptotic behavior of solutions of second order linear differential equations" , Proc. Am. Math. Soc., Vol. 14 , nº 1 , (1963) , 12 - 14 .

|24| T.Ważewski , "Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires", Ann. Soc. Polon. Math. Tome 20 , (1947) , 279 - 313 .

|25| A.Zaanen , "Linear Analysis" , Interscience (1953).

|26| Nelson Onuchic,"Nonlinear perturbation of a linear system of ordinary differential equations , Michigan Journal of Mathematics , Vol. 11 , (1964) , 237 - 242.

|27| Ayrton Badelucci e Nelson Onuchic ,"Nonlinear perturbation of a linear system of ordinary differential equations of order m". , a aparecer .

.:.:.:.:.:.:.:.:.