UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DESENVOLVIMENTO DOS MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO PARA AVALIAÇÃO DE JAZIDAS

Jorge Kazuo Yamamoto

Sistematização crítica de parte da obra do Candidato apresentada ao Concurso para obtenção do Título de Livre-Docente junto Departamento de Geologia Econômica e Geofísica Aplicada do Instituto do Geociências da Universidade de São Paulo, na Área de Conhecimento: Prospecção e Avaliação de Jazidas Minerais.

São Paulo
1995

SUMÁRIO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS BIBLIOTECA T2261 USP

pág.

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Objetivos 2

2 HISTÓRICO 4

3 APRESENTAÇÃO SISTEMÁTICA DE PARTE DA OBRA 9

3.1 Modelagem de depósitos minerais por hipersuperfícies de tendência 9

3.2 Representações gráficas espaciais em Geologia 13

3.3 Uso das equações multiquádricas para avaliação de jazidas 26

3.4 Ajuste local de equações multiquádricas para a modelagem digital de superfícies 29

3.5 Representações gráficas espaciais em Geociências auxiliadas por computador 38

3.6 Comparação entre krigagem e equações multiquádricas 39

3.7 Novo método de interpolação bidimensional 40

3.8 Novo método de interpolação tridimensional 52

3.9 Estudo comparativo de métodos computacionais para avaliação de jazidas 58

3.10 O método do inverso da potência da distância para avaliação de blocos 76

3.11 Composição de variâncias em depósitos minerais 81

3.12 Efeitos adversos da krigagem ordinária 83

3.12.1 Estudo da geometria do cone de sombra 94

3.12.2 Superavaliação do furo central em malhas regulares 97

DEDALUS - Acervo - IGC

30900005912

pág.

3.12.3 Pontos agrupados além da amplitude do variograma 102

4 ANÁLISE CRÍTICA 107

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 113

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 115

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS pág.

1: Interpretação geométrica das equações multiquádricas ajustadas para os dados da Tabela 4 (as curvas de linhas azuis representam as figuras quádricas e a curva de linha vermelha a figura final). 15

2: Mapa de localização dos pontos de dados sobre a semi-esfera. 17

3: Hiperbolóide circular associado ao ponto 3. 18

4: Hiperbolóide circular associado ao ponto 4. 18

5: Superfície multiquádrica interpolada a partir do conjunto de pontos de dados da Tabela 6. 19

6: Desenho esquemático mostrando a localização dos pontos amostrados sobre um cubo de lado igual a 100m. 22

7: Componente quádrica devida ao ponto 13 do conjunto de dados da Tabela 6. 23

8: Desenho mostrando o processo de interpolação da planta de isoteores da cota 100, por meio da soma da contribuição de todos os pontos para a mesma cota 100. 24

9: Bloco-diagrama mostrando a variação espacial de teores de uma jazida hipotética. 25

10: Plotagem dos teores de Fe_2O_3 (%), ao longo dos furos de sondagem 38 e 42, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM) e inverso do quadrado da distância (IQD), segundo Yamamoto (1987a). 27

11: Plotagem dos teores de Fe_2O_3 (%), ao longo dos furos de sondagem 20 e 44, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM) e inverso do quadrado da distância (IQD), segundo Yamamoto (1987a). 28

12: Projeção em perspectiva da superfície S1, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas 30

13: Projeção em perspectiva da superfície S2, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas. 31

14: Projeção em perspectiva da superfície S3, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas. 31

15: Projeção em perspectiva da superfície S4, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas. 32

16: Projeção em perspectiva da superfície S5, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas. 32

pág

17: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1, segundo Yamamoto (1990). 33

18: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2, segundo Yamamoto (1990). 33

19: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3, segundo Yamamoto (1990). 34

20: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4, segundo Yamamoto (1990). 34

21: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5, segundo Yamamoto (1990). 35

22: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1, segundo Yamamoto (1990). 35

23: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2, segundo Yamamoto (1990). 36

24: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3, segundo Yamamoto (1990). 36

25: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4, segundo Yamamoto (1990). 37

26: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5, segundo Yamamoto (1990). 37

27: Mapa de pontos de dados para interpolação de ponto de coordenadas (30,30). 41

28: Desenho esquemático mostrando a interpolação do ponto (30,30) por meio de um plano passando pelos pontos de dados. 41

29: Mapa de localização de 27 pontos de dados. 43

30: Mapa de triângulos para o conjunto final de pontos de dados. 44

31: Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelas equações multiquádricas (B). 45

32: Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelo novo método (B). 48

33: Diagrama de dispersão do fator de ponderação espacial e a distância do ponto mais próximo do subconjunto de dados, segundo Yamamoto (1988d). 50

34: Plotagem dos dados originais de Fe_2O_3 (%) ao longo dos furos 38 e 42, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM), inverso ao quadrado da distância (IQD), novo método (NM) e erro de interpolação do novo método (ENM), segundo Yamamoto (1989). 56

pág.

35: Plotagem dos dados originais de Fe_2O_3 (%) ao longo dos furos 20 e 44, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM), inverso ao quadrado da distância (IQD), novo método (NM) e erro de interpolação do novo método (ENM), segundo Yamamoto (1989). 57

36: Desenho mostrando o caso de avaliações pontuais por krigagem ordinária, usando a mesma configuração espacial dos dados, mas com diferentes dispersões: baixa (A) e alta (B), segundo Yamamoto (1992c). 63

37: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pelo método IQD-ORIGINAL, segundo Yamamoto (1991a). 69

38: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pelo método IQD-PROPOSTO, segundo Yamamoto (1991a). 69

39: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pela PONDERAÇÃO ESPACIAL, segundo Yamamoto (1991a). 70

40: Diagrama de dispersão dos teores de cobre calculados pela KRIGAGEM e variâncias pela equação (28), segundo Yamamoto (1991a). 70

41: Diagrama de dispersão dos teores de cobre calculados pela KRIGAGEM e variâncias pela equação (29), segundo Yamamoto (1991a). 71

42: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pelo método IQD, segundo Yamamoto (1991a). 72

43: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pela ponderação espacial, segundo Yamamoto (1991a). 73

44: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pela krigagem ordinária, segundo Yamamoto (1991a). 73

45: Curvas teor x tonelagem para as reservas geológicas de cobre, segundo Yamamoto (1991a). 75

46: Localização das amostras dos furos de sondagem e do bloco que se deseja avaliar. 79

47: Localização dos oito pontos vizinhos mais próximos para o arranjo aleatório, modificado de Harbaugh et al. (1977). 86

48: Localização dos oito pontos vizinhos mais próximos para o arranjo semi-regular, modificado de Harbaugh et al. (1977). 86

49: Seleção de duas amostras por quadrante, para o arranjo aleatório, adaptado de Harbaugh et al. (1977). 87

50: Seleção de uma amostra por octante, para o arranjo aleatório, adaptado de Harbaugh et al. (1977). 88

pág.
51: Seleção de duas amostras por quadrante, para o arranjo semi-regular, adaptado de Harbaugh et al. (1977). 88
52: Localização de oito amostras de furos de sondagem mais próximas ao centro do bloco, segundo Yamamoto & Bettencourt (1992). 89
53: Seleção de uma amostra de furo de sondagem por setor (quadrante tridimensional), segundo Yamamoto & Bettencourt (1992). 89
54: Representação dos coeficientes para o subconjunto próximo do arranjo aleatório. 91
55: Representação dos coeficientes para o subconjunto quadrante do arranjo aleatório. 92
56: Representação dos coeficientes para o subconjunto octante do arranjo aleatório. 92
57: Representação dos coeficientes para o subconjunto próximo do arranjo semi-regular. 93
58: Representação dos coeficientes para o subconjunto quadrante do arranjo semi-regular. 94
59: Padrões de variação do peso da amostra adicional para duas amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); e em quadrantes alternados (C e D), segundo Yamamoto (1994a). 95
60: Padrões de variação do peso da amostra adicional para três amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); e em três quadrantes (C e D), segundo Yamamoto (1994a). 96
61: Padrões de variação do peso da amostra adicional para quatro amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); em três quadrantes (C) e em quatro quadrantes (D), segundo Yamamoto (1994a). 96
62: Comparação entre os métodos dos triângulos e dos polígonos na avaliação de uma malha regular quadrada. 98
63: Bloco de cubagem, de lado igual a 50m, para avalição pela krigagem ordinária. 98
64: Desenho mostrando as divisões adotadas para os métodos de avaliação utilizados e os resultados obtidos. 99
65: Decomposição do bloco em quatro sub-blocos para avaliação pela krigagem ordinária. 101
66: Mapa de localização dos pontos de dados. 103

pág.
67: Mapa de localização de pontos de dados, com os pontos 1, 6 e 7 deslocados para a região NE. 104
68: Diagrama de barras dos ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo da Figura 67. 106
69: Variação da soma dos coeficientes das equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30) a partir dos subconjuntos de pontos extraídos da Tabela 15. 111

TABELAS

pág.
1: Resultados da análise de variância para as hipersuperfícies de tendência, segundo Yamamoto (1980). 11
2: Parâmetros de ajuste das hipersuperfícies de tendência, segundo Yamamoto (1980). 11
3: Número de coeficientes do polinômio em função da sua ordem (grau). 12
4: Conjunto de pontos de dados sobre a semi-circunferência de raio=100m. 14
5: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos de dados da Tabela 4, e constante C=0. 15
6: Conjunto de pontos de dados sobre uma semi-esfera, conforme a equação (11). 16
7: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos sobre a semi-esfera (Tabela 6). 17
8: Erros de estimativa RMS (%) entre os ajustes globais para as funções F1 e F2. 21
9: Erros de estimativa RMS (%) para a função F1, com o ajuste das equações multiquádricas feito no domínio logarítmico. 21
10: Coordenadas dos pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 6. 22
11: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 6 (Constante C=0). 22
12: Sumário dos erros de aproximação e de estimativa para 8 a 12 pontos. 38
13: Erros RMS (%) entre as malhas interpoladas e originais. 40
14: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 27. 40
15: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 29. 43
16: Resultados da cota interpolada com números variáveis de pontos de dados de 3 até 27 pontos, em incrementos de 3. 44
17: Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelas equações multiquádricas. 45
18: Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelo novo método. 47
19: Erros RMS (%) entre as malhas interpoladas e originais. 52
20: Resultados dos cálculos da variância de interpolação, segundo as propostas de Yamamoto (1988d e 1989). 55
21: Dispersão entre os teores interpolados e os teores verdadeiros, segundo Yamamoto (1989). 58
22: Parâmetros estatísticos da distribuição de cobre nos furos de sondagem e bancadas, segundo Yamamoto (1992b). 61
23: Parâmetros estatísticos da distribuição de ouro nos furos de sondagem e bancadas, segundo Yamamoto (1992b). 61

pág.

24: Variâncias de krigagem e de interpolação para os arranjos (A) e (B), segundo Yamamoto (1992c). 64

25: Coordenadas e teor de cobre de oito amostras de furos vizinhos ao bloco 1886, segundo Yamamoto (1991a). 65

26: Vetores das distâncias entre as amostras e os sub-blocos, segundo Yamamoto (1991a). 66

27: Coeficientes da ponderação espacial para os sub-blocos, segundo Yamamoto (1991a). 67

28: Teores e variâncias para os sub-blocos, calculados de acordo com as equações (31) e (32), segundo Yamamoto (1991a). 67

29: Média e variâncias do bloco 1886 da jazida de Chapada, segundo Yamamoto (1991a). 67

30: Distâncias médias entre as amostras e os sub-blocos e coeficientes do bloco, segundo Yamamoto (1991a). 68

31: Teor e variância do bloco calculado pelas equações (33) e (34). 68

32: Parâmetros das retas dos mínimos quadrados (a e b), coeficientes de correlação (cc) e número de pontos (np) lançados nos diagramas para um total de 1596 pontos, segundo Yamamoto (1991a). 74

33: Erros padrão e RMS calculados para as validações cruzadas, segundo Yamamoto (1991a). 74

34: Reservas geológicas de cobre (metal contido) da Jazida de Chapada, segundo Yamamoto (1991a). 75

35: Valores máximos para discretização do domínio a ser estimado, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 97). 77

36: Coordenadas (em m) das amostras dos furos de sondagem. 79

37: Coordenadas (em m) dos centros dos sub-blocos. 79

38: Ponderadores da krigagem ordinária de bloco. 80

39: Ponderadores do inverso do quadrado da distância por sub-bloco (ponderadores x 10^{-4}) 80

40: Ponderadores do inverso do quadrado da distância, normalizados por sub-bloco. 80

41: Cálculo dos ponderadores médios do bloco. 80

42: Ponderadores da krigagem de bloco, do inverso do quadrado da distância para bloco e o original. 81

pág.

43: Coordenadas dos pontos de dados para os subconjuntos: próximo, quadrante e octante, extraídos do arranjo aleatório. 90

44: Coeficientes para as amostras dos subconjuntos próximo, quadrante e octante, do arranjo aleatório. 90

45: Coordenadas dos pontos de dados para os subconjuntos: próximo e quadrante, extraídos do arranjo semi-regular. 93

46: Coeficientes para as amostras dos subconjuntos próximo e quadrante, do arranjo semi-regular. 93

47: Pesos das amostras dos furos, para avaliação de bloco em malha regular com furo centrado, calculados pelos métodos analíticos e computacionais, segundo Yamamoto (1994b). 98

48: Coeficientes da krigagem ordinária de bloco, da Figura 63. 100

49: Pesos dos sub-blocos e do bloco obtidos para a avaliação de bloco em malha regular com furo centrado, pela aplicação da krigagem ordinária. 101

50: Coordenadas dos pontos de dados e o ponto a ser estimado. 102

51: Ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo de pontos da Figura 66. 104

52: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 67. 104

53: Ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo de pontos da Figura 67. 105

54: Resultados da interpolação pelas equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30), o erro relativo e a soma dos coeficientes. 110

QUADROS

pág.

I: Superfícies matemáticas utilizadas para verificação do ajuste local em relação ao global. 30

II: Características dos métodos computacionais em ordem decrescente de ajuste. 74

ABSTRACT

This paper presents a systematic revision, followed by a critical analysis, of a part of our scientific production in the research program centered on problems of mathematical interpolation of geological data for ore-body modelling and ore-reserve estimation. The main interpolation functions studied in this research program were: hyperpolynomials, multiquadric equations, ordinary kriging, new method of interpolation and inverse of weighted distance. The problem of estimation variance of interpolated value was also studied, which resulted in the proposition of interpolation variance as a dispersion measure of sampling points in relation to the interpolated value. Because of its simple statistical and mathematical formulation, interpolation variance can be applied to all the methods of interpolation based on the principle of weighted average. The origin of a new method of interpolation, developed during the research program, is restudied in this work in relation to the multiquadric equations and it is concluded that the efficiency of this method for a small number of sampling points is the result of the normalization of its coefficients. Thus the new method shall be referred to henceforth as "normalized multiquadric equations". The main characteristic of our research is the use of practical approaches to problems of ore-body modelling and ore-reserve estimation, such as: a) the method of "normalized multiquadric equations"; b) interpolation variance; and c) the inverse of weighted distance method adapted to block estimation. The improvement of multiquadric equations by means of normalization of their coefficients opens a new perspective to their application, because now they can be used as a local interpolation function, while maintaining the same characteristics of accuracy and smoothness of the interpolated surface. However, the correct choice of a multiquadric constant as a function of natural variability of geological data continues as an open question for future research. Besides its versatility in the estimation of dispersion variance for punctual and block evaluations, interpolation variance presents the advantage of being combinable in order to compute the global variance of a deposit associated with its global average grade, which is impossible in geostatistics. The inverse of weighted distance method for block evaluation is an important practical contribution to mining, because it has been extensively used when the ordinary kriging technique cannot be applied, for instance, when representative variograms cannot be computed.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma revisão sistemática, acompanhada de uma análise crítica, de parte da obra do autor dentro da linha de pesquisa centrada em problemas de interpolação matemática de dados geológicos para modelagem de jazidas e avaliação de reservas. As principais funções de interpolação estudadas nesta linha de pesquisa foram: hiperpolinômios, equações multiquádricas, krigagem ordinária, novo método e inverso da potência da distância. Foi também estudado o problema da variância de estimativa associada ao valor interpolado, que resultou na proposta da variância de interpolação como uma medida da dispersão dos pontos de amostragem em relação ao valor interpolado. Devido a sua formulação estatística e matemática extremamente simples, a variância de interpolação pode ser aplicada em todos os métodos de interpolação baseados no princípio da média ponderada. A origem do novo método de interpolação, desenvolvido ao longo da linha de pesquisa, em relação às equações multiquádricas é reestudado neste trabalho concluindo-se que a eficiência deste método para um pequeno número de pontos de amostragem deve-se à normalização dos seus coeficientes e daí a redenominação do novo método para "equações multiquádricas normalizadas". A pesquisa desenvolvida caracteriza-se por soluções práticas, aplicadas aos problemas de modelagem de jazidas e avaliação de reservas, das quais pode-se citar como contribuições importantes: o método das "equações multiquádricas normalizadas", a variância de interpolação e o método do inverso da potência da distância para avaliação de blocos. Com relação ao aperfeiçoamento das equações multiquádricas, por meio da normalização dos seus coeficientes, abre uma perspectiva muito grande para sua utilização, visto que agora elas podem ser usadas como interpoladores locais, mantendo as mesmas características de exatidão e suavidade da superfície interpolada. Entretanto, fica como questão aberta a correta escolha da constante multiquádrica em função da variabilidade natural dos dados geológicos, que deve ser estudada em pesquisa futura. Além da versatilidade da variância de interpolação no cálculo da variância de dispersão em avaliações pontuais e de bloco, ela apresenta a vantagem de poder ser combinada para o cálculo da variância do depósito associada ao teor médio global, o que é impossível pela geoestatística. O método do inverso da potência da distância para avaliação de blocos é uma contribuição prática importante à mineração, pois este método tem sido extensivamente utilizado, na sua metodologia original, quando a krigagem ordinária não pode ser aplicada, por exemplo, pela impossibilidade de obtenção de variogramas representativos.

1 INTRODUÇÃO

Este texto apresenta uma sistematização e análise crítica de parte da obra de autoria do candidato, notadamente entre 1980-1994, denominada "Desenvolvimento dos métodos de interpolação para avaliação de jazidas", que mostra a linha de pesquisa centrada em problemas de interpolação matemática de dados geológicos, bem como no cálculo da variância de estimativa associada.

Como a pesquisa mineral é baseada exclusivamente em pontos de amostragem, a análise e interpretação dos dados tem como etapa fundamental a interpolação tanto para produção de mapas de contorno de isovalores (interpolação bidimensional), bem como para fins de modelagem de jazidas (interpolação tridimensional) e avaliação de suas reservas. O interesse do Autor em problemas de interpolação surge com a técnica da análise de superfícies de tendência, que aprendeu ainda durante a graduação. Outras técnicas foram sendo estudadas e desenvolvidas ao longo de sua linha de pesquisa principal.

Além dos problemas de interpolação, havia grande preocupação também com relação ao erro de estimativa cometido na interpolação, devido a variabilidade natural dos depósitos minerais, que poderiam ser algo desde 10%, podendo chegar até 300%. Então a existência da variabilidade exigia também uma avaliação do erro de estimativa, que tem embutido também a parcela referente à densidade de amostragem.

A pesquisa foi dirigida tendo estas preocupações, quais sejam: interpolação e cálculo do erro associado. Assim, foram pesquisadas como funções de interpolação: hiperpolinômios, equações multiquádricas, krigagem ordinária, novo método, inverso da potência da distância. Como resultados importantes desta pesquisa, pode-se citar o desenvolvimento do novo método de interpolação e do método do inverso do quadrado da distância aperfeiçoado para avaliação de blocos. Com relação ao cálculo do erro associado a interpolação, foi desenvolvida a variância de interpolação como alternativa à variância de krigagem, mas que pode ser aplicada também para o novo método e para o inverso do quadrado da distância, em ambos os casos, tanto para avaliação pontual como para avaliação de bloco.

A principal justificativa para o desenvolvimento de novos métodos tanto para interpolação como para estimativa do erro, está no fato de que a krigagem ordinária, considerado como um dos melhores métodos de interpolação para avaliação de reservas, nem sempre resolve todos os problemas encontrados, se, por exemplo, não

se obtiver um variograma representativo da jazida. Um outro exemplo é o caso em que mesmo com um variograma representativo da jazida, não é possível calcular a variância do depósito associada ao teor médio global, pois a informação fornecida pelo variograma é limitada a uma parte do depósito (campo geométrico) não sendo possível a sua utilização para amostras situadas nos extremos do depósito, inviabilizando o cálculo da variância do depósito. Ainda com relação à krigagem ordinária, a sua utilização para conjuntos de pontos de dados selecionados sem critérios de pesquisa, bem como em arranjos de malhas regulares com furos centrados, pode levar a resultados indesejáveis, como conseqüência dos pesos negativos gerados nesses casos. Além disso, pode-se citar que o método do inverso da potência da distância, como proposto originalmente, é inadequado para avaliação de reservas por meio de blocos de cubagem.

Este trabalho apresenta uma sistematização de parte da obra de sua autoria, que mostra o desenvolvimento da linha de pesquisa em interpolação de dados para avaliação de reservas e estimativa do erro de interpolação. Como se poderá verificar no trabalho, o desenvolvimento está ancorado em duas pesquisas de pós-graduação (mestrado e doutoramento) do Autor.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar a sistematização de parte da obra do Autor, referente à pesquisa dos métodos de interpolação e cálculo do erro de interpolação aplicados a problemas de avaliação de reservas. A sistematização é apresentada em ordem cronológica e foi dividida em doze itens como se relaciona a seguir:

- modelagem de depósitos minerais por hipersuperfícies de tendência;

- representações gráficas espaciais em Geologia;

- uso das equações multiquádricas para avaliação de jazidas;

- ajuste local de equações multiquádricas para a modelagem digital de superfícies;

- representações gráficas espaciais em Geociências auxiliadas por computador;

- comparação entre krigagem e equações multiquádricas;

- novo método de interpolação bidimensional;

- novo método de interpolação tridimensional;

- estudo comparativo de métodos computacionais para avaliação de jazidas;

- o método do inverso do quadrado da distância para avaliação de blocos;

- composição de variâncias em depósitos minerais.

- efeitos adversos da krigagem ordinária.

2 HISTÓRICO

Logo no início de 1974, no 2º ano do Curso de Geologia, o candidato solicitou um estágio junto ao Laboratório de Sedimentologia, do Departamento de Paleontologia e Estratigrafia, que foi concedido pelo Prof. Armando Márcio Coimbra, o qual responsabilizou-se como orientador.

O início do estágio, durante o ano de 1974, foi marcado pelo aprendizado das técnicas de laboratório de sedimentologia que envolveram: preparação de amostras, análise granulométrica por pipetagem e peneiramento, separação de minerais pesados, identificação de minerais pesados ao microscópio, análises de arredondamento e esfericidade de grãos de areia, etc. Todas estas análises laboratoriais foram efetuadas para as pesquisas de pós-graduação que se encontravam em andamento nesta época.

Após o aprendizado destas técnicas laboratoriais, o candidato passou à fase de tratamento e análise de dados sedimentológicos. Nesta fase teve a oportunidade de utilizar computadores para o tratamento de dados. O primeiro programa de computador escrito para esse fim tinha por objetivo ler os pesos das frações da análise granulométrica, juntamente com o peso inicial, para calcular o peso final, os pesos corrigidos e as porcentagens simples e acumulada por classe. Este programa foi codificado pelo Prof. Dr. Gilberto Amaral, em linguagem Fortran IV para o computador Burroughs B6700 do Centro de Computação Eletrônica da USP. Após a sua depuração, este programa começou a ser utilizado para o tratamento das análises granulométricas realizadas no Laboratório de Sedimentologia.

Por sua iniciativa, começou a fazer algumas modificações no programa, principalmente no que diz respeito ao formato de saída, adaptando-o para um formulário de saída, com todas as informações sobre a distribuição granulométrica, porém sem o cálculo dos parâmetros estatísticos de Folk & Ward (1957). A solicitação para cálculo dos parâmetros estatísticos já era grande, pois calculá-los manualmente exigia a confecção da curva acumulativa em papel de probabilidade aritmética, extrair as granulações correspondentes a 5, 16, 25, 50, 75, 84 e 95% da distribuição acumulada e depois calcular os parâmetros estatísticos: média, desvio padrão, assimetria e curtose, conforme as equações propostas por Folk & Ward (1957). Assim, resolveu adaptar o programa existente para realizar o cálculo dos parâmetros estatísticos. Como à época, não conhecia a função inversa da distribuição normal acumulada, resolveu simplesmente adaptar o processo gráfico e manual em computador, aproximando a escala de probabilidade aritmética por meio de uma

interpolação linear em intervalos de porcentagem acumulada, considerados lineares. Dessa forma, foi possível interpolar as granulações correspondentes aos sete percentis e com isso calcular os parâmetros estatísticos de Folk & Ward (1957). Após esta adaptação, o programa foi sendo constantemente aperfeiçoado com plotagem da curva acumulativa, recálculo da distribuição areia, tabelas sumário de resultados, etc. Mais tarde, com o aprendizado do cálculo da inversa da normal, o programa foi adaptado para interpolar os percentis diretamente a partir dos dados de porcentagem acumulada. Esta versão foi utilizada por muitos anos, mas recentemente com a disponibilidade dos microcomputadores, ela foi reescrita em linguagem Pascal, a qual encontra-se em utilização até hoje no Laboratório de Sedimentologia do Instituto, bem como em outros laboratórios no País.

No início de 1975, foi solicitado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo-FAPESP uma bolsa de Iniciação Científica, cujo tema do projeto de pesquisa intitulava-se: "Caracterização sedimentológica do perfil geológico entre Rifaina e Franca, SP", sob orientação do Prof. Dr. Kenitiro Suguio. Este projeto de pesquisa foi realmente muito importante para complementar a formação acadêmica do candidato, pois a exigência de relatórios parciais, a cada três meses, o obrigava a uma disciplina para a realização da pesquisa dentro do cronograma estabelecido. O trabalho de pesquisa foi também co-orientado pelo Prof. Armando Márcio Coimbra, sempre presente aos trabalhos realizados no âmbito do Laboratório.

Muitos dos trabalhos de pesquisa desenvolvidos no Laboratório necessitavam também de análise de dados em mapas, bem como de técnicas de análise multivariante.

Para análise de mapas, por meio da técnica de análise de superfícies de tendência, utilizava-se do programa TREND, desenvolvido pelo Prof. Dr. Gilberto Amaral, do qual o candidato só teve acesso ao programa compilado. O Prof. Amaral instruiu a utilizar o programa, bem como deu toda a base teórica da análise de superfícies de tendência. Nesta fase processou muitos mapas de superfícies de tendência para dados de diversas naturezas. Além dos ensinamentos do Prof. Amaral, o candidato utilizou também do livro texto de Harbaugh & Merriam (1968), onde aprendeu a análise de variância para rejeitar ou aceitar uma superfície estatisticamente significante.

Com relação a análise de agrupamentos, novamente o Prof. Amaral desenvolveu o programa CLUST, o qual vinha sendo utilizado pelo Laboratório de Sedimentologia até há pouco, quando foi substituído por um programa de microcomputador desenvolvido por Spencer (1984).

Para o melhor aproveitamento das técnicas estatísticas e matemáticas utilizadas no tratamento dos dados, inclusive para ter um melhor suporte teórico, o candidato cursou algumas disciplinas optativas oferecidas pelas Unidades da USP, conforme segue:

- Introdução à ciência da computação;

- Introdução à probabilidade e estatística I;

- Introdução à probabilidade e estatística II;

- Cálculo numérico I.

As disciplinas de estatística foram muito importantes para a sua formação acadêmica, mas a disciplina de cálculo numérico foi fundamental, pois aprendeu os algoritmos e sua programação. Um desses algoritmos, o da resolução de sistemas de equações pelo método de triangularização de Gauss vem sendo utilizado até hoje. A partir desse algoritmo escreveu um programa para análise de superfície de tendência em linguagem Fortran IV e, assim muitos outros foram desenvolvidos, dos quais não se tem mais registro.

Terminando a graduação no final de 1976, o candidato foi contratado pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo-IPT em meados de 1977. Inicialmente foi contratado pelo Grupo de Geomatemática e em seguida transferido para o Agrupamento de Petrologia onde, além dos trabalhos na área de sedimentologia, continuou escrevendo programas de computador em apoio aos trabalhos desenvolvidos neste Agrupamento. Foi neste Agrupamento que em 1978, por meio de um contrato com as Indústrias Luchsinger Madorin S.A., realizou um trabalho envolvendo o tratamento estatístico e análise dos dados químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. Este foi o primeiro trabalho profissional sob a sua total responsabilidade e envolvia a análise de dados, análise fatorial e análise por hipersuperfícies de tendência. O seu interesse por problemas de interpolação para informações tridimensionais surge exatamente nesta época.

No ano de 1979, iniciou o Curso de Pós-Graduação em Geociências, a nível de mestrado, na área de concentração de Geologia Geral e de Aplicação, sob orientação do Prof. Dr. Gilberto Amaral.

De 1979 em diante seguiu a carreira profissional do IPT e também o Curso de Pós-Graduação no Instituto, cujos créditos foram finalizados em 1981. Após a finalização dos créditos, trabalhou nos mais diversos setores da antiga Divisão de

Minas e Geologia Aplicada-DMGA do IPT, não tendo tido oportunidade para desenvolver um projeto de pesquisa para o mestrado. A oportunidade para tal projeto surgiu no Agrupamento de Geofísica, graças ao apoio pessoal do seu chefe, Geól. Gildézio Lessa, junto à Diretoria da DMGA. Este projeto intitulava-se "Representações gráficas espaciais em Geologia" e deu origem à dissertação de mestrado do candidato defendida em 1986.

Logo após a defesa do mestrado, iniciou o doutoramento no Programa de Geologia Sedimentar, sob orientação do Prof. Dr. Gilberto Amaral, com um projeto de pesquisa voltado à análise geomatemática de dados de bacias sedimentares.

No final de 1987, o candidato recebeu um convite do Departamento de Geologia Econômica e Geofísica Aplicada-DGE, por meio do Prof. Dr. Jorge Silva Bettencourt, para auxiliá-lo na disciplina de pesquisa e avaliação de jazidas. Assim, após negociações junto à Diretoria Executiva do IPT, conseguiu a liberação de tempo e, em maio de 1988, foi contratado no Regime de Tempo Parcial, em que permaneceu até meados do ano seguinte, quando solicitou o ingresso no Regime de Dedicação Integral a Docência e Pesquisa, no qual permanece até hoje.

Com a sua contratação pelo DGE, solicitou a transferência para o programa de Pós-Graduação em Recursos Minerais e Hidrogeologia, sob a mesma orientação, mas agora com plano de pesquisa voltado à avaliação de reservas. Para executar o novo plano de pesquisa, foi conseguida autorização junto à ELUMA S.A. para utilização dos dados de pesquisa do Depósito de Cobre de Chapada, GO. Começou também a estudar intensivamente as técnicas geoestatísticas de estimativa, que seriam utilizadas na avaliação das reservas de cobre e ouro de Chapada. O projeto de pesquisa foi sendo desenvolvido no DGE, quando, em outubro de 1990, teve a oportunidade de receber um treinamento em Informática Geológica, por meio do Convênio BID-USP, coordenado pelo Prof. Dr. Arlei B. Macedo. Para esse estágio escolheu o Departamento de Minas e Engenharia Geológica da Universidade do Arizona, EUA, onde realizou a modelagem dos variogramas e todo o trabalho inicial de avaliação por krigagem ordinária, sob orientação do Prof. Dr. Young C. Kim.

Após esse estágio, de um mês de duração, o candidato retorna ao País e finaliza a tese de doutoramento intitulada "Comparação de métodos computacionais para avaliação de reservas: um estudo de caso na Jazida de Cobre de Chapada, GO", a qual foi defendida no início de 1991.

Com o doutoramento, solicita o credenciamento para ministrar disciplinas de Pós-Graduação, bem como para orientação a nível de mestrado. Após o

doutoramento, que consolidou a sua linha de pesquisa, continuou o desenvolvimento da mesma, agora com a colaboração de orientandos.

Este histórico descreve a formação acadêmica e profissional do candidato na aplicação de computadores em geologia, como consideração importante para o desenvolvimento da linha de pesquisa centrada em problemas de interpolação de dados geológicos.

3 APRESENTAÇÃO SISTEMÁTICA DE PARTE DA OBRA

Esta sistematização refere-se à parte da obra de autoria do candidato, relacionada ao título deste texto: "Desenvolvimento dos métodos de interpolação para avaliação de jazidas", no período de 1980-1994.

Nestes 14 anos de trabalho com interesse voltado a funções de interpolação, o autor teve a oportunidade de aprender, desenvolver e utilizar estas funções para contorno automático de dados geológicos e modelagem de jazidas e avaliação de reservas.

Os trabalhos são apresentados em itens, nos quais são comentados criticamente os resultados obtidos, bem como em alguns deles os artigos originais são revistos e atualizados.

3.1 Modelagem de depósitos minerais por hipersuperfícies de tendência

O artigo efetivamente publicado, dentre as diversas aplicações realizadas no IPT, foi:

Yamamoto, J.K. 1980. Análise de hipersuperfícies de tendência aplicada aos parâmetros químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. Anais...Camboriú, SBG, v.2, p.1258-1271.

Este trabalho, pelo que se conhece até o momento, foi o primeiro no País a utilizar polinômios quadridimensionais para o ajuste de hipersuperfícies de tendência aos dados químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis. Como foi ressaltado anteriormente, este trabalho, desenvolvido para as Indústrias Luchsinger Madorin S.A., foi o responsável pelo nosso interesse em problemas de variação espacial dos dados químicos de uma jazida, bem como na sua avaliação.

> "A análise de hipersuperfície de tendência destina-se ao estudo de relações espaciais das variáveis distribuídas no espaço tridimensional, além de permitir uma reconstituição aproximada da geometria do corpo mineralizado. Trata-se de uma extensão da análise de superfície de tendência, que há desde muito vem sendo extensiva e satisfatoriamente aplicada em geologia no estudo de parâmetros com distribuição em área" (Yamamoto 1980).

As hipersuperfícies são obtidas por meio do ajuste de polinômios, os quais de grau 1 têm a forma geral:

$$F = a + bU + cV + dW \qquad (1)$$

onde: U é a coordenada norte;
V é a coordenada leste;
W é a cota;
(a,b,c) são os coeficientes do polinômio.

Os polinômios de grau 2 têm a forma:

$$F = \underbrace{a + bU + cV + dW}_{\text{termos de grau 1}} + \underbrace{eU^2 + fUV + gUW + hV^2 + iVW + jW^2}_{\text{termos de grau 2}} \qquad (2),$$

os quais são obtidos a partir da expansão dos termos de grau 1 e assim por diante para os polinômios de maior ordem.

Os coeficiente (a,b,...) dos polinômios são obtidos pela resolução de um sistema linear de equações e são tais que a soma dos resíduos (diferença entre o valor computado e o observado) ao quadrado é mínima possível.

Para um polinômio de grau 1, os coeficientes são obtidos da resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1 & \sum_{i=1}^{n} U_i & \sum_{i=1}^{n} V_i & \sum_{i=1}^{n} W_i \\ \sum_{i=1}^{n} U_i & \sum_{i=1}^{n} U_i^2 & \sum_{i=1}^{n} U_i V_i & \sum_{i=1}^{n} U_i W_i \\ \sum_{i=1}^{n} V_i & \sum_{i=1}^{n} U_i V_i & \sum_{i=1}^{n} V_i^2 & \sum_{i=1}^{n} V_i W_i \\ \sum_{i=1}^{n} W_i & \sum_{i=1}^{n} U_i W_i & \sum_{i=1}^{n} V_i W_i & \sum_{i=1}^{n} W_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} F_i \\ \sum_{i=1}^{n} F_i U_i \\ \sum_{i=1}^{n} F_i V_i \\ \sum_{i=1}^{n} F_i W_i \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Observe-se nas equações (1) e (2) que o valor da variável dependente resulta da soma dos termos do polinômio, todos dados em função de suas coordenadas geográficas. O valor da variável de interesse é colocado somente no sistema de equações (3).

O programa de computador, de sua autoria, foi desenvolvido a partir do conhecimento adquirido na elaboração do programa para ajuste de superfícies de tendência, desenvolvido ainda durante a graduação.

Como não havia dispositivos de saída com tons de cinza ou a cores nos computadores do IPT e da USP, a variação espacial foi estudada por meio de seções e plantas sendo a integração tridimensional feita mentalmente a partir de várias seções obtidas simultaneamente.

No caso em estudo, foram analisados, por hipersuperfícies de tendência, os seguintes parâmetros:

- P_2O_5;
- CaO;
- BaO;
- Fator I;
- Fator II;
- Fator III.

Os três fatores principais resultaram da análise fatorial aplicada sobre os dados químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, de acordo com Yamamoto *et al.* (1980).

As hipersuperfícies utilizadas para os parâmetros considerados foram todas aproximadas por hiperpolinômios de grau 5, conforme os resultados das análises de variância, que revelaram todas as hipersuperfícies estatisticamente significantes como se pode verificar na Tabela 1 e na Tabela 2, os parâmetros de ajuste das hipersuperfícies de tendência.

Tabela 1: Resultados da análise de variância para as hipersuperfícies de tendência, segundo Yamamoto (1980).

Parâmetro	VTO	VEX	VNE	Fobs	Fcrit.	Teste F
P_2O_5	2836,73	1495,12	1341,60	6,89	1,43	significante
CaO	26531,78	12956,17	13575,61	5,90	1,43	significante
BaO	728,20	567,94	160,26	21,91	1,43	significante
Fator I	395,00	241,40	153,60	9,72	1,43	significante
Fator II	395,00	285,47	109,52	16,11	1,43	significante
Fator III	395,00	238,70	153,60	9,44	1,43	significante

Obs. Foram considerados os seguintes valores para os graus de liberdade: total=395, do numerador=55, e do denominador=340.

Tabela 2: Parâmetros de ajuste das hipersuperfícies de tendência, segundo Yamamoto (1980).

Parâmetro	CDT	CRR	PSTQ
P_2O_5	0,53	0,73	52,71
CaO	0,49	0,70	48,33
BaO	0,78	0,88	77,99
Fator I	0,61	0,78	61,11
Fator II	0,72	0,85	72,27
Fator III	0,60	0,78	60,43

Obs.: CDT é o coeficiente de determinação;
CRR é o coeficiente de correlação e PSTQ é o porcento da soma total dos quadrados.

Embora os ajustes não fossem os ideais (CDT e PSTQ), as correlações obtidas foram consideradas satisfatórias para a finalidade do estudo.

Por permitir o estudo da variação espacial, esta técnica era muito boa para indicação de tendência de aumento ou diminuição do parâmetro em estudo. Assim, serviria também para orientar a campanha de sondagens na jazida, indicando possíveis zonas ricas não pesquisadas. Nesse sentido, foi recomendado no Relatório IPT nº 11.955 (IPT 1978), a pesquisa em profundidade da região do furo 31, a qual foi realizada e resultou na confirmação de altos teores de P_2O_5.

Como teoricamente o ajuste tornava-se perfeito à medida que o número de coeficientes do polinômio aproximava-se do número de pontos de dados, pensava-se à época que tais polinômios poderiam passar exatamente sobre os pontos de dados e, portanto, descrever matematicamente uma jazida. Para se ter uma idéia do aumento do número de coeficientes com o grau do polinômio, lista-se na Tabela 3 essa relação.

Tabela 3: Número de coeficientes do polinômio em função da sua ordem (grau).

grau	nº de coef.
1	4
2	10
3	20
4	35
5	56
6	84
7	120
8	165

Ora, se essa descrição matemática fosse possível, o problema de avaliação de jazidas estaria resolvido e ainda com a vantagem adicional de se conhecer o valor de teor em qualquer ponto não amostrado. A avaliação de reservas seria feita por meio da integral definida do polinômio no bloco de cubagem, que determinaria o teor médio ponderado espacialmente. Dado um bloco de cubagem com os limites definidos entre (U1,U2), (V1,V2) e (W1,W2), a integral de um hiperpolinômio de grau 1, segundo Harbaugh (1964) é:

$$\begin{aligned} VOLUME = \quad & \{A[(W2-W1)(U2-U1)(V2-V1)] + \\ & 0.5B[(W2^2-W1^2)(U2-U1)(V2-V1)] + \\ & 0.5C[(W2-W1)(U2^2-U1^2)(V2-V1)] + \\ & 0.5D[(W2-W1)(U2-U1)(V2^2-V1^2)]\} \end{aligned} \qquad (4)$$

Entretanto, a avaliação de reservas, por meio do ajuste de hiperpolinômios, não foi possível pelos seguintes fatos:

- impossibilidade de resolução de sistemas de alta ordem, pela limitação física de armazenamento nos computadores;

- ajuste dos polinômios, estatisticamente significantes, não era perfeito e nesse caso o teor interpolado sobre um, ponto conhecido não era igual ao teor amostrado;
- ajuste de polinômios exatos (número de coeficientes igual ao número de pontos de dados) não era satisfatório devido às bruscas variações observadas entre dois pontos adjacentes de amostragem;
- como a descrição matemática da jazida não era possível, o cálculo de hipervolumes também não o era, ao menos com a precisão requerida para avaliação de reservas.

3.2 Representações gráficas espaciais em Geologia

Esta parte da obra foi apresentada como dissertação de mestrado ao Instituto de Geociências-USP em 1986, como segue:

Yamamoto, J.K. 1986. Representações gráficas espaciais em geologia: Aplicações no Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. São Paulo, IG-USP. 167p.

Este trabalho representa uma pesquisa realizada na busca de funções de interpolação para avaliação de reservas, pois os hiperpolinômios não poderiam ser utilizados para esse fim. O ponto de partida para essa pesquisa foi encontrado no seguinte artigo:

Hardy, R.L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. J. Geophys. Res., 76:1905-1915.

Hardy (1971) apresentou uma proposta para o ajuste de equações multiquádricas para interpolação de superfícies topográficas, pois os mapas interpolados por polinômios não se prestavam para fins de engenharia, justamente pelo fato do interpolador não ser exato. As equações multiquádricas proporcionavam uma interpolação exata, ou seja, suas funções passavam exatamente sobre os pontos de dados.

É interessante introduzir o problema do ajuste de equações multiquádricas inicialmente para dados em uma direção, como, por exemplo, um perfil topográfico, e depois para dados em duas dimensões.

Assim, para dados sobre um perfil, a interpolação da cota, por meio das equações multiquádricas, pode ser feita da seguinte forma:

$$F = \sum_{i=1}^{n} [(X_i - X)^2 + C]^{1/2} \qquad (5)$$

onde: c_i é o coeficiente da i-ésima amostra;

C é uma constante de suavização;

(X_i) é a coordenada do i-ésimo ponto;

(X) é a coordenada do ponto a ser interpolado.

Os coeficientes (c_i, i=1,n) são obtidos pela resolução de um sistema de equações lineares da forma:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n}[(X_j - X_i)^2 + C]^{1/2} \quad \text{para } i=1,n \qquad (6),$$

ou em forma matricial, fazendo:

$$d_{ij} = [(X_j - X_i)^2 + C]^{1/2},$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Observe-se nesta equação (7) que os valores da variável dependente estão no vetor Y, da mesma forma que os hiperpolinômios. Neste caso, o valor da variável dependente é obtida como combinação linear das distâncias em relação ao ponto a ser interpolado, enquanto nos hiperpolinômios o valor da variável dependente é igual a combinação linear das potências das coordenadas do ponto a ser interpolado.

A interpretação geométrica da equação (5) pode ser feita como uma soma de figuras quádricas. Para ilustrar esta interpretação, amostraram-se nove pontos sobre uma semi-circunferência de raio-100m e centro em X=150, conforme a seguinte equação (8) e listagem dos pontos da Tabela 4.

$$F = [R^2 - (X-150)^2]^{1/2} \qquad (8)$$

Tabela 4: Conjunto de pontos de dados sobre a simi-circunferência de raio=100m.

ponto	X	F
1	50	0
2	62,5	48,41
3	75	66,14
4	100	86,60
5	150	100
6	200	86,60
7	225	66,14
8	237,5	48,41
9	250	0

Resolvendo-se o sistema de equações (6), com C=0, para os pontos de dados da Tabela 4, tem-se os coeficientes reproduzidos na Tabela 5.

Tabela 5: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos de dados da Tabela 4, e constante C=0.

ponto	coeficiente
1	1,9364
2	-1,2272
3	-0,3000
4	-0,2752
5	-0,2680
6	-0,2752
7	-0,3000
8	-1,2272
9	1,9364

Com os coeficientes calculados, geraram-se as figuras quádricas individuais, as quais somadas dão origem à figura final, como se pode observar na Figura 1.

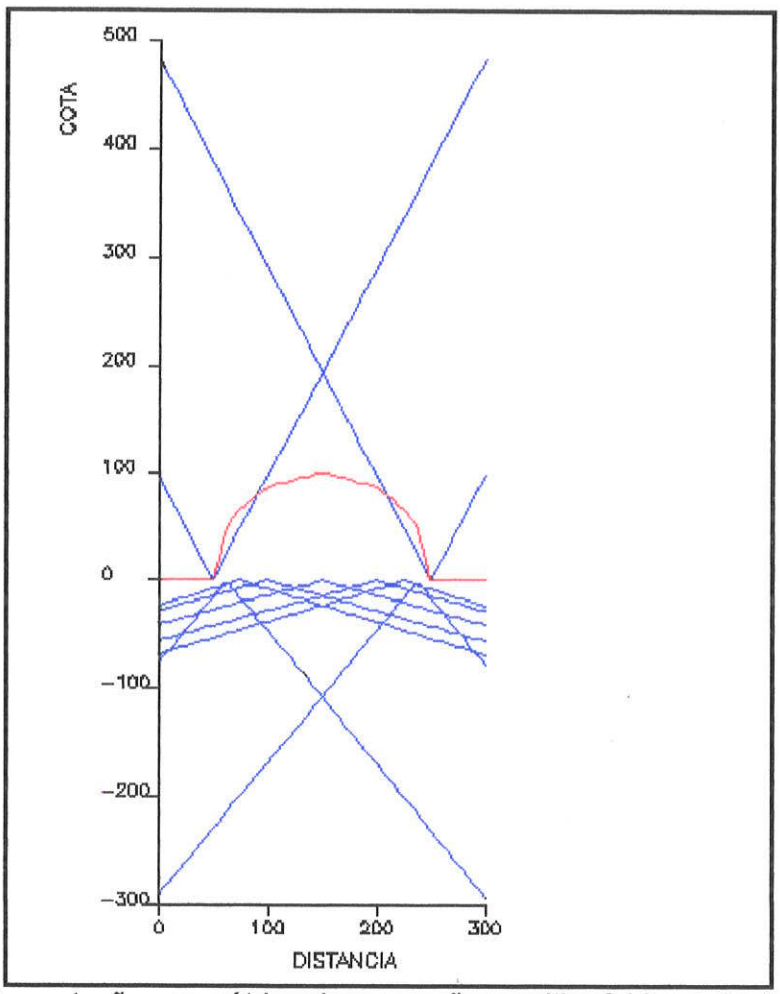

Figura 1: Interpretação geométrica das equações multiquádricas ajustadas para os dados da Tabela 4 (as curvas de linhas azuis representam as figuras quádricas e a curva de linha vermelha a figura final).

Observe-se na Figura 1, que para cada ponto de dado, gera-se um cone centrado no mesmo, cuja orientação é dada pelo sinal do coeficiente.

Para o ajuste de equações multiquádricas em duas dimensões, basta acrescentar o termo correspondente à segunda dimensão na equação (5), o que resulta em:

$$F = \sum_{i=1}^{n} C_i \left[(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + C \right]^{1/2} \qquad (9)$$

onde: (X,Y) são as coordenadas do ponto a ser interpolado;
(X_i, Y_i) são as coordenadas da i-ésima amostra.

Os coeficientes são obtidos da resolução de um sistema linear de equações (10):

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} C_j \left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + C \right]^{1/2}, \text{ para } i=1,n \qquad (10)$$

Agora cada figura quádrica da equação (9) representa um hiperbolóide circular.

Novamente, para ilustrar a interpretação geométrica das equações multiquádricas bidimensionais, foram amostrados 17 pontos sobre uma semi-esfera centrada no ponto (150,150) e raio=100m, conforme a seguinte equação:

$$F = [R^2 - (X-150)^2 - (Y-150)^2]^{1/2} \qquad (11)$$

Os pontos assim amostrados encontram-se listados na Tabela 6 e representados no mapa de localização da Figura 2.

Tabela 6: Conjunto de pontos de dados sobre uma semi-esfera, conforme a equação (11).

ponto	X	Y	F
1	50	150	0
2	100	150	86,603
3	150	150	100
4	200	150	86,603
5	250	150	0
6	150	50	0
7	150	100	86,603
8	150	200	86,603
9	150	250	0
10	79,289	79,289	0
11	96,967	96,967	66,144
12	203,033	203,033	66,144
13	220,711	220,711	0
14	79,289	220,711	0
15	96,967	203,033	66,144
16	203,033	96,967	66,144
17	220,711	79,289	0

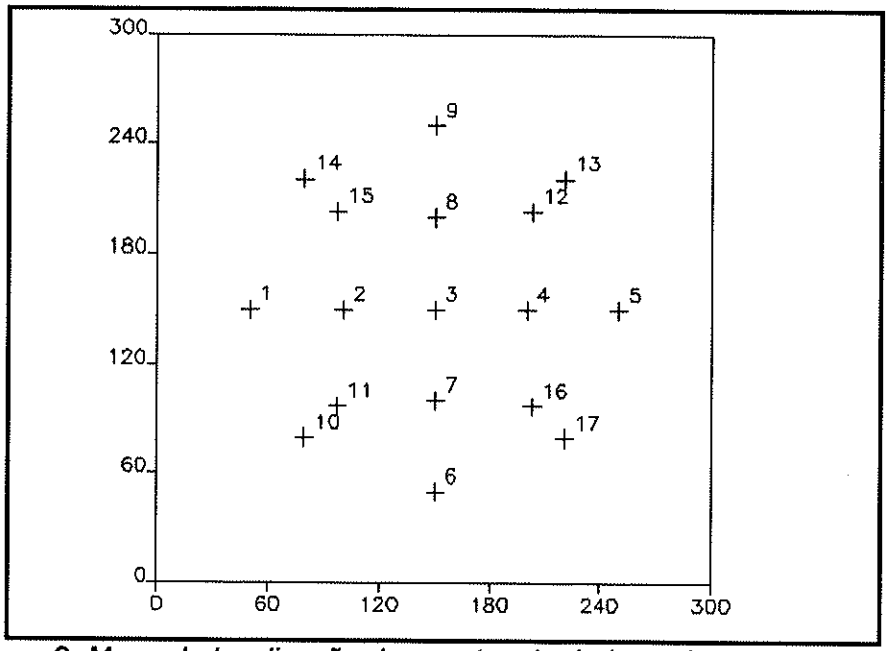

Figura 2: Mapa de localização dos pontos de dados sobre a semi-esfera.

Os coeficientes das equações multiquádricas obtidos para os pontos de dados da Tabela 6, encontram-se reproduzidos na Tabela 7.

Tabela 7: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos sobre a semi-esfera (Tabela 6).

ponto	coeficiente
1	0,408631
2	-0,370633
3	0,175595
4	-0,370633
5	0,408631
6	0,408631
7	-0,370633
8	-0,370633
9	0,408631
10	0,758054
11	-0,975162
12	-0,975162
13	0,758054
14	0,758054
15	-0,975162
16	-0,975162
17	0,758054

As Figuras 3 e 4 apresentam os hiperbolóides circulares, respectivamente para os pontos 3 e 4 do conjunto de pontos de dados (Tabela 6).

Observe-se que as figuras estão orientadas conforme os sinais dos coeficientes (Tabela 7).

A superfície interpolada, por meio das equações multiquádricas, está representada na Figura 5.

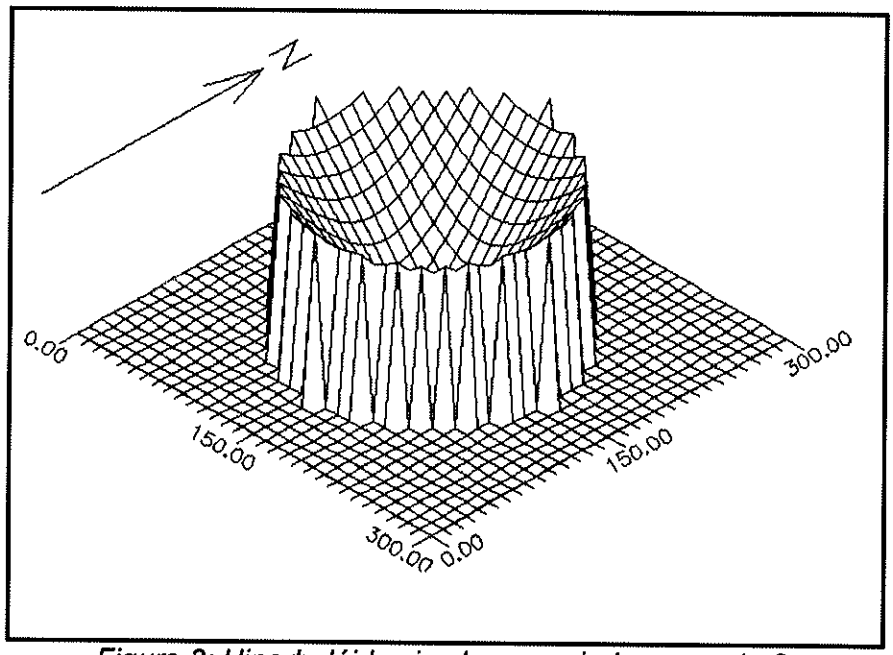

Figura 3: Hiperbolóide circular associado ao ponto 3.

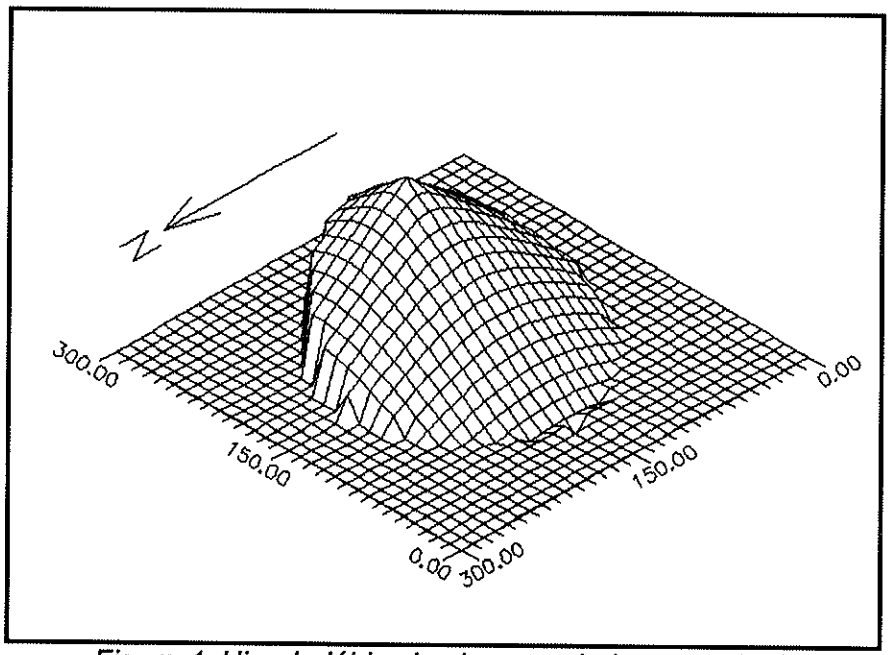

Figura 4: Hiperbolóide circular associado ao ponto 4.

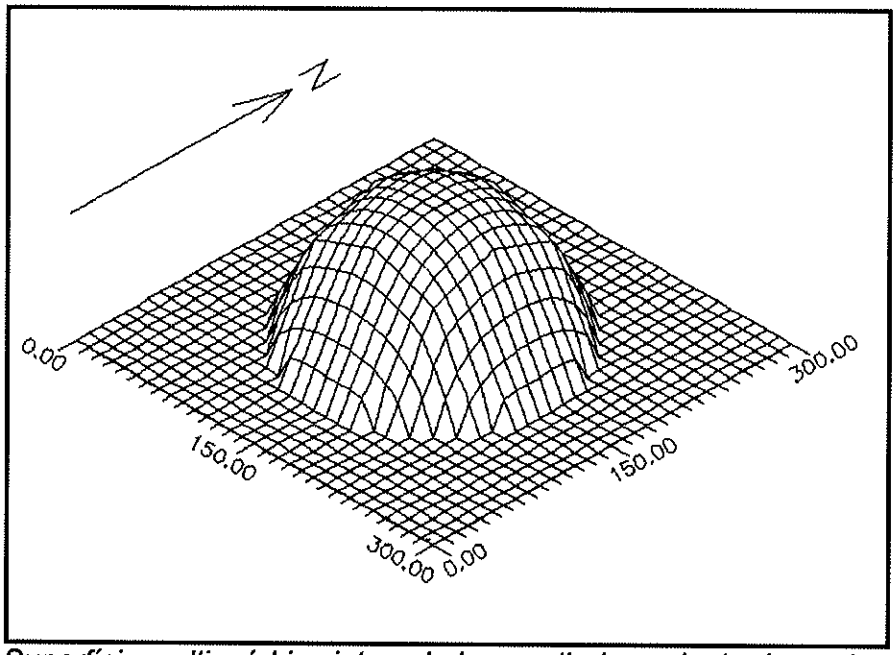

Figura 5: Superfície multiquádrica interpolada a partir do conjunto de pontos de dados da Tabela 6.

A formulação original de Hardy (1971), para as equações multiquádricas, foi feita como um método global e daí a sua principal limitação que estava na dimensão do sistema de equações multiquádricas.

Um outro problema relacionado ao uso das equações multiquádricas era a possibilidade de realizar interpolação tridimensional para avaliação de jazidas.

Neste trabalho de mestrado (Yamamoto 1986), o autor procurou então solucionar os seguintes problemas:

- caráter global das equações multiquádricas;
- definição da constante multiquádrica C;
- extensão para o caso tridimensional,

como base do objetivo principal que eram as representações gráficas espaciais em geologia, por meio de:

- mapas de contorno de isovalores;
- representação em perspectiva;
- plantas e seções de isoteores (representação de malhas tridimensionais).

Quanto ao problema do caráter global da interpolação, por meio de equações multiquádricas, a solução lógica seria a sua adaptação para ser um interpolador local. Contudo, não se tratava de simplesmente realizar a sua adaptação como interpolador local, mas sim provar a validade desta solução. Para isso foram realizadas simulações

em computador, confrontando-se os interpoladores global X local usando figuras matematicamente conhecidas, para os quais também foram variados os valores da constante multiquádrica.

Os resultados destas simulações apontaram que:

- o ajuste local aproxima-se mais do global com o aumento do número de pontos;
- o ajuste local é satisfatório a partir de 16 pontos de dados;
- existe uma melhora significativa do ajuste local quando se altera a constante C igual a zero para C igual a um (uma vez a distância média entre os pontos de dados);
- superfícies topograficamente suaves podem ter a constante multiquádrica até quatro vezes a distância média, enquanto para aquelas topograficamente acidentadas esta constante deve ser no máximo uma vez a distância média.

Com relação ao estudo da extensão para a interpolação tridimensional, a equação multiquádrica testada tinha a forma:

$$F = \sum_{i=1}^{n}[(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2 + C]^{1/2} \qquad (12)$$

onde: (X,Y,Z) são as coordenadas do ponto a ser interpolado;
(X_i,Y_i,Z_i) são as coordenadas da i-ésima amostra.

Para verificar a aplicabilidade da equação (12), como interpolador global foi adotado o seguinte procedimento. Primeiro, as equações multiquádricas foram ajustadas para valores, de funções matematicamente conhecidas, calculados em pontos aleatórios; em seguida, as equações multiquádricas assim obtidas (ajustadas sobre os pontos de amostragem) foram utilizadas para calcular os valores da variável sobre os nós de uma malha tridimensional; os resultados obtidos desta interpolação foram comparados com os valores originais das funções matemáticas, por meio da medida do erro de estimativa RMS.

As funções utilizadas nesse teste, propostas por Barnhill (1983) e denominadas polinomiais tricúbica e triquádrica são:

$$F1(X,Y,Z) = X^3 + Y^3 + Z^3 \qquad (13)$$

$$F2(X,Y,Z) = (X-5)^2 + (Y-5)^2 + (Z-5)^2 \qquad (14)$$

Os resultados obtidos neste estudo encontram-se reproduzidos na Tabela 8.

Tabela 8: Erros de estimativa RMS (%) entre os ajustes globais para as funções F1 e F2.

função	C=0	C=1	C=2	C=4	C=8	C=16
F1	475,63	222,98	161,80	103,44	55,91	24,17
F2	1,09	0,58	0,45	0,31	0,18	0,084

Os resultados obtidos para a função F1, poderiam desencorajar o prosseguimento do estudo da extensão das equações multiquádricas para a interpolação tridimensional.

Entretanto, notou-se que os intervalos de variação das duas funções eram bem diferentes:

F1: 4,65 a 1287,20
F2: 16,11 a 46,70

Para reduzir o grande intervalo de variação da função F1, uma solução seria a transformação logarítmica de F1, ou seja, as equações multiquádricas eram ajustadas para os logarítmos de F1. Os resultados deste ajuste estão reproduzidos na Tabela 9.

Tabela 9: Erros de estimativa RMS (%) para a função F1, com o ajuste das equações multiquádricas feito no domínio logarítmico.

função	C=0	C=1	C=2	C=4	C=8	C=16
log(F1)	35,41	12,00	8,99	6,76	4,89	3,60

Os resultados da transformação logarítmica expressos na Tabela 9, demonstraram a sensibilidade das equações multiquádricas para a natureza dos dados, *i.e.*, o ajuste é pobre para dados com alta variabilidade. Cabe ressaltar que mesmo assim, a interpolação proporcionada pelas equações multiquádricas é exata, passando sobre os pontos de dados originais.

Tendo em vista os resultados obtidos para a função F2, pode-se afirmar que as equações multiquádricas podem ser aplicadas para interpolação tridimensional, conforme a equação (12).

Os termos quádricos da equação (12) representam esferas centradas nos pontos de dados, como se pode verificar a partir de um exemplo hipotético, gerado a partir da amostragem de um cubo, de lado igual a 100m, como mostra o desenho da Figura 6.

As coordenadas dos pontos de amostragem encontram-se na Tabela 10.

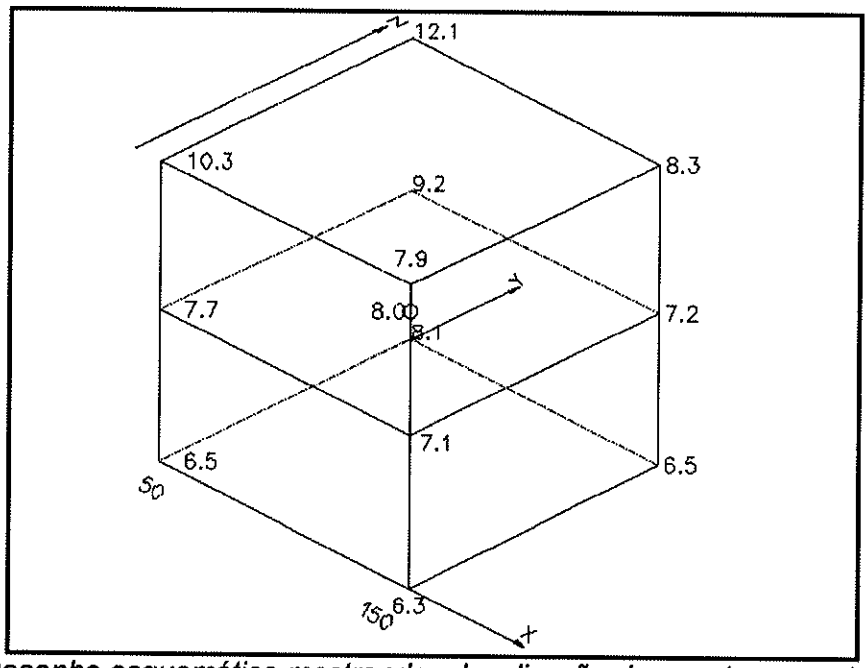

Figura 6: Desenho esquemático mostrando a localização dos pontos amostrados sobre um cubo de lado igual a 100m.

Tabela 10: Coordenadas dos pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 6.

ponto	X	Y	Z	TEOR
1	50	50	50	6,5
2	150	50	50	6,3
3	50	150	50	8,1
4	150	150	50	6,5
5	50	50	100	7,7
6	150	50	100	7,1
7	50	150	100	9,2
8	150	150	100	7,2
9	50	50	150	10,3
10	150	50	150	7,9
11	50	150	150	12,1
12	150	150	150	8,3
13	100	100	100	8,0

Os coeficientes, das equações multiquádricas, obtidos para os dados da Figura 6, encontram-se na Tabela 11.

Tabela 11: Coeficientes das equações multiquádricas para os pontos de dados amostrados sobre o cubo da Figura 6 (Constante C=0).

ponto	coeficiente
1	0,023178
2	0,013321
3	0,010215
4	0,017349
5	0,012059
6	-0,004730
7	0,009690
8	0,003106
9	-0,004527
10	0,017866
11	-0,020422
12	0,018963
13	-0,027724

Os sinais dos coeficientes indicavam para os casos a uma e duas dimensões, a concavidade dos cones ou hiperbolóides circulares. Mas, para o caso a três dimensões, o sinal positivo indica aumento de teores do centro (ponto de dado) para fora da esfera e o negativo a diminuição de teores do centro para foram.

A esfera gerada pelo ponto central do cubo pode ser visualizada na planta interpolada para a cota 100, como mostra a Figura 7. Observe-se nesta figura que o coeficiente do ponto central (ponto 13) é negativo e, por isso, as curvas diminuem para fora da esfera.

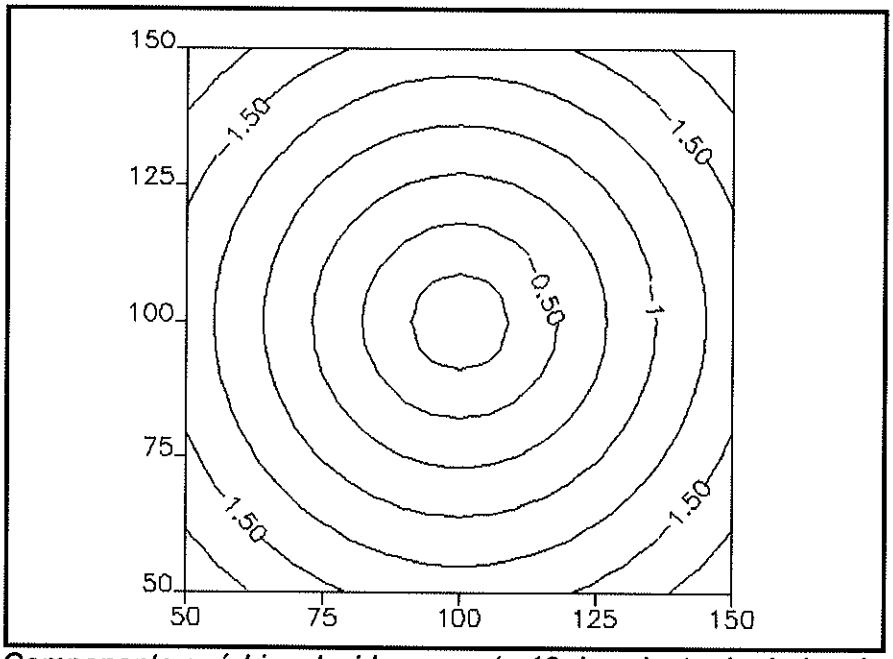

Figura 7: Componente quádrica devida ao ponto 13 do cojunto de dados da Tabela 6.

Cada um dos pontos de dados irá gerar uma esfera centrada e o valor interpolado em qualquer ponto de dado, dentro do domínio da amostragem se dá pela soma da contribuição de todos os pontos, como se ilustra na Figura 8, a planta de isoteores para a cota 100.

A interpolação tridimensional, por meio das equações multiquádricas, proporciona o desenho de plantas e seções da jazida, bem como de um bloco-diagrama de parte ou de toda a jazida.

A Figura 9 apresenta um bloco-diagrama da jazida hipotética amostrada, conforme os dados da Tabela 6, em que se pode verificar o aumento geral de teores de leste para oeste.

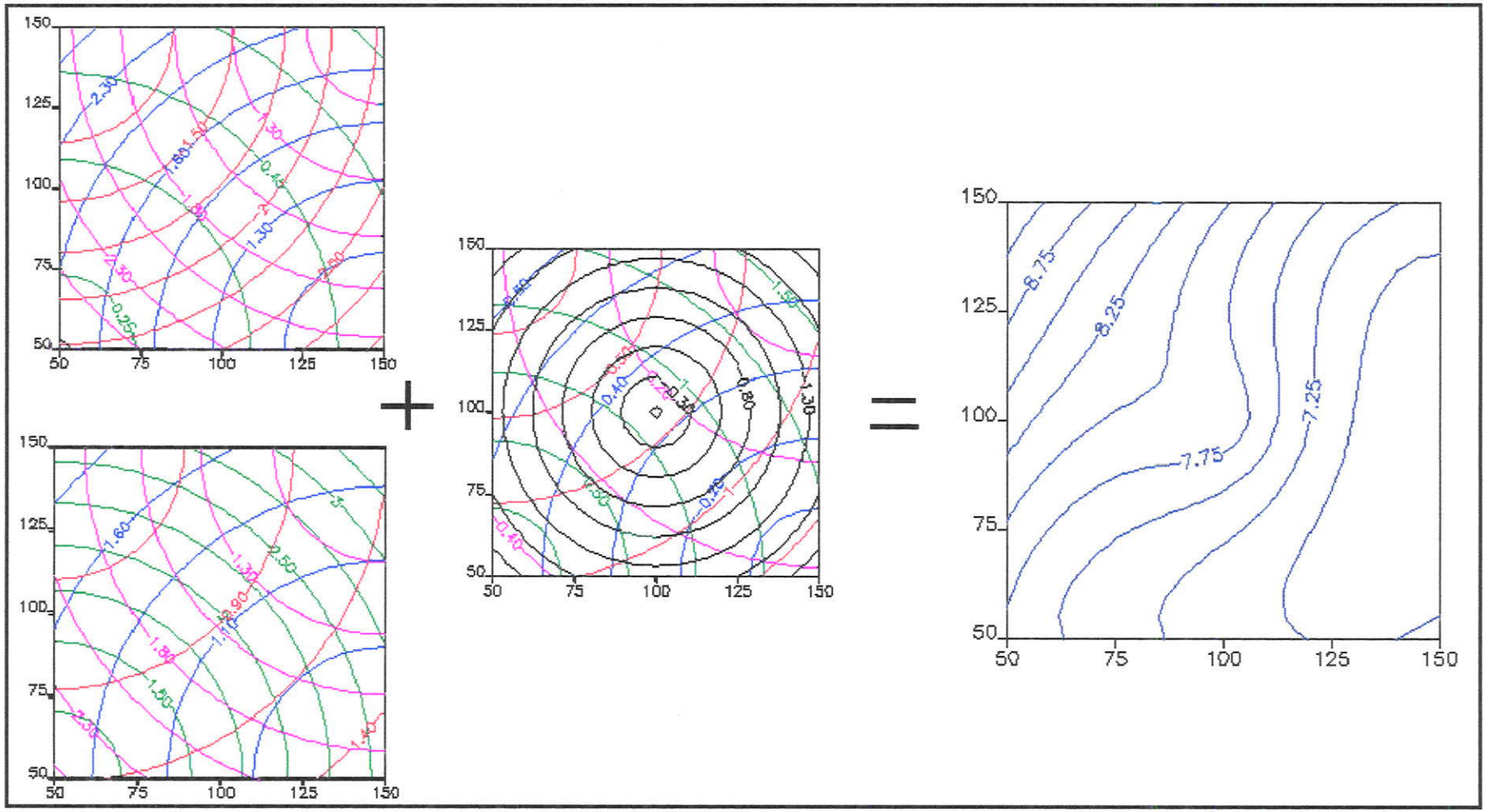

Figura 8: Desenho mostrando o processo de interpolação da planta de isoteores da cota 100, por meio da soma da contribuição de todos os pontos para a mesma cota 100.

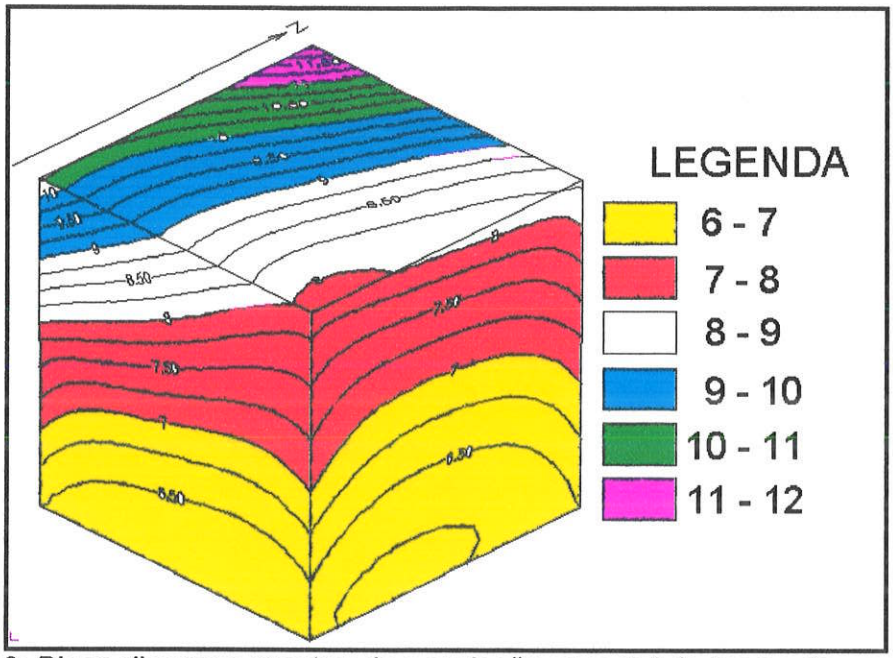

Figura 9: Bloco-diagrama mostrando a variação espacial de teores de uma jazida hipotética.

Com relação ao ajuste local das equações multiquádricas para a interpolação tridimensional, verificou-se na prática que uma boa aproximação era conseguida com 24 pontos e constantes pequenas, sempre menores que uma vez a distância média (C=1) dos pontos de dados.

Uma análise crítica desta parte do trabalho mostra que:

- a função F1 foi inadequada para testar a aplicabilidade das equações multiquádricas globais para a interpolação tridimensional, pois dificilmente teores de jazidas seguem o comportamento descrito pela função F1;
- no caso da função F1, não foram considerados outros intervalos de amostragem na simulação e nem outras malhas de amostragem;
- a amostragem aleatória, utilizada na simulação, dificilmente é empregada na amostragem de depósitos minerais. Portanto, melhores resultados poderiam ter sido obtidos com a amostragem sistemática;
- a transformação logarítmica não poderia ser aplicada da forma simples como foi, pois a transformada inversa requer correção, se a variância dos logarítmos existir, por meio da correção da média geométrica de Finney (1941). Mesmo assim, a variância dos logarítmos, no caso das equações multiquádricas, seria de difícil determinação;
- a interpolação por meio das equações multiquádricas proporciona uma avaliação pontual e não de bloco, que teria maior significação para fins de avaliação de reservas.

Por outro lado, considerou-se o trabalho realizado como etapa importante da linha de pesquisa do autor, pois:

- foi realizada a revisão da metodologia corrente em interpolação de dados, incluindo: superfícies de tendência, inverso da potência da distância, triangulação e krigagem ordinária;
- comprovou-se a utilização das equações multiquádricas como interpolador local para contorno automático de dados geológicos, bem como para modelagem de jazidas;
- foram estudados os principais algorítmos para representações gráficas espaciais em geologia;
- adquiriu-se grande experiência na programação de computadores e periféricos, usando a linguagem Fortran IV.

3.3 Uso das equações multiquádricas para avaliação de jazidas

Este item está baseado no seguinte artigo publicado:

Yamamoto, J.K. 1987a. Método alternativo para dimensionar jazidas. Brasil Mineral, 47:46-51.

Este trabalho apresenta na realidade o teste prático da aplicação das equações multiquádricas para a interpolação tridimensional. Neste teste prático foram utilizados os dados de Fe_2O_3 (%) analisados ao longo dos furos de sondagem no Complexo Alcalino de Anitápolis, SC.

A interpolação por meio das equações multiquádricas foi realizada a partir da informação de 24 pontos de dados vizinhos e constante igual a 1,007.

As Figuras 10 e 11, apresentam os resultados obtidos neste estudo.

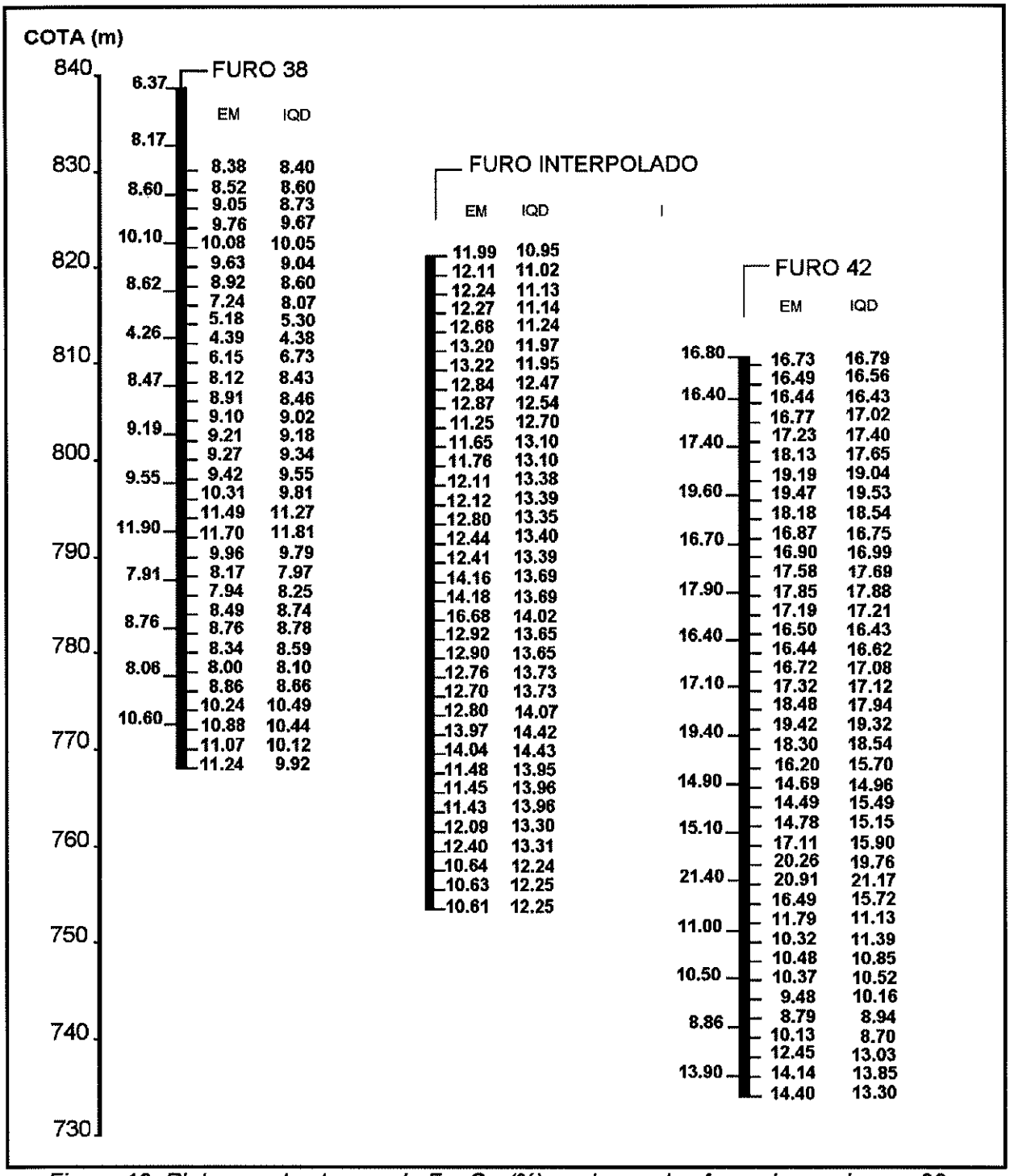

Figura 10: Plotagem dos teores de Fe_2O_3 (%), ao longo dos furos de sondagem 38 e 42, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM) e inverso do quadrado da distância (IQD), segundo Yamamoto (1987a).

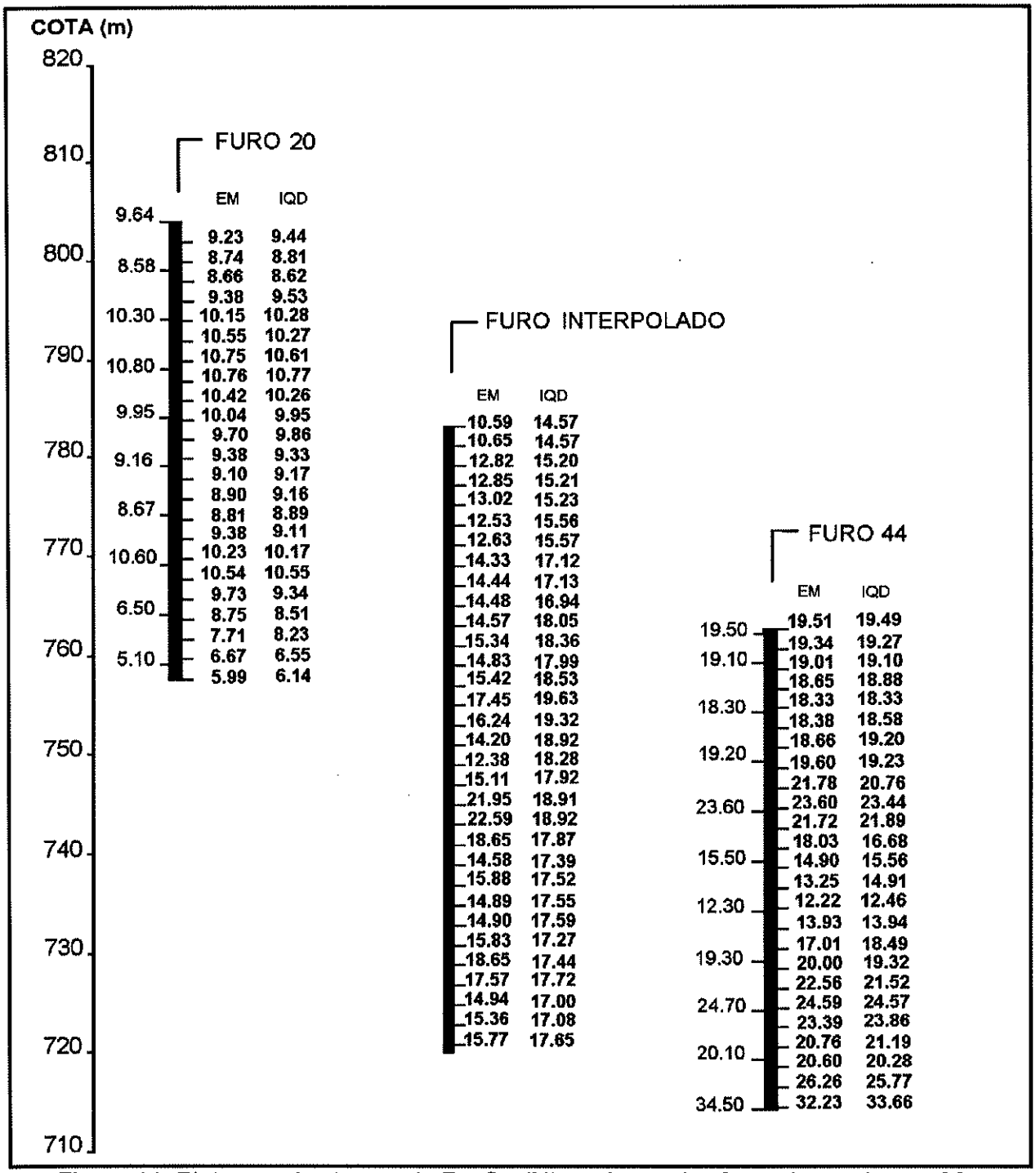

Figura 11: Plotagem dos teores de Fe_2O_3 (%), ao longo dos furos de sondagem 20 e 44, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM) e inverso do quadrado da distância (IQD), segundo Yamamoto (1987a).

A partir dos resultados obtidos, verificou-se que "as interpolações feitas sobre os furos originais apresentam resultados muito próximos entre si e compatíveis com as informações originais. No entanto, para os furos interpolados (sempre à meia distância entre os furos originais), observa-se que os valores interpolados pelo IQD são maiores que aqueles obtidos pelas equações multiquádricas (EM) que, por sua vez, estão mais coerentes com as informações

dos pontos vizinhos próximos. Pode-se verificar, também, principalmente sobre os furos originais, que as informações feitas pelas EM são mais suaves que aquelas pelo IQD" (Yamamoto 1987a).

As principais conclusões deste trabalho foram:

"A utilização das equações multiquádricas para interpolação de dados em três variáveis independentes mostrou-se viável e, portanto, torna-se um método alternativo aos demais existentes para modelagem de jazidas e cálculo de reservas.

As equações multiquádricas proporcionam uma interpolação exata, contínua e suave, sendo, por isso, indicado também para fins de mapeamento tridimensional da jazida, ou seja, através da representação gráfica dos modelo da jazida em plantas, perfis e diagramas em cerca.

A formulação matemática das equações multiquádricas apresenta a vantagem de não necessitar de condições adicionais para a resolução das mesmas, como ocorre, por exemplo, com a ponderação pelo inverso da potência da distância, quando o ponto a ser interpolado coincide com o ponto de dado" (Yamamoto 1987a).

3.4 Ajuste local de equações multiquádricas para a modelagem digital de superfícies

Nesta parte da obra, derivada da pesquisa de mestrado, demonstra-se a viabilidade do ajuste local de equações multiquádricas, tendo sido publicados os seguintes artigos:

a) Yamamoto, J.K. 1987b. Use of local fits of multiquadric equations for digital surface modelling. In: SOUTH AMERICAN SYMPOSIUM OF COGEODATA, 4, Ouro Preto, 1987. Abstracts...Ouro Preto, IUGS/COGEODATA. p.53-56.

b) Yamamoto, J.K. 1988a. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. In: SIMP. QUANT. GEOC., 3, Rio Claro, 1988. Bol. Res...Rio claro, IGCE/UNESP. p.134-139.

c) Yamamoto, J.K. 1990. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. Geociências, núm. esp.:1-22.

Estes três artigos tratam do ajuste local de equações multiquádricas para o modelamento digital de superfícies.

Procurou-se divulgar a metodologia do ajuste local das equações multiquádricas num simpósio internacional do COGEODATA, bem como no simpósio regional do IGCE/UNESP, com a publicação do resumo e do artigo completo na revista GEOCIÊNCIAS.

Na realidade, foram publicados resultados reinterpretados dos ajustes global X local. As cinco superfícies matemáticas utilizadas na simulação encontram-se descritas no Quadro I e representadas graficamente nas Figura 12 a 16.

Quadro I

Superfícies matemáticas utilizadas para verificação do ajuste local em relação ao global.

Superfície	referência	descrição
$S1=(64-(X-5,5)^2-(Y-5,5)^2)^{1/2}$	McLain (1974)	parte de uma esfera
$S2=EXP(-((X-5)^2+(Y-5)^2))$	McLain (1974)	colina abrupta elevando-se de um plano
$S3=EXP(-0,25((X-5)^2+(Y-5)^2))$	McLain (1974)	colina menos abrupta que S2
$S4=EXP(-((X+Y-11)^2+(X-Y)^2/10))$	McLain (1974)	colina longa e estreita
$S5=0,75EXP(-((9X-2)^2+(9Y-2)^2/4) + 0,75EXP(-(9X+1)^2/49-(9Y+1)/10) - 0,20EXP(-(9X-4)^2-(9Y-7)^2) + 0,50EXP(-((9X-7)^2+(9Y-3)^2)/4)$	Franke & Nielson (1980)	sem descrição.

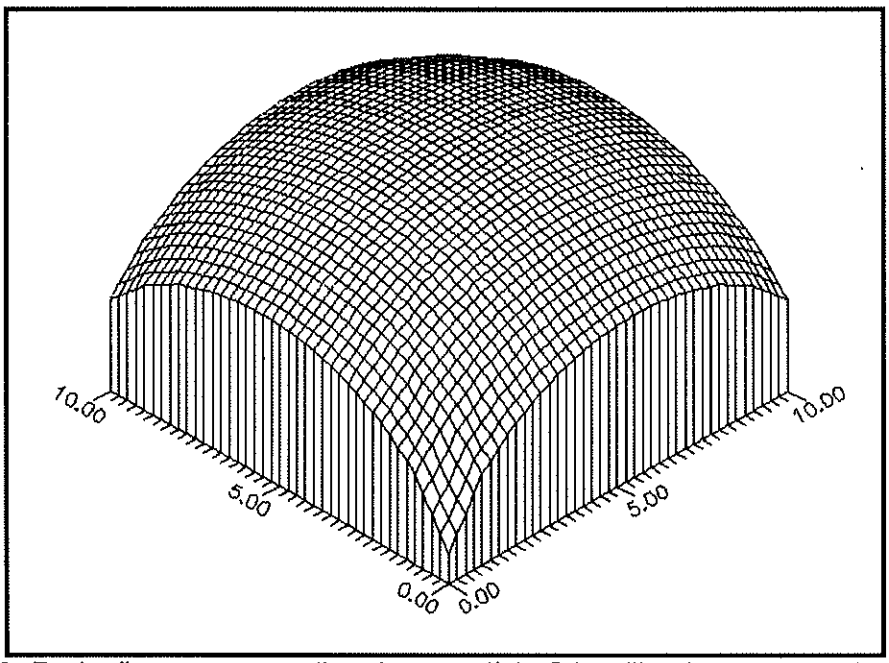

Figura 12: Projeção em perspectiva da superfície S1, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas.

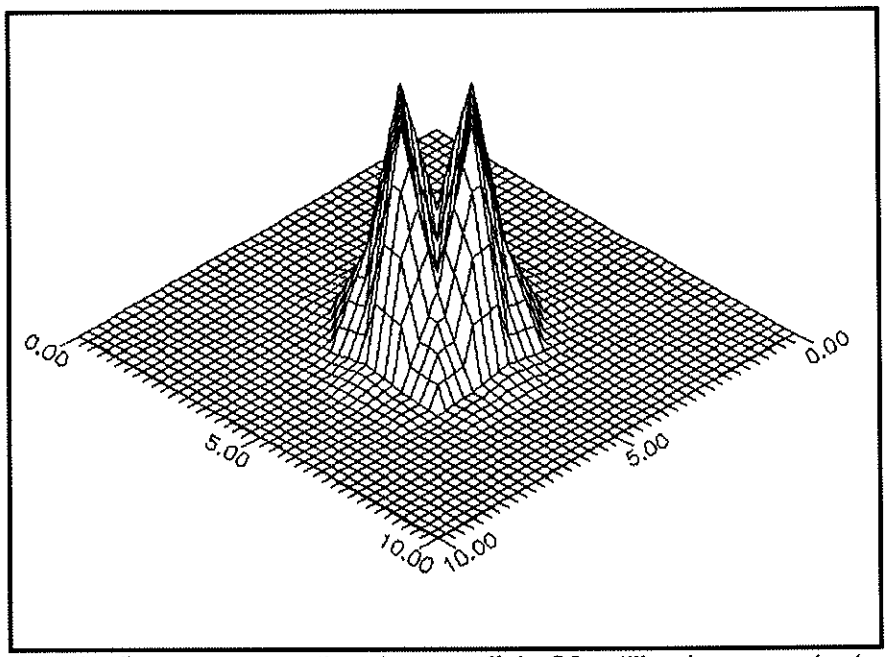

Figura 13: Projeção em perspectiva da superfície S2, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas.

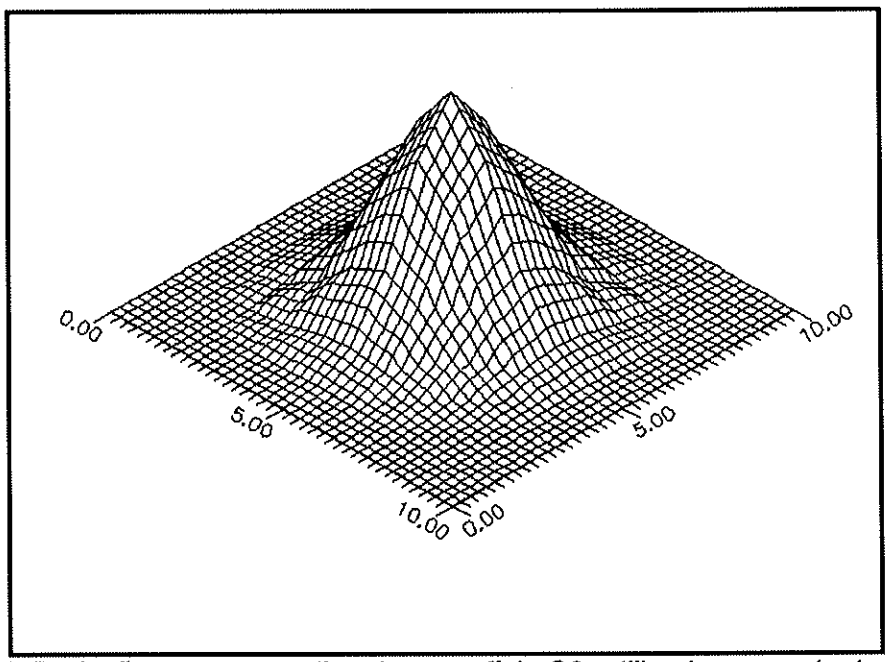

Figura 14: Projeção em perspectiva da superfície S3, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas.

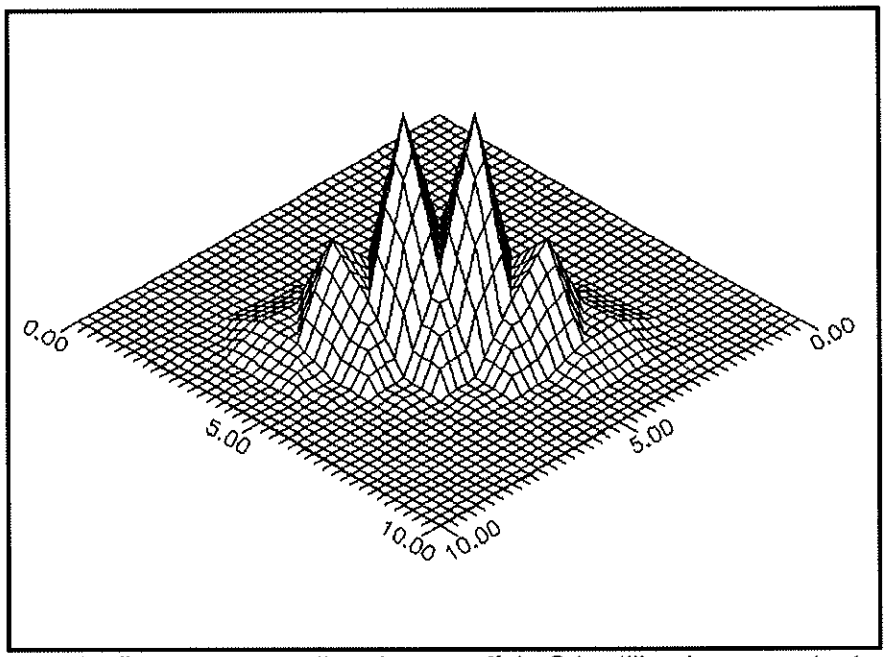

Figura 15: Projeção em perspectiva da superfície S4, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas.

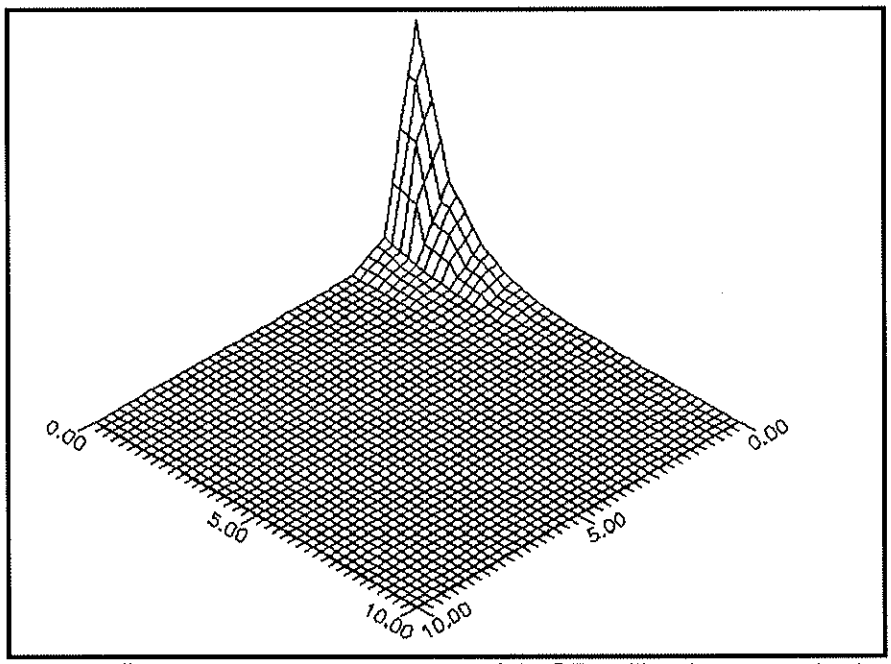

Figura 16: Projeção em perspectiva da superfície S5, utilizada para o teste do ajuste local de equações multiquádricas.

Os ajustes foram medidos por meio dos erros quadráticos médios (RMS), definidos como:

- erro RMS de aproximação: é o erro da aproximação da interpolação local em relação à global;

- erro RMS de estimativa: é o erro cometido na interpolação de um ponto, a partir dos pontos de amostragem aleatória, comparado com o valor matematicamente calculado.

Os gráficos dos erros RMS em função do número de pontos encontram-se reproduzidos nas Figuras 17 a 21, para o erro de aproximação e nas Figuras 22 a 26 para o erro de estimativa.

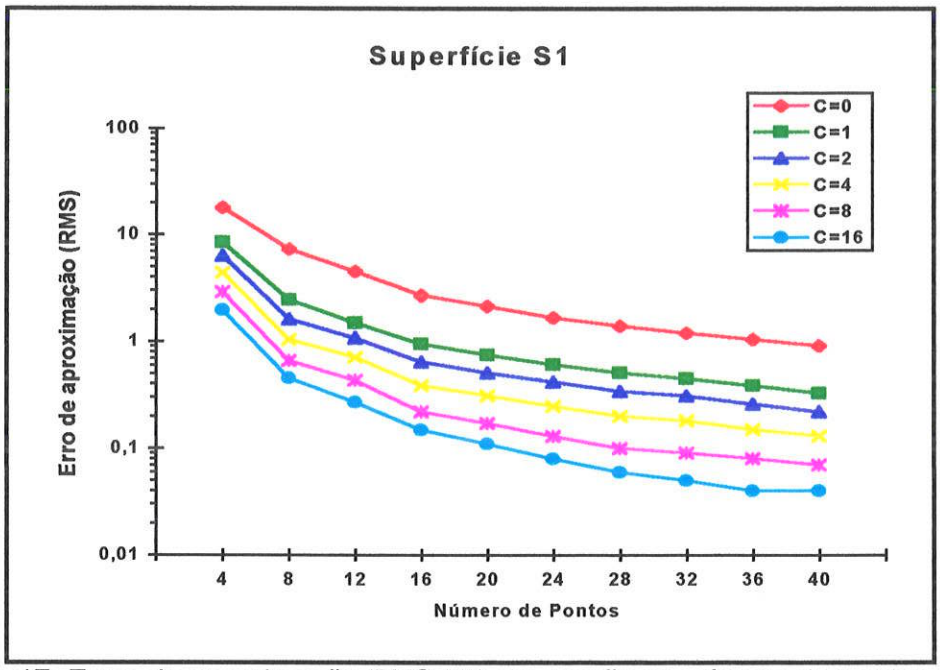

Figura 17: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1, segundo Yamamoto (1990).

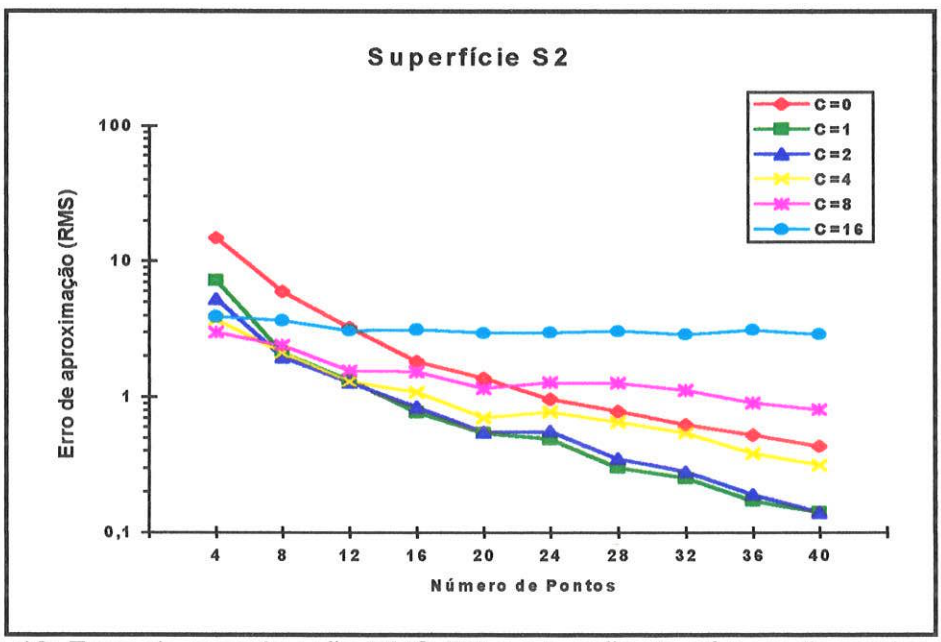

Figura 18: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2, segundo Yamamoto (1990).

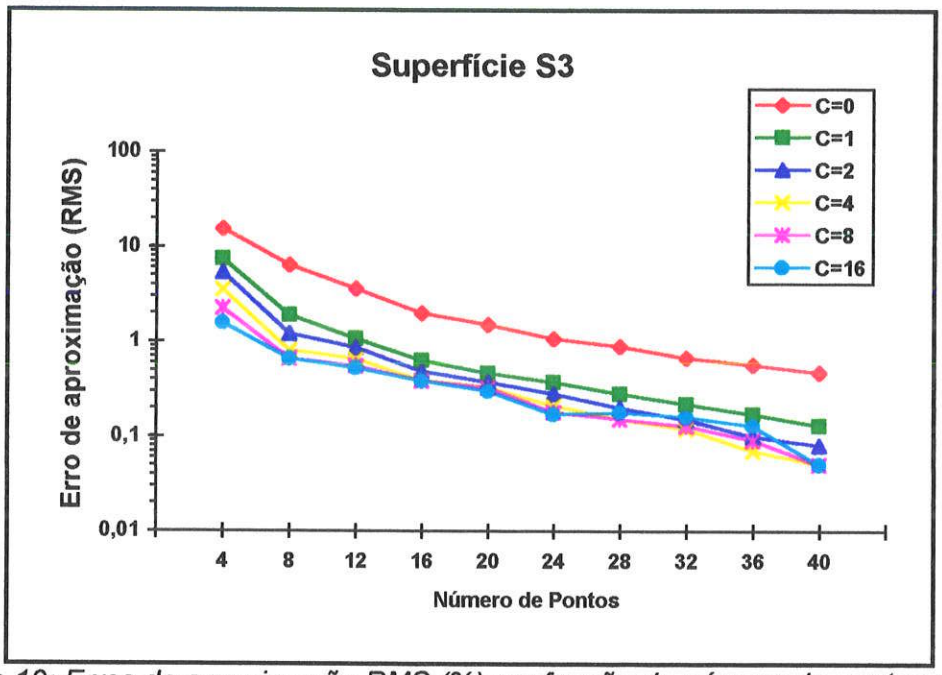

Figura 19: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3, segundo Yamamoto (1990).

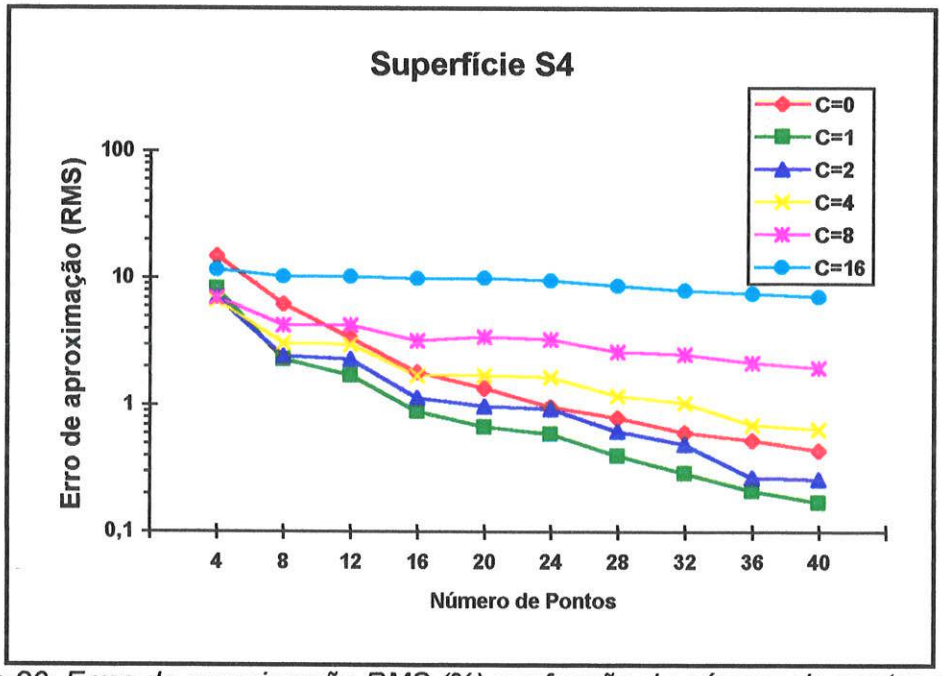

Figura 20: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4, segundo Yamamoto (1990).

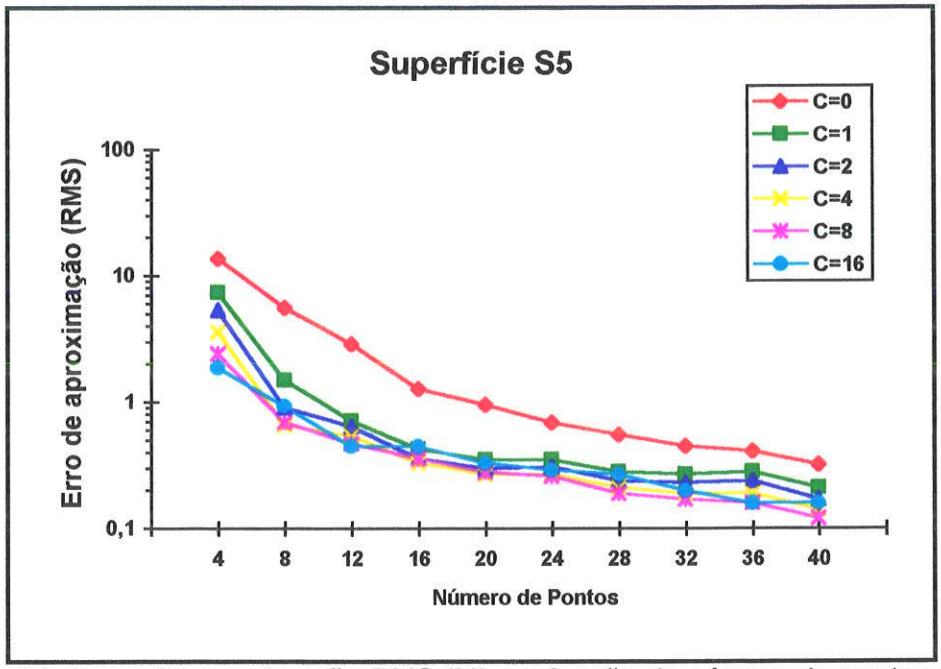

Figura 21: Erros de aproximação RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5, segundo Yamamoto (1990).

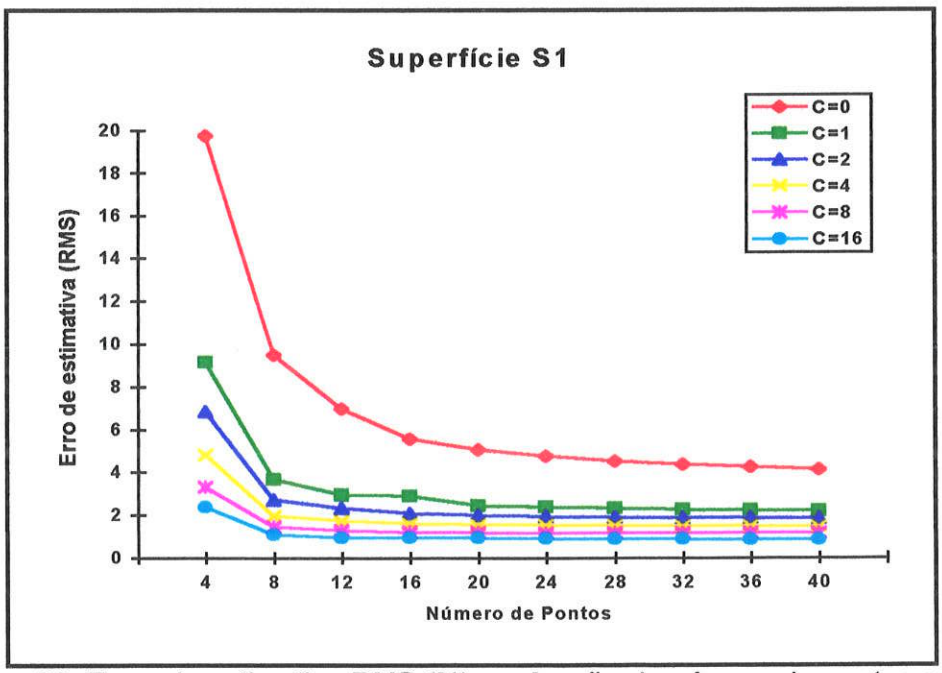

Figura 22: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S1, segundo Yamamoto (1990).

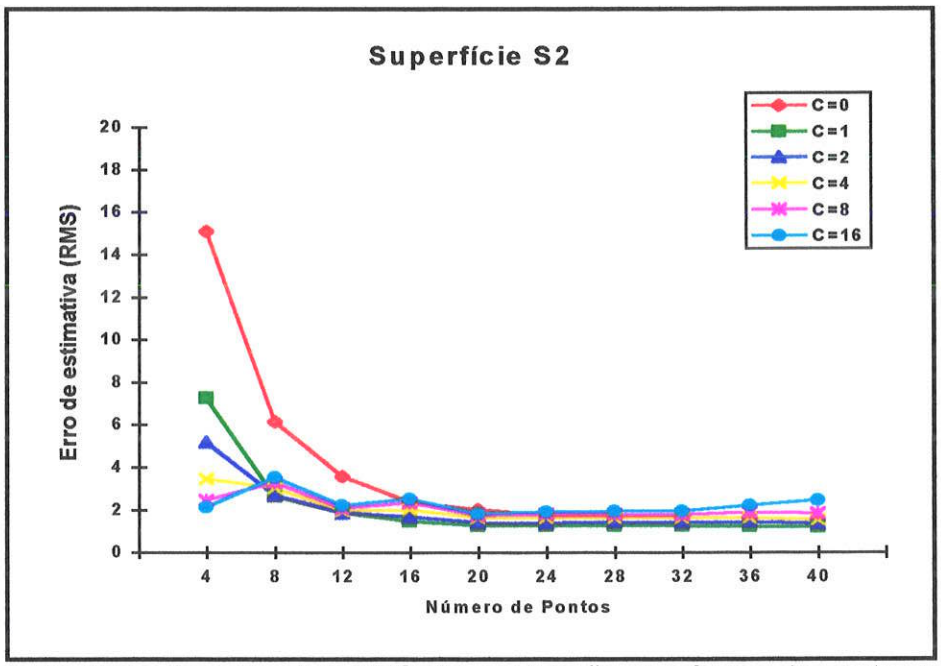

Figura 23: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S2, segundo Yamamoto (1990).

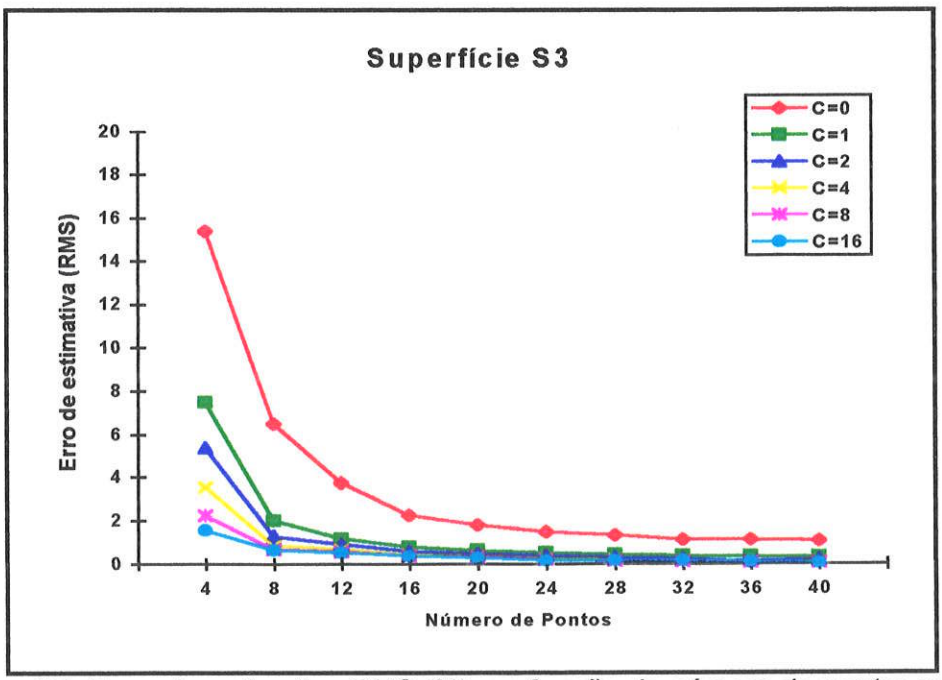

Figura 24: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S3, segundo Yamamoto (1990).

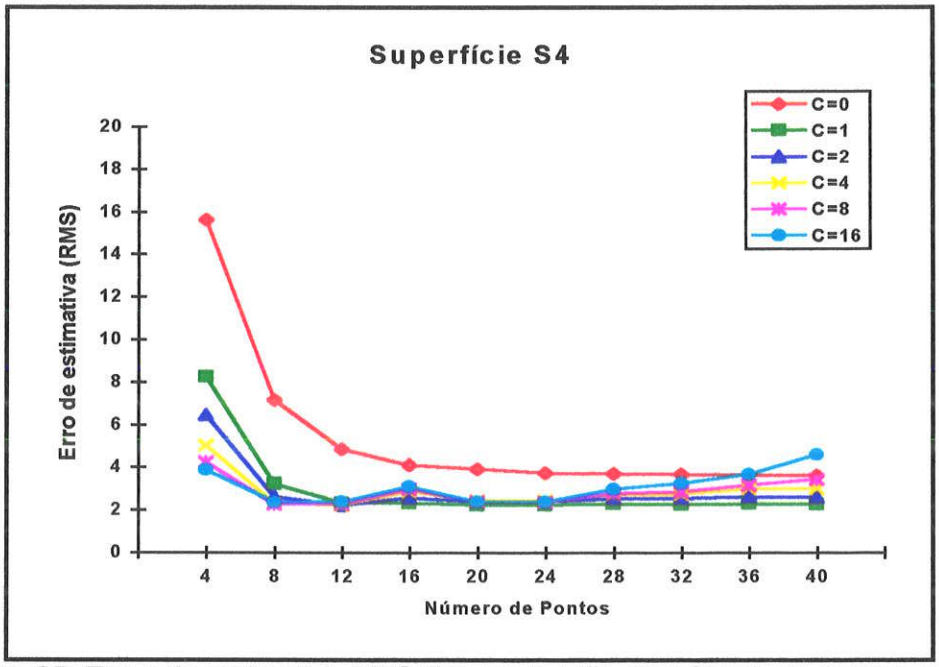

Figura 25: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S4, segundo Yamamoto (1990).

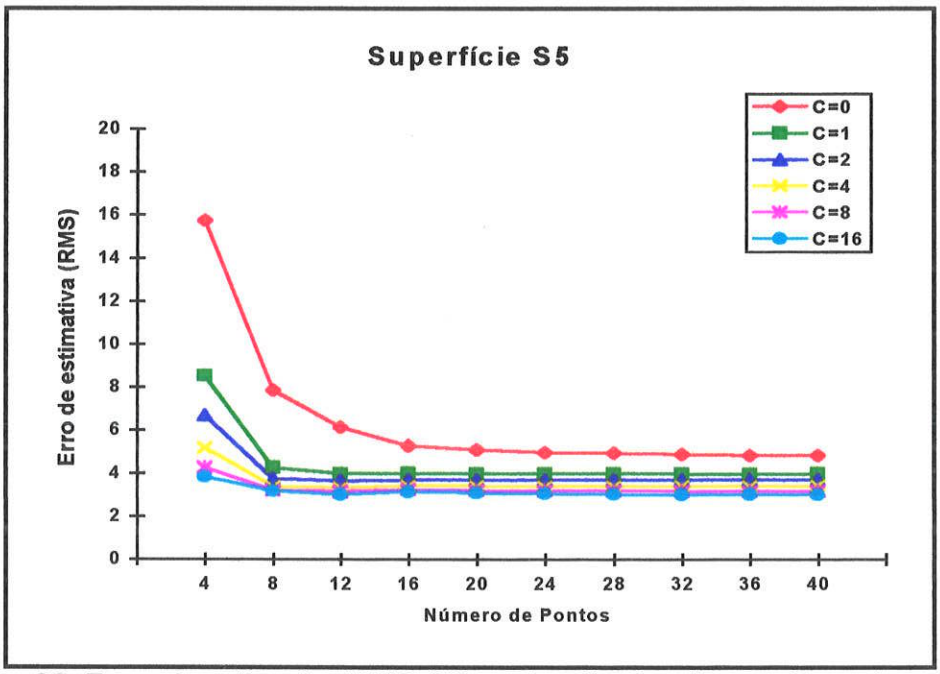

Figura 26: Erros de estimativa RMS (%) em função do número de pontos para a superfície S5, segundo Yamamoto (1990).

Analisando-se os gráficos, conclui-se que a aproximação é boa com 8 a 12 pontos de dados, onde em geral os erros são menores que 5%, com exceções para C=0 nas superfícies S1 e S3 e C=16 na superfície S4, conforme a Tabela 12.

Tabela 12: Sumário dos erros de aproximação e de estimativa para 8 a 12 pontos.

superf.	erro aprox.	exceção	erro estim.	exceção
S1	< 5%	C = 0	< 5%	C = 0
S2	< 5%	----	< 5%	C = 0
S3	< 5%	C = 0	< 5%	C = 0
S4	< 5%	C = 16	< 5%	C = 0
S5	< 5%	----	< 5%	C = 0

Qualquer que seja a superfície, para a interpolação por meio das equações multiquádricas, deve-se evitar a constante nula, bem como constantes elevadas. O nível de 5% de erro foi tomado como referência, pois em Geologia as variáveis apresentam variações naturais muito superiores a esse nível.

3.5 Representações gráficas espacias em Geociências auxiliadas por computador

Nesta parte da obra procurou-se difundir toda a metodologia de computação gráfica desenvolvida na dissertação de mestrado. Nesse sentido, os seguintes artigos foram publicados:

a) Yamamoto, J.K. 1988b. Representações gráficas espacias em Geociências auxiliadas por computador. Rev. Bras. Geoc., 18(1):3-26.

b) Yamamoto, J.K. 1988c. Representações gráficas de modelos digitais de terreno. In: CONG. NAC. INF., 21, Rio de Janeiro, 1988. Anais...Rio de Janeiro, SUCESU. p.924-929.

Além desses artigos, foram ministrados vários cursos de extensão universitária, como relaciona-se a seguir:

- Representações gráficas espaciais em Geociências
  Entidade promotora: IGCE/UNESP
  Local: Rio Claro, SP.
  Data: 26 a 29 de agosto de 1986.

- Representações gráficas espaciais em Geociências
  Entidade promotora: Instituto de Pesquisas Tecnológicas-IPT
  Local: São Paulo, SP.
  Data: 4 a 8 de abril de 1988.

- Representações gráficas espaciais em Geociências auxiliadas por computador
  Entidade promotora: Associação Brasileira de Geologia de Engenharia-ABGE
  Local: Porto Alegre, RS.
  Data: 21 a 22 de julho de 1988.

- Computação gráfica em geologia e mineração
  Entidades promotoras: Instituto de Pesquisas Tecnológicas e Instituto de Geociências-USP.
  Local: São Paulo, SP.
  Data: 18 a 22 de setembro de 1989.

A difusão de conhecimentos foi com ênfase nas técnicas e conceitos matemáticos da computação gráfica. Os principais tópicos tratados nos artigos e cursos foram:

- obtenção da malha regular e do modelo digital de terreno, por meio da interpolação matemática;
- representações gráficas de malhas regulares:
  - mapas de isovalores;
  - blocos-diagrama;
- métodos de contorno automático de malhas regulares:
  - método das células;
  - método do rastreamento;
- tipos de projeção em perspectiva.

Considerou-se positiva esta parte da obra no que se refere a divulgação de resultados de uma pesquisa.

3.6 Comparação entre krigagem e equações multiquádricas

Um importante artigo que deu origem no futuro a novas investigações a respeito de métodos de interpolação foi:

Landim, P.M.B. & Yamamoto, J.K. 1988. Comparação entre krigagem e equações multiquádricas para interpolação de dados irregularmente distribuídos. In: SIMP. QUANT. GEOC., 3, Rio Claro, 1988. Bol. Res...Rio Claro, IGCE/UNESP. p.72-76.

Este trabalho teve como objetivo a comparação entre krigagem e equações multiquádricas para interpolação de malhas regulares a partir de 225 pontos amostrados aleatoriamente em áreas de 10 x 10 km, escolhidas em três folhas topográficas distintas, na escala 1:50.000: Cunha, Campos do Jordão e Botucatu. A partir desses pontos de amostragem, interpolou-se uma malha regular de 15 x 15 nós, que foi comparada com os dados originais previamente lidos nas cartas topográficas, medindo-se o erro quadrático médio RMS.

Os resultados obtidos nesta simulação, encontram-se listados na Tabela 13.

Tabela 13: Erros RMS (%) entre as malhas interpoladas e originais.

área	krigagem ordinária	equações multiquádricas
Cunha	14,33	12,83
Campos do Jordão	2,89	2,93
Botucatu	3,17	3,50

Os resultados obtidos mostraram que ambos os métodos proporcionam interpolações exatas e confiáveis, porém com a vantagem das equações multiquádricas não necessitarem do mesmo rigor estatístico da krigagem no cálculo e modelagem de variogramas experimentais. Entretanto, as equações multiquádricas não permitem o cálculo do erro associado à interpolação como permiria a krigagem, por meio da variância de estimativa.

O fato importante é que a metodologia proposta anteriormente veio a ser validada neste artigo, com a sua aplicação a dados reais.

A semelhança entre os sistemas de krigagem e equações multiquádricas, observada neste trabalho deu origem a novas investigações que são apresentadas nos itens seguintes.

3.7 Novo método de interpolação bidimensional

Um único artigo foi escrito e apresentado no XXXV Congresso Brasileiro de Geologia:

Yamamoto, J.K. 1988d. Novo método de interpolação para contorno automático de dados geológicos. In: CONGR. BRAS. GEOL., 35, Belém, 1988. Anais...Belém, SBG. v.4, p.1684-1695.

É interessante reproduzir como foi o desenvolvimento deste novo método a partir das equações multiquádricas.

Seja o mapa de pontos, conforme as coordenadas listadas na Tabela 14, e apresentado na Figura 27.

Tabela 14: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 27.

ponto	X	Y	Z
1	20	30	760
2	40	40	790
3	40	20	780

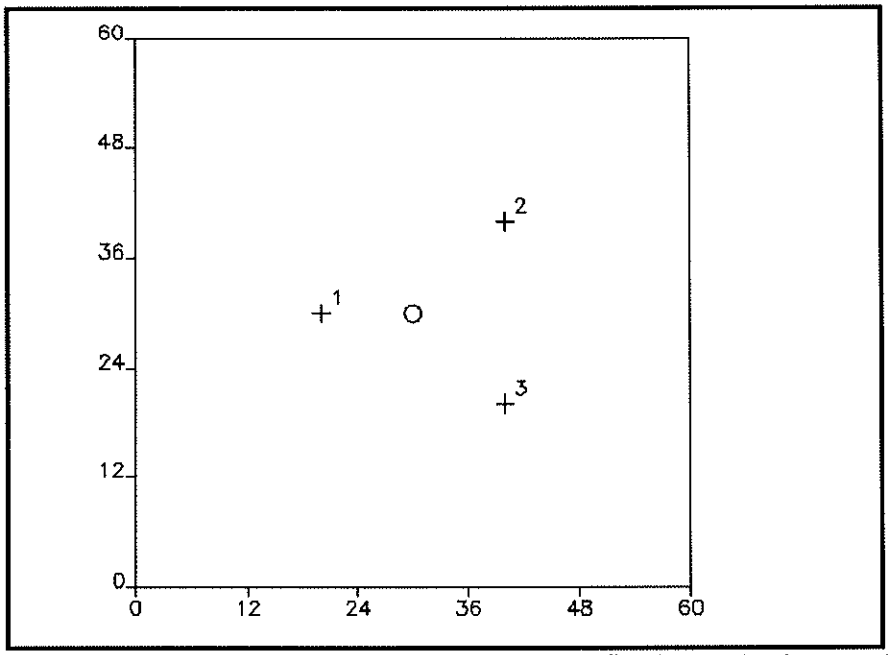

Figura 27: Mapa de pontos de dados para interpolação de ponto de coordenadas (30,30).

Se fosse utilizado o método da triangulação, o ponto (30,30) poderia ser interpolado por meio de um plano que passa sobre os três pontos de dados, como está ilustrado esquematicamente na Figura 28.

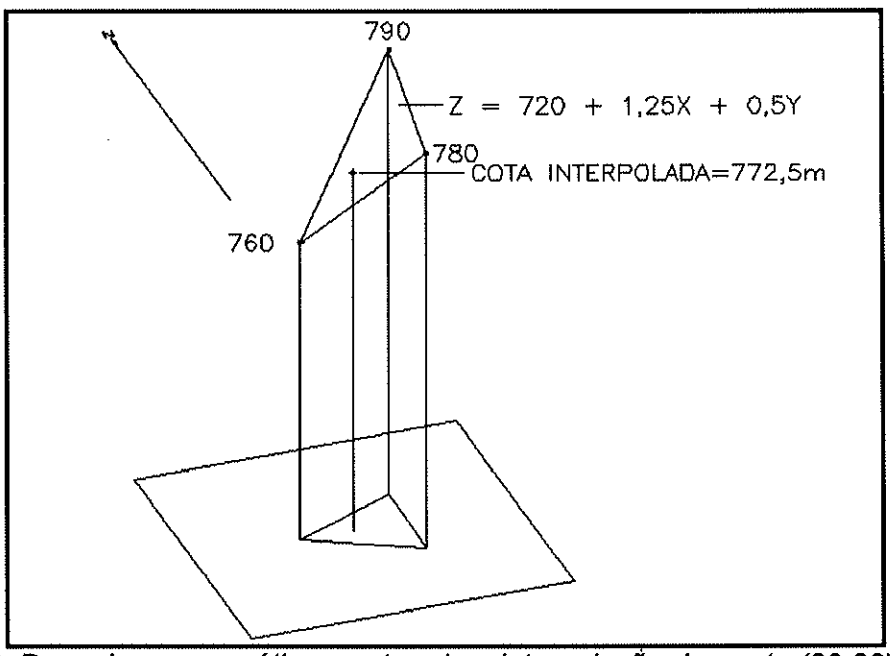

Figura 28: Desenho esquemático mostrando a interpolação do ponto (30,30) por meio de um plano passando pelos pontos de dados.

A equação do plano, ajustada pelo método dos mínimos quadrados, é:

$$Z = 720 + 1{,}25X + 0{,}5Y \qquad (15)$$

Portanto, a cota interpolada no ponto (30,30) é:

$Z = 720 + 1{,}25*30 + 0{,}5*30 = 772{,}50$

O ajuste das equações multiquádricas, para esses pontos e usando C=10, é obtido pela resolução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 3{,}162 & 22{,}583 & 22{,}583 \\ 22{,}583 & 3{,}162 & 20{,}248 \\ 22{,}583 & 20{,}248 & 3{,}162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} \quad (16),$$

que dá:

$c_1 = 18{,}672$
$c_2 = 15{,}227$
$c_3 = 15{,}812$

Para interpolação da cota no ponto (30,30), tem-se:

$$Z = 18{,}672*((20-30)^2 + (30-30)^2 + 10)^{1/2} + 15{,}227*((40-30)^2 + (40-30)^2 + 10)^{1/2} + 15{,}812*((40-30)^2 + (20-30)^2 + 10)^{1/2}$$

$Z = 645{,}63$

Pelo resultado obtido, muito aquém do mínimo esperado (760), verifica-se que o número de pontos (3) utilizado no ajuste das equações multiquádricas foi muito pequeno. Assim, para verificar o número mínimo de pontos necessário para um bom ajuste, foram adicionados mais 24 pontos na vizinhança, totalizando 27 pontos de dados, conforme o mapa de pontos da Figura 29 e coordenadas listadas na Tabela 15.

Para verificar como o número de pontos influencia o ajuste das equações multiquádricas, foram acrescentados, ao conjunto inicial de pontos, subconjuntos de três pontos cada, até completar os 27 pontos. Em cada etapa foi interpolada a cota no ponto (30,30), conforme os resultados apresentados na Tabela 16.

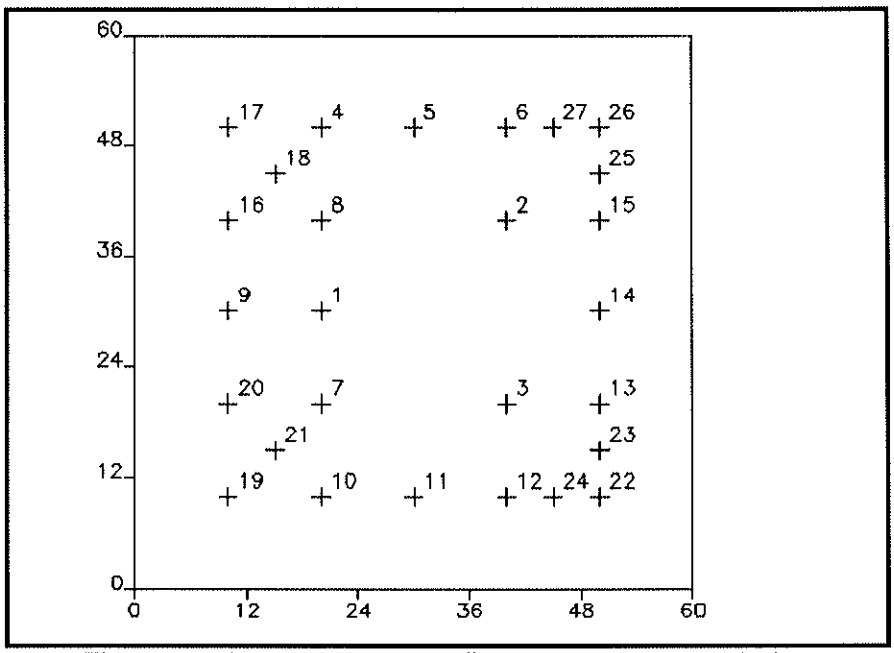

Figura 29: Mapa de localização de 27 pontos de dados.

Tabela 15: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 29.

ponto	X	Y	Z
1	20	30	760
2	40	40	790
3	40	20	780
4	20	50	772
5	30	50	775
6	40	50	788
7	20	20	750
8	20	40	770
9	10	30	740
10	20	10	748
11	30	10	753
12	40	10	773
13	50	20	795
14	50	30	800
15	50	40	799
16	10	40	750
17	10	50	760
18	15	45	770
19	10	10	730
20	10	20	735
21	15	15	745
22	50	10	788
23	50	15	792
24	45	10	780
25	50	45	795
26	50	50	790
27	45	50	789

Tabela 16: Resultados da cota interpolada com números variáveis de pontos de dados de 3 até 27 pontos, em incrementos de 3.

nº de pontos	cota (m)
3	645,63
6	698,13
9	729,96
12	749,59
15	759,07
18	761,43
21	763,59
24	764,87
27	766,18

Como se pode observar nesta tabela, com o aumento do número de pontos, a cota vai se aproximando do valor esperado. Nesse caso, o valor mínimo possível foi alcançado com 18 pontos de dados, mas ainda aquém do valor interpolado pela triangulação.

É preciso ressaltar que mesmo para o conjunto final com 27 pontos de dados, a interpolação por meio da triangulação continua fornecendo o mesmo valor de cota, pois o triângulo ainda é o mesmo, como se pode verificar na Figura 30.

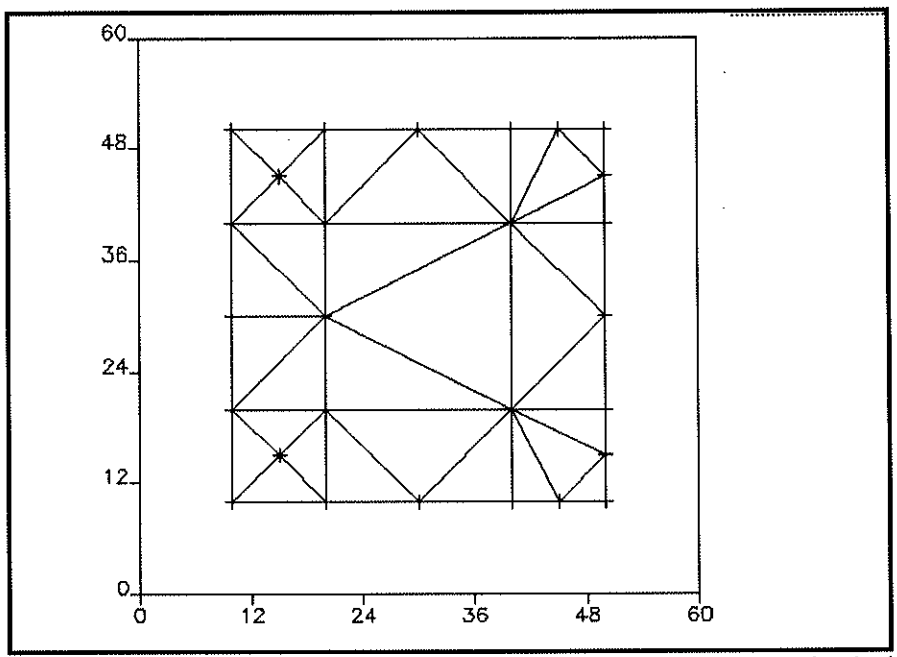

Figura 30: Mapa de triângulos para o conjunto final de pontos de dados.

Considerando a cota interpolada pela triangulação (772,50) como referência, embora as cotas fornecidas pelas equações multiquádricas possam ser válidas a partir de 18 pontos de dados, pode-se calcular um erro relativo (%), como se apresenta na Tabela 17. A variação das cotas e a distribuição dos erros com o número de pontos podem ser observados no gráfico da Figura 31.

Tabela 17: Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelas equações multiquádricas.

nº de pontos	cota (m)	erro relativo (%)
3	645,63	16,42
6	698,13	9,63
9	729,96	5,51
12	749,59	2,97
15	759,07	1,74
18	761,43	1.43
21	763,59	1,15
24	764,87	0,99
27	766,18	0,82

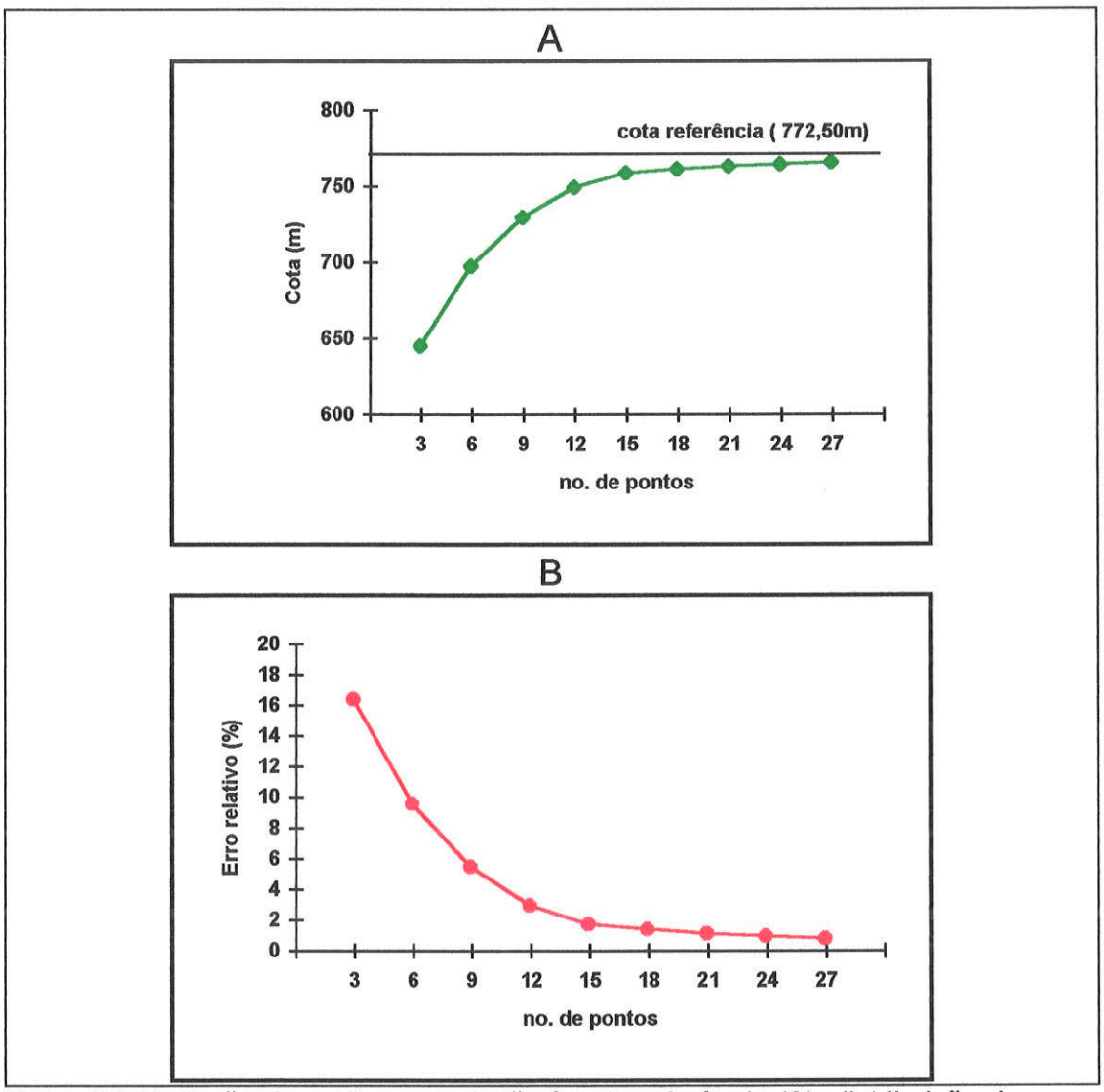

Figura 31: Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelas equações multiquádricas (B).

Nesta simulação, pôde-se verificar que de 8 a 12 pontos de dados ainda são insuficientes para uma boa aproximação pelas equações multiquádricas, principalmente quando se tratarem de informações de topografia. Para esse tipo de dado, recomenda-se a utilização de no mínimo 18 pontos de dados.

Sob o ponto de vista crítico, o grande número de pontos de dados a ser utilizado no ajuste das equações multiquádricas é uma desvantagem do método, em relação, por exemplo, ao da triangulação, que faz a interpolação sempre usando somente os três pontos de dados (vértices dos triângulos).

Retornando ao desenvolvimento do novo método de interpolação, adicionou-se ao sistema de equações (16), a seguinte condição:

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \qquad (17),$$

ou seja, exatamente a mesma condição presente no sistema de equações de krigagem.

O novo sistema de equações multiquádricas torna-se:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 & 1 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 & 1 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

A resolução desse novo sistema deu:

$c_1 = 1,184$
$c_2 = -0,385$
$c_3 = 0,201$
$M = 760,414$

Observe-se que o 4º coeficiente resultou num valor muito próximo ao mínimo esperado pelas equações multiquádricas.

Continuando o desenvolvimento, susbstituindo-se o vetor do lado direito por um termo quádrico, calculado entre o ponto de dado e o ponto a ser interpolado, como:

$$d_{ip} = [(X_i - Xp)^2 + (Y_i - Yp)^2 + C]^{1/2} \qquad (19),$$

com (Xp,Yp) = (30,30).

O sistema de equações do novo método fica:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 & 1 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 & 1 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,488 \\ 14,491 \\ 14,491 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (20),$$

cuja resolução dá:

$c_1 = 0,49115$
$c_2 = 0,25443$
$c_3 = 0,25443$
$M = -2,55659$

O valor do ponto a ser interpolado não pode ser calculado como nas equações multiquádricas originais, mas sim como a krigagem ordinária, ou seja, por meio da média ponderada:

$Z = 0,49115*760 + 0,25443*790 + 0,25443*780$

$Z = 772,72m$

O valor interpolado é muito próximo daquele obtido pela triangulação, com um erro relativo de apenas 0,13%. Esta metodologia foi efetivamente apresentada em sessão técnica do XXXV Congresso Brasileiro de Geologia.

A grande vantagem deste novo método está justamente no número de pontos para se conseguir uma boa interpolação. A fim de verificar o comportamento desse novo interpolador em relação ao número de pontos, os dados da Tabela 15 e o mesmo procedimento para aferir o número mínimo de pontos para as equações multiquádricas foram utilizados. Os resultados desta nova simulação, juntamente com o erro relativo (%) encontram-se reproduzidos na Tabela 18.

Tabela 18: Erros relativos (%) para cotas interpoladas pelo novo método.

nº de pontos	cota (m)	erro relativo (%)
3	772,72	0,03
6	772,28	-0,03
9	774,28	0,23
12	773,79	0,17
15	773,39	0,12
18	773,25	0,10
21	773,26	0,10
24	773,25	0,10
27	773,37	0,11

A distribuição dos valores de cota, bem como o comportamento do erro, pequenos em geral, podem ser observados na Figura 32.

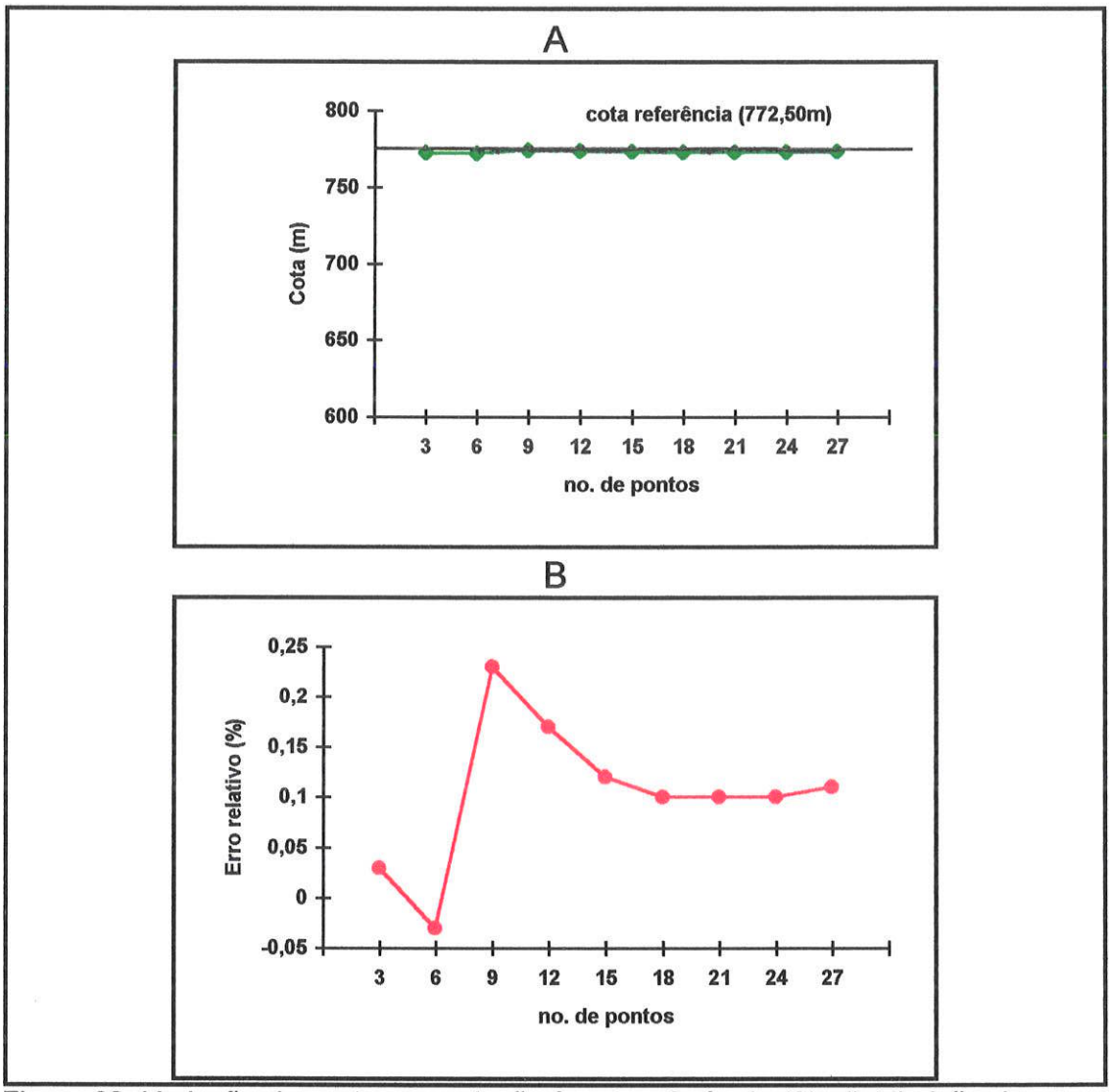

Figura 32: Variação das cotas em relação à cota referência (A); distribuição dos erros relativos das cotas interpoladas pelo novo método (B).

Os erros relativos desse novo método são muito pequenos (em torno de 0,12%) em média), quando comparados com os mesmos obtidos para as equações multiquádricas, o que o torna viável para interpolação de dados com grande precisão, para o contorno automático de dados geológicos.

Uma outra preocupação do Autor relacionava-se à estimativa do erro de interpolação, como se reproduz a seguir:

> "Como o sistema de equações multiquádricas passou a ter a forma do sistema de equações de krigagem imaginou-se poder estimar o erro cometido na interpolação, usando a equação da variância de estimativa da krigagem, substituindo-se as semivariâncias pelas distâncias correspondentes, como segue:

$$\sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \bar{d}(v_\alpha, V) + \mu - \bar{d}(V, V) \qquad (21)$$

Para o caso da interpolação pontual o termo $\bar{d}(V,V)$ é zero. Calculando-se a 'variância de estimativa' para os dados numéricos utilizados nas experiências, obteve-se um número muito pequeno e não representativo para a variância de estimativa. Repetindo-se o cálculo da variância de estimativa para um número maior de interpolações, segundo a metodologia descrita, observou-se que a 'variância' era igual a zero quando os pontos a serem interpolados coincidiam com os pontos de dados originais e que aumentava à medida que o ponto à ser interpolado se distanciava dos pontos de dados originais, refletindo um 'erro de interpolação'. Fazendo uma análise dimensional dos estimadores e do multiplicador de Lagrange μ, tem-se que os primeiros são adimensionais e que o último tem a mesma unidade da semivariância ou covariância. Assim, para o caso da equação (21), o multiplicador μ tem a mesma unidade de distância. Portanto, o 'erro de interpolação' encontrado é dependente da distância e tem a mesma unidade. Dividindo-se o 'erro de interpolação' encontrado pela distância média entre os pontos de dados e o ponto a ser interpolado, obtem-se um 'erro de interpolação normalizado' e adimensional. Como o 'erro de interpolação normalizado' ainda é zero quando coincide com o ponto de dado original e aumenta à medida que se distancia do agrupamento de pontos, essa medida reflete melhor um 'fator de ponderação espacial', que é proporcional à variância de estimativa verdadeira" (Yamamoto 1988d).

O fator de ponderação espacial deve ser diretamente proporcional à distância para o ponto mais próximo, como se pode verificar na Figura 33.

A partir do fator de ponderação espacial tentou-se derivar a variância de interpolação, como cita-se a seguir:

"Se o valor interpolado corresponde à estimativa a partir de um conjunto de pontos de dados, o desvio padrão tal como calculado para medir a dispersão em torno da média, dá idéia da dispersão em torno do valor estimado. Multiplicando-se o desvio padrão da estimativa pelo fator de ponderação espacial, tem-se facilmente o erro padrão de estimativa, com significado espacial e estatístico, pois é zero sobre o ponto de dado e aumenta à medida que se distancia do agrupamento de pontos de dados" (Yamamoto 1988d).

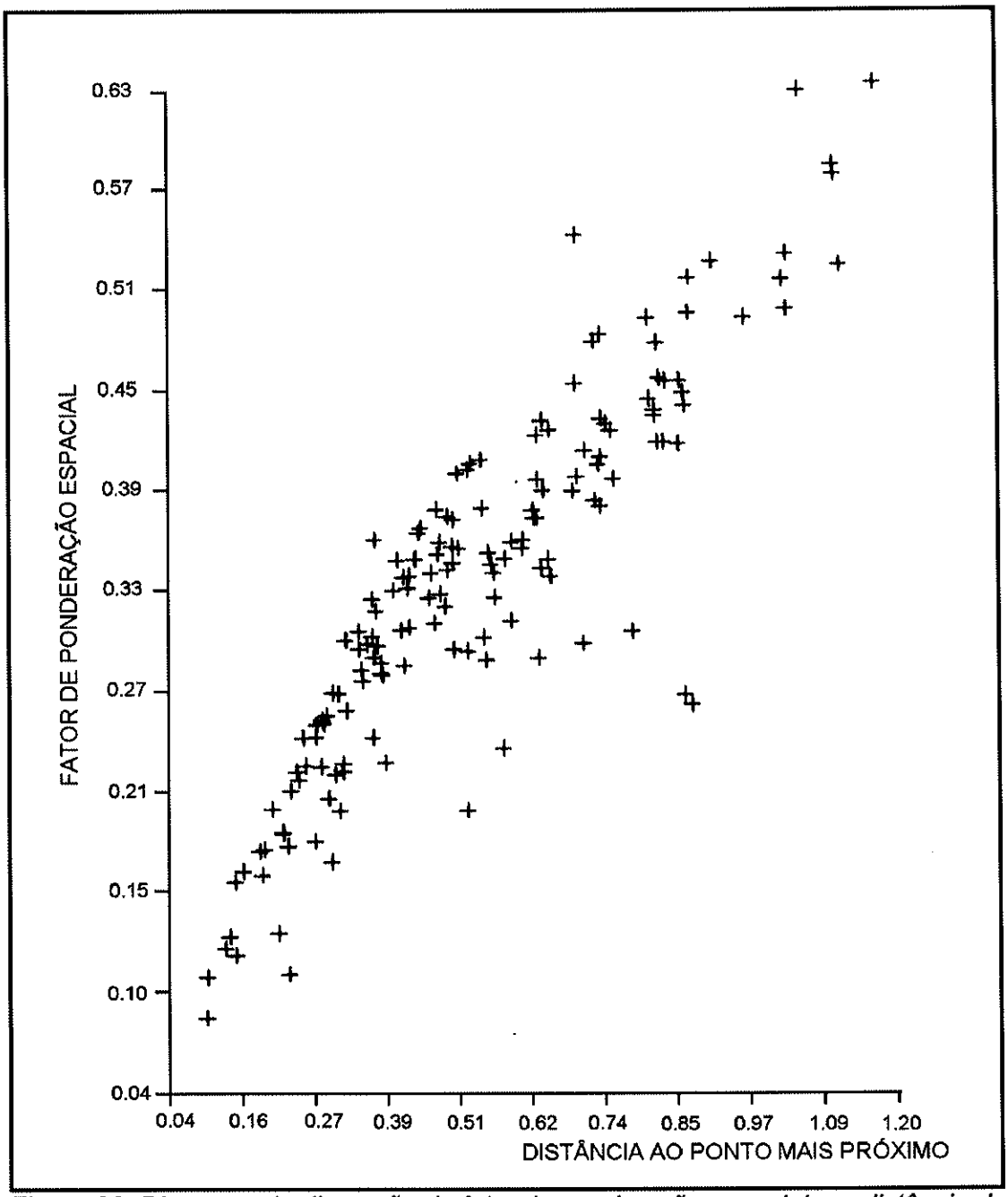

Figura 33: Diagrama de dispersão do fator de ponderação espacial e a distância do ponto mais próximo do subconjunto de dados, segundo Yamamoto (1988d).

Utilizando-se os dados da interpolação pelo novo método (equação-20), pode-se calcular o fator de ponderação espacial-FPE:

$$FPE = \frac{10,488 * 0,49115 + 14,491 * 0,25443 + 14,491 * 0,25443}{(10,488 + 14,491 + 14,491)} = 0,951$$

A distância média, na realidade é a distância mais a parte correspondente à constante multiquádrica C, conforme a equação (19).

A variância dos pontos de dados em relação ao valor estimado é calculado como:

$$VAR = \frac{((760-772,72)^2 + (790-772,72)^2 + (780-772,72)^2)}{3}$$

VAR = 171,132

Portanto, a variância de interpolação fica:

VINT = 171,132*0,951 = 162,734,

ou o erro de interpolação:

ERRO = $(162,734)^{1/2}$ = 12,757

O erro de interpolação obtido está dentro da variação do conjunto de dados.

Ainda com o objetivo de estudar o comportamento do erro de interpolação, deslocou-se o ponto a ser interpolado de (30,30) para (25,30) e utilizando os mesmos pontos de dados da Tabela 14.

O sistema de equações do novo método, para interpolação do ponto (25,30), fica:

$$\begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 & 1 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 & 1 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,916 \\ 18,303 \\ 18,303 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22),$$

que tem como coeficientes:

c_1 = 0,76785
c_2 = 0,11608
c_3 = 0,11608
M = -1,75484

A cota interpolada no ponto (25,30) é portanto:

Z = 0,76785*760 + 0,11608*790 + 0,11608*780

Z = 765,80m

Calculando-se o fator de ponderação espacial e a variância em relação ao valor estimado, obtem-se:

$$FPE = \frac{5,916 * 0,76785 + 18,303 * 0,11608 + 18,303 * 0,11608}{(5,916 + 18,303 + 18,303)} = 0,62$$

$$VAR = \frac{((760 - 765,80)^2 + (790 - 765,80)^2 + (780 - 765,80)^2)}{3}$$

VAR = 273,64

VINT = 273,64*0,62 = 169,657

ERRO = 13,025m

Comparando-se os resultados obtidos, verifica-se que o erro de interpolação não apresentou sensibilidade em relação ao deslocamento do ponto a ser interpolado, muito embora o fator de ponderação espacial tenha diminuído de 0,951 para 0,62. Portanto, a variância ou erro de interpolação como propostos neste artigo não poderiam ser efetivamente utilizados.

A mesma metodologia empregada por Landim & Yamamoto (1988), foi utilizada para aferir a precisão da estimativa do novo método, conforme os resultados apresentados na Tabela 19, juntamente com aqueles obtidos para a krigagem e equações multiquádricas.

Tabela 19: Erros RMS (%) entre as malhas interpoladas e originais.

área	krigagem ordinária	equações multiquádricas	novo método
Cunha	14,33	12,83	13,49
Campos do Jordão	2,89	2,93	2,71
Botucatu	3,17	3,50	3,01

Os erros RMS (%) do novo método foram menores para Campos do Jordão e Botucatu e maior que o erro das equações multiquádricas para os dados de Cunha.

Portanto, este novo método apresenta um grande potencial para sua aplicação na interpolação de malhas regulares para o contorno automático de dados geológicos.

3.8 Novo método de interpolação tridimensional

Como uma extensão e aperfeiçoamento do método apresentado no item anterior, foi publicado o seguinte artigo:

Yamamoto, J.K. 1989. Novo método para modelagem de jazidas e avaliação de reservas. Brasil Mineral, 68:52-56.

A apresentação formal do novo método foi feita neste artigo, conforme segue:

"O valor da variável de interesse T, no ponto de coordenadas (X,Y,Z) é calculado como uma combinação linear dos valores dos n pontos de dados próximos (T_i, i=1,n), conforme a equação a seguir:

$$T = \sum_{i=1}^{n} w_i T_i \qquad (23)$$

onde: w_i são os ponderadores do novo método;

T_i são os valores da variável de interesse no ponto de coordenadas (X_i,Y_i,Z_i).

Os ponderadores (w_i, i=1,n) são determinados pela resolução de um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} w_j d(T_i, T_j) + \lambda = d(T_i, T) \quad \text{para } i = 1,n \\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{cases} \qquad (24)$$

onde: $d(T_i,T_j)$ é a distância entre os pontos de coordenadas (X_i,Y_i,Z_i) e (X_j,Y_j,Z_j);

$d(T_i,T)$ é a distância entre o ponto (X_i,Y_i,Z_i) e o ponto a ser interpolado (X,Y,Z);

λ é uma constante para tornar a soma dos ponderadores igual a 1.

O sistema de equações (24), para a determinação dos ponderadores espaciais (w_i, i=1,n) equivale a fazer krigagem pontual usando sempre variogramas lineares e sem efeito pepita" (Yamamoto 1989).

Uma outra proposta apresentada neste trabalho referia-se a utilização do logarítmo das distâncias no sistema de equações (24), porém foi logo abandonada por tratar-se de uma aproximação muito empírica.

Como o sistema (24) é puramente determinístico, um possível efeito pepita existente não seria considerado. Entretanto, esta metodologia é válida, pois foi recomendada para auxiliar na resolução de problemas, onde a krigagem não pode resolver ou não funciona.

O conceito de variância de interpolação foi introduzido neste trabalho.

"Determinados os ponderadores e o teor interpolado no ponto (X,Y,Z), deve-se estimar o erro de interpolação provável, em função da disposição espacial dos pontos de dados utilizados e da dispersão dos valores dos mesmos, em

relação ao valor interpolado. A variância de interpolação deve ser proporcional à diferença ao quadrado entre o valor de um ponto de dado T_i e o valor interpolado T, sendo a proporção definida pela contribuição efetiva daquele ponto de dado ao valor interpolado. Assim, estendendo este raciocínio a todos os pontos de dados utilizados, tem-se a variância de interpolação como a somatória das diferenças ao quadrado, entre os valores dos pontos de dados e o valor interpolado, multiplicadas pelas contribuições efetivas dos pontos de dados, ou seja, pelos respectivos ponderadores w_i.

A variância de interpolação é calculada conforme a equação a seguir:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (T_i - T)^2 \qquad (25),$$

ou o erro de interpolação como a sua raiz quadrada.

Observe-se que a variância calculada dessa maneira é mais representativa que aquela da krigagem, pois enquanto a primeira leva em consideração tanto a distribuição espacial dos dados e a dispersão dos mesmos, a última leva em consideração somente a distribuição espacial, visto que a variância (global) é constante para uma determinada distribuição espacial. Isso significa que a krigagem de pontos distintos, usando configurações espaciais de pontos iguais e independentemente dos valores dos dados nessas configurações, resultarão na mesma variância de krigagem e em geral superestimados, pois a variância é global.

A equação (25) para cálculo da variância de interpolação é semelhante à definição da variância de uma variável aleatória, apresentada por Moody et al. (1974, pág. 67), onde a função densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade do i-ésimo valor ser igual ao valor interpolado, foi substituída pela contribuição efetiva do i-ésimo valor (ponderador w_i) ao resultado da interpolação. Quando o ponto interpolado coincidir com algum ponto de dado, a variância será igual a zero, pois a contribuição efetiva desse ponto de dado será igual a um e a respectiva diferença ao quadrado igual a zero.

A variância de interpolação, segundo a equação (25), pode ser imediatamente aplicada ao cálculo do erro associado a interpolação pelo inverso ao quadrado da distância. Para que isso seja possível, basta que a soma dos inversos ao quadrado das distâncias seja igual a um. Esta possibilidade pode aumentar a utilização desse método de interpolação, visto que é um método expedito e, conseqüentemente, não requer para sua resolução de complexos

programas de computação, podendo, em alguns casos, ser resolvido diretamente na calculadora de bolso" (Yamamoto 1989).

A importância deste artigo está na proposta da equação da variância de interpolação com significado estatístico e espacial, ao contrário da variância de krigagem que é um índice de configuração espacial dos dados. Além disso, a formulação da variância de interpolação abre possibilidade para sua utilização não só para estimativa do erro do novo método como também para a própria krigagem ordinária e, principalmente, para o método da ponderação pelo inverso da potência da distância.

Com o objetivo de aferir esta proposta de cálculo da variância de interpolação, foram considerados os mesmos pontos de dados (Tabela 14) para cálculo da variância de interpolação nos pontos (30,30) e (25,30), como segue:

$$E^2(30,30) = 0{,}49115*(760-772{,}72)^2 + 0{,}25443*(790-772{,}72)^2 + 0{,}25443*(780-772{,}72)^2 = 168{,}924$$

$$E^2(25,30) = 0{,}76785*(760-765{,}80)^2 + 0{,}11608*(790-765{,}80)^2 + 0{,}11608*(780-765{,}80)^2 = 117{,}218$$

Para comparar com os resultados da proposta anterior, os valores obtidos foram resumidos na Tabela 20.

Tabela 20: Resultados dos cálculos da variância de interpolação, segundo as propostas de Yamamoto (1988d e 1989).

ponto	Yamamoto (1988d)		Yamamoto (1989)	
	variância	erro	variância	erro
(30,30)	162,734	12,757	168,924	12,997
(25,30)	169,657	13,025	117,218	10,827

Pelos resultados obtidos, verifica-se que esta proposta, para cálculo da variância e erro de interpolação, é mais consistente e sensível com o deslocamento do ponto, em que o erro diminuiu de 12,997 para 10,827.

Os dados experimentais para este trabalho foram os mesmos utilizados por Yamamoto (1987a), para o teste das equações multiquádricas.

Os resultados obtidos são reproduzidos nas Figuras 34 e 35.

"Nessas figuras pode-se observar que os resultados das interpolações pelos três métodos sobre os furos originais apresentam-se muito próximos entre si e compatíveis com as informações originais. Quanto aos erros de interpolação

obtidos, pode-se observar que sobre os furos originais refletem bem a dispersão local dos valores originais, como pode ser observado, por exemplo, no furo 38, onde a passagem do teor de Fe_2O_3 de 8,62% para 4,26% é acompanhada de um aumento no erro de interpolação. Além disso, pode-se observar sobre os furos interpolados o aumento do erro de interpolação, reflexo da distância aos pontos de dados originais e também da dispersão local dos valores dos mesmos" (Yamamoto 1989).

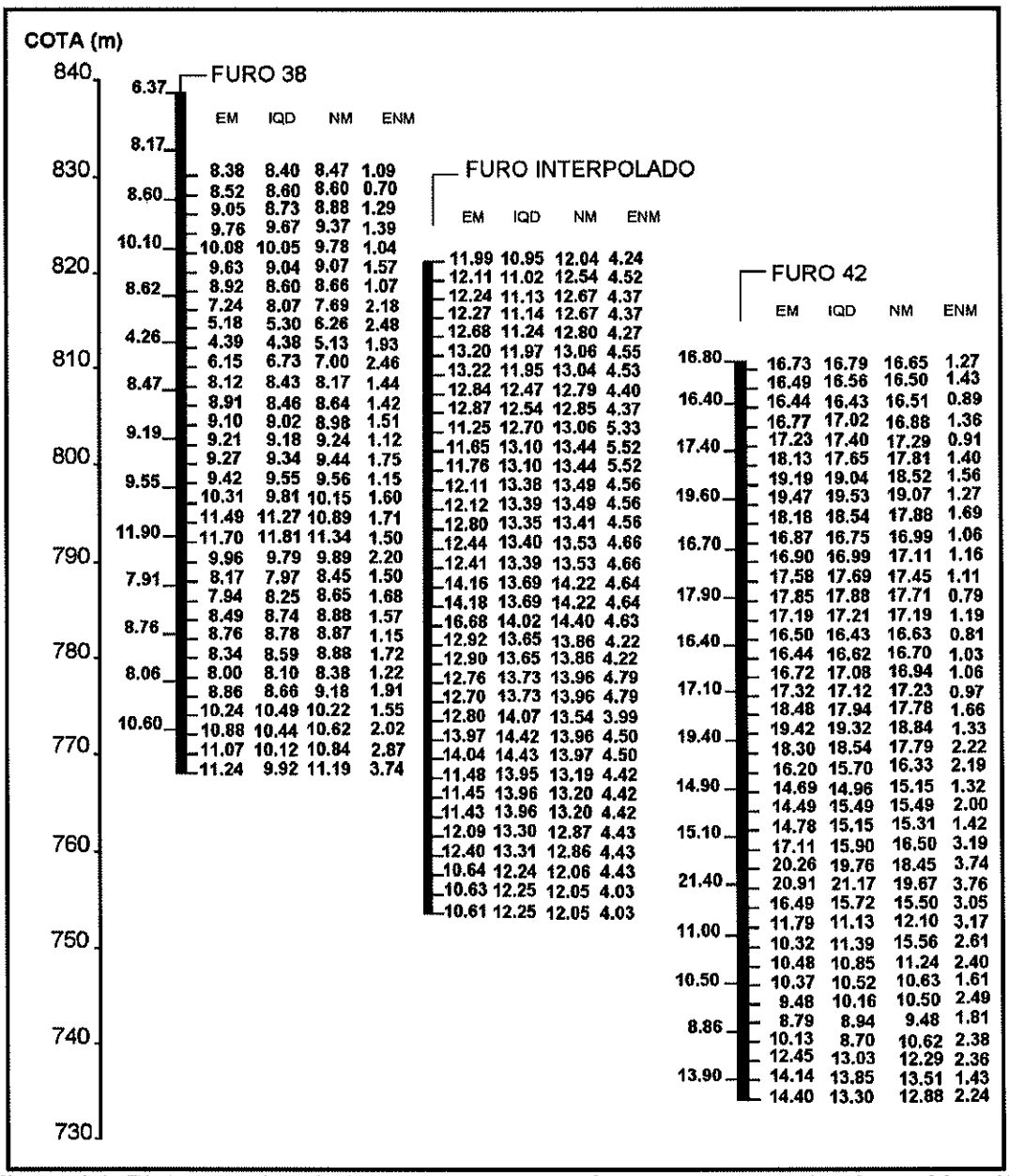

Figura 34: Plotagem dos dados originais de Fe_2O_3 (%) ao longo dos furos 38 e 42, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM), inverso ao quadrado da distância (IQD), novo método (NM) e erro de interpolação do novo método (ENM), segundo Yamamoto (1989).

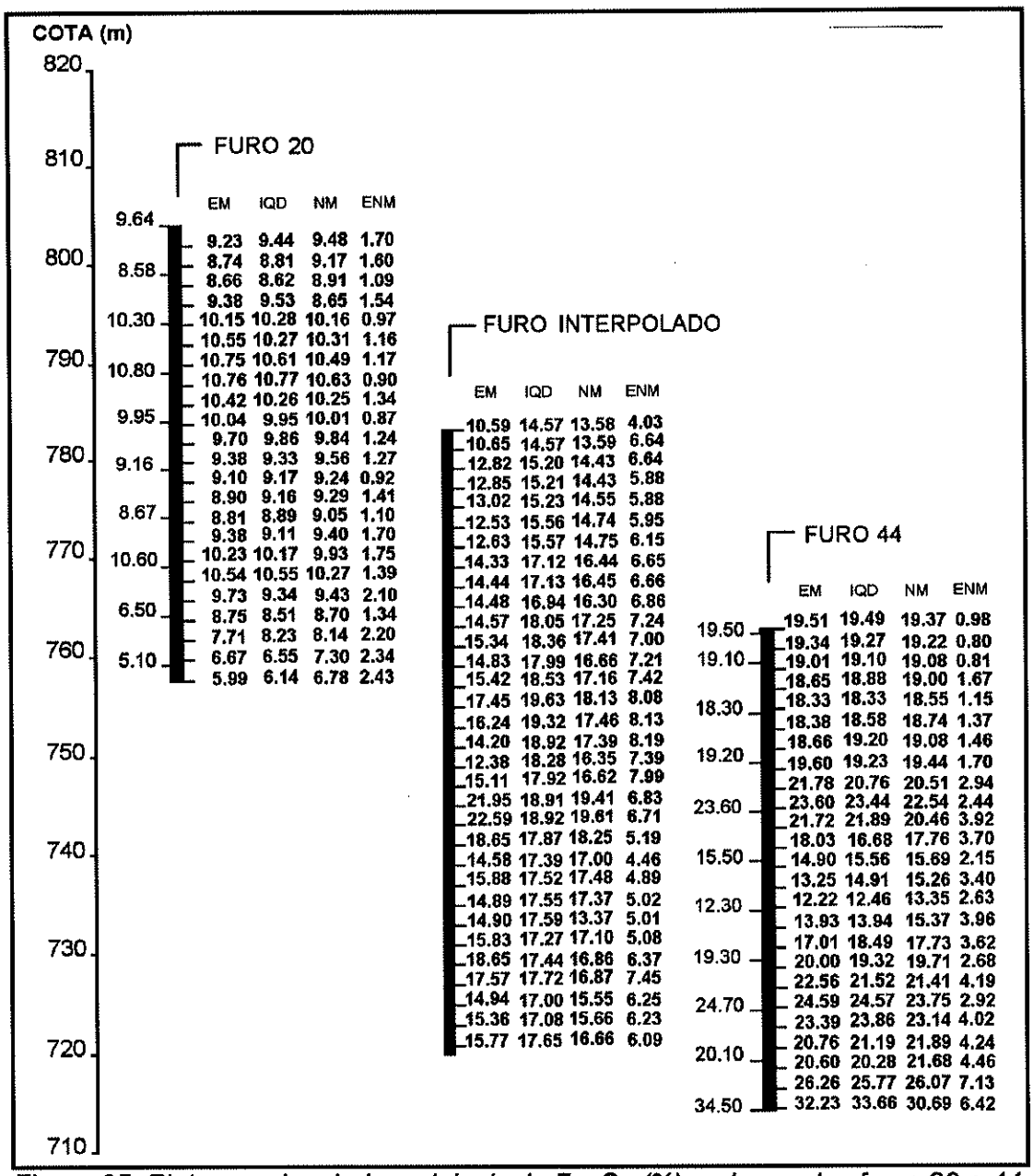

Figura 35: Plotagem dos dados originais de Fe_2O_3 (%) ao longo dos furos 20 e 44, juntamente com os dados interpolados através das equações multiquádricas (EM), inverso ao quadrado da distância (IQD), novo método (NM) e erro de interpolação do novo método (ENM), segundo Yamamoto (1989).

Os métodos utilizados para interpolação dos teores de Fe_2O_3 do complexo Alcalino de Anitápolis, foram aferidos por meio da validação cruzada, que consiste em interpolar o teor de um ponto de dado a partir de seus vizinhos e compará-lo com o valor verdadeiro em diagrama de dispersão. Sobre o diagrama mede-se a dispersão, por meio dos erros padrão e RMS, como segue:

$$\varepsilon_p = \left[\sum_{i=1}^{n} (Tc_i - Tv_i)^2 / n \right]^{1/2} \qquad (26)$$

$$\varepsilon_{RMS} = \left[\sum_{i=1}^{n} [(Tc_i - Tv_i) / Tv_i]^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

onde: Tc_i é o teor computado no ponto i;
Tv_i é o teor verdadeiro do ponto i.

As dispersões medidas para cada um dos métodos utilizados nesse trabalho, encontram-se reproduzidas na Tabela 21.

Tabela 21: Dispersão entre os teores interpolados e os teores verdadeiros, segundo Yamamoto (1989).

método	erro padrão	erro RMS (%)
equações multiquádricas	3,60	1,96
inv. quad. da distância	3,32	1,86
novo método	3,19	1,82

As menores dispersões foram obtidas com o novo método, seguido do inverso do quadrado da distância e das equações multiquádricas. Embora o novo método tenha sido derivado das equações multiquádricas, estas apresentaram as maiores dispersões, devido provavelmente a sua maior sensibilidade às variações dos dados que entram diretamente no sistema de equações multiquádricas.

> "Os resultados obtidos no teste do novo método são bastante satisfatórios, surgindo como método alternativo e substituto ao da krigagem pontual, quando não é possível a determinação de semivariogramas representativos. O desenvolvimento matemático do novo método não permite calcular o erro de interpolação do bloco como permite a krigagem de bloco. Entretanto, a variância do bloco deve ser estimada a partir da composição das variâncias dos blocos unitários, pois o teor médio é facilmente determinável como a média dos teores dos blocos unitários. Estudo nesse sentido está sendo desenvolvido para permitir o cálculo do erro de interpolação do bloco, a partir dos erros de interpolação dos blocos unitários" (Yamamoto 1989).

3.9 Estudo comparativo de métodos computacionais para avaliação de jazidas

Neste item acredita-se ter sido consolidada a linha de pesquisa em métodos de interpolação para avaliação de jazidas.

O trabalho principal desta fase do desenvolvimento é:

Yamamoto, J.K. 1991a. Comparação de métodos computacionais para avaliação de reservas: um estudo de caso na Jazida de Cobre de Chapada, GO. São Paulo,

IG-USP. 175p. (tese de doutoramento apresentada ao Instituto de Geociências-USP).

Os artigos derivados desse trabalho foram:

a) Yamamoto, J.K.; Bettencourt, J.S.; Amaral, G. 1991. Revisão dos métodos computacionais para avaliação de reservas. In: SIMP. GEOL. SUDESTE, 2, São Paulo, 1991. Atas...São Paulo, SBG. p.217.

b) Yamamoto, J.K. 1992a. Tratamento estatístico e análise dos dados de cobre e ouro da Jazida de Cobre de Chapada, GO. Bol. IG-USP, publ. esp., 12:153-154.

c) Yamamoto, J.K. 1992b. Análise estatística dos dados de furos de sondagem da Jazida de Cobre de Chapada, Goiás. Revista do IG, 13(2):31-45.

d) Yamamoto, J.K. 1992c. Uma alternativa à variância de krigagem: variância de interpolação. In: SEM. NAC.: O COMPUTADOR E SUA APLICAÇÃO NO SETOR MINERAL, 5, Belo Horizonte, 1992. Coletânea... Belo Horizonte, IBRAM. p.279-284.

Nesta parte da obra, foi realizado um trabalho de síntese do conhecimento e desenvolvimento obtidos nos últimos cinco anos, cujo resultado foi apresentado como tese de doutoramento ao Instituto de Geociências-USP. A importância dessa tese está na consolidação da metodologia de interpolação matemática aplicada a avaliação de reservas, por meio de blocos de cubagem, com estimativa do erro de interpolação.

As principais etapas deste trabalho foram:

- revisão da metodologia empregada para avaliação de reservas por métodos computacionais, envolvendo:
  - análise de dados;
  - composição de amostras de furos de sondagem;
  - analise estatística dos dados de sondagem;
  - análise geoestatística;
  - definição da área de interesse;
  - dimensionamento dos blocos de cubagem;
  - avaliação dos blocos de cubagem;
- avaliação da variância de interpolação e comparação com a variância de krigagem;
- estudo comparativo dos métodos computacionais;
- avaliação das reservas de cobre e ouro de Chapada.

Os artigos publicados (Yamamoto 1992a e 1992b) referem-se a resultados da análise de dados efetuada com os teores de cobre e ouro de Chapada. A introdução da composição de amostras de furos de sondagem foi considerada importante, pois:

> "geralmente o intervalo de amostragem nos furos de sondagem não corresponde ao intervalo de trabalho na fase de avaliação de reservas, embora tenha sido necessário analisar as amostras segundo o intervalo de amostragem, sempre menor que o intervalo de trabalho. Justifica-se isto frente à necessidade de reconhecer e delimitar possíveis zonas ricas dentro da jazida. Além disso, as amostras individuais dos furos de sondagem podem variar bastante em tamanho, comprimento e peso. Assim, a composição de amostras pelo agrupamento delas para o intervalo de trabalho, definido segundo a característica que se quer analisar, produzirá dados mais homogêneos e, portanto, com maior facilidade de interpretação.
>
> É importante especificar a unidade de amostragem utilizada na avaliação de reservas, pois, segundo Kim (1990), muitos problemas surgem pela não especificação da unidade de amostragem. Por exemplo, se uma jazida é avaliada com base na população de amostras de furos de sondagem a diamante, a produção da mina provavelmente não corresponderá às estimativas feitas, simplesmente porque a jazida não é lavrada, com furos de sondagem a diamante (Kim, 1990). Segundo Barnes (1980), o objetivo de se fazer composições de amostras é de obter amostras representativas de uma unidade mineralógica particular ou unidade de mineração; os teores de amostras compostas podem ser utilizados, por meio de alguma função de extensão, para estimar o teor ou valor de um volume muito maior da mesma unidade.
>
> Existem muitos tipos de depósitos minerais, cada um dos quais irá requerer um tratamento especial dos dados amostrados para a obtenção dos melhores intervalos de composição para avaliação do depósito (Barnes, 1980). Basicamente, são três os tipos de composição possíveis em amostras de furos de sondagem para o intervalo de trabalho: bancadas, tipos litológicos e elevações" (Yamamoto 1992b).

Como a futura lavra do depósito de Chapada será a céu aberto, pelo método tradicional de bancadas, as amostras foram compostas para bancadas de 10m de altura.

A análise estatística dos dados antes e depois da composição deve ser feita para verificar se a suavização intrroduzida pela composição foi muito grande, o que poderia descaracterizar a população originalmente amostrada.

Os parâmetros estatísticos obtidos para os teores de cobre e ouro nos furos e compostos para bancadas, encontram-se reproduzidos nas Tabelas 22 e 23, respectivamente.

Tabela 22: Parâmetros estatísticos da distribuição de cobre nos furos de sondagem e bancadas, segundo Yamamoto (1992b).

Parâmetros estatísticos	furos de sondagem	bancadas
média	0,27%	0,28%
desvio padrão	0,25%	0,21%
assimetria	2,38	1,52
curtose	13,33	3,67
coeficiente de variação	0,96	0,74
número de amostras	9998	1596

Tabela 23: Parâmetros estatísticos da distribuição de ouro nos furos de sondagem e bancadas, segundo Yamamoto (1992b).

Parâmetros estatísticos	furos de sondagem	bancadas
média	0,25ppm	0,23ppm
desvio padrão	0,25ppm	0,21ppm
assimetria	2,70	2,23
curtose	15,09	7,65
coeficiente de variação	1,03	0,91
número de amostras	9029	1596

Analisando-se os resultados obtidos, verifica-se que a composição de amostras dos furos de sondagem para bancadas de 10 m de altura, introduziu uma leve suavização dos dados, não compromentendo os resultados da avaliação de reservas.

Os métodos computacionais para avaliação de reservas, cuja revisão foi apresentada por Yamamoto et al. (1991), empregados neste estudo foram:

- inverso do quadrado da distância, denominado IQD-ORIGINAL;
- inverso do quadrado da distância para avaliação de blocos, denominado IQD-PROPOSTO;
- novo método para avaliação de reservas, denominado PONDERAÇÃO ESPACIAL;
- krigagem ordinária, denominado KRIGAGEM.

A diferença entre o método do inverso do quadrado da distância original e o adaptado para avaliação de blocos, está na interpolação de um único ponto central do bloco pelo primeiro e de vários pontos nos centros dos sub-blocos pelo segundo.

Entretanto, a descrição deste método adaptado para avaliação de blocos pelo inverso da potência da distância, será feita no item seguinte com informações atualizadas.

Os demais métodos ou foram descritos neste trabalho ou são conhecidos da literatura especializada.

É importante mostrar os resultados obtidos da comparação de variância de interpolação para todos os métodos e no caso da krigagem, também a comparação com a variância de krigagem.

A variância de interpolação foi proposta como alternativa à variância de krigagem, por Yamamoto (1992c).

> "A variância de krigagem, ou de estimativa, segundo Kim (1990), é a variância dos erros entre o verdadeiro teor Z e o teor estimado Z^* de um bloco do depósito mineral. Certamente, os verdadeiros valores de teor Z nunca podem ser conhecidos na prática, a menos que os blocos sejam completamente lavrados (Kim, 1990). Conseqüentemente, segundo este autor, o erro exato de estimativa nunca pode ser determinado, contudo , pode-se determinar o valor esperado desses erros, se se assumir algumas suposições probabilísticas considerando a distribuição dos teores desses blocos.
>
> Em avaliação de reservas, uma pequena amostra de teor Z(x) é estendida para uma área vizinha a fim de obter o teor estimado de um volume maior chamado bloco (Kim, 1990). Ainda, segundo Kim (1990), se somente uma amostra é usada para estimar o teor do bloco, o erro das múltiplas extensões dos teores é definido como variância de estimativa, como é calculado pela krigagem ordinária.
>
> Na prática, o valor esperado da variância de krigagem, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 306), é determinado como:
>
> $$\sigma_E^2 = E\left\{[Z_v - Z^*_v]^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\gamma}(v_i, V) + \mu - \bar{\gamma}(V, V) \qquad (28)",$$
>
> (Yamamoto 1992c).

A variância de interpolação, proposta por Yamamoto (1992c), é calculada como:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [Z(x_i) - Z^* v]^2 \qquad (29)$$

onde: $Z(x_i)$ é o teor do i-ésimo ponto de amostragem;
Z^*v é o valor estimado do teor.

Comparando-se as expressões (28) e (29), observa-se que ambas utilizam a informação espacial dos pontos de dados, através dos ponderadores (λ_i, i=1,n), porém a diferença está no uso da função variograma pela variância de krigagem, enquanto a variância de interpolação usa diretamente as diferenças ao quadrado. Esta é a grande diferença entre as equações, pois a variância de krigagem é uma proporção da variância média global, determinada através do variograma, enquanto a variância de interpolação expressa a dispersão local dos pontos de dados em relação ao ponto interpolado.

Para ilustrar esse problema considere-se o caso de avaliação de pontos usando a mesma configuração espacial dos dados, supondo conhecida a função variograma $\gamma(h)$, como mostra a Figura 36, segundo Yamamoto (1992c).

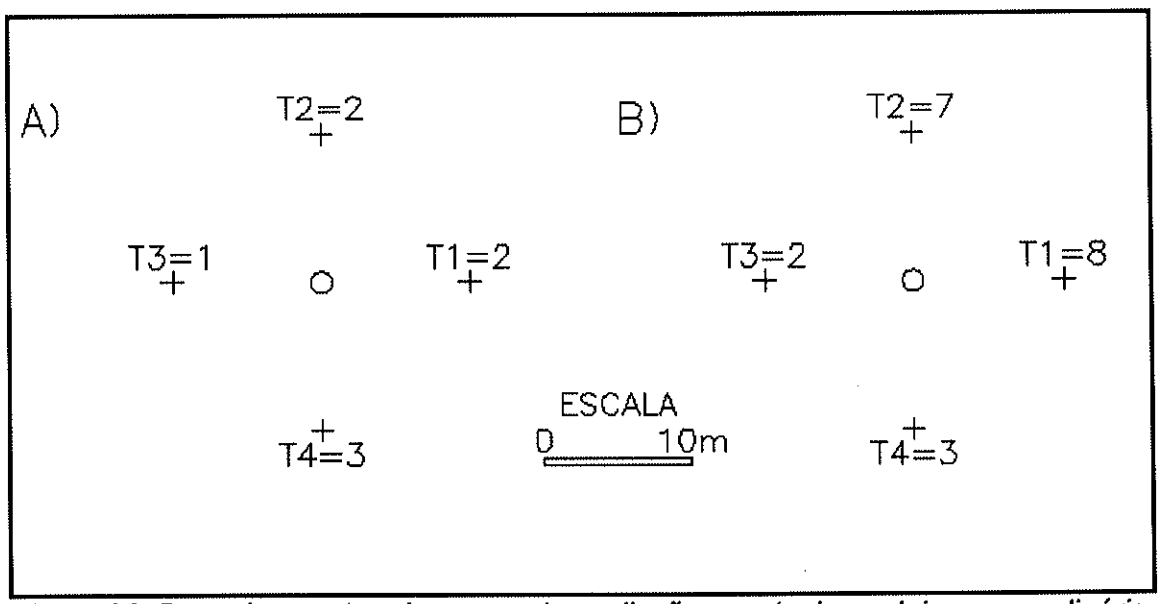

Figura 36: Desenho mostrando o caso de avaliações pontuais por krigagem ordinária, usando a mesma configuração espacial dos dados, mas com diferentes dispersões: baixa (A) e alta (B), segundo Yamamoto (1992c).

Para o caso dessas configurações é suposta válida a equação de um modelo transitivo, dado por:

$$\begin{cases} \gamma(h) = 0{,}1.h & \text{para } h < 30 \text{ m} \\ \gamma(h) = 3 & \text{para } h \geq 30 \text{ m} \end{cases} \qquad (30)$$

As variâncias de krigagem e de interpolação calculadas para os arranjos (A) e (B), encontram-se na Tabela 24.

Tabela 24: Variâncias de krigagem e de interpolação para os arranjos (A) e (B), segundo Yamamoto (1992c).

arranjo	variância de krigagem	variância de interpolação
A	1,793	0,50
B	1,793	6,50

As variâncias de krigagem foram exatamente iguais para os dois arranjos, pois o modelo de variograma é único, e os pesos iguais porque os arranjos são idênticos, espacialmente. Entretanto, as variâncias de interpolação refletem a dispersão dos pontos de dados em relação ao valor interpolado, discriminando o arranjo de baixa variação (A) em relação aquele de alta variação (B).

"Segundo Journel (1990), a expressão (29) para cálculo da variância de krigagem é atrativamente simples, pois:

a) confirma a exatidão da krigagem, isto é, quando uma amostra coincide com algum ponto a ser estimado, o peso desta amostra será igual a um com todos os outros iguais a zero e, conseqüentemente, $\varepsilon^2=0$;

b) aumenta com a dispersão dos valores das amostras utilizadas;

c) usa indiretamente a distância estrutural h do variograma através dos pesos λ da krigagem ordinária. Quanto mais influente a amostra maior o peso, como deveria ser" (Yamamoto 1992c).

A variância de interpolação, entretanto, pode ser empregada para estimativa do erro de qualquer método, pois depende somente dos ponderadores e dos valores dos pontos de dados.

Uma questão aberta com relação à variância de interpolação era justamente a sua determinação para estimativa de bloco, como foi colocada por Yamamoto (1989). Este problema foi estudado e solucionado na pesquisa de doutoramento (Yamamoto, 1991a).

O ponto de partida para a solução foi baseada no Teorema da Combinação das Estimativas da Krigagem (Journel & Huijbregts 1978, págs. 321-322). Segundo este teorema e demonstração prática feita por Isaacks & Srivastava (1989, págs. 327-330), a média do bloco é igual à média das estimativas pontuais nos sub-blocos e, por isso, a média dos coeficientes das krigagens pontuais são os próprios coeficientes da krigagem de bloco.

A demonstração da composição de variâncias dos sub-blocos para a determinação da variância do bloco será feita com o novo método, aqui denominado ponderação espacial. Para isso, será utilizado o bloco 1886 (de 100x100x10 m) da jazida de Chapada, cujo canto inferior esquerdo está localizado no ponto de coordenadas (1650,-250,310), segundo Yamamoto (1991a).

Para a avaliação desse bloco, foram selecionadas oito amostras de furos vizinhos próximos em relação ao centro do bloco (1700,-200,315), cujos dados encontram-se na Tabela 25.

Tabela 25: Coordenadas e teor de cobre de oito amostras de furos vizinhos ao bloco 1886, segundo Yamamoto (1991a).

X	Y	Z	TEOR(%)	DISTÂNCIA
1800	-100	325	0,098	141,77
1700	-150	325	0,046	50,99
1700	-250	325	0,083	50,99
1800	-200	325	0,112	100,50
1800	-100	315	0,066	141,42
1700	-150	315	0,321	50,00
1700	-250	315	0,635	50,00
1800	-200	315	0,520	100,00

Para fins de avaliação do bloco, foram adotados 16 sub-blocos igualmente distribuídos no interior daquele, resultando em sub-blocos de 25x25x10 m. Isto significa que a estimativa pontual feita no centro do sub-bloco é válida no seu domínio (volume equivalente a 6250 m^3).

Para cada um dos n sub-blocos, determina-se a média e variância de interpolação:

$$Tb_i = \sum_{j=1}^{m} w_j . T_j \qquad (31)$$

$$\varepsilon_{bi}^2 = \sum_{j=1}^{m} w_j . (T_j - Tb_i)^2 \qquad (32)$$

Os limites da somatória das equações (31) e (32) estavam originalmente como m(i), ou seja, o número de amostras para o i-ésimo sub-bloco. É preciso ressaltar que o número de amostras deve ser exatamente o mesmo para todos os sub-blocos para fazer uso do Teorema da Combinação das Estimativas da Krigagem (Journel & Huijbregts, 1978), embora isso tenha sido adotado na prática (Yamamoto, 1991a, pág. 118) ao se definir as oito amostras de furos vizinhos ao bloco 1886 (Tabela 25).

O valor médio da variável de interesse T para o bloco é:

$$T_B = \sum_{i=1}^{n} Tb_i / n \qquad (33),$$

e a variância associada à estimativa da média é:

$$\varepsilon_B^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{bi}^2 / n}_{\substack{\text{variância dentro} \\ \text{sub-blocos}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (T_{bi} - T_B) / n}_{\substack{\text{variância entre} \\ \text{sub-blocos}}} \qquad (34)$$

Assim, pelo método da ponderação espacial para avaliação de blocos, resolve-se o sistema de equações (35), 16 vezes, substituindo-se a cada vez o vetor distância entre a amostra e o centro do sub-bloco (Tabela 26).

$$\begin{bmatrix} 0 & 111,8 & 180,3 & 100,0 & 10,0 & 112,3 & 180,6 & 100,5 & 1 \\ 111,8 & 0 & 100,0 & 111,8 & 112,3 & 10,0 & 100,5 & 112,3 & 1 \\ 180,3 & 100,0 & 0 & 111,8 & 180,6 & 100,5 & 10,0 & 112,3 & 1 \\ 100,0 & 111,8 & 111,8 & 0 & 100,6 & 112,3 & 112,3 & 10,0 & 1 \\ 10,0 & 112,3 & 180,6 & 100,6 & 0 & 111,8 & 180,3 & 100,0 & 1 \\ 112,3 & 10,0 & 100,5 & 112,3 & 111,8 & 0 & 100,0 & 111,8 & 1 \\ 180,6 & 100,5 & 10,0 & 112,3 & 180,3 & 100,0 & 0 & 111,8 & 1 \\ 100,5 & 112,3 & 112,3 & 10 & 100,0 & 111,8 & 111,8 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Tabela 26: Vetores das distâncias entre as amostras e os sub-blocos, segundo Yamamoto (1991a).

sub	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
1	194,7	95,7	40,8	142,9	194,5	95,2	39,5	142,5
2	177,9	73,6	54,0	138,4	177,7	72,9	53,0	138,1
3	163,3	54,0	73,6	138,4	163,0	53,0	72,9	138,1
4	151,4	40,8	95,7	142,9	151,0	39,5	95,2	142,5
5	177,9	89,0	20,3	119,0	177,7	88,4	17,7	118,6
6	159,4	64,5	40,8	113,6	159,1	63,7	39,5	113,2
7	142,9	40,8	64,5	113,6	142,6	39,5	63,7	113,2
8	129,1	20,3	89,0	119,0	128,7	17,7	88,4	118,6
9	163,3	89,0	20,3	95,7	163,0	88,4	17,7	95,2
10	142,9	64,5	40,8	89,0	142,5	63,7	39,5	88,4
11	124,2	40,8	64,5	89,0	123,7	39,5	63,7	88,4
12	108,0	20,3	89,0	95,7	107,5	17,7	88,4	95,2
13	151,4	95,7	40,8	73,6	151,0	95,2	39,5	72,9
14	129,1	73,6	54,0	64,5	128,7	72,9	53,0	63,7
15	108,0	54,0	73,6	64,5	107,5	53,0	72,9	63,7
16	89,0	40,8	95,7	73,6	88,4	39,5	95,2	72,9

A resolução do sistema de equações do novo método (35) para cada um dos sub-blocos (Tabela 26), resulta nos coeficientes listados na Tabela 27.

Tabela 27: Coeficientes da ponderação espacial para os sub-blocos, segundo Yamamoto (1991a).

sub	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	L
1	-0,0218	0,1126	0,3560	-0,0521	-0,0027	0,1569	0,4766	-0,0254	22,08
2	-0,0245	0,1981	0,2784	-0,0520	-0,0030	0,2598	0,3669	-0,0236	17,81
3	-0,0238	0,2875	0,1884	-0,0530	-0,0002	0,3756	0,2504	-0,0248	17,61
4	-0,0121	0,3581	0,1059	0,0601	0,0131	0,4782	0,1505	-0,0336	20,65
5	-0,0152	0,0582	0,3104	-0,0266	0,0025	0,0977	0,5698	0,0012	3,91
6	-0,0246	0,1622	0,2540	-0,0147	-0,0013	0,2317	0,3729	0,0199	1,64
7	-0,0283	0,2649	0,1523	-0,0131	-0,0022	0,3832	0,2221	0,0212	1,89
8	-0,0226	0,3174	0,0529	-0,0239	0,0021	0,5762	0,0945	0,0035	4,34
9	-0,0166	0,0236	0,2755	0,0387	0,0031	0,0645	0,5345	00767	-4,38
10	-0,0231	0,1237	0,2177	0,051	0,00336	0,1925	0,3360	0,0983	-7,54
11	-0,0199	0,2222	0,1173	0,0483	0,0109	0,3398	0,1865	0,0948	-8,14
12	-0,0041	0,2707	0,0220	0,0272	0,0278	0,5288	0,0630	0,0646	-6,46
13	-0,0268	0,0102	0,2520	0,1413	-0,0019	0,0529	0,3711	0,2012	-2,48
14	-0,0220	0,0841	0,1692	0,1455	0,0083	0,1436	02558	0,2155	-9,42
15	-0,0013	0,1614	0,0833	0,1304	0,0361	0,2471	0,1431	0,2000	-12,13
16	0,0416	0,2199	0,0139	0,0915	0,0886	0,3376	0,0565	0,1503	-11,38

Aplicando-se esses coeficientes nas equações (31) e (32) e dados de teor da Tabela 25, obtem-se os teores e variâncias listados na Tabela 28.

Tabela 28: Teores e variâncias para os sub-blocos, calculados de acordo com as equações (31) e (32), segundo Yamamoto (1991a).

sub-bloco	teor (%)	variância ($\%^2$)
1	0,3664	0,0691
2	0,3279	0,0623
3	0,2872	0,0515
4	0,2497	0,0391
5	0,4186	0,0669
6	0,3459	0,0616
7	0,2955	0,0486
8	0,2610	0,0308
9	0,4268	0,0630
10	0,3538	0,0590
11	0,3010	0,0470
12	0,2621	0,0298
13	0,3917	0,0593
14	0,3532	0,0545
15	0,3054	0,0467
16	0,2538	0,0363

A média e variância do bloco encontram-se na Tabela 29.

Tabela 29: Média e variâncias do bloco 1886 da jazida de Chapada, segundo Yamamoto (1991a).

média	variância dentro	variância entre	variância do bloco
0,325%	$0,0516\%^2$	$0,00315\%^2$	$0,0547\%^2$

Aplicando-se o vetor médio das distâncias (Tabela 30), de acordo com o Teorema da Combinação das Estimativas da Krigagem (Journel & Huijbregts, 1978), obtem-se os coeficientes do bloco, também listados nas Tabela 30.

Tabela 30: Distâncias médias entre as amostras e os sub-blocos e coeficientes do bloco, segundo Yamamoto (1991a).

amostra	distância média	coeficiente
1	144,5	-0,0153
2	59,8	0,1797
3	59,8	0,1781
4	104,6	0,0237
5	144,2	0,0115
6	58,8	0,2792
7	58,8	0,2781
8	104,1	0,0650
multiplicador Lagrange		1,75

A Tabela 31 apresenta os resultados de teor e variância do bloco 1886, obtidos aplicando-se os coeficientes e os dados de teor da Tabela 25, nas equações (33) e (34).

Tabela 31: Teor e variância do bloco calculado pelas equações (33) e (34).

média	variância do bloco
0,325%	$0,0547\%^2$

"Os resultados assim obtidos foram exatamente iguais à aproximação feita por meio de avaliações pontuais em sub-blocos e composição de teores e variâncias parciais. Pode-se verificar também que, neste caso, os coeficientes encontrados pela resolução do sistema de equações (35), com o vetor médio das distâncias, são iguais à média dos coeficientes dos sub-blocos listados na Tabela 27. Desta forma, o método da ponderação espacial para avaliação de blocos pode ser bastante simplificado, acompanhado de redução no tempo de computação, pois pode-se resolver um único sistema substituindo o vetor coluna das distâncias pelo vetor coluna das distâncias médias. Os resultados obtidos suportam a validade da proposta" (Yamamoto 1991a).

Assim, para as estimativas feitas por cada um dos métodos, foram, calculadas também as respectivas variâncias de interpolação, cujos resultados são apresentados na forma de diagramas de dispersão da variância em função do teor.

Os resultados obtidos para os teores de cobre estão reproduzidos nas Figuras 37 a 41.

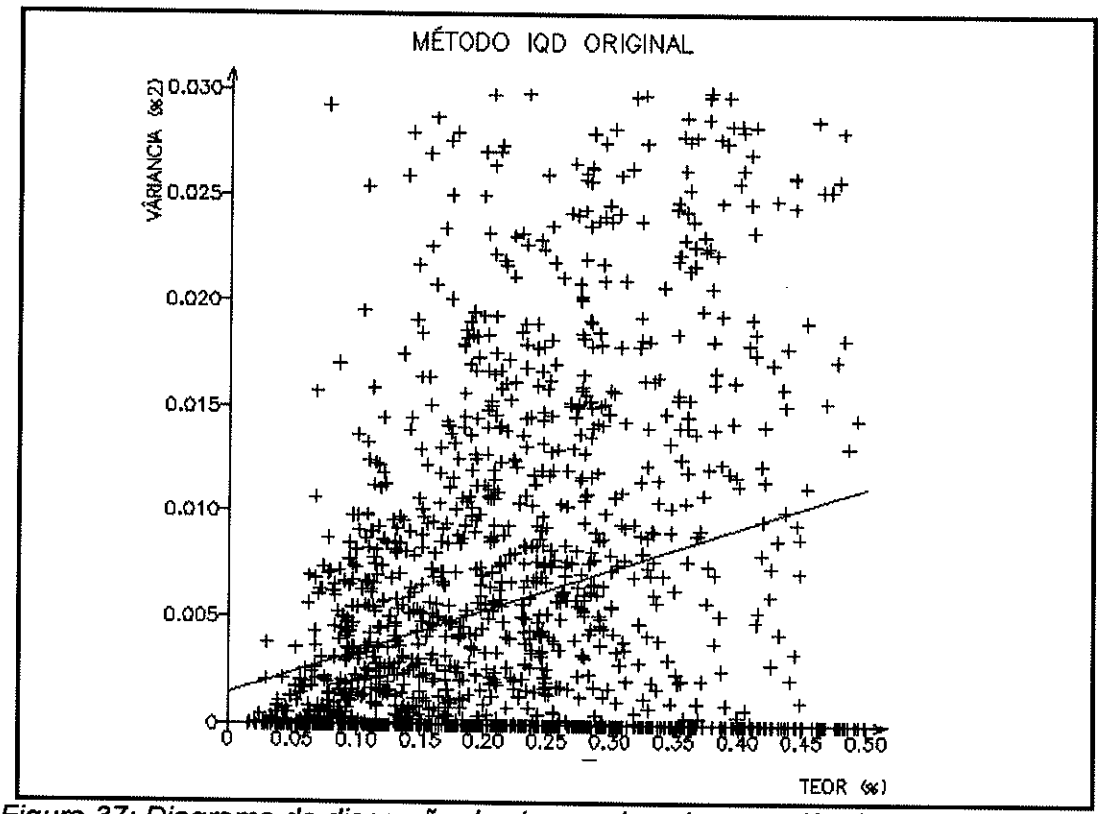

Figura 37: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pelo método IQD-ORIGINAL, segundo Yamamoto (1991a).

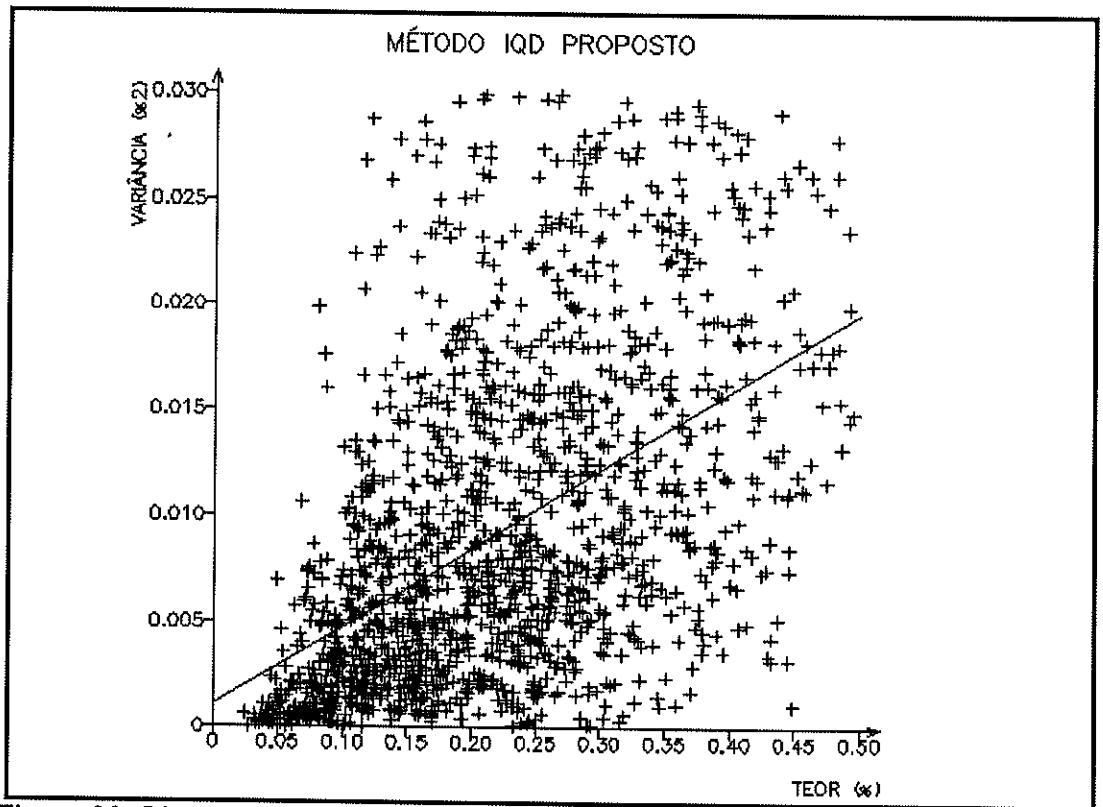

Figura 38: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pelo método IQD-PROPOSTO, segundo Yamamoto (1991a).

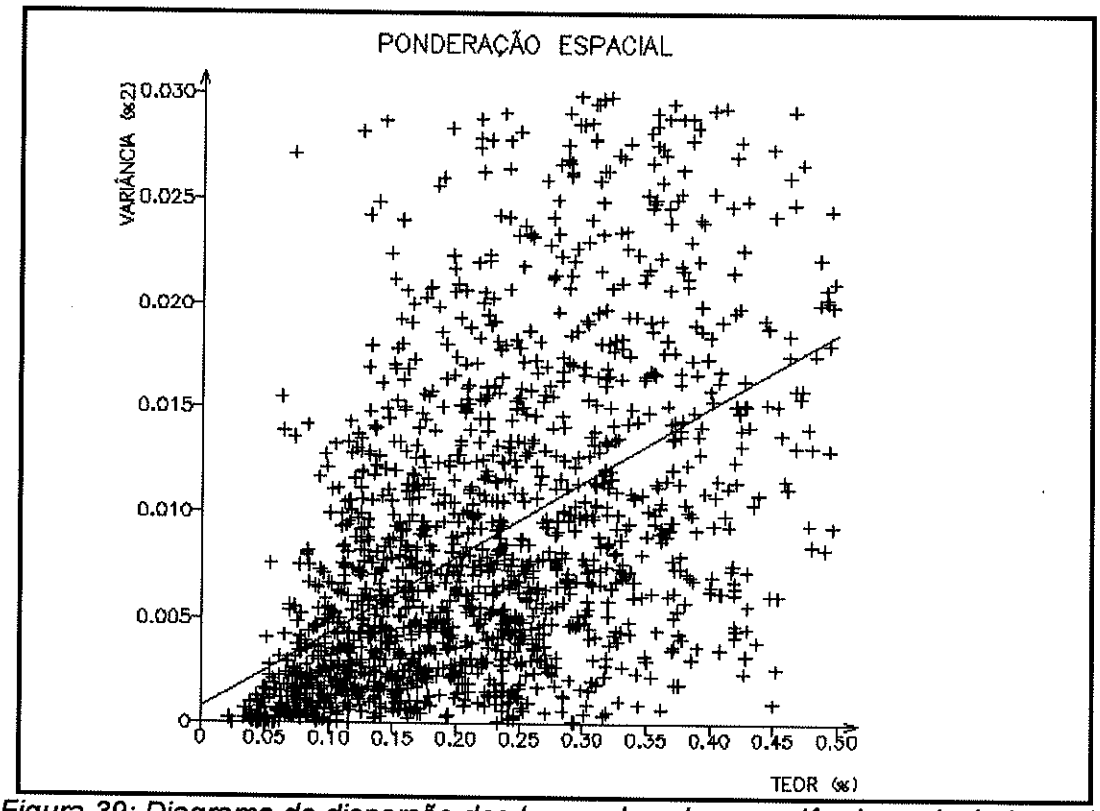

Figura 39: Diagrama de dispersão dos teores de cobre e variâncias calculados pela PONDERAÇÃO ESPACIAL, segundo Yamamoto (1991a).

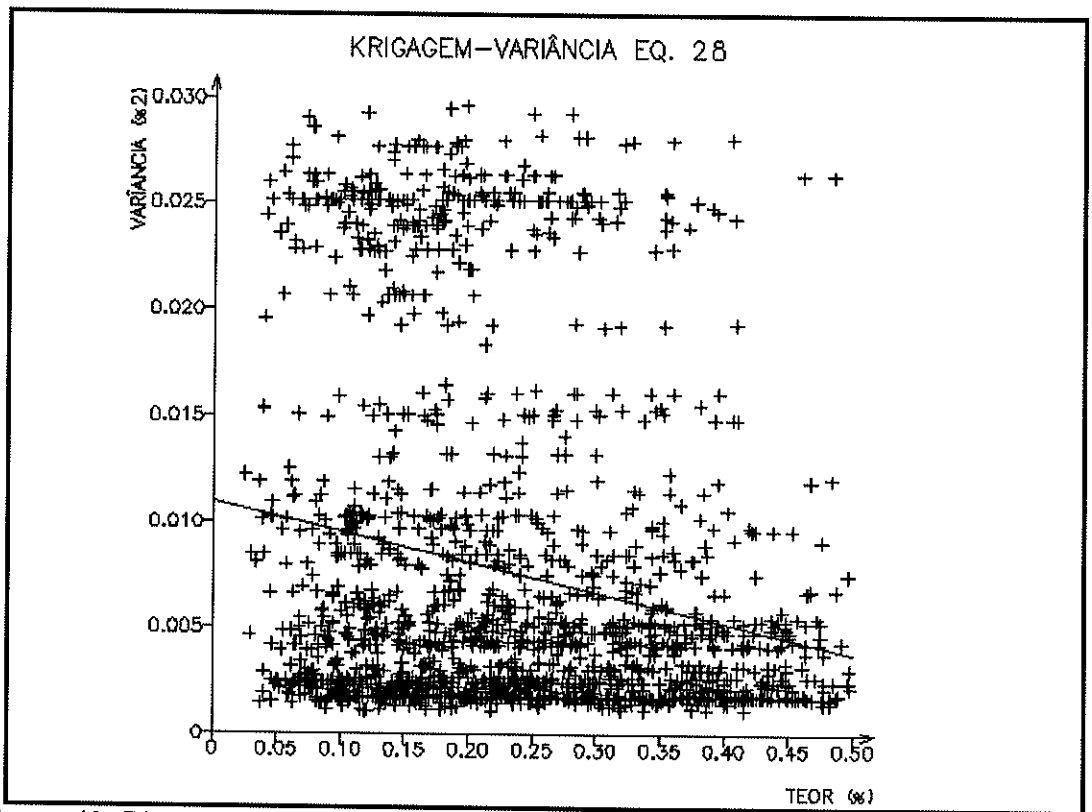

Figura 40: Diagrama de dispersão dos teores de cobre calculados pela KRIGAGEM e variâncias pela equação (28), segundo Yamamoto (1991a).

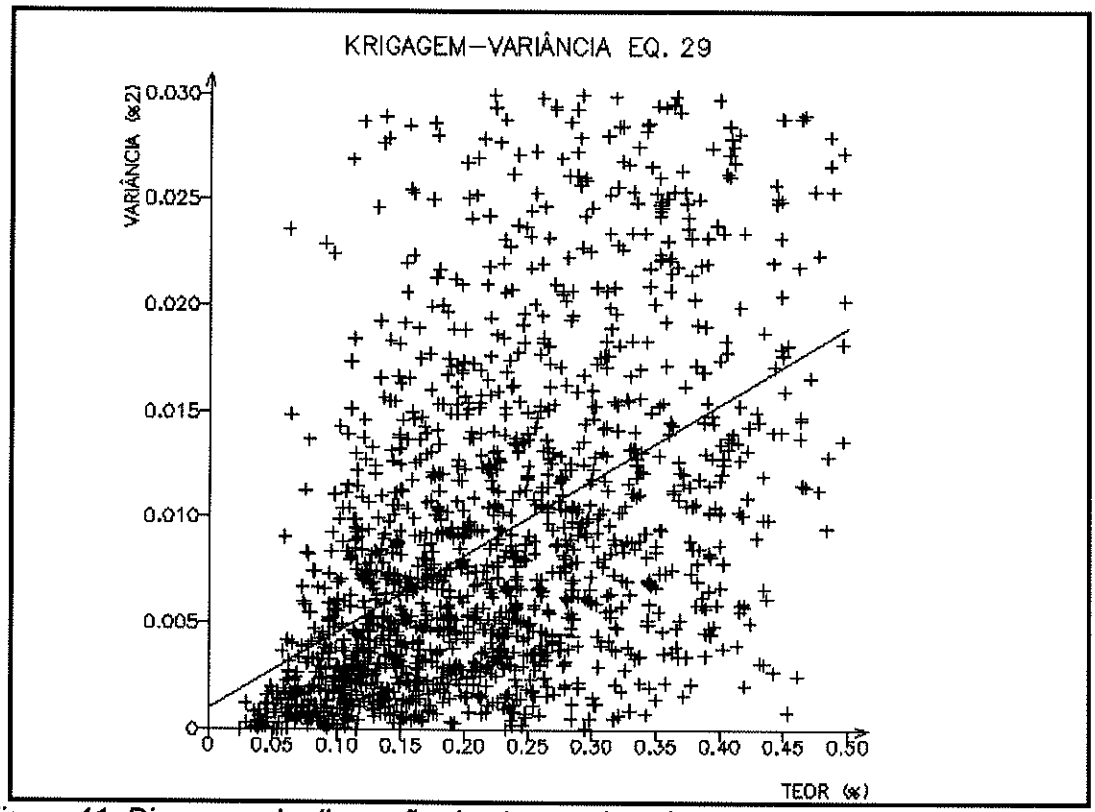

Figura 41: Diagrama de dispersão dos teores de cobre calculados pela KRIGAGEM e variâncias pela equação (29), segundo Yamamoto (1991a).

Na Figura 37, pode-se observar o enviesamento provocado pelo método IQD-ORIGINAL, onde muitos valores de variância foram iguais a zero porque simplesmente os blocos foram avaliados por um único furo central. O enviesamento se dá pela atribuição do teor da amostra do furo central para todo o bloco de cubagem, neste caso igual a 100x100x10 m, ou seja, com volume de 100.000 m^3.

Para os métodos IQD-PROPOSTO e PONDERAÇÃO ESPACIAL (Figuras 38 e 39), as variâncias obtidas foram diretamente proporcionais aos teores interpolados nos blocos de cubagem, refletindo uma medida real de dispersão.

A Figura 40, representa o diagrama de dispersão da variância de krigagem com os teores de cobre. A reta de regressão, dos mínimos quadrados, apresenta uma correlação linear negativa, além de muita dispersão nos dados. Uma concentração de pontos em torno da variância mínima reflete a existência do efeito pepita. Portanto, a variância de krigagem não mede efetivamente a dispersão real dos dados utilizados na interpolação do bloco. Por outro lado, substituindo-se a variância de krigagem pela variância de interpolação, a correlação passa a linear positiva, como se pode observar na Figura 41.

Os resultados apresentados nas Figuras 38, 39 e 41, já permitem prever que os teores interpolados pelo IQD, ponderação espacial e krigagem ordinária não seriam

muito diferentes. Mas, para determinar as diferenças relativas entre os resultados desses métodos, foi utilizada a técnica da validação cruzada, que consiste na interpolação de um ponto de dado original utilizando as informações dos demais pontos de amostragem. Assim, descontado o problema da variabilidade natural do depósito, o melhor método será aquele que produzir a menor dispersão em relação aos pontos de dados originais.

> "Obviamente, estes resultados dependerão da densidade de amostragem, bem como das características intrínsecas do depósito: distribuição espacial e padrão de variabilidade dos teores. Assim, é perfeitamente possível que o melhor método para um tipo de depósito não corresponde necessariamente em outro tipo de depósito, o que poderia implicar, inclusive, na inexistência de um método universal" (Yamamoto 1991a).

As validações cruzadas são representadas graficamente por meio de diagramas de dispersão do teor verdadeiro X teor interpolado. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 42, 43 e 44.

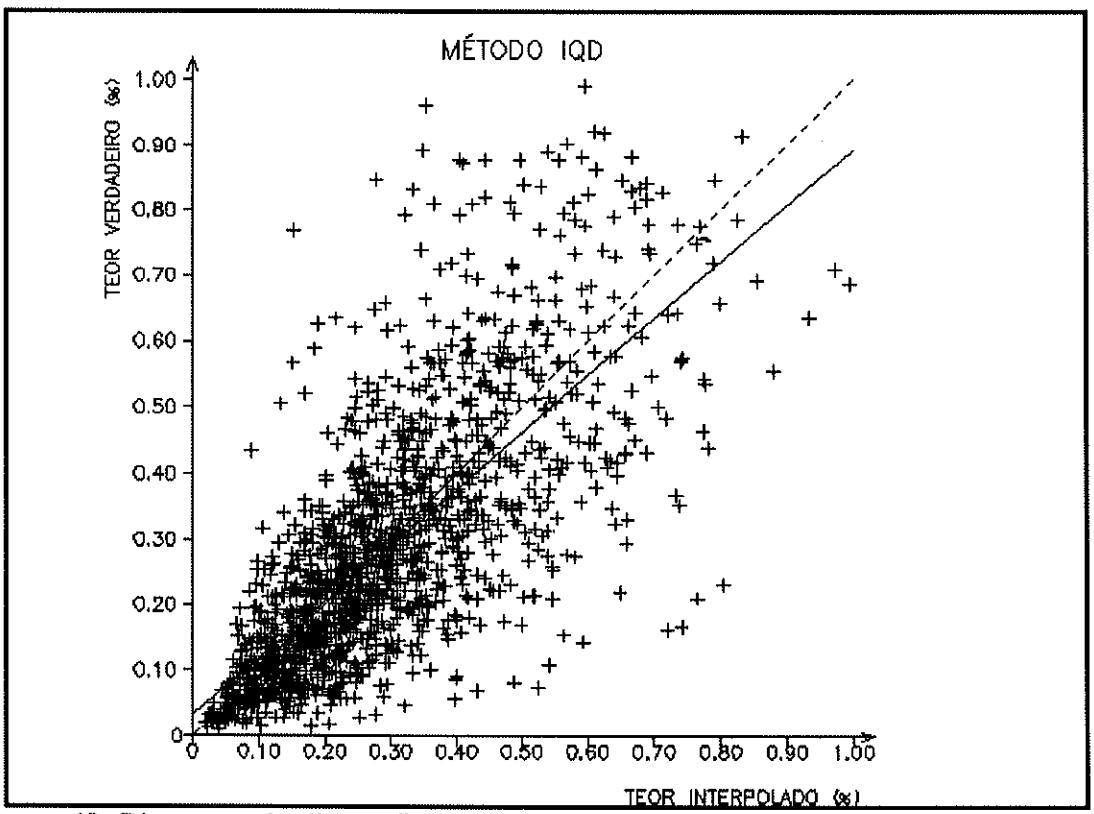

Figura 42: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pelo método IQD, segundo Yamamoto (1991a).

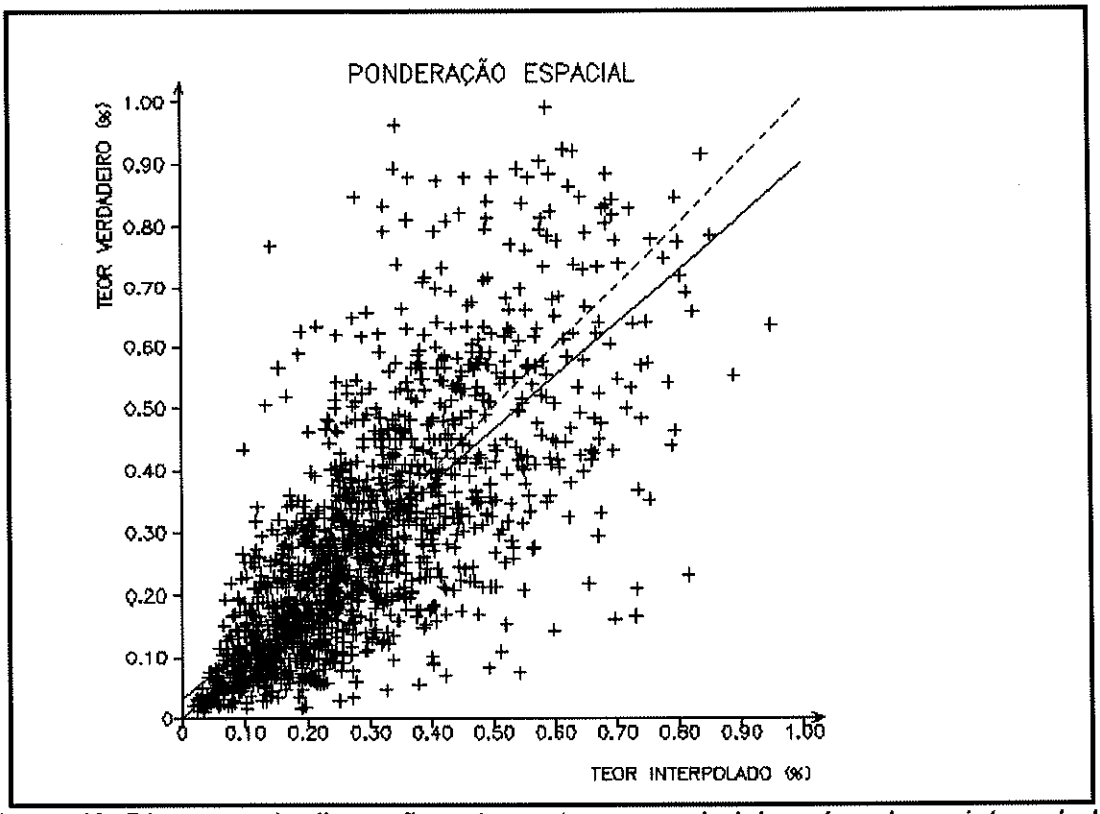

Figura 43: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pela ponderação espacial, segundo Yamamoto (1991a).

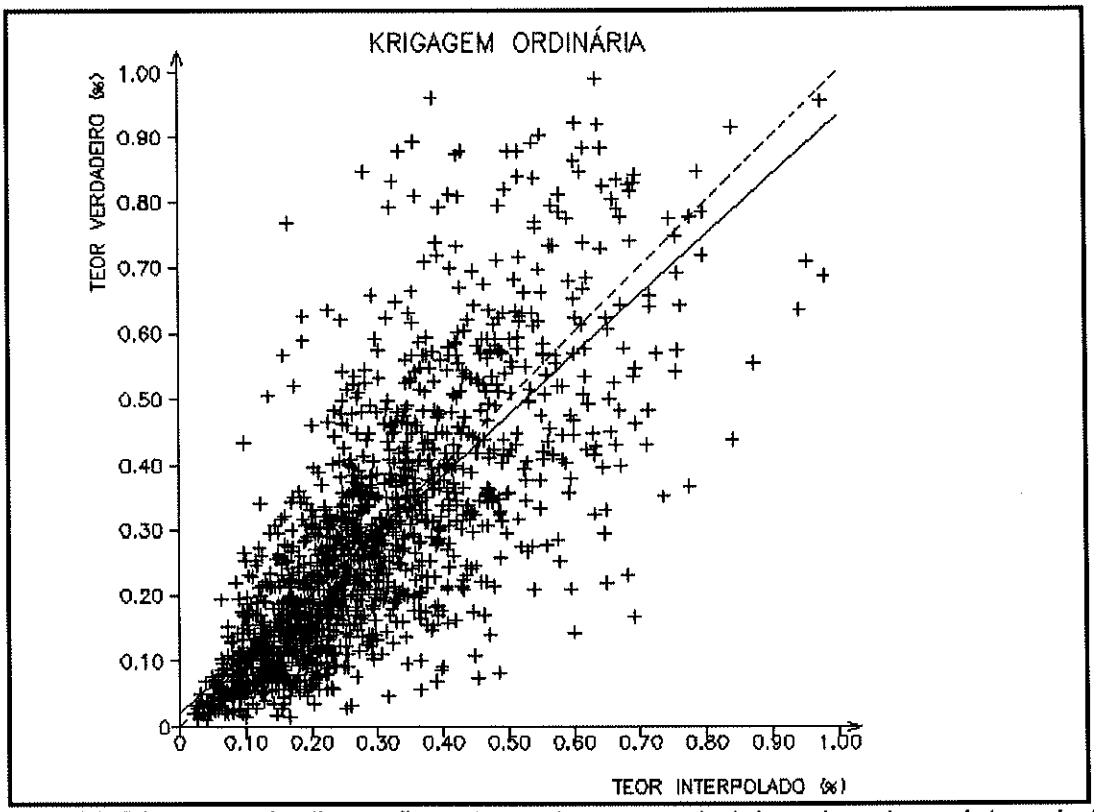

Figura 44: Diagrama de dispersão entre os teores verdadeiros de cobre e interpolados pela krigagem ordinária, segundo Yamamoto (1991a).

Os parâmetros das retas dos mínimos quadrados e os coeficientes de correlação calculados para estes diagramas, encontram-se reproduzidos na Tabela 32.

Tabela 32: Parâmetros das retas dos mínimos quadrados (a e b), coeficientes de correlação (cc) e número de pontos (np) lançados nos diagramas para um total de 1596 pontos, segundo Yamamoto (1991a).

variável	método	a	b	CC	np
cobre	IQD	3,146E-02	8,620E-01	0,739	1527
cobre	Ponderação espacial	3,041E-02	8,691E-01	0,743	1525
cobre	Krigagem ordinária	1,969E-02	9,115E-01	0,760	1528

Os diagramas de dispersão obtidos, apresentam-se muito semelhantes entre si, sendo possível verificar apenas que a reta de regressão dos mínimos quadrados para a krigagem ordinária apresenta-se mais próxima da reta ideal, que nos demais métodos. Os coeficientes de correlação das retas confirmam que o ajuste da krigagem ordinária foi levemente superior que dos outros métodos.

Ainda com o objetivo de aferir os métodos utilizados, foram calculados os erros padrão e RMS, que medem a dispersão dos pontos, conforme as equações (26) e (27).

As medidas de dispersão assim calculadas encontram-se na Tabela 33.

Tabela 33: Erros padrão e RMS calculados para as validações cruzadas, segundo Yamamoto (1991a).

variável	método	E_P	E_{RMS}
cobre	IQD	0,131	2,34
cobre	Ponderação espacial	0,130	2,30
cobre	Krigagem ordinária	0,126	2,21

Os erros padrão e RMS também confirmaram a superioridade da krigagem ordinária em relação aos demais métodos.

As características dos métodos utilizados em ordem decrescente de ajuste aos dados de Chapada, encontram-se resumidas no Quadro II.

Quadro II

Características dos métodos computacionais em ordem decrescente de ajuste.

Método	Características
krigagem ordinária	reconhece agrupamentos de pontos corrige anisotropia geométrica
ponderação espacial	reconhece agrupamentos de pontos não corrige anisotropia geométrica
inverso do quadrado da distância	não reconhece agrupamentos de pontos não corrige anisotropia geométrica

Os métodos computacionais foram aplicados aos dados da Jazida de Cobre de Chapada, para o cálculo das reservas geológicas de cobre para teores de corte simulados iguais a 0,20, 0,25 e 0,30%, conforme os resultados apresentados na Tabela 34.

Tabela 34: Reservas geológicas de cobre (metal contido) da Jazida de Chapada, segundo Yamamoto (1991a).

método	teor de corte (%)	reserva (10^6 ton)	teor médio (%)
1	0,20	1,026	0,356
2	0,20	1,021	0,338
3	0,20	1,010	0,342
4	0,20	1,004	0,340
1	0,25	0,869	0,397
2	0,25	0,851	0,375
3	0,25	0,843	0,380
4	0,25	0,834	0,379
1	0,30	0,699	0,444
2	0,30	0,672	0,416
3	0,30	0,690	0,415
4	0,30	0,666	0,420

Obs.:Os métodos estão representados como:

1=IQD-ORIGINAL; 2=IQD-PROPOSTO;3=PONDERAÇÃO ESPACIAL;

4=KRIGAGEM ORDINÁRIA.

Os resultados das reservas geológicas de cobre foram representados na forma de curvas teor x tonelagem (Figura 45).

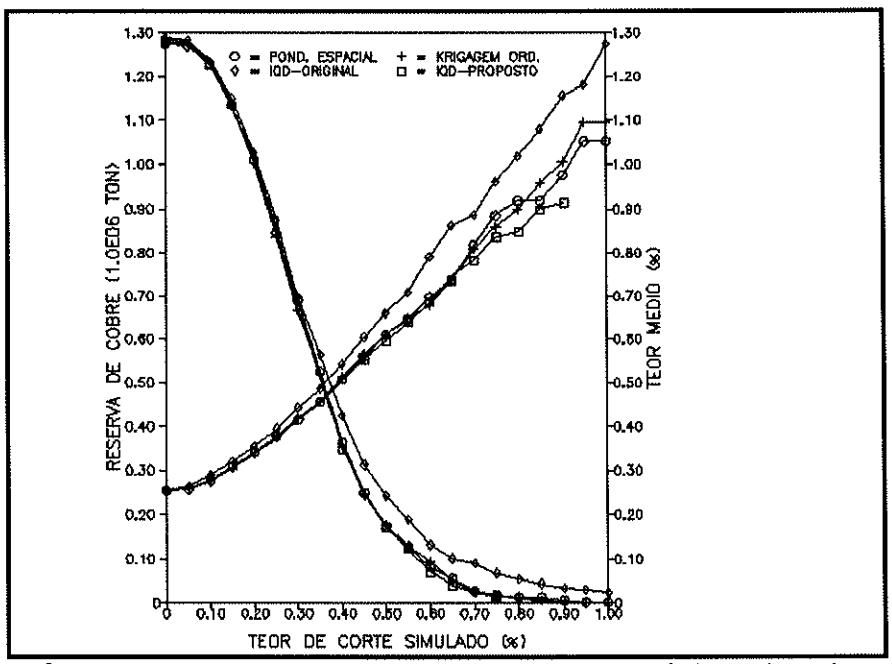

Figura 45: Curvas teor x tonelagem para as reservas geológicas de cobre, segundo Yamamoto (1991a).

"Nesta figura pode-se observar claramente que os resultados do método IQD-original (interpolação do teor em um único ponto no centro do bloco) destacam-se dos demais métodos, com tendência a superestimação de reservas e teores médio, a qualquer nível de teor de corte simulado.

Por outro lado, os métodos IQD-proposto, da ponderação espacial e krigagem ordinária produzem resultados muito próximos entre si, pois todos esses fazem avaliações de blocos por meio da discretização em sub-blocos, o que leva a resultados mais confiáveis e coerentes com a realidade. Levando em consideração que os resultados destes últimos são mais confiáveis à medida que um número maior de pontos dentro do bloco foi estimado, chega-se a conclusão importante que o método IQD-original, extensivamente utilizado no cálculo de reservas, tende a superestimar reservas e teores médios. Essa tendência será quão maior quanto menor for o suporte na ordem que segue: sub-blocos ⇨ centro do bloco ⇨ amostra composta ⇨ amostra original. Em outras palavras, o erro de extensão aumenta com a diminuição do suporte, explicada pela relação volume-variância mantida constante.

Assim, pelos resultados obtidos pode-se indicar que as reservas determinadas pela krigagem ordinária são mais confiáveis dentro da qualidade e quantidade de informações. Esta conclusão não pode ser generalizada, sendo válida somente para o caso em estudo, pois em outro caso, se não for possível a obtenção de variogramas representativos, deve-se utilizar a ponderação espacial que revelou-se superior ao IQD, uma vez que aquele reconhece agrupamentos de pontos, ponderando-os adequadamente" (Yamamoto 1991a).

3.10 O método do inverso da potência da distância para avaliação de blocos

A revisão da geoestatística realizada no trabalho do doutoramento permitiu a adaptação do método do inverso da potência da distância para avaliação de blocos. Este novo método foi apresentado num simpósio regional:

Yamamoto, J.K. 1991b. O método da ponderação pelo inverso da potência da distância aperfeiçoado para avaliação de blocos. In: SIMP. GEOL. SUDESTE, 2, São Paulo, 1991. Atas...São Paulo, SBG. p.219.

Como o trabalho consta apenas de seu resumo, será apresentada uma revisão atualizada desta metodologia, pois considera-se uma importante contribuição para avaliação de reservas.

Segundo Houlding & Stoakes (1990), o método do inverso do quadrado da distância-IQD é superior aos métodos clássicos de avaliação de reservas e, por isso, tem sido extensivamente utilizado em substituição aos métodos geoestatísticos de estimativa, quando estes não funcionam, pela impossibilidade de obtenção de variogramas representativos.

Isaacks & Srivastava (1989), demonstram que a krigagem de bloco nada mais é que a composição de resultados de avalições pontuais nos centros dos sub-blocos, ou seja, a média das krigagens pontuais nos centros dos sub-blocos é igual ao teor médio do bloco pela aplicação da krigagem de bloco. Esta constatação permite a aplicação imediata do método IQD para avaliação dos sub-blocos, cujos resultados parciais são então compostos para se obter o teor médio do bloco, como o fez Yamamoto (1991a). Segundo este autor, a composição de teores dos sub-blocos para todo o bloco, por meio do cálculo da média, equivale ao cálculo dos ponderadores médios das amostras nos sub-blocos. Isto permite fazer a avaliação direta do bloco aplicando-se os ponderadores médios IQD nas amostras dos furos vizinhos ao bloco, embora Isaacks & Srivastava (1989, pág. 327) tenham afirmado que a avaliação direta do bloco é uma feição exclusiva da krigagem ordinária, não sendo compartilhada por outros métodos e, mesmo que alguns métodos possam ser adaptados, de maneira similar, os resultados não são consistentes. Ainda segundo aqueles autores, o método da ponderação pelo inverso da distância pode ser adaptado de modo que o peso seja proporcional à distância média entre uma amostra próxima e o bloco. No entanto, este procedimento não dá o mesmo resultado que a média das estimativas pontuais feitas dentro do bloco, pois esses autores enganaram-se ao usar as distâncias médias ao invés dos ponderadores médios, como encontra-se descrito em Yamamoto (1991a).

Para se proceder à avaliação do bloco, usando o método IQD, deve-se discretizá-lo em sub-blocos. Para isso é necessário definir a subdivisão a ser adotada para a obtenção dos sub-blocos, ou seja, a dimensão dos mesmo. Apenas como sugestão reproduz-se na Tabela 35, os valores máximos de discretização do domínio a ser estimado, conforme recomendação de Journel & Huijbregts (1978, pág. 97).

Tabela 35: Valores máximos para discretização do domínio a ser estimado, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 97).

dimensão do domínio	número de pontos
UMA	10
DUAS	6 X 6
TRÊS	4 X 4 X 4

A equação para avaliação direta do bloco pelo método do IQD é:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i . \overline{w_i} \qquad (36)$$

onde: $\overline{w_i}$ é o ponderador médio IQD médio entre a i-ésima amostra e todos os pontos de discretização do bloco.

O ponderador médio $\overline{w_i}$ da i-ésima amostra localizada no ponto de coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) e o k-ésimo ponto de discretização do bloco localizado nas coordenadas (Xb_k, Yb_k, Zb_k) é calculado da seguinte forma:

Primeiro calcula-se todos os ponderadores IQD por sub-bloco $w_{i,k}$:

$$w_{i,k} = \left[1/d_{i,k}^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} 1/d_{j,k}^2 \right] \qquad (37)$$

Os ponderadores por sub-bloco já são calculados para que a soma dos mesmos seja igual a um. A distância ao quadrado entre a i-ésima amostra e o k-ésimo sub-bloco é calculada como:

$$d_{i,k}^2 = \left[(X_i - Xb_k)^2 + (Y_i - Yb_k)^2 + (Z_i - Zb_k)^2 \right] \qquad (38)$$

Finalmente, o ponderador médio da i-ésima amostra pode ser calculado como a média dos ponderadores desta amostra nos sub-blocos:

$$\overline{w_i} = \sum_{i=1}^{nd} w_{i,k} / nd \qquad (39)$$

onde: nd é o número de pontos de discretização no bloco ou o número de sub-blocos.

O teor do bloco é obtido aplicando-se os ponderadores médios assim obtidos na equação (36), que equivale a calcular a média dos teores dos sub-blocos.

Para fins de comparação entre os pesos obtidos pelo método proposto e aqueles obtidos da krigagem ordinária de bloco, considere-se a situação dada na Figura 46, em que se pretende calcular o teor médio do painel, a partir de 5 amostras de furos de sondagem. Para fins de cálculo do teor médio do painel, considerou-se válido o modelo de variograma descrito pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \gamma(h) = 0{,}03 . h & \text{para } h < 200 \text{ m} \\ \gamma(h) = 6 & \text{para } h \geq 200 \text{ m} \end{cases} \qquad (40)$$

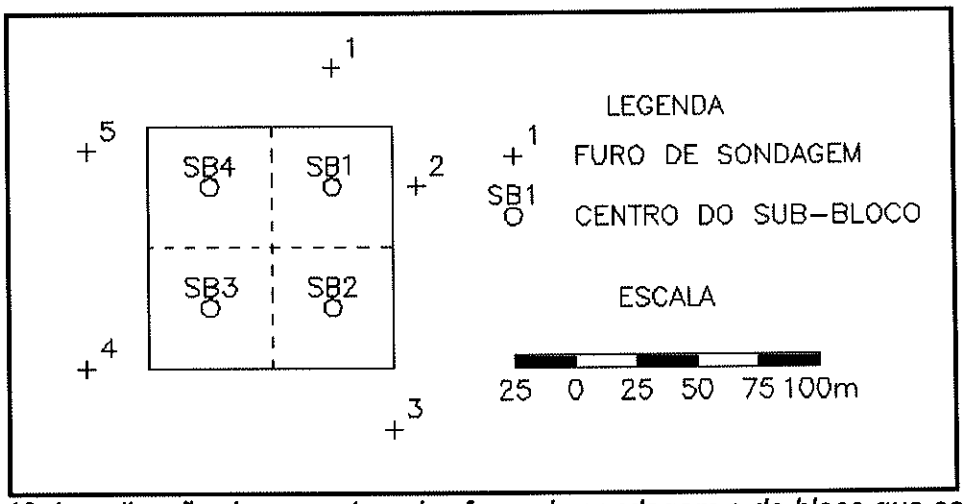

Figura 46: Localização das amostras dos furos de sondagem e do bloco que se deseja avaliar.

As coordenadas das amostras dos furos de sondagem encontram-se reproduzidas na Tabela 36.

Tabela 36: Coordenadas (em m) das amostras dos furos de sondagem.

amostras	coord. X	coord. Y
1	125	175
2	160	125
3	150	25
4	25	50
5	25,5	140

A avaliação do bloco em consideração foi feita pela subdivisão do mesmo em 4 sub-blocos, conforme as coordenadas dos centros dos mesmos reproduzidos na Tabela 37.

Tabela 37: Coordenadas (em m) dos centros dos sub-blocos.

sub-blocos	coord. X	coord. Y
1	125	125
2	125	75
3	75	75
4	75	125

Os pesos da krigagem de bloco, conforme metodologia descrita em Journel & Huijbregts (1978), foram obtidos pela resolução do sistema de equações de krigagem ordinária (41):

$$\begin{bmatrix} 0,000 & 1,831 & 4,562 & 4,802 & 3,164 & 1 \\ 1,831 & 0,000 & 3,015 & 4,633 & 4,060 & 1 \\ 4,562 & 3,015 & 0,000 & 3,824 & 5,085 & 1 \\ 4,802 & 4,633 & 3,824 & 0,000 & 2,700 & 1 \\ 3,164 & 4,060 & 5,085 & 2,700 & 0,000 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,494 \\ 2,097 \\ 2,806 \\ 2,806 \\ 2,647 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Os pesos da krigagem ordinária de bloco encontram-se na Tabela 38.

Tabela 38: Ponderadores da krigagem ordinária de bloco.

amostra	ponderadores K.O.
1	0,1441
2	0,2790
3	0,1883
4	0,1942
5	0,1944

Para o cálculo dos ponderadores médios do inverso do quadrado da distância para o bloco, determina-se os ponderadores por sub-bloco, que encontram-se na Tabela 39.

Tabela 39: Ponderadores do inverso do quadrado da distância por sub-bloco (ponderadores x 10^{-4})

amostra	SB1	SB2	SB3	SB4
1	4,0000	1,0000	0,8000	2,0000
2	8,1632	2,6845	1,0282	1,3840
3	0,9411	3,2000	1,2307	0,6400
4	0,6400	0,9411	3,2000	1,2307
5	0,9876	0,7079	1,4980	3,7379
SOMAS	14,7320	8,5336	7,7571	8,9928

Os ponderadores assim obtidos são normalizados por sub-bloco, ou seja, são divididos pela soma dos ponderadores por sub-bloco de tal forma que agora a soma dos ponderadores resulta em um. Os ponderadores normalizados por sub-bloco encontram-se na Tabela 40.

Tabela 40: Ponderadores do inverso do quadrado da distância, normalizados por sub-bloco.

amostra	SB1	SB2	SB3	SB4
1	0,2715	0,1172	0,1031	0,2224
2	0,5541	0,3146	0,1326	0,1539
3	0,0639	0,3750	0,1587	0,0712
4	0,0435	0,1103	0,4125	0,1369
5	0,0670	0,0829	0,1931	0,4156
SOMAS	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Os ponderadores médios do bloco são obtidos como a média dos sub-blocos como mostra a Tabela 41.

Tabela 41: Cálculo dos ponderadores médios do bloco.

amostra	SB1	SB2	SB3	SB4	SOMA	MÉDIA
1	0,2715	0,1172	0,1031	0,2224	0,7142	0,1786
2	0,5541	0,3146	0,1326	0,1539	1,1542	0,2886
3	0,0639	0,3750	0,1587	0,0712	0,6688	0,1672
4	0,0435	0,1103	0,4125	0,1369	0,7032	0,1758
5	0,0670	0,0829	0,1931	0,4156	0,7586	0,1897
SOMAS	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	.....	1,0000

Com o objetivo de comparar os resultados obtidos, são calculados também os ponderadores do inverso do quadrado da distância para o centro do bloco (ponto de coordenadas X=100, Y=100), denominado IQD-ORIGINAL, cujos resultados são tabulados juntamente com os da krigagem ordinária e dos ponderadores médios do bloco (Tabela 42).

Tabela 42: Ponderadores da krigagem de bloco, do inverso do quadrado da distância para bloco e o original.

amostra	K.O.	IQD-BLOCO	IQD-ORIGINAL
1	0,1441	0,1786	0,2044
2	0,2790	0,2888	0,3024
3	0,1883	0,1672	0,1572
4	0,1942	0,1758	0,1572
5	0,1944	0,1897	0,1788

Comparando-se os resultados obtidos, verifica-se que os ponderadores da K.O. e do IQD-BLOCO apresentam-se altamente correlacionáveis, enquanto os ponderadores calculados para o IQD original embora próximos desses não distinguem certas características que a estimativa de bloco exige como, por exemplo, o caso das amostras 3 e 4 que estão a mesma distância do centro do bloco e, por isso, tiveram pesos iguais no IQD ORIGINAL, mas não pelos demais métodos.

Como pôde ser visto, o método IQD-BLOCO é superior ao IQD-ORIGINAL à medida que permite uma redução significativa do erro de estimativa evitando efeitos de regressão (Royle, 1979) pela avaliação de blocos com furos centrados (método dos polígonos de Popoff, 1966).

3.11 Composição de variâncias em depósitos minerais

Após a avaliação de reservas de um depósito mineral, em termos de seus blocos de cubagem, é desejável conhecer também o seu teor médio e a sua variância.

Esse problema foi estudado e a solução encontrada foi publicada em:

Yamamoto, J.K. 1992d. Composição de variâncias em depósitos minerais. In: SEM. NAC.: O COMPUTADOR E SUA APLICAÇÃO NO SETOR MINERAL, 5, Belo Horizonte, 1992. Coletânea...Belo Horizonte, IBRAM. p.285-292.

Para melhor entendimento do problema colocado, é necessário conhecer a limitação da Geoestatística no cálculo da variância global do depósito, como se reproduz a seguir:

> "A média global do depósito pode ser obtida como média ponderada das estimativas locais pelos seus respectivos volumes:

$$Z^*_D = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} V_i . Z^* v_i \qquad (42)$$

onde: Z^*_D é a estimativa da média global;
D é o volume total do depósito e igual a soma dos n volumes V_i;
V_i é o volume do i-ésimo bloco do depósito;
Z^*v_i é o teor médio do i-ésimo bloco do depósito.

De acordo com Journel & Huijbregts (1978), as variâncias de krigagem não podem ser combinadas como podem as estimativas de krigagem (42). A variância de estimativa, conforme estes autores, pode ser escrita como:

$$\sigma^2_{ED} = E\left\{\left[Zd - Z^*d\right]^2\right\} = E\left\{\left[\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} V_i(Zv_i - Z^*v_i)\right]^2\right\} \qquad (43)$$

o que dá:

$$\sigma^2_{ED} = \frac{1}{D^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} V_i^2\,\sigma^2_{Kvi} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_iV_jE[(Zv_i - Z^*v_i)(Zv_j - Z^*v_j)]\right\} \qquad (44)$$

O problema está no cálculo das covariâncias dos erros $E[(Zv_i-Z^*v_i)(Zv_j-Z^*v_j)]$ que, teoricamente, segundo Journel & Huijbregts (1978, pág. 324), é possível somente se a função semivariograma $\gamma(h)$ for conhecida para todas as distâncias h dentro do depósito, além do cálculo das covariâncias dos erros ser muito complicado. Segundo Kim & Baafi (1984) a covariância do erro entre dois erros de estimativa, deve ser considerada porque os mesmos pontos de dados são muitas vezes usados para estimar cada unidade do bloco e, por isso, os erros de estimativa são estatisticamente dependentes. Kim & Baafi (1984) também reafirmaram a impossibilidade do cálculo da covariância do erro, por ser proibitivo em termos de tempo de computação, quando o número de dados é grande" (Yamamoto 1992d).

A solução proposta por Yamamoto (1992d), baseada na variância de interpolação associada a krigagem de bloco, é:

$$\varepsilon^2_D = \sum_{i=1}^{nb} \varepsilon^2_{Bi} / nb + \sum_{i=1}^{nb} (T_{Bi} - T_D)^2 / nb \qquad (45)$$

onde: nb é o número de blocos do depósito;
ε^2_{Bi} é a variância de interpolação do i-ésimo bloco;
T_{Bi} é o teor médio do i-ésimo bloco;
T_D é o teor médio do depósito,

que pode ser obtido como:

$$T_D = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{nb} V_i T_{D_i} \qquad (46)$$

onde: V_i é o volume do i-ésimo bloco,

o volume do depósito, portanto, é igual a:

$$D = \sum_{i=1}^{nb} V_i \qquad (47)$$

O primeiro termo da equação (45) é a variância dentro dos blocos, ou seja, a variância deriva dos blocos propriamente dito, e o segundo termo é a variância entre os sub-blocos, devido à diferença de teores entre os blocos e o teor médio do depósito, mantendo-se a relação volume-variância constante.

A equação (45) é válida somente se os blocos forem de mesmo suporte, caso contrário ela deve levar em consideração estas diferenças, como se apresenta na equação (48):

$$\varepsilon_D^2 = \sum_{i=1}^{nb} \varepsilon_{B_i}^2 V_i / D + \sum_{i=1}^{nb} (T_{B_i} - T_D)^2 V_i / D \qquad (48)$$

3.12 Efeitos adversos da krigagem ordinária

A estimativa por meio da krigagem ordinária proporciona resultados superiores aos demais métodos, pois permite corrigir anisotropias geométricas, bem como ponderar adequadamente na presença de agrupamentos de pontos. Entretanto, muitas vezes estas feições particulares da krigagem acabam produzindo efeitos indesejáveis, enviesando as estimativas.

Esses problemas foram estudados recentemente e os primeiros resultados foram publicados nos seguintes artigos:

a) Yamamoto, J.K. 1994a. Sobre a ocorrência de pesos negativos na solução de sistemas de equações de krigagem. In: SIMP. QUANT. GEOC., 5, Rio Claro, 1994. Bol. Res. Exp...Rio Claro, IGCE/UNESP. p.104-108.

b) Yamamoto, J.K. 1994b. O problema dos pesos negativos da krigagem ordinária: efeito da superavaliação do furo central em malhas regulares. In: CONGR. BRAS. GEOL., 38, Camboriú, 1994. Bol. Res. Exp...Rio Claro, SBG. v.2, p.326-327.

c) Yamamoto, J.K. 1994c. O efeito nocivo de pontos agrupados situados além da amplitude do variograma na krigagem ordinária. Comunicação apresentada na Sessão de Ciências da Terra do dia 06/12/94 da Academia Brasileira de Ciências.

A ocorrência dos pesos negativos pode ser colocado como "um sério problema prático que tem sido sistematicamente ignorado pelos geoestatísticos teóricos é aquele dos pesos negativos da krigagem. O procedimento da krigagem ordinária não faz quaisquer restrições sobre os sinais dos pesos resultantes e, conseqüentemente, os pesos podem ser negativos" (Barnes & Johnson 1984).

Ainda segundo Barnes & Johnson (1984), os efeitos dos pesos negativos podem resultar em:

- teores negativos;
- teores maiores que o maior valor amostrado;
- teores menores que o menor valor amostrado;
- teores altamente erráticos por pequenas mudanças nas localizações dos pontos,

além desses, Herzfeld (1989) cita:

- espessuras negativas;
- intersecção de topo e base de camadas.

Para ilustrar como o peso negativo é inaceitável na estimativa de teores pela média ponderada, considere-se o caso do cálculo da média do conjunto (5,3,8,2):

$$\text{- média aritmética} = \frac{5 + 3 + 8 + 2}{4} = 4,5$$

- média ponderada = (1/4)*5 + (1/4)*3 + (1/4)*8 + (1/4)*2 = 4,5

Na média ponderada todos os pesos foram iguais a 1/4 e sempre maiores que zero. Na krigagem ordinária, o teor é estimado como média ponderada e, portanto, os ponderadores devem ser sempre positivos !

> "A ocorrência de pesos negativos resultantes da solução de sistemas de krigagem ordinária está ligada ao efeito de peneiramento, pelo qual as amostras mais próximas (passantes na malha da peneira) recebem pesos positivos e numericamente superiores em detrimento daquelas distantes (retidas na malha da peneira) que geralmente resultam em valores numericamente pequenos, podendo inclusive ser negativos. Tais valores, em princípio não deveriam causar distorções

na estimativa de teores e variâncias, desde que os valores da variável de interesse não apresentassem extremos, comuns em distribuições lognormais. Nestes casos, os teores podem resultar em valores negativos ou então em valores superiores ou inferiores aos valores originais. Pontos ou blocos com teores negativos são inadmissíveis, pois em depósitos minerais caso sejam minério o teor deverá ser positivo, acima de um teor de corte predefinido, e se forem estéril o teor deverá ser positivo, abaixo do teor de corte, podendo inclusive ser igual a zero, mas nunca negativo" (Yamamoto 1994a).

Ainda mais sério que os teores, as variâncias de interpolação são mais susceptíveis aos pesos negativos, pois os ponderadores multiplicam diretamente as diferenças ao quadrado. Se este valor for numericamente grande, a sua multiplicação por um peso negativo resultará num valor negativo e numericamente pequeno, tendendo permanecer negativo mesmo após a soma de outros termos. A expressão da variância de interpolação resultará positivo quando e somente quando os ponderadores forem todos positivos.

A principal causa da ocorrência de pesos negativos, resultantes da solução de sistemas de krigagem ordinária, está ligada à disposição espacial das amostras em relação ao ponto ou bloco a ser estimado. Portanto, não se trata em escolher um determinado número de amostras e utilizá-lo para a krigagem ordinária. Nesse sentido, a simples escolha de um determinado número de pontos vizinhos mais próximos, sem impor restrições à localização dos mesmos, é a que pode causar um grande número de pesos negativos, pois em arranjos aleatórios ou semi-regulares dos pontos de dados, há grande probabilidade de ocorrência de pontos agrupados dentro dos subconjuntos de pontos para a estimativa. As Figuras 47 e 48 ilustram, respectivamete para arranjos aleatórios e semi-regulares, como ocorrem os agrupamentos de pontos de dados. Os arranjos semi-regulares de pontos de amostragem, caracterizam-se pela maior densidade de amostragem ao longo das linhas, que entre as mesmas.

Na Figura 47, pode-se observar que a pesquisa dos vizinhos próximos, sem nenhuma restrição quanto à localização dos mesmos, resulta no agrupamento de pontos no quadrante nordeste, em detrimento dos demais, enquanto o quadrante sudoeste nem sequer foi amostrado. No arranjo semi-regular da Figura 48, verifica-se que somente os pontos situados ao longo de uma linha de pesquisa foram amostrados, se nenhuma restrição for imposta, caracterizando também um agrupamento de pontos. Em nenhum dos dois casos citados, a amostragem espacial foi representativa em termos do gradiente dos dados.

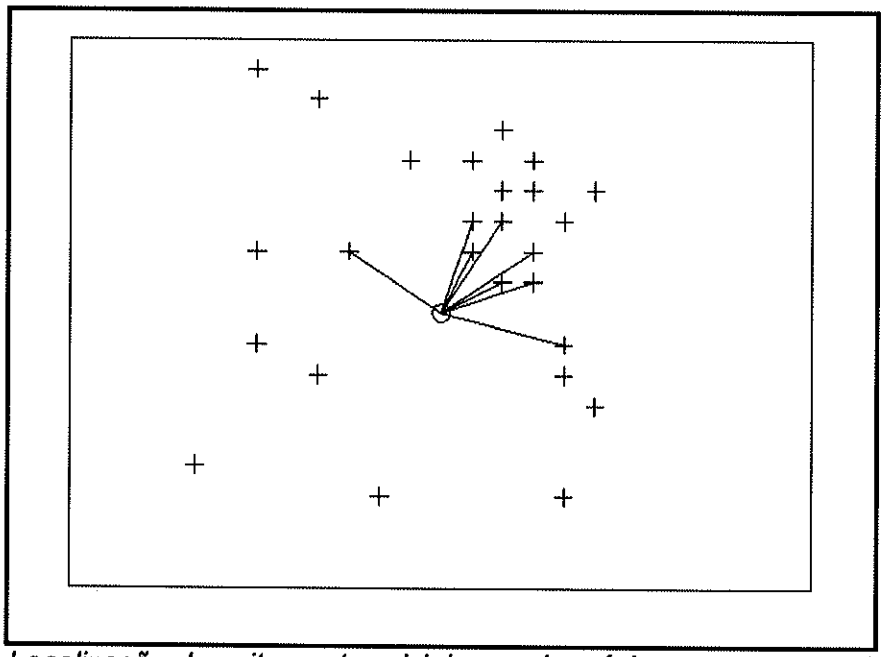

Figura 47: Localização dos oito pontos vizinhos mais próximos para o arranjo aleatório, modificado de Harbaugh et al. (1977).

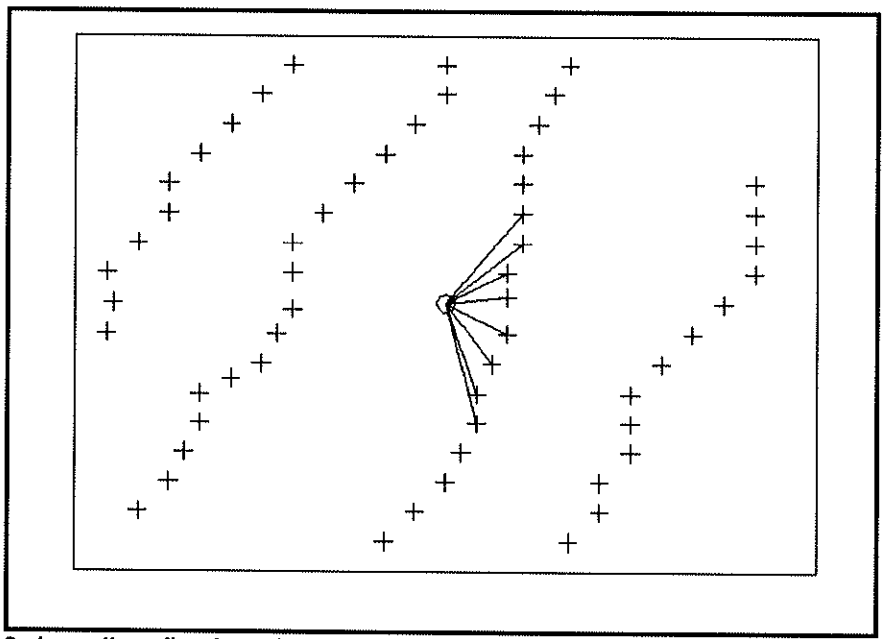

Figura 48: Localização dos oito pontos vizinhos mais próximos para o arranjo semi-regular, modificado de Harbaugh et al. (1977).

Assim, para se evitar agrupamentos de pontos foram estabelecidos critérios de seleção de amostras por quadrantes ou octantes (Harbaugh *et al.* 1977), por meio dos quais os pontos de dados poderiam ser escolhidos, de tal modo que proporcionassem melhor amostragem espacial, isto é, amostras igualmente distribuídas em torno do ponto a ser interpolado. Os critérios de seleção de amostras por quadrantes ou octantes dividem a região do ponto a ser interpolado em quatro ou oito setores,

respectivamente e selecionam as amostras mais próximas por setor até completar um número desejado de amostras para fins de interpolação.

Para ilustrar o procedimento de seleção de amostras por quadrantes e octantes, foi utilizado o mesmo conjunto de pontos de dados da Figura 47, o qual reamostrados com esses novos critérios, resultaram na localização dos pontos da Figura 49, usando o critério dos quadrantes, e da Figura 50, pelo critério dos octantes. Para o procedimento dos quadrantes foi adotada a seleção de duas amostras mais próximas por quadrante e para octantes, foi escolhida uma amostra por octante, resultando em ambos os casos em oito amostras no total. Como resultado da aplicação dos critérios de seleção por quadrantes ou octantes, tem-se uma melhor amostragem espacial, evitando-se os agrupamentos de pontos.

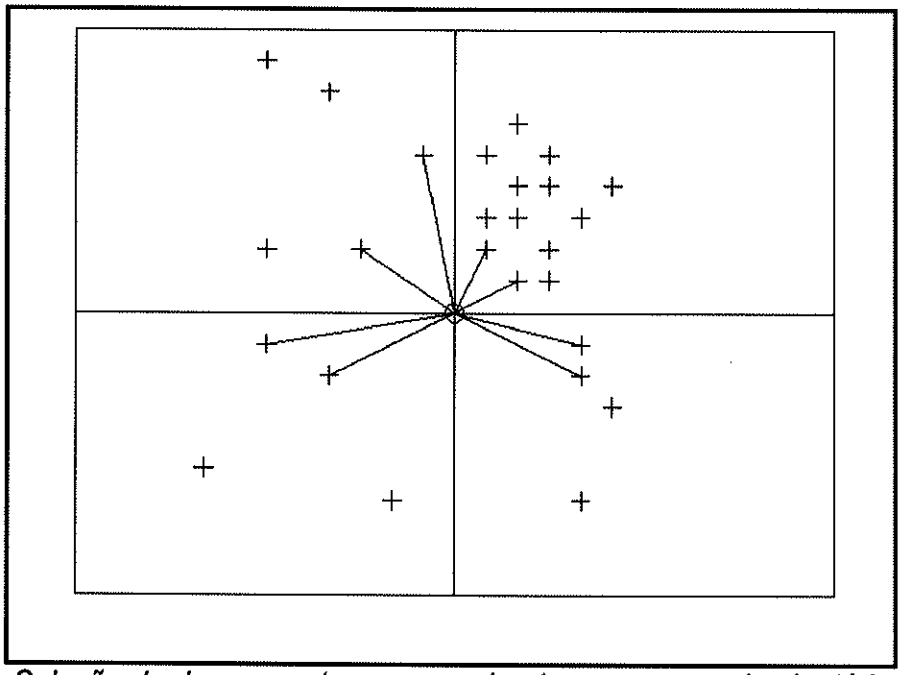

Figura 49: Seleção de duas amostras por quadrante, para o arranjo aleatório, adaptado de Harbaugh et al. (1977).

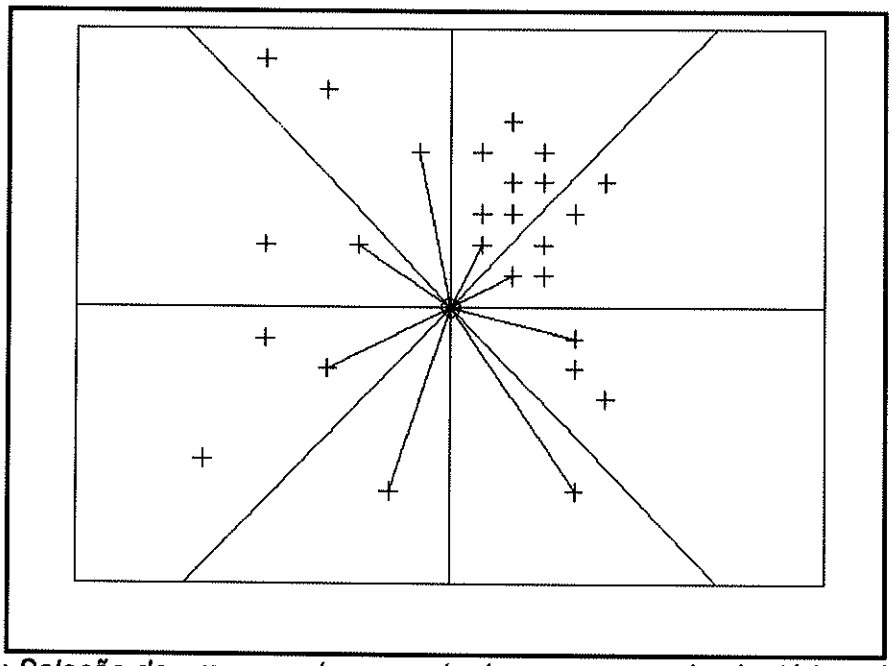

Figura 50: Seleção de uma amostra por octante, para o arranjo aleatório, adaptado de Harbaugh et al. (1977).

A Figura 51 apresenta o resultado da seleção de duas amostras mais próximas por quadrante, para o conjunto de pontos de dados da Figura 48. Como pode-se observar nesta figura, a aplicação do critério de quadrantes provocou a amostragem de pontos em duas linhas adjacentes de pesquisa.

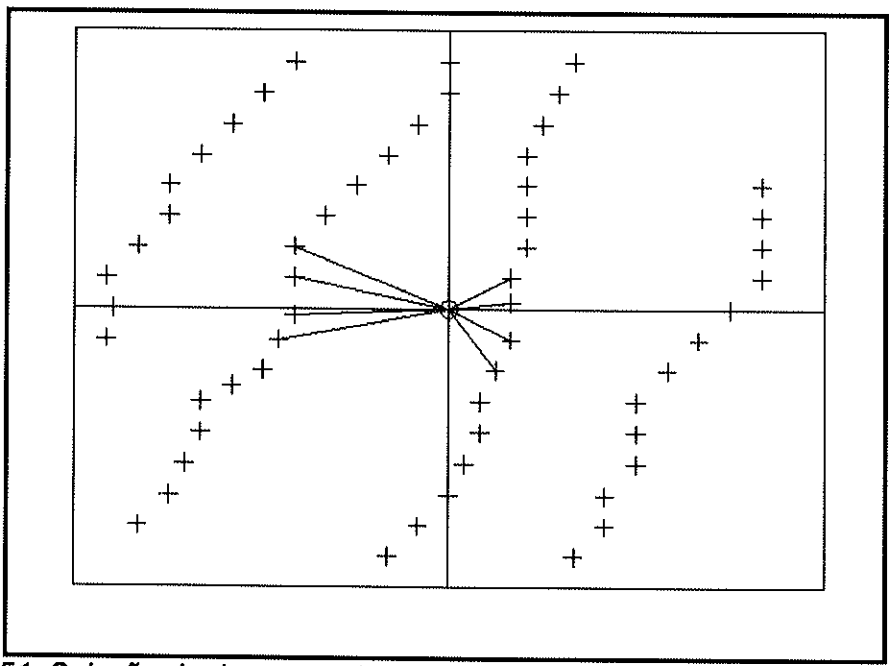

Figura 51: Seleção de duas amostras por quadrante, para o arranjo semi-regular, adaptado de Harbaugh et al. (1977).

Arranjos semi-regulares ocorrem também com informações de furos de sondagem, onde a densidade de amostragem ao longo dos furos é sempre maior que

entre os furos. A Figura 52, ilustra o caso da seleção de amostras de furos de sondagem para interpolação de ponto ou bloco na jazida, sem impor nenhuma restrição. A Figura 53 mostra a mesma situação anterior, porém com restrição de localização por "quadrantes", ou seja, o equivalente para o caso tridimensional em que cada quadrante representa um setor com ângulo sólido de 90º, que proporciona a amostragem dos quatro furos ao invés de oito amostras mais próximas de um único furo de sondagem.

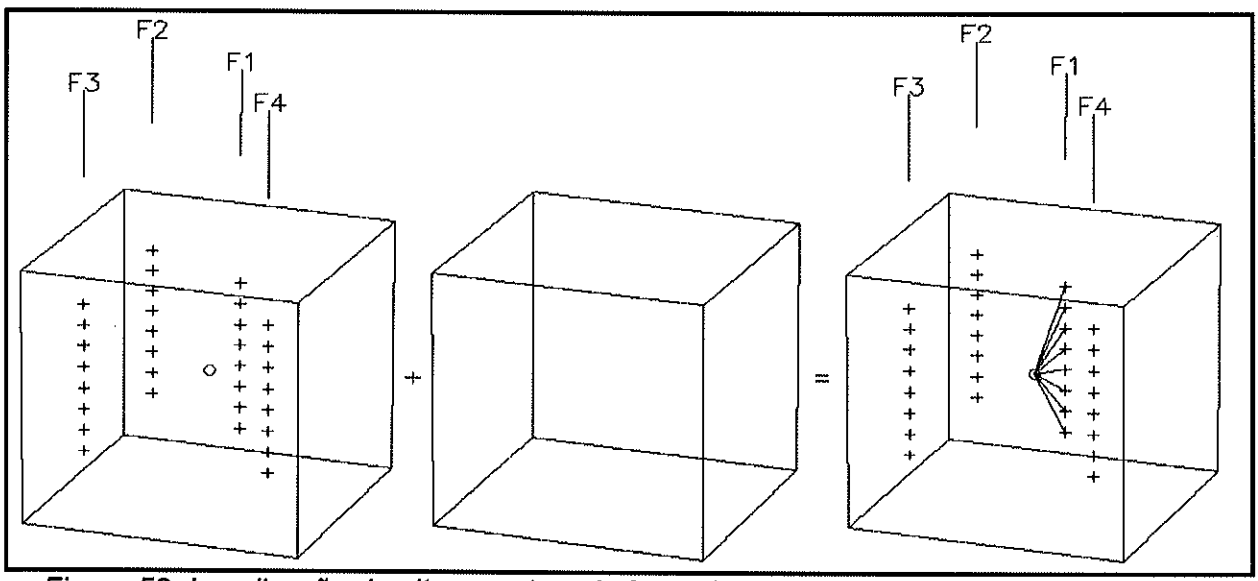

Figura 52: Localização de oito amostras de furos de sondagem mais próximas ao centro do bloco, segundo Yamamoto & Bettencourt (1992).

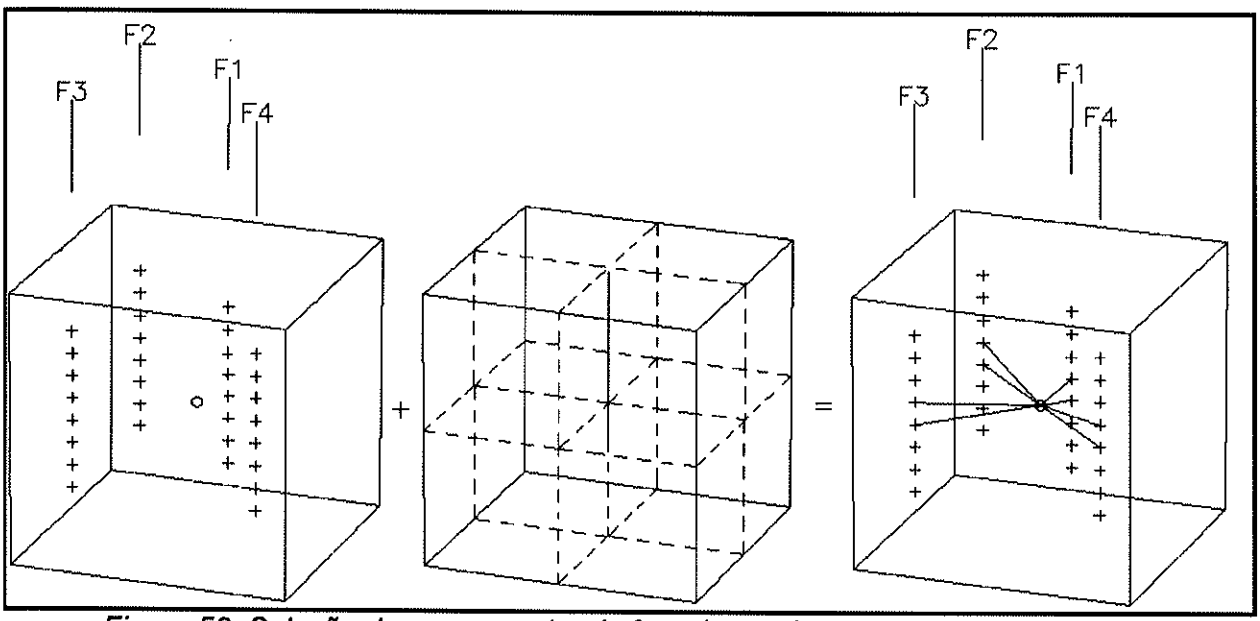

Figura 53: Seleção de uma amostra de furo de sondagem por setor (quadrante tridimensional), segundo Yamamoto & Bettencourt (1992).

Observe-se na Figura 52, que no caso de avaliação de jazidas, o critério de seleção por setor é importante para evitar a superamostragem de um determinado

furo, em relação aos demais. Na Figura 53, aplicando-se o critério de seleção por setor, pode-se verificar que os quatro furos de sondagem foram amostrados, melhorando a representatividade da amostragem, principalmente quando se estiver avaliando um bloco de cubagem ou de lavra.

Para ilustrar a ocorrência de pesos negativos para os subconjuntos de pontos de dados, extraídos do arranjo aleatório, mostrados nas Figuras 47, 49 e 50, respectivamente os mais próximos, por quadrante e por octante, considerou-se que os dados de teor dos pontos de dados são descritos por um modelo de variograma esférico, conforme a equação (49):

$$\begin{cases} \gamma(h)=20.\left[1{,}5\dfrac{h}{40}-0{,}5\left(\dfrac{h}{40}\right)^3\right] & \text{para } h<40\text{m} \\ \gamma(h)=20 & \text{para } h\geq 40\text{m} \end{cases} \qquad (49)$$

As coordenadas dos pontos de dados, encontram-se na Tabela 43.

Tabela 43: Coordenadas dos pontos de dados para os subconjuntos: próximo, quadrante e octante, extraídos do arranjo aleatório.

	PRÓXIMO		QUADRANTE		OCTANTE	
ponto	leste	norte	leste	norte	leste	norte
1	145	155	145	155	145	155
2	165	160	155	170	155	170
3	165	155	165	155	165	155
4	170	160	170	150	170	150
5	175	155	180	140	180	140
6	170	150	180	135	180	115
7	175	150	140	135	150	115
8	180	140	130	140	140	135

Resolvendo-se os sistemas de krigagem ordinária para a interpolação do ponto de coordenadas (160,145), obtiveram-se os coeficientes listados na Tabela 44.

Tabela 44: Coeficientes para as amostras dos subconjuntos próximo, quadrante e octante, do arranjo aleatório.

ponto	PRÓXIMO	QUADRANTE	OCTANTE
1	0,282	0,221	0,204
2	-0,012	-0,060	-0,066
3	0,378	0,296	0,296
4	-0,088	0,323	0,320
5	-0,111	-0,013	0,059
6	0,427	0,103	0,002
7	-0,011	0,235	0,026
8	0,134	0,353	0,159

Para facilitar a interpretação dos coeficientes obtidos (sinal, magnitude e localização relativa do ponto), representaram-se os coeficientes na forma de círculos

proporcionais a sua magnitude e no caso de coeficientes negativos foram tomados os seus valores absolutos. As Figuras 54, 55 e 56, representam os coeficientes obtidos, para os subconjuntos próximo, quadrante e octante.

Na Figura 54, pode-se observar as características da krigagem na atribuição de pesos às amostras utilizadas para a estimativa de um ponto não amostrado. Assim, as amostras mais próximas têm coeficientes maiores, sendo inversamente proporcionais à distância. Porém, uma característica indesejável desta técnica é a atribuição de pesos negativos a amostras situadas na sombra de outras. Isto implica na seleção prévia de amostras à krigagem ordinária, evitando-se os agrupamentos de pontos. Observe-se nesta figura que as amostras 4 e 5 tiveram os menores pesos negativos, pois situam-se exatamente atrás das amostras 3 e 6, respectivamente, enquanto os pesos das amostras 2 e 7, ainda negativos, foram maiores que o das amostras 3 e 6, por situarem-se em pontos não totalmente ocultos em relação ao ponto a ser interpolado. A simulação apresentada na Figura 54, procurou mostrar como ocorrem os pesos negativos em agrupamentos de pontos.

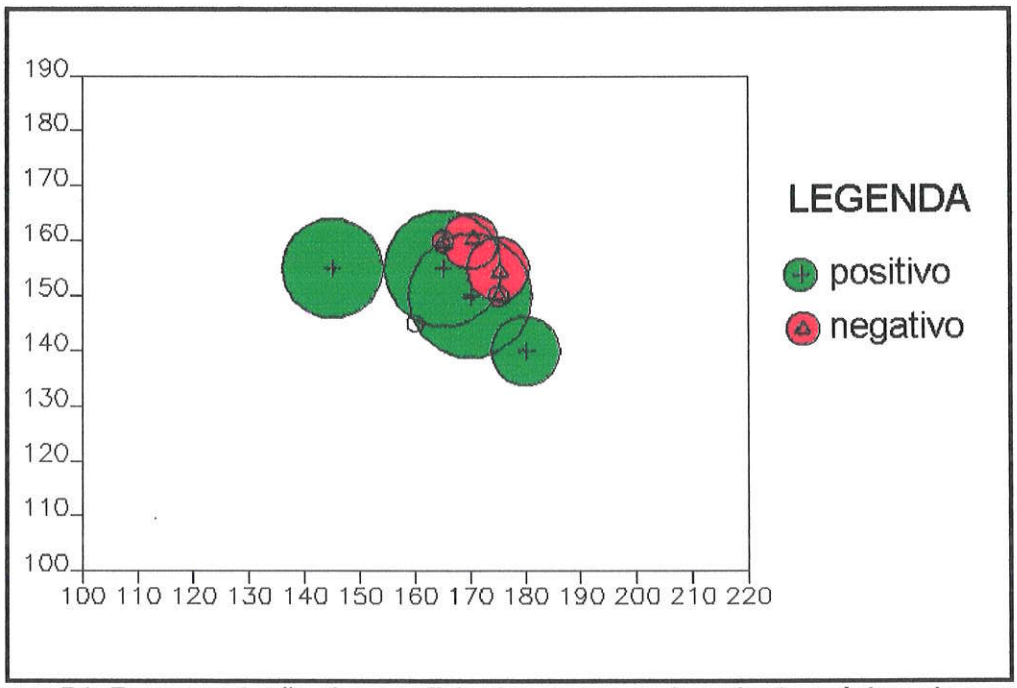

Figura 54: Representação dos coeficientes para o subconjunto próximo do arranjo aleatório.

A seleção de amostras pelo critério de quadrantes, melhorou a amostragem espacial, porém não foi suficiente para eliminar o problema dos coeficientes negativos, pois ainda permaneceram três amostras, como se pode observar na Figura 55.

A Figura 56 mostra a representação dos coeficientes, para amostras selecionadas pelo critério dos octantes. A melhora foi significativa, porém sem eliminar

totalmente o problema dos coeficientes negativos, pois ainda restou uma única amostra com peso negativo. Embora o critério da seleção por octante tenha melhorado a amostragem espacial, não implica que não ocorrerão pesos negativos, pois dependerá da configuração espacial dos pontos de dados em relação ao ponto a ser interpolado. Entretanto, como se pôde observar a aplicação de critérios de seleção, se por um lado não elimina o problema, ao menos atenua, diminuindo sempre a possibilidade de ocorrência de pesos negativos.

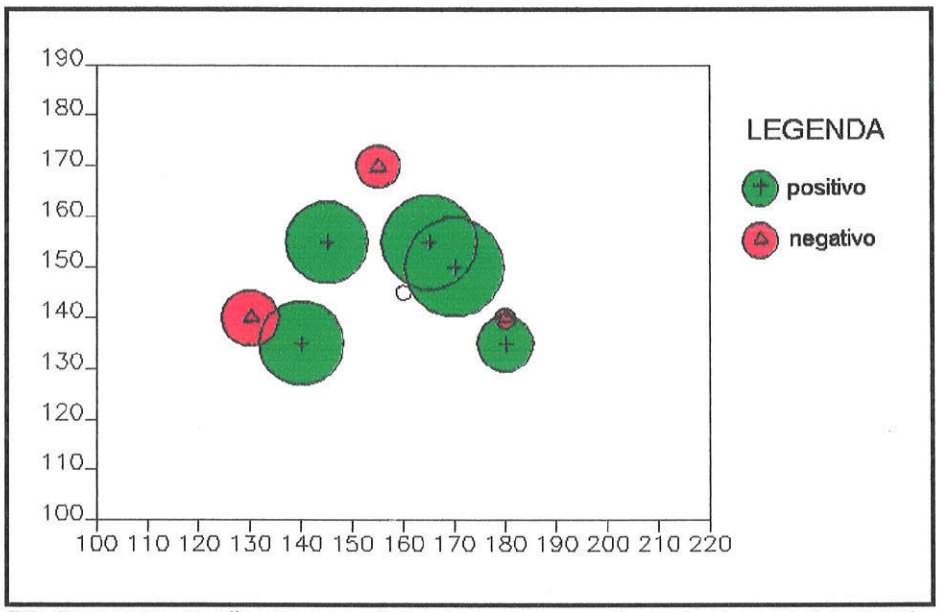

Figura 55: Representação dos coeficientes para o subconjunto quadrante do arranjo aleatório.

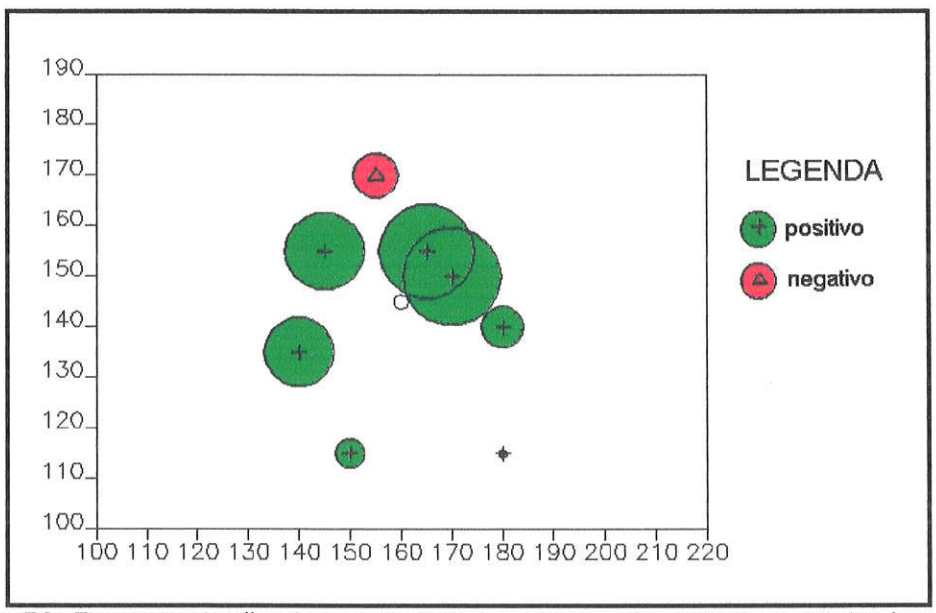

Figura 56: Representação dos coeficientes para o subconjunto octante do arranjo aleatório.

O mesmo exercício foi feito com os dados do arranjo semi-regular, conforme as coordenadas dos pontos de dados da Tabela 45 e coeficientes da krigagem ordinária

da Tabela 46. As Figuras 57 e 58 mostram as representações gráficas dos coeficientes obtidos, respectivamente para os subconjuntos próximo e quadrante, extraídos do arranjo semi-regular.

Tabela 45: Coordenadas dos pontos de dados para os subconjuntos: próximo e quadrante, extraídos do arranjo semi-regular.

	PRÓXIMO		QUADRANTE	
ponto	leste	norte	leste	norte
1	165	125	167,5	135
2	165	130	170	140
3	167,5	135	170	146
4	170	140	170	150
5	170	146	132,5	140
6	170	150	135	144
7	172,5	155	135	150
8	172,5	160	135	155

Tabela 46: Coeficientes para as amostras dos subconjuntos próximo e quadrante, do arranjo semi-regular.

ponto	PRÓXIMO	QUADRANTE
1	0	0,257
2	0,172	0,066
3	0,176	0,226
4	0,076	0,252
5	0,238	-0,045
6	0,282	0,155
7	-0,051	0,055
8	0,108	0,033

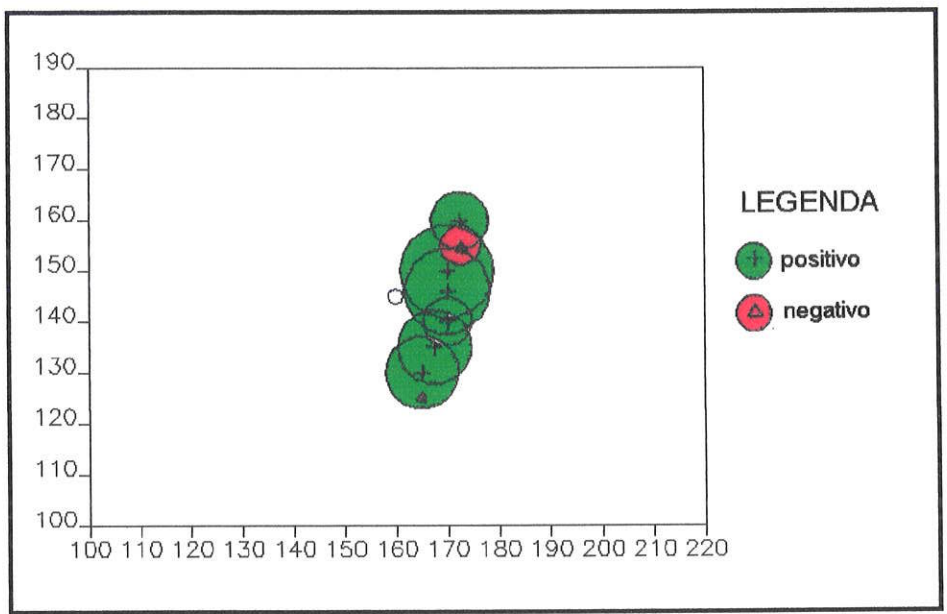

Figura 57: Representação dos coeficientes para o subconjunto próximo do arranjo semi-regular.

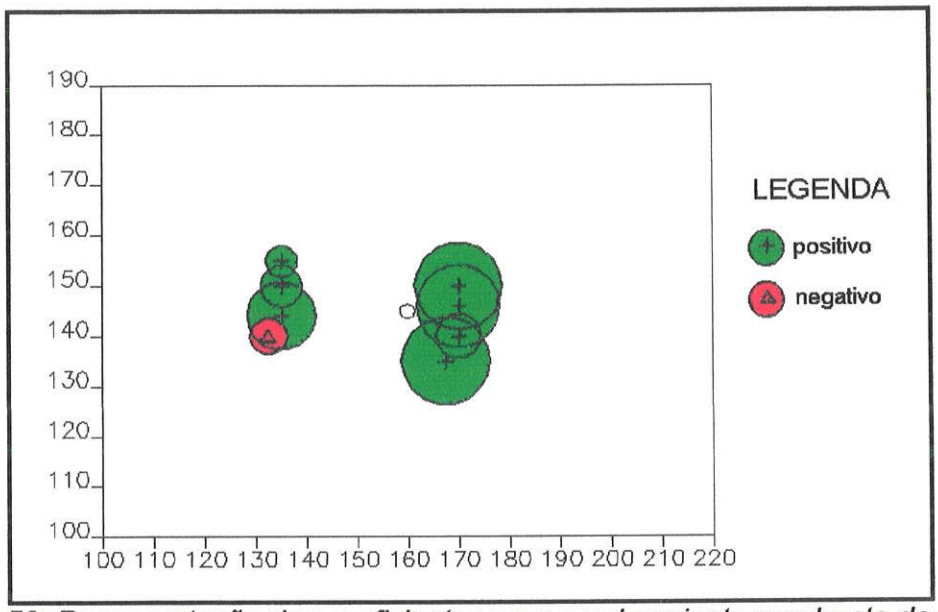

Figura 58: Representação dos coeficientes para o subconjunto quadrante do arranjo semi-regular.

Na Figura 57, o subconjunto mais próximo, resulta em apenas dois pesos negativos, enquanto para o subconjunto quadrante (Figura 58) em apenas um peso. Portanto, verifica-se que, em geral, o arranjo semi-regular proporciona uma amostragem espacial mais representativa que aquela feita no arranjo aleatório.

3.12.1 Estudo da geometria do cone de sombra

Pontos agrupados na krigagem ordinária devem ser evitados, pois se por um lado, a krigagem ordinária apresenta a característica de realizar um "de-clustering", por outro, muitas vezes dependendo das relações espaciais entre as amostras dentro do agrupamento de pontos, ocorrem pesos negativos, sempre para amostras mais distantes e à sombra das amostras mais próximas. Um estudo neste sentido, foi realizado com o objetivo de mapear a região do cone de sombra para arranjos de pontos com 2, 3 e 4 pontos fixos, situados sempre a mesma distância em relação ao ponto a ser interpolado e, portanto, todos com pesos positivos. Para esses arranjos foi adicionada uma amostra que teve seu peso mapeado, delimitando-se assim o campo dos pesos negativos. Neste estudo, realizado por Yamamoto (1994a), foi utilizado um modelo de variograma do tipo transitivo, conforme a equação (50):

$$\begin{cases} \gamma(h) = 0,5.h & \text{para } h < 40m \\ \gamma(h) = 20 & \text{para } h \geq 40m \end{cases} \qquad (50)$$

Cabe lembrar que a krigagem com um único ponto resulta em peso um, portanto dá o mesmo resultado do princípio dos pontos mais próximos (Popoff 1966), independente da distância. Para duas amostras, os pesos serão sempre positivos,

podendo uma delas ter o peso igual a zero se estiver no cone de sombra da outra (com peso um) e exatamente na mesma direção. Para conjuntos com número de pontos maiores ou iguais a três, existe a probabilidade de ocorrência de pesos negativos, em função da distribuição espacial dos pontos.

As Figuras 58, 59 e 60 apresentam os cones de sombra delimitados para arranjos de dois, três e quatro pontos fixos, respectivamente, segundo Yamamoto (1994a).

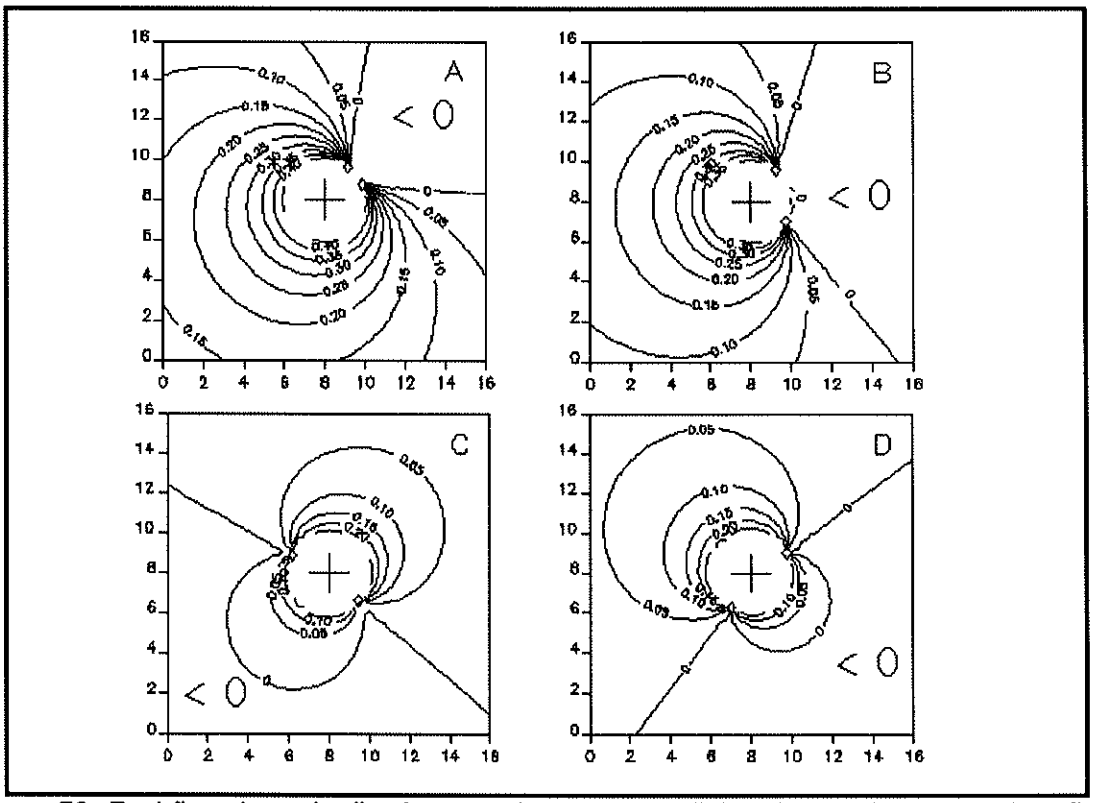

Figura 59: Padrões de variação do peso da amostra adicional para duas amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); e em quadrantes alternados (C e D), segundo Yamamoto (1994a).

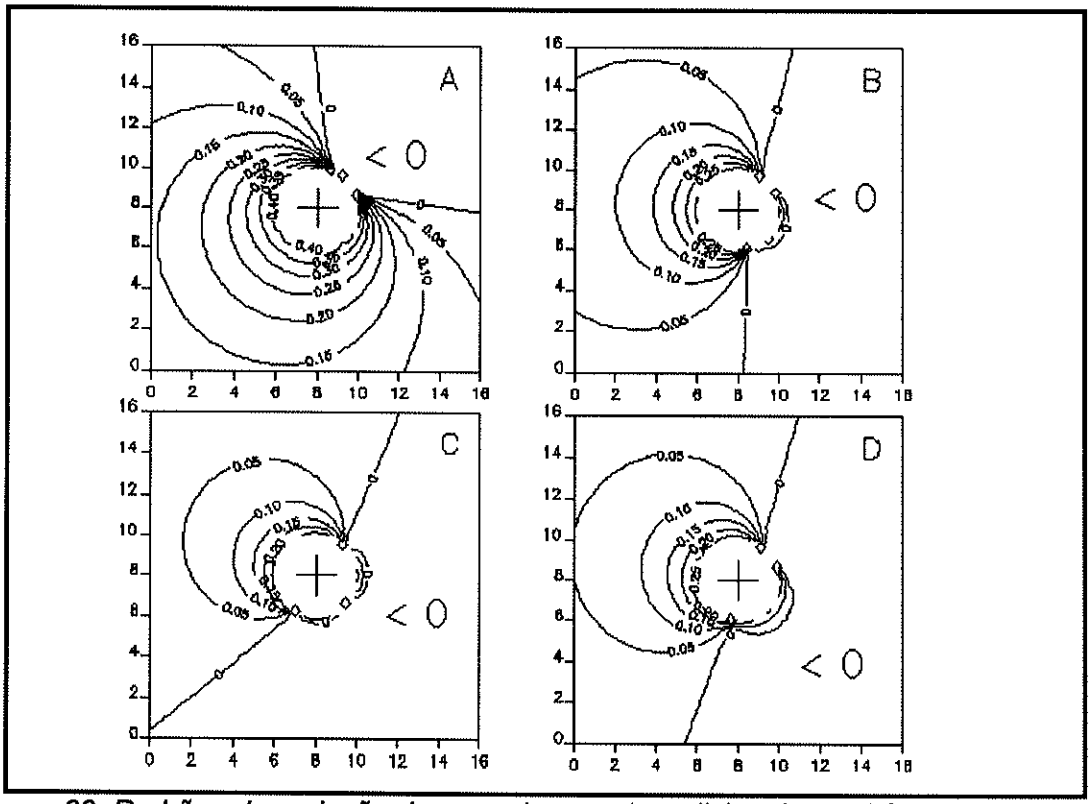

Figura 60: Padrões de variação do peso da amostra adicional para três amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); e em três quadrantes (C e D), segundo Yamamoto (1994a).

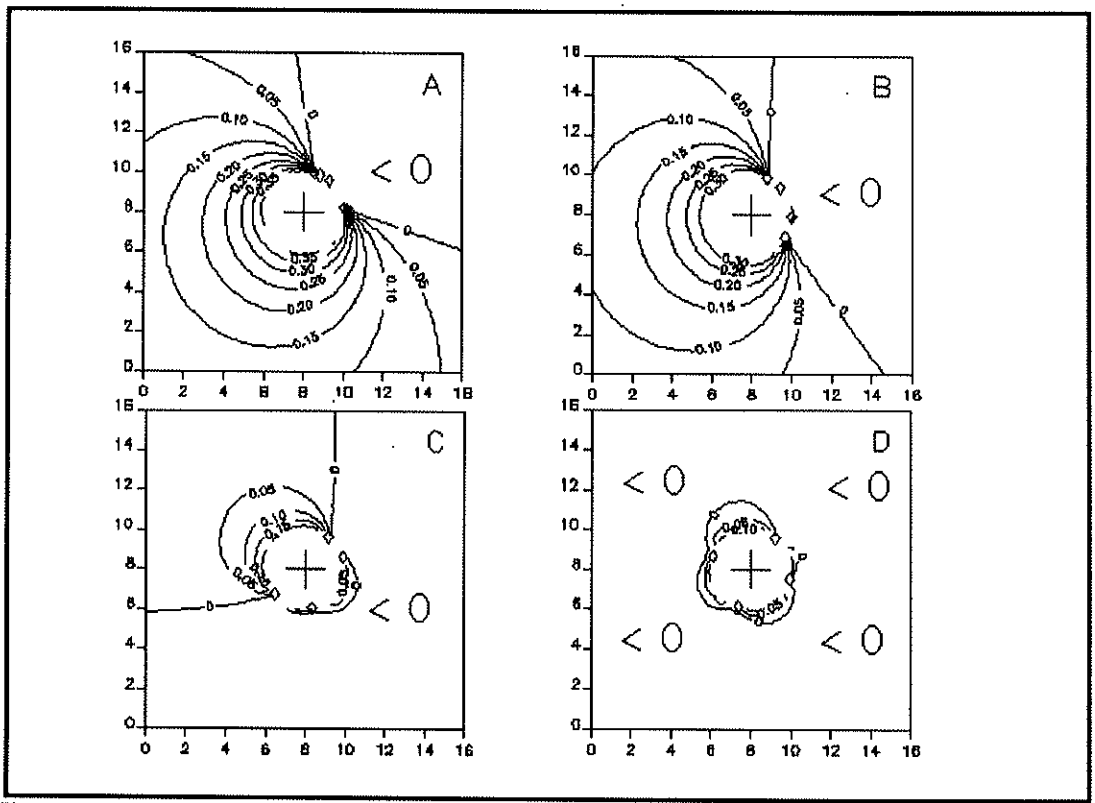

Figura 61: Padrões de variação do peso da amostra adicional para quatro amostras fixas. Amostras fixas no primeiro quadrante (A); em dois quadrantes contínuos (B); em três quadrantes (C) e em quatro quadrantes (D), segundo Yamamoto (1994a).

As regiões demarcadas com "< 0" indicam campos dos pesos negativos, *i.e.*, qualquer amostra adicional neste campo resultará em peso negativo. Estes campos situam-se sempre no cone de sombra das amostras fixas e este por sua vez depende da distribuição espacial das amostras, sendo tanto maior quanto mais agrupadas estiverem as amostras. Dentro do cone de sombra, para o caso de número de amostras pequeno, existe uma região com valores positivos - vide especialmente as Figuras 59C e 59D, segundo Yamamoto (1994a). A distância da amostra ao ponto a ser estimado é o fator de importância fundamental na escolha das amostras para a krigagem ordinária (observe-se a configuração elíptica das curvas de igual peso da amostra adicional). Se a amostragem espacial não for boa (Figuras 59A, 60A e 61A), a amostra adicional pode estar distante até três vezes a distância da amostra mais próxima que ainda aquela estará auxiliadno a interpolação. Se acontecer o contrário, a amostra adicional deve ser tomada, de preferência, até duas vezes a distância da amostra mais próxima.

3.12.2 Superavaliação do furo central em malhas regulares

Um outro problema associado à ocorrência de pesos negativos, agora em termos de seus efeitos, foi a superavaliação do furo central em malhas regulares, segundo Yamamoto (1994b).

As malhas regulares de pesquisa são comumente utilizadas por permitirem amostragem sistemática de depósitos minerais. Tais malhas podem ser quadradas ou retangulares formadas por furos localizados nos seus vértices. Nesse caso, qualquer que seja o método de avaliação de reservas, à exceção do método dos triângulos, os resultados serão exatamente iguais, proporcionados pela distribuição eqüitativa dos furos na malha regular. O problema dos pesos algo diferentes para o método dos triângulos deve-se ao sentido da triangulação em malhas regulares, como está exemplificado na Figura 62, onde se mostra um mesmo conjunto de amostras, segundo uma malha regular quadrada. Os resultados obtidos para as duas triangulações foram ligeiramente diferentes, porém a média das duas triangulações dá o mesmo resultado que, por exemplo, o método dos polígonos e dos demais métodos.

As malhas regulares podem ser enriquecidas com furos adicionais, sempre localizados nos centros de cada célula quadrada ou retangular. Agora o furo central deverá apresentar um peso maior, em relação aos furos dos vértices, pois aquele será exclusivo para o bloco em avaliação, enquanto os demais furos participarão na avaliação dos oito blocos periféricos, além do bloco em consideração.

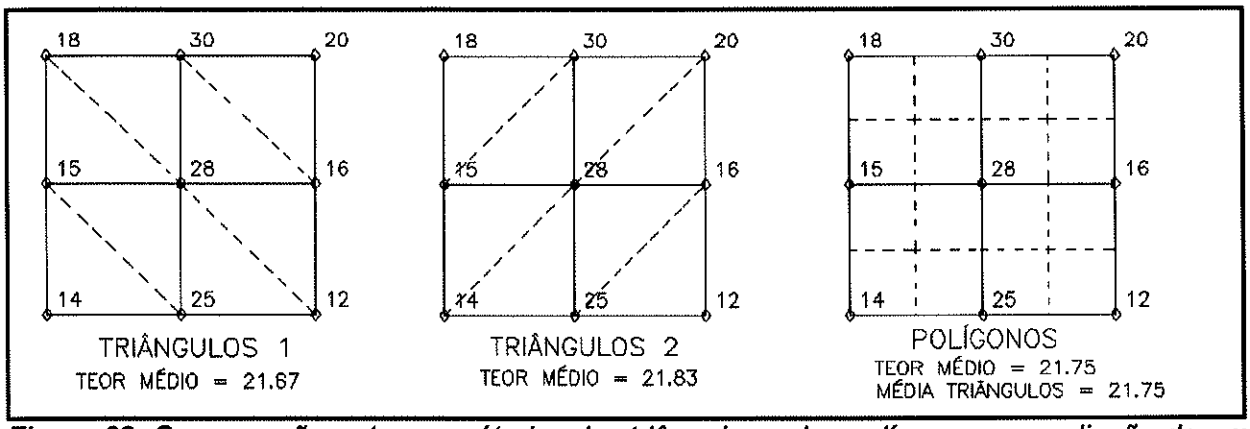

Figura 62: Comparação entre os métodos dos triângulos e dos polígonos na avaliação de uma malha regular quadrada.

Para o caso de uma malha regular quadrada, de lado igual a 50m, como exemplificado através do bloco da Figura 63, com furos centrados, os pesos das amostras dos furos central e laterais calculados pelos métodos analíticos (polígonos e triângulos) e computacionais (IPD e krigagem ordinária) encontram-se na Tabela 47.

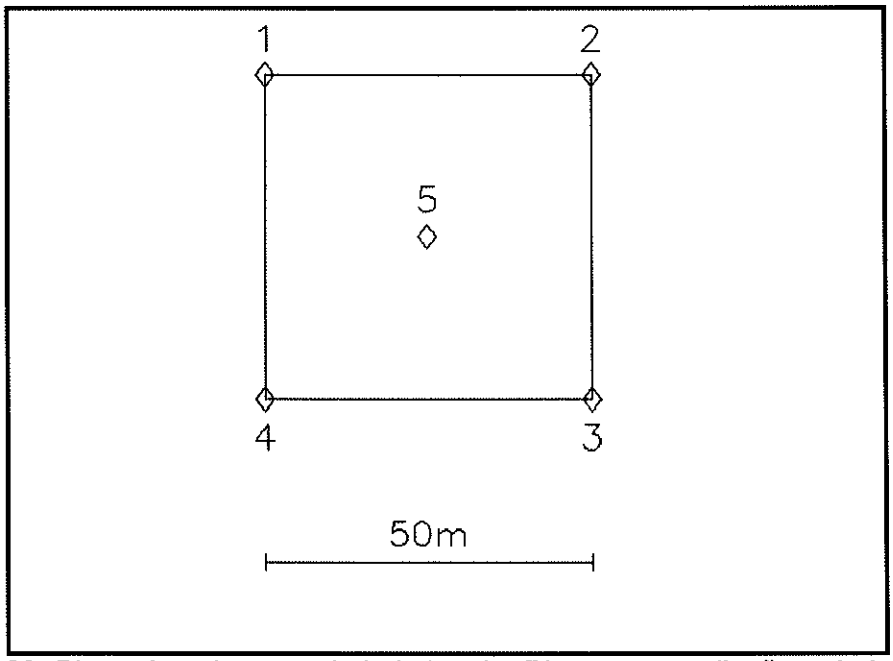

Figura 63: Bloco de cubagem, de lado igual a 50m, para avaliação pela krigagem ordinária.

Tabela 47: Pesos das amostras dos furos, para avaliação de bloco em malha regular com furo centrado, calculados pelos métodos analíticos e computacionais, segundo Yamamoto (1994b).

Método	furo central (%)	furos laterais (%)
polígonos	50	12,5
triângulos	33,3	16,7
IPD/bloco	39,8	15,1
krigagem ordin.	46	14

Para a krigagem ordinária, foi considerado válido o modelo de um variograma esférico, descrito pelas equações (51):

$$\begin{cases} \gamma(h) = 40\left[1{,}5\dfrac{h}{100} - 0{,}5\left(\dfrac{h}{100}\right)^3\right] & \text{para } h < 100\,m \\ \gamma(h) = 40 & \text{para } h \geq 100\,m \end{cases} \qquad (51)$$

A Figura 64 ilustra os blocos com as divisões adotadas pelos diferentes métodos, bem como os pesos obtidos.

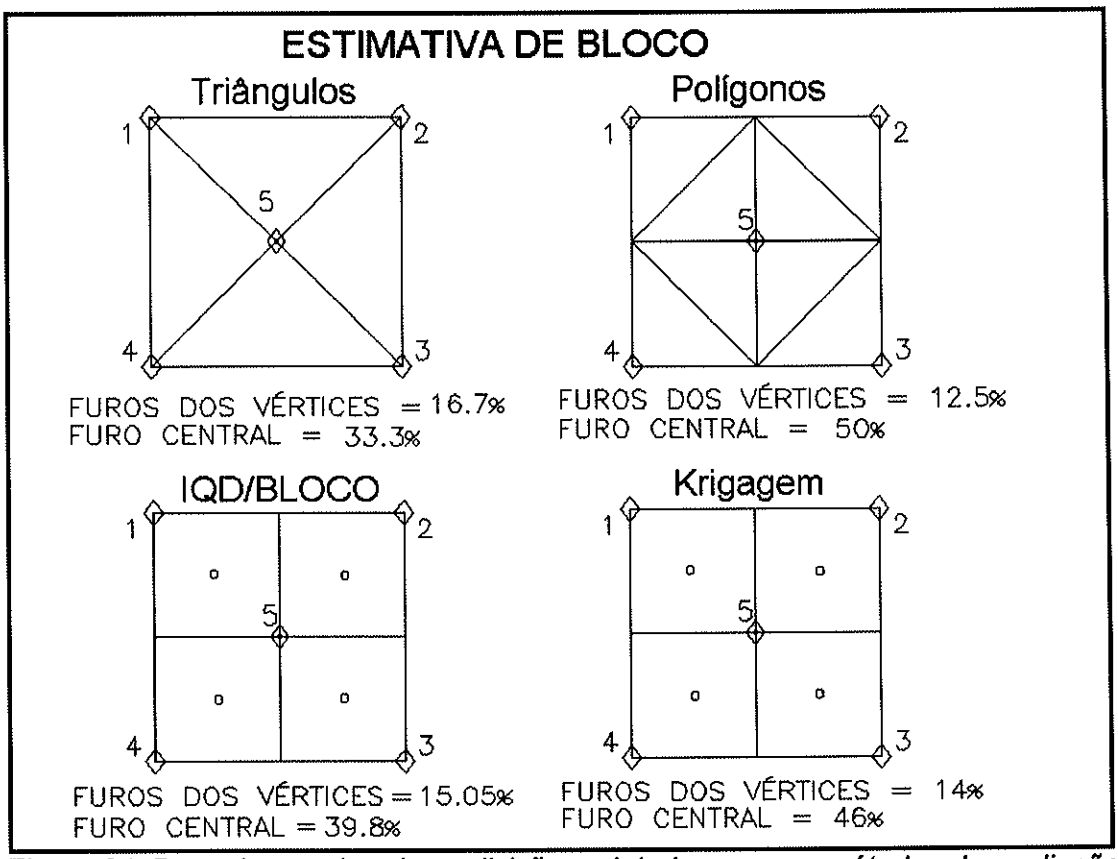

Figura 64: Desenho mostrando as divisões adotadas para os métodos de avaliação utilizados e os resultados obtidos.

O peso do furo central para o IPD/bloco (método adaptado para avaliação de bloco, vide, por exemplo, Yamamoto 1991a) situou-se muito próximo à média (41,3%) dos pesos para os métodos dos triângulos e polígonos, porém pela krigagem ordinária, o valor obtido foi maior que a média esperada. Isto mostra que o furo central foi superavaliado em detrimento dos demais.

Assim, para investigar a possível causa da superavaliação do furo central, reproduz-se o sistema de equações de krigagem (equações 52) do bloco mostrado na Figura 63:

$$\begin{bmatrix} 0 & 27,5 & 35,36 & 27,5 & 20,33 & 1 \\ 27,5 & 0 & 27,5 & 35,36 & 20,33 & 1 \\ 35,36 & 27,5 & 0 & 27,5 & 20,33 & 1 \\ 27,5 & 35,36 & 27,5 & 0 & 20,33 & 1 \\ 20,33 & 20,33 & 20,33 & 20,33 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,08 \\ 21,08 \\ 21,08 \\ 21,08 \\ 10,50 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Os resultados obtidos para o sistema de equações (52), encontram-se na Tabela 48.

Tabela 48: Coeficientes da krigagem ordinária de bloco, da Figura 63.

AMOSTRAS	COEFICIENTES
1	0,14
2	0,14
3	0,14
4	0,14
5	0,46

Analisando-se o sistema de krigagem ordinária e seus resultados, observa-se que os pesos resultantes não apresentam nenhum problema aparente como causa da superavaliação do furo central. Assim, resolveu-se decompor a resolução do sistema da krigagem ordinária de bloco, de acordo com a discretização de 2x2 sub-blocos, e depois estimar o bloco como média dessas estimativas parciais, cujo suporte teórico está baseado no Teorema da Combinação das Estimativas de Krigagem (Journel & Huijbregts, 1978).

A Figura 65 apresenta a decomposição do bloco em quatro sub-blocos (A, B, C e D) para avaliação pela krigagem ordinária.

A decomposição em sub-blocos implica na resolução do sistema de equações de krigagem para cada um deles, conforme os sistemas de equações (53):

$$\begin{bmatrix} 0 & 27,5 & 35,36 & 27,5 & 20,33 & 1 \\ 27,5 & 0 & 27,5 & 35,36 & 20,33 & 1 \\ 35,36 & 27,5 & 0 & 27,5 & 20,33 & 1 \\ 27,5 & 35,36 & 27,5 & 0 & 20,33 & 1 \\ 20,33 & 20,33 & 20,33 & 20,33 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 10,50 \\ 22,48 \\ 28,84 \\ 22,48 \\ 10,50 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 22,48 \\ 10,50 \\ 22,48 \\ 28,84 \\ 10,50 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 22,48 \\ 28,84 \\ 22,48 \\ 10,50 \\ 10,50 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} 28,84 \\ 22,48 \\ 10,50 \\ 22,48 \\ 10,50 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (53)$$

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS - USP
— BIBLIOTECA —

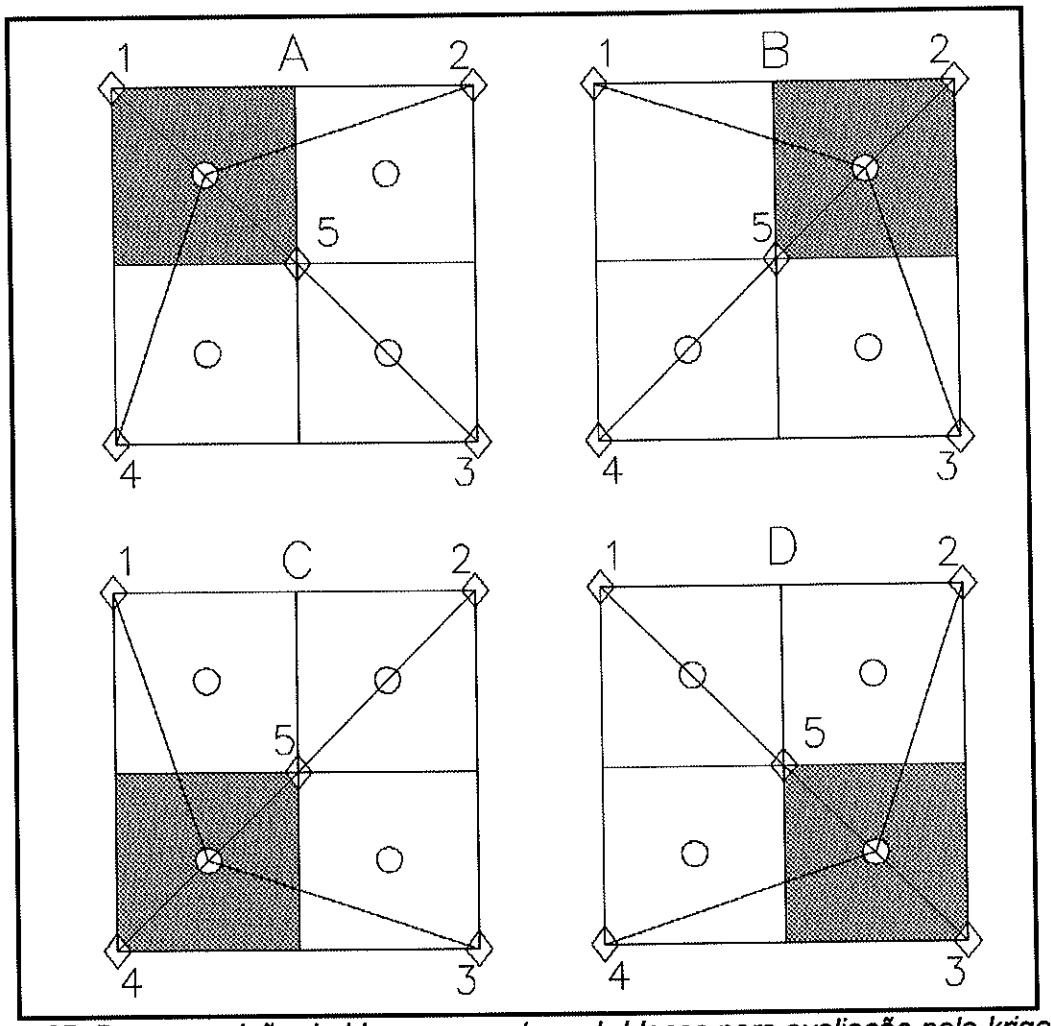

Figura 65: Decomposição do bloco em quatro sub-blocos para avaliação pela krigagem ordinária.

As resoluções dos sistemas de equações (53), dão os seguintes coeficientes, como mostrados na Tabela 49.

Tabela 49: Pesos dos sub-blocos e do bloco obtidos para a avaliação de bloco em malha regular com furo centrado, pela aplicação da krigagem ordinária.

	SUB-BLOCOS					
Amostra	A	B	C	D	SOMA	MÉDIA
1	0,47	0,06	0,06	-0,05	0,54	0,14
2	0,06	0,47	-0,05	0,06	0,54	0,14
3	-0,05	0,06	0,06	0,47	0,54	0,14
4	0,06	-0,05	0,47	0,06	0,54	0,14
5	0,46	0,46	0,46	0,46	1,84	0,46

Com os resultados das krigagens pontuais nos sub-blocos, pôde-se verificar a causa da superavaliação do furo central, devido ao efeito de sombra do furo central, resultando em peso negativo o furo situado nela. Observe-se que para cada sub-bloco

haverá um furo lateral situado exatamente no cone de sombra (Yamamoto 1994a) do furo central (Figura 65), o que causa àquele furo um peso negativo.

Pelos resultados obtidos, verifica-se que no caso particular da malha regular com furo centrado, o uso de pesos médios, entre aqueles encontrados para os métodos clássicos, já dará bons resultados, pois a aplicação de métodos computacionais não trará vantagens adicionais, podendo inclusive haver a superavaliação do furo central pela aplicação da krigagem ordinária, segundo Yamamoto (1994b).

3.12.3 Pontos agrupados além da amplitude do variograma

Uma outra conseqüência negativa da krigagem ordinária foi observada para pontos situados além da amplitude do variograma, como foi apresentada na Sessão de Ciências da Terra da Academia Brasileira de Ciências, como: "O efeito nocivo de pontos agrupados situados além da amplitude do variograma na krigagem ordinária", como se expõe a seguir.

Uma das mais importantes feições da krigagem ordinária é a sua capacidade para reconhecer relações espaciais entre amostras, *i.e.*, de acordo com Kim (1990), a capacidade de "de-clustering" dos dados durante o processo de estimativa. Entretanto, esta feição da krigagem ordinária, denominada transferência de influência, nem sempre produz resultados satisfatórios, seja através dos pesos negativos, como também pelo efeito nocivo de pontos agrupados situados além da amplitude do variograma. Geralmente esta situação ocorre em regiões subamostradas e também em cantos e bordas de mapas.

A fim de introduzir o problema, considere-se as coordenadas da Tabela 50, conforme a situação do mapa de pontos da Figura 66.

Tabela 50: Coordenadas dos pontos de dados e o ponto a ser estimado.

pontos	leste (m)	norte (m)
1	700	800
2	400	850
3	100	650
4	200	300
5	500	200
6	850	300
7	1000	650
0	600	500

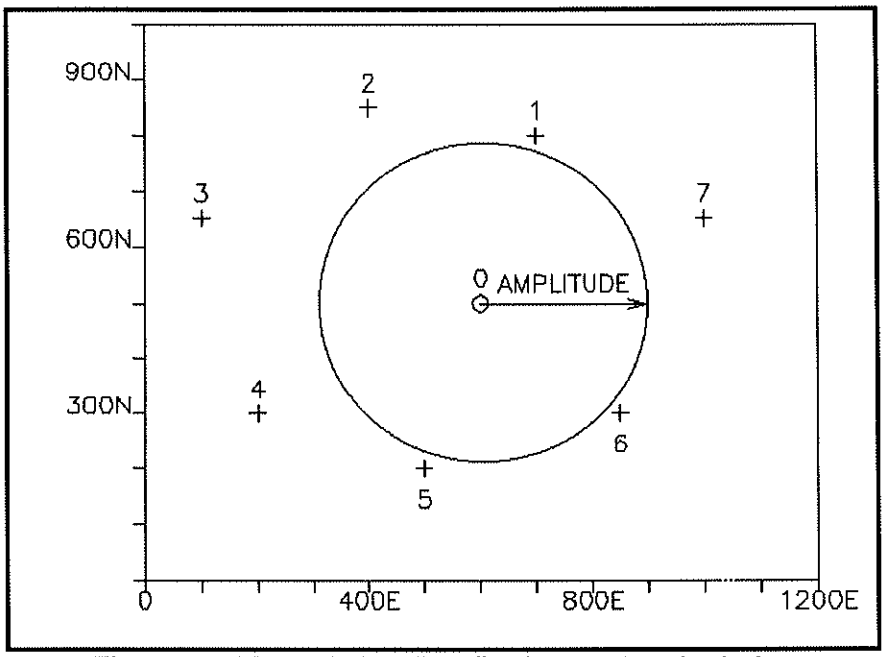

Figura 66: Mapa de localização dos pontos de dados.

Os valores da variável de interesse nos pontos de amostragem são assumidos para serem descritos pelo seguinte modelo esférico:

$$\begin{cases} \gamma(h) = 10 + 30\left[1{,}5\dfrac{h}{a} - 0{,}5\left(\dfrac{h}{a}\right)^3\right] & \text{para } h < 300 \text{ m} \\ \gamma(h) = 40 & \text{para } h \geq 300 \text{ m} \end{cases} \qquad (54)$$

Obvserve-se na Figura 66, que todos os pontos estão situados além da amplitude do variograma. Para estimativa do ponto central, tem-se o seguinte sistema de equações de krigagem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 0 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (55)$$

A resolução desse sistema, como seria de se esperar, deu os mesmos resultados do efeito pepita puro (Journel & Huijbregts, 1978, pág. 312), como reproduzidos na Tabela 51.

Tabela 51: Ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo de pontos da Figura 66.

ponto	peso
1	0,143
2	0,143
3	0,143
4	0,143
5	0,143
6	0,143
7	0,143

Esses pesos são iguais a 1/7, *i.e.* o valor da variável em um ponto não amostrado é igual a média aritmética dos valores dos 7 pontos de dados, porque todos os pontos de dados estão além da amplitude do variograma em relação ao ponto a ser estimado.

Considere-se agora uma outra situação, obtida deslocando-se os pontos 1,6 e 7 para a região NE do mapa, como se pode observar na Figura 67. As coordenadas dos pontos de dados encontram-se na Tabela 52.

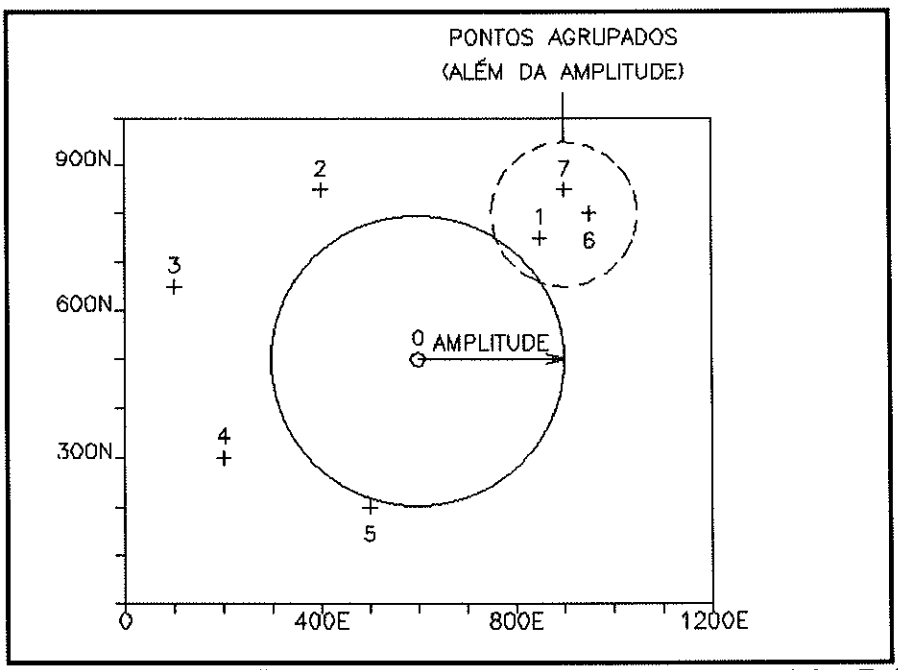

Figura 67: Mapa de localização de pontos de dados, com os pontos 1,6 e 7 deslocados para a região NE.

Tabela 52: Coordenadas dos pontos de dados da Figura 67.

pontos	leste (m)	norte (m)
1	850	750
2	400	850
3	100	650
4	200	300
5	500	200
6	950	800
7	900	850
0	600	500

Para a krigagem do ponto central, utilizando o mesmo modelo de variograma (54), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 21,325 & 21,325 & 1 \\ 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 40 & 1 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 0 & 40 & 40 & 1 \\ 21,325 & 40 & 40 & 40 & 40 & 0 & 13,880 & 1 \\ 21,325 & 40 & 40 & 40 & 40 & 13,880 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Observe-se no sistema de equações de krigagem (56), que os valores de semivariância correspondentes às amostras 1,6 e 7 são menores que o patamar (40), embora todos os pontos estejam situados além da amplitude do variograma.

A Tabela 53, apresenta os resultados obtidos da resolução do sistema de equações (56).

Tabela 53: Ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo de pontos da Figura 67.

ponto	peso
1	0,108
2	0,183
3	0,183
4	0,183
5	0,183
6	0,080
7	0,080

Os ponderadores obtidos foram representados em diagrama de barras, como mostra a Figura 68.

Observando-se os resultados da Tabela 53 e Figura 68, verifica-se que os pesos dos pontos 1, 6 e 7 foram menores que 1/7, enquanto aqueles dos pontos 2, 3, 4 e 5 foram maiores que 1/7. A este fato denominou-se de efeito nocivo de pontos agrupados situados além da amplitude do variograma, pois se todos os pontos de dados, em relação ao ponto a ser interpolado, estiverem além da amplitude do variograma (no campo aleatório), os pesos desses pontos deveriam ser invariavelmente iguais à média aritmética.

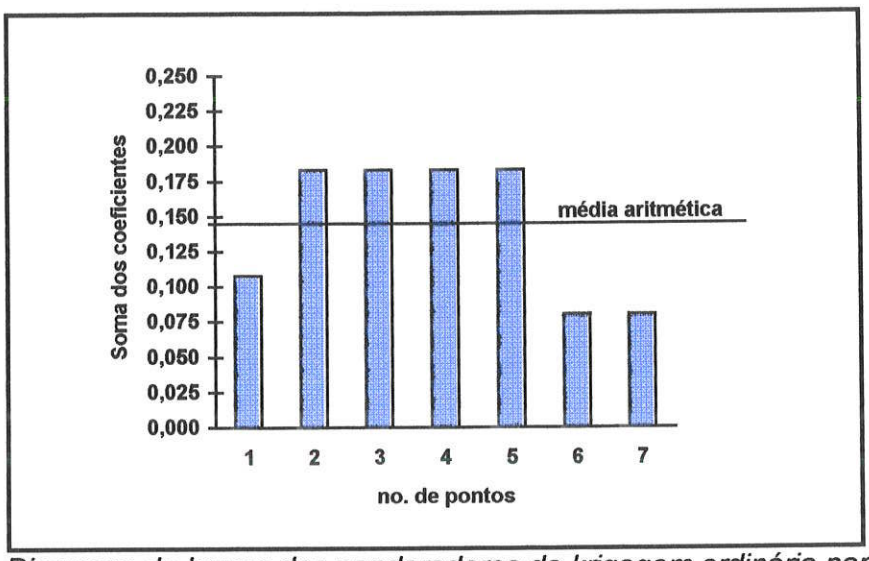

Figura 68: Diagrama de barras dos ponderadores da krigagem ordinária para o arranjo da Figura 67.

Uma solução para esse caso, seria verificar a localização de todos os pontos de dados em relação ao ponto a ser interpolado, se todos estiverem além da amplitude do variograma, então a solução é utilizar o modelo efeito pepita puro definido pelo patamar do modelo em uso, neste caso o modelo esférico com patamar = 40.

4 ANÁLISE CRÍTICA

A sistematização apresentada mostrou o desenvolvimento dos métodos e soluções para problemas ligados a avaliação de reservas.

Como se pôde observar, no início a preocupação do Autor estava dirigida simplesmente a interpolação de pontos, seja para o contorno automático de dados geológicos como para a modelagem de jazidas. Além disso, na fase da utilização de hipersuperfícies de tendência não havia a preocupação para a necessidade de um interpolador exato para avaliação de jazidas.

Assim, a pesquisa das equações multiquádricas iniciada com o trabalho de mestrado, foi muito importante para a introdução e utilização de uma nova classe de funções de interpolação, que tinha como característica principal a exatidão, no sentido de passar sobre os pontos de dados originais. Entretanto, a proposta original das equações multiquádricas de Hardy (1971), era a de um interpolador global e exato, o que limitava a sua aplicação para dados geológicos, pois são comuns conjuntos de dados com centenas a milhares de amostras. Assim, foi realizado um trabalho de pesquisa para testar a validade da aproximação das equações multiquádricas como um interpolador local e exato. Para isso foram utilizadas superfícies matematicamente definidas, seguindo sugestão de Franke (1982). Sob o ponto de vista crítico, hoje utilizar-se-ia de superfícies topográficas extraídas de folhas topográficas para avaliar a aproximação global em relação a local. E para a interpolação tridimensional em que foram utilizadas as hipersuperfícies denominadas polinomiais tricúbica e bicúbica, os resultados foram ainda mais críticos, principalmente com relação aos resultados obtidos para a polinomial tricúbica, pois dificilmente uma jazida teria a sua variação espacial explicada por uma função desse tipo. Novamente, no caso desse teste, o autor deveria ter feito a validação cruzada com dados de depósitos minerais, que não só poderiam confirmar os resultados obtidos, mas também mostrar melhor a eficiência do método das equações multiquádricas para dados de depósitos minerais. Nesse sentido, permanece como questão aberta a eficiência do ajuste das equações multiquádricas com a variabilidade natural dos depósitos minerais. Uma avaliação atual das equações multiquádricas, mostra que elas são muito sensíveis ao sistema de coordenadas, bem como em relação à magnitude e dispersão da variável dependente.

Foi iniciado também o estudo da técnica da krigagem ordinária que, tinha uma formulação matemática muito semelhante ao das equações multiquádricas. A primeira pesquisa realizada com relação a esta semelhança, foi a comparação desses métodos para um mesmo conjunto de dados de topografia.

Observe-se que até esta fase da pesquisa não havia a preocupação com a avaliação de um possível erro de estimativa. Efetivamente, este assunto é tratado com o novo método de interpolação bidimensional (Yamamoto, 1988d).

O desenvolvimento deste novo método, como mostrado passo a passo neste trabalho, foi resultado de uma série de adaptações e substituições feitas no sistema de equações multiquádricas, a fim de torná-lo semelhante ao sistema de equações de krigagem ordinária. A interpretação atual do sistema do novo método pode ser feita a partir de um artigo de Hardy (1977), onde ele demonstra que os sistemas de equações de covariância - semelhante ao da krigagem ordinária - (57) e o das equações multiquádricas (58), em notação matricial, são similares, como se reproduz a seguir:

$$Z_p = \begin{bmatrix} C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \qquad (57)$$

$$Z_p = \begin{bmatrix} Q_{p1} & Q_{p2} & \cdots & Q_{pn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \qquad (58)$$

onde: $Q_{ij} = [(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + C]^{1/2}$

Segundo Hardy (1977), no caso da predição com funções de covariância, o valor a ser interpolado resulta:

$$Z_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i \qquad (59)$$

e no caso das equações multiquádricas:

$$Z_P = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{pi} \qquad (60)$$

Os coeficientes (α_i, i=1,n) são resultado do produto do vetor linha com a matriz inversa das covariâncias da equação (57), enquanto os coeficientes (c_i, i=1,n) resultam do produto da matriz inversa das quádricas com o vetor coluna das variáveis dependentes. As similaridades entre os dois sistemas estão somente nas formas dessas equações, pois segundo Hardy (1977):

$$Q \neq C \qquad (61)$$

A equação (57) permite fazer uma interpretação adequada das transformações feitas no sistema de equações multiquádricas (Yamamoto, 1988d), as quais, hoje, considera-se tenham sido empíricas. Assim, a transformação básica foi calcular o produto do vetor linha com a matriz das quádricas, porém com uma condição adicional que a soma dos coeficientes assim obtidos fosse igual a um. Para ilustrar a interpretação, utilizou-se novamente do conjunto de pontos de dados da Tabela 14. Portanto, a interpolação da cota Z_p no ponto de coordenadas (30,30), de acordo com a equação (57), é feita como:

$$Z_p = [10,488 \quad 14,491 \quad 14,491] * \begin{bmatrix} 3,162 & 22,583 & 22,583 \\ 22,583 & 3,162 & 20,248 \\ 22,583 & 20,248 & 3,162 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} \qquad (62)$$

Multiplicando-se o vetor linha pela matriz inversa das quádricas, obtém-se o seguinte vetor linha:

$$[0,432 \quad 0,202 \quad 0,202] \qquad (63),$$

que multiplicado pelo vetor coluna das cotas, resulta na cota interpolada no ponto (30,30):

$$Z_p = [0,432 \quad 0,202 \quad 0,202] * \begin{bmatrix} 760 \\ 790 \\ 780 \end{bmatrix} = 645,46 \qquad (64)$$

Agora de acordo com a formulação original de Hardy (1971), multiplicando-se a matriz inversa das quádricas pelo vetor coluna das cotas, obtem-se o vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} \qquad (65),$$

que multiplicado pelo vetor linha das quádricas no ponto (30,30), resulta também na cota interpolada:

$$Z_p = [10,488 \quad 14,491 \quad 14,491] * \begin{bmatrix} 18,672 \\ 15,227 \\ 15,227 \end{bmatrix} = 645,63 \qquad (66)$$

As pequenas diferenças entre os resultados obtidos (64 e 66), devem-se a erros de arredondamento. A matriz linha (63) são os coeficientes equivalentes do sistema da krigagem ordinária. Entretanto, a soma desses coeficientes não resulta em um,

portanto, o resultado obtido em (64) deve ser dividido pela soma dos coeficientes, segundo o cálculo da média ponderada. Assim, dividindo-se a cota obtida pela soma dos coeficientes, tem-se:

$$Z_p = 645,46/0,836 = 772,08 \qquad (67),$$

ou seja, um resultado muito próximo ao da interpolação pela equação do plano (15) e, portanto, muito superior, em qualidade, ao resultado obtido pelas equações multiquádricas (66). Assim, no novo método, introduzindo-se empiricamente a condição para que a soma dos coeficientes fosse igual a um, estava-se na realidade normalizando os coeficientes como em (67). Como conseqüência, o novo método pode trabalhar com um número menor de pontos, para produzir uma interpolação de qualidade, em relação às equações multiquádricas, conforme pode-se observar nas Figuras 31 e 32. Mas, por que a interpolação pelas equações multiquádricas tende a melhorar com o número de pontos? A resposta para esta questão deve estar justamente na soma dos coeficientes das equações multiquádricas, obtidos pelo produto do vetor linha pela matriz inversa das quádricas (equação 62). Assim, a fim de verificar esta resposta utilizou-se do conjunto de pontos de dados da Tabela 15, do qual foram extraídos 9 subconjuntos, de 3 a 27 pontos, em incrementos de 3, para interpolação do ponto de coordenadas (30,30). Para cada subconjunto foram calculados os coeficientes e a sua soma, cujos resultados encontram-se listados na Tabela 54.

Tabela 54: Resultados da interpolação pelas equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30), o erro relativo e a soma dos coeficientes.

nº pontos	cota (m)	erro relativo (%)	soma coeficientes
3	645,63	16,42	0,836
6	698,13	9,63	0,905
9	729,96	5,51	0,942
12	749,59	2,97	0,968
15	759,07	1,74	0,981
18	761,43	1.43	0,985
21	763,59	1,15	0,987
24	764,87	0,99	0,989
27	766,18	0,82	0,991

A variação da soma dos coeficientes com o número de pontos foi representada graficamente como se apresenta na Figura 69.

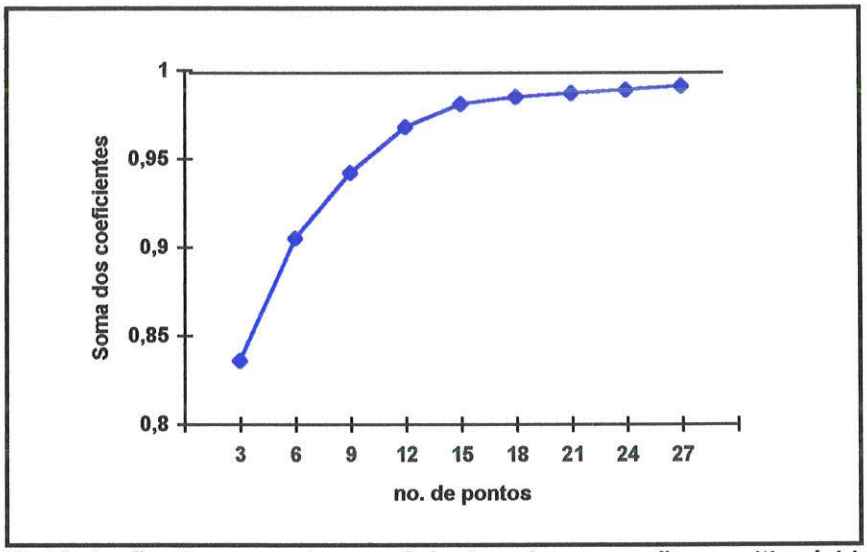

Figura 69: Variação da soma dos coeficientes das equações multiquádricas para interpolação do ponto (30,30) a partir dos subconjuntos de pontos extraídos da Tabela 15.

Como se pode verificar na Tabela 54, a soma dos coeficientes tende a um com o aumento do número de pontos, acompanhada da diminuição do erro relativo. Portanto, a simples correção dos coeficientes, por meio da sua normalização, já é suficiente para melhorar a qualidade da interpolação com um mínimo de pontos. Assim, o novo método consiste simplesmente na utilização dos coeficientes normalizados !

Se o novo método utiliza os coeficientes normalizados das equações multiquádricas, o ideal seria manter a denominação original de "equações multiquádricas" acrescida da expressão "normalizadas". As "equações multiquádricas normalizadas" mantêm as mesmas propriedades originais, porém com a vantagem de ser tanto um interpolador local como global.

Esta constatação vem confirmar a validade de todo o desenvolvimento feito para o novo método para interpolações bidimensional e tridimensional de dados geológicos (Yamamoto, 1988d e 1989).

Um outro ponto a salientar na linha de pesquisa do autor diz respeito ao cálculo da variância de interpolação, que foi desenvolvido com a proposta das "equações multiquádricas normalizadas". A grande vantagem da variância de interpolação, está na possibilidade de permitir uma medida direta da variância de dispersão, dos pontos de dados originais em relação ao ponto interpolado. É, portanto, uma medida local de dispersão e, assim, melhor que a variância de krigagem que é apenas uma medida da configuração espacial dos pontos de dados utilizados na interpolação. Além disso, a sua formulação permite que seja aplicada em qualquer técnica de interpolação que se

utilize da expressão da média ponderada (equações multiquádricas normalizadas, inverso da potência da distância e krigagem ordinária), bem como para interpolações pontual ou de bloco.

O método do inverso da potência da distância aperfeiçoado para avaliação de blocos é realmente superior ao método original para o cálculo de reservas e, por isso, considera-se como uma importante contribuição prática.

As pesquisas recentes no estudo dos efeitos adversos da técnica da krigagem ordinária, apresentaram resultados que devem ser considerados na prática dessa técnica na avaliação de jazidas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma sistematização de parte da obra do Autor, notadamente entre 1980-1994, dirigida ao desenvolvimento de métodos de interpolação, bem como da variância de interpolação e problemas associados à krigagem ordinária. Procurou-se fazer a sistematização da obra, seja citando trechos de artigos publicados, bem como complementando-a com informações e interpretações atualizadas, à luz dos resultados de pesquisas e estudos ainda não divulgados.

A linha de pesquisa principal do Autor centrada em problemas de interpolação para avaliação de jazidas, está embasada em dois projetos de pesquisa de pós graduação, os quais foram considerados fundamentais para a consolidação da sua formação acadêmica e profissional.

Nesta linha de pesquisa, pode-se ressaltar como contribuições importantes:

- o método das "equações multiquádricas normalizadas";
- a variância de interpolação;
- o método do inverso da potência da distância para blocos;

Cabe considerar também que muitos dos resultados apresentados neste trabalho, além daqueles anteriormente publicados nos artigos citados, procedem de pesquisas desenvolvidas ao longo desses anos, os quais ainda não foram divulgados, ou adequadamente divulgados em periódicos de maior circulação. Nesse sentido, tomando como exemplo o novo método de interpolação, pode-se afirmar que agora consolidou-se como "equações multiquádricas normalizadas" e, por isso, pode ser publicado nesses meios. Entretanto, há necessidade agora de um estudo dirigido à influência da constante multiquádrica, conforme a variabilidade natural dos dados geológicos.

A variância de interpolação, originalmente proposta para o cálculo da variância de estimativa do novo método de interpolação, pode ser aplicada em qualquer método de interpolação baseado no princípio da média ponderada e também em interpolações pontuais e de bloco. Além disso, permite a sua combinação para o cálculo da variância global do depósito associada ao seu teor médio, o que seria impossível com a variância de krigagem, pois ela dependeria de informações do variograma para toda a extensão de depósito.

Com relação ao método do inverso da potência da distância aperfeiçoado para avaliação de blocos, considera-se uma contribuição prática importante à mineração,

que faz uso freqüente deste método, porém segundo a sua formulação original, quando não se pode fazer uso da krigagem ordinária, devido à impossibilidade de obtenção de variogramas representativos do depósito.

Um outro ponto a considerar nesta linha de pesquisa dirigida a métodos de interpolação diz respeito a dificuldade do Autor, devido a sua formação básica em Geologia, em trabalhar com assuntos na interface Geologia/Matemática/Estatística. Por isso, tem-se recorrido a soluções práticas, utilizando-se de exemplos numéricos.

Uma característica da linha de pesquisa está no fato de desenvolver um determinado método, por meio do seu estudo promovendo adaptações e melhorias, e não simplesmente utilizá-lo tal qual originalmente proposto. Assim, à exceção da aplicação dos hiperpolinômios no Complexo Alcalino de Anitápolis, todos os demais trabalhos realizados enquadram-se nesta característica.

A grande maioria dos trabalhos produzidos nesta linha de pesquisa foi de autoria do candidato sendo poucos os trabalhos em co-autoria. Os trabalhos de colaboração têm surgido recentemente com a orientação de alunos de pós-graduação.

Finalmente, a pesquisa deve ser continuada, também com o auxílio de alunos de pós-graduação, em muitos problemas apontados neste trabalho, bem como em outros, por exemplo, ligados a classificação de reservas por meio do cálculo da variância de interpolação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnes, M.P. 1980. *Computer assisted mineral appraisal and feasibility.* New York, Soc. Min. Eng. 167p.

Barnes, R.P. & Johnson, T.B. 1984. Positive kriging. In: Verly et al. (eds) *Geostatistics for natural resources characterization.* Reidel. Part I, p.231-244.

Barnhill, R.E. 1983. A survey of the representation and design of surfaces. *IEEE Comput. Grap. Appl.*, 3(7):9-16.

Finney, D.J. 1941. On the distribution of a variate whose logarithm is normally distributed. *J. Royal Stat. Soc.*, Supp. **7**(2):155-161.

Folk, R.L. & Ward, W.C. 1957. Brazos river bar: a study in the significance of grain size parameters. *J. Sed. Petrol.*, **27**:3-27.

Franke, R. 1982. Scattered data interpolation: test of some methods. *Math. Comput.*, **38**(157):181-200.

Franke,R. & Nielson, G. 1980. Smooth interpolation of large sets of scattered data. *Int. J. Num. Meth. Eng*, **15**:1691-1704.

Hardy, R.L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, **76**:1905-1915.

Hardy, R.L. 1977. Least squares prediction. *Phot. Eng. Rem. Sens.*, **43**(4):475-492.

Harbaugh, J.W. 1964. *A computer method for four-variable trend analysis illustrated by a study of oil-gravity variations in Southeastern Kansas.* Kansas, Geol. Surv. Kansas (Bull. 171) 58p.

Harbaugh, J.W. & Merriam, D.F. 1968. *Computer applications in stratigraphic analysis.* New York, John Wiley. 282p.

Harbaugh, J.W.; Doveton, J.H.; Davis, J.C. 1977. Probability methods in oil exploration. New York, John Wiley. 269p.

Herzfeld, U.C. 1989. A note on programs performing kriging with nonnegative weights. *Math. Geol.*, **21**(3):391-393.

Houlding, S.W. & Stoakes, M.A. 1990. Mine activity and resource scheduling with use of 'Three dimensional component modelling'. *Trans. Inst. Min. Metall.* (sect. A), **99**:A53-A59.

Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Est. de São Paulo-IPT. 1978. *Tratamento estatístico e análise dos dados químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC.* São Paulo, IPT. (Rel. 11.945).

Isaacks, E.H. & Srivastava, R.M. 1989. *An introduction to applied geostatistics.* New York, Oxford University Press. 561p.

Journel, A. 1990. *Comunicação pessoal enviada ao Prof. Young C. Kim, sobre a alternativa ao cálculo da variância de krigagem.*

Journel, A.G. & Huijbregts, C.J. 1978. *Mining geostatistics*. London, Academic Press. 600p.

Kim, Y.C. 1990. *Introductory geostatistics and mine planning*. Tucson, University of Arizona. 139p.

Kim, Y.C. & Baafi, E.Y. 1984. Combining local kriging variances for short-term mine planning. In: Verly et al. (eds) *Geostatistics for natural resources characterization.* Dordrecht, Reidel. Part I, p.185-199.

Landim, P.M.B. & Yamamoto, J.K. 1988. Comparação entre krigagem e equações multiquádricas para interpolação de dados irregularmente distribuídos. In: SIMP. QUANT. GEOC., 3, Rio Claro, 1988. *Bol. Res...*Rio Claro, IGCE/UNESP. p.72-76.

McLain, D.H. 1974. Drawing contours from arbitrary data points. *Comput. J.*, **17**(4):318-324.

Moody, A.M.; Graybill, F.A.; Boes, D.C. 1974 *Introduction to the theory of statistics.* Tokyo, McGraw Hill-Kogusha.

Popoff, C.C. 1966. *Computing reserves of mineral deposits: principles and conventional methods*. Washington, Bureau of Mines. 113p. (I.C. 8283).

Royle, A.G. 1979. Why geostatistics ? *Eng. & Min. J.*, **180**(5):92-101.

Spencer, R. 1984. Cluster analysis. *Byte*:129-130, 423-426.

Yamamoto, J.K. 1980. Análise de hipersuperfícies de tendência aplicada aos parâmetros químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. *Anais...*Camboriú, SBG, v.2, p.1258-1271.

Yamamoto, J.K. 1986. *Representações gráficas espaciais em Geologia: Aplicações no Complexo Alcalino de Anitápolis, SC*. IG-USP, São Paulo. 167p. (Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências da USP).

Yamamoto, J.K. 1987a. Método alternativo para dimensionar jazidas. *Brasil Mineral,* **47**:46-51.

Yamamoto, J.K. 1987b. Use of local fits of multiquadric equations for digital surface modelling. In: SOUTH AMERICAN SYMPOSIUM OF COGEODATA, 4, Ouro Preto, 1987. *Abstracts...*Ouro Preto, IUGS/COGEODATA. p.53-56.

Yamamoto, J.K. 1988a. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. In: SIMP. QUANT. GEOC., 3, Rio Claro, 1988. *Bol. Res...*Rio claro, IGCE/UNESP. p.134-139.

Yamamoto, J.K. 1988b. Representações gráficas espacias em Geociências auxiliadas por computador. *Rev. Bras. Geoc.*, **18**(1):3-26.

Yamamoto, J.K. 1988c. Representações gráficas de modelos digitais de terreno. In: CONGR. NAC. INF., 21, Rio de Janeiro, 1988. *Anais...*Rio de Janeiro, SUCESU. p.924-929.

Yamamoto, J.K. 1988d. Novo método de interpolação para contorno automático de dados geológicos. In: CONGR. BRAS. GEOL., 35, Belém, 1988. *Anais...*Belém, SBG. v.4, p.1684-1695.

Yamamoto, J.K. 1989. Novo método para modelagem de jazidas e avaliação de reservas. *Brasil Mineral*, **68**:52-56.

Yamamoto, J.K. 1990. Modelamento digital de superfícies através do ajuste local de equações multiquádricas. *Geociências*, UNESP, **núm. esp**.:1-22.

Yamamoto, J.K. 1991a. *Comparação de métodos computacionais para avaliação de reservas: um estudo de caso na Jazida de Cobre de Chapada, GO*. São Paulo, IG-USP. 175p. (tese de doutoramento apresentada ao Instituto de Geociências-USP).

Yamamoto, J.K. 1991b. O método da ponderação pelo inverso da potência da distância aperfeiçoado para avaliação de blocos. In: SIMP. GEOL. SUDESTE, 2, São Paulo, 1991. *Atas*...São Paulo, SBG. p.219.

Yamamoto, J.K. 1992a. Tratamento estatístico e análise dos dados de cobre e ouro da Jazida de Cobre de Chapada, GO. *Bol. IG-USP*, publ. esp., **12**:153-154.

Yamamoto, J.K. 1992b. Análise estatística dos dados de furos de sondagem da Jazida de Cobre de Chapada, Goiás. *Revista do IG*, **13**(2):31-45.

Yamamoto, J.K. 1992c. Uma alternativa à variância de krigagem: variância de interpolação. In: SEM. NAC.: O COMPUTADOR E SUA APLICAÇÃO NO SETOR MINERAL, 5, Belo Horizonte, 1992. *Coletânea*... Belo Horizonte, IBRAM. p.279-284.

Yamamoto, J.K. 1992d. Composição de variâncias em depósitos minerais. In: SEM. NAC.: O COMPUTADOR E SUA APLICAÇÃO NO SETOR MINERAL, 5, Belo Horizonte, 1992. *Coletânea*...Belo Horizonte, IBRAM. p.285-292.

Yamamoto, J.K. 1994a. Sobre a ocorrência de pesos negativos na solução de sistemas de equações de krigagem. In: SIMP. QUANT. GEOC., 5, Rio Claro, 1994. *Bol. Res. Exp*...Rio Claro, IGCE/UNESP. p.104-108.

Yamamoto, J.K. 1994b. O problema dos pesos negativos da krigagem ordinária: efeito da superavaliação do furo central em malhas regulares. In: CONGR. BRAS. GEOL., 38, Camboriú, 1994. *Bol. Res. Exp*...Rio Claro, SBG. v.2, p.326-327.

Yamamoto, J.K. 1994c. O efeito nocivo de pontos agrupados situados além da amplitude do variograma na krigagem ordinária. Comunicação apresentada na Sessão de Ciências da Terra do dia 06/12/94 da Academia Brasileira de Ciências.

Yamamoto, J.K. & Bettencourt, J.S. 1992. Avaliação de jazidas. São Paulo, IG-USP. 113p.

Yamamoto, J.K.; Bettencourt, J.S.; Amaral, G. 1991. Revisão dos métodos computacionais para avaliação de reservas. In: SIMP. GEOL. SUDESTE, 2, São Paulo, 1991. *Atas*...São Paulo, SBG. p.217.

Yamamoto, J.K.; Goulart, E.P.; Hasui, Y. 1980. Análise estatística dos dados químicos do Complexo Alcalino de Anitápolis, SC. In: CONGR. BRAS. GEOL., 31, Camboriú, 1980. *Anais*...Camboriú, SBG. v.2, p.1272-1283.