

CARLOS B. DE LYRA

H-EQUIVALÊNCIA DE GRUPOS TOPOLÓGICOS

Tese de Livre-Docência apresentada à
Cadeira de Complementos de Geome-
tria e Geometria Superior, da Faculdade
de Filosofia, Ciências e Letras da Uni-
versidade de São Paulo.

SÃO PAULO — 1968

CARLOS B. DE LYRA

H-EQUIVALÊNCIA de GRUPOS TOPOLÓGICOS

Tese apresentada para concurso de Livre-docência da Cadeira de Complementos de Geometria e Geometria Superior, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

| | |
|---|-------------|
| UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO | DATA |
| INSTITUTO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO | 05-08-68 |
| RECEBUEMOS | 1968 |
| REGISTRADO POR: | N. DE TOMSO |

SÃO PAULO - 1968

Prefácio

O presente trabalho foi concluído nas férias de fevereiro deste ano, ficando a redação e reprodução material para o mês em curso. A exiguidade do tempo não permitiu incluir mais uma aplicação e outros detalhes, nem abordar algumas questões laterais.

Desejo agradecer ao Prof. Edwin Spanier algumas discussões esclarecedoras em torno do § 9 e ao Prof. Elen Lages Lima valiosas trocas de idéias sobre o assunto deste trabalho. Agradeço aos Professores Candido L. da Silva Dias e Chaim S. Hönig o apoio e incentivo que sempre me deram, inclusive diretamente no presente caso.

À minha mulher, Leda, fica aqui expressa minha gratidão pelo longo esforço de datilografia incorporado ao presente trabalho bem como a todo seu apoio através dos anos. E, last but not least, meus agradecimentos ao velho amigo Mauricio Segall que, proporcionando-me a tranquilidade do seu refúgio serrano, contribuiu para a conclusão do presente em tempo hábil.

São Paulo, março de 1968

O Capítulo I é dedicado a C.B. de Lyra (sem demonstrações) dos principais resultados e construções de que necessitamos para demonstrar os teoremas do presente trabalho. Lança-se uma vista ligeira sobre H -espaços e seus morfismos, terminologia de homotopia e fibras, construção de Milnor, construção de Dold e Lashof e o clássico teorema de Samelson (5.1).

No Capítulo II se encontram : no §6 a construção de uma aplicação fibreda entre fibrados principais G -universais e no §7 os principais resultados do trabalho. A dificuldade técnica na construção em questão é que se parte de um H -morfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ entre $C\mathbb{Z}$ -grupos, que não precisa ser um homomorfismo. O resultado é expresso no seguinte teorema, em cuja demonstração estão concentradas as principais dificuldades técnicas deste trabalho.

Introdução

Em 1956 J.W. Milnor introduziu uma construção que aplicada a um grupo topológico qualquer G , produz um fibrado principal $G \rightarrow E_\infty \rightarrow B_G$ ∞ -universal, isto é, $\pi_q(E_\infty) = 0$ para todo q . Quando esta construção é restrita a CW-grupos (veja-se a definição no §3), os espaços E_∞ e B_G são neste caso CW-complexos. Para esta classe mais restrita de grupos, Milnor mostrou [7] que o tipo de homotopia do espaço classificador B_G corresponde a uma classe de equivalência de CW-grupos pela seguinte relação de equivalência: dois CW-grupos G_1 e G_2 dizem-se equivalentes se existe um CW-grupo G_3 e homomorfismos contínuos $h_1 : G_3 \rightarrow G_1$ e $h_2 : G_3 \rightarrow G_2$ que são equivalências de homotopia.

Grupos topológicos são casos especiais de H-espaços (def. no §1). Os morfismos entre tais espaços são definidos (ver §1) em termos de homotopia, o mesmo se dando em particular, com as equivalências. O resultado principal do presente trabalho, expresse nos Teoremas (B) e (B') do Capítulo II, diz essencialmente que, para grupos topológicos suficientemente lisos uma H-equivalência não é menos restritiva que uma equivalência de Milnor definida acima.

O Capítulo I é dedicado a uma breve exposição (sem demonstrações) dos principais resultados e construções de que necessitamos para demonstrar os teoremas do presente trabalho. Lança-se uma vista ligeira sobre H-espaços e seus morfismos, terminologia de homotopia e fibrados, construção de Milnor, construção de Dold e Lashof e o clássico teorema de Samelson (5.1).

No Capítulo II se encontram : no §6 a construção de uma aplicação fibrada entre fibrados principais ∞ -universais e no §7 os principais resultados do trabalho. A dificuldade técnica na construção em questão é que se parte de um H-morfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ entre CW-grupos, que não precisa ser um homomorfismo. O resultado é expresso no seguinte teorema, em cuja demonstração estão concentradas as principais dificuldades técnicas deste trabalho.

(6.21) TEOREMA (A). Seja $\varphi: G \rightarrow G'$ um H-morfismo entre CW-grupos G e G' (já supondo $\varphi(e) = e'$), então existe uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \longrightarrow & E_{\infty} & \xrightarrow{\psi} & E'_{\infty} \\
 | & & | & & | \\
 * & \longrightarrow & B_G & \xrightarrow{\psi} & B_{G'}
 \end{array}$$

ligando os respectivos fibrados universais, tal que $\psi|_G = \varphi$.

Como corolário prova-se que se $\varphi: G \rightarrow G'$ for uma H-equivalência, então a aplicação $\tilde{\psi}: B_G \rightarrow B_{G'}$ do Teorema (A) é uma equivalência de homotopia.

Este corolário e os resultados clássicos de Milnor [7] permitem agora demonstrar o seguinte.

(7.2) TEOREMA (B). Seja $\varphi: G \rightarrow G'$ uma H-equivalência entre CW-grupos G e G' . Então os grupos G e G' são equivalentes no sentido de Milnor: existe um CW-grupo \tilde{G} e homomorfismos de grupo topológico $h: \tilde{G} \rightarrow G$ e $h': \tilde{G} \rightarrow G'$ que são equivalências de homotopia.

Usando este teorema extendemos a noção de equivalência de Milnor à classe algo mais lata dos grupos topológicos cujos espaços subjacentes estão em \mathcal{W}_0 (=classe dos espaços do mesmo tipo de homotopia que algum CW-complexo enumerável). Demonstraremos em seguida uma segunda versão do Teorema (B), mais cômoda para as aplicações.

(7.5) TEOREMA (B'). Sejam G e G' grupos topológicos cujos espaços subjacentes pertencem a \mathcal{W}_0 . Se existe uma H-equivalência $\varphi: G \rightarrow G'$, então G e G' são M-equivalentes.

No Capítulo III fazemos algumas aplicações destes resultados, principiando pela classificação dos grupos topológicos que são esferas de homotopia (§8). Das três dimensões possíveis, $q = 1, 3, 7$, conforme o resultado clássico de Adams [1], só $q = 1, 3$ correspondem a grupos topológicos.

(8.1) TEOREMA I. Só existem grupos topológicos que são q-esferas de homotopia conexas para $q = 1, 3$. Estes grupos classificam-se do seguinte modo:

1) Dois grupos topológicos do tipo de homotopia de S^1 são H-equivalentes;

2) No caso de grupos que são S^3 -esferas de homotopia, há precisamente quatro pares de classes de H-equivalência. Para cada par um grupo e sua estrutura oposta estão em classes distintas.

3) A demonstração do Teorema I depende do Teorema (B') e de um resultado de J. Slifker [11], de demonstração delicada. Na observação ao fim do §8, escolhemos quatro representantes para estes pares de classe: $G_0 = S^3$ munida da estrutura de grupo de Lie dos quaternions de norma 1, e três grupos "exóticos" G_1, G_2, G_3 . Estes últimos são exemplos de grupos topológicos que tem o mesmo tipo de homotopia que um grupo de Lie, mas não são H-equivalentes a um grupo de Lie. É possível atribuir a estes grupos algum sentido geométrico?

No §9 classificamos os tipos de homotopia dos CW-complexos simplesmente conexos X tais que

$H^*(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_4]$; ver (9.1). Há precisamente quatro classes e os espaços classificadores B_{G_i} , $i = 0, 1, 2, 3$, são representantes destas quatro classes.

A última aplicação, exposta no §10, mostra que a existência de uma H-equivalência $h: \Omega X \rightarrow \Omega Y$, que é claramente uma condição necessária para que $X \simeq Y$, é também suficiente.

Capítulo I

Noções e Resultados Preliminares

§0. Notações e terminologia.

1) \approx : será usado para denotar isomorfismo entre grupos abstratos; homeomorfismo entre espaços topológicos; isomorfismo da estrutura mais rica quando se tratar de grupos topológicos ou fibrados principais.

2) \mathcal{W} : classe dos espaços que tem o mesmo tipo de homotopia que algum CW-complexo.

3) \mathcal{W}_0 : subclasse de \mathcal{W} daqueles espaços que têm o tipo de homotopia de um CW-complexo enumerável.

4) H-equivalência: ver §1.

5) HG-equivalência: um homomorfismo contínuo $h: G \rightarrow G'$ entre grupos topológicos, que seja uma equivalência de homotopia.

6) \sim : para indicar identificações na construção de espaços quocientes (não será usado no contexto homológico).

§1. H-espacos e seus morfismos.

Seja X um espaço topológico, e $e \in X$ um ponto fixado. Uma aplicação contínua $m: X \times X \rightarrow X$ diz-se uma multiplicação (com unidade e), ou também uma H-estrutura sobre X , se

$$m(e, x) = x = m(x, e) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Um espaço X munido de uma multiplicação contínua com unidade diz-se um H-espaço. Quando não houver risco de confusão de qual estrutura se trata, escreveremos simplesmente $m(x, y) = x \cdot y$. Duas multiplicações dizem-se equivalentes se m, m' : $X \times X \rightarrow X$ forem homotópicas: $m \simeq m'$. Dada uma multiplicação $m: X \times X \rightarrow X$, chama-se multiplicação oposta a m , $m^{op}: X \times X \rightarrow X$ aquela que se define por $m^{op}(x, y) = m(y, x)$. O H-espaço constituído de X munido da multiplicação oposta será denotado por X^{op} .

Um H-espaço (X, m) diz-se homotópicamente comutativo se $m \simeq m^{op}: X \times X \rightarrow X$.

Um H-espaço (X, m) diz-se homotópicamente associativo se forem homotópicas as duas seguintes aplicações

de $X \times X \times X$ em $X : (x, y, z) \mapsto m(m(x, y), z)$ extende-se a um CW-
($x, y, z) \mapsto m(x, m(y, z))$).

Por um H-morfismo de um H-espaco (X, m) num segundo espaco (X', m') entende-se uma aplicacao continua por $f: X \rightarrow X'$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{f \times f} & X' \times X' \\
 \downarrow m & & \downarrow m' \\
 X & \xrightarrow{f} & X'
 \end{array}$$

seja comutativo a menos de uma homotopia, isto e: $f \circ m \simeq m' \circ (f \times f) : X \times X \rightarrow X'$.

Um H-morfismo diz-se uma H-equivalencia se $f: X \rightarrow X'$ for uma equivalencia de homotopia; diz-se uma H-equivalencia fraca se $f: X \rightarrow X'$ for uma equivalencia fraca de homotopia (isto e, se apenas tivermos a condicao $f_{\#} : \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(X')$ e \simeq para todo $q \geq 0$).

Os exemplos mais importantes de H-espacos sao os grupos topologicos e os espacos de laços $\Omega(Y)$ (na forma em que os definiu J.C. Moore); todos estes sao associativos. Ha, no entanto, multiplicacoes homotopicamente associativas sobre a esfera S^3 que nao sao equivalentes a uma multiplicacao associativa (veja-se [4]).

No decorrer deste trabalho teremos oportunidade de considerar frequentemente H-morfismos e H-equivalencias entre grupos topologicos. A seguinte terminologia nos sera util. Se G e G' sao grupos topologicos, denomina-se uma GH-equivalencia a um homomorfismo de grupo topologico $h: G \rightarrow G'$ que seja equivalencia de homotopia entre os espacos topologicos subjacentes.

Seja (X, m) um H-espaco com unidade $e \in X$, que tomaremos como ponto-base, Y um espaco topologico com ponto-base $y_0 \in Y$. Seja $\varphi: (X, e) \rightarrow (Y, y_0)$ uma equivalencia de homotopia dos espacos com ponto-base, $\varphi': (Y, y_0) \rightarrow (X, e)$ um inverso de homotopia de φ . Definimos sobre Y uma estrutura de H-espaco, transportada pela equivalencia φ do seguinte modo. Consideremos a multiplicacao $m': Y \times Y \rightarrow Y$ definida por $m' = \varphi \circ m \circ (\varphi' \times \varphi')$. Seja $e' = y_0$; temos entao $m'(y, e') = \varphi m(\varphi'(y), e) = \varphi(\varphi'(y)) = (\varphi \varphi')(y) \simeq y$,
 $m'(e', y) = \varphi m(e, \varphi'(y)) = \varphi(\varphi'(y)) = (\varphi \varphi')(y) \simeq y$.

Se o espaço Y for razoavelmente liso (por exemplo: um CW-complexo ou um ANR) pode-se facilmente construir $m'' \simeq m'$ tal que $m''(y, e') = y = m''(e', y)$ para todo $y \in Y$. Quaisquer duas multiplicações transportadas de uma $m : X \times X \rightarrow X$ por uma equivalência φ são equivalentes sobre Y . Verifica-se facilmente que se a multiplicação original for homotopicamente associativa (respectivamente homotopicamente comutativa), o mesmo ocorre com a multiplicação transportada.

Teremos ocasião de usar algumas vezes o resultado expresso no seguinte lema:

(1.1) LEMA. Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ uma H-equivalência entre os H-espaços X e Y . Então, todo inverso de homotopia $\psi : Y \rightarrow X$ de φ é uma H-equivalência de Y em X .

Demonstração. Basta mostrar a comutatividade a menos de homotopia do diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{\varphi \times \varphi} & X \times X \\ m' \downarrow & & \downarrow m \\ Y & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

De fato, sendo φ uma H-equivalência, temos $m'(\varphi \times \varphi) \simeq \varphi \circ m$, donde $m'(\varphi \times \varphi)(\psi \times \psi) \simeq \varphi \circ m(\psi \times \psi)$. Por outro lado,

$$(\varphi \times \varphi)(\psi \times \psi) = (\varphi \psi) \times (\varphi \psi) \simeq 1_Y \times 1_Y = 1_{Y \times Y}.$$

Portanto $m' = m' \circ 1_{Y \times Y} \simeq m'(\varphi \times \varphi)(\psi \times \psi)$ que, seguida de $m'(\varphi \times \varphi)(\psi \times \psi) \simeq \varphi \circ m \circ (\psi \times \psi)$ nos dá $m' \simeq \varphi \circ m \circ (\psi \times \psi)$. Multiplicando à esquerda por ψ temos finalmente:

$$\psi \circ m' \simeq (\psi \varphi) \circ m \circ (\psi \times \psi) \simeq m(\psi \times \psi),$$

o que demonstra a \simeq -comutatividade do diagrama.

§2. Algumas construções de homotopia. Fibrados.

Fixamos a seguir algumas noções e terminologia da teoria da homotopia e dos espaços fibrados. Seja X um espaço topológico, $I = [0, 1]$. Chama-se cône sobre X ao espaço quociente $CX = I \times X / \{0\} \times X$. Representamos ^{ponto do} cone por (t, x) , observando que os pontos da forma $(0, x)$, $x \in X$, são identificados a um único ponto $\bar{0}$, denominado o vértice de CX . A aplicação $x \mapsto (1, x)$ define uma inclusão $X \subset CX$.

Sejam X e Y espaços topológicos. Denomina-se juntura de X e Y ao espaço quociente $X * Y$ da soma topológica $X + (X \times I \times Y) + Y$ com as identificações $(x, 0, y) = x$ e $(x, 1, y) = y$ para todos $x \in X, y \in Y$.

Dadas aplicações contínuas $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ define-se uma aplicação canônica

$f * g : X * Y \rightarrow X' * Y'$ por $(x, t, y) \mapsto (f(x), t, g(y))$.

Observações. 1) Se $X = \{pt\}$, $X * Y = CY =$ cône sobre Y . Se $X = \{p_1, p_2\}$, $X * Y \approx SY =$ suspensão de Y .

2) Nas construções de Milnor e Dold-Lashof, a juntura de X e Y receberá no mesmo conjunto quociente uma topologia menos fina que a topologia quociente. Por um pequeno abuso de linguagem chamaremos também de juntura de X e Y e o denotaremos igualmente por $X * Y$.

3) Para esferas, verifica-se facilmente que $S^p * S^q \approx S^{p+q+1}$.

Seja $A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Denotamos por $X \cup_f Y$ o espaço quociente da soma topológica $X + Y$ pelas identificações $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$.

Nas construções posteriores precisaremos diversas vezes do resultado expresso no seguinte lema, (para a demonstração, veja-se [5], § 3 e 4). Seja \mathcal{W} a classe dos espaços que tem o tipo de homotopia de um CW-complexo.

(2.1) LEMA. Seja X um espaço tal que $\pi_0(X) = 0$ e $\pi_q(X)$ são grupos enumeráveis para todo $q > 0$. Então existe um políedro localmente finito X' e uma equivalência fraca de homotopia $f : X' \rightarrow X$. Se $X \in \mathcal{W}$, então f é equivalência de homotopia.

Observação: O políedro conexo X' tem número enumerável de células.

Fibrados. Dentre as várias noções de fibração existentes, nos restringiremos neste trabalho ao emprego de duas: fibrações localmente triviais com grupo estrutural no sentido de [12] e as fibrações de Hurewicz.

Por um fibrado principal E de grupo estrutural G (= grupo topológico) entende-se um espaço topológico E onde G opera continuamente $E \times G \rightarrow E$ sem pontos fixos satisfazendo às seguintes condições: 1) a relação de equi-

valência definida por G em E tem um gráfico C fechado em $E \times E$; para todo ponto $(x, y) \in C$ existe um e um único $g \in G$ tal que $x.g = y$ e a aplicação $u : C \rightarrow G$ definida por $u(x, y) = g$ é contínua sobre C ; 2) a base $B = E/G$ recebe a topologia quociente e a projeção canônica $p : E \rightarrow B$ é localmente trivial : para todo $b \in B$ existe uma vizinhança U de b em B e um homeomorfismo $\phi_U : B \times G \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \phi_U(b, g) = b \quad \forall b \in B, g \in G$. Como é bem conhecido, esta definição é equivalente a de [12], §8.

Para quaisquer dos tipos de fibração fixaremos a seguinte terminologia. Dados duas fibrações $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$, dizemos que uma aplicação contínua $f : E \rightarrow E'$ é uma aplicação fibrada se existe uma aplicação contínua $\bar{f} : B \rightarrow B'$ que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array} .$$

Isto é, $p' \circ f = \bar{f} \circ p$. Diz-se que \bar{f} é induzida por f e que f cobre \bar{f} . Observe que f leva fibra em fibra, mas não precisa ser um homeomorfismo entre as respectivas fibras, nem mesmo uma equivalência de homotopia.

Seja $f_0 : E \rightarrow E'$ uma aplicação fibrada e $f_t : E \rightarrow E'$ uma homotopia de f_0 ; f_t diz-se uma homotopia vertical se $p f_t(z) = p f_0(z)$, $0 \leq t \leq 1$ e todo $z \in E$. Nesta homotopia, a deformação de cada ponto da imagem se dá ao longo da fibra de E' à qual pertence o ponto.

Seja $F : E \times I \rightarrow E'$ uma homotopia cobrimdo uma homotopia $f : B \times I \rightarrow B'$, i.é. $f_t(p(z)) = p' F_t(z)$, para todo $z \in E$, $0 \leq t \leq 1$. F_t diz-se estacionária com f_t se $f_t(b)$ for constante num certo intervalo $t \in J \subset I$, então $F_t(z)$ é constante para todo $z \in p^{-1}(b)$ e $t \in J$.

§3. Construção de Milnor.

Nos clássicos trabalhos [6] e [7], Milnor introduziu duas construções que chamaremos a construção direta e a construção inversa, respectivamente. A primeira construção parte de um grupo topológico G qualquer e constrói um fibrado principal universal $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$, enquanto

a construção inversa parte de um complexo simplicial geométrico enumerável X (com a topologia fraca) e constroí um grupo topológico \tilde{G} e um fibrado principal universal $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$ de base X . Esboçaremos rapidamente as principais propriedades destas construções. Para as demonstrações, veja-se [6] e [7].

(A) A construção direta. Seja G um grupo topológico; o espaço total E_G do fibrado principal é definido por um variante da operação juntura do seguinte modo. Seja $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ os inteiros naturais > 0 . $E_G = G \circ G \circ G \dots$ (um número enumerável de vezes); um ponto $z \in E_G$ é uma família $z = (t_i x_i)_{i \in N}$, $x_i \in G$, $t_i \in I$, sendo $(t_i)_{i \in N}$ uma família quase nula tal que $\sum_i t_i = 1$, havendo ainda as seguintes identificações: $(t_i x_i) = (t'_i x'_i) \Leftrightarrow t_i = t'_i$ para todo i , e $x_i = x'_i$ para todo i tal que $t_i > 0$. A ação do grupo à direita $E_G \times G \rightarrow E_G$ é definida por $((t_i x_i)_{i \in N}, y) \mapsto (t_i (x_i y))_{i \in N}$.

Consideremos as chamadas "funções coordenadas":

$$t_k: E_G \rightarrow [0, 1], \quad (t_i x_i)_{i \in N} \mapsto t_k$$

$$e \quad x_k: t_k^{-1}([0, 1]) \rightarrow G, \quad (t_i x_i)_{i \in N} \mapsto x_k;$$

$t_k > 0$ na última definição é necessário em vista das identificações feitas quando $t_k = t'_k = 0$. Munimos E_G da topologia menos fina que torna simultaneamente contínua todas as "aplicações coordenadas". Se X é um espaço topológico qualquer, vê-se imediatamente que uma aplicação $f: X \rightarrow E_G$ é contínua se e somente se $t_i \circ f$ e $x_i \circ f$ forem contínuas, as últimas onde definidas. Seja $B_G =$ espaço quociente de E_G pela ação de G , $p: E_G \rightarrow B_G$ a aplicação quociente.

Seja $E_n \subset E_G$ o subespaço dos $(t_i x_i)_{i \in N}$ tais que $t_i = 0$ se $i > n$, B_n o quociente de E_n pela ação de G , $p_n: E_n \rightarrow B_n$ a projeção correspondente. E_1 se identifica trivialmente com G ; temos um diagrama "escada" comutativo (onde as flechas horizontais são inclusões):

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_G \\ \downarrow & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_3 & & & & \downarrow p \\ * & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_G \end{array}$$

Milnor prova [7] que cada $G \rightarrow E_n \xrightarrow{P_n} B_n$ é um fibrado principal localmente trivial e n -universal, enquanto $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ é um fibrado principal, localmente trivial ∞ -universal. Lembremos que B_G é denominado um espaço classificador para o grupo topológico G .

(B) A construção inversa. Um grupo topológico G diz-se um CW-grupo se: 1) o espaço subjacente de G é um CW-complexo enumerável; 2) para este CW-complexo, a multiplicação $G \times G \rightarrow G$ e a inversão $y \mapsto y^{-1}$ de $G \rightarrow G$ são aplicações celulares (isto é, levam n -esqueleto em n -esqueleto para todo $n \geq 0$).

Na construção inversa, Milnor [6] associa a cada complexo simplicial, conexo, enumerável X (munido da topologia fraca) um CW-grupo \tilde{G} , que tem por elemento neutro um vértice, e um fibrado principal ∞ -universal $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$ de base X .

Observação: Se a construção direta fôr aplicada a um CW-grupo G , prova-se ([7], p.435) que todos os espaços nas fibrações $p_n: E_n \rightarrow X_n$, bem como na fibração ∞ -universal

$p: E_\infty \rightarrow X_\infty$, são CW-complexos. As principais propriedades das construções de Milnor são resumidas nas seguintes proposições: (veja-se [6], [7] para os detalhes)

(3.1) PROPOSIÇÃO. Seja X um complexo simplicial, conexo, enumerável, $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$ o fibrado principal ∞ -universal da construção inversa. Se Y é um espaço topológico e $f: Y \rightarrow X$ uma equivalência de homotopia, então a imagem inversa $f^*(\tilde{E}, X, \tilde{G})$ do primeiro fibrado por f é um fibrado principal ∞ -universal de base Y e grupo \tilde{G} .

Seja $B = (E, X, G)$ um fibrado principal de grupo G base X . Suponha que ele seja descrito por um sistema de transformações de coordenadas $g_{ij}: V_i \cap V_j \rightarrow G$, sendo (V_i) uma cobertura aberta de X por vizinhanças coordenadas. Então todo homomorfismo contínuo $h: G \rightarrow G'$ induz um fibrado de base X e grupo G' , cujas transformações, de coordenadas são $g'_{ij} = h \circ g_{ij}: V_i \cap V_j \rightarrow G'$.

(3.2) PROPOSIÇÃO. Seja $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$, onde X é complexo simplicial conexo, enumerável, o fibrado principal ∞ -universal que resulta da construção inversa. Então qualquer fibrado principal B de base X e grupo G é induzido por um homomorfismo contínuo $h: \tilde{G} \rightarrow G$.

(3.3) PROPOSIÇÃO. Seja X e $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$ como na Prop.(3.2). Se X é base de um segundo fibrado principal ∞ -universal de grupo G , existe um homomorfismo contínuo $h : \tilde{G} \rightarrow G$ tal que $h_{\#} : \pi_q(\tilde{G}) \approx \pi_q(G)$ para todo $q \geq 0$; se $G \in \mathcal{W}$, h é ainda uma equivalência de homotopia.

Milnor define para CW-grupos enumeráveis uma relação de equivalência [7] do seguinte modo: dois CW-grupos enumeráveis dizem-se equivalentes, se existe um terceiro CW-grupo enumerável e homomorfismos contínuos $h_1 : G_3 \rightarrow G_1$, $h_2 : G_3 \rightarrow G_2$ que são equivalências de homotopia.

(3.4) PROPOSIÇÃO. Todo CW-complexo, conexo enumerável X é espaço classificador de algum CW-grupo enumerável G . Um segundo CW-grupo enumerável G' admite o mesmo espaço classificador $X \Leftrightarrow G'$ é equivalente à G no sentido de Milnor.

Lembremos que $\sigma : y \mapsto y^{-1}$ é um isomorfismo do grupo topológico G sobre G^{OP} (= grupo topológico com a estrutura oposta de G).

(3.5) Os espaços classificadores de G e G^{OP} são homeomorfos.

De fato, $\sigma : G \approx G^{OP}$ induz $\sigma_{\infty} : E_G \xrightarrow{\approx} E_{G^{OP}}$ definido por $\sigma_{\infty}(t_i x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (t_i \sigma(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ que satisfaz à condição $\sigma_{\infty}(z \cdot y) = \sigma_{\infty}(z) \cdot \sigma(y)$, $\forall z \in E_G$ e $\forall y \in G$.

Por passagem ao quociente obtemos o homeomorfismo $\bar{\sigma}_{\infty} : B_G \approx B_{G^{OP}}$

§4. A construção de Dold e Lashof.

A construção de Dold e Lashof [2] (que abreviaremos "construção D-L"), generaliza para H-espços associativos, a construção direta de Milnor. Não obstante o fato de que para grupos topológicos as duas construções são essencialmente equivalentes (mais precisamente: os estágios finitos são G -isomórficos), a construção D-L é mais apropriada para as construções que deveremos fazer no Cap.II.

Seja $G \rightarrow E \xrightarrow{P} B$ um fibrado principal de grupo G , $\mu : E \times G \rightarrow E$ a ação do grupo estrutural. Consideremos o seguinte diagrama de identificações

$$\begin{array}{ccccc}
 CE \times G & + & E & \longrightarrow & CE \times G \cup_{\mu} E = \widehat{E} \\
 \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \widehat{p} \\
 CE & + & B & \longrightarrow & CE \cup_p B = \widehat{B}
 \end{array}$$

com a ressalva que a topologia de \widehat{E} e \widehat{B} será em geral menos fina que a topologia quociente. Sejam $z \in E$, $0 \leq t \leq 1$, $y \in G$; um ponto de CE é representado por (t, z) , sendo os pontos da forma $(0, z)$ identificados a um único ponto $\bar{0}$ (vértice do cone). Um ponto de E é representado por $\zeta = ((t, z), y)$; impõe-se as seguintes identificações: $((0, z), y) \sim (\bar{0}, y)$ e $((1, z), y) \sim z \cdot y$ para todo $z \in E$, $y \in G$. De modo análogo às da construção de Milnor, definem-se as seguintes "funções coordenadas":

$$(4.1) \quad \begin{array}{ll}
 t : \widehat{E} \rightarrow [0, 1], & ((t, z), y) \mapsto t \\
 (zy) : t^{-1}(]0, 1]) \rightarrow E, & ((t, z), y) \mapsto zy \\
 y : t^{-1}(]0, 1[) \rightarrow G, & ((t, z), y) \mapsto y \\
 z : t^{-1}(]0, 1[) \rightarrow E, & ((t, z), y) \mapsto z
 \end{array}$$

\widehat{E} é munido da topologia menos fina que torna contínua as "funções coordenadas".

Define-se uma inclusão $E \subset \widehat{E}$ por $z \mapsto ((1, z), e)$; esta inclusão é homotópica a uma constante, sendo a homotopia dada por $E \times I \rightarrow \widehat{E}$, $(z, s) \mapsto ((s, z), e)$. Para $s = 1$ temos a inclusão dada, para $s = 0$, $E \times 0 \rightarrow (\bar{0}, e)$. A aplicação $y \mapsto ((0, z), y) = (\bar{0}, y)$ define a inclusão de G sobre uma fibra de \widehat{E} . A base é topologizada de modo análogo. Um ponto de $B = CE \cup_p B$ é representado por (t, z) com a identificação $(1, z) \sim p(z) \in B$. Introduce-se as seguintes funções coordenadas:

$$(4.2) \quad \begin{array}{ll}
 t : \widehat{E} \rightarrow [0, 1], & (t, z) \mapsto t \\
 z : t^{-1}(]0, 1[) \rightarrow E, & (t, z) \mapsto z \\
 p(z) : t^{-1}(]0, 1]) \rightarrow B, & (t, z) \mapsto p(z)
 \end{array}$$

Coloca-se em \widehat{B} a topologia menos fina que torna contínua as "funções coordenadas" (4.2). A inclusão $B \subset \widehat{B}$, $\bar{z} \mapsto (1, z)$, onde $z \in p^{-1}(\bar{z})$ é claramente contínua. Temos pois uma inclusão de fibrados

$$\begin{array}{ccc}
 E & \longrightarrow & \widehat{E} \\
 \downarrow p & & \downarrow \widehat{p} \\
 B & \longrightarrow & \widehat{B}
 \end{array}$$

sendo $E \simeq 0$ em \hat{E} ; a projeção $\hat{p}: \hat{E} \rightarrow \hat{B}$ é definida por $\hat{p}: ((t, z), y) \mapsto (t, z)$ e a ação do grupo $\hat{E} \times G \rightarrow \hat{E}$ por $(\zeta, y') = (((t, z), y), y') \mapsto ((t, z), yy')$.

Prova-se que partindo de um fibrado principal a construção $G \rightarrow \hat{E} \xrightarrow{\hat{p}} \hat{B}$ é de novo um fibrado principal com grupo estrutural G .

Iterando a construção a partir da fibração inicial $E_1 = G \rightarrow *$ e fazendo $\hat{E}_n = E_{n+1}$, $\hat{B}_n = B_{n+1}$, obtém-se um diagrama infinito, onde as flechas horizontais são inclusões:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow E_\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow B_G \end{array}$$

$G \rightarrow E_\infty \rightarrow B_G$ é um fibrado principal ∞ -universal de grupo estrutural G .

Para compararmos as construções de Milnor e de Dold e Lashof estabelecemos primeiramente um isomorfismo entre as duas formas da operação juntura. Seja $G \rightarrow E \rightarrow B$ um fibrado principal, $t_0, t_1, t \in I$ com $t_0 + t_1 = 1$. Um G -isomorfismo $G * E \rightarrow G \circ E$ é dado por $(y, t, z) \mapsto (ty, (1-t)z)$, cujo inverso $G \circ E \rightarrow G * E$ é $(t_0 y, t_1 z) \mapsto (y, t_1 z)$. Definindo a operação de G em $G * E$ por $((y, t, z), y') \mapsto (yy', t, zy')$ e análogamente em $G \circ E$, vê-se se tratar de um G -isomorfismo.

Está verificado em ([2], p.297) que no caso de um grupo topológico, os respectivos estágios finitos nas construções de Milnor e Dold e Lashof são isomórficos como fibrados principais. Convencionamos aqui topologizar o fibrado ∞ -universal $G \rightarrow E_\infty \rightarrow B_G$ de D-L com a topologia de Milnor (limite indutivo).

Explicitamos abaixo o G -isomorfismo entre $G * E$ e \hat{E} , que precisaremos nas construções do próximo capítulo. Seja $G \rightarrow E \rightarrow B$ um fibrado principal de grupo estrutural G , $\mu: E \times G \rightarrow E$ a ação do grupo G . Consideremos $\hat{E} = (CE \times G) \cup_\mu E$ e definimos um G -isomorfismo $\hat{f}: \hat{E} \rightarrow G * E$ por

$$\left\{ \begin{array}{l} ((t, z), y) \mapsto (y, t, zy) \\ z \mapsto (y, 1, z) = z \end{array} \right.$$

As identificações são obviamente respeitadas, pois

$$zy \sim ((1, z), y) \mapsto (y, 1, zy) \sim zy,$$

e define-se pois uma aplicação contínua \hat{f} ; esta comuta com a operação de G : se $\zeta = ((t, z), y)$

$$((t,z),y)y' = ((t,z),yy') \mapsto (yy',t,zyy') = (y,t,zy) \cdot y'$$

isto é, $\hat{f}(\zeta \cdot y') = \hat{f}(\zeta) \cdot y'$. Verifica-se facilmente que $f' : G * E \rightarrow E$ dada por $(y,t,z) \mapsto ((t,zy^{-1}),y)$ é contínua e inversa de $\hat{f} : \hat{f} \circ f' = 1, f' \circ \hat{f} = 1$.

Dado um homomorfismo contínuo $h : G \rightarrow G'$ de grupos topológicos, h induz uma sequência de aplicações fibradas $h_n : E_n \rightarrow E'_n$ entre os respectivos estágios das construções D-L para G e G' respectivamente, tais que $h_n(z \cdot y) = h_n(z) \cdot h(y)$, para todo $z \in E_n, y \in G$. (Por exemplo, $h_2 : G * G \rightarrow G' * G'$ define-se como $h_2(y,t,y') = (h(y), t, h(y'))$) Temos assim um diagrama "escada" comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_\infty \\ h \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & & & h_\infty \downarrow \\ G' & \longrightarrow & E'_2 & \longrightarrow & E'_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E'_\infty \end{array} .$$

Sendo os $h_n : E_n \rightarrow E'_n$ aplicações fibradas, induzem por sua vez aplicações $\bar{h}_n : B_n \rightarrow B'_n, n=2,3,\dots,\infty$.

§5. H-equivalências de SAMELSON.

Precisaremos do seguinte resultado clássico de H. Samelson [9] que, em certo sentido foi o ponto inicial das investigações que comparam grupos topológicos com espaços de laços e mais geralmente com H-espacos.

(5.1) PROPOSIÇÃO. Seja $G \rightarrow E \rightarrow B$ um fibrado principal com grupo estrutural G . Correspondendo a uma contração de E , existe um H-morfismo $h : G \rightarrow \Omega(B)$ que é uma equivalência fraca de homotopia.

Observações. 1) Se $G \rightarrow E \rightarrow B$ é ∞ -universal, i.e.

$\pi_q(E) = 0 \quad \forall q \geq 0$, e $E \in \mathcal{W}$ então E é contraível e (5.1) se aplica.

2) Se $B \in \mathcal{W}_0$ (= espaços \simeq CW-complexos enumeráveis) então $h : G \rightarrow \Omega(B)$ é uma H-equivalência.

H-equivalência entre CW-grupos.

§6. Construção fundamental.

Sejam G e G' CW-grupos, $\varphi: G \rightarrow G'$ um H-morfismo. Temos então um diagrama homotópicamente comutativo:

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\varphi \times \varphi} & G' \times G' \\ m \downarrow & & \downarrow m' \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array} ,$$

sendo m e m' as multiplicações dos respectivos grupos. Os elementos neutros $e \in G$, $e' \in G'$ são vértices das estruturas celulares e serão usados como ponto-base toda vez que dêles se necessite; assim $\pi_q(G) = \pi_q(G, e)$, etc. Sem perda de generalidade, podemos supor $\varphi(e) = e'$; caso contrário, bastaria usar a propriedade da extensão das homotopias para obter uma φ homotópica à primeira e satisfazendo à condição em questão. A nova φ satisfaria igualmente à condição $m'(\varphi \times \varphi) \simeq \varphi \circ m$ do diagrama (6.1). Doravante suporemos que φ já satisfaça à condição $\varphi(e) = e'$; temos então as seguintes identidades: para todo $x \in G$.

$$\varphi(xe) = \varphi(ex) = \varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(x) .$$

Observações. 1) Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente $m(x, y) = x \cdot y$; no caso de um fibrado principal, $\mu(\zeta, y) = \zeta \cdot y$, onde $\mu: E \times G \rightarrow E$ é a ação do grupo;

2) Lembremos que todo CW-grupo tem como espaço subjacente um CW-complexo enumerável. Logo o produto cartesiano $G \times G$ é um CW-complexo (enumerável) em relação à estrutura celular natural do produto.

Dado um H-morfismo $\varphi: G \rightarrow G'$, definimos uma aplicação contínua $\gamma: G \times G \rightarrow G'$ pondo

$$\gamma(x, y) = (\varphi(xy))^{-1} \varphi(x) \varphi(y) .$$

Temos, pois a seguinte identidade para todo $x, y \in G$:

$$(6.2) \quad \varphi(x \cdot y) \cdot \gamma(x, y) = \varphi(x) \varphi(y) .$$

Seja $f_t: \varphi \circ m \simeq m' \circ (\varphi \times \varphi)$ a homotopia do diagrama (6.1), i.e.: $f_0(x, y) = \varphi(xy)$, $f_1(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

(6.3) LEMA. $\gamma: G \times G \rightarrow G'$ é homotópica à aplicação constante $G \times G \rightarrow \{e'\}$.

Demonstração. Basta fazer $\gamma_t(x,y) = (f_{1-t}(x,y))^{-1} \varphi(x) \varphi(y)$. Temos uma aplicação contínua $G \times G \times I \rightarrow G'$ tal que

$\gamma_0(x,y) = (\varphi(x)\varphi(y))^{-1} \varphi(x)\varphi(y) = e'$ para todo $x,y \in G$ e $\gamma_1(x,y) = (\varphi(xy))^{-1} \varphi(x)\varphi(y) = \gamma(x,y)$, por definição.

Observemos que $\gamma_1 = \gamma$ goza ainda das seguintes propriedades:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \gamma_1(x,e) &= (\varphi(xe))^{-1} \varphi(x) e' = \varphi(x)^{-1} \varphi(x) = e' \\ \gamma_1(e,y) &= (\varphi(ey))^{-1} \varphi(e) \varphi(y) = \varphi(y)^{-1} \varphi(y) = e' \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x,y \in G$.

Aproveitando um artifício de Samelson [9], podemos ligar γ_0 a γ_1 por uma homotopia que preserve as condições (6.4).

(6.5) LEMA. Existe uma homotopia $\bar{\gamma}_t: \gamma_0 \simeq \gamma_1$ tal que $\bar{\gamma}_t(x,e) = e' = \bar{\gamma}_t(e,x)$ para todo $x \in G$ e $0 \leq t \leq 1$.

Demonstração. Primeiro define-se $\gamma'_t(x,y) = \gamma_t(x,y) \gamma_t(e,e)^{-1}$; verifica-se imediatamente que $\gamma'_0 = \gamma_0$ e $\gamma'_1 = \gamma_1$ e que $\gamma'_t(e,e) = e'$, $0 \leq t \leq 1$. Basta agora definir

$$\bar{\gamma}_t(x,y) = \gamma'_t(x,e)^{-1} \gamma'_t(x,y) \gamma'_t(e,y)^{-1},$$

a qual, verifica-se sem dificuldade, satisfaz às condições do Lema.

Observação. Usando a homotopia do Lema (6.5), podemos definir uma homotopia $\bar{f}_t: \varphi(x,y) \simeq \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ tal que $\bar{f}_t(x,e) = \varphi(x) = \bar{f}_t(e,x)$ para todo $x \in G$ e $0 \leq t \leq 1$.

Basta definir $\bar{f}_t(x,y) = \varphi(x)\varphi(y) \bar{\gamma}_{1-t}(x,y)^{-1}$.

Dados dois CW-grupos G e G' e um H-morfismo $\varphi: G \rightarrow G'$, consideremos a construção $D=L$ (§4) para o grupo G :

$$(6.6) \quad \begin{array}{ccccccc} G & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_\infty \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & P_2 & \downarrow & P_3 & \downarrow & & & P & \downarrow \\ * & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_G \end{array}$$

e um diagrama análogo para o grupo G' . O principal objetivo d'êste \S é construir uma aplicação fibrada $\psi: E_\infty \rightarrow E'_\infty$ que prolonga o H -morfismo φ , isto é, $\psi|_G = \varphi$. A construção de ψ será feita indutivamente sobre os níveis finitos das respectivas construções D-L, obtendo-se uma sequência de aplicações fibradas

$$(6.7) \quad \begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\psi_n} & E'_n \\ p_n \downarrow & & \downarrow p'_n \\ B_n & \xrightarrow{\bar{\psi}_n} & B'_n \end{array}$$

tais que $\psi_n|_{E_{n-1}} = \psi_{n-1}$ e $\bar{\psi}_n|_{B_{n-1}} = \bar{\psi}_{n-1}$ para todo n . A construção, que é algo longa, será dividida em diversos passos.

1º passo. Partimos das fibrações principais triviais

$$E_1 = G \rightarrow * \quad \text{e} \quad E'_1 = G \rightarrow *', \quad \text{e} \quad \text{definimos} \quad \psi_1 = \varphi: G \rightarrow G'.$$

Vamos construir uma aplicação fibrada $(\psi_2, \bar{\psi}_2)$ definida no fibrado $p_2: \hat{G} \rightarrow SG$ a valores no fibrado $p'_2: G' \rightarrow SG'$, isto é, de modo a tornar comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E_2 = \hat{G} & \xrightarrow{\psi_2} & \hat{G}' = E'_2 & & \\ \downarrow & p_2 \downarrow & \downarrow & p'_2 \downarrow & \downarrow \\ B_2 = SG & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & SG' = B'_2 & & \end{array}$$

Definições de ψ_2 e $\bar{\psi}_2$. Lembremos que $G = (CG \times G) \cup_m G$ e para tornar mais clara a definição, consideremos o diagrama das identificações

$$\begin{array}{ccccccc} CG \times G & + & G & \longrightarrow & (CG \times G) \cup_m G & = & \hat{G} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 = p_1 & & \downarrow p_2 \\ CG & + & \{*\} & \longrightarrow & CG \cup_{p_1} \{*\} & = & SG \end{array},$$

lembrando que $((1, y), y') \sim yy'$. Sobre $G = E_1$, definimos

$\bar{\psi}_2(*) = *'$ e $\psi_2|_G = \psi_1 = \varphi$. Sobre o produto com o cône, as funções são definidas separadamente sobre duas faixas.

Para $0 \leq t \leq 1/2$, definimos ψ_2 e $\bar{\psi}_2$ por:

$$\begin{array}{ccc} ((t, y), y') & \xrightarrow{\psi_2} & ((2t, \varphi(y)), \varphi(y')) \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow \hat{p}' \\ (t, y) & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & (2t, \varphi(y)) \end{array}$$

onde $y, y' \in G$.

Para $1/2 \leq t \leq 1$ fazemos a definição por

$$\begin{array}{ccc} ((t, y), y') & \xrightarrow{\psi_2} & ((1, \varphi(y)), \varphi(y') \gamma_{2t-1}(y, y')^{-1}) \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow \hat{p}' \\ (t, y) & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & (1, \varphi(y)) \end{array}$$

Sobre cada uma das faixas as funções são contínuas; basta observar que compondo com as "funções coordenadas" de (4.1), (4.2) obtêm-se funções contínuas. Para $t = 1/2$, $\gamma_{2t-1}(y, y')^{-1} = \gamma_0(y, y')^{-1} = e'$, quaisquer que sejam $y, y' \in G$. Logo, as aplicações definidas nas duas faixas $0 \leq t \leq 1/2$ e $1/2 \leq t \leq 1$ coincidem sobre a parte comum definida por $t = 1/2$.

Para $t = 1$, $\gamma_{2t-1}(y, y') = \gamma_1(y, y') = \gamma(y, y')$; levando-se em conta (6.2), vê-se que

$$\varphi(yy') = \varphi(y)(\varphi(y')\gamma(y, y')^{-1}).$$

Vemos então que são respeitadas as identificações nas definições de G e G' respectivamente. De fato, $((1, y), y') \sim yy' \in G$, e aplicando ψ_2 , $\psi_2((1, y), y') = ((1, \varphi(y)), \varphi(y')\gamma(y, y')^{-1}) \sim \varphi(y)\varphi(y')\gamma(y, y')^{-1} = \varphi(yy') = \psi_2(yy')$, a vista do modo que definimos ψ_2 sobre G .

Havendo verificado a continuidade de ψ_2 e $\bar{\psi}_2$, verifica-se imediatamente que $\hat{p}' \psi_2 = \bar{\psi}_2 \hat{p}$; ψ_2 é uma aplicação fibrada.

Observação. Se nos restringirmos aos pontos da forma $((0, y), y') = (\bar{0}, y')$, i.e. a fibra de $\hat{G} \rightarrow SG$ sobre o vértice $\bar{0} \in SG$, temos $\psi_2(\bar{0}, y') = (\bar{0}', \varphi(y'))$. Identificando G com esta fibra pela inclusão $G \rightarrow G$ dada por $y \mapsto (0, y)$, $\psi_2|_G = \varphi$. Note, entretanto, que esta não é a inclusão $E_1 = G \rightarrow E_2$, pois E_1 identifica-se com a fibra sobre $*$, o outro "vértice" de SG .

2º passo. Consideremos a inclusão $E_1 = G \subset E_2 = \hat{G}$. Demonstraremos agora o seguinte lema.

(6.9) LEMA. Existe uma homotopia vertical,

$$\textcircled{H}_S^2 : (E_2 - E_1) \times G \longrightarrow E_1',$$

$$\textcircled{H}_S^2(z, y'') : \psi_2(z) \varphi(y'') \simeq \psi_2(z \cdot y''),$$

que pode ser escrita sob a forma

$$\textcircled{H}_S^2(z, y'') = (\psi_2(z) \varphi(y'')) \cdot G_S^2(z, y''),$$

onde $G_S^2 : (E_2 - E_1) \times G \longrightarrow G'$ é uma função contínua.

Demonstração. Seja $z = ((t, y), y')$ $\in E_2$ e $y'' \in G$. Primeiramente calculemos a expressão de $\psi_2(z \cdot y'')$ nas duas faixas. Para $0 \leq t \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} \psi_2(z \cdot y'') &= \psi_2((t, y), y' y'') = ((2t, \varphi(y)), \varphi(y' y'')) \\ &= ((2t, \varphi(y)), \varphi(y') \varphi(y'')) \gamma_1(y', y'')^{-1} \\ &= ((2t, \varphi(y)), \varphi(y')) \cdot \varphi(y'') \gamma_1(y', y'')^{-1} \\ &= \psi_2(z) \cdot \varphi(y'') \gamma_1(y', y'')^{-1}, \end{aligned}$$

enquanto para $1/2 \leq t < 1$,

$$\begin{aligned} \psi_2(z \cdot y'') &= \psi_2((t, y), y' y'') \\ &= ((1, \varphi(y)), \varphi(y' y'')) \cdot \gamma_{2t-1}(y, y' y'')^{-1} \\ &= ((1, \varphi(y)), \varphi(y') \varphi(y'')) \gamma_1(y', y'')^{-1} \gamma_{2t-1}(y, y' y'')^{-1} \\ &= \psi_2(z) \varphi(y'') (\gamma_1(y', y''))^{-1} \gamma_{2t-1}(y, y' y'')^{-1}. \end{aligned}$$

Para exibir a homotopia procurada, definimos

$$G_S^2(z, y'') = \begin{cases} \gamma_S(y', y'')^{-1}, & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_S(y', y'')^{-1} \gamma_{(2t-1)_S}(y, y' y'')^{-1} \end{cases}$$

se $1/2 \leq t < 1$. Para $t = 1/2$, $2t-1 = 0$ e $\gamma_0(y', y'')^{-1} = e'$; logo as definições sobre as duas faixas coincidem na parte comum, definindo uma homotopia,

$$G_s^2 : (E_2 - E_1) \times G \rightarrow G'$$

A homotopia do Lema é então dada por:

$$(6.10) \quad \mathbb{H}_s^2(z, y'') = (\psi_2(z) \varphi(y'')) \cdot G_s^2(z, y'')$$

Para $s = 0$, $G_0^2(z, y'') = e'$ para todo $z \in E_2 - E_1$, $y'' \in G$, $t \in I$. Logo

$$\mathbb{H}_0^2(z, y'') = \psi_2(z) \varphi(y'')$$

Para $s = 1$, $G_1^2(z, y'')$ foi expressamente definida (compare com os cálculos que precedem a definição) para que

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_1^2(z, y'') &= (\psi_2(z) \varphi(y'')) \cdot G_1^2(z, y'') \\ &= \psi_2(z \cdot y'') \end{aligned}$$

A verticalidade da homotopia é óbvia em vista da fórmula (6.10).

3º passo. Definir uma aplicação fibrada $\psi_3 : E_3 \rightarrow E_3'$ tal que $\psi_3|_{E_2} = \psi_2$.

Lembremos que $B_3 = \hat{B}_2 = CE_2 \cup_{p_2} B_2$ e

$B_3' = \hat{E}_2' = CE_2' \cup_{p_2'} B_2'$ e comecemos por definir uma aplicação contínua $\bar{\psi}_3 : B_3 \rightarrow B_3'$ do seguinte modo:

$$(6.11) \quad \bar{\psi}_3 : \begin{cases} (t, z) \mapsto (t, \psi_2(z)) \\ z \in B_2 \mapsto \bar{\psi}_2(z) \end{cases}$$

Para $t = 1$, $\bar{\psi}_3(1, z) = (1, \psi_2(z)) \sim p_2' \psi_2(z) = \bar{\psi}_2(p_2 z) = \bar{\psi}_3(p_2(z))$

usando-se a comutatividade de (6.8). Logo a definição de $\bar{\psi}_3$ é compatível com as identificações e define uma função contínua $\bar{\psi}_3 : B_3 \rightarrow B_3'$ tal que $\bar{\psi}_3|_{B_2} = \bar{\psi}_2$.

Para definir ψ_3 partimos de uma aplicação $\Phi : E_3 \rightarrow E_3'$ que não é em geral fibrada, aplicação esta definida através do diagrama seguinte,

$$(6.12) \quad \begin{array}{ccc} G * E_2 & \xrightarrow{\varphi * \psi_2} & G' * E_2' \\ \approx \uparrow & & \downarrow \approx \\ \hat{E}_2 & \xrightarrow{\Phi} & \hat{E}_2' \end{array}$$

onde as flexas verticais são os G-isomorfismos do §4. Para estudarmos o comportamento de $\bar{\Phi}$, passamos a representá-los dos pontos no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi * \psi_2} & G' \\
 \uparrow \approx & & \downarrow \approx \\
 \hat{E}_2 & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \hat{E}'_2 \\
 \downarrow \hat{p}_2 & & \downarrow \hat{p}'_2 \\
 \hat{B}_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}_3} & \hat{B}'_2
 \end{array}$$

onde o retângulo de baixo não precisa ser comutativo. De fato temos (para $z \in E_2$, $y \in G$, $t \in I$),

$$(6.13) \quad \begin{array}{ccc}
 (y, t, zy) & \xrightarrow{\varphi * \psi_2} & (\varphi(y), t, \psi_2(zy)) \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 ((t, z), y) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & ((t, \psi_2(zy) \varphi(y)^{-1}), \varphi(y)) \\
 \downarrow \hat{p}_2 & & \downarrow \hat{p}'_2 \\
 (t, z) & \xrightarrow{\bar{\psi}_3} & (t, \psi_2(z))
 \end{array}$$

(6.14) LEMA. $\bar{\psi}_3 \circ \hat{p}_2 \simeq \hat{p}'_2 \circ \bar{\Phi} : \hat{E}_2 \longrightarrow \hat{B}'_2$ por uma homotopia que é estacionária sobre $E_2 \subset \hat{E}_2 = E_3$ e sobre a fibra $\hat{p}_2^{-1}(\bar{0})$.

Demonstração. Fazemos inicialmente duas observações sobre o comportamento de $\bar{\Phi} : \hat{E}_2 \longrightarrow \hat{E}'_2$. Se $t = 1$, isto é, no subespaço $E_2 \subset \hat{E}_2$, temos

$$zy \sim ((1, z), y) \xrightarrow{\bar{\Phi}} ((1, \psi_2(zy) \varphi(y)^{-1}), \varphi(y)) \sim \psi_2(zy) \varphi(y)^{-1} \varphi(y) = \psi_2(z \cdot y) ;$$

em outras palavras, $\bar{\Phi}|_{E_2} = \psi_2$. Para $t = 0$, isto é, na fibra $\hat{p}_2^{-1}(\bar{0})$,

$$(\bar{0}, y) = ((0, z), y) \xrightarrow{\bar{\Phi}} ((0, \psi_2(zy) \varphi(y)^{-1}), \varphi(y)) = (\bar{0}', \varphi(y)),$$

i. e., $\bar{\Phi}(\bar{0}, y) = (\bar{0}', \varphi(y))$. Para $0 \leq t \leq 1$, definimos a homotopia por

$$(6.15) \quad H_s((t, z), y) = (t, \psi_2(z) \varphi(y) G_s^2(z, y) \varphi(y)^{-1}) .$$

Levando em conta (6.10), vemos que para $0 \leq t < 1$,

$$\overline{H}_0((t,z),y) = (t, \psi_2(z)) ,$$

$$H_1((t,z),y) = (t, \psi_2(z) \varphi(y)^{-1}) .$$

No espaço B_2' , em vista da identificação $(1, z') \sim p_2'(z')$, se $t \rightarrow 1$, o ponto (t, z') tende para $p_2'(z')$. Portanto quando $t \rightarrow 1$, para todo $s, 0 \leq s \leq 1$,

$$\begin{aligned} H_s((t,z),y) &= (t, \psi_2(z) \varphi(y) G_s^2(z,y) \varphi(y)^{-1}) \rightarrow \\ &\rightarrow p_2'(\psi_2(z) \varphi(y) G_s^2(z,y) \varphi(y)^{-1}) = p_2' \psi_2(z) = \\ &= \overline{\psi}_2(p_2 z) . \end{aligned}$$

Em vista disto, definimos para $t = 1$:

$$(6.16) \quad \begin{cases} H_s((1,z),y) = \overline{\psi}_2(p_2(z)) , & 0 \leq s \leq 1 \\ H_s(z) = \overline{\psi}_2(p_2(z)) , & 0 \leq s \leq 1 . \end{cases}$$

Assim, foi definida H_s de modo contínuo sobre

$$E_3 = \widehat{E}_2 = CE_2 \times G \curvearrowright E_2 , \quad \mu : E_2 \times G \rightarrow E_2 \text{ a ação de } G \text{ em } E_2 .$$

A definição respeita a compatibilidade das identificações; de fato,

$$((1,z),y) \sim z \cdot y \in E_2 \quad e$$

$$H_s(z \cdot y) = \overline{\psi}_2(p_2(z \cdot y)) = \overline{\psi}_2(p_2 z) = H_s((1,z),y) .$$

Observe finalmente que a homotopia $H_s : \overline{\psi}_3 \circ \widehat{p}_2 \simeq \widehat{p}_2' \circ \Phi : \widehat{E}_2 \rightarrow \widehat{B}_2'$ é estacionária sobre E_2 ($t=1$) e sobre a fibra $p_2^{-1}(0)$.

Retornemos agora à construção de ψ_3 . Usaremos, entre outras coisas, um resultado bem conhecido de H. Miyazaki [8], afirmando que todo CW-complexo é paracompacto. Lembrando a observação que se segue ao item (B) do §3, na construção direta de Milnor aplicada a um CW-grupo, todos os espaços E_n, B_n são CW-complexos; logo $E_3 = \widehat{E}_2$ é paracompacto. Consideremos agora o diagrama (em geral não comutativo)

$$\begin{array}{ccc} \widehat{E}_2 & \xrightarrow{\Phi} & \widehat{E}_2' \\ \widehat{p}_2 \downarrow & & \downarrow \widehat{p}_2' \\ \widehat{E}_2 & \xrightarrow{\overline{\psi}_3} & \widehat{B}_2' \end{array}$$

A partir da homotopia construída acima e de $\bar{\Phi}$, temos o clássico diagrama para o levantamento de homotopias:

$$(6.17) \quad \begin{array}{ccc} \hat{E}_2 \times \{1\} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \hat{E}'_2 \\ \cap & & \downarrow \hat{p}'_2 \\ \hat{E}_2 \times I & \xrightarrow{H} & \hat{B}'_2 \end{array}$$

onde $H: \hat{E}_2 \times I \rightarrow \hat{B}'_2$ é a homotopia $H_s: \bar{\Psi}_3 \circ \hat{p}_2 \simeq \hat{p}'_2 \circ \bar{\Phi}$.

Aplicamos agora a forma mais forte do teorema clássico do levantamento de homotopias, devido a W. Huebsch [3], que afirma o teorema clássico de Steenrod [12], pp.50-54, supondo apenas que o espaço de partida é paracompacto e afirmando ainda que a homotopia de cobertura é estacionária toda vez que a homotopia na base o fôr.

Seja $F: \hat{E}_2 \times I \rightarrow \hat{E}'_2$ um levantamento da homotopia do diagrama (6.17), nas condições do teorema citado. Temos $F_1(z) = \bar{\Phi}(z)$, para todo $z \in \hat{E}_2$. Definimos $\psi_3(z) = F_0(z)$. Em vista da relação $\hat{p}'_2 \circ F_s = H_s$, $0 \leq s \leq 1$, concluímos que:

1) $\hat{p}'_2 \psi_3 = \bar{\Psi}_3 \circ \hat{p}_2$; em outras palavras, ψ_3 é uma aplicação fibrada cobrindo $\bar{\Psi}_3$; 2) Como o levantamento F_s é estacionário toda vez que H_s fôr, as condições do Lema (6.14) e as observações sobre $\bar{\Phi}$ logo em seguida nos permitem afirmar: i) $\psi_3|_{E_2} = \bar{\Phi}|_{E_2} = \psi_2$, portanto ψ_3 é uma extensão de ψ_2 ; ii) $\psi_3|_{p_2^{-1}(\bar{0})} = \bar{\Phi}|_{p_2^{-1}(\bar{0})}$ é da forma $(\bar{0}, y) \mapsto (\bar{0}', \varphi(y))$. Assim está concluída a construção de ψ_3 nas condições desejadas.

4º passo. O argumento de indução. A hipótese de indução será a conjunção dos seguintes enunciados:

a)_n - Suponha que se haja construído uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\psi_n} & E'_n \\ p_n \downarrow & & \downarrow p'_n \\ B_n & \xrightarrow{\bar{\psi}_n} & B'_n \end{array}$$

tal que $\psi_n|_{E_{n-1}} = \psi_{n-1}$ e $\bar{\psi}_n|_{B_{n-1}} = \bar{\psi}_{n-1}$;

b)_n - Suponha que haja uma homotopia vertical

$$(H)_S^n : (E_n - E_{n-1}) \times G \longrightarrow E_n', \quad \text{onde}$$

$$(H)_S^n : \psi_n(\zeta, y) \simeq \psi_n(\zeta) \varphi(y) \quad \text{tem a forma}$$

$$(H)_S^n(\zeta, y) = (\psi_n(\zeta) \varphi(y)) \cdot G_S^n(\zeta, y),$$

com $G_S^n : (E_n - E_{n-1}) \times G \longrightarrow G'$ contínua.

Partindo de um diagrama análogo a (6.12),

$$(6.18) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi * \psi_n} & G' \\ \approx \uparrow \hat{E}_n & & \approx \downarrow \hat{E}_n' \\ & \xrightarrow{\Phi'} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_n & & E_n' \\ & & \end{array}$$

e da Φ' assim definida e definindo $\bar{\psi}_{n+1}$ de modo análogo ao feito em (6.11), constata-se, examinando detalhadamente a construção de ψ_3 (3º passo da presente construção), que o argumento se adota passo a passo permitindo a construção de uma aplicação fibrada $\psi_{n+1}: \hat{E}_n \longrightarrow \hat{E}_n'$, prolongando ψ_n , e cobrindo a aplicação $\bar{\psi}_{n+1}: \hat{B}_n \longrightarrow \hat{B}_n'$.

Para garantir o argumento de indução será agora suficiente demonstrar que ψ_{n+1} , assim construída, satisfaz à b)_{n+1}.

(6.19) LEMA. Existe uma homotopia vertical

$$(H)_S^{n+1} : (E_{n+1} - E_n) \times G \longrightarrow E_{n+1}', \quad \text{onde}$$

$$(H)_S^{n+1} : \psi_{n+1}(\zeta', y') \simeq \psi_{n+1}(\zeta') \varphi(y') \quad \text{tem a forma}$$

$$(H)_S^{n+1}(\zeta', y') = (\psi_{n+1}(\zeta') \varphi(y')) \cdot G_S^{n+1}(\zeta', y'),$$

com $G_S^{n+1}: (E_{n+1} - E_n) \times G \longrightarrow G'$ contínua.

Demonstração. Denotemos por $\zeta' = ((t, \zeta), y)$ um ponto genérico de $\hat{E}_n = E_{n+1}$, $\zeta \in E_n$, $t \in I$, $y \in G$. Como ψ_{n+1} cobre $\bar{\psi}_{n+1}$, em $\hat{E}_n - E_n$, isto é, para os pontos tais que $t < 1$, ψ_{n+1} tem a seguinte forma: seja $\zeta \in E_n$, $0 \leq t < 1$ e $y \in G$:

$$(6.20) \quad \begin{array}{ccc} ((t, \zeta), y) & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & ((t, \psi_n(\zeta)), \sigma(t, \zeta, y)) \\ \hat{p}_n \downarrow & & \downarrow \hat{p}'_n \\ (t, \zeta) & \xrightarrow{\bar{\psi}_{n+1}} & (t, \psi_n(\zeta)) \end{array}$$

Em vista das condições nas funções coordenadas (4.1), $\sigma: (\hat{E}_n - E_n) \rightarrow G'$ deve ser uma aplicação contínua. Note que $\hat{p}_n(\hat{E}_n - E_n) = \hat{B}_n - B_n$ é um cone (aberto) contraível e que (6.20) representa uma trivialização do fibrado sobre $\hat{B}_n - B_n: \hat{p}_n^{-1}(\hat{B}_n - B_n) \approx (\hat{B}_n - B_n) \times G$.

Seja $H_s^{n+1}: \bar{\psi}_{n+1} \circ \hat{p}_n \simeq \hat{p}'_n \circ \Phi'$ a homotopia construída de modo análogo a de (6.15). Na fibra $\hat{p}_n^{-1}(\bar{0})$ temos para $0 \leq s \leq 1$

$$H_s^{n+1}(\bar{0}, y) = (0, \psi_n(\zeta) \varphi(y) G_s^n(\zeta, y) \varphi(y)^{-1}) = \bar{0}' = \text{vértice do cone de } \hat{B}_n'$$

Sendo estacionário o levantamento da homotopia, teremos de modo análogo que $\psi_{n+1}|_{\hat{p}_n^{-1}(\bar{0})} = \Phi'|_{\hat{p}_n^{-1}(\bar{0})}$ tem a

forma $\psi_{n+1}(\bar{0}, y) = (\bar{0}', \varphi(y))$. Considerando que

$$\psi_{n+1}((t, \zeta), y) = ((t, \psi_n(\zeta)), \sigma(t, \zeta, y)),$$

a última observação mostra que para $t = 0$ devemos ter $\sigma(0, \zeta, y) = \varphi(y)$, para todo $\zeta \in E_n, y \in G$.

Para $t < 1$ introduzimos a seguinte aplicação auxiliar, claramente fibrada:

$$\psi'_{n+1}((t, \zeta), y) = ((t, \psi_n(\zeta)), \varphi(y)).$$

Pondo $\zeta' = ((t, \zeta), y)$, temos a seguinte homotopia vertical

$$\Psi_s(\zeta') = ((t, \psi_n(\zeta)), \sigma((1-s)t, \zeta, y)) \text{ ligando}$$

$$\Psi_0(\zeta') = \psi_{n+1}(\zeta') \quad \text{a} \quad \Psi_1(\zeta') = \psi'_{n+1}(\zeta').$$

Por outro lado a homotopia vertical

$$\Psi'_s(\zeta', y') = (\psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y')) \cdot \chi_{1-s}(y, y')^{-1} \quad \text{é}$$

$$\text{tal que } \Psi'_0(\zeta', y') = \psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y') \quad \text{e}$$

$$\Psi'_1(\zeta', y') = \psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y').$$

Finalmente uma terceira homotopia

$$\Psi''_s(\zeta', y') = \Psi_{1-s}(\zeta') \varphi(y') \quad \text{liga}$$

$$\Psi''_0(\zeta', y') = \psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y') \quad \text{a}$$

$$\Psi''_1(\zeta', y') = \psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y').$$

A composição sucessiva das homotopias,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(\zeta', y') &\simeq \psi'_{n+1}(\zeta', y') \simeq \psi'_{n+1}(\zeta') \varphi(y') \simeq \\ &\simeq \psi_{n+1}(\zeta') \varphi(y') \end{aligned}$$

nos dá a homotopia procurada. Sendo as três homotopias verticais, o mesmo é verdadeiro da homotopia composta, que denotaremos por

$$\Theta_s^{n+1}(\zeta', y') : \psi_{n+1}(\zeta', y') \simeq \psi_{n+1}(\zeta') \varphi(y').$$

Para definir a homotopia G_s^{n+1} , referimo-nos à definição de fibrado principal no §2; seja C o gráfico da relação de G em $E_{n+1} \times E_{n+1}$ e $u: C \rightarrow G$ a função contínua que associa ao par $(\zeta'_1, \zeta'_2) \in C$ o elemento $g = u(\zeta'_1, \zeta'_2) \in G$ tal que $\zeta'_1 \cdot g = \zeta'_2$. Basta definir

$$G_s^{n+1}(\zeta', y') = u(\psi_{n+1}(\zeta') \varphi(y'), \Theta_s^{n+1}(\zeta', y')).$$

Por indução construímos agora uma sequência de aplicações fibradas

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\psi_n} & E'_n \\ \downarrow p_n & & \downarrow p'_n \\ B_n & \xrightarrow{\bar{\psi}_n} & B'_n \end{array}$$

ligando os estágios finitos das construções D-L, correspondendo aos grupos G e G' respectivamente. Estas aplica-

ções fibradas satisfazem às seguintes condições:

- 1) $\psi_n | E_{n-1} = \psi_{n-1}$ e $\bar{\psi}_n | B_{n-1} = \bar{\psi}_{n-1}$ para todo n ;
- 2) $\psi_1 = \varphi: G \rightarrow G'$ é o H-morfismo de partida.

Podemos finalmente definir uma aplicação fibrada entre os fibrados universais correspondentes,

$$\begin{array}{ccc} E_\infty & \xrightarrow{\psi} & E'_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_G & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B_{G'} \end{array}$$

fazendo $\psi | E_n = \psi_n$ e $\bar{\psi} | B_n = \bar{\psi}_n$ sobre os elementos das respectivas filtrações de E_∞ e B_G : $E_2 \subset E_3 \subset \dots \subset E_n \subset \dots \subset E_\infty$ e $B_2 \subset B_3 \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset B_G$. A construção do presente § será resumido no seguinte enunciado.

(6.21) TEOREMA (A). Seja $\varphi: G \rightarrow G'$ um H-morfismo entre CW-grupos conexos G e G' (já supondo $\varphi(e) = e'$), então existe uma aplicação fibrada

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & E_\infty & \xrightarrow{\psi} & E'_\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & B_G & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B_{G'} \end{array}$$

ligando os respectivos fibrados universais, tal que $\psi | G = \varphi$.

§7. H-equivalências entre CW-grupos.

Suponhamos agora que o H-morfismo $\varphi: G \rightarrow G'$ seja uma H-equivalência, i.é., φ é também uma equivalência de homotopia. O primeiro resultado é um corolário do Teorema (A).

(7.1) COROLÁRIO. Sejam G e G' CW-grupos e $\varphi: G \rightarrow G'$ uma H-equivalência. Então a aplicação $\bar{\psi}: B_G \rightarrow B_{G'}$ induzida conforme o Teorema (A) entre os respectivos espaços classificadores universais, é uma equivalência de homotopia.

Demonstração. Segundo se observou no §3, partindo de CW-grupos G e G' e aplicando a construção direta de Milnor, os espaços classificadores B_G e $B_{G'}$, assim obtidos são CW-complexos. Conforme um teorema clássico de Whitehead, para provar o Corolário basta mostrar que os homomorfismos induzidos nos grupos de homotopia $\bar{\psi}_\# : \pi_q(G) \rightarrow \pi_q(G')$ são isomorfismos para todo $q \geq 0$.

O Teorema (A) nos garante uma aplicação fibrada representada no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty & \xrightarrow{\psi} & E'_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_G & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B_{G'} \end{array}$$

Esta aplicação fibrada dá origem a um diagrama "escada" comutativo entre as sequências exatas de homotopia das duas fibrações:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_q(G) & \rightarrow & \pi_q(E_\infty) & \rightarrow & \pi_q(B_G) & \rightarrow & \pi_{q-1}(G) & \rightarrow & \pi_{q-1}(E_\infty) & \rightarrow \\ & & \varphi_\# \downarrow \approx & & \psi_\# \downarrow \approx & & \bar{\psi}_\# \downarrow & & \varphi_\# \downarrow \approx & & \psi_\# \downarrow \approx & \\ \dots & \rightarrow & \pi_q(G') & \rightarrow & \pi_q(E'_\infty) & \rightarrow & \pi_q(B_{G'}) & \rightarrow & \pi_{q-1}(G') & \rightarrow & \pi_{q-1}(E'_\infty) & \rightarrow \end{array}$$

sendo os $\varphi_\#$ isomorfismos porque φ é equivalência de homotopia e os $\psi_\#$ porque E_∞ e E'_∞ são a -esféricos. Aplicando o Lema dos Cinco, temos $\bar{\psi}_\# : \pi_q(B_G) \approx \pi_q(B_{G'})$

para todo $q \geq 0$, terminando assim a demonstração do Corolário.

Observação. Argumento um pouco mais complicado permite demonstrar, por indução sobre os estágios das construções D-L que, sendo $\varphi : G \rightarrow G'$ uma H-equivalência, $\psi_n : E_n \rightarrow E'_n$ e $\bar{\psi}_n : B_n \rightarrow B'_n$ são equivalências de homotopia para todo $n \geq 2$.

(7.2) TEOREMA (B). Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ uma H-equivalência entre CW-grupos G e G' . Então os grupos G e G' são equivalentes no sentido de Milnor : existe um CW-grupo \tilde{G} e homomorfismos de grupo topológico $h : \tilde{G} \rightarrow G$, $h' : \tilde{G} \rightarrow G'$ que são equivalências de homotopia.

Demonstração. De acordo com o Teorema (A), ver (6.21)), existe uma aplicação fibrada ligando os fibrados principais universais dos respectivos grupos:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_{\infty} & \xrightarrow{\psi} & E_{\infty}' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_G & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B_{G'}
 \end{array}$$

Se φ é uma H-equivalência, o Corolário (7.1) garante que $\bar{\psi} : B_G \rightarrow B_{G'}$ é uma equivalência de homotopia. Como G e G' são conexos, os espaços classificadores são simplesmente conexos, Milnor ([7], p.435) mostra que B_G e $B_{G'}$ são CW-complexos enumeráveis. Segue-se sem dificuldade que $\pi_i(B_G)$ e $\pi_i(B_{G'})$ são grupos enumeráveis para todo $i \geq 0$.

Usando o Lema (2.1) sabemos que existe então um poliedro localmente finito X e uma equivalência de homotopia $f : X \rightarrow B_G$. Aplicamos a construção inversa de Milnor (§3) para obter uma fibração principal universal $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E} \rightarrow X$ de base X e tendo como grupo \tilde{G} um CW-grupo. Seja $(E^*, X, G) = f^*(E_{\infty}, B_G, G)$ o fibrado imagem recíproca por f . Temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E^* & \xrightarrow{\psi'} & E_{\infty} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Comparando as seqüências de homotopia dos dois fibrados e levando-se em conta que f é uma equivalência de homotopia, verifica-se facilmente que

$$\psi'_{\#} : \pi_q(E^*) \approx \pi_q(E_{\infty}) = 0 \quad \text{para todo } q \geq 0.$$

Portanto E^* é a -esférico em todas as dimensões e (E^*, X, G) é ∞ -universal para o grupo G . Aplicando o teorema (3.3) de Milnor, existe um homomorfismo contínuo $h : \tilde{G} \rightarrow G$ que é equivalência de homotopia, isto é, uma HG-equivalência.

Analogamente, seja $(E^{**}, X, G') = (\bar{\psi} \circ f)^*(E_{\infty}', B_{G'}, G')$ o fibrado principal imagem recíproca por $\bar{\psi} \circ f$.

Como $\bar{\Psi} \circ f : X \rightarrow B_G$ é equivalência de homotopia, o argumento acima se aplica para mostrar que (E^{**}, X, G') é ∞ -universal para o grupo G' e, análogamente, existe uma HG-equivalência $h' : \tilde{G} \rightarrow G'$. Portanto G e G' são equivalentes no sentido de Milnor.

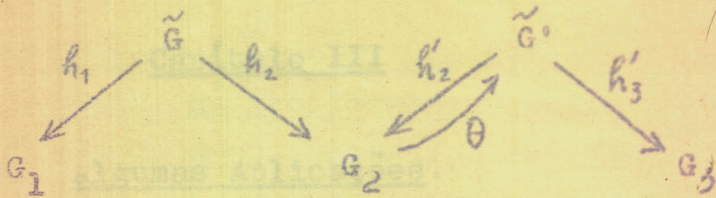
Em vista das aplicações do Capítulo III, será conveniente generalizar ligeiramente a definição de equivalência de Milnor, extendendo-a à classe dos grupos topológicos conexos $G \in \mathcal{W}_0$. Precisaremos do seguinte lema:

(7.3) LEMA. Se G é um grupo topológico conexo tal que $G \in \mathcal{W}_0$, então existe um CW-grupo \tilde{G} e um homomorfismo contínuo $h : \tilde{G} \rightarrow G$ que é equivalência de homotopia.

Demonstração. Como o espaço subjacente de G pertence a \mathcal{W}_0 , prova-se facilmente que $\pi_i(G)$ são grupos enumeráveis para todo $i \geq 0$. Como $\pi_i(B_G) \approx \pi_{i-1}(G)$ para todo $i \geq 1$, segue-se que os grupos $\pi_i(B_G)$ são enumeráveis para todo $i \geq 0$. Conforme (2.1) existe um poliedro localmente finito X e uma equivalência fraca de homotopia $f : X \rightarrow B_G$. Seja $(E^*, X, G) = f^*(E_\infty, B_G, G)$ o fibrado imagem recíproca e $G \rightarrow E^* \rightarrow X$ o fibrado ∞ -universal que resulta da construção inversa (3.3). Verifica-se que $G \rightarrow E^* \rightarrow X$ é ∞ -universal para o grupo G e, aplicando (5.3), existe um homomorfismo contínuo $h : \tilde{G} \rightarrow G$ que é equivalência de homotopia.

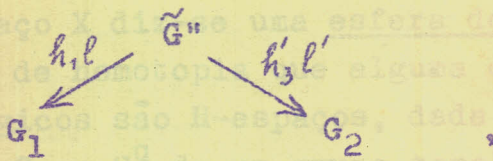
(7.4) Definição. Sejam G e G' grupos topológicos na classe \mathcal{W}_0 . Diz-se que G e G' são M-equivalentes se existe um CW-grupo \tilde{G} e duas HG-equivalências $h : \tilde{G} \rightarrow G$ e $h' : \tilde{G} \rightarrow G'$.

Em virtude do Lema (7.3), a relação é obviamente reflexiva e é, evidentemente, simétrica. Para mostrar a transitividade, suponha $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{W}_0$, G_1 M-equivalente a G_2 e G_2 M-equivalente a G_3 ; mostremos que G_1 é M-equivalente a G_3 . Por hipótese existem CW-grupos \tilde{G} e \tilde{G}' e um diagrama



sendo h_1, h_2, h_2' e h_3' HG-equivalências. Seja $\theta: G_2 \rightarrow \tilde{G}'$ um inverso de homotopia de h_2' . Conforme o Lema (1.1), θ é uma H-equivalência. Logo $\theta h_2: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ é igualmente uma H-equivalência. Aplicamos o Teorema (B) acima para concluir que existe um CW-grupo \tilde{G}'' e HG-equivalências

$$l: \tilde{G}'' \rightarrow \tilde{G} \quad \text{e} \quad l': \tilde{G}'' \rightarrow \tilde{G}', \quad \text{donde o diagrama}$$



sendo que $h_1 l$ e $h_3 l'$ são claramente HG-equivalências. Portanto G_1 e G_2 são M-equivalentes.

Esta pequena extensão da noção de equivalência de Milnor permite uma correspondente extensão do Teorema (B):

(7.5) TEOREMA (B'). Sejam G, G' grupos topológicos cujos espaços subjacentes pertencem a \mathcal{W}_0 . Se existe uma H-equivalência $\varphi: G \rightarrow G'$, então G e G' são M-equivalentes.

Demonstração. Aplicando o Lema (7.3), existem CW-grupos \tilde{G} e \tilde{G}' e HG-equivalências $h: \tilde{G} \rightarrow G$ e $h': \tilde{G}' \rightarrow G'$. Seja $\theta: G' \rightarrow \tilde{G}'$ um inverso de homotopia de h' ; sabemos que se trata de uma H-equivalência. Então $\theta \varphi h: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ é uma H-equivalência entre CW-grupos. Aplicando o Teorema (B), existe um CW-grupo \tilde{G}'' e HG-equivalências $f: \tilde{G}'' \rightarrow \tilde{G}$ e $f': \tilde{G}'' \rightarrow \tilde{G}'$. As HG-equivalências hf e $h'f'$ definem a M-equivalência afirmada.

Capítulo III

Algumas Aplicações.

§8. Classificação dos grupos topológicos que são esferas de homotopia.

Como o espaço classificador universal de um grupo topológico só está definido a menos de uma equivalência de homotopia, a classificação em questão deve ser entendida no sentido de M -equivalência (veja-se fim do §7).

Um espaço X diz-se uma esfera de homotopia se X tem o mesmo tipo de homotopia que alguma q -esfera S^q . Como grupos topológicos são H -espaços, dada uma equivalência de homotopia $G \rightarrow S^q$ de um grupo topológico G numa q -esfera, é possível transportar a H -estrutura de G para S^q por meio da equivalência de homotopia (veja-se §1), fazendo de S^q um H -espaço. O resultado clássico de J.F. Adams [1] afirma que isto só é possível nas dimensões $q = 0, 1, 3$ e 7 (sendo que S^0 não é conexa).

I.M. James [4] classificou as H -estruturas sobre as esferas de dimensão $q=1, 3, 7$, em relação à homotopia. Em todos os casos há somente um número finito de classes de homotopia de H -estruturas $S^q \times S^q \rightarrow S^q$.

Para $q = 7$, James [4] provou que nenhuma das multiplicações existentes é homotópicamente associativa. Como esta propriedade se transporta por uma equivalência de homotopia, conclui-se que não existe grupo topológico G que seja uma 7-esfera de homotopia. Restringindo-nos a grupos conexos, basta examinar os casos $q = 1, 3$.

(8.1) TEOREMA I. Só existem grupos topológicos que são q -esferas de homotopia conexas para $q = 1, 3$. Estes grupos classificam-se do seguinte modo:

- 1) Dois grupos topológicos do tipo de homotopia de S^1 são M -equivalentes;

- 2) No caso de grupos que são 3-esferas de homotopia, há precisamente quatro pares de classes de M-equivalência. Para cada par, um grupo e a estrutura oposta estão em classes distintas.

A demonstração será dividida em duas partes.

Parte 1). Seja S^1 = grupo dos números complexos de módulo 1. Se $G \rightarrow S^1$ é uma equivalência de homotopia, consideremos a estrutura transportada de G para S^1 . Segundo James ([4], Theorem (1.2)) esta é homotópica à multiplicação complexa. Logo $G \rightarrow S^1$ é uma H-equivalência entre grupos topológicos pertencentes a \mathcal{W}_0 ; aplicamos Teorema (B') para concluir que são M-equivalentes. O enunciado 1) é consequência da transitividade.

Parte 2). Examinemos agora o caso $q = 3$. James [4] mostrou que as H-estruturas homotópicamente associativas sobre S^3 dividem-se em quatro pares de classes de equivalência no sentido do §1; para cada par de classes, uma multiplicação e sua oposta estão em classes distintas, isto é: não há multiplicações homotópicamente comutativas sobre S^3 . Apenas um dos pares contem H-estruturas que são grupos topológicos: trata-se de S^3 munida da estrutura de grupo de Lie G_0 = grupo dos quaternions de norma 1. Nas outras classes James mostrou que as multiplicações homotópicamente associativas não são equivalentes a multiplicações associativas sobre S^3 .

Dado um grupo topológico G que é uma 3-esfera de homotopia, a estrutura de G é transportada por uma equivalência de homotopia $G \rightarrow S^3$ numa H-estrutura homotópicamente associativa sobre S^3 .

J.F.Slifker [11] examinou os quatros pares de estruturas homotópicamente associativas sobre a S^3 , denominando as que não são de grupo topológico de multiplicações "exóticas". Usando técnicas bastante delicadas da teoria da homotopia, Slifker mostrou que partindo de uma multiplicação "exótica" $m : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$, esta admite uma fibração universal no seguinte sentido: i) S^3 é fibra de uma fibração de Hurewicz $S^3 \rightarrow E_\infty \rightarrow B(m)$, onde E_∞ é

a-esférico em todas as dimensões e a base $B(m) \in \mathcal{W}_0^2$;
 ii) existe uma H-equivalência $\omega: (S^3, m) \rightarrow \Omega B(m)$.
 (Veja-se [11], Thm. 8.13 e pp. 354-55). Da sequência de homotopia da fibração precedente, tiramos $\pi_1(B(m)) \approx \approx \pi_{i-1}(S^3)$ para todo $i \geq 1$ e $\pi_0(B(m)) = 0$.

Aplicando (2.1), existe um poliedro localmente finito X e uma equivalência fraca de homotopia $f: X \rightarrow B(m)$. Seja $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E}_\infty \rightarrow X$ o fibrado ∞ -universal resultante da construção inversa de Milnor; $h: \tilde{G} \rightarrow \Omega X$ a H-equivalência do teorema de Samelson (5.1) e $\omega': \Omega B(m) \rightarrow (S^3, m)$ um inverso de homotopia da H-equivalência ω construída por Slifker. Sabemos que ω' é H-equivalência (Lema 1.1). A composição

$$\tilde{G} \xrightarrow{h} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega B(m) \xrightarrow{\omega'} (S^3, m)$$

fornece uma H-equivalência $\omega' \circ \Omega f \circ h$ do CW-grupo \tilde{G} na S^3 munida da estrutura "exótica" $m: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$. Há, portanto, pelo menos quatro pares de classes de grupos que são 3-esferas de homotopia (M-equivalência entre grupos na classe \mathcal{W}_0^2 claramente acarreta H-equivalência). Para mostrar que não há mais que 4 pares de classes, basta observar que se G_1 e G_2 forem 3-esferas de homotopia e as estruturas transportadas para a S^3 forem equivalentes, então G_1 e G_2 são H-equivalentes; aplicando o Teorema (B'), G_1 e G_2 são M-equivalentes.

Observações. 1) Como representantes destas quatro classes escolhemos $G_0 = S^3$ munida da estrutura de grupo de Lie dos quaternions de norma 1, e para cada um dos três pares de estruturas "exóticas" um CW-grupo, digamos G_1, G_2, G_3 que seja H-equivalente a uma das estruturas "exóticas" correspondente. Parte 2 do Teorema I pode ser expressa: se $G \simeq S^3$, existe um inteiro j , $0 \leq j \leq 3$, tal que o grupo G é M-equivalente a G_j ou a G_j^{op} .

2) É possível distinguir entre estas classes, usando-se o produto de Samelson.

§9. Classificação do tipo de homotopia dos espaços simplesmente conexos com a cohomologia de $\mathbb{P}K^\infty$.

Usando-se a sequência de Gysin aplicada à fibração $G_0 \rightarrow \mathbb{E}_\infty \rightarrow \mathbb{P}K^\infty$, onde $G_0 =$ grupo de Lie dos quaternions de norma 1, $\mathbb{P}K^\infty =$ espaço projetivo/quaterniônico de dimensão infinita, verifica-se que $H^*(\mathbb{P}K^\infty; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_4] =$ anel de polinômios sobre \mathbb{Z} gerado por um elemento u_4 de grau 4.

Seja $X \in \mathcal{W}$ um espaço tal que $\pi_0(X) = 0$ e $\pi_1(X) = 0$, cuja cohomologia (à coeficientes em \mathbb{Z}) seja da forma $H^*(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_4]$. A vista do que ocorre no caso projetivo complexo (com a condição sobre a cohomologia substituída por $H^*(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_2]$, u_2 de grau 2), onde condições análogas determinam o tipo de homotopia de X , é natural perguntar até que ponto as condições acima determinam o tipo de homotopia de X no presente caso.

A nossa resposta é a seguinte:

(9.1) TEOREMA II. Os espaços $X \in \mathcal{W}$ tais que $\pi_0(X) = 0 = \pi_1(X)$ e $H^*(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_4]$ dividem-se em precisamente quatro tipos de homotopia. Os espaços classificadores B_{G_i} , $i=0,1,2,3$ (ver Observação ao fim do §8) são representantes destas quatro classes.

Para demonstrar este teorema, precisamos de algumas considerações preliminares e de um lema. Suponha que X satisfaça às hipóteses do Teorema. Usando-se a fórmula dos coeficientes universais

$$(9.2) \quad H^q(X; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{q-1}(X), \mathbb{Z})$$

prova-se facilmente

$$(9.3) \quad H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 4j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Por outro lado, usando-se coeficientes nos corpos $k = \mathbb{Z}_p$, p primo ou $k = \mathbb{Q} =$ números racionais, temos

$$(9.4) \quad H^*(X; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[u_4] \quad \text{e} \quad H^*(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[u_4].$$

Consideremos agora a fibração clássica de Serre $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$, $\Omega X =$ espaço de laços de X . Um resultado clássico de Serre ([10], p.492) afirma que se $\pi_0(X) = 0 = \pi_1(X)$ e $H^*(X; k) \approx k[u_n]$, n par ≥ 2 e k um corpo, então $H^*(\Omega X; k) \approx \wedge(u_{n-1}) =$ algebra exterior sobre k com um gerador de grau $n-1$. Portanto para a estrutura aditiva da cohomologia de ΩX temos, $H^0(\Omega X; k) \approx H^{n-1}(\Omega X; k) \approx k$, $H^i(\Omega X; k) = 0$ se $i \neq 0, n-1$.

Demonstraremos agora o seguinte lema.

(9.5) LEMA. Se $X \in \mathcal{W}$, $\pi_0(X) = 0 = \pi_1(X)$ e $H^*(X; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}[u_4]$, então existe uma equivalência de homotopia $\Omega X \rightarrow S^3$.

Demonstração. Aplicando ao presente caso o resultado de Serre acima citado, vemos que $H^*(\Omega X; k) \approx H^*(S^3; k)$; jogando com coeficiente universais e os isomorfismos acima, nos casos $k = \mathbb{Q}$, ou $k = \mathbb{Z}_p$, p primo, verifica-se o isomorfismo correspondente em homologia (coeficiente \mathbb{Z}), $H_*(\Omega X; \mathbb{Z}) \approx H_*(S^3; \mathbb{Z})$. Como $\pi_1(X) = 0$, (9.3) e o teorema de Hurewicz permitem afirmar que $\pi_q(X) = 0$ se $q \leq 3$; a sequência de homotopia da fibração $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ fornece facilmente a informação: $\pi_i(\Omega X) = 0$ se $i \leq 2$. Como $H_3(X) \approx H_3(S^3) = \mathbb{Z}$, aplicando de novo o teorema de Hurewicz, concluímos que $\pi_3(\Omega X) \approx \mathbb{Z}$. Seja $\varphi: S^3 \rightarrow \Omega X$ representante de um gerador deste grupo. Verifica-se facilmente agora que $\varphi_*: H_q(S^3) \approx H_q(\Omega X)$ para todo $q \geq 0$. Sabe-se que $\Omega X \in \mathcal{W}$ e sendo ambos os espaços simplesmente conexos, segue-se de um teorema clássico de Whitehead que $\varphi: S^3 \rightarrow \Omega X$ é equivalência de homotopia.

Demonstração do Teorema II. Em vista do Lema (9.5),

$\pi_q(X) \approx \pi_{q-1}(\Omega X) \approx \pi_{q-1}(S^3)$ para todo $q \geq 1$. Conforme (2.1) existe um poliedro localmente finito X_1 e uma equivalência de homotopia $f: X_1 \rightarrow X$. Seja $\tilde{G} \rightarrow \tilde{E}_\infty \rightarrow X_1$ o fibrado universal obtido pela construção inversa de Milnor. Sendo \tilde{E}_∞ contraível, o teorema de Samelson (5.1) fornece uma H -equivalência $h: \tilde{G} \rightarrow \Omega X_1$ e $(\Omega f) \circ h: \tilde{G} \rightarrow \Omega X_1 \rightarrow \Omega X$ é uma equivalência de homotopia, que, juntamente

com o lema (9.5) implica que G é uma 3-esfera de homotopia.

Aplicamos agora a classificação do Teorema I, Parte 2). Para algum i , $0 \leq i \leq 3$, G é M -equivalente a G_i ou G_i^{OP} , digamos a G_i para fixar as idéias. Portanto existe um CW-grupo G' e HG -equivalências $h' : G' \rightarrow \tilde{G}$ e $h'' : G' \rightarrow G_i$. Passando à aplicação fibrada induzida entre os fibrados universais, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{G} & \xleftarrow{h'} & G' & \xrightarrow{h''} & G_i \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{E}_\infty & \xleftarrow{h'_\infty} & E'_\infty & \xrightarrow{h''_\infty} & E_\infty \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B_{\tilde{G}} & \xleftarrow{\bar{h}'} & B_{G'} & \xrightarrow{\bar{h}''} & B_{G_i}
 \end{array}$$

Verifica-se facilmente que $\bar{h}' : B_{G'} \rightarrow B_{\tilde{G}}$ e $\bar{h}'' : B_{G'} \rightarrow B_{G_i}$ são equivalências de homotopia, logo $B_{\tilde{G}}$ e B_{G_i} tem o mesmo tipo de homotopia. Usando [7] (Teor.5.2(2)) X_1 e $B_{\tilde{G}}$ tem o mesmo tipo de homotopia, logo $X \simeq X_1 \simeq B_{\tilde{G}} \simeq B_{G_i}$ e portanto X tem o tipo de homotopia de B_{G_i} . Para concluir a demonstração, basta lembrar a propriedade (3.5), $B_{G_i} \simeq B_{G_i^{OP}}$. Vê-se que existem precisamente quatro tipos de homotopia correspondentes aos espaços B_{G_i} , $i = 0, 1, 2, 3$.

§10. H-equivalência entre espaços de laços.

É bem conhecido que o tipo de homotopia de um espaço de laços ΩX não determina o tipo de homotopia do espaço X . Por exemplo, se G_i , $i = 0, 1, 2, 3$ denota os grupos introduzidos na Observação 1) ao fim do §8, vimos que

$\Omega B_{G_i} \simeq S^3$ para $0 \leq i \leq 3$; no entanto, se $i \neq j$ B_{G_i} e B_{G_j} não tem o mesmo tipo de homotopia (Teorema II).

Se partirmos de uma equivalência de homotopia $\varphi : X \rightarrow Y$, a aplicação induzida entre os espaços de laços $\Omega\varphi : \Omega X \rightarrow \Omega Y$ é um homomorfismo das estruturas multiplicativas e uma equivalência de homotopia. Em certo sentido, o tipo de homotopia de X depende do de ΩX e da es-

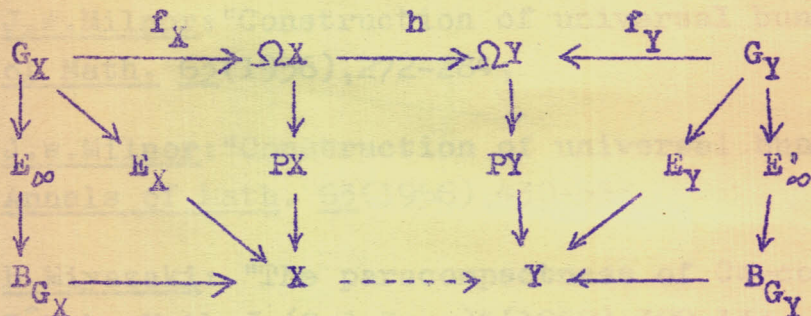
estrutura multiplicativa de ΩX .

No que se segue vamos supor que os espaços X e Y pertencem à classe \mathcal{W}_0 .

(10.1) TEOREMA III. Sejam $X, Y \in \mathcal{W}_0$ espaços conexos e simplesmente conexos. X e Y tem o mesmo tipo de homotopia se e somente se existe uma H-equivalência $h : \Omega X \rightarrow \Omega Y$.

Demonstração. Que a condição é necessária segue-se facilmente da observação que precede o teorema, sendo que neste caso a H-equivalência $h = \Omega \varphi$ é efetivamente um morfismo das multiplicações de laços.

Provemos agora que a condição aparentemente mais fraca de haver simplesmente uma H-equivalência $h : \Omega X \rightarrow \Omega Y$ permite concluir $X \simeq Y$. Sem perda da generalidade podemos supor que X e Y sejam poliedros localmente finitos (ver [5], (4.2)). Consideremos o seguinte diagrama:



onde $G_X \rightarrow E_X \rightarrow X$ e $G_Y \rightarrow E_Y \rightarrow Y$ são os fibrados ∞ -universais resultantes da construção inversa de Milnor (G_X e G_Y são CW-grupos), $f_X : G_X \rightarrow \Omega X$, $f_Y : G_Y \rightarrow \Omega Y$ as H-equivalências de Samelson e os fibrados verticais nas extremidades os ∞ -universais resultantes da construção direta aplicada a G_X e G_Y , respectivamente. Aplicando [7], Teor. 5.2, (2), sabemos que $B_{G_X} \simeq X$ e $B_{G_Y} \simeq Y$. Por outro lado, seja $g : \Omega Y \rightarrow G_Y$ um inverso de homotopia de $f_Y : G_Y \rightarrow \Omega Y$; g é uma H-equivalência. Logo, temos uma H-equivalência $g \circ h \circ f_X : G_X \rightarrow G_Y$ composta das três. Aplicando Teorema (B), (7.2), segue-se que G_X e G_Y são M-equivalentes; o mesmo argumento usado na demonstração do Teorema II permite concluir que $B_{G_X} \simeq B_{G_Y}$. O resultado segue da transitividade aplicada a $X \simeq B_{G_X} \simeq B_{G_Y} \simeq Y$.

Bibliografia.

- 1) J. F. Adams: "On the non-existence of elements of Hopf invariant one", Annals of Math. 72(1960), 20-104;
- 2) A. Dold & R. Lashof: "Principal quasi-fibrations and fibre homotopy equivalence of bundles", Illinois J. Math. 3(1959), 285-305;
- 3) E. Huebsch: "On the covering homotopy theorem", Annals of Math. 61(1955), 555-63;
- 4) I. M. James: "Multiplications on spheres (II)", Trans. Amer. Math. Soc. 84(1957), 545-58;
- 5) C. B. de Iyra: "On spaces of the same homotopy type as polyhedra", Bol. Soc. Mat. S. Paulo 12(1957), 43-62;
- 6) J. W. Milnor: "Construction of universal bundles, I", Annals of Math. 63(1956), 272-284;
- 7) J. W. Milnor: "Construction of universal bundles, II", Annals of Math. 63(1956), 430-36;
- 8) H. Miyazaki: "The paracompactness of CW-complexes", Tôhoku Math. J. (2nd Ser.) 4(1952), 309-13;
- 9) H. Samelson: "Groups and spaces of loops", Comm. Math. Helvet. 28(1954), 278-87;
- 10) J. P. Serre: "Homologie singulière des espaces fibrés", annals of Math. 54(1951), 425-505;
- 11) J. F. Slifker: "Exotic multiplications on S^3 ", Quart. J. Math. (Oxford), 2nd Ser., 16(1965) 322-359;
- 12) N. Steenrod: "The Topology of Fibre Bundles", Princeton Univ. Press (1951).