CHAIM SAMUEL HÖNIG

# ANÁLISE DE FOURIER EM ESPAÇOS $L_2$ E TEOREMAS DO TIPO DE SOBOLEV

Tese apresentada para concurso de Livre-docência da Cadeira de Equações Diferenciais da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO
1965

CHAIM SAMUEL HÖNIG

# ANÁLISE DE FOURIER EM ESPAÇOS $L_2$
# e
# TEOREMAS DO TIPO DE SOBOLEV

Tese apresentada para concurso de Livre-docência da Cadeira de Equações Diferenciais da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO
1965

# I N T R O D U Ç Ã O

Na presente tese apresentamos teoremas do tipo de Sobolev que obtivemos com o uso da Análise de Fourier em espaços $L_2$ de funções. (Consultar o texto para a terminologia e as notações.)

Já há muito tempo tínhamos constatado pessoalmente que as técnicas $L_2$ da Análise de Fourier, que são usadas em diferentes campos da Análise, geralmente dão resultados muito bons quer do ponto de vista dos teoremas de existência e estrutura (por exemplo, por meio delas demos uma demonstração elementar do fato de que localmente tôda distribuição é derivada de ordem finita, no sentido das distribuições, de uma função contínua; ver também a observação 7, do §1º, cap. II;etc.); quer para fazer avaliações de funções das quais conhecemos as derivadas; quer para testar hipóteses sôbre propriedades de subespaços de $L_2(U)$, analisando os casos "extremos" $L_2(R^n)$ e $L_2(T^n)$, etc.

Há alguns mêses tivemos outra vez oportunidade de aplicar estas técnicas na pesquisa de teoremas do tipo de Sobolev (cap. II e IV) em que se procura condições de regularidade para funções com derivadas generalizadas. Tínhamos obtido bons resultados neste sentido e estávamos, entre outros,nos ocupando com a extensão dos resultados do Cap. IV aos espaços $L_p$ quando nos surgiu a imposição de elaborar uma tese com prazo muito curto. Resolvemos pois agrupar e apresentar aquêles resultados que tínhamos obtido usando sòmente as técnicas $L_2$ da Análise de Fourier.

Evidentemente não tivemos tempo de elaborar as aplicações à Análise e às Equações Diferenciais Parciais (para aplicações das funções com derivadas generalizadas e das desigualdades, no estudo das Equações Diferenciais Parciais, ver, por exemplo, [Sob.2], [B], [F] cap. 7), nem de expor mais do que o enunciado dos resultados que pressupomos conhecidos (cap. I).

Nossos resultados principais foram agrupados em "Teoremas", dos quais damos uma demonstração completa. Outros teoremas com demonstrações análogas, variantes, extensões, corolários, comentários, etc. foram agrupados em mais de 40 "Observações" das quais geralmente não damos a demonstração, às vêzes indicando porém como se deve adaptar a demonstração do teorema precedente quando se trata de uma variante. Geralmente porém a demonstração das "observações" não é difícil de ser feita a partir do teorema.

Façamos agora uma rápida análise dos diferentes capítulos desta tese:

No 1º capítulo expomos a maior parte das notações e dos resultados que usamos nos capítulos seguintes. No §3º apresentamos a noção de derivada generalizada. Acrescentemos apenas que esta noção coincide com a noção de derivada no sentido da Análise Funcional: para $p<\infty$, dados

$$f, f' \in L_p(R), \quad \left\| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right\|_p$$

tende para zero com h. Resultado análogo vale nos $L_p^{loc}(U)$ para abertos $U \subset R^n$ (ver [Schw.II] pg 43). No §4 expomos a Análise de Fourier $L_2$ que serve de fundamento a tudo que fazemos; em geral não mais damos referência explícita aos resultados expostos neste § ao usá-los nesta tese. Usando a Teoria das Distribuilões pode-se prescindir dos resultados mais delicados das Teorias das Séries de Fourier e Transformadas de Fourier $L_2$, interpretando como distribuições os elementos que aparecem nos teoremas e aplicando as Teorias das Séries de Fourier e Transformação de Fourier de distribuições, que são puramente algébricas; ver [Schw. MMP], [Schw. II] ou [Hön].

No capítulo II demonstramos essencialmente que se uma função de $L_2^{loc}$ é tal que $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ bem como as derivadas precedentes são de $L_2^{loc}$ então ela é contínua (e coincide mesmo localmente com uma função que tem série de Fourier absolutamente convergente) e a seguir obtemos majorações para $|f(x)|$. Nos diferentes casos considerados obtemos tôda uma gama de majorações (ver fórmulas (II;1,1), (II,1,3), (II;1,4),(II;2,1)) que comparamos com uma majoração análoga obtida por [B-M] para funções contìnuamente diferenciáveis, fazemos também a comparação com uma majoração clássica (ver [H], lema 1.1) que melhoramos (II;2,3). Para categorias particulares de funções uma ou outra destas majorações pode-se revelar a mais útil. Elas são porém incomparáveis entre si e as observações 6) do §1 e 1) do §2 mostram que não pode existir uma majoração convexa (isto é, do tipo norma) que seja menor que tôdas as majorações dadas.

No capítulo III aplicamos as técnicas $L_2$ para obter o teorema de Sobolev, para $p=2$, com uma demonstração quase que algébrica em que o único fato não elementar que usamos é o Teorema de Hausdorff-Young, em contraste com as demonstrações habituais que usam a teoria das "Integrais de tipo potencial" que se apoia sôbre uma desigualdade de Hardy-Littlewood (ver [Sob.1] , pg. 497; [D-S II], pg. 1682; [B-S], pg.242,etc.) cuja demonstração requer a teoria dos "rearrangements" (ver [H-L-P], pg. 289 para a demonstração da referida desigualdade). Mas no nosso caso de $p=2$ obtemos não só um teorema global (do qual o teorema local habitual é uma consequência trivial) como, para $m > n/2$ mostramos que as funções de $L_2^{(m)\,loc}$ coincidem localmente com funções que têm série de Fourier absolutamente convergente (esta afirmação é consequência trivial de nosso teorema sôbre $T^n$). Para apreciar êste resultado lembremos a importância que se dá hoje às funções que têm esta propriedade (ver as referências em [K-S]).

No capítulo IV demonstramos que em $\mathcal{D}_2^{(m)}$ a existência das derivadas "puras" $\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}$, $j = 1,2,\ldots,n$ implica automàticamente nas existência das derivadas "mistas" $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, o que é particularmente surpreendente quando $|\alpha| = m$ (ver o Apêndice ao Capítulo IV). Depois estendemos êstes resultados e no Apêndice mostramos ràpidamente o tipo de dificuldade que estamos encontrando na extensão dêstes resultados quando $p \neq 2$.

A exiguidade de tempo não nos permitiu elaborar as melhores majorações nos capítulos III e IV como o tínhamos feito no capítulo II; nem de abordar uma série de outros tópicos (dos quais nós esperamos ocupar futuramente) tais como: 1) restrição a subvariedades e teorema de Stokes; 2) extensão dos resultados do capítulo IV aos espaços $L_p$ e eventualmente a espaços com norma invariante relativamente aos movimentos euclidianos; 3) fazer estudos análogos aos que fizemos para os espaços $L_2(R^n_+)$, onde $R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_n > 0\}$, neste caso a transformação de Laplace provàvelmente será muito útil; 4) estudar generalizações comuns dos resultados dos capítulos II, III e IV.

Que esta tese tenha ficado pronta em tempo útil, devemos agradecê-lo a Dna. Ermelinda de Castro, funcionária do Departamento de Matemática e especialmente aos nossos colegas Elza Gomide, Carlos B. de Lyra e Luiz Henrique Jacy Monteiro que datilografaram o manuscrito desta tese, e, ao Professor Cândido Lima da Silva Dias pelo incentivo que nos deu num momento em que achamos que já não seria possível terminar êste trabalho no prazo fixado. A todos êles mais uma vez nossos comovidos agradecimentos.

São Paulo, Março de 1965.

# CAPÍTULO I

## Noções Preliminares

### § 1 - Notações

1. Z indica o conjunto dos inteiros relativos, N o conjunto dos inteiros $n \geq 1$, R o conjunto dos números reais, C o conjunto dos números complexos, T o conjunto das classes de equivalência de números reais módulo 1.

2. Dadas $n^{plas}$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ de números inteiros, reais ou complexos, usamos as seguintes notações:

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

$\alpha \leq \beta$ se e sòmente se $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$

$$\alpha\beta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$$

$$\alpha^{\beta} = \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$$

$\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_n^s)$, quando $s$ é um inteiro

3. Definimos $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e $D = D_1 \dots D_n$; então

$$D^{\alpha} f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Se $Q$ é um polinômio de $n$ indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ indicamos por $Q(D)$ o polinômio de derivação obtido substituindo em $Q(X)$ cada $X_j$ por $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

4. Indicamos por $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}\{1,2,\ldots,n\}$ ao conjunto de todos os subconjuntos do conjunto de inteiros $\{1,2,\ldots,n\}$; dado $P \in \mathcal{P}_n$, $|P|$ indica o número de elementos do conjunto $P$. Se $P = \{i_1,\ldots,i_r\}$ definimos $D^P f = \dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}$; supomos sempre $i_1,\ldots i_r$ ordenados de modo crescente. Se $P = \emptyset$, $D^P f = f$.

§ 2 - Integração e Topologia

1. Quando falamos em medida sôbre um aberto $U \subset R^n$ ou $U \subset T^n$ nos referimos sempre à medida de Lesbesgue habitual. Por funções equivalentes entendemos funções que são iguais exceto num conjunto de medida nula.

Como habitualmente $L_p(U)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ indica o conjunto das (classes de equivalência de) funções $p$ - integráveis em $U$. $L_p(U)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|f\|_p = \left[\int_U |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \quad (\|f\|_\infty = \sup_{x \in U} \text{ess} \, |f(x)|)$$

$L_p^{loc}(U)$ indica o conjunto das (classes.....) funções que são p-integráveis sôbre todo conjunto compacto $K \subset U$. $L_p^{loc}(U)$ é um espaço de Frichet quando munido da família de semi-normas

$$\|f\|_{K,p} = \left[\int_K |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Quando $U$ é um conjunto de medida finita temos $L_q(U) \subset L_p(U)$ se $p \leq q$ e a imersão é contínua. Em particular temos $L_q^{loc}(U) \subset L_p^{loc}(U)$ se $p \leq q$.

$$\frac{1}{1+|x^m|} = \frac{1}{1+|x_1^m|+\ldots+|x_n^m|} \in L_p\,(R^n) \quad \text{se e sòmente}$$

$$m > \frac{n}{p} \quad (I, 2, 1)$$

Dados $f \in L_p(U)$ e $g \in L_{p'}(U)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ então

$fg \in L_1(U)$ e $\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \, \| g \|_{p'}$ (<u>Desigualdade de Hölder</u>; quando $p = 2$ ela tem o nome <u>desigualdade de Cauchy-Schwartz</u>).

2. Dado um conjunto $I$, $\ell_p(I)$ (onde $1 \leq p \leq \infty$) indica o conjunto das famílias $x = (x_i)_{i \in I}$ de números complexos tais que

$$\| x \|_p = \left[ \sum_{i \in I} |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{seja finito (quando}$$

$p = \infty$:

$$\| x \|_\infty = \sup_{i \in I} |x_i| ).$$

Munido da norma $\| \ \|_p$, $\ell_p(I)$ é um espaço de Banach.

Se $p \leq q$ temos $\ell_p(I) \subset \ell_q(I)$ (com imersão contínua).

$$\left(\frac{1}{k^m}\right)_{k \in Z^n} = \left(\frac{1}{k_1^m + \ldots + k_n^m}\right)_{k \in Z^n} \in \ell_p\,(Z^n)$$

se e sòmente se $m > \frac{n}{p}$ (I; 2, 2)

Dados $(x_i)_{i \in I} \in \ell_p(I)$ e $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{p'}(I)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

então

$$(x_i\ y_i)_{i \in I} \in \ell_1(I) \quad \text{e temos}$$

$$\| (x_i\ y_i) \|_1 \leq \| (x_i) \|_p \ \| (y_i) \|_{p'}$$

(Desigualdade de Hölder; quando $p = 2$ ela tem o nome de desigualdade de Cauchy-Schwartz)

3. Dado um conjunto aberto $U \subset R^n$ ou $U \subset T^n$, $\mathcal{C}(U)$ ($\mathcal{C}^*(U)$) indica o espaço vetorial das funções complexa contínuas (contínuas e limitadas) definidas em U. $\mathcal{C}^*_u(U)$ representa êste espaço munido da norma

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in U} | f(x) |$$

que o torna um espaço de Banach. $\mathcal{C}_c(U)$ representa êste espaço munido com a topologia da convergência uniforme sôbre os compactos contidos em U, que o torna um espaço de Frechet.

## § 3 - Derivadas generalizadas e Teorema de Sobolev

Dado um conjunto aberto $U \subset R^n$ ou $U \subset T^n$ indicamos com $\mathcal{D}(U)$ o conjunto das funções complexas f infinitamente deriváveis definidas em U e de suporte compacto, f, contido em U.

Dada uma função contínua f definida em U e que tenha derivada contínua $g = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, uma simples integração por partes nos mostra que $\int_U f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx = - \int_U g \varphi\, dx$ para tôda função $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. De modo análogo se $g = D^\alpha f$ temos

$$\int_U f\, D^{\alpha}\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U g\, \varphi\, dx \qquad (I;3,1)$$

para tôda função $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. É pois perfeitamente natural que dadas duas funções $f, g \in L_1^{loc}(U)$, digamos que $g$ é a $D^{\alpha}$-<u>derivada generalizada</u> de $f$, e que escrevamos $g = D^{\alpha} f$, se vale a relação (I; 3; 1) para todo $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Esta noção, que é de Sobolev ([Sob. 1], [Sob. 2]), também foi introduzida por Friedrichs sob o nome de "derivada forte" e foi estendida mais tarde por Schwartz na Teoria das distribuições.

Quando $n = 1$ esta derivada generalizada coincide com a noção habitual da derivada elaborada na teoria das funções de uma variável real pois:

Dadas $f, g \in L_1^{loc}(U)$ (onde $U \subset R$) temos $g = \frac{df}{dx}$ no sentido generalizado acima) se e sòmente se $f$ fôr equivalente a uma função absolutamente contínua em todo intervalo $[a,b] \subset U$ e se a sua derivada habitual (que existe então exceto sôbre um conjunto de medida nula) fôr equivalente à função $g$. Daí segue imediatamente que se $f$ tiver uma derivada generalizada de ordem $k$ ela também tem tôdas as derivadas de ordem menor que $k$.

Para $n > 1$ porém a noção de derivada generalizada já não coincide com a noção habitual de derivada. Assim uma função pode ter tôdas as derivadas generalizadas de 1ª ordem sem ser contínua:

<u>Exemplo</u>: consideramos a função $f(x,y) = \frac{|x|}{|x| + |y|}$; $f \in L_1^{loc}(R^2)$ e é uma função limitada que não é contínua na origem; suas derivadas "habituais" $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ (que não estão definidas para $x = o$ ou $y = o$) ainda são funções localmente integráveis (i.é de $L_1^{loc}(R^2)$ que coincidem com as derivadas generalizadas de $f$. Por "condensação de singularida-

des" podemos mesmo construir uma função $f \in L_1^{loc}(R^2)$ que não é (equivalente a uma função) contínua em nenhum aberto do plano mas que ainda possue derivadas generalizadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in L_1^{loc} \quad (R^2)$$

Por outro lado, o fato de $f$ ter derivada generalizada $D^\alpha f$ não implica de modo nenhum que $f$ também tenha derivadas generalizadas $D^\beta f$ com $\beta < \alpha$. Exemplo: Tomemos uma função $f_1 \in L_1^{loc}$ (R) que não seja (equivalente a uma função) derivável em nenhum aberto e consideremos a função $f(x,y) = f_1(x - y)$. É imediato que $f \in L_1^{loc}(R^2)$ e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 0$$

no sentido generalizado mas evidentemente, pelo teorema acima para $n = 1$, as derivadas generalizadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não existem.

É porém fácil demonstrar que $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$ no sentido que, se existirem $D^\beta f$ e $D^\alpha(D^\beta f)$ então também existe $D^{\alpha+\beta} f$ e temos a igualdade acima. Isto porém não implica na existência de $D^\alpha f$.

Vemos portanto que uma função pode ter derivadas generalizadas e apesar disto ser bastante "irregular", não ser contínua. Sobolev, que introduziu esta noção de derivada generalizada, constatou porém que quanto mais derivável fôsse uma função, tanto mais "regular" ela era, terminando por ser contínua e mesmo derivável no sentido habitual se ela fôsse derivável no sentido generalizada até uma ordem suficientemente elevada. Mais precisamente:

Dados $1 \leq p \leq \infty$ e um aberto $U \subset R^n$ indicamos por $L_p^{(m)loc}$ (U) ao conjunto de tôdas funções $f \in L_p^{loc}$ (U) que tem derivadas generalizadas $D^{\alpha} f \in L_p^{loc}(U)$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$.

Indicamos por $\mathcal{C}^{(k)}(U)$ ao conjunto das funções contínuas definidas em $U$ que tem tôdas as derivadas contínuas até ordem $k$.

Teorema de Sobolev:

para $mp \leq n$ temos $L_p^{(m)loc}(U) \subset L_q^{loc}(U)$ para todo $q < \frac{np}{n-mp}$

para $mp > n$ temos $L_p^{(m)loc}(U) \subset \mathcal{C}^{(k)}(U)$ onde $k = m - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$

$[r]$ indica o maior inteiro $\leq r$).

Ver [Sob.2] Cap.I § 8, [S m,V] cap.IV, [Schw. II] pg. 37, teorema XV.

Em todo êste trabalho "derivada" significa sempre, derivada generalizada" a menos da menção explícita do contrário.

## § 4 - Análise de Fourier

1. Transformação de Fourier em $L_2(R^n)$

Dada uma função $f \in L_1(R^n)$ a sua transformada de Fourier é definida por

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) = \int_{R^n} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi} dx \qquad (I;4,1)$$

para todo $\xi \in R^n$, $\hat{f}$ é uma função contínua e limitada em $R^n$:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \| f \|_1 \qquad (I;4,1')$$

A transformada de Fourier conjugada é definida por

$(\bar{\mathcal{F}} f)(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{2\pi i x\xi} dx$ e tem propriedades análogas às de $\mathcal{F} f$, que não mais mencionaremos no futuro.

Seja $Q_m = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq m\}$. Dada $f \in L_2(R^n)$, $\hat{f}_m(\xi) = \int_{Q_m} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi} dx$ está bem definida, $\hat{f}_m \in L_2(R^n)$ e a sequência $(\hat{f}_m)_{m\in N}$ é uma sequência de Cauchy em $L_2(R^n)$ que tende portanto para um limite, que indicaremos por $\hat{f}$. É neste sentido que deve ser interpretada a transformação de Fourier (I;4,1) para funções $f \in L_2(R^n)$.

Propriedades da transformação de Fourier em $L_2(R^n)$: $\| f \|_2 = \| \hat{f} \|_2$, $\bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} f = f$, $\mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} f = f$; a transformação de Fourier é portanto uma isometria de $L_2(R^n)$ sôbre si mesmo.

Se $f \in L_2(R^n)$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(R^n)$ então

$$\xi_j \hat{f} \in L_2(R^n) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_j\, \hat{f}(\xi).$$

Se $f \in L_2(R^n)$ é tal que $x_j f \in L_2(R^n)$ então existe

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} \in L_2(R^n) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[-2\pi i x_j f(x)](\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi).$$

De modo análogo dado um polinômio $Q$ de $n$ indeterminadas e fazendo as hipóteses evidentes correspondentes, temos:

$$\mathcal{F}[Q(D)f](\xi) = Q(2\pi i \xi_j)\, \hat{f}(\xi) \qquad \text{(I; 4,2)}$$

$$(Q(D)\hat{f})(\xi) = \mathcal{F}[Q(-2\pi i\, x_j)\, f(x)](\xi) \qquad \text{(I; 4,3)}$$

Cf. [B-C.] , [Schw - MMP]

O <u>Teorema de Hausdorff - Young</u>:

Dados $1 \leq p \leq 2$ e $f \in L_p(R^n)$ então $\hat{f} \in L_{p'}(R^n)$ e $\| \hat{f} \|_{p'} \leq \| f \|_p$ (Cf. [Schw. II] pg. 88 e [T] pg. 96).

2. Séries de Fourier em $L_2(T^n)$

Dada uma função $f \in L_1(T^n)$ e $k \in Z^n$, o $k^{\text{ésimo}}$ coeficiente de Fourier de $f$ é definido por

$$c_k[f] = \int_{T^n} f(x)\, e^{-2\pi ikx} dx$$

e a série formal $\sum_{k \in Z^n} c_k[f]\, e^{2\pi ikx}$ e por definição a série de Fourier de $f$.

Dado $(c_k)_{k \in Z^n} \in \ell_1(Z^n)$ a série $\sum_{k \in Z^n} c_k\, e^{2\pi ikx}$ converge absolutamente uniformemente para um função contínua $f$. Temos:

$$c_k[f] = c_k \quad \text{e} \quad |f(x)| \leq \| (c_k)_{k \in Z^n} \|_1 \qquad (I;\ 4,4)$$

$f \in L_2(T^n)$ se e sòmente se $(c_k[f])_{k \in Z^n} \in \ell_2(Z^n)$ e reciprocamente todo elemento $(c_k)_{k \in Z^n}$ é a série de Fourier de uma e uma só função $f \in L_2(T^n)$. Neste caso temos

$$f(x) = \sum_{k \in Z^n} c_k[f]\, e^{2\pi ikx}$$

a série sendo convergente no sentido de $L_2(T^n)$ e $\|f\|_2 = \| (c_k[f]) \|_2$ (<u>Teorema de Fischer-Riesz</u>)

Se $f \in L_2(T^n)$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(T^n)$ então

$$c_k\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 2\pi i k_j\, c_k\,[f].$$

Reciprocamente: se $(c_k[f])_{k\in Z^n} \in \ell_2(Z^n)$ é tal que $(2\pi i k_j\, c_k[f]) \in \ell_2(Z^n)$ então existe $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(T^n)$ e $c_k\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] = 2\pi i k_j\, c_k\,[f]$.

De modo análogo se Q fôr um polinômio de n indeterminadas, fazendo as hipóteses evidentes, temos

$$c_k[Q(D)f] = Q(2\pi i k)\, c_k\,[f] \qquad (I;\ 4,5)$$

(Cf.[B-C] e [Schw. MMP])

O <u>Teorema de Hausdorff - Young:</u>

Seja $1 \leq p \leq 2$ e $f \in L_p(T^n)$ então

$$(c_k[f])_{k\in Z^n} \in \ell_{p'}(Z^n)$$

e

$$\|(c_k[f])\|_{p'} \leq \|f\|_p \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

Seja $1 \leq p \leq 2$ e $(c_k)_{k\in Z^n} \in \ell_p(Z^n)$. Então a série $\sum_{k\in Z^n} c_k\, e^{2\pi i k x}$ converge em $L_{p'}(T^n)$ para uma função f da qual ela é a série de Fourier e

$$\|f\|_{p'} \leq \|(c_k)_{k\in Z^n}\|_p$$

(Cf.[Z]pg. 190).

# CAPÍTULO II

## Os espaços $L_2^{\{1\}}(U)$

Dado um aberto $U \subset R^n$ ou $U \subset T^n$, indicamos por $L_2^{\{1\}}(U)$ ao conjunto das funções $f \in L_2(U)$ tais que para todo $P \in \mathcal{P}_n$ tenhamos $D^P f \in L_2(U)$. Munidos com qualquer das normas equivalentes

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n} a_P \| D^P f \|_2$$

(onde $a_P > 0$) êle é um espaço de Banach (que é mesmo hilbertiano). Indicamos por $\mathcal{D}_2^{\{1\}}(U)$ à aderência de $\mathcal{D}(U)$ em $L_2^{\{1\}}(U)$. Quando $U = R^n$ ou $U = T^n$ temos $\mathcal{D}_2^{\{1\}}(U) = L_2^{\{1\}}(U)$. Notações análogas para $p \neq 2$.

### § 1 - Estudo de $L_2^{\{1\}}(T^n)$

1 - <u>Teorema</u>: Tôda função $f \in L_2^{\{1\}}(T^n)$ tem série de Fourier absolutamente somável, sendo portanto uma função contínua. Temos

$$|f(x)| \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (\sqrt{3}/6)^{|P|} \| D^P f \|_2 =$$

$$= \|f\|_2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \sum_{i<j} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right\|_2 \qquad \text{(II; 1,1)}$$

A imersão $f \in L_2^{\{1\}}(T^n) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_u(T^n)$ é completamente contínua (compacta).

Demonstração: 1) Demonstremos que a série de Fourier de uma função $f \in L_2^{\{1\}}(T^n)$ é absolutamente convergente. Para todo $P \in \mathcal{P}_n$ $\sum^P |c_k|$ indica a somatória efetuada sôbre todos $c_k$ com $k \in Z^n$ e tais que $k_j \neq 0$ se $j \in P$ e $k_j = 0$ se $j \notin P$; então $\sum_{k \in Z^n} |c_k[f]| = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \sum^P |c_k[f]|$. Para $P = \emptyset$ temos $\sum^{\emptyset} |c_k[f]| = |c_o[f]|$ e para $P = \{j_1, j_2, \ldots j_r\}$ temos

$$\sum^P |c_k[f]| = \sum^P \left| \frac{1}{2\pi k_{j_1}} \cdots \frac{1}{2\pi k_{j_r}} . 2\pi k_{j_1} \ldots 2\pi k_{j_r} . c_k[f] \right|$$

donde segue pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e por (I;4,5) que

$$\sum^P |c_k[f]| \leq \left[ \sum_{k_{j_1} \neq 0, \ldots k_{j_r} \neq 0} \left| \frac{1}{4\pi^2 k_{j_1}^2} \cdots \frac{1}{4\pi^2 k_{j_r}^2} \right| \right]^{1/2} \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_r}} \right\|_2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^r \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_r}} \right\|_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{|P|} \| D^P f \|_2 .$$

Daí segue a nossa afirmativa bem como a majoração (II;1,1) se lembrarmos que

$$|f(x)| \leq \sum_{k \in Z^n} |c_k[f]| .$$

2º Para demonstrar a compacidade da imersão acima basta demonstrar a compacidade da aplicação

$$f \in L_2^{\{1\}}(T^n) \longrightarrow (c_k[f])_{k\in Z^n} \in \ell_1\,(Z^n),$$

pois a composta de uma aplicação compacta com uma aplicação contínua ( $(c_k[f])_{k\in Z^n} \in \ell_1\,(Z^n) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_u(T^n)$ ) é compacta. Basta pois demonstrar que a imagem de todo conjunto limitado de $L_2^{\{1\}}(T^n)$ é relativamente compacta em $\ell_1(Z^n)$, isto é, que dado um conjunto limitado B de funções $f \in L_2^{\{1\}}(T^n)$, por exemplo o conjunto formado pelas $f \in L_2^{\{1\}}(T^n)$ que são tais que $\|D^P\|_2 \leq b$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$, e dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\varepsilon \in Z^n$ (cf.[D-S], pg. 338, exerc.3) tal que $\sum_{k\in \complement F} |c_k[f]| < \varepsilon$ para todo $f \in B$. Mas isto é imediato pois em cada somatória $\displaystyle\sum_{k_{j_1}\neq 0,\dots k_{j_r}\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 k_{j_1}^2} \cdots \frac{1}{4\pi^2\, k_{j_r}^2}$ podemos suprimir um número finito de somandos de modo a tornar o resto menor que $(\varepsilon/2^n b)^2$ donde segue o nosso resultado.

<u>Observações</u>: 1) Se quisermos uma avaliação do afastamento de f do seu valor médio $c_o[f]$ temos:

$$|f(x) - c_o[f]\,| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \sum_{i<j}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|_2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^n \left\|\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n}\right\|_2 \qquad (II;1,2)$$

2) Por "transporte" para $T^n$ ainda vale um teorema análogo para funções $f \in \mathcal{D}_2^{\{1\}}(U)$, onde $U$ é um aberto relativamente compacto de $R^n$. Se $d$ é o diâmetro de $U$, lembrando que

$$\| f(x/d) \|_2 = d^{n/2} \| f \|_2$$

e que
$$\| D^\alpha (f(x/d)) \|_2 = d^{(n/2)+|\alpha|} \| D^\alpha f \|_2$$

(II;1,1) nos dá

$$|f(x)| \leqslant d^{n/2} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (d\sqrt{3}/6)^{|P|} \| D^P f \|_2 \qquad \text{(II;1,3)}$$

A imersão $f \in \mathcal{D}_2^{\{1\}}(U) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_u(U)$ é completamente contínua.

3) Lembrando que para $p > 2$ temos $L_p^{\{1\}}(T^n) \subset L_2^{\{1\}}(T^n)$ e que esta imersão é contínua segue-se que o teorema também vale para funções $f \in L_p^{\{1\}}(T^n)$.

4) Para $1 < p < 2$, usando a desigualdade de Hölder e o teorema de Hausdorff-Young segue que a série de Fourier de uma função $f \in L_p^{\{1\}}(T^n)$ é absolutamente convergente, o resto do teorema seguindo de modo análogo ao caso $p = 2$.

5) Em casos particulares podemos melhorar a majoração (II;1, 1). Assim por exemplo quando sabemos que $f$ é muito "irregular", isto é, $\| f \|_2$ é pequena em comparação com os outros $\| D^P f \|_2$, então podemos substituir a somatória $\sum^{\emptyset} |c_k(f)| = |c_o(f)|$ por uma somatória $\sum |c_k(f)|$ extendida sôbre todos $k = (k_1, \dots k_n) \in Z^n$ tais que $|k_j| \leqslant 1$, $j = 1,2,\dots n$. En-

tão vem

$$|f(x)| \leq 3^{n/2} \| f \|_2 + C_1 \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x} \|_2 + C_1^2 \sum_{i<j} \| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \|_2 + \ldots +$$

$$+ C_1^n \| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \|_2 \qquad (II;1,4)$$

onde $C_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi^2 - 6}{3} \right]^{1/2} \simeq 0,18$ (lembremos que $\sqrt{3}/6 \simeq 0,28$).

6) Pode-se demonstrar que dados valores quaisquer $a_P > 0$, $P \in \mathcal{P}_n$, existe uma função $f \in L_2^{\{1\}}(T^n)$ tal que $\| D^P f \|_2 = a_P$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$.

7) O teorema acima generaliza certos teoremas clássicos como por exemplo o que se encontra à página 167 do livro "Fourierreihen" de Tolstov e que diz que dada uma função contínua $f$ sôbre $T^2$ que tem derivadas limitadas, a sua série de Fourier converge nos pontos em que $\partial^2 f/\partial x \partial y$ fôr contínua. Nosso teorema mostra que tôdas estas hipóteses são supérfluas.

2 - Vamos comparar a majoração dada por (II;1,1) com a majoração dada por [B-M], (3), onde tomamos $\rho = 1$ (que corresponde justamente ao caso do tóro) e $M(u) = u^2$; vem

$$|f(x)|^2 \leq 2^{3n} \| f \|_2^2 + 2^{3(n-1)} \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x_j} \|_2^2 +$$

$$+ 2^{3(n-2)} \sum_{i<j} \| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \|_2^2 + \| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \|_2^2 \qquad (M-B,\ 3)$$

Calculemos $|f(x)|^2$ a partir de (II;1,1) lembrando que $(\sum_{j=1}^{m} a_j)^2 \leq m \sum_{j=1}^{m} a_j^2$ e que em (II;1,1) temos $2^n$ somandos:

$$|f(x)|^2 \leq 2^n \Big[ \|f\|_2^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{6})^2 \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_2^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{6})^4 \sum_{i<j} \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\|_2^2 +$$

$$\ldots + (\tfrac{\sqrt{3}}{6})^{2n} \|\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\|_2^2 \Big]$$

o que mostra que a nossa majoração de $|f(x)|$ é de pelo menos $1/(2^n 3^n/6^{2n})^{1/2} = 6^{n/2}$ vêzes menor que a obtida por (B-M,3).

§ 2 - Estudo de $L_2^{\{1\}}(R^n)$

1 - Teorema: Dada uma função $f \in L_2^{\{1\}}(R^n)$ temos $\hat{f} \in L_1(R^n)$ e por conseguinte $f$ é uma função contínua limitada. Temos

$$|f(x)| \leq (2a)^{n/2} \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (1/2\pi a)^{|P|} \|D^P f\|_2 =$$

$$=(2a)^{n/2} \Big[ \|f\|_2 + \frac{1}{2\pi a} \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_2 + (\frac{1}{2\pi a})^2 \sum_{i<j} \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\|_2 + \ldots +$$

$$+ (\frac{1}{2\pi a})^n \|\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\|_2 \Big] \qquad \text{(II;2,1)}$$

onde a é um número positivo qualquer. A imersão $f \in L_2^{\{1\}}(R^n) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_n^*(R^n)$ é contínua.

Demonstração: basta mostrar que $\|\hat{f}\|_1$ é majorada pelo segundo membro de (II;2,1) (pois $|f(x)| \leq \|\hat{f}\|_1$ e a imersão é então evidentemente contínua). Dado $a > 0$ e $P \in \mathcal{P}_n$, seja $P_a = \{x \in R^n \mid |x_j| > a$ se $j \in P$ e $|x_j| \leq a$ se $j \notin P$, $j = 1,\ldots,n\}$. Temos $R^n = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n} P_a$ e $\|\hat{f}\|_1 = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \|\hat{f}_{P_a}\|_1$

onde

$$\hat{f}_{P_a}(\xi) = \begin{cases} 0 \text{ se } \xi \notin P_a \\ \hat{f}(\xi) \text{ se } \xi \in P_a \end{cases}.$$

Calculemos $\|\hat{f}_{P_a}\|_1$ quando, por exemplo, $P=\{1,2,\ldots,r\}$:

$$\|\hat{f}_{P_a}\|_1 = \int_{-a}^{a} d\xi_{r+1} \ldots \int_{-a}^{a} d\xi_n \int_{|\xi_1|>a} \ldots \int_{|\xi_r|>a} \frac{1}{2\pi\xi_1} \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{2\pi\xi_r} 2\pi\xi_1 \ldots 2\pi\xi_r \hat{f}(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (I;4,2) vem

$$\|\hat{f}_{P_a}\|_1 \leq \left[ \int_{-a}^{a} d\xi_{r+1} \ldots \int_{-a}^{a} d\xi_n \int_{|\xi_1|\geq a} \ldots \int_{|\xi_r|\geq a} \left|\frac{1}{2\pi\xi_1} \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \frac{1}{2\pi\xi_r}\right|^2 d\xi_1 \ldots d\xi_r \right]^{1/2} . \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_1 \ldots \partial x_r} \right\|_2 =$$

$$= (2a)^{n/2} \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^r \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_1 \ldots \partial x_r} \right\|_2 = (2a)^{n/2} (1/2\pi a)^{|P|} \|D^P f\|_2 .$$

Analogamente procedemos para os outros $P \in \mathcal{P}_n$, donde segue (II;2,1).

<u>Observações</u>. 1) Dados números quaisquer $\alpha_P > 0$, $P \in \mathcal{P}_n$, pode-se mostrar que existe uma função $f \in L_2^1(R^n)$ tal que $\|D^P f\|_2 =$

$= \alpha_P$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$.

2) Dado um conjunto de valores $\alpha_P$, $P \in \mathcal{P}_n$, existe um e um só valor de $\underline{a}$ que torna mínima a majoração dada por (II; 2, 1). Para $n = 2$, êste valor de $a$ é dado por

$$a = \frac{1}{2\pi} \left[ \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \right\|_2 \Big/ \|f\|_2 \right]^{1/2}$$

e temos portanto,

$$|f(x,y)| \leq \frac{2}{\pi} \left[ \|f\|_2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \right\|_2 \right]^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_2 \right) \qquad \text{(II;2,2)}$$

3) Em vez de um número $a > 0$, poderiamos ter usado uma n-pla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de números $a_j > 0$ e trabalhar com a decomposição $P_a = \{x \in R^n \mid |x_j| > a_j$ se $j \in P$ e $|x_j| \leq a_j$ se $j \notin P$, $j = 1, \ldots, n\}$, $P \in \mathcal{P}_n$ de $R^n$.

4) A imersão mencionada no teorema não é completamente contínua: dada uma função $f \in L_2^{\{1\}}(R^n)$, o conjunto B de tôdas as suas transladadas é evidentemente limitado mas êle não é relativamente compacto em $\mathcal{C}_u^*(R^n)$.

5) Se porém nos restringirmos a $\mathcal{D}_2^{\{1\}}(U)$, onde U é relativamente compacto, então a imersão

$$f \in \mathcal{D}_2^{\{1\}}(U) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_u^*(U)$$

é completamente contínua (o que aliás pode ser demonstrado usando a observação 2) do § 1.1).

6) Neste caso já não vale a observação 1: dada uma função $f \in L_2^{\{1\}}(R^n)$ de suporte compacto contida num hipercubo de lado b, temos as relações $\|f\|_2 \leq \frac{b}{2} \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_2$ $j = 1,2,\ldots,n$. E mais geralmente $\|D^{P_1} f\|_2 \leq (\frac{b}{2})^{|P_2|-|P_1|} \|D^{P_2} f\|_2$ se $P_1 \subset P_2$. (Cf. (II;1,3).

7) Para $p > 2$ temos $L_p(R^n) \supset L_2^1(R^n)$ mas pode-se dar exemplos de funções $f \in L_2^{\{1\}}(R^n)$ tais que para todo $p < 2$ temos $f \notin L_p(R^n)$.

8) Usando o teorema de Hausdorff-Young e a desigualdade de Hölder ainda se pode demonstrar que $\hat{f} \in L_1(R^n)$ para tôda função $f \in L_q^{\{1\}}(R^n)$ com $1 < q \leq 2$ e que portanto são válidos os resultados correspondentes do teorema.

2 - Comparemos agora a majoração global dada por (II;2,1) com a majoração global obtida a partir de [B-M], (3), isto é fazendo $\rho = \infty$ e $M(u) = u^2$:

$$|f(x)|^2 \leq 2^{2n} \|f\|_2^2 + 2^{2(n-1)} \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_2^2 + 2^{2(n-2)} \sum_{i<j} \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\|_2^2 +$$

$$+ \ldots + \|\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\|_2^2 .$$

Tomando $a = 1/\pi$ em (II;2,1) um cálculo análogo ao feito em § 1.2 nos dá,

$$|f(x)|^2 \leq \frac{2^{2n}}{\pi^n} \left[ \|f\|_2^2 + \frac{1}{2^2} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_2^2 + \frac{1}{2^4} \sum_{i<j} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\|_2^2 + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \right\|_2^2 \right] ,$$

o que mostra que nossa avaliação global de $|f(x)|$ é pelo menos $\pi^{n/2}$ vêzes menor que a avaliação correspondente de [B-M].

3 - No caso particular em que $f \in \mathcal{D}_2^{\{1\}}(R^n)$ isto é, fôr de suporte compacto, pode-se demonstrar que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \right\|_1 \leq \frac{1}{2^n} \mu(\underline{f})^{1/2} \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \right\|_2 \qquad (II;2,3)$$

(Cf. [H], Lema 1.1) mas esta majoração não é comparável com as majorações dadas por (II;1,3) e (II;2,1). Isto é, pode-se exibir funções em que tanto uma ou outra das majorações dá melhores resultados.

# CAPÍTULO III

## O Teorema de Sobolev

Lembremos que dado um aberto $U \subset R^n$ ou $U \subset T^n$ e um inteiro $m \geq 0$, $L_2^{(m)}(U)$ indica o conjunto das funções $f \in L_2(U)$ tais que $D^\alpha f \in L_2(U)$ para tôda n-pla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$. Munido de qualquer das normas equivalentes

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \|D^\alpha f\|_2,$$

onde $a_\alpha > 0$, êle é um espaço de Banach que é mesmo hilbertiano.

$\mathcal{D}_2^{(m)}(U)$ indica a aderência de $\mathcal{D}(U)$ em $L_2^{(m)}(U)$. Para $U = R^n$ ou $U = T^n$ temos $\mathcal{D}_2^{(m)}(U) = L_2^{(m)}(U)$. Para $p \neq 2$ usamos notações análogas.

### § 1 - O Teorema de Sobolev global

1 - <u>Teorema</u>: Seja $0 \leq k < m \leq \frac{n}{2}$ : $L_2^{(m)}(R^n) \subset L_q^{(k)}(R^n)$ para todo $q$ tal que $2 \leq q < \frac{2n}{n - 2(m-k)}$.

**Demonstração:** precisamos demonstrar que dado $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq k$ temos $D^\alpha f \in L_q(R^n)$ para todo $q$ tal que $2 \leq q < \frac{2n}{n - 2(m-k)}$. Do teorema de Hausdorff-Young segue que é suficiente demonstrar que $\widehat{D^\alpha f} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f} \in L_{q'}(R^n)$ onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ isto é $q' = \frac{q}{q-1}$. Ponhamos

$$|(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^{q'} = \left|\frac{1}{1+|\xi^s|}\right|^{q'} . |(1+|\xi^s|)(2\pi i\xi)\,\hat{f}(\xi)|^{q'}$$ onde

$s$ é um inteiro a ser determinado e tomemos um par $(r,r')$ com $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ e apliquemos a desigualdade Hölder relativamente ao par $(r,r')$ ao 2º membro da decomposição acima. Vem:

$$\|(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}\|^{q'}_{q'} = \int |(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^{q'} d\xi \leqslant \qquad \text{(III;1,1)}$$

$$\leqslant \left\| \left|\frac{1}{1+|\xi^s|}\right|^{q'} \right\|_r . \left\| |(1+|\xi^s|)\,(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^{q'} \right\|_{r'}$$

e vamos mostrar que podemos determinar $s$ e $r$ de modo que para $2 \geqslant q' > \frac{2n}{n+2(m-k)}$ ambos os fatores do 2º membro de (III;1,1) sejam finitos. Daí segue nosso resultado se lembrarmos que $2 \geqslant q' > \frac{2n}{n+2(m-k)}$ equivale a $2 \leqslant q < \frac{2n}{n-2(m-k)}$.

De $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ segue em particular que

$f, \dfrac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \in L_2(R^n)$ para $j=1,2,\ldots,n$ e portanto

$\mathcal{F}\left[f+\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right] = (1+|(2\pi i\xi)^m|)\,\hat{f} \in L_2(R^n)$; de $|\alpha| \leqslant k$ segue que $|\xi^\alpha| \leqslant (1+|(2\pi i\xi)^k|)$ e como por outro lado $(1+|\xi^{k_1}|)(1+|\xi^{k_2}|) \leqslant C\,(1+|\xi^{k_1+k_2}|)$ (onde $C$ é uma constante conveniente) temos portanto que $|(1+|\xi^s|)(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^{q'r'} \leqslant C|(1+|\xi^{s+k}|)\,\hat{f}(\xi)|^{q'r'}$.

Esta última função é certamente integrável se tivermos $q'r'=2$ e $(s+k)q'r' \leqslant 2m$ (pois $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ e portanto

$|(1+|\xi^m|)\hat{f}(\xi)|^2 \in L_1(R^n))$ isto é, se $s \leq m-k$. Portanto para $q'r' = 2$ e $s \leq m-k$ a norma do 2º fator de (III;1,1) é finita.

Vejamos agora a norma do 1º fator: a função

$$\left(\frac{1}{1+|\xi^s|}\right)^{q'r}$$

é integrável se e sòmente se $sq'r > n$ (cf.(I;2,1)). Lembrando que $r = \frac{r'}{r'-1}$ e que $q'r' = 2$ então a condição $sq'r > n$ equivale a $\frac{2s}{r'-1} > n$ ou ainda a $r' < \frac{2s+n}{n} \leq \frac{n+2(m-k)}{n}$ pois $s \leq m-k$. De $r' = \frac{2}{q'}$ vem portanto que $q' > \frac{2n}{n+2(m-k)}$.

Vemos pois que tomando $s = m-k$ e $r' = \frac{2}{q'}$, isto é, $r = \frac{2q}{q+1}$, ambos os fatores do 2º membro de (III;1,1) têm soma finita. C.Q.D.

Observações: 1) Teria sido suficiente demonstrar o teorema para $k = 0$ e em seguida aplicá-lo para $m' = m-k$ para obtê-lo sob a forma geral. Por outro lado quando $k = 0$ basta demonstrar o teorema para $m = 1$ e em seguida aplicá-lo repetidas vêzes.

2) A imersão $L_2^{(m)}(R^n) \subset L_q^{(k)}(R^n)$ é contínua se munirmos êstes espaços com as normas definidas no começo deste capítulo. Ela não é porém completamente contínua (cf. a observação 4) do §2, Cap.II). Porém sua restrição a $\mathcal{D}_2^{(m)}(U)$, onde U é um aberto relativamente compacto, é completamente contínua.

3) Pode-se usar (III;1,1) para obter uma majoração de $\|D^\alpha f\|_q$ em função dos $\|D^\beta f\|_2$, $|\beta| \leq m$.

4) Nas condições do teorema acima não temos em geral $f \in L_q(R^n)$ para $q < 2$; basta lembrar que existem funções $g \notin L_2(R^n)$ de suporte compacto e tais que $g \notin L_{q'}(R^n)$ se $q' > 2$; tomamos então $f = \hat{g}$.

2 - Teorema: Seja $m > n/2$; então para tôda função $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ temos $\hat{f} \in L_1(R^n)$ e $f$ é pois uma função contínua limitada e $f \in L_p(R^n)$ para todo $p \geqslant 2$. A aplicação $f \in L_2^{(m)}(R^n) \longrightarrow \hat{f} \in L_1(R^n)$ é contínua.

Demonstração: temos

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{1 + |(2\pi i\xi)^m|} (1 + |(2\pi i\xi)^m| \hat{f}(\xi)$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwartz segue que

$$\| \hat{f} \|_1 \leqslant \left[ \int \left| \frac{1}{1+|(2\pi i\xi)^m|} \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \left[ \|f\|_2 + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \right\|_2 \right] \tag{III;1,2}$$

e o 1º fator do 2º membro é finito pois $2m > n$ (cf.(I;2,1)) donde segue que $\hat{f} \in L_1(R^n)$. As outras afirmativas são então triviais.

Observações: 1) Usando a desigualdade de Hölder e o teorema de Hausdorff-Young a demonstração acima se adapta fàcilmente para mostrar que $f \in L_p^{(m)}(R^n)$ implica $\hat{f} \in L_1(R^n)$ se $1 \leqslant p < 2$ e $m > n/p$, valendo então também as outras conclusões.

2) Lembrando que $|f(x)| \leq \|\hat{f}\|_1$, (III;1,2) nos mostra que a imersão

$$f \in L_2^{(m)}(R^n) \longrightarrow f \in \mathcal{C}_u^*(R^n)$$

é contínua e nos permite achar uma majoração para $|f(x)|$.

3) A imersão acima não é completamente contínua mas sua restrição a $\mathcal{D}_2^{(m)}(U)$ o será se U fôr um aberto relativamente compacto.

4) De 3) segue que para um aberto U qualquer a imersão

$$L_2^{(m)}(U) \subset \mathcal{C}_c(U)$$

é completamente contínua. Em geral porém não temos

$$L_2^{(m)}(U) \subset \mathcal{C}^*(U) \text{ (cf.§ 3).}$$

5) Se para todo $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ com $|\alpha| \leq m$ dermos um número $a_\alpha > 0$ em geral não existe uma função $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ e tal que $\| D^\alpha f\|_2 = a_\alpha$ para todo $\alpha$. (cf. o Cap. IV).

## § 2 - O teorema de Sobolev sôbre o toro

1 - Teorema: Seja $0 \leq k < m \leq \frac{n}{2}$ : $L_2^{(m)}(T^n) \subset L_q^{(k)}(T^n)$ para todo q tal que $1 \leq q < \frac{2n}{n-2(m-k)}$.

Demonstração: o resultado é evidente para $q \leq 2$ pois o toro sendo compacto temos $L_q(T^n) \supset L_2(T^n)$ se $q \leq 2$. Resta pois demonstrar o teorema para $q > 2$. Do teorema de Hausdorff-Young segue que é suficiente demonstrar que para todo $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ com $|\alpha| \leq k$ temos

$$(c_h[D^\alpha f])_{h\in Z^n} = ((2\pi i h)^\alpha \; c_h[f])_{h\in Z^n} \in \ell_{q'}(Z^n) \text{ onde } q' = \frac{q}{q-1}.$$

Pondo $|(2\pi i h)^{\alpha}\ c_h(f)|^{q'} = |\frac{1}{|h^s|}|^{q'}.||h^s|(2\pi i h)^{\alpha}\ c_h(f)|^{q'}$ o resto da demonstração segue os mesmos passos que a demonstração do teorema do § 1-1.

Observações: 1) Pode-se demonstrar que a imersão acima é completamente contínua.

2) Vale o análogo da observação 3) de § 1-1.

3) Por "transporte" em $T^n$ demonstra-se a partir do teorema acima que para todo aberto limitado $U \subset R^n$ temos

$$\mathcal{D}_2^{(m)}(U) \subset \mathcal{D}_q^{(k)}(U).$$

2 - <u>Teorema</u>: Seja $m > n/2$; então tôda função $f \in L_2^{(m)}(T^n)$ tem série de Fourier absolutamente somável, isto é, $(c_k(f))_{k \in Z^n} \in \ell_1(Z^n)$ e $f$ é pois uma função contínua.

Demonstração: de modo análogo como fizemos na demonstração do teorema do § 1-2 mostramos que

$$\sum_{k \in Z^n} |c_k(f)| \leq \left[\sum_{k \in Z^n} \left|\frac{1}{|(2\pi i k)^m|}\right|^2\right]^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right\|_2\right)$$

a série do 1º fator do segundo membro sendo convergente pois $2m > n$, donde segue o nosso teorema.

Observação: valem os análogos das observações 1), 2) e 5) do § 1-2, 1) e 3) do § 2-2.

§ 3 - Contraexemplos

Os teoremas demonstrados em §1-2 e §2-2 nos asseguram que para $m > n/2$ as funções de $L_2^{(m)}(R^n)$ ou $L_2^{(m)}(T^n)$ são contínuas e limitadas. Resultado análogo já não vale para as funções de $L_2^{(m)}(U)$ onde $U$ é um aberto de $R^n$ ou $T^n$; estas funções ainda são contínuas e coincidem mesmo localmente com funções que tem série de Fourier absolutamente convergente, porém não são necessàriamente limitadas mesmo se $U$ fôr limitado. Se $U$ tiver uma fronteira suficientemente regular (não vamos dar aqui uma definição disto; aliás não se conhece uma condição necessária e suficiente para que tôdas as funções de $L_2^{(m)}(U)$ sejam limitadas) as funções de $L_2^{(m)}(U)$ serão limitadas. Sobolev originalmente tinha demonstrado seus teoremas para abertos limitados que satisfazem uma certa "condição do cone"; ver [Sob.1] pg.485 e [Sm.V] pg. 305.

Mesmo no plano é fácil dar exemplos de abertos bastante simples $U$ e de funções $f \in L_2^{(\infty)}(U)$ que não são limitadas: tomemos $U = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < e^{-1/x^2}\}$ e $f(x,y) = e^{1/x}$.

É possível dar ainda contraexemplos de natureza completamente diferente.

# CAPÍTULO IV

## A existência de derivadas mixtas

### § 1. Derivadas mixtas em $R^n$

Teorema - Dada uma função $f \in L_2(R^n)$ tal que para $j = 1,2,\ldots n$ temos $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \in L_2(R^n)$ então também temos $D^\alpha f \in L_2(R^n)$ para todo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ tal que $|\alpha| \leq m$.

Demonstração: é suficiente demonstrar que $\widehat{D^\alpha f} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f} \in L_2(R^n)$ o que é imediato pois se $|\alpha| = m$ temos

$$|(2\pi i\xi)^\alpha| \leq \sum_{j=1}^{n} |2\pi i \xi_j|^{|\alpha|} \qquad \text{(IV;1,1)}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j^{k_j} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{k_1+\ldots+k_n}\right) \text{ e portanto}$$

$$|(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)| \leq \sum_{j=1}^{n} |2\pi i\xi_j|^m |\hat{f}(\xi)|$$

donde segue que

$$\|(2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)\|_2 \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} |2\pi i\xi_j|^m |\hat{f}(\xi)| \Big\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} \|(2\pi i\,\xi_j)^m \hat{f}\|_2$$

isto é,

$$\|D^\alpha f\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \Big\|_2 \quad (|\alpha| = m) \qquad \text{(IV;1,2)}$$

Quando $|\alpha| < m$, (IV;1,1) é substituido por

$$|(2\pi i\xi)^{\alpha}| \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} |2\pi i \xi_j|^m \qquad (IV;1,1')$$

donde segue que

$$\|D^{\alpha} f\|_2 \leq \| f \|_2 + \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \|_2 \qquad (IV;1,2')$$

Observações: 1) Na realidade (IV;1,2) pode ser melhorada, isto é, existe uma constante $C^{(\alpha)} \geq 1$ (que tomamos a maior possível) tal que

$$C^{(\alpha)} \|D^{\alpha} f\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_j^{|\alpha|}} \|_2 \qquad (IV;1,3)$$

Esta relação mostra em particular que $D^{\alpha} f$ depende continuamente dos $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_j^{|\alpha|}}$, $j = 1,2, \ldots m$.

Para $n = 2 = m$, por exemplo, pode-se demonstrar que $C^{(1,1)} = 2$, isto é que

$$2 \| \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \|_2 \leq \| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \|_2 + \| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \|_2 \qquad (IV;1,4)$$

Em geral temos

$$C^{(\alpha)} \leq \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!},$$

nem sempre valendo a igualdade.

2) O teorema acima mostra que, ao contrário do que acontece nos espaços $L_2^{\{1\}}(R^n)$, em $L_2^{(m)}(R^n)$ os $\|D^{\alpha} f\|_2$, $|\alpha| \leq m$, não podem ser dados arbitràriamente a priori.

3) De modo geral, por um método semelhante ao usado na demonstração do teorema precedente, pode-se demonstrar que dados polinômios $P_1,\dots,P_k$ e $P$ (todos em n indeterminadas) e tais que $|P(\xi)| \leq C \sum_{j=1}^{k} |P_j(\xi)|$ para todo $\xi \in R^n$ então para tôda função $f \in L_2(R^n)$ que é tal que $P_j(D)f \in L_2(R^n)$ para $j=1,\dots k$, temos também $P(D)f \in L_2(R^n)$.

Exemplo: dada uma função $f \in L_2(R^n)$ tal que $\Delta f \in L_2(R^n)$ então temos também $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \in L_2(R^n)$, $j = 1,2,\dots n$, (e mais geralmente $D^\alpha f \in L_2(R^n)$ para $|\alpha| \leq 2$). Deste modo melhoramos um resultado de [Schw II], pg. 46.

Fato análogo ainda vale quando, em vez de $\Delta$ consideramos um operador elítico qualquer (i.e. $P(D)$ tal que $P(\xi) = 0$ implica $\xi = 0$).

4) O teorema acima ainda vale em $\mathcal{D}_2^{(m)}(U)$ mas não em $L_2^{(m)}(U)$. Tomando U aberto e limitado já não vale uma relação do tipo (IV;1,3) em $L_2^{(m)}(U)$. Tomemos por exemplo $n = 2 = m$ e $f(x,y) = axy$; temos $\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_2 = \|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_2 = 0$ mas $\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\|_2 = a\mu(U)^{1/2}$.

5) O teorema acima mostra que para termos $f \in L_2^{(m)}(R^n)$ é suficiente exigir que $f, \frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m} \in L_2(R^n)$.

## § 2 - Derivadas mistas sôbre $T^n$

Teorema: Dado um inteiro $m \geq 2$ e uma função $f \in L_2(T^n)$ tal que para $j = 1,2,\dots,n$ temos $\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \in L_2(T^n)$ então também temos $D^\alpha f \in L_2(T^n)$ para todo $\alpha$ com $|\alpha| \leq m$.

Demonstração: lembremos que $c_k[D^\alpha f] = (2\pi i k)^\alpha \, c_k[f] =$
$= (2\pi i k_1)^{\alpha_1} \dots (2\pi i k_n)^{\alpha_n} \, c_k[f]$ e que para $|\alpha| \leq m$ temos
$|(2\pi i k_1)^{2\alpha_1} \dots (2\pi i k_n)^{2\alpha_n}| \leq \sum_{j=1}^{n} |2\pi i k_j|^{2m}$ e portanto
$|(2\pi i k)^\alpha \, c_k[f]|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |(2\pi i k_j)^m \, c_k[f]|^2$ donde segue que

$$\sum_{k \in Z^n} |(2\pi i k)^\alpha \, c_k[f]|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{k \in Z^n} |(2\pi i k_j)^m \, c_k[f]|^2 \Big)$$

isto é

$$\|D^\alpha f\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \Big\|_2^2$$

donde segue

$$\|D^\alpha f\|_2 \leq \sum_{j=1}^{n} \Big\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} \Big\|_2 \qquad \text{(IV;2,1)}$$

Observações: 1) No teorema acima a hipótese de que $f \in L_2(T^n)$ é supérflua; basta supor que f é uma distribuição sôbre o tôro.

2) De modo exatamente análogo ao acima demonstra-se que se para $j = 1, 2, \dots, n$ $\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}$ tiver série de Fourier absolutamente somável então o mesmo é verdade para todo $D^\alpha f$ com $|\alpha| \leq m$.

3) Valem observações análogas às observações 1) a 5) do § precedente.

## Apêndice (ao Capítulo IV)

Apesar de sua demonstração simples, os resultados do presente capítulo são bastante surpreendentes pois pode-se dar exemplos de funções contínuas f sôbre $T^2$, f com derivadas primeiras contínuas e tais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ainda sejam contínuas sem que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ o seja; ver [Gl], pg. 102. Da observação 2) precedente segue porém que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ não tem série de Fourier absolutamente convergente. Os resultados dêste capítulo mostram que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L_2(T^2)$ e possìvelmente ainda vale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L_p(T^2)$ para qualquer p.

É interessante ver se para os espaços $L_p^{(m)}$ vale o análogo dos teoremas acima. Quando $p \neq 2$ a transformação de Fourier e as séries de Fourier já não nos podem prestar o mesmo serviço e as demonstrações correspondentes devem ser extremamente mais difícieis. Demonstramos, por exemplo, que no caso particular de $n = 2$ e $\alpha = (1,1)$ a demonstração de

$$C_p \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \right\|_p \leq \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|_p + \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\|_p$$

apenas para funções da forma $f(x,y) = X(x)Y(y)$ já é <u>equivalente</u> a demonstrar que $\|X'\|_p^2 \leq \frac{2}{C_p} \|X\|_p \|X''\|_p$, demonstração esta que é feita usando o cálculo das variações; ver [H-L-P], cap VII.

Também demonstramos que no exemplo acima, para $p \neq 2$, não vem mais a constante $C_p = 2$ (Cf. (IV;1,4)); assim para $p = 1$ e $p = \infty$ temos $C \leq 1$ (e acreditamos que nestes dois casos $C = 1$ é a melhor constante).

## Referências bibliográficas


[B] - J.BARROS-NETO: "The Dirichlet problem for homogeneous elliptic operators in a half space", Bull.Amer. Math.Soc., vol. (1964), pp.798-802

[B-C] - BOCHNER and CHANDRASEKHARAN: "Fourier Transforms", Princeton Univ.Press, 1949

[B-M] - BOJANIC and MUSIELAK: "An inequality for functions with derivatives in an Orlicz space", Proc.Amer. Math.Soc., vol.15 (Dec,1964), pp.902-906

[B-S] - BERS,JOHN and SCHECHTER: "Partial Differential Equations", Interscience, 1964

[D-S] - DUNFORD and SCHWARTZ: "Linear Operators", Interscience, 1958 (I), 1963 (II)

[F] - DJAIRO G.de FIGUEIREDO: "Extensões da desigualdade de Garding", tese, 1962

[Gl] - GEORGES GLAESER: "Etude de quelques algèbres tayloriennes", Journal d'Anal.Math.,vol.VI(1958), pp.1-124

[H] - HORMANDER: "Estimates for translation invariant operators in Lp spaces", Acta Math., vol.104 (1960), pp.93-140

[H-L-P] - HARDY, LITTLEWOOD and POLYA: "Inequalities", Cambridge Univ. Press, 1952

[Hön.] - C.S.HÖNIG: "Métodos Matemáticos da Física (Teoria das distribuições)", Dep.de Física da FFCL da USP, 1961

[K-S] - KAHANE et SALEM: "Ensembles parfaits et séries trigonométriques", Hermann, 1963

[Schw.II] - SCHWARTZ: "Théorie des Distribuitions, tome II", Hermann, 1959

[Schw.MMP] - SCHWARTZ: Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", Hermann, 1961

[Sm.V] - SMIRNOW: "Lehrgang der höheren Mathematik" Teil V, Deutscher Verlag der Wissenschaften,1962

[Sob.1] - SOBOLEV: "Sur un théoreme d'analyse fonctionelle" (en russe, resume en français),Mat.Sbornik,vol. 46 (1938), pp.471-497

[Sob.2] - SOBOLEV: "Algumas aplicações da Análise Funcional na Física Matematica" (em russo; acaba de aparecer uma tradução alemã), Novosibirsk, 1962

(T) - TITCHMARSH: "Fourier Integrals", Oxford Univ.Press, 1937

(Z) - ZYGMUND: "Trigonometrical Series", Chelsea Publ. Co., 1952: