

GERALDO S. S. ÁVILA

SÔBRE O PRINCÍPIO LIMITE DE ABSORÇÃO  
PARA SISTEMAS DIFERENCIAIS SIMÉTRICOS  
HIPERBÓLICOS

Tese apresentada para Concurso de  
Livre Docência da Cadeira de Cál-  
culo Infinitesimal da Faculdade  
de Filosofia, Ciências e Letras da  
Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO

1966

GERALDO S. S. ÁVILA

SÔBRE O PRINCÍPIO LIMITE DE ABSORÇÃO  
PARA SISTEMAS DIFERENCIAIS SIMÉTRICOS  
HIPERBÓLICOS

Tese apresentada para concurso de Livre Docência da Cadeira de Cálculo Infinitesimal da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO

1966

INDICE

página

1. Introdução .....	1
2. Formulação do problema. Existência e unicidade da solução ...	4
3. A matriz de Green .....	9
4. Sistemas uniformemente hiperbólicos .....	13
5. O princípio de absorção limite .....	18
Referências bibliográficas .....	33

## 1. Introdução

A característica fundamental que manifestam os fenômenos de propagação ondulatória é a transmissão de energia através do espaço em tempo finito. Em geral a transmissão de energia de uma região a outra do espaço é acompanhada pelo fenômeno paralelo de dissipação de energia no meio, ou, como também se diz, de absorção de energia pelo meio em que ocorre a propagação. Isto significa que nem toda energia que escapa de certa região poderá ser novamente encontrada na sua forma original, visto que parte dela se transforma em calor pelo processo de absorção. Um exemplo familiar é o efeito Joule associado a correntes elétricas; outras manifestações do mesmo fenômeno são encontradas na propagação de ondas elásticas, ondas acústicas e ondas eletromagnéticas em meios naturais.

As leis que regem os fenômenos ondulatórios encontram expressão matemática nas equações diferenciais hiperbólicas, e os fenômenos associados de absorção estão ligados à presença de certos parâmetros nos coeficientes dessas equações. Nos casos de ausência total de absorção, a energia se transmite integralmente e o parâmetro de absorção é nulo; exemplo típico é a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo. Em várias circunstâncias a influência da absorção é bastante reduzida e o parâmetro associado é pequeno; a propagação de ondas eletromagnéticas em meios fracamente condutores ilustra bem este caso.

Por razões que serão esclarecidas mais adiante, a presença de absorção facilita o tratamento matemático de certos problemas de propagação ondulatória, de forma que mesmo nos casos em que não há absorção é

muitas vêzes conveniente introduzir um parâmetro artificial de absorção. Isto facilita a formulação e resolução matemática do problema, após o que volta-se à situação original fazendo tender a zero o parâmetro de absorção (vide, p.ex., [1] e [2]). Esse procedimento, conhecido como princípio de absorção limite, requer justificação matemática, e é este o problema que estudaremos no presente trabalho.

O tratamento que apresentamos aqui inclui vários fenômenos de propagação ondulatória, tais como ondas acústicas, ondas elásticas, ondas eletromagnéticas, ondas elétricas em linhas de transmissão, etc. Um tratamento assim unificado é possível porque as equações que regem esses fenômenos podem ser postas na forma dos sistemas simétricos hiperbólicos de Friedrichs [3], isto é, sistemas do tipo

$$(1.1) \quad E \frac{\partial U}{\partial t} + A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + \sigma QU = F(x, t),$$

onde a notação tem o seguinte significado:  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  é a variável espacial,  $t \in \mathbb{R}^1$  é geralmente interpretada como variável tempo;  $E$ ,  $A_j$  e  $Q$  são matrizes constantes, reais e simétricas, de  $m$  linhas por  $m$  colunas;  $\sigma$  é uma constante não negativa;

$$F(x, t) = (F_1(x, t), \dots, F_m(x, t))^*$$

e

$$U = U(x, t) = (U_1(x, t), \dots, U_m(x, t))^*$$

são vetores colunas (usamos o asterístico para designar transposição matricial) cujas componentes são funções de  $x$  e  $t$ , que em geral assumem valores complexos. A convenção do somatório será sempre usada, de forma que

$$A_j \partial/\partial x_j = A_1 \partial/\partial x_1 + \dots + A_n \partial/\partial x_n.$$

Por hipótese a matriz  $E$  é positiva definida, e  $Q$  é negativa. Usaremos a notação  $D_j$  para  $\partial/\partial x_j$  sempre que conveniente.

Nas aplicações,  $U(x,t)$  tem o significado de função ondulatória ou campo gerado por uma configuração de fontes representadas pela função  $F(x,t)$  e por certas condições suplementares (condições iniciais, condições de contorno, condições de radiação). A forma quadrática

$$U^*E\bar{U} = E_{jk}U_j\bar{U}_k,$$

onde  $\bar{U}$  designa o complexo conjugado de  $U$ , é a densidade de energia ou energia por unidade de volume, de forma que a energia contida num volume  $V \subset R^n$  é dada por  $\int_V U^*E\bar{U} dV$ . O vetor de componentes  $U^*A_j\bar{U}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , desempenha papel análogo ao vetor de Poynting em Eletromagnetismo, valendo também para o sistema (1.1) uma lei de conservação de energia inteiramente análoga à lei associada ao vetor de Poynting (vide [4], cap. VIII). Com efeito seja  $V \subset R_n$  uma região limitada por uma superfície  $S$ , e seja  $v = (v_1, \dots, v_n)$  o vetor normal unitário desta superfície, orientada positivamente para o exterior de  $S$ . Usando (1.1) e integrações por partes é fácil ver que

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \int_V (U^*E\bar{U}) dV = 2 \int_V \text{Re}(F^*\bar{U}) dV - 2 \int_V (U^*Q\bar{U}) dV - \int_S (U^*A_j\bar{U}) v_j dS,$$

onde  $\text{Re}$  designa parte real. O primeiro termo em (1.2) é o incremento, na unidade de tempo, da energia contida em  $V$ . Os termos do segundo membro também representam energias por unidade de tempo: o primeiro é a e-

energia gerada pelas fontes contidas em  $V$ , o segundo é a energia dissipada em  $V$  e o terceiro, sendo uma integral de superfície, representa a energia que flui através de  $S$ . A relação (1.2) é então a expressão matemática da lei de conservação da energia para sistemas simétricos hiperbólicos do tipo (1.1), que generaliza a lei análoga associada às equações de Maxwell (vide [4], cap. 8).

Na secção 2 abaixo damos uma formulação precisa do problema a ser tratado neste trabalho e provamos um teorema de existência e unicidade de solução. Na secção 3 introduzimos a matriz de Green ou solução fundamental, a qual é retomada na secção 5, onde estabelecemos o princípio de absorção limite para sistemas uniformemente hiperbólicos, conceito este que constitui objeto da secção 4.

## 2. Formulação do problema. Existência e unicidade da solução.

Daqui por diante vamos considerar apenas o caso em que a excitação  $F(x,t)$  em (1.1) é uma função do tipo  $f(x)e^{i\omega t}$ , onde  $\omega$  é um número real. Nosso objetivo é estudar a solução  $u(x,t)$  correspondente a  $\sigma=0$ , e para isso vamos primeiro discutir o caso  $\sigma \neq 0$ ,  $Q = E$ , que é relativamente simples. O caso  $\sigma = 0$  será obtido daí fazendo  $\sigma \rightarrow 0$ .

Pondo  $Q = E$  em (1.1), substituindo  $F(x,t) = f(x)e^{i\omega t}$  e assumindo  $U(x,t)$  na forma  $u(x,\xi)e^{i\omega t}$ , obtemos

$$(2.1) \quad (\xi E - iA_j D_j)u(x, \xi) = -if(x),$$

onde

$$(2.2) \quad \xi = \omega - i\sigma.$$

Afim de estabelecer um teorema de existência e unicidade para a equação (2.1), vamos assumir que  $f(x)$  seja uma função infinitamente diferenciável e de suporte compacto. Restringiremos a função  $u(x, \xi)$  ao espaço  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , isto é,  $u$  deve ser quadrado integrável. Esta condição é equivalente à condição de que a energia no espaço todo seja finita. De fato, como  $E$  é uma matriz positiva definida, seus autovalores são positivos, e se designarmos por  $\ell$  e  $L$  respectivamente o menor e o maior desses autovalores, teremos  $\ell u_j \bar{u}_j \leq E_{jk} u_j \bar{u}_k \leq L u_j \bar{u}_j$ , donde segue que

$$(2.3) \quad \|u\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} E_{jk} u_j \bar{u}_k dV \leq L \|u\|_2^2$$

onde  $\|u\|_2$  designa a norma de  $u$  em  $L_2(\mathbb{R}^n)$ . Vemos então que a condição de ser  $u$  uma função do espaço  $L_2(\mathbb{R}^n)$  é equivalente à condição de que a energia em todo o espaço seja finita. Fisicamente, esta condição é perfeitamente razoável devido à presença de absorção no meio, pois embora a excitação  $f(x)e^{i\omega t}$  esteja produzindo energia por um tempo infinito, quasi toda essa energia é absorvida pelo meio; somente a energia correspondente à integral em (2.3) é que não é absorvida e permanece limitada. A situação é completamente diferente no caso em que  $\sigma = 0$ , pois não havendo agora absorção e estando as fontes produzindo energia por tempo infinito, toda essa energia é encontrada na integral que aparece em (2.3), a qual deve então ser infinita. Motivados por essas considerações de situações físicas, vamos então estabelecer o seguinte teorema de existência e unicidade.

Teorema - Sendo  $f(x)$  uma função infinitamente diferenciável e de suporte compacto, e  $\xi = \omega - i\sigma$  um número complexo ( $\sigma \neq 0$ ), existe uma e uma única função de quadrado integrável,  $u(x, \xi)$ , satisfazendo a equação (2.1).

Na demonstração necessitamos do seguinte

Lema - A matriz  $\xi E + p_j A_j$  é não singular.

Demonstração - Com efeito, sendo  $E$  positiva definida, existe uma matriz não singular  $M$  tal que  $M^*EM = I$ , donde

$$\xi E + p_j A_j = M^{*-1}(\xi I + M^* p_j A_j M)M^{-1}.$$

Como  $M^* p_j A_j M$  é matriz simétrica, seus autovalores são todos reais, e daí segue que  $\det(\xi I + M^* p_j A_j M) \neq 0$ , pois  $\xi$  é um número complexo, e portanto também  $\det(\xi E + p_j A_j) \neq 0$ , o que prova o lema.

Demonstração do teorema - Para provar o teorema usamos a transformada de Fourier. Definindo a transformada de  $f(x)$  pela expressão

$$(2.4) \quad \hat{f}(p) = \int_{R^n} e^{-ip \cdot x} f(x) dx,$$

a fórmula inversa é dada por ([5], p.17)

$$(2.5) \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{ip \cdot x} \hat{f}(p) dp,$$

onde  $p = (p_1, \dots, p_n) \in R^n$ ,  $p \cdot x = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_n$  e  $dp = dp_1 \dots dp_n$ . Usando o fato de que a operação de derivação da função original em relação a  $x_j$  corresponde a multiplicar a função imagem por  $ip_j$ , a transformação da equação (2.1) conduz a

$$(2.6) \quad (\xi E + p_j A_j) \hat{u}(p, \xi) = -i \hat{f}(p).$$

Para provar a unicidade de  $u(x, \xi)$ , suponhamos que existissem duas soluções,  $u_1$  e  $u_2$ , da equação (2.1) no espaço  $L_2(\mathbb{R}^n)$ . A diferença,  $u = u_1 - u_2$ , também em  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , teria uma transformada  $\hat{u}$  satisfazendo (2.6) com  $\hat{f}(p) = 0$ . Pelo lema acima,  $\hat{u} = 0$  e pela fórmula de Parseval ([5], p.20)  $u = 0$ , o que prova a unicidade da solução.

Para demonstrar a existência de solução da equação (2.1) procedemos formalmente, resolvendo (2.6) em relação a  $\hat{u}(p, \xi)$  e usando a fórmula de inversão (2.5). Obtemos

$$(2.7) \quad u(x, \xi) = \frac{-i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi) \hat{f}(p)}{\det(\xi E + p_j A_j)} dp,$$

onde  $B(p) = (b_{jk}(p, \xi))$  é a matriz cujos elementos são os cofatores dos elementos de  $\xi E + p_j A_j$ . Vamos mostrar que (2.7) é solução de (2.1). Para isso observamos que do fato de ser  $f(x)$  infinitamente diferenciável e de suporte compacto, dada uma  $n$ -upla de inteiros positivos  $k_1, \dots, k_n$ , a função  $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \hat{f}(p)$  é limitada por uma constante que depende de  $k_1, \dots, k_n$  ([5], p.18). Daí segue que  $(1 + \|p\|^2) \hat{f}(p)$ , onde  $\|p\|^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$ , goza de propriedade análoga, de forma que existe uma constante  $C_k$  tal que

$$(2.8) \quad |\hat{f}_j(p)| \leq \frac{C_k}{(1 + \|p\|^2)^k}, \quad j = 1, \dots, n.$$

para todo inteiro positivo  $k$ . Além desta propriedade da função  $\hat{f}(p)$ ,

necessitamos do seguinte resultado devido a Hörmander [6]:

Lema de Hörmander. Seja  $V(p)$  um polinômio em  $p_1, \dots, p_n$ , e seja  $Z$  o conjunto de seus zeros  $z = (z_1, \dots, z_n)$  de componentes reais. Então, ou  $Z$  é vazio e neste caso

$$|V(p)| \geq c(1 + \|p\|^2)^{-\mu'},$$

ou  $Z$  é não vazio e

$$|V(p)| \geq c(1 + \|p\|^2)^{-\mu'} |d(p, Z)|^{\beta''},$$

onde  $c > 0$ ,  $\mu'$ ,  $\beta''$  são constantes convenientes, e  $p$  tem componentes reais.

Aplicando o lema de Hörmander ao polinômio  $\det(\xi E + p_j A_j)$ , que como vimos em lema anterior, não se anula quando  $p_1, \dots, p_n$  são todos reais, e usando (2.8), é fácil ver que existem constantes  $L_k$  tais que

$$\left| \frac{b_{jq}(p, \xi) \hat{f}_q(p)}{\det(\xi E + p_j A_j)} \right| \leq \frac{L_k}{(1 + \|p\|^2)^k}, \quad j = 1, \dots, m,$$

para  $k$  inteiro positivo e maior que um certo  $k_0$ . Esta majoração assegura a convergência da integral em (2.7). Além disto é fácil ver que majoração semelhante vale para as derivadas do integrando em (2.7) em relação aos  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , de forma que podemos derivar (2.7) sob o sinal de integração. Como consequência, aplicando o operador  $\xi E - iA_j D_j$  à função  $u(x, \xi)$  definida por (2.7), passando-o sob o sinal de integração e tendo em conta a fórmula de inversão (2.5), é fácil ver que (2.7) é de fato solução da equação (2.1). Isto completa a demonstração

do teorema.

Como se vê a demonstração que acabamos de dar pressupõe ser  $\sigma \neq 0$ . Ela não se aplica quando  $\sigma = 0$ , como era de esperar, pois como indicamos anteriormente a energia é infinita quando a absorção é nula, e portanto  $u(x, \xi)$  não pode ser de quadrado integrável. Um modo de vencer esta dificuldade consiste em interpretar o caso  $\sigma = 0$  como o limite, quando  $\sigma \rightarrow 0$ , do caso  $\sigma \neq 0$ . Para isto temos de provar a existência do limite de (2.7) quando  $\sigma \rightarrow 0$ . É este fato, conhecido como princípio de absorção limite, que constitui o objeto principal deste trabalho.

Na secção 4 introduziremos o conceito de sistemas uniformemente hiperbólicos, para os quais o princípio de absorção limite é válido, como será demonstrado na secção 5. Para isto vamos representar a solução  $u(x, \xi)$  dada em (2.7) na forma de uma convolução em que intervém uma solução fundamental de (2.1), chamada matriz de Green.

### 3. A matriz de Green.

Vamos definir a matriz de Green como uma solução da equação

$$(3.1) \quad (\xi E - iA_j D_j)G(x, \xi) = -\delta(x)I,$$

onde  $\delta(x)$  é a distribuição delta de Dirac. A matriz de Green assim definida é também uma distribuição. Formalmente podemos obter  $G(x, \xi)$  usando a transformada de Fourier de maneira análoga a que seguimos na obtenção de (2.7). Isto equivale a substituir  $i\hat{f}(p)$  por  $-I$  em (2.7), o que resulta em

$$(3.2) \quad G(x, \xi) = \frac{-1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi)}{\det(\xi E + p_j A_j)} dp.$$

Vamos assumir por um momento que esta expressão seja legítima. Dadas duas funções  $g(x)$  e  $h(x)$  (escalares, vetores ou matrizes), vale a relação ([5], p.19)

$$(3.3) \quad \widehat{g(p)h(p)} = \widehat{g(x) * h(x)}$$

onde  $g(x)*h(x)$  designa a convolução de  $g(x)$  e  $h(x)$ , isto é,

$$g(x)*h(x) = \int_{R^n} g(x-y)h(y)dy.$$

Portanto, operando formalmente sôbre (2.7) e tendo em conta a relação (3.3), é fácil ver que

$$(3.4) \quad u(x, \xi) = G(x, \xi) * if(x).$$

Como se vê, a integral em (3.2) pode ser divergente, de forma que mesmo que a relação (3.5) tivesse sido rigorosamente estabelecida, restaria a questão de encontrar uma expressão apropriada para  $G(x, \xi)$ . Para isto a integral (3.2) não é totalmente inútil, mas constitui um conveniente ponto de partida, como veremos a seguir. Seja  $T(p)$  um polinômio que não se anula para valores reais de  $p_1, \dots, p_n$ , e de grau suficientemente alto para garantir a convergência da integral

$$(3.5) \quad G_T(x, \xi) = \frac{-1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi)}{T(p)P(p, \xi)} dp,$$

onde introduzimos a notação  $P(p, \xi) = \det(\xi E + p_j A_j)$ .

(Como ilustração, o polinômio  $\prod_{j=1}^N (j + \|p\|^2)$  com  $N$  suficientemente grande, é uma forma apropriada a  $T(p)$ ). Em seguida vamos re-escrever  $u(x, \xi)$ , dada por (2.7), na forma

$$(3.6) \quad u(x, \xi) = \frac{-i}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi)}{T(p)P(p, \xi)} \cdot T(p) \hat{f}(p) dp.$$

Observando agora que  $T(p)\hat{f}(p)$  é a transformada da função  $T(-iD)f(x)$ , onde  $D = (D_1, \dots, D_n)$ , e tendo em conta a relação (3.3), concluímos que

$$(3.7) \quad u(x, \xi) = G_{\mathbb{T}}(x, \xi) * T(-iD)if(x),$$

ou ainda,

$$(3.8) \quad u(x, \xi) = [T(-iD)G_{\mathbb{T}}(x, \xi)] * if(x).$$

Observemos que nesta última expressão a aplicação do operador  $T(-iD)$  deve ser entendida no sentido da teoria das distribuições. Fica assim estabelecida a relação (3.5), onde  $G(x, \xi)$  é a distribuição que se obtém da função  $G_{\mathbb{T}}(x, \xi)$  mediante aplicação do operador diferencial  $T(-iD)$ . Como se vê, a introdução do fator  $T(p)$  no denominador do integrando de (3.2) é compensada pela introdução do operador diferencial  $T(-iD)$  fora do sinal de integração. Esse artifício é semelhante ao procedimento usado por Nirenberg ([7], p.5) no caso de um operador escalar.

A seguir vamos executar uma das integrações em (3.5), de forma a obter  $G_{\mathbb{T}}(x, \xi)$  como uma integral no espaço  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Para isto notamos que a integral em (3.5) converge absolutamente, e portanto, pelo teore-

ma de Fubini sôbre integrais múltiplas, essa integral pode ser escrita como uma integral repetida,

$$(3.9) \quad G_T(x, \xi) = \frac{-1}{(2)^n} \int_{R^{n-1}} dp_1 \dots dp_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi)}{T(p)P(p, \xi)} dp_n$$

Vamos agora assumir  $x_n > 0$  e considerar a integral

$$(3.10) \quad \int_{C_R} \frac{e^{ip_n x_n} B(p, \xi)}{T(p)P(p, \xi)} dp_n,$$

onde  $C_R$  é a semi-circunferência no plano complexo  $p_n$ , de raio  $R$  e centro na origem, jazendo inteiramente no semi-plano  $\Im p_n > 0$ . Seja  $L = L(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)$  um raio de círculo tal que tôdas as raízes (complexas)  $p_n = p_{nr} + ip_{ni}$  de  $T(p)P(p, \xi) = 0$  jazem dentro do círculo  $|p_n| < L$ . Aplicando o lema de Hôrmander (sec. 2) ao polinômio  $T(p)P(p, \xi)$ , que é um polinômio nas variáveis reais  $p_1, \dots, p_{n-1}, p_{nr}, p_{ni}$ , e tendo em conta o fator exponencial em (4.10), é fácil ver que esta integral tende a zero com  $R$  tendendo a infinito. Portanto,

$$(3.11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip_n x_n} B(p, \xi)}{T(p)P(p, \xi)} dp_n = 2\pi i S,$$

onde  $S$  designa a soma dos resíduos do integrando que jazem no semi-plano  $\Im p_n > 0$ .

Observemos que  $T(p)$  pode ser escolhido de tal sorte que nenhum de seus zeros  $p_n$  esteja no semi-plano  $\Im p_n > 0$ ; por exemplo,  $T(p)$  pode ser da forma  $[(1+p_1) \dots (1+p_n)]^N$ ,  $N$  sendo um inteiro bastante

grande. Dêste modo  $S$  em (3.11) só contém contribuições provenientes de zeros de  $P(p, \xi)$ . Entre êstes podemos excluir os zeros múltiplos de  $P(p, \xi)$ , para os quais  $P(p, \xi) = \partial P(p, \xi) / \partial p_n = 0$ , pois em termos do espaço  $R^{n-1}$  êstes pontos constituem um conjunto de medida nula, e portanto em (3.9) êsses pontos nada contribuem à integral estendida a  $R^{n-1}$ . Designando por  $P_n(p, \xi)$  a derivada  $\partial P(p, \xi) / \partial p_n$ , podemos então escrever

$$(3.12) \quad G(x, \xi) = \frac{iT(-iD)}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} \frac{e^{ip \cdot x} B(p, \xi)}{T(p) P_n(p, \xi)} \Big|_{p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)} dp_1 \dots dp_{n-1},$$

onde o integrando é na verdade uma soma cujo termo genérico é êste mesmo integrando calculado em  $p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)$ , raiz de  $P(p, \xi) = 0$ , cuja parte imaginária é positiva.

Até agora nossa análise é bastante geral e é válida desde que  $\xi = \omega - i\sigma$  seja complexo. Interessa-nos considerar o caso  $\sigma = 0$  pelo processo limite esboçado na secção anterior. Para isto vamos considerar apenas sistemas (1.1) que sejam uniformemente hiperbólicos, êste conceito sendo objeto da secção seguinte.

#### 4. Sistemas uniformemente hiperbólicos.

Vamos relembrar o conceito de superfície característica ([8], p. 579). Uma superfície  $\phi(x, t) = 0$  é chamada superfície característica ou frente de onda para o operador

$$(4.1) \quad E \frac{\partial}{\partial t} + A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

se o determinante da matriz  $\frac{\partial \phi}{\partial t} E + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} A_j$  se anula sôbre a superfície.

Como é fácil ver,  $|\partial \phi / \partial t| |\text{grad } \phi|^{-1}$  é o valor absoluto da velocidade normal da superfície  $\phi(x, t) = 0$ , de forma que as raízes da equação

$$(4.2) \quad P(p, \lambda) = \det(\lambda E + p_j A_j) = 0$$

são as possíveis velocidades normais na direção  $p$ , sendo  $p$  um vetor unitário.

Vamos designar por  $S_\omega$  a superfície definida como o conjunto dos pontos  $p = (p_1, \dots, p_n)$  que satisfazem a equação

$$(4.3) \quad P(p, \omega) = \det(\omega E + p_j A_j) = 0.$$

É fácil ver que um ponto  $p$  pertence a  $S_\omega$  se e somente se  $\omega/|p|$  é uma velocidade normal relativamente à direção  $p/|p|$ .

A equação (4.2) define  $\lambda = \lambda(p)$  implicitamente como função algébrica das variáveis  $p_1, \dots, p_n$ , e as várias raízes  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)$  de (4.2) são os diferentes ramos da mesma função analítica  $\lambda(p)$ . Êsses ramos são, portanto, funções regulares de  $p$ , exceto nos pontos de ramificação, que são pontos onde duas ou mais das raízes  $\lambda_j(p)$  coincidem. Como  $P(p, \lambda)$  é uma função homogênea em  $p_1, \dots, p_n, \lambda$ , a função  $\lambda(p)$  é homogênea e de grau 1, isto é,

$$(4.4) \quad \lambda(\mu p) = \mu \lambda(p).$$

Dadas estas observações preliminares, vamos introduzir o conceito de hiperbolicidade uniforme mediante a seguinte

Definição. O operador (4.1) é chamado uniformemente hiperbólico se as duas condições seguintes estão satisfeitas

(1) as multiplicidades das raízes  $\lambda_j(p)$  são independentes de  $p$  para  $p \neq 0$ ;

(2) as raízes  $\lambda_j(p)$  têm sinais constantes, independentes de  $p$  (em particular  $\lambda_j(p)$  só pode se anular idênticamente).

Supondo que o operador (4.1) seja uniformemente hiperbólico, vamos ordenar as diferentes raízes  $\lambda_j(p)$  para um valor fixado de  $p$ , digamos  $p = p_0 \neq 0$ :

$$\lambda_1(p_0) > \lambda_2(p_0) > \dots > \lambda_r(p_0).$$

Como  $\lambda_j(p)$  é a continuação analítica de  $\lambda_j(p_0)$ , e tendo em conta a condição (1) da definição acima, vemos que essa ordenação das raízes  $\lambda_j(p)$  se mantém para todo  $p \neq 0$ , isto é,

$$(4.5) \quad \lambda_1(p) > \lambda_2(p) > \dots > \lambda_r(p).$$

Observemos agora que sendo  $P(p, \lambda)$  um polinômio homogêneo de grau  $n$ , vale a relação

$$P(-p, -\lambda) = (-1)^n P(p, \lambda),$$

de forma que  $-\lambda_1(p), -\lambda_2(p), \dots, -\lambda_r(p)$  são os valores das raízes (4.5) quando  $p$  é substituído por  $-p$ . Em virtude de (4.5) devemos então ter

$$(4.6) \quad \lambda_j(-p) = -\lambda_{r+1-j}(p), \quad j=1, \dots, r.$$

Vemos assim que as raízes  $\lambda_j(p)$  de (4.2) aparecem aos pares, e as duas

raízes de um par estão relacionadas por (4.6), uma delas sempre positiva e a outra sempre negativa. Com relação ao número  $r$  de raízes distintas há duas possibilidades a considerar:

Caso 1.  $r = 2s$ . Neste caso tôdas as raízes são diferentes de zero:

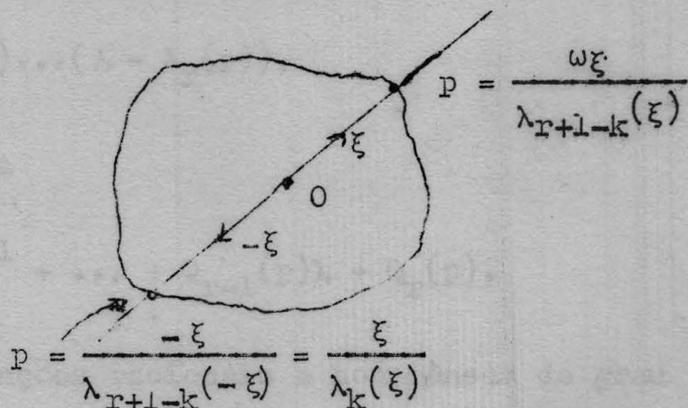
$$\lambda_1(p) > \dots > \lambda_s(p) > 0 > \lambda_{s+1}(p) > \dots > \lambda_{2s}(p);$$

Caso 2.  $r = 2s+1$ . Aqui uma das raízes deve ser idênticamente nula:

$$\lambda_1(p) > \dots > \lambda_s(p) > \lambda_{s+1}(p) = 0 > \lambda_{s+2}(p) > \dots > \lambda_{2s+1}(p).$$

Como é fácil ver, a superfície  $S_\omega$  consiste de várias folhas, da das por  $p = [\omega/\lambda_k(\xi)]\xi$ , onde  $\lambda_k$  é uma das raízes não nulas de (4.2) e  $\xi$  é um vetor unitário variável. Se  $\lambda_k$  é uma das raízes negativas, então  $\lambda_{r+1-k}$  é a raiz positiva correspondente, e por (4.6)

$$p = \frac{\omega\xi}{\lambda_k(\xi)} = \frac{-\omega\xi}{\lambda_{r+1-k}(-\xi)}.$$



Isto mostra que o ponto da superfície  $S_\omega$  obtido com a raiz negativa  $\lambda_k$  e a direção  $\xi$  é o mesmo que se obtém com a raiz positiva  $\lambda_{r+1-k}$  e a direção  $-\xi$ . Vemos assim que a superfície  $S_\omega$  pode ser descrita em termos das raízes positivas mediante a fórmula

$$(4.7) \quad p = \frac{\omega \xi}{\lambda_j(p)}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Em vista das considerações acima podemos enunciar o seguinte

Teorema - Sendo o operador (4.1) uniformemente hiperbólico, a superfície  $S_\omega$  consiste de um número finito  $s$  de folhas limitadas, fechadas e disjuntas, as quais são superfícies analíticas dadas por (4.7).

Vamos concluir esta secção com mais algumas observações que serão usadas posteriormente. O polinômio  $P(p, \lambda)$  que aparece em (4.2) é o polinômio característico da matriz  $-p_j A_j$ . Vamos considerar dois outros polinômios:  $Q(p, \lambda)$  designará o polinômio mínimo da matriz  $-p_j A_j$ , e  $R(p, \lambda)$  o quociente de  $P$  por  $Q$ :

$$(4.8) \quad P(p, \lambda) = Q(p, \lambda)R(p, \lambda).$$

Como  $-p_j A_j$  é matriz simétrica,  $Q$  é dado por

$$(4.9) \quad Q(p, \lambda) = (\lambda - \lambda_1(p)) \dots (\lambda - \lambda_r(p)),$$

que pode também ser escrito na forma

$$(4.10) \quad Q(p, \lambda) = \lambda^r + Q_1(p)\lambda^{r-1} + \dots + Q_{r-1}(p)\lambda + Q_r(p),$$

onde os coeficientes  $Q_j(p)$  são funções racionais e homogêneas de grau  $j$ . O mesmo é verdade para os coeficientes  $R_j(p)$  do polinômio

$$(4.11) \quad R(p, \lambda) = \lambda^{m-r} + R_1(p)\lambda^{m-r-1} + \dots + R_{m-r}(p).$$

Embora os coeficientes  $Q_j(p)$  e  $R_j(p)$  sejam, como dissemos acima, funções racionais e homogêneas de  $p_1, \dots, p_m$ , pode-se mostrar que

êles são polinômios nestas variáveis. A demonstração se faz com base em certos fatos algébricos ([9], cap. III, sec.9, especialmente, o lema 2), mas vamos omiti-la aqui, pois essa propriedade não será usada no curso dêste trabalho.

É fácil ver que  $Q_r(p)$  é sempre diferente de zero no caso  $r = 2s$  e idênticamente nulo no caso  $r = 2s + 1$ , quando então  $Q_{r-1}(p)$  é sempre diferente de zero. Isto segue de (4.9), (4.10) e das propriedades das raízes  $\lambda_j(p)$  estudadas acima.

### 5. O princípio de absorção limite.

Vamos retomar agora a análise que vinhamos desenvolvendo na secção 3, porém sob a hipótese restritiva de que nosso sistema (1.1) seja uniformemente hiperbólico.

Lembremos aqui que o polinômio  $R(p, \xi)$  introduzido na secção anterior é o máximo divisor comum dos elementos  $b_{jk}(p, \xi)$  da matriz  $B(p, \xi)$  que aparece em (3.12) ([10], p.91). Sendo  $M(p, \xi)$  a matriz definida por

$$(5.1) \quad M(p, \xi) = \frac{B(p, \xi)}{R(p, \xi)} = \frac{\text{cof}(\xi E + p_j A_j)}{R(p, \xi)},$$

é fácil ver que a expressão (3.12) é equivalente a

$$(5.2) \quad G(x, \xi) = \frac{iT(-iD)}{(2\pi)^{n-1}} \int_{R^{n-1}} \frac{e^{ip \cdot x} M(p, \xi)}{T(p)Q_n(p, \xi)} \Bigg|_{p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)} dp_1 \dots dp_{n-1},$$

onde  $Q_n = \partial Q / \partial p_n$ . Como antes,  $p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)$  designa a totalidade das raízes  $p_n$  de  $P(p, \xi) = 0$ , ou, o que é o mesmo, de  $Q(p, \xi) = 0$ ,

cujas partes imaginárias são positivas para  $p_1, \dots, p_{n-1}$  reais e  $\sigma$  positivo (lembramos que  $\xi = \omega - i\sigma$ ). Vamos provar agora o seguinte

Teorema - Sob a hipótese de hiperbolicidade uniforme existem constantes  $N$ ,  $c$  e  $\sigma_0$  tais que

$$p_{ni} = m p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi) \geq c \sqrt{p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2}$$

para

$$p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2 > N \quad \text{e} \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_0.$$

Demonstração. Seja  $N$  o raio de uma esfera centrada na origem e que contém a parte real da superfície  $S_\omega$ , e seja  $\sigma_0 > 0$  dado arbitrariamente. Vamos introduzir a norma

$$\|p\|^2 = p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2 + p_{nr}^2 + p_{ni}^2,$$

onde  $p_{nr}$  e  $p_{ni}$  são as partes real e imaginária de

$$p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)$$

respectivamente. Vemos então que  $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, p_{nr} + ip_{ni})$  é dado por

$p = \|p\| \eta$ , onde  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \eta_{nr} + i\eta_{ni})$  é um vetor unitário na norma que acabamos de introduzir. O número  $c$  definido por

$$(5.3) \quad c = \inf \left\{ \eta_{ni} = \frac{p_{ni}(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)}{\|p\|} : p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2 > N, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \right\}$$

é evidentemente não negativo. Vamos provar que  $c > 0$ .

Supondo, por absurdo, que  $c$  seja nulo, concluímos pela existência de uma sequência  $(p_1^j, \dots, p_{n-1}^j, \sigma^j)$ , tal que

$$(p_1^j)^2 + \dots + (p_{n-1}^j)^2 > N, \quad 0 \leq \sigma^j \leq \sigma_0,$$

e para a qual  $\eta_{ni} < 1/j$ . Esta sequência é ilimitada, pois do contrário ela teria uma subsequência que converge, digamos, para

$$p_1^0, \dots, p_{n-1}^0, \sigma^0,$$

com

$$(p_1^0)^2 + \dots + (p_{n-1}^0)^2 \geq N, \quad 0 \leq \sigma^0 \leq \sigma_0.$$

Pela continuidade de  $p_{ni}(p_1, \dots, p_{n-1}, \xi)$ , concluímos que

$$p_n^0 = p_n(p_1^0, \dots, p_{n-1}^0, \omega - i\sigma^0)$$

é real. Mas isto é absurdo, seja no caso em que  $\sigma^0 = 0$ , - pois a parte real da superfície  $S_\omega$  está toda contida na esfera de raio  $N$  - seja no caso  $\sigma^0 > 0$  - pois então  $\xi^0 = \omega - i\sigma^0$  seria um autovalor complexo da matriz real e simétrica  $-p_j A_j$  (vide (4.2), (4.8) e (4.9)).

A sequência ilimitada  $p_1^j, \dots, p_{n-1}^j, p_n^j, \sigma^j$  (evidentemente,  $p_n^j$  designa aqui a raiz  $p_n(p_1^j, \dots, p_{n-1}^j, \sigma^j)$ ) possui uma subsequência (também ilimitada, e que por conveniência designamos com o mesmo índice  $j$ ) tal que o vetor unitário correspondente,  $\eta^j = (\eta_1^j, \dots, \eta_n^j)$ , tende para um vetor unitário real  $\eta^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_n^0)$ , e  $\sigma^j \rightarrow \sigma^0$ ,  $0 \leq \sigma^0 \leq \sigma_0$ . Como  $Q(p^j, \xi^j) = 0$ , temos por (4.10),

$$\frac{(\xi^j)^r}{\|p^j\|^{2s}} + Q_1(\eta^j) \frac{(\xi^j)^{r-1}}{\|p^j\|^{2s-1}} + \dots + Q_{2s}(\eta^j)(\xi^j)^e = 0,$$

onde  $e$  é zero ou 1, conforme seja  $r = 2s$  ou  $r = 2s+1$  (vide penúltimo parágrafo da seção 4). Passando ao limite para  $j \rightarrow \infty$  obtemos

$Q_{2s}(\eta^0) = 0$ , o que é absurdo pelo que dissemos no penúltimo parágrafo da secção 4.

Concluimos então que  $c > 0$ , donde  $\eta_{ni} \geq c$ , ou

$$p_{ni} \geq c \|p\| \geq c \sqrt{p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2},$$

o que completa a demonstração do teorema.

O teorema que acabamos de demonstrar nos permitirá estabelecer o princípio de absorção limite. Queremos provar que a expressão (5.2) possui um limite quando  $\sigma \rightarrow 0$  e que tal limite é obtido aplicando-se o operador  $T(-iD)$  sob o sinal de integração e pondo  $\sigma = 0$ . Para estabelecer a legitimidade dessas operações, vamos mostrar que, para num certo intervalo  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ , o integrando em (5.2), bem como suas derivadas em relação às variáveis  $x_j$ , são funções limitadas por funções integráveis que independem de  $\sigma$ . Isto nos permitirá aplicar  $T(-iD)$  diretamente ao integrando em (5.2) e usar o teorema de Lebesgue sobre convergência dominada para passar ao limite com  $\sigma \rightarrow 0$ . Nesse processo há duas dificuldades a vencer, uma delas relacionada com o comportamento do integrando em (5.2) nas vizinhanças dos zeros de  $\partial Q / \partial p_n$ , e a outra com o comportamento do mesmo integrando para valores grandes de  $p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2$ . Vamos primeiro considerar o caso mais simples de um sistema em duas variáveis independentes.

Caso  $n = 2$ . Lembrando que  $Q(p, \xi)$  é uma função homogênea de grau  $r$ , temos

$$(5.4) \quad Q(p_1, p_2, \xi) = \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^r Q(q_1, q_2, \omega),$$

onde

$$(5.5) \quad p_1 = \frac{\xi q_1}{\omega}, \quad p_2 = \frac{\xi q_2}{\omega}.$$

Esta propriedade de homogeneidade conduz a uma correspondência biunívoca entre as curvas  $S_\omega: Q(q_1, q_2, \omega) = 0$  e  $S_\xi: Q(p_1, p_2, \xi) = 0$ , onde  $p = (p_1, p_2)$  e  $q = (q_1, q_2)$  estão relacionados por (6.5).

Seja  $q^0 = (q_1^0, q_2^0)$  um ponto da curva  $S_\omega$ , onde  $\partial Q / \partial q_2$  se anula. Como estamos tratando com apenas duas variáveis, só existe um número finito de tais pontos, aos quais correspondem pontos de  $S_\xi$  com a mesma propriedade. O ponto  $q_1^0$  é um ponto de ramificação da função algébrica  $q_2 = q_2(q_1, \omega)$ , definida implicitamente por  $Q(q_1, q_2, \omega) = 0$ . O comportamento dessa função numa vizinhança de  $q_1^0$  pode ser obtido pelo método do diagrama de Newton ([11], cap. 12). Como  $\partial Q / \partial q_2 = 0$  em  $q^0$ , e como  $\text{grad } Q \neq 0$  na superfície  $S_\omega$  (isto segue facilmente da definição de hiperbolicidade uniforme da secção anterior e de (4.9)) concluímos que  $\partial Q / \partial q_1 \neq 0$  no ponto  $q^0$ . Derivadas de ordem superior da função  $Q$  relativamente a  $q_2$  podem ou não se anular no ponto  $q^0$ ; por simplicidade vamos assumir que  $\partial^2 Q / \partial q_2^2 \neq 0$  em  $q^0$ , mas o mesmo tratamento que daremos a seguir aplica-se, com pequenas modificações, quando essa condição não está satisfeita.

Pelo método do diagrama de Newton obtemos

$$(5.6) \quad q_2 = q_2^0 + (q_1 - q_1^0)^{\frac{1}{2}} \left[ \alpha_0 + \alpha_1 (q_1 - q_1^0)^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 (q_1 - q_1^0) + \dots \right],$$

onde os coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ , são constantes,  $\alpha_0 \neq 0$ , e a série converge uniformemente numa certa vizinhança  $|q_1 - q_1^0| \leq R_0$ . Multiplicando

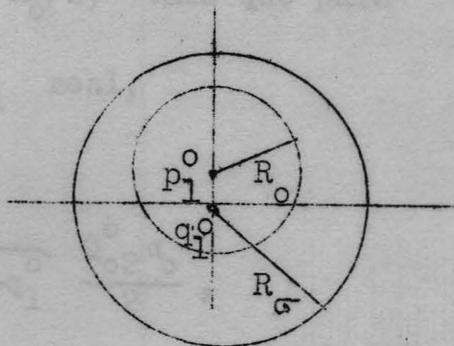
ambos os membros de (5.6) por  $\xi/\omega$  e usando (5.5), obtemos o seguinte desenvolvimento para a função algébrica  $p_2 = p_2(p_1, \xi)$  definida implicitamente por  $Q(p_1, p_2, \xi) = 0$ :

$$(5.7) \quad p_2 = p_2^0 + (p_1 - p_1^0)^{\frac{1}{2}} \left[ a_0 (-)^{\frac{1}{2}} + a_1 (p_1 - p_1^0)^{\frac{1}{2}} + a_2 (-)^{\frac{1}{2}} (p_1 - p_1^0) + \dots \right],$$

É fácil ver que esta série tem raio de convergência  $R_\sigma$  que tende a  $R_0$  com  $\sigma \rightarrow 0$ . Portanto, exis

te  $\sigma_1 > 0$  tal que para

$0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ , todo  $p_1$  real tal que  $|p_1 - q_1^0| \leq R_0/2$  também satisfaz a condição  $|p_1 - p_1^0| \leq R_\sigma$ . Concluimos então que para  $p_1$  real,  $|p_1 - p_1^0| \leq R_0/2$  e  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ , vale a relação



$$p_2 - p_2^0 = \sqrt{p_1 - p_1^0} \left[ a_0 (\xi/\omega)^{\frac{1}{2}} + \dots \right],$$

onde a reticência substitui uma função contínua de  $p_1, \sigma$ , que se anula para  $p_1 = q_1^0, \sigma = 0$ .

Desenvolvendo o polinômio  $Q(p, \xi)$  relativamente a  $p^0$  e tomando sua derivada em relação a  $p_2$ , obtemos

$$(5.8) \quad \left. \begin{aligned} Q_2(p, \xi) \\ p_2 = p_2(p_1, \xi) \end{aligned} \right\} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{Q_{j,k+1}}{j!k!} (p_1 - p_1^0)^j (p_2 - p_2^0)^k,$$

onde a somatória é evidentemente finita e  $Q_{jk}$  é a derivada

$\partial^{j+k} Q / \partial p_1^j \partial p_2^k$  calculada em  $p = p^0$ . Substituindo (5.7) em (5.8), te-

remos (note-se que  $Q_{01} = 0$ )

$$\left. Q_2(p, \xi) \right|_{p_2 = \bar{p}_2(p_1, \xi)} = \sqrt{p_1 - p_1^0} \left[ Q_{02} a_0 (\xi/\omega)^{\frac{1}{2}} + \dots \right],$$

expressão esta que é válida para  $p_1$  real,  $|p_1 - q_1^0| \leq R_0/2$ ,  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ , e na qual a reticência, como antes, toma o lugar de uma função contínua de  $p_1, \sigma$ , a qual se anula para  $p_1 = q_1^0$ ,  $\sigma = 0$ . É fácil ver agora que existem números  $\sigma_2$  e  $\mu$  ( $\sigma_2 \leq \sigma_1$ ,  $\mu \leq R_0/2$ ) tais que para

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_2, \quad |p_1 - q_1^0| \leq \mu, \quad p_1 \text{ real},$$

temos

$$(5.9) \quad \left| \left. Q_2(p, \xi) \right|_{p_2 = \bar{p}_2(p_1, \xi)} \right| \geq \sqrt{p_1 - q_1^0} \frac{Q_{02}^0 a_0}{2},$$

onde  $Q_{02}^0$  é a constante  $\partial^2 Q / \partial p_2^2$  calculada em  $p = q^0$ ,  $\xi = \omega$ .

Vamos agora retornar à expressão (5.2), que, no caso que estamos considerando, assume a forma

$$(5.10) \quad G(x, \xi) = \frac{iT(-iD)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{ip \cdot x} M(p, \xi)}{T(p) Q_2(p, \xi)} \right]_{p_2 = \bar{p}_2(p_1, \xi)} dp_1.$$

O integrando desta expressão pode ser majorado por uma função integrável independente de  $\sigma$ , para  $\sigma$  num intervalo  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ , da seguinte maneira: primeiro cercamos cada um dos pontos de ramificação  $q_1^0$  da função  $q_2 = q_2(q_1, \omega)$  com intervalos do tipo  $|p_1 - q_1^0| \leq \mu$ ,  $p_1$  real. Dentro de cada um destes intervalos o integrando de (5.10) é majorado

por funções integráveis do tipo  $\text{Const.}(p_1 - q_1^0)^{-1/2}$ . Excluindo êsses intervalos, o integrando acima é majorado por constantes em qualquer conjunto compacto do eixo  $p_1$ . A combinação dessas duas majorações resolve o problema em qualquer intervalo  $|p_1| \leq K$ . Fora dêste intervalo, onde  $K$  deve ser suficientemente grande, usamos o teorema demonstrado no início desta secção - que assegura que a exponencial do integrando decresce pelo menos tão depressa como  $\exp(-cx_2 |p_1|)$  - e aplicamos o lema de Hörmander (vide secção 2) ao denominador do integrando. Sem entrar em maiores detalhes é fácil ver que obtemos assim uma majoração do integrando de (5.10), bem como majorações de derivadas dêsse integrando em relação aos  $x_j$ , por meio de funções independentes de  $\sigma$ , as quais possuem integrais que convergem uniformemente em  $x$  para  $x$  restrito a vizinhanças compactas em volta de qualquer ponto cuja segunda coordenada  $x_2$  seja positiva. Isto nos permite aplicar o operador  $T(-iD)$  sob o sinal de integração e passar ao limite com  $\sigma \rightarrow 0$  de acôrdo com o teorema de Lebesgue sôbre convergência dominada. Obtemos então

$$(5.11) \quad G(x, \omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} G(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip \cdot x} M(p, \omega)}{Q_2(p, \omega)} \Big|_{\substack{p_2 = p_2(p_1, \omega) \\ \text{Im } p_2 \geq 0}} dp_1, \quad x_2 > 0.$$

que é a expressão apropriada ao caso  $x_2 > 0$ . Vemos facilmente que tratamento semelhante se aplica quando  $x_2 < 0$ , com a diferença que neste caso a integral em (3.9) deve ser fechada sôbre o semi-plano  $\text{Im } p_2 < 0$ .

Temos

$$(5.12) \quad G(x, \omega) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip \cdot x} M(p, \omega)}{Q_2(p, \omega)} dp_1, \quad x_2 < 0.$$

$p_2 = p_2(p_1, \omega)$   
 $\text{Im } p_2 \leq 0$

Caso  $n > 2$ . Este caso requer um tratamento diferente, e o que apresentaremos abaixo aplica-se igualmente a qualquer caso  $n \geq 2$ . Em vista disso vamos restringir nossas considerações ao caso  $n = 3$ , apenas por questão de simplicidade.

Designemos por  $\Gamma$  a intersecção (real) das superfícies  $Q(q, \omega) = 0$  e  $\partial Q(q_1, \omega) / \partial q_3 = 0$ . O argumento abaixo é baseado no fato que  $\Gamma$  é compacto. Vamos estudar o integrando de (5.2) numa vizinhança de um ponto genérico de  $\Gamma$ , e dêste modo obtemos resultados conducentes ao princípio de absorção limite usando o teorema de Heine-Borel.

Iniciamos nossas considerações observando que do fato de ser  $Q(q, \omega)$  um polinômio de grau  $r$ , e pelo teorema das funções implícitas ([12], cap.II, §4) segue que  $\Gamma$  consiste de um número finito de curvas analíticas fechadas. Isto significa que cada ponto de  $\Gamma$  possui uma vizinhança e a ela associada uma representação paramétrica

$$(5.13) \quad q_1 = q_1^0(z_1), \quad q_2 = q_2^0(z_1), \quad q_3 = q_3^0(z_1),$$

da seguinte maneira: as funções em (5.13) são analíticas num intervalo aberto e (5.13) descreve aquêles pontos de  $\Gamma$  e somente aquêles que jazem na vizinhança mencionada. A coordenada  $z_1$  pode ser tomada como o comprimento de arco ao longo da projeção  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  sobre o plano  $q_1, q_2$ , e nós assumimos ser êste o caso. É fácil ver que se  $\omega$  é substituído por  $\xi = \omega - i\sigma$ ,  $\Gamma$  transforma-se na curva analítica  $\Gamma'$ , dada

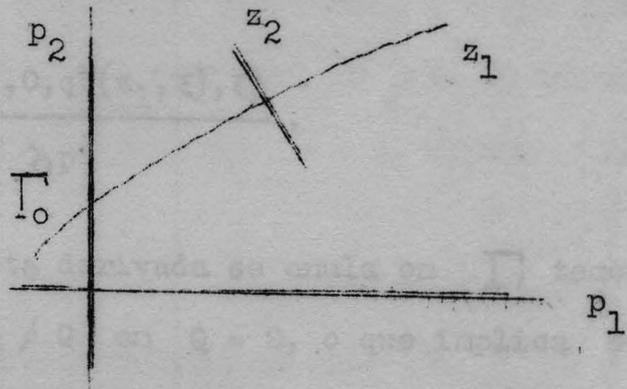
por

$$(5.14) \quad q_1 = q_1^0(z_1), \quad q_2 = q_2^0(z_1), \quad q_3 = q_3^*(z_1, \xi),$$

onde  $q_3^*(z_1, \xi)$  é analítica em  $z_1$ , para  $z_1$  no intervalo mencionado e  $\xi$  numa vizinhança de  $\omega$ , Pondo

$$(5.15) \quad p_1 = q_1^0(z_1) - z_2 \frac{dq_2^0(z_1)}{dz_1},$$

$$p_2 = q_2^0(z_1) + z_2 \frac{dq_1^0(z_1)}{dz_1}$$



introduzimos novas coordenadas  $z_1, z_2$  no plano  $p_1, p_2$ , numa vizinhança de  $\Gamma_0$  ( $z_2$  pequeno). Como  $(-dq_2^0/dz_1, dq_1^0/dz_1)$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma_0$ , vemos que  $z_2$  tem o significado de distância, a partir de  $\Gamma_0$ , ao longo das normais. O jacobiano da transformação (5.15) é dado por

$$(5.16) \quad J = \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(z_1, z_2)} = 1 + z_2(q_1^{0''} q_2^{0'} - q_1^{0'} q_2^{0''}),$$

e portanto cada ponto  $P$  de  $\Gamma_0$  possui uma vizinhança ( $z_2$  pequeno) que admite uma mudança de coordenadas do tipo (5.15) com jacobiano não nulo. As escalas de  $z_1$  e  $z_2$  podem ser escolhidas de forma que  $P$  tenha coordenadas  $z_1 = z_2 = 0$ , e uma vizinhança de  $P$  dada por  $|z_1| < a_1$ ,  $|z_2| < a_2$ , pode ser escolhida de forma que nela se tenha

$$(5.17) \quad J = \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(z_1, z_2)} > \frac{1}{2}.$$

Vamos agora estudar o comportamento do integrando de (5.2) em vol-

ta de  $P$ . Pela transformação (5.15) o polinômio  $Q(p_1, p_2, p_3, \xi)$  se transforma em  $Q^*(z_1, z_2, p_3, \xi)$ , que é um polinômio em  $p_3, \xi$ , e uma função analítica de tôdas as variáveis para  $|z_1| < a_1$ ,  $|z_2| < a_2$  e  $p_3, \xi$  quaisquer. Ponhamos

$$(5.18) \quad A_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} Q^*(z_1, 0, q_3^*(z_1, \xi), \xi)}{\partial z_2^i \partial p_3^j}.$$

Como  $\partial Q^*/\partial p_3 = \partial Q/\partial p_3$ , e como esta derivada se anula em  $\Gamma$ , temos  $A_{01} = 0$ . Lembremos também que  $\text{grad } Q \neq 0$  em  $Q = 0$ , o que implica em  $\text{grad } Q^* \neq 0$  em  $Q^* = 0$ . Mas devido ao fato de ser

$$Q^*(z_1, 0, q_3^*(z_1, \xi), \xi) / \partial z_1 = 0$$

(isto é consequência de  $Q^*(z_1, 0, q_3^*(z_1, \xi), \xi) = A_{01} = 0$ ), vemos que  $A_{10} \neq 0$ . Apenas por razões de simplicidade vamos assumir que  $A_{02} \neq 0$ , observando que tratamento semelhante pode ser feito no caso oposto.

Observemos agora que  $Q^*$  pode ser escrito na forma

$$(5.19) \quad Q^*(z_1, z_2, p_3, \xi) = A_{10} z_2 + A_{02} (p_3 - q_3^*(z_1, \xi))^2 + N(z_1, z_2, p_3, \xi),$$

onde  $N$  é uma função analítica em  $|z_1| < a_1$ ,  $|z_2| < a_2$ ,  $p_3$  qualquer e  $\xi$  numa vizinhança de  $\omega$ . Se considerarmos tôda a expansão de  $Q^*$  em potências de  $z_2$  e  $p_3 - q_3^*$ , vemos que

$$(5.20) \quad N(z_1, z_2, p_3, \xi) = \sum_{2i+j \geq 3} A_{ij} z_2^i (p_3 - q_3^*(z_1, \xi))^j.$$

Pondo agora

$$(5.21) \quad z_2 = t^2 \quad p_3 - q_3^*(z_1, \xi) = tv,$$

em (5.19) e (5.20) obtemos

$$(5.22) \quad Q^* = t^2 \left[ A_{10} + A_{02} v^2 + t^{-2} N(z_1, t^2, q_3^* + tv, \xi) \right] = t^2 F(z_1, t, v, \xi),$$

$$(5.23) \quad Q^* = t^2 \left[ A_{10} + A_{02} v^2 + t \sum_{2i+j \geq 3} A_{ij} t^{2i+j-3} v^j \right].$$

Comparando estas duas expressões para  $Q^*(z_1, z_2, p_3, \xi)$ , vemos imediatamente que  $F$  é analítica para  $|z_1| < a_1$ ,  $|t| < \sqrt{a_2}$ ,  $v$  qualquer e numa vizinhança de  $\omega$ . Além disso, para  $z_1 = t = 0$ ,  $\xi = \omega$  e  $v = v_0 = \sqrt{-A_{10} A_{02}^{-1}}$  (consideramos aqui um valor fixado para a raiz quadrada, e  $A_{10}, A_{02}$  são calculados em  $z_1 = 0, \xi = \omega$ ),  $F$  se anula e  $F_v \neq 0$ . Portanto, pelo teorema das funções implícitas ([12], cap. II, §4),  $F(z_1, t, v, \xi) = 0$  define  $v = v(z_1, t, \xi)$  como função analítica numa certa vizinhança  $|z_1| < b_1$ ,  $|t| < b_2$ ,  $|\sigma| < b_3$  e  $v(0, 0, \omega) = v_0 \neq 0$ .

Derivando (5.19) em relação a  $p_3$  e fazendo as substituições indicadas, obtemos

$$(5.24) \quad \left. \frac{\partial Q^*}{\partial p_2} \right|_{Q^*=0} = 2 A_{02} \sqrt{z_2} v + \frac{\partial N(z_1, z_2, q_3^* + \sqrt{z_2} v, \xi)}{\partial p_3},$$

onde  $v = v(z_1, \sqrt{z_2}, \xi)$  é a função implícita tratada acima. A expressão (5.24) é válida para  $|z_1| < b_1$ ,  $|z_2| < b_2$ ,  $|\sigma| < b_3$ . Por outro lado, de (5.20) e (5.21) obtemos

$$\frac{N(z_1, z_2, q_3^* + \sqrt{z_2} v, \xi)}{p_3} = z_2 \sum_{2i+j \geq 2} (j+1) A_{i, j+1} z_2^{(2i+j-2)/2} v^j,$$

o que mostra que o segundo termo do segundo membro de (5.24) tende a zero quando  $(z_1, z_2, \xi)$  tende a  $(0, 0, \omega)$ . Concluimos então pela existência de constantes positivas  $c_1, c_2, c_3, K$  tais que para  $|z_1| < c_1, |z_2| < c_2, 0 \leq \sigma \leq c_3$ , vale a relação

$$(5.25) \quad \left| \frac{Q^*}{P_3} \right]_{Q^*=0} \left| = \left| \frac{Q}{P_3} \right]_{Q=0} \left| \geq \frac{K}{\sqrt{|z_2|}},$$

na qual vemos que para  $K$  pode-se tomar o valor de  $A_{02}^V$  em  $z_1 = z_2 = 0, \xi = \omega$ .

A vizinhança  $-c_1 < z_1 < c_1, -c_2 < z_2 < c_2$  corresponde, pela transformação (5.15), a uma vizinhança  $V$  do ponto  $P$  no espaço  $p_1, p_2$ . Em  $V$  podemos mudar as variáveis de integração em (5.2) de acordo com a transformação (5.15). Em vista de (5.17) e (5.25) é fácil ver que o novo integrando é majorado por uma função integrável do tipo  $\text{Const.}/\sqrt{|z_2|}$  para todo  $\sigma$  em  $0 \leq \sigma \leq c_3$ . Aplicando então o operador  $T(-iD)$  diretamente ao integrando, vemos que, quando integramos sobre  $V$ , podemos passar ao limite para  $\sigma \rightarrow 0$  sob o sinal de integração, o que equivale a pôr  $\sigma = 0$  no integrando.

Como  $\Gamma_0$  é um conjunto compacto, podemos cobri-lo com uma família finita  $\mathcal{J}$  de vizinhanças  $V$ . Seja  $\Omega$  a união de todas essas vizinhanças  $V$  de  $\mathcal{J}$ . Então, restringindo a integração em (5.2) a  $\Omega$  apenas, é fácil ver que as operações  $T(-iD)$  e  $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$  podem ambas ser tomadas sob o sinal de integração, pois tal integral pode ser escrita como a soma de um número finito de integrais, cada uma das quais estendida sobre um subconjunto do tipo  $V$  acima, no qual essas operações são

válidas.

Finalmente, a integração em (5.2) fora de  $\Omega$  é tratada de modo inteiramente análogo ao caso  $n = 2$  discutido anteriormente. Para  $\sigma$  num intervalo  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ , e para qualquer conjunto compacto do plano  $p_1, p_2$  que não contém pontos de  $\Omega$ , o integrando em (5.2) é majorado por uma constante. Fora de um tal conjunto compacto e de  $\Omega$ , usamos o teorema provado no início desta seção e o lema de Hörmander aplicado ao denominador do integrando e outra vez justificamos aplicar as operações  $T(-iD)$  e  $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$  em (5.2) sob o sinal de integração. Como o tratamento é o mesmo para qualquer  $n > 2$ , vamos escrever o resultado para  $n$  genérico: para  $x_n > 0$ ,

$$(5.26) \quad G(x, \omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} G(x, \xi) = \frac{(\text{sgn } x_n) i}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{ip \cdot x} M(p, \omega)}{Q_n(p, \omega)} dp_1 \dots dp_{n-1},$$

$p_n = p_n(p_1, \dots, p_{n-1}, \omega)$   
 $(\text{sgn } x_n) \Im_n p_n \geq 0$

onde  $\text{sgn } x_n$  significa sinal de  $x_n$ .

Nesta expressão final (5.26), bem como em várias fórmulas anteriores, a coordenada  $x_n$  parece desempenhar papel privilegiado, mas isto é apenas aparência. De fato, como escolhemos efetuar a integração com relação a  $p_n$  em (3.9), podíamos ter escolhido qualquer outra coordenada, o importante sendo que haja uma coordenada  $x_j \neq 0$  para que (5.26) ou fórmula análoga seja verdadeira.

Uma vez provado o princípio limite de absorção para a solução fundamental  $G(x, \xi)$ , podemos obter resultado análogo para a solução  $u(x, \xi)$  de (3.4) na forma

$$(5.27) \quad u(x, \omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} u(x, \xi) = G(x, \omega) * \text{if}(x).$$

Para isto basta observar que, excetuado  $x = 0$ ,  $G(x, \xi)$  é localmente integrável, o que nos permite passar ao limite e obter (5.27) (vide [13], p.14). O caso  $x = 0$  só oferece dificuldade quando  $G(x, \xi)$  tiver, na origem, singularidade mais forte que  $|x|^{-n+1}$ . Isto realmente pode acontecer (vide [14]), e neste caso temos de interpretar (5.27) em termos de uma distribuição regularizada (vide [13]).

Referências bibliográficas

- [1] M.J. Lighthill, Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions, *Phil. Trans. Roy. Soc., A*, 252, 397-470 (1960).
- [2] V.T. Buchwald, Elastic waves in anisotropic media, *Proc. Roy. Soc., A*, 253, 563-580 (1959).
- [3] K.O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 345-393 (1954).
- [4] J.C. Slater - N.H. Frank, *Electromagnetism*, McGraw-Hill Book Co. (1947).
- [5] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag (1963).
- [6] L. Hörmander, On the division of distributions by polynomials, *Arkiv for Mat.*, 3, n°53, 555-68 (1958).
- [7] L. Nirenberg, On Elliptic Partial Differential Equations, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie III, vol. XIII, fasc. II* (1959).
- [8] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, vol. II*, Interscience (1962).
- [9] G. Birkhoff - S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan (1953).
- [10] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea (1959).
- [11] E. Hille, *Analytic Function Theory, vol. II*, Ginn and Company (1962).
- [12] S. Bochner - W.T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton (1948).
- [13] G. Avóza - C. Wilcox, *The Near Field Behavior of the Green Matrix in Anisotropic Wave Motion (em preparação)*.
- [14] I.M. Gelfand - G.E. Shilov, *Generalized Functions, vol. I*, Academic Press (1964).

