UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP

305M810T1832

"UMA REPRESENTAÇÃO BOSÔNICA PARA AS DENSIDADES
DE CARGA E DE CORRENTE DO NÚCLEO ATÔMICO"

Emerson José Veloso de Passos

Tese submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo para o Concurso de
Professor Livre-Docente no Departamento de
Física Matemática.

Maio/91

RESUMO

Neste trabalho, deduzimos uma expansão bosônica, em termos de bosons do oscilador harmônico, para os multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente do núcleo atômico.

Esta expansão consiste em uma gaussiana, multiplicada por uma série de potências no momento trasferido, q . Os coeficientes das potências de q são operadores de um corpo, dados por um polinômio homogêneo dos operadores de criação e aniquilação dos quanta do oscilador harmônico, ordenados normalmente.

Examinamos as consequências, para a expansão, da restrição do espaço de Hilbert do sistema de muitas partículas, ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do oscilador harmônico. Por fim, fazemos uma comparação das previsões do modelo de camadas, com os dados experimentais do espalhamento de electrons no ^{24}Mg .

ABSTRACT

In this paper we derive a boson expansion, in terms of harmonic oscillator bosons, for the nuclear charge and current densities multipoles.

The expansion is given by a gaussian multiplied by a power series in the momentum transfer, q . The coefficients of each power of q are one-body operators, given by a normal ordered homogeneous polynomial of the harmonic-oscillator creation and annihilation operators.

We examine the consequences of the restriction of the many-particle Hilbert space to the harmonic-oscillator shell model space. Finally, we present a comparison of the predictions of the harmonic oscillator shell model, with the experimental data in ^{24}Mg .

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Drs. D.P. Menezes e F.S. Navarra, pela ajuda na parte numérica do trabalho.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

1. Introdução.....	01
--------------------	----

CAPÍTULO 2

2. Multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente.....	07
2.1. Multipolos da densidade de carga.....	07
2.2. Multipolos da densidade de corrente.....	09
2.3. Multipolos longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético da corrente de convecção.....	13
2.4. Multipolos longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético da corrente de magnetização.....	16

CAPÍTULO 3

3. Expansão bosônica para os multipolos da densidade de carga.....	19
--	----

CAPÍTULO 4

4. Expansão bosônica para os multipolos da densidade de corrente.....	26
4.1. Corrente de convecção.....	26
4.2. Corrente de magnetização.....	31

CAPÍTULO 5

5.	Densidade de carga e de corrente e o modelo de camadas do oscilador harmônico	34
5.1.	Estados de paridade idêntica à do estado fundamental	34
5.1.1.	Multipolos da densidade de carga	34
5.1.2.	Multipolos da densidade de corrente de convecção	35
5.1.3.	Multipolos da densidade de corrente de magnetização	38
5.2.	Estados de paridade oposta à do estado fundamental.....	39
5.2.1.	Multipolos da densidade de carga	40
5.2.2.	Multipolos da densidade de corrente de convecção	41
5.2.3.	Multipolos da densidade de corrente de magnetização	43
5.3.	Um exemplo: núcleos na camada sd($N=2$)	44
5.3.1.	Estados de paridade positiva	45
5.3.2.	Estados de paridade negativa.....	47

CAPÍTULO 6

6.	Comparação com os dados experimentais no ^{24}Mg	51
6.1.	Fator de forma longitudinal	51
6.2.	Fator de forma transverso.....	55
6.2.1.	Fator de forma transverso elétrico	56
6.2.2.	Fator de forma transverso magnético	59

6.3. Comparação com os dados experimentais no ^{24}Mg	61
6.3.1. Fator de forma longitudinal.....	61
6.3.2. Fator de forma transverso elétrico	63
6.3.3. Fator de forma transverso magnético	64

CAPÍTULO 7

7. Conclusões.....	65
--------------------	----

Apêndice A

A.1. Expansão bosônica para $\hat{\rho}(\mathbf{x})$	68
A.2. Expansão bosônica para $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$	69
A.3. O multipolo transverso elétrico e o teorema de Siegert.....	71
Referências	73
Figuras.....	74

1. Introdução

A seção de choque para o espalhamento inelástico de elétrons por um núcleo não polarizado, com excitação de um nível discreto, pode ser escrita na aproximação de Born como:^{1,2)}

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \left[\frac{q_\mu^4}{q^4} F^L(q)^2 + \left[\frac{q_\mu^2}{2q^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] F^T(q)^2 \right] , \quad (1.1)$$

onde σ_M é a seção de choque de Mott para o espalhamento de um elétron por uma partícula de massa infinita e carga Z , e $\hbar q_\mu$ é o quadri-momento transferido pelo núcleo,

$$q_\mu = \left(q, \frac{\omega}{c} \right) = \frac{1}{\hbar} (p'_\mu - p_\mu) ,$$

com p_μ e p'_μ respectivamente iguais ao quadri-momento inicial e final do elétron. $F^L(q)^2$ e $F^T(q)^2$ são, respectivamente, os fatores de forma, longitudinal e transversal.

Estes fatores de forma podem ser decompostos em contribuições de diferentes multipolos,^{1,2)}

$$F^L(q)^2 = \sum_{J \geq 0} |F_{CJ}(q)|^2 \quad (1.2)$$

$$F^T(q)^2 = \sum_{J \geq 1} \left[|F_{EJ}(q)|^2 + |F_{MJ}(q)|^2 \right] , \quad (1.3)$$

onde os $F_{CJ}(q)$ são os fatores de forma de Coulomb²⁾,

$$|F_{CJ}(q)|^2 = \frac{4\pi}{Z^2} \frac{|\langle J_f | \hat{\rho}_J(q) | J_i \rangle|^2}{2J_i + 1}, \quad (1.4)$$

que dependem dos multipolos da densidade de carga,²⁾

$$\hat{\rho}_{JM}(q) = \int d^3x j_J(qx) Y_{JM}(\Omega(x)) \hat{\rho}(x) \quad (1.5)$$

e os $F_{EJ}(q)$ e $F_{MJ}(q)$ são respectivamente iguais aos fatores de forma transversos elétricos e transversos magnéticos,²⁾

$$|F_{EJ}(q)|^2 = \frac{4\pi}{Z^2} \frac{|\langle J_f | \hat{j}_J^{(el)}(q) | J_i \rangle|^2}{2J_i + 1} \quad (1.6)$$

$$|F_{MJ}(q)|^2 = \frac{4\pi}{Z^2} \frac{|\langle J_f | \hat{j}_J^{(mag)}(q) | J_i \rangle|^2}{2J_i + 1}, \quad (1.7)$$

que dependem dos multipolos transversos elétricos e transversos magnéticos da corrente,²⁾

$$\hat{j}_J^{(el)}(q) = \frac{1}{q} \int d^3x \nabla \times \underline{M}_{JJ;M}(q \underline{x}) \cdot \hat{j}(\underline{x}) \quad (1.8)$$

$$\hat{j}_J^{(mag)}(q) = \int d^3x \underline{M}_{JJ;M}(q \underline{x}) \cdot \hat{j}(\underline{x}) \quad (1.9)$$

Os vetores $\underline{M}_{JL;M}(q \underline{x})$ são dados por,

$$M_{JL;M}(q, x) = j_L(qx) Y_{JL;M}(\Omega(x)) ,$$

e os $Y_{JL;M}(\Omega(x))$ são os harmônicos esféricos vetoriais.²⁾

Assim, vemos que a dependência na estrutura nuclear, ocorre através da dependência do fator de forma longitudinal, na densidade de carga nuclear $\hat{\rho}(x)$ e do fator de forma transverso, na densidade de corrente $\hat{j}(x)$. A hipótese mais simples que podemos formular a respeito desses operadores é a de que são operadores de um corpo. Neste caso, por exemplo, o elemento de matriz reduzido $\langle J_f | \hat{\rho}_J(q) | J_i \rangle$, pode ser escrito como:³⁾

$$\langle J_f | \hat{\rho}_J(q) | J_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{\substack{n_1 \ell_1 j_1 \\ n_2 \ell_2 j_2 \\ \alpha}} \langle n_2 \ell_2 j_2 \alpha | \hat{\rho}_J(q) | n_1 \ell_1 j_1 \alpha \rangle S_J^{i \rightarrow f}(n_1 \ell_1 j_1 \alpha, n_2 \ell_2 j_2 \alpha) . \quad (1.10)$$

Na eq.(1.10) $|n \ell j m \alpha\rangle$ especifica uma base de estados de partícula independente,

$$|n \ell j m \alpha\rangle = |n \ell j m\rangle \otimes \chi_\alpha ,$$

auto-funções do potencial do oscilador harmônico. Quando $\alpha = 1/2(-1/2) \chi_\alpha$ é o isospinor do próton (nêutron), n é o número quântico radial que fixa o número de nós na função de onda radial, ℓ o momento angular orbital, j o momento angular total e m sua projeção. Nós usamos a convenção em que $n = 1, 2, \dots$, isto é 1s, 1p, 2s-1d etc. O número quântico n está relacionado com o número quântico principal N , pela relação $N = 2(n-1) + \ell$, onde N especifica as camadas do potencial do oscilador harmônico. $S_J^{i \rightarrow f}(n_1 \ell_1 j_1 \alpha, n_2 \ell_2 j_2 \alpha)$ é o elemento de matriz reduzido da densidade de transição de um corpo,

$$S_J^{i \rightarrow f}(n_1 \ell_1 j_1 \alpha, n_2 \ell_2 j_2 \alpha) = \langle J_f || (\hat{a}_{n_2 \ell_2 j_2 \alpha}^+ \times \hat{a}_{n_1 \ell_1 j_1 \alpha}) || J_i \rangle . \quad (1.11)$$

Usando as propriedades usuais dos operadores tensoriais e das auto-funções do momento angular, podemos escrever o elemento de matriz reduzido de $\hat{\rho}_{JM}(q)$ como:³⁾

$$\langle n' \ell' j' || \hat{\rho}_J(q) || n \ell j \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (-)^{J+j+1/2} \sqrt{(2\ell'+1)(2\ell+1)(2j'+1)(2j+1)(2J+1)} \\ \left\{ \begin{matrix} \ell' & j' & 1/2 \\ j & \ell & J \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} \ell' & J & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \langle n' \ell' | j_J(qx) | n \ell \rangle . \quad (1.12)$$

O cálculo explícito da integral radial, $\langle n' \ell' | j_J(qx) | n \ell \rangle$,³⁾ nos mostra que o elemento de matriz reduzido pode ser escrito como:

$$\langle n' \ell' j' || \hat{\rho}_J(q) || n \ell j \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} y^{J/2} e^{-y} p(y) , \quad (1.13)$$

onde $y = \left[\frac{qb_0}{2} \right]^2$, $p(y)$ é um polinômio em y e b_0 é o comprimento do oscilador. A tabela dos coeficientes do polinômio $p(y)$, para camadas selecionadas do potencial do oscilador harmônico, consta na ref. 3.

Igualmente, os elementos de matriz reduzidos dos multipolos transversos elétricos e transversos magnéticos do operador corrente, podem ser escritos de modo análogo ao dos multipolos da densidade de carga, eqs.(1.10)–(1.13).

Com isto, vemos que os fatores de forma de Coulomb, transverso elétrico e transverso magnético, podem ser escritos como uma gaussiana multiplicada por uma série de potências no momento transferido, onde os coeficientes das potências de q são combinações dos elementos de matriz reduzidos da densidade de transição de um corpo. Desse modo, separamos a dependência na estrutura nuclear, contida nos coeficientes das potências de q , da dependência no momento transferido. Note-se que, se restringirmos a

base de estados de partícula independente a um número finito de funções de onda do potencial do oscilador harmônico, a série se reduz a um polinômio e temos uma expressão exata para os fatores de forma. Um caso particular dessa aproximação é quando restringimos o espaço de Hilbert do sistema de muitas partículas, ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do potencial do oscilador harmônico. Como consequência dessa restrição, existem fatores de forma cujo formato independe da estrutura nuclear.⁵⁾ Por exemplo, na camada sd os formatos do fator de forma longitudinal $F_{0 \rightarrow 4+}^L(q)^2$ e do fator de forma transverso $F_{0 \rightarrow 5+}^T(q)^2$ são independentes da estrutura nuclear, isto é, são os mesmos para qualquer núcleo e para quaisquer estados (0^+ , 4^+ e 5^+) de um mesmo núcleo.⁵⁾ Esta representação para os fatores de forma é extensivamente usada na análise dos dados experimentais, com o objetivo de extrair informações sobre as configurações dos estados nucleares.⁷⁾ Este trabalho é uma generalização das referências 4 e 5 e parte dos resultados, aqui apresentados, consta da ref. 6. Nele, vamos mostrar que esta representação para os elementos de matriz reduzidos dos operadores multipolares, decorre de uma expansão desses operadores em termos de bosons do oscilador harmônico, ordenados normalmente. Em nosso procedimento, identificamos os coeficientes das potências de q com operadores de um corpo dados por um polinômio homogêneo dos operadores de criação e aniquilação dos quanta do oscilador harmônico, ordenados normalmente. Denominamos essa expansão de expansão bosônica dos operadores multipolares.^{4,5)}

O nosso método apresenta várias vantagens, comparativamente ao da referência 3. Primeiramente note-se que, na referência 3, a expansão relevante para uma camada do oscilador, nada tem a ver com a expansão para uma camada diferente. Ao contrário, em nosso trabalho a expansão é válida para qualquer núcleo e para quaisquer estados de um mesmo núcleo. Em segundo lugar, o nosso método é muito mais econômico, já que permite a fácil identificação, da correspondente representação dos multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente, para uma dada restrição do espaço de Hilbert do sistema de muitas partículas.

Finalmente, outra vantagem decorre do fato de que os operadores de criação e aniquilação dos quanta do oscilador harmônico são, respectivamente, $[10]$ e $[01]$ tensores de $SU(3)$.^{4,5)} Desse modo, como demonstrado nas refs. 5 e 6, os operadores multipolares podem ser facilmente escritos em termos de tensores de $SU(3)$, uma propriedade de utilidade prática considerável, nos cálculos de modelo de camadas numa base de estados, classificada de acordo com o grupo $SU(3)$.

Organizamos esta tese do seguinte modo: As definições e propriedades dos multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente são descritas no capítulo 2. Também nesse capítulo deduzimos expressões para os operadores multipolares, que serão úteis para determinarmos suas expansões bosônicas. A expansão bosônica dos multipolos da densidade de carga é apresentada no capítulo 3 e a dos multipolos da densidade de corrente no capítulo 4. As consequências da restrição do espaço de Hilbert do sistema de muitas partículas ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do oscilador harmônico são examinadas no capítulo 5, onde discutimos detalhadamente o exemplo da camada sd . Uma comparação das previsões do modelo de camadas com os fatores de forma medidos experimentalmente no ^{24}Mg , é apresentada no capítulo 6. As nossas conclusões são objeto do capítulo 7. Finalmente, no apêndice A, mostramos a forma da expansão bosônica para $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ e $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$.

2. Multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente nuclear

2.1. Multipolos da densidade de carga

O operador densidade de carga é igual a^{1,2)}

$$\hat{\rho}(\underline{x}) = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \delta(\underline{x} - \hat{\mathbf{r}}(n)) \quad . \quad (2.1)$$

Pela eq.(2.1) a sua transformada de Fourier,

$$\hat{\rho}(\underline{q}) = \int e^{-i \underline{q} \cdot \underline{x}} \hat{\rho}(\underline{x}) d^3x \quad ,$$

é igual a

$$\hat{\rho}(\underline{q}) = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} e^{-i \underline{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}(n)} \quad . \quad (2.2)$$

Usando a expansão de uma onda plana em ondas esféricas, esse operador pode ser expandido,

$$\hat{\rho}(\underline{q}) = \sum_{LM} 4\pi(-i)^L Y_{LM}^*(\Omega(\underline{q})) \hat{\rho}_{LM}(\underline{q}) \quad , \quad (2.3)$$

onde $\hat{\rho}_{LM}(\underline{q})$ é o operador multipolar da densidade de carga,

$$\hat{\rho}_{\text{LM}}(\underline{q}) = \int j_{\text{L}}(\underline{q}\underline{x}) Y_{\text{LM}}(\Omega(\underline{x})) \hat{\rho}(\underline{x}) d^3\underline{x} . \quad (2.4)$$

O operador multipolar $\hat{\rho}_{\text{LM}}(\underline{q})$ é um operador de um corpo e, para uso futuro, vamos escrevê-lo como:

$$\hat{\rho}_{\text{LM}}(\underline{q}) = \sum_{\text{n}} \frac{(1 + \hat{r}_3(\text{n}))}{2} \hat{\rho}_{\text{LM}}(\text{n};\underline{q}) , \quad (2.5)$$

onde, pelas eqs.(2.2) e (2.3), vemos que $\hat{\rho}_{\text{LM}}(\text{n};\underline{q})$ aparece na expansão multipolar de $e^{-i \underline{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}(\text{n})}$,

$$e^{-i \underline{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}(\text{n})} = \sum_{\text{LM}} 4\pi(-i)^{\text{L}} Y_{\text{LM}}^*(\Omega(\underline{q})) \hat{\rho}_{\text{LM}}(\text{n};\underline{q}) . \quad (2.6)$$

A partir da definição do operador densidade de carga, eq.(2.1), vemos que $\hat{\rho}(\underline{x})$ é um operador hermitiano que se transforma como um operador de campo escalar, por rotações. Além disso, transforma-se por inversão espacial e inversão temporal em¹⁾,

$$\hat{\pi} \hat{\rho}(\underline{x}) \hat{\pi}^{-1} = \hat{\rho}(-\underline{x})$$

$$\hat{\theta} \hat{\rho}(\underline{x}) \hat{\theta}^{-1} = \hat{\rho}(\underline{x}) .$$

Usando estas propriedades do operador densidade de carga, a definição (2.4) dos operadores multipolares e as propriedades de transformação dos harmônicos esféricos, $Y_{\text{LM}}(\Omega(\underline{x}))$, por rotações, conjugação complexa e inversão espacial, mostra-se que $\hat{\rho}_{\text{LM}}(\underline{q})$ é um

operador tensorial de ordem L e que¹⁾:

$$i) \hat{\rho}_{LM}(\underline{q})^{\dagger} = (-1)^M \hat{\rho}_{L-M}(\underline{q}) \quad (2.7a)$$

$$ii) \hat{\pi} \hat{\rho}_{LM}(\underline{q}) \pi^{-1} = (-1)^L \hat{\rho}_{LM}(\underline{q}) \quad (2.7b)$$

$$iii) \hat{\theta} \hat{\rho}_{LM}(\underline{q}) \theta^{-1} = (-1)^M \hat{\rho}_{L-M}(\underline{q}) \quad (2.7c)$$

2.2. Multipolos da densidade de corrente

A transformada de Fourier da densidade de corrente, $\hat{j}(\underline{q})$, é dada por,

$$\hat{j}(\underline{q}) = \int e^{-i \underline{q} \cdot \underline{x}} \hat{j}(\underline{x}) d^3x \quad (2.8)$$

Esse operador pode ser expandido como:^{1,2,5)}

$$\hat{j}(\underline{q}) = \sum_{JLM} 4\pi (-i)^L Y_{JL,M}^*(\Omega(\underline{q})) \hat{j}_{JL,M}(\underline{q}) \quad (2.9)$$

onde $Y_{JL,M}(\Omega(\underline{q}))$ são os harmônicos esféricos vetoriais,

$$Y_{JL,M}^*(\Omega(\underline{q})) = \sum_n C_{M-\mu, \mu, M}^{L, 1, J} Y_{LM-\mu}(\Omega(\underline{q})) \xi_{\mu}$$

e $\hat{j}_{JL,M}(\underline{q})$ é o operador multipolar da densidade de corrente,

$$\hat{j}_{JL;M}(q) = \int d^3x j_L(qx) Y_{JL;M}(\Omega(x)) \cdot \hat{j}(x) \quad (2.10)$$

Como o campo eletromagnético se acopla apenas com as componentes transversas da corrente é usual considerar, ao invés dos operadores multipolares, eq.(2.10), os multipolos longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético, respectivamente iguais a^{2,5)}:

$$\hat{j}_{JM}^{(long)}(q) = i \left[\left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \hat{j}_{JJ-1;M}(q) + \left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \hat{j}_{JJ+1;M}(q) \right] \quad (2.11a)$$

$$\hat{j}_{JM}^{(el)}(q) = i \left[\left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \hat{j}_{JJ-1;M}(q) - \left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \hat{j}_{JJ+1;M}(q) \right] \quad (2.11b)$$

$$\hat{j}_{JM}^{(mag)}(q) = \hat{j}_{JJ;M}(q) \quad (2.11c)$$

A transformada de Fourier da corrente pode ser expandida em termos destes multipolos:

$$\begin{aligned} \hat{j}(q) = \sum_{JM} 4\pi (-i)^L \left[Y_{JM}^{(long)*}(\Omega(q)) \hat{j}_{JM}^{(long)}(q) + \right. \\ \left. + Y_{JM}^{(el)*}(\Omega(q)) \hat{j}_{JM}^{(el)}(q) + Y_{JM}^{(mag)*}(\Omega(q)) \hat{j}_{JM}^{(mag)}(q) \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

onde os vetores $Y_{JM}^{(long)}(\Omega(q))$, $Y_{JM}^{(el)}(\Omega(q))$ e $Y_{JM}^{(mag)}(\Omega(q))$ são, respectivamente, os campos vetoriais longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético^{6,8)}:

$$Y_{JM}^{(long)}(\Omega(q)) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M0}^{J*}(\Omega(q)) \xi_0(\Omega(q)) = \frac{q}{q} Y_{JM}(\Omega(q)) \quad (2.13a)$$

$$Y_{JM}^{(el)}(\Omega(q)) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \left[D_{M-1}^{J*}(\Omega(q)) \xi_{-1}(\Omega(q)) + D_{M1}^{J*}(\Omega(q)) \xi_1(\Omega(q)) \right] \quad (2.13b)$$

$$Y_{JM}^{(mag)}(\Omega(q)) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}} \left[D_{M-1}^{J*}(\Omega(q)) \xi_{-1}(\Omega(q)) - D_{M1}^{J*}(\Omega(q)) \xi_1(\Omega(q)) \right] \quad (2.13c)$$

Na equação (2.13), os $\xi_{\mu}(\Omega(q))$ são vetores de uma base esférica unitária, em um sistema de coordenadas no qual o eixo z coincide com a direção de q e $D_{MM'}^J(\Omega(q))$ é igual a,

$$D_{MM'}^J(\Omega(q)) = D_{MM'}^J(\varphi_q, \theta_q, 0) \quad ,$$

onde φ_q e θ_q são, respectivamente, os ângulos azimutal e polar que determinam a direção de q .

O operador corrente nuclear, $\hat{j}(\underline{x})$, é um operador hermitiano, que se transforma como um campo vetorial por rotações. Além disso, transforma-se por inversão espacial e inversão temporal em¹⁾,

$$\hat{\pi} \hat{j}(\underline{x}) \hat{\pi}^{-1} = -\hat{j}(-\underline{x})$$

$$\hat{\theta} \hat{j}(\underline{x}) \hat{\theta}^{-1} = -\hat{j}(\underline{x}) \quad .$$

Usando-se estas propriedades do operador densidade de corrente, as definições eqs.(2.10) e (2.11) dos operadores multipolares e as propriedades de transformação dos harmônicos esféricos vetoriais, $Y_{JL;M}(\Omega(\underline{x}))$, por rotações, conjugação complexa e inversão espacial, mostra-se que $\hat{j}_{JM}^{(long)}(q)$, $\hat{j}_{JM}^{(el)}(q)$ e $\hat{j}_{JM}^{(mag)}(q)$ são operadores tensoriais de ordem J e que:

$$i) \quad \hat{j}_{JM}^{(long)+} = (-)^{M+1} \hat{j}_{J-M}^{(long)} \quad (2.14a)$$

$$\hat{j}_{JM}^{(el)+} = (-)^{M+1} \hat{j}_{J-M}^{(el)} \quad (2.14b)$$

$$\hat{j}_{JM}^{(mag)+} = (-)^{M+1} \hat{j}_{J-M}^{(mag)} \quad (2.14c)$$

$$ii) \quad \hat{\pi} \hat{j}_{JM}^{(long)} \pi^{-1} = (-)^J \hat{j}_{JM}^{(long)} \quad (2.14d)$$

$$\pi \hat{j}_{JM}^{(el)} \pi^{-1} = (-)^J \hat{j}_{JM}^{(el)} \quad (2.14e)$$

$$\pi \hat{j}_{JM}^{(mag)} \pi^{-1} = (-)^{J+1} \hat{j}_{JM}^{(mag)} \quad (2.14f)$$

$$iii) \quad \theta \hat{j}_{JM}^{(long)+} \theta^{-1} = (-)^M \hat{j}_{J-M}^{(long)} \quad (2.14g)$$

$$\theta \hat{j}_{JM}^{(el)+} \theta^{-1} = (-)^M \hat{j}_{J-M}^{(el)} \quad (2.14h)$$

$$\theta \hat{j}_{JM}^{(mag)+} \theta^{-1} = (-)^M \hat{j}_{J-M}^{(mag)} \quad (2.14i)$$

Proseguindo, vamos considerar, separadamente, a densidade de corrente de convecção e a densidade de corrente de magnetização. Com a ajuda das equações (2.5) e (2.6) deduziremos, em ambos os casos, expressões para os operadores multipolares tais que, a tarefa de achar a expansão bosônica para os multipolos da densidade de corrente se reduz à de achar a expansão bosônica para os operadores multipolares da densidade de carga.

2.3. Multipolos longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético da corrente de convecção

A corrente de convecção, $\hat{j}^c(\underline{x})$ é igual à¹⁾

$$\hat{j}^c(\underline{x}) = \frac{\hbar}{mc} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{p}(n)}{\hbar} \delta(\underline{x} - \hat{\underline{r}}(n)) + \delta(\underline{x} - \hat{\underline{r}}(n)) \frac{\hat{p}(n)}{\hbar} \right] . \quad (2.15)$$

A sua transformada de Fourier, eq.(2.8), é dada por

$$\hat{j}^c(\underline{q}) = \frac{\hbar}{mc} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{p}(n)}{\hbar} e^{-i\underline{q} \cdot \hat{\underline{r}}(n)} + e^{-i\underline{q} \cdot \hat{\underline{r}}(n)} \frac{\hat{p}(n)}{\hbar} \right] . \quad (2.16)$$

Como discutimos na introdução, queremos escrever os multipolos da densidade de corrente em termos de bosons do oscilador harmônico, ordenados normalmente. Assim, introduzimos os operadores de aniquilação e criação dos quanta do oscilador harmônico,

$$\hat{b}_j(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\hat{x}_j(n)}{b_0} + i b_0 \frac{\hat{p}_j(n)}{\hbar} \right] \quad (2.17a)$$

$$\hat{b}_j^\dagger(n) = (\hat{b}_j(n))^* , \quad (2.17b)$$

onde b_0 é o comprimento do oscilador e $j = 1, 2, 3$ indica direções ortogonais, para escrever:

$$\hat{j}^c(\underline{q}) = \frac{\hbar}{mcb_0} \frac{(-i)}{\sqrt{2}} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[e^{-i\underline{q} \cdot \hat{\underline{r}}(n)} \hat{\underline{b}}(n) - \hat{\underline{b}}^+(n) e^{-i\underline{q} \cdot \hat{\underline{r}}(n)} \right], \quad (2.18)$$

onde $\hat{\underline{b}}^+(n)$ é um vetor cujas componentes são $(b_1^+(n), b_2^+(n), b_3^+(n))$, com uma definição análoga para $\hat{\underline{b}}(n)$.

O nosso próximo passo é introduzir as componentes esféricas dos operadores de criação e aniquilação, $(\hat{b}_{1\mu}^+(n), \hat{b}_{1\mu}(n), \mu = 1, 2, 3)$, definidas abaixo:

$$\hat{b}_{11}^+(n) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{b}_1^+(n) + i \hat{b}_2^+(n) \right] \quad (2.19a)$$

$$\hat{b}_{1-1}^+(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{b}_1^+(n) - i \hat{b}_2^+(n) \right] \quad (2.19b)$$

$$\hat{b}_{10}^+(n) = \hat{b}_3^+(n) \quad (2.19c)$$

$$\hat{b}_{1\mu}(n) = (-1)^\mu \left[\hat{b}_{1-\mu}^+(n) \right]^+ , \quad (2.19d)$$

e usar a eq.(2.6), para obtermos:

$$\begin{aligned} \hat{j}^c(\underline{q}) = & \frac{\hbar}{mcb_0} \sum_{JLM} 4\pi (-i)^L Y_{JL,M}^*(\Omega(\underline{q})) \frac{(-i)}{\sqrt{2}} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \times \\ & \times \left[\left[\hat{\rho}_L(n; \underline{q}) \times \hat{\underline{b}}_1(n) \right]_{JM} + (-1)^{L+J} \left[\hat{\underline{b}}_1^+(n) \times \hat{\rho}_L(n; \underline{q}) \right]_{JM} \right] . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Comparando a eq.(2.20) com as equações (2.9) e (2.11) encontramos as seguintes expressões

para os multipolos da corrente de convecção:

$$\begin{aligned}
 \hat{j}_{c;JM}^{(long)}(q) = & \frac{\hbar}{mcb_0} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\left[\frac{J}{2(2J+1)} \right]^{1/2} \left[\hat{\mathcal{A}}_{J-1}(n;q) \times \hat{b}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\
 & - \left[\hat{b}_1^\dagger(n) \times \hat{\mathcal{A}}_{J-1}(n;q) \right]_{JM} \Big] + \left[\frac{J+1}{2(2J+1)} \right]^{1/2} \left[\left[\hat{\mathcal{A}}_{J+1}(n;q) \times \hat{b}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\
 & \left. \left. - \left[\hat{b}_1^\dagger(n) \times \hat{\mathcal{A}}_{J+1}(n;q) \right]_{JM} \right] \right] , \quad (2.21a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{j}_{c;JM}^{(el)}(q) = & \frac{\hbar}{mcb_0} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\left[\frac{J+1}{2(2J+1)} \right]^{1/2} \left[\hat{\mathcal{A}}_{J-1}(n;q) \times \hat{b}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\
 & - \left[\hat{b}_1^\dagger(n) \times \hat{\mathcal{A}}_{J-1}(n;q) \right]_{JM} \Big] - \left[\frac{J}{2(2J+1)} \right]^{1/2} \left[\left[\hat{\mathcal{A}}_{J+1}(n;q) \times \hat{b}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\
 & \left. \left. - \left[\hat{b}_1^\dagger(n) \times \hat{\mathcal{A}}_{J+1}(n;q) \right]_{JM} \right] \right] , \quad (2.21b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(q) = & \frac{\hbar}{mcb_0} \frac{(-i)}{\sqrt{2}} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\left[\hat{\mathcal{A}}_J(n;q) \times \hat{b}_1(n) \right]_{JM} + \left[\hat{b}_1^\dagger(n) \times \hat{\mathcal{A}}_J(n;q) \right]_{JM} \right] . \\
 & (2.21c)
 \end{aligned}$$

2.4. Multipolos longitudinal, transverso elétrico e transverso magnético da corrente de magnetização

A corrente de magnetização é dada por¹⁾

$$\hat{\mathbf{j}}^m(\underline{x}) = \underline{\nabla} \times \hat{\underline{\mu}}(\underline{x}) \quad , \quad (2.22)$$

onde $\hat{\underline{\mu}}(\underline{x})$ é a densidade de magnetização,

$$\hat{\underline{\mu}}(\underline{x}) = \frac{\hbar}{2mc} \sum_n \hat{g}(n) \hat{\sigma}(n) \delta(\underline{x} - \hat{\mathbf{r}}(n)) \quad . \quad (2.23)$$

Na equação (2.24) $\hat{g}(n)$ é dado por

$$\hat{g}(n) = g_n \frac{(1 - \hat{\tau}_3(n))}{2} + g_p \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \quad , \quad (2.24)$$

onde g_n e g_p são, respectivamente, o momento magnético do proton e neutron em unidades do magneton nuclear,

$$g_p = 2.7928$$

$$g_n = -1.9130 \quad .$$

Calculando a transformada de Fourier da corrente de magnetização, obtemos:

$$\hat{\mathbf{j}}^m(\underline{q}) = \frac{\hbar}{2mc} i \sum_n \hat{g}(n) (\underline{q} \times \hat{\sigma}(n)) e^{-i\underline{q} \cdot \hat{\mathbf{r}}(n)} \quad . \quad (2.25)$$

Lembrando que⁵⁾

$$(\underline{q} \times \hat{\sigma}(\underline{n})) = -i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \underline{q} \sum_{\nu} Y_{11;\nu}^* \hat{\sigma}_{1\nu} \quad , \quad (2.26)$$

e usando a expansão multipolar de $e^{-iq \cdot \hat{r}(\underline{n})}$, eq.(2.6), a transformada de Fourier da corrente de magnetização pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{j}^m(\underline{q}) = & \frac{\hbar}{mc b_0} \sum_{JLM} 4\pi (-i)^L \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \left[Y_{LM}(\Omega(\underline{q})) \times Y_{11}(\Omega(\underline{q})) \right]_{JM}^* \times \\ & \times q b_0 \sum_{\underline{n}} \hat{g}(\underline{n}) \left[\hat{\rho}_L(\underline{n}; \underline{q}) \times \hat{\sigma}_1(\underline{n}) \right]_{JM} \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando-se a expansão,

$$\begin{aligned} \left[Y_{LM}(\Omega(\underline{q})) \times Y_{11}(\Omega(\underline{q})) \right]_{JM} = & \left[\frac{3(2L+1)}{4\pi(2J+1)} \right]^{1/2} \left[\frac{1}{2} \left[1 - (-)^{L+J} \right] C_{011}^{L1J} Y_{JM}^{(\text{mag})}(\Omega(\underline{q})) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[1 + (-)^{L+J} \right] C_{011}^{L1J} Y_{JM}^{(\text{el})}(\Omega(\underline{q})) \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.28)$$

a eq.(2.12), e os valores dos coeficientes de Clebsch-Gordon, encontramos as seguintes expressões dos multipolos da corrente de magnetização:

$$\hat{j}_{m;JM}^{(\log)}(q) = 0 \quad (2.29a)$$

$$\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} qb_0 \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} \left[\hat{\rho}_J(n;q) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} \quad (2.29b)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(q) = & \frac{\hbar}{mcb_0} qb_0 \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} i \left[\left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \left[\hat{\rho}_{J-1}(n;q) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\ & \left. - \left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \left[\hat{\rho}_{J+1}(n;q) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} \right] . \end{aligned} \quad (2.29c)$$

Objetivávamos neste capítulo deduzir as eqs.(2.21) e (2.29). Um exame dessas equações mostra que, uma vez determinada a expansão bosônica dos multipolos da densidade de carga, chega-se imediatamente a correspondente expansão para os multipolos da densidade de corrente.

3. Expansão bosônica para os multipolos da densidade de carga

Para determinarmos a expansão bosônica dos multipolos da densidade de carga, vamos, primeiramente, escrever $e^{-iq \cdot \hat{r}(n)}$ na ordem normal. Isto é feito facilmente, exprimindo $\hat{r}(n)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, eq.(2.17), e usando a fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para escrever⁵⁾

$$e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} = e^{-b_0^2 q^2 / 4} e^{-ib_0 / \sqrt{2} q \cdot \hat{b}^+(n)} e^{-ib_0 / \sqrt{2} q \cdot \hat{b}(n)} . \quad (3.1)$$

Expandindo a exponencial numa série de potências, temos

$$e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} = e^{-b_0^2 q^2 / 4} \sum_{K, K'} \left[\frac{-i b_0}{\sqrt{2}} \right]^{K+K'} \frac{1}{K! K'} (q \cdot \hat{b}^+(n))^K (q \cdot \hat{b}(n))^{K'} . \quad (3.2)$$

O próximo passo é escrever $\hat{\rho}(q)$, eq.(2.2), numa forma em que possamos compará-la com a eq.(2.3) e assim deduzirmos a expansão bosônica para os multipolos da densidade de carga. Isto é fácil de fazer, se escrevermos a eq.(3.2) em termos das componentes esféricas de q e dos operadores vetoriais $\hat{b}_{1\mu}^+(n)$ e $\hat{b}_{1\mu}(n)$, eq.(2.19).

Para demonstrarmos isto, vamos considerar um termo genérico $(q \cdot \hat{b}^+(n))^K$. A unitariedade dos coeficientes de Clebsch–Gordon nos permite escrever,

$$(q \cdot \hat{b}^+(n))^K = \sum_{\substack{J_2, J_3, \dots, J_{K-1} \\ J_K, M_K}} q_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K}^{(K)*} \hat{b}_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K}^{+(K)}(n) , K > 0 . \quad (3.3)$$

onde

$$q_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K}^{(K)} = \left[q_1 \times \left[\dots \left[q_1 \times (q_1 \times q_1)_{J_2} \right]_{J_3} \dots \right]_{J_{K-1}} \right]_{J_K} \quad (3.4)$$

e

$$\hat{b}_{1J_2J_3\ldots J_{K-1}J_K}^{(K)}(n) = \left[\hat{b}_1^+(n) \times \left[\ldots \left[\hat{b}_1^+(n) \times \left[\hat{b}_1^+(n) \times \hat{b}_1^+(n) \right]_{J_2} \right]_{J_3} \ldots \right]_{J_{K-1}} \right]_{J_K}^{M_K} \quad (3.5)$$

com

$$q_{1M}^{(1)} = q_{1M}$$

$$\hat{b}_{1M}^{+(1)}(n) = \hat{b}_{1M}^+(n) \quad .$$

Usando-se as relações

$$q_{1M} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} q Y_{1M}(\Omega(q))$$

e

$$\left[Y_{L_1}(\Omega(q)) \times Y_{L_2}(\Omega(q)) \right]_{LM} = \sqrt{\frac{(2L_1+1)(2L_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{000}^{L_1L_2L} Y_{LM}(\Omega(q)) \quad (3.6)$$

obtemos

$$q_{1J_2\ldots J_{K-1}J_K}^{(K)} = \sqrt{\frac{4\pi}{(2J_K+1)}} C_{1J_2\ldots J_{K-1}J_K} q^K Y_{J_K}^{M_K}(\Omega(q)) \quad , \quad (3.7)$$

onde

$$C_{1J_2\ldots J_{K-1}J_K} = C_{000}^{1J_2} C_{000}^{1J_2J_3} \ldots C_{000}^{1J_{K-1}J_K}$$

$$C_1 = 1 \quad .$$

Nossa notação é tal que J_ℓ significa o ℓ -ésimo momento angular que ocorre em $C_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K}$. Os possíveis valores de J_ℓ são

$$J_\ell = \ell, \ell-2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \quad .$$

De modo análogo ao da eq.(3.7) podemos escrever:

$$\hat{b}_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K}^{(K)}(n) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2J_K+1)}} C_{1J_2 \dots J_{K-1} J_K} (\hat{b}^+(n) \cdot \hat{b}^+(n))^{K/2} \hat{Y}_{J_K M_K}(\hat{b}^+(n)) \quad . \quad (3.8)$$

A eq.(3.8) sugere definir

$$\hat{Y}_{J_K M_K}^{(K)}(\hat{b}^+(n)) = (\hat{b}^+(n) \cdot \hat{b}^+(n))^{K/2} \hat{Y}_{J_K M_K}(\hat{b}^+(n)) \quad . \quad (3.9)$$

Estes operadores, que são uma generalização dos harmônicos sólidos, são polinômios homogêneos de ordem K nas componentes de $\hat{b}^+(n)$ que se transformam como um operador tensorial de ordem J_K , por rotações. Quando $J_K=K$ ele se reduz a um harmônico sólido de ordem J_K , $\hat{Y}_{J_K M_K}(\hat{b}^+(n))$

$$\hat{Y}_{J_K M_K}^{(K)}(\hat{b}^+(n)) = (\hat{b}^+(n) \cdot \hat{b}^+(n))^{(K-J_K)/2} \hat{Y}_{J_K M_K}(\hat{b}^+(n)) \quad .$$

Usando as equações (3.6)–(3.8), temos:

$$(q \cdot \hat{b}^+(n))^K = \sum_{J_K M_K} A_{J_K}^{(K)} \frac{4\pi}{2J_K+1} q^K Y_{J_K M_K}^*(\Omega(q)) \hat{Y}_{J_K M_K}^{(K)}(\hat{b}^+(n)) \quad , \quad K > 0 \quad (3.10)$$

onde

$$A_{J_K}^{(K)} = \sum_{J_2, \dots, J_{K-1}} \left[C_{000}^{11J_2} \right]^2 \left[C_{000}^{1J_2J_3} \right]^2 \dots \left[C_{000}^{1J_{K-1}J_K} \right]^2 \quad (3.11)$$

com

$$A_1^{(1)} = 1$$

e

$$\sum_{J_K} A_{J_K}^{(K)} = 1 \quad .$$

Se adotarmos a convenção

$$A_0^{(0)} = 1$$

$$\hat{Y}_{00}^{(0)}(\hat{b}^+(n)) = \hat{Y}_{00}(\hat{b}^+(n)) \quad ,$$

a eq.(3.10) também é válida para $K = 0$.

De modo análogo

$$(q \cdot \hat{b}(n))^K = \sum_{J_K, M_K} A_{J_K}^{(K)} \frac{4\pi}{2J_K+1} q^K Y_{J_K M_K}^*(\Omega(q)) \hat{Y}_{J_K M_K}^{(K)}(\hat{b}(n)) \quad . \quad (3.12)$$

Usando a equação (3.2) podemos escrever:

$$e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} = \sum_{J, M} e^{-b_0^2 q^2 / 4} \sum_{K, K'} \left[-\frac{ib_0 q}{\sqrt{2}} \right]^{K+K'} \frac{1}{K!K'!} \sum_{J_K, J_{K'}}$$

$$\sqrt{\frac{(4\pi)^3}{(2J+1)(2J_K+1)(2J_{K'}+1)}} C_{000}^{J_K J_{K'}, J} A_{J_K}^{(K)} A_{J_{K'}}^{(K')} \left[\hat{Y}_{J_K}^{(K)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K'}}^{(K')}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} Y_{JM}^*(\Omega(q)) \quad (3.13)$$

Dada a eq.(3.13), as equações (2.2) e (2.3) mostram que os multipolos da densidade de carga podem ser escritos como:

$$\hat{\rho}_{LM}(q) = e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (b_0 q)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} \quad (3.14)$$

onde

$$\hat{\rho}_{LM}^{(K)} = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{K'=0}^K \sum_{J_{K'}, J_{K-K'}} Z^{S0(3)}(K' J_{K'}, K-K' J_{K-K'}; CL) \times \left[\hat{Y}_{J_{K'}}^{(K')}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K-K'}}^{(K-K')}(\hat{b}(n)) \right]_{LM} \quad (3.15)$$

com

$$Z^{S0(3)}(K' J_{K'}, K-K' J_{K-K'}; CL) = \frac{(-1)^{(K-L)/2}}{2^{K/2} K'! (K-K')!} \sqrt{\frac{4\pi}{(2L+1)(2J_{K'}+1)(2J_{K-K'}+1)}} \times C_{000}^{J_{K'}, J_{K-K'}, L} A_{J_{K'}}^{(K')} A_{J_{K-K'}}^{(K-K')} \quad (3.16)$$

A equação (3.16) mostra que $Z^{S0(3)}(K' J_{K'}, K-K' J_{K-K'}; CL)$ é simétrico na troca $K' \leftrightarrow K-K'$, $J_{K'} \leftrightarrow J_{K-K'}$ e é diferente de zero apenas quando $J_{K'} + J_{K-K'} + L$ é par, o que implica que $K-L$ é par.

Quando escrevemos a eq.(3.14), nós usamos duas propriedades dos multipolos da densidade de carga, que são naturalmente satisfeitas pela eq.(3.13). Uma, é que os multiplos pares (ímpares) têm somente potências pares (ímpares) na expansão em potências de q . A outra é que, para um dado multipolo de ordem L , a expansão em série começa em q^L .

Antes de finalizarmos este capítulo, vamos apresentar mais dois resultados. Um deles é uma expressão explícita para os coeficientes $A_{J_K}^{(K)}$. Para isto, comparamos a expansão de uma onda plana em termos de ondas esféricas, com a correspondente expansão usando o método apresentado neste capítulo. Com isto, deduzimos uma expressão para as funções esféricas de Bessel, como uma série de potências, onde os coeficientes dependem de $\hat{A}_L^{(2K+L)}$. Comparando essa expressão para $j_L(qr)$ com a sua expressão como uma série de potências⁹⁾, chegamos ao seguinte resultado:

$$A_L^{(2K+L)} = (2L+1) \frac{(2K+L)!}{2^K K!(2L+2K+1)!!} . \quad (3.17)$$

O outro resultado, que será útil quando calcularmos os elementos de matriz dos operadores $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}$, é determinar uma expressão para esse operador em termos das coordenadas dos nucleons.

Para isto, comparamos as eqs.(2.4) e (3.14) e deduzimos que:

$$\sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} e^{b_0^2 q^2 / 4} j_L(q \hat{r}(n)) \hat{Y}_{LM}(\Omega(\hat{r}(n))) . \quad (3.18)$$

Agora, se considerarmos a expansão de uma função esférica de Bessel em termos de polinômios de Laguerre⁹⁾,

$$e^{z^2/4} j_L(xz) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{2^K (2K+2L+1)!!} x^L L_K^{L+1/2}(x^2) z^{2K+L} \quad (3.19)$$

encontramos:

$$\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \frac{1}{2^K (2K+2L+1)!!} L_K^{L+1/2} \left[\frac{\hat{r}(n)^2}{b_0^2} \right] \left[\frac{\hat{r}(n)}{b_0} \right]^L \hat{Y}_{LM}(\Omega(\hat{r}(n))) , \quad (3.20)$$

onde $L_K^{L+1/2}(x)$ é um polinômio associado de Laguerre.

Para uso futuro, precisamos determinar a expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(n,q)$,

$$\hat{\rho}_{LM}(n,q) = e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(n) . \quad (3.21)$$

Isto é feito facilmente, usando as eqs. (2.5), (3.14) e (3.15).

4. Expansão bosônica para os multipolos da densidade de corrente

4.1. Corrente de convecção

Dadas as eqs.(3.14), (3.15), (2.5) e (3.21), determinamos a expansão bosônica dos operadores $\hat{\rho}_{LM}(n,q)$. Usando-as nas eqs. (2.21), obtemos imediatamente a expansão bosônica para os multipolos da densidade de corrente de convecção. Para escrevê-la em uma forma análoga à expansão dos multipolos da densidade de carga, precisamos fazer um reacloppamento de três momentos angulares. Ao invés de adotarmos esse procedimento, vamos utilizar outro caminho para encontrarmos a expansão bosônica dos multipolos da densidade de corrente de convecção.

Nosso ponto de partida é a expressão, eq.(2.18), para a densidade de corrente de convecção,

$$\hat{j}^c(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} \frac{(-i)}{\sqrt{2}} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} \hat{b}(n) - \hat{b}^+(n) e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} \right] . \quad (4.1)$$

O próximo passo é escrever $\hat{j}^c(q)$ em termos de suas componentes num sistema de coordenadas cujo eixo z coincide com a direção de q ,

$$\begin{aligned} \hat{j}^c(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} \frac{(-i)}{\sqrt{2}} \sum_{n\lambda} \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} \hat{b}(n) \cdot \xi_\lambda(\Omega(q)) - \right. \\ \left. - \hat{b}^+(n) \cdot \xi_\lambda(\Omega(q)) e^{-iq \cdot \hat{r}(n)} \right] \xi_\lambda^*(\Omega(q)) . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para prosseguir, determinamos as componentes de $\hat{\underline{b}}(n)$ e $\hat{\underline{b}}^+(n)$ na base esférica $\xi_\lambda(\Omega(q))$,

$$\hat{\underline{b}}(n) \cdot \xi_\lambda(\Omega(q)) = \sum_{\lambda'} \hat{b}_{1\lambda'}(n) D_{\lambda'\lambda}^1(\Omega(q))$$

$$\hat{\underline{b}}^+(n) \cdot \xi_\lambda(\Omega(q)) = \sum_{\lambda'} \hat{b}_{1\lambda'}^+(n) D_{\lambda'\lambda}^1(\Omega(q)) \quad ,$$

e usamos a eq.(3.2) para $e^{-iq \cdot \hat{\underline{r}}(n)}$. Os passos finais são utilizar as eqs.(3.10) e (3.12) e as propriedades

$$D_{m0}^\ell(\Omega(q)) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\Omega(q))$$

$$\sum C_{m_1 m_2 m}^{\ell_1 \ell_2 \ell} D_{m_1 m_1'}^{\ell_1}(\Omega(q)) D_{m_2 m_2'}^{\ell_2}(\Omega(q)) = C_{m_1' m_2' m'}^{\ell_1 \ell_2 \ell} D_{mm'}^\ell(\Omega(q)) \quad ,$$

para escrever $\hat{\underline{j}}^c(q)$ na base dada pelos vetores $\underline{Y}_{JM}^{(long)}(\Omega(q))$, $\underline{Y}_{JM}^{(el)}(\Omega(q))$ e $\underline{Y}_{JM}^{(mag)}(\Omega(q))$. Pela eq.(2.12) os coeficientes da expansão de $\hat{\underline{j}}^c(q)$ nesta base são, respectivamente, os multipolos longitudinal, transversal elétrico e transversal magnético da densidade de corrente de convecção. Deste modo, determinamos as expansões bosônicas dos multipolos da densidade de corrente de convecção. Elas são:

$$\hat{j}_{c;JM}^{(long)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{J-1+2K} \hat{j}_{c;JM}^{(long)(J-1+2K)} \quad (4.3a)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(el)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{J-1+2K} \hat{j}_{c;JM}^{(el)}(J-1+2K) \quad (4.3b)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{J+2K} \hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(J+2K) \quad (4.3c)$$

onde

$$\hat{j}_{c;JM}^{(long)}(K) = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{K'=0}^{K+1} \sum_{J_{K'}, J_{K+1-K'}} (K+1-2K') \times \quad (4.4a)$$

$$\times Z^{S0(3)}(K+1-K' J_{K+1-K'}, K' J'_{K'}; CJ) \left[\hat{Y}_{J'_{K'}}^{(K')}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+1-K'}}^{(K+1-K')}(\hat{b}(n)) \right]_{JM}$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_{c;JM}^{(K)} = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{K'=0}^{K+1} \sum_{J_{K'}, J_{K+1-K'}} & \left[Z^{S0(3)}(K+1-K' J_{K+1-K'}, K' J'_{K'}; EJ)_c - \right. \\ & \left. - Z^{S0(3)}(K' J'_{K'}, K+1-K' J_{K+1-K'}; EJ)_c \right] \times \left[\hat{Y}_{J'_{K'}}^{(K')}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+1-K'}}^{(K+1-K')}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} \end{aligned} \quad (4.4b)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(K) = \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{K'=0}^{K+1} \sum_{J_{K'}, J_{K+1-K'}} & \left[Z^{S0(3)}(K+1-K' J_{K+1-K'}, K' J'_{K'}; MJ)_c + \right. \\ & \left. + Z^{S0(3)}(K' J'_{K'}, K+1-K' J_{K+1-K'}; MJ)_c \right] \times (-i) \left[\hat{Y}_{J'_{K'}}^{(K')}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+1-K'}}^{(K+1-K')}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} \end{aligned} \quad (4.4c)$$

Os coeficientes que aparecem nas eqs.(4.4b) e (4.4c) são iguais a:

$$Z^{S0(3)}(K+1 J_{K+1}, K' J'_{K'}; EJ)_c = \frac{(-)^{(K+K'+1-J)/2}}{K! K'! 2^{(K+K')/2}} \mathcal{A}_{J_{K+1}}^{(K+1)} A_{J'_{K'}}^{(K')} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{4\pi}{(2J+1)(2J_{K+1}+1)(2J'_{K'}+1)}} \frac{1}{2} \left[1 + (-)^{J_{K+1}+J'_{K'}+J} \right] C_{1 \ 0 \ 1}^{J_{K+1} \ J'_{K'} \ J}$$

$$Z^{S0(3)}(0 \ 0, K+1 J_{K+1}; EJ)_c = 0 \quad (4.5)$$

e

$$Z^{S0(3)}(K+1 J_{K+1}, K' J'_{K'}; MJ)_c = \frac{(-)^{(K+K'-J)/2}}{K! K'! 2^{(K+K')/2}} \mathcal{A}_{J_{K+1}}^{(K+1)} A_{J'_{K'}}^{(K')} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{4\pi}{(2J+1)(2J_{K+1}+1)(2J'_{K'}+1)}} \frac{1}{2} \left[1 - (-)^{J_{K+1}+J'_{K'}+J} \right] C_{1 \ 0 \ 1}^{J_{K+1} \ J'_{K'} \ J}$$

$$Z^{S0(3)}(0 \ 0, K+1 J_{K+1}; MJ)_c = 0 \quad (4.6)$$

com

$$\mathcal{A}_{J_{K+1}}^{(K+1)} = \sum_{J_K} A_{J_K}^{(K)} C_{0 \ 0 \ 0}^{1 \ J_K \ J_{K+1}} C_{1 \ 0 \ 1}^{1 \ J_K \ J_{K+1}}. \quad (4.7)$$

Os coeficientes transversos elétricos, eq.(4.5), são diferentes de zero somente se $J_{K+1} + J'_{K'} + J$ é par, o que leva à condição $K + 1 + K' - J$ par. Na expansão dos multipolos elétricos vemos que ocorre apenas a combinação anti-simétrica na troca $K+1(J_{K+1}) \Leftrightarrow K'(J'_{K'})$. Por outro lado, os coeficientes transversos magnéticos, eq.(4.6), são diferentes de zero somente se $J_{K+1} + J'_{K'} + J$ é ímpar, o que leva à condição

$K+K'-J$ par. Na expansão dos multipolos magnéticos vemos que ocorre apenas a combinação simétrica na troca $K+1(J_{K+1}) \Leftrightarrow K'(J'_{K'})$.

Nas eqs.(4.3), propriedades bem conhecidas dos multipolos da densidade de corrente são exibidas explicitamente. Essas propriedades mostram que, na expansão em série de potências de q , os multipolos pares (ímpares) longitudinal e transverso elétrico da corrente têm somente potências ímpares (pares) e, para um dado multipolo de ordem J , a expansão em série começa em q^{J-1} (exceto o momopolo longitudinal para o qual a série começa em q). Por sua vez, os multipolos pares (ímpares) transversos magnéticos têm somente potências pares (ímpares) de q e a expansão em série de potências começa em q^J . Essas propriedades resultam trivialmente das eqs.(2.21), se usarmos a expansão bosônica dos multipolos da densidade de carga, eq.(3.14).

Como fizemos para os multipolos da densidade de carga, podemos achar expressões para os operadores $\hat{j}_{c;JM}^{(long)(J-1+2K)}$, $\hat{j}_{c;JM}^{(el)(J-1+2K)}$ e $\hat{j}_{c;JM}^{(mag)(J+2K)}$ em termos das coordenadas e momentos dos nucleons. Usando-se na eq.(2.21) a expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(n;q)$, a expressão dos operadores de criação e aniquilação em termos dos operadores coordenada e momento e comparando-se com as eqs.(4.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{j}_{c;JM}^{(long)(J-1+2K)} = & \frac{ib_0}{2\hbar} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_{J-1}^{(J-1+2K)}(n) \right\}_{JM} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_{J+1}^{(J+1+2(K-1))}(n) \right\}_{JM} \right] \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(el)(J-1+2K)} = \frac{ib_0}{2\hbar} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_{J-1}^{(J-1+2K)}(n) \right\}_{JM} - \right.$$

$$- \left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_{J+1}^{(J+1+2(K-1))}(n) \right\}_{JM} \quad (4.8b)$$

$$\hat{j}_{c; JM}^{(mag)(J+2K)} = -\frac{b_0}{2\hbar} \sum_n \frac{(1 + \hat{\tau}_3(n))}{2} \left[\hat{p}_1(n), \hat{\rho}_J^{(J+2K)}(n) \right]_{JM} \quad (4.8c)$$

Nas eqs. (4.8), o anti-comutador, $\left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_L^{(K)}(n) \right\}_{JM}$ é definido como,

$$\left\{ \hat{p}_1(n), \hat{\rho}_L^{(K)}(n) \right\}_{JM} = \sum_{\mu} C_{\mu M-\mu M}^{1 L J} \left[\hat{p}_{1\mu}(n) \hat{\rho}_{LM-\mu}^{(K)}(n) + (-)^{1+L-J} \hat{\rho}_{LM-\mu}^{(K)}(n) \hat{p}_{1\mu}(n) \right]$$

e o comutador $[\hat{p}_1(n), \hat{\rho}_L^{(K)}(n)]_{JM}$ como

$$[\hat{p}_1(n), \hat{\rho}_L^{(K)}(n)]_{JM} = \sum_{\mu} C_{\mu M-\mu M}^{1 L J} \left[\hat{p}_{1\mu}(n) \hat{\rho}_{LM-\mu}^{(K)}(n) - (-)^{1+L-J} \hat{\rho}_{LM-\mu}^{(K)}(n) \hat{p}_{1\mu}(n) \right] \quad .$$

Se usarmos a expressão para $\hat{\rho}_{LM}^{(K)}(n)$, obtida a partir da equação (3.20) nas eqs.(4.8), encontraremos expressões para os operadores acima em termos das coordenadas e momentos dos nucleons.

4.2. Corrente de magnetização

A partir das eqs.(2.29), a expansão bosônica para os multipolos da corrente de magnetização decorre trivialmente da correspondente expansão bosônica para os multipolos da densidade de carga, eqs.(3.14) e (3.15). Fazendo isto, podemos escrever:

$$\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_K (qb_0)^{2K+J+1} \hat{j}_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1) \quad (4.9a)$$

$$\hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(q) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_K (qb_0)^{2K+J} \hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(2K+J) \quad (4.9b)$$

onde

$$\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1) = \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} \left[\hat{\rho}_J^{(2K+J)}(n) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(2K+J) = \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} i \left[\left[\frac{J+1}{2J+1} \right]^{1/2} \left[\hat{\rho}_{J-1}^{(J-1+2K)}(n) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} - \right. \\ \left. - \left[\frac{J}{2J+1} \right]^{1/2} \left[\hat{\rho}_{J+1}^{(J+1+2(K-1))}(n) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} \right] \quad (4.10b) \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as eqs.(3.20) podemos encontrar expressões para $\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1)$ e $\hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(2K+J)$ em termos das coordenadas e spins dos nucleons:

$$\begin{aligned} \hat{j}_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1) = \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} \frac{1}{2^K (2K+2J+1)!!} L_K^{J+1/2} \left[\frac{\hat{r}(n)^2}{b_0^2} \right] \left[\frac{\hat{r}(n)}{b_0} \right]^J \times \\ \times \left[\hat{Y}_J(\Omega(\hat{r}(n))) \times \hat{\sigma}_1(n) \right]_{JM} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{j}_{m; JM}^{(\text{mag})(2K+J)} &= \sum_n \frac{\hat{g}(n)}{2} i \left[\left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} \frac{1}{2^K (2K+2J-1)!!} L_K^{(J-1)+1/2} \left[\frac{\hat{r}(n)^2}{b_0^2} \right] \left[\frac{\hat{r}(n)}{b_0} \right]^{J-1} \times \right. \\
&\times \left[\hat{Y}_{J-1}(\Omega(\hat{r}(n)) \times \hat{\sigma}_1(n)) \right]_{JM} - \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} \frac{1}{2^{(K-1)} (2K+2J+1)!!} \times \\
&\times L_{K-1}^{(J+1)+1/2} \left[\frac{\hat{r}(n)^2}{b_0^2} \right] \left[\frac{\hat{r}(n)}{b_0} \right]^{J+1} \left[\hat{Y}_{J+1}(\Omega(\hat{r}(n)) \times \hat{\sigma}_1(n)) \right]_{JM} \Bigg] .
\end{aligned}$$

5. Densidade de carga e de corrente e o modelo de camadas do oscilador harmônico

Neste capítulo, vamos investigar as consequências, para os elementos de matriz dos multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente, da restrição do espaço de Hilbert de muitas partículas ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do oscilador harmônico. Consideraremos, separadamente, os estados de paridade idêntica à do estado fundamental e os de paridade oposta.

5.1. Estados de paridade idêntica à do estado fundamental

De acordo com o modelo de camadas do oscilador harmônico, os estados de paridade idêntica à do estado fundamental são descritos, colocando-se os nucleons de valência na N -ésima camada do oscilador. Neste caso, tanto o estado fundamental como os estados excitados têm o mesmo número total de quanta e podemos aniquilar, no máximo, N quanta por nucleon. Como consequência, na expansão bosônica dos operadores multipolares, a série termina e apenas os termos, que conservam o número total de quanta, contribuem. Examinamos, a seguir, as consequências destas restrições para os multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente.

5.1.1. Multipolos da densidade de carga

Como podemos aniquilar, no máximo, N quanta do oscilador por nucleon e somente os termos que conservam o número total de quanta contribuem, as eqs. (3.14) e (3.15) impõem a existência apenas de multipolos pares e K e L , na eq. (3.14), estão limitados pela condição $2K + L \leq 2N$. Assim, na expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(q)$, ocorrem apenas

potências pares de q , sendo q^{2N} o termo de ordem máxima. Neste caso particular, a expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(q)$ se reduz a

$$\hat{\rho}_{LM}(q) \xrightarrow{L \text{ par}} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N-L)/2} (qb_0)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}, \quad (5.1)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} \longrightarrow \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J'_{K+L/2} J_{K+L/2}} Z^{SO(3)}(K+L/2 J'_{K+L/2}, K+L/2 J_{K+L/2}; CL) \\ \left[\hat{Y}_{J'_{K+L/2}}^{(K+L/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+L/2}}^{(K+L/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{LM}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Desse modo, o multipolo da densidade de carga, de máxima ordem, é $L = 2N$ e a expansão bosônica deste multipolo se reduz a apenas um termo. Como consequência, o formato do fator de forma $F_{C2N}(q)$ é independente da estrutura nuclear.

5.1.2. Multipolos da densidade de corrente de convecção

Dadas as restrições impostas pelo modelo de camadas, vemos que K , nas eqs. (4.4), tem que ser um número ímpar. Pela equação (4.4a), os multipolos longitudinais se anulam, pois os termos que conservam o número de bosons não contribuem para o multipolo longitudinal da corrente de convecção.

Como só existem termos ímpares na expansão bosônica dos multipolos da densidade de corrente de convecção, restritos ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do oscilador harmônico, ou sejam, as transições $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;EQ}$, vemos, pelas eqs. (4.3b), que existem somente multipolos elétricos pares, com K e J nessas equações, limitados pela

desigualdade $2K + J \leq 2N$. Em geral, o termo de mais baixa ordem, na expansão bosônica dos multipolos transversos elétricos da corrente de convecção, é q^{J-1} . Entretanto, quando restringimos esses multipolos às transições $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;EQ}$, $j_{c;JM}^{(el)}(J-1)$ se anula, pois na eq.(4.4b) somente o termo simétrico com $J_{J/2} = J'_{J/2} = J/2$ contribui. Como o termo com $K = 0$ se anula, vemos na eq.(4.3b), que o termo de ordem mínima, na expansão bosônica dos multipolos transversos elétricos é q^{J+1} , com q^{2N-1} sendo o termo de ordem máxima.

Para os multipolos transversos magnéticos a eq.(4.3c) mostra que existem apenas os multipolos ímpares com K e J restringidos pela desigualdade $2K + J + 1 \leq 2N$. Na expansão bosônica de $j_{c;JM}^{(mag)}$ ocorrem apenas potências ímpares de q com, respectivamente, q^J e q^{2N-1} os termos de mínima e máxima ordem. Desse modo, a expansão bosônica dos multipolos da densidade de corrente de convecção se reduz a:

$$\hat{j}_{c;JM}^{(long)}(q) \longrightarrow 0 \quad (5.2a)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(el)}(q) \xrightarrow{J \text{ par}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N-2-J)/2} (qb_0)^{J+1+2K} j_{c;JM}^{(el)}(J+1+2K) \quad (5.2b)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(q) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N-J-1)/2} (qb_0)^{J+2K} j_{c;JM}^{(mag)}(J+2K) \quad (5.2c)$$

com

$$\hat{j}_{c;JM}^{(long)}(J-1+2K) \longrightarrow 0 \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned}
\hat{j}_{c;JM}^{(el)}(J-1+2K) &\longrightarrow \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J_{K+J/2} J'_{K+J/2}} \times \\
&\times \left[Z^{SO(3)}(K+J/2 J_{K+J/2}, K+J/2 J'_{K+J/2}; EJ)_c - \right. \\
&\left. - Z^{SO(3)}(K+J/2 J'_{K+J/2}, K+J/2 J_{K+J/2}; EJ)_c \right] \left[\hat{Y}_{J'_{K+J/2}}^{(K+J/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+J/2}}^{(K+J/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} \\
&\quad (5.3b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(J+2K) &\longrightarrow \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J_{K+(J+1)/2} J'_{K+(J+1)/2}} \times \\
&\times \left[Z^{SO(3)}(K+(J+1)/2 J_{K+(J+1)/2}, K+(J+1)/2 J'_{K+(J+1)/2}; MJ)_c + \right. \\
&\left. + Z^{SO(3)}(K+(J+1)/2 J'_{K+(J+1)/2}, K+(J+1)/2 J_{K+(J+1)/2}; MJ)_c \right] \times \\
&\times (-i) \left[\hat{Y}_{J'_{K+(J+1)/2}}^{(K+(J+1)/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+(J+1)/2}}^{(K+(J+1)/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} . \\
&\quad (5.3c)
\end{aligned}$$

Desse modo, o multipolo transversal elétrico da corrente de convecção de máxima multipolaridade é $J = 2N - 2$ e para os multipolos transversos magnéticos, $J = 2N - 1$. Como a expansão bosônica destes multipolos de máxima multipolaridade contém apenas um termo, os formatos dos fatores de forma $F_{E(2N-2)}(q)$ e $F_{M(2N-1)}(q)$, considerando apenas a corrente de convecção, são independentes da estrutura nuclear.

O fato de o multipolo longitudinal da corrente de convecção se anular mostra que a corrente de convecção, restrita as transições $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;EQ}$, é solenoidal. Como a

corrente de magnetização é puramente solenoidal, vemos que o teorema de Siegert, que impõe q^{J-1} como o limite para baixos valores de q dos multipolos elétricos, é violado de um modo qualitativo, como discutimos na referência 5.

5.1.3. Multipolos da densidade de corrente de magnetização

Se restringirmos o espaço de Hilbert do sistema de muitas partículas ao espaço de Hilbert do modelo de camadas do oscilador harmônico, isto é, às transições $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;EQ}$, os multipolos da corrente de magnetização continuam sendo dados pelas eqs.(4.9) e (4.10), onde agora os operadores $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(n)$ são dados pelas eqs.(5.2) e (2.5).

Em virtude de termos apenas $\hat{\rho}_{LM}(q)$ pares na restrição $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;EQ}$ vemos, pelas eqs.(4.10a), que existem apenas multipolos transversos elétricos pares com K e J limitados pela desigualdade $2K + J \leq 2N$. Na expansão bosônica dos multipolos transversos elétricos da corrente de magnetização, aparecem apenas potências ímpares de q , com q^{J+1} o termo de ordem mínima e q^{2N+1} , o de ordem máxima. Para os multipolos transversos magnéticos, a eq.(4.10b) mostra que existem apenas os multipolos ímpares com K e J restringidos pela desigualdade $2K + J - 1 \leq 2N$. Na expansão bosônica dos multipolos transversos magnéticos aparecem apenas potências ímpares, de q , sendo q^J o termo de ordem mínima e q^{2N+1} o de ordem máxima. Desse modo, a expansão bosônica dos multipolos da corrente de magnetização se reduz a:

$$\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(q) \xrightarrow{J \text{ par}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N-J)/2} (qb_0)^{2K+J+1} \hat{j}_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1) \quad (5.4a)$$

$$\hat{j}_{m;JM}^{(mag)}(q) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+1-J)/2} (qb_0)^{(2K+J)} j_{m;JM}^{(mag)(2K+J)} \quad (5.4b)$$

com $j_{m;JM}^{(el)(2K+J+1)}$ e $j_{m;JM}^{(mag)(2K+J)}$ dados pelas eqs.(4.10), em que agora, os operadores $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(n)$ são dados pela eq.(5.2).

Assim, vemos que o multipolo transversal elétrico da corrente de magnetização de máxima multipolaridade é $J = 2N$ e o multipolo transversal magnético de máxima multipolaridade é $J = 2N+1$. Como a expansão bosônica dos multipolos de máxima multipolaridade contém apenas um termo, e lembrando os resultados da análise dos multipolos da corrente de convecção, vemos que os formatos dos fatores de forma $F_{E2N}(q)$ e $F_{M2N+1}(q)$ são independentes da estrutura nuclear e o fator multiplicativo depende apenas da corrente de magnetização.

5.2. Estados de paridade oposta à do estado fundamental

De acordo com o modelo de camadas, os estados de paridade oposta à paridade do estado fundamental, são descritos colocando-se um nucleon de valência na $(N+1)$ -ésima camada do oscilador e os outros na N -ésima camada. Neste caso, o número total de quanta dos estados excitados difere, por um quanta, do número do estado fundamental e nas transições entre o estado fundamental e os estados excitados de paridade oposta, isto é, transições $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;OPP}$, podemos aniquilar no máximo N quanta por nucleon. Como consequência, na expansão bosônica dos operadores multipolares, a série termina e somente termos, que diferem por um quanta, contribuem. Abaixo, vamos examinar as consequências, para a expansão bosônica dos operadores multipolares, da restrição $\hat{P}_{SM;EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM;OPP}$.

5.2.1. Multipolos da densidade de carga

Como podemos aniquilar, no máximo, N quanta de oscilador por nucleon e apenas termos, que diferem por um quanta, contribuem, as eqs.(3.14) e (3.15) impõem a existência apenas dos multipolos ímpares e que K e L , na eq.(3.14), estão restringidos pela desigualdade $(2K+L) \leq (2N+1)$. Assim, na expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(q)$, aparecem apenas potências ímpares de q , com q^L como o termo de ordem mínima e q^{2N+1} como o de ordem máxima. Neste caso particular, a expansão bosônica de $\hat{\rho}_{LM}(q)$ se reduz a

$$\hat{\rho}_{LM}(q) \xrightarrow{L \text{ ímpar}} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+1-L)/2} (qb_0)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(q) \quad (5.5a)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} \rightarrow \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J'_{K+(L+1)/2} J_{K+(L-1)/2}} Z^{SO(3)}_{K+(L+1)/2} J'_{K+(L+1)/2}, \\ K+(L-1)/2 J_{K+(L-1)/2}; CL \left[\hat{Y}_{J'_{K+(L+1)/2}}^{(K+(L+1)/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+(L-1)/2}}^{(K+(L-1)/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{LM} \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Desse modo, o multipolo da densidade de carga de máxima ordem é $L = 2N+1$ e a expansão bosônica deste multipolo se reduz a apenas um termo. Como consequência, o formato do fator de forma $F_{C2N+1}(q)$ é independente da estrutura nuclear.

5.2.2. Multipolos da densidade de corrente de convecção

Dadas as restrições impostas pelo modelo de camadas, K nas eqs.(4.4) tem que ser um número par. Como só existem termos pares, as eqs.(4.3a) e (4.3b) mostram que existem somente multipolos longitudinais e transversos elétricos ímpares, com K e J nessas equações, limitados pela desigualdade $2K + J - 1 \leq 2N$, com q^{J-1} o termo de ordem mínima e q^{2N} o de ordem máxima. Para os multipolos transversos magnéticos, a eq.(4.3c) mostra que só existem os multipolos pares, com K e J limitados pela desigualdade $2K + J \leq 2N$. Na expansão bosônica dos multipolos transversos magnéticos da corrente de convecção, o termo de ordem mínima é q^J e o de ordem máxima é q^{2N} .

Desse modo a expansão bosônica dos multipolos da densidade de corrente de convecção se reduz a:

$$\hat{j}_{c;JM}^{(\text{long})}(q) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+1-J)/2} (qb_0)^{J-1+2K} \hat{j}_{c;JM}^{(\text{long})}(J-1+2K) \quad (5.6a)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(\text{el})}(q) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+1-J)/2} (qb_0)^{J-1+2K} \hat{j}_{c;JM}^{(\text{el})}(J-1+2K) \quad (5.6b)$$

$$\hat{j}_{c;JM}^{(\text{mag})}(q) \xrightarrow{J \text{ par}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N-J)/2} (qb_0)^{2K+J} \hat{j}_{c;JM}^{(\text{mag})}(2K+J) \quad (5.6c)$$

com

$$\hat{j}_{c;JM}^{(\text{long})}(J-1+2K) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} - \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J'_{K+(J+1)/2} J_{K+(J-1)/2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times Z^{SO(3)}(K+(J-1)/2 \ J_{K+(J-1)/2}, K+(J+1)/2 \ J'_{K+(J+1)/2}; CJ) \times \\
& \times \left[\hat{Y}_{J'_{K+(J+1)/2}}^{(K+(J+1)/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+(J-1)/2}}^{(K+(J-1)/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{JM}
\end{aligned} \tag{5.7a}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{j}_{c;JM}^{(el)}(J-1+2K) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J'_{K+(J+1)/2} J_{K+(J-1)/2}} \times \\
& \times \left[Z^{SO(3)}(K+(J-1)/2 \ J_{K+(J-1)/2}, K+(J+1)/2 \ J'_{K+(J+1)/2}; EJ)_c - \right. \\
& \left. - Z^{SO(3)}(K+(J+1)/2 \ J'_{K+(J+1)/2}, K+(J-1)/2 \ J_{K+(J-1)/2}; EJ)_c \right] \times \\
& \times \left[\hat{Y}_{J'_{K+(J+1)/2}}^{(K+(J+1)/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+(J-1)/2}}^{(K+(J-1)/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{JM}
\end{aligned} \tag{5.7b}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{j}_{c;JM}^{(mag)}(2K+J) \xrightarrow{J \text{ par}} \sum_n \frac{(1+\hat{\tau}_3(n))}{2} \sum_{J'_{K+1+J/2} J_{K+J/2}} \times \\
& \times \left[Z^{SO(3)}(K+J/2 \ J_{K+J/2}, K+1+J/2 \ J'_{K+1+J/2}; MJ)_c + Z^{SO(3)}(K+1+J/2 \ J'_{K+1+J/2}, \right. \\
& \left. K+J/2 \ J_{K+J/2}; MJ)_c \right] \times (-i) \left[\hat{Y}_{J'_{K+1+J/2}}^{(K+1+J/2)}(\hat{b}^+(n)) \times \hat{Y}_{J_{K+J/2}}^{(K+J/2)}(\hat{b}(n)) \right]_{JM} .
\end{aligned} \tag{5.7c}$$

Desse modo, o multipolo transverso elétrico da corrente de convecção de máxima multipolaridade é $J = 2N+1$ e, para os multipolos transversos magnéticos, é $J = 2N$.

Como a expansão bosônica desses multipolos de máxima multipolaridade contém apenas um termo, os formatos dos fatores de forma $F_{E2N+1}(q)$ e $F_{M2N}(q)$, considerando apenas a corrente de convecção, são independentes da estrutura nuclear.

5.2.3. Multipolos da densidade de corrente de magnetização

Como no caso anterior, os multipolos da corrente de magnetização continuam sendo dados pelas eqs.(4.9) e (4.10), em que agora os operadores $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(n)$ são dados pela eq.(5.5b).

Como temos apenas $\hat{\rho}_{LM}(q)$ ímpar, na restrição $\hat{P}_{SM,EQ} \rightarrow \hat{P}_{SM,OPP}$, vemos, pelas eqs.(4.10a), que existem apenas multipolos transversos elétricos ímpares com K e J restritos pela desigualdade $2K + J \leq (2N + 1)$. Na expansão bosônica dos multipolos transversos elétricos da corrente de magnetização, aparecem somente potências pares de q , com q^{J+1} o termo de ordem mínima e q^{2N+2} o termo de ordem máxima. Para os multipolos transversos magnéticos, a eq.(4.10b) mostra que existem somente os multipolos pares com $2K + J - 1 \leq 2N + 1$. Na expansão bosônica dos multipolos transversos magnéticos aparecem somente potências pares sendo q^J o termo de menor ordem e q^{2N+2} o de maior ordem.

Desse modo, a expansão bosônica dos multipolos da corrente de magnetização se reduz a:

$$\hat{j}_{m;JM}^{(el)}(q) \xrightarrow{J \text{ ímpar}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+1-J)/2} (qb_0)^{2K+J+1} j_{m;JM}^{(el)}(2K+J+1)$$

$$\hat{j}_{m; JM}^{(mag)}(q) \xrightarrow{J \text{ par}} \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{(2N+2-J)/2} (qb_0)^{2K+J} \hat{j}_{m; JM}^{(mag)(2K+J)}$$

com $\hat{j}_{m; JM}^{(el)(2K+J+1)}$ e $\hat{j}_{m; JM}^{(mag)(2K+J)}$ dados pelas eqs.(4.10), em que os operadores $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}(n)$ são dados pela eq.(5.5b).

Assim, vemos que o multipolo transverso elétrico de máxima multipolaridade é $J = 2N+1$ e o transverso magnético de máxima multipolaridade é $J = 2N+2$. Como a expansão bosônica dos multipolos de máxima multipolaridade contém apenas um termo e lembrando os resultados da análise dos multipolos da corrente de convecção, vemos que o formato do fator de forma $F_{M2N+2}(q)$ é independente da estrutura nuclear. Além disso, o fator multiplicativo depende apenas da corrente de magnetização.

5.3. Um exemplo: núcleos na camada sd ($N=2$).

De acordo com o modelo de camadas do oscilador harmônico, os estados de paridade positiva dos núcleos na camada sd ($16 < A < 40$) são descritos considerando as camadas 1s e 1p fechadas e colocando-se os $(A-16)$ nucleons de valência na camada 2s 1d. Por sua vez, os estados de paridade negativa são descritos colocando-se $(A-17)$ nucleons de valência na camada 2s 1d e um nucleon na camada 2p 1f. Como consequência, os fatores de forma destes núcleos podem ser escritos como uma gaussiana em $(qb_0)/2$, multiplicada por um polinômio em $b_0 q$, onde os coeficientes das potências de qb_0 são elementos de matriz dos operadores de um corpo, que aparecem na expansão bosônica do correspondente operador multipolar. Desse modo, vemos que a dependência dos fatores da forma na estrutura nuclear está contida em uns poucos parâmetros, os coeficientes da expansão polinomial.

Nas tabelas abaixo, vamos especificar, para cada fator de forma, o número de parâmetros linearmente independentes que aparecem na sua expansão bosônica.

Vamos tratar separadamente os estados de paridade positiva e os estados de paridade negativa.

5.3.1. Estados de paridade positiva⁵⁾

Existem apenas os fatores de forma coulombianos e transversos elétricos pares e transversos magnéticos ímpares. Para os fatores de forma de Coulomb temos uma expansão em potências pares de q , com q^J e q^{2N} , sendo respectivamente, o termo de mínima e de máxima ordem. Para os multipolos transversos elétricos e transversos magnéticos temos uma expansão em potências ímpares de q , com os termos de ordem mínima respectivamente iguais à q^{J+1} e q^J , e os de máxima ordem, q^{2N-1} , para a corrente de convecção e q^{2N+1} para a corrente de magnetização.

Fator de forma de Coulomb

$F_{CJ}(q)$	nº de parâmetros
C0	3
C2	2
C4	1

Fator de forma transverso elétrico da corrente de convecção

$F_{EJ}(q)$	nº de parâmetros
E2	1

Fator de forma transverso magnético da corrente de convecção

$F_{MJ}(q)$	nº de parâmetros
M1	2
M3	1

Fator de forma transverso elétrico da corrente de magnetização

$F_{EJ}(q)$	nº de parâmetros
E2	2
E4	1

Fator de forma transverso magnético da corrente de magnetização

$F_{MJ}(q)$	nº de parâmetros
M1	3
M3	2
M5	1

5.3.2. Estados de paridade negativa

Existem apenas os fatores de forma Coulombianos e transversos elétricos ímpares e transversos magnéticos pares. Para os fatores de forma de Coulomb, temos uma expansão em potências ímpares de q , com q^J e q^{2N+1} , como termos de mínima e de máxima ordem, respectivamente. Para os multipolos transversos elétricos e transversos magnéticos, a expansão é em potências pares de q . O termo de menor ordem para a expansão dos multipolos transversos magnéticos, é q^J . Para os multipolos transversos elétricos, o termo da corrente de convecção tem uma expansão a partir de q^{J-1} , e o da corrente de magnetização, a partir de q^{J+1} . Os termos de maior ordem são, respectivamente, q^{2N} e q^{2N+2} .

Fator de forma de Coulomb

$F_{CJ}(q)$	nº de parâmetros
C1	3
C3	2
C5	1

Fator de forma transversal elétrico da corrente de convecção

$F_{EJ}(q)$	nº de parâmetros
E1	3
E3	2
E5	1

Fator de forma transversal magnético da corrente de convecção

$F_{MJ}(q)$	nº de parâmetros
M2	2
M4	1

Fator de forma transverso elétrico da corrente de magnetização

$F_{EJ}(q)$	nº de parâmetros
E1	3
E3	2
E5	1

Fator de forma transverso magnético da corrente de magnetização

$F_{MJ}(q)$	nº de parâmetros
M2	3
M4	2
M6	1

Finalizando a discussão, vemos que, para os estados de paridade positiva, o formato do fator de forma $F_{C4}(q)$ é independente da estrutura nuclear. Como consequência, o formato do fator de forma longitudinal $F_{0 \rightarrow 4+}^L(q)^2$, mostrado na Fig. 1, é independente da estrutura nuclear. Em outras palavras, é o mesmo para qualquer núcleo e para qualquer estado 4^+ de um mesmo núcleo. Para os multipolos transversos, vemos que $F_{E4}(q)$ e $F_{M5}(q)$ dependem de um parâmetro. Assim, os formatos dos fatores de forma $F_{0 \rightarrow 4+}^T(q)^2$ e $F_{0 \rightarrow 5+}^T(q)^2$, mostrados na Fig. 1, são idênticos e independentes da estrutura nuclear. A

dependência na estrutura nuclear reside em um fator multiplicativo, que depende apenas da corrente de magnetização.

Para os estados de paridade negativa, o fator de forma $F_{C5}(q)$ depende apenas de um parâmetro. Como consequência o formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 5}^L(q)^2$, mostrado na Fig. 1, é independente da estrutura nuclear e idêntico ao formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 5}^T(q)^2$. Para os multipolos transversos, o fator de forma $F_{M6}(q)$ depende apenas de um parâmetro. Como consequência, o formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 6}^T(q)$, mostrado na Fig. 1, é independente da estrutura nuclear. A dependência na estrutura nuclear reside em um fator multiplicativo, que depende apenas da corrente de magnetização.

6. Comparação com os dados experimentais no ^{24}Mg

No capítulo 5, deduzimos a expressão mais geral para os operadores multipolares da densidade de carga e da densidade de corrente, restritos à camada sd. Neste capítulo usaremos estas expressões para analisar os dados experimentais do espalhamento inelástico de elétrons pelo ^{24}Mg ^{10,11}). Nestas referências, foram medidos os fatores de forma longitudinal e transverso para os níveis a baixa energia no ^{24}Mg . Primeiramente, vamos fazer uma discussão teórica para fixar a notação e expor as idéias básicas da nossa análise, que é uma extensão da análise da ref. 12.

6.1. Fator de forma longitudinal

O fator de forma longitudinal, para a transição do estado inicial de momento angular J_i para um estado final de momento angular J_f é dado por

$$F^L(q)^2 = \sum_{J \geq 0} \left| F_{CJ}(q) \right|^2 ,$$

com o fator de forma de Coulomb igual à:

$$F_{CJ}(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{\langle J_f || \hat{\rho}_J(q) || J_i \rangle}{(2J_i + 1)^{1/2}} , \quad (6.1)$$

onde $\hat{\rho}_{JM}(q)$ é o multipolo da densidade de carga,

$$\hat{\rho}_{JM}(q) = \int j_J(qx) Y_{JM}(\Omega(x)) \hat{\rho}(x) d^3x .$$

Prosseguindo, introduzimos o operador $\hat{M}_{C;JM}(q)$ satisfazendo a relação¹³⁾,

$$\hat{\rho}_{JM}(q) = \frac{q^J}{(2J+1)!!} \hat{M}_{C;JM}(q) . \quad (6.2)$$

A vantagem de introduzir este operador é que, no limite quando q tende ao "photon-point", q_{ph} , onde $q_{ph} = (E_f - E_i)/\hbar c$, o elemento de matriz reduzido de $\hat{M}_{C;JM}(q)$ está relacionado com a probabilidade reduzida da transição eletromagnética $B(CJ; J_i \rightarrow J_f)$, conforme a equação

$$B(CJ; J_i \rightarrow J_f) = \lim_{q \rightarrow q_{ph}} \frac{e^2 |\langle f | \hat{M}_{C;J}(q) | i \rangle|^2}{2J_i + 1} . \quad (6.3)$$

No caso do ^{24}Mg , como o estado fundamental tem spin e paridade 0^+ , e considerando apenas estados de paridade positiva, o fator de forma longitudinal se reduz a

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^L(q)^2 = \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ | \hat{\rho}_J(q) | 0 \rangle|^2 , \quad (6.4)$$

onde n especifica os possíveis estados de paridade positiva e momento angular par, J . Este fator de forma pode ser escrito como,

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^L(q)^2 = f_N(q)^2 f_{CM}(q)^2 \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ | \hat{\rho}_J(q) | 0 \rangle|_{SM}^2 , \quad (6.5)$$

onde $f_N(q)$ é o fator de forma de um nucleon, que corrige os efeitos do tamanho finito do nucleon, $f_{CM}(q)$ é o fator de forma do centro de massa, que corrige os efeitos da violação da invariância translacional pelos estados do modelo de camadas e o último termo é o fator de forma do modelo de camadas. Na eq.(6.1), os estados e os operadores dependem de variáveis definidas no sistema intrínseco do núcleo. Em (6.5) os estados e operadores estão definidos em um sistema cuja origem coincide com a origem do potencial do oscilador harmônico, como implicitamente assumido nos capítulos anteriores. Note-se que em (6.5) estamos supondo que os estados do modelo de camadas não contêm estados espúrios do centro de massa, isto é, são expressos pelo produto de um estado intrínseco pelo estado fundamental da hamiltoniana do oscilador do centro de massa.

Dados experimentais dos fatores de forma longitudinal para transições aos níveis 2^+ , com energias de excitação iguais a 1.37 e 4.24 MeV, e aos níveis 4^+ , com energias de excitação 4.12 e 6.01 MeV, são apresentados nas referências 10 e 11.

De acordo com o capítulo 5, o elemento de matriz $\langle nJ || \hat{\rho}_J(q) || 0 \rangle_{SM}$ pode ser parametrizado como

$$\langle nJ || \hat{\rho}_J(q) || 0 \rangle_{SM} = e^{-b_0^2 q^2 / 4} \frac{(q b_0)^J}{(2J+1)!!} \sum_{K=0}^{(4-J)/2} (q b_0)^{2K} a_{C;J}^{(2K+J)}, \quad (6.6)$$

onde $a_{C;J}^{(2K+J)}$ é o elemento de matriz reduzido

$$a_{C;J}^{(2K+J)} = (2J+1)!! \langle nJ+ || \hat{\rho}_J^{(2K+J)} || 0^+ \rangle. \quad (6.7)$$

Este modo de escrever o fator de forma longitudinal nos permite fazer a seguinte identificação:

$$B(CJ; 0^+ \rightarrow J^+) = e^2 b_0^{2J} \left| a_{C;J}^{(J)} \right|^2 . \quad (6.8)$$

Se as fases dos estados nucleares são escolhidas de tal modo que eles se transformam pela ação do operador de inversão temporal em

$$\hat{\theta} |JM\rangle = (-)^{J+M} |J-M\rangle , \quad (6.9)$$

as propriedades de transformação de $\hat{\rho}_{LM}(q)$ por conjugação hermitiana e inversão temporal mostram que

$$\langle J_f || \hat{\rho}_L(q) || J_i \rangle^* = (-)^L \langle J_f || \hat{\rho}_L(q) || J_i \rangle .$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos tornar os coeficientes $a_{C;J}^{(J)}$ reais, considerando em (6.1), o elemento de matriz reduzido do operador $(-i)^L \hat{\rho}_{LM}(q)$.

Definindo a função

$$S_{C;J}(q) = f_N(q) f_{CM}(q) \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{(qb_0)^J}{(2J+1)!!} e^{-b_0^2 q^2/4} ,$$

vemos que, de acordo com o modelo de camadas, a razão $\left| F_{0^+ \rightarrow J^+}^L(q) \right| / S_{C;J}(q)$ é o módulo de um polinômio em $(qb_0)^2$, sendo o módulo de uma reta para as transições quadrupolares e o módulo de uma constante para as hexadecapolares,

$$\left| F_{0^+ \rightarrow 2^+}^L(q) \right| / S_{C;2}(q) = \left| a_{C;2}^{(2)} + a_{C;2}^{(4)} (qb_0)^2 \right| \quad (6.10a)$$

$$\left| F_{0^+ \rightarrow 4^+}^L(q) \right| / S_{C;4}(q) = \left| a_{C;4}^{(4)} \right| . \quad (6.10b)$$

6.2. Fator de forma transverso

O fator de forma transverso para a transição do estado inicial de momento angular J_i para um estado final de momento angular J_f é dado por

$$F_{J_i \rightarrow J_f}^T(q)^2 = \sum_{J \geq 1} \left| F_{EJ}(q) \right|^2 + \left| F_{MJ}(q) \right|^2$$

onde os $F_{EJ}(q)$ e $F_{MJ}(q)$ são os fatores de forma, transverso elétrico e transverso magnético, respectivamente:

$$F_{EJ}(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{\langle J_f \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| J_i \rangle}{(2J_i + 1)^{1/2}} \quad (6.11a)$$

$$F_{MJ}(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{\langle J_f \| \hat{j}_J^{(mag)}(q) \| J_i \rangle}{(2J_i + 1)^{1/2}}, \quad (6.11b)$$

dados em termos dos multipolos transverso elétrico e transverso magnético da corrente,

$$\hat{j}_{JM}^{(el)}(q) = \frac{1}{q} \int \nabla \times \underline{M}_{JJ;M}(q\underline{x}) \cdot \underline{j}(\underline{x}) d^3\underline{x}$$

$$\hat{j}_{JM}^{(mag)}(q) = \int \underline{M}_{JJ;M}(q\underline{x}) \cdot \underline{j}(\underline{x}) d^3\underline{x}.$$

A seguir, vamos considerar separadamente os fatores de forma transverso elétrico e transverso magnético.

6.2.1. Fator de forma transverso elétrico

Do mesmo modo que para os fatores de forma coulombianos, vamos introduzir os operadores $\hat{M}_{E;JM}(q)$, satisfazendo a relação¹³⁾

$$\hat{j}_{JM}^{(el)}(q) = \frac{q^J}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \hat{M}_{E;JM}(q) . \quad (6.12a)$$

No limite quando q tende ao "*photon point*", o elemento de matriz reduzido de $\hat{M}_{E;JM}(q)$ está relacionado com a probabilidade reduzida da transição eletromagnética $B(EJ; J_i \rightarrow J_f)$ conforme a equação

$$B(EJ; J_i \rightarrow J_f) = \lim_{q \rightarrow q_{ph}} \frac{e^2 | \langle f | \hat{M}_{E;J}(q) | i \rangle |^2}{2J_i + 1} . \quad (6.12b)$$

A equação da continuidade impõe que²⁾

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[F_{EJ}(q) + \frac{q_{ph}}{q} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} F_{CJ}(q) \right] = 0 , \quad (6.13)$$

o que implica

$$B(CJ; J_i \rightarrow J_f) = B(EJ; J_i \rightarrow J_f) . \quad (6.14)$$

No caso do ^{24}Mg , como o estado fundamental tem spin e paridade 0^+ , existem apenas os multipolos transversos elétricos pares, e o fator de forma transverso se reduz a

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^T(q)^2 = \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| 0^+ \rangle|^2, \quad J \text{ par} \quad (6.15)$$

onde n especifica os possíveis estados de paridade positiva e momento angular J . Do mesmo modo que no caso do fator de forma longitudinal, esse fator de forma pode ser escrito como

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^T(q)^2 = f_N(q)^2 f_{CM}(q)^2 \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| 0^+ \rangle_{SM}|^2, \quad J \text{ par} \quad (6.16)$$

De acordo com o capítulo 5, o elemento de matriz $\langle nJ \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| 0^+ \rangle_{SM}$ pode ser parametrizado de acordo com a expressão abaixo

$$\langle nJ \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| 0^+ \rangle_{SM} = e^{-b_0^2 q^2 / 4} \frac{(qb_0)^{J+1}}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \sum_{K=0}^{(2-J)/2} (qb_0)^{2K} a_{E;J}^{(2K+J+1)} \quad (6.17)$$

onde $a_{E;J}^{(2K+J+1)}$ é o elemento de matriz reduzido

$$a_{E;J}^{(2K+J+1)} = \frac{\hbar}{mcb_0} (2J+1)!! \left[\frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \langle nJ^+ \| \hat{j}_J^{(el)}(2K+J+1) \| 0^+ \rangle_{SM} \quad (6.18)$$

Como já mencionamos anteriormente, a expressão (6.17) viola o teorema de Siegert, eq.(6.13), de um modo qualitativo. Este defeito do multipolo transversal elétrico da corrente é, de um ponto de vista físico, extremamente grave pois implica que o comportamento do fator de forma transversal, para baixos momentos transferidos, está

totalmente errado. Para corrigir isto, vamos escrever, (ver apêndice A seção A.3),

$$\begin{aligned} \langle nJ \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| 0 \rangle_{SM} &= e^{-b_0^2 q^2 / 4} \frac{(q b_0)^{J-1}}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[a_{E;J}^{(J-1)} + \sum_{K=0}^{(2-J)/2} (q b_0)^{2K+2} a_{E;J}^{(2K+J+1)} \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde

$$a_{E;J}^{(J-1)} + a_{C;J}^{(J)} q_{ph} b_0 = 0, \quad (6.20)$$

se o teorema de Siegert, eq.(6.13), é satisfeito.

Expansões do tipo (6.19) podem ser deduzidas se usarmos expressões para o multipolo transversal elétrico, que incorporam os vínculos impostos pelo teorema de Siegert^{14,15)}(ver apêndice A, seção A.3).

A probabilidade reduzida da transição eletromagnética está relacionada com $a_{E;J}^{(J-1)}$ pela equação

$$B(EJ; J_i \rightarrow J_f) = e^2 b_0^{2J} (q_{ph} b_0)^{-2} \left| a_{E;J}^{(J-1)} \right|^2. \quad (6.21)$$

Se as fases dos estados nucleares são escolhidas de tal modo que eles se transformam, pela ação do operador de inversão temporal, como na eq.(6.9), as propriedades de $\hat{j}_J^{(el)}(q)$ por conjugação hermitiana e inversão temporal mostram que

$$\langle J_f \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| J_i \rangle^* = (-1)^J \langle J_f \| \hat{j}_J^{(el)}(q) \| J_i \rangle. \quad (6.22)$$

Assim, sem perda de generalidade, podemos tornar os coeficientes $a_{E;J}^{(2K+J-1)}$ reais, considerando em (6.22), o elemento de matriz reduzido do operador $(-i)^J \hat{j}_J^{(el)}(q)$.

Definindo a função

$$S_{E;J}(q) = f_N(q) f_{CM}(q) \frac{\sqrt{4\pi} (qb_0)^{J-1}}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} e^{-b_0^2 q^2 / 4} \quad (6.23)$$

vemos que, de acordo com o modelo de camadas, mais a imposição de que o teorema de Siegert seja satisfeito, a razão $\left| F_{0 \rightarrow J}^T(q) \right| / S_{E;J}(q)$, J par, é o módulo de um polinômio em $(qb_0)^2$, sendo o módulo de uma parábola, para as transições de quadrupolo elétrico e o módulo de uma reta, para as transições de hexadecapolo elétrico.

6.2.2. Fator de forma transverso magnético

Do mesmo modo que para os fatores de forma transversos elétricos, vamos introduzir os operadores $\hat{M}_{M;JM}(q)$ satisfazendo a relação¹³⁾,

$$\hat{j}_{JM}^{(mag)}(q) = \frac{q^J}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \hat{M}_{M;JM}(q) \quad (6.24)$$

No limite quando q tende ao "*photon-point*", o elemento de matriz reduzido de $\hat{M}_{M;JM}(q)$ está relacionado com a probabilidade reduzida da transição eletromagnética $B(MJ; J_i \rightarrow J_f)$, conforme a equação

$$B(MJ; J_i \rightarrow J_f) = \lim_{q \rightarrow q_{ph}} \frac{e^2 | \langle f | \hat{M}_{M;JM}(q) | i \rangle |^2}{2J_i + 1} \quad (6.25)$$

Como estamos considerando estados de paridade positiva, existem apenas os multipolos transversos magnéticos ímpares. Como o estado fundamental do ^{24}Mg tem spin e paridade 0^+ , o fator de forma transverso para os estados de paridade positiva e momento angular ímpar podem ser escritos como

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^T(q)^2 = \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ || \hat{j}_J^{(\text{mag})}(q) || 0 \rangle|^2, \quad J \text{ ímpar}.$$

Do mesmo modo que nos casos anteriores, este fator de forma é dado pela seguinte expressão:

$$F_{0^+ \rightarrow J^+}^T(q)^2 = f_N(q)^2 f_{CM}(q)^2 \frac{4\pi}{Z^2} |\langle nJ || \hat{j}_J^{(\text{mag})}(q) || 0 \rangle_{SM}^2, \quad J \text{ ímpar}.$$

De acordo com o capítulo 5, o elemento de matriz reduzido $\langle nJ || \hat{j}_J^{(\text{mag})}(q) || 0 \rangle_{SM}$, pode ser parametrizado como:

$$\langle nJ || \hat{j}_J^{(\text{mag})}(q) || 0 \rangle = e^{-b_0^2 q^2 / 4} \frac{(qb_0)^J}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \sum_{K=0}^{(5-J)/2} (qb_0)^{2K} a_{M;J}^{(2K+J)} \quad (6.26)$$

com

$$a_{M;J}^{(2K+J)} = \frac{\hbar}{mcb_0} (2J+1)!! \left[\frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \langle nJ || \hat{j}_J^{(\text{mag})}(2K+J) || 0 \rangle. \quad (6.27)$$

Como nos casos anteriores, os coeficientes $a_{M;J}^{(2K+J)}$ podem ser escolhidos reais. Esse modo de escrever o fator de forma transverso magnético nos permite identificar,

$$B(MJ; 0^+ \rightarrow J^+) = e^2 b_0^{2J} \left| a_{M,J}^{(J)} \right|^2 .$$

Definindo a função

$$S_{M,J}(q) = f_N(q) f_{CM}(q) \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{(qb_0)^J}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} e^{-b_0^2 q^2 / 4} ,$$

vemos que, de acordo com o modelo de camadas, $\left| F_{0^+ \rightarrow J^+}^T(q) \right| / S_{M,J}(q)$, J ímpar, é o módulo de um polinômio em $(qb_0)^2$, sendo o módulo de uma parábola para as transições M1, módulo de uma reta para as transições M3, e uma constante para as transições M5.

6.3. Comparação com os dados experimentais no ^{24}Mg

Na comparação com os dados experimentais, fixamos o valor de b_0 impondo que o raio médio da distribuição de carga do estado fundamental do ^{24}Mg seja reproduzido. Para o fator de forma do nucleon, $f_N(q)$, consideramos uma parametrização gaussiana de raio médio igual a 0.8 fm, como na ref. 12. Essa parametrização simples para o fator de forma do nucleon, pode ser responsável por pequenas discrepâncias na comparação com os dados experimentais. Discrepâncias acentuadas são indicações de efeitos de configurações não incluídas no modelo de camadas do oscilador harmônico.

6.3.1. Fator de forma longitudinal

Na ref. 10, foram medidos o fator de forma longitudinal para o segundo estado 2^+ a uma energia de excitação de 4.24 MeV, e para o primeiro estado 4^+ , a uma energia de

excitação de 4.12 MeV. Na ref. 11 são apresentados dados para o fator de forma longitudinal do segundo estado 4^+ a uma energia de excitação de 6.01 MeV.

De acordo com o modelo de camadas, o gráfico de $\left| F_{0^+ \rightarrow 2^+}^L(q) \right| / S_{C;2}(q)$, em função de $(qb_0)^2$, é o módulo de uma reta. Na fig. 2 apresentamos os dados experimentais e o módulo da reta determinada pelo método do mínimo quadrado. Do ajuste extraímos que $B(C2; 0^+ \rightarrow 2^+) = (21.5 \pm 0.6) \text{ e}^2\text{fm}^4$, o que é compatível com o valor experimental¹¹⁾ $B(C2; 0^+ \rightarrow 2^+) = (22 \pm 2) \text{ e}^2\text{fm}^4$.

A análise da figura 1 mostra que, em geral, o ajuste é bom, se deteriorando um pouco para momentos transferidos maiores do que o momento do mínimo de difração, $q_{\min} = 1.84 \text{ fm}^{-1}$. Assim, podemos concluir que o fator de forma $F_{0^+ \rightarrow 2^+}^L(q)$ para $q \leq 2 \text{ fm}^{-1}$, é bem descrito pelo modelo de camadas do oscilador harmônico. Entretanto, sabe-se que é necessário renormalizar o fator de forma calculado pelo modelo de camadas do oscilador para reproduzirmos os dados experimentais¹²⁾. Isto mostra que o efeito das configurações fora do espaço modelo, é o de apenas renormalizar os coeficientes do polinômio. O fator de forma continua sendo bem descrito apenas pelos dois primeiros termos da expansão bosônica.

Nas figuras 3 e 4 são mostrados os dados experimentais de $\left| F_{0^+ \rightarrow 4^+}^L(q) \right| / S_{C;4}(q)$ em função de $(qb_0)^2$, para os dois primeiros estados 4^+ . De acordo com o modelo de camadas essa razão é uma reta, em desacordo com os dados. Essa discordância é mais acentuada para o estado 4^+ com $E_{\text{ex}} = 4.12 \text{ MeV}$, de transição mais fraca, quando comparado com o estado 4^+ a uma energia de excitação de 6.01 MeV. Para corrigir esta discrepância, o passo mais simples que podemos tomar é incluir, na descrição dos estados excitados, configurações com energia de excitação de oscilador igual à $2\hbar\omega$. Isto introduz um termo adicional na expansão bosônica de $\hat{p}_{4M}(q)$, que agora é o módulo de uma reta como função de $(qb_0)^2$. A curva extraída do ajuste é apresentada nas figuras 3 e 4. O exame do gráfico mostra que o ajuste é significativo apenas para o estado de 6.01 MeV (de transição forte). Do ajuste dos dados experimentais extraímos que para o estado a

6.01 MeV $B(C4; 0^+ \rightarrow 4^+) = (3.7 \pm 0.1) \times 10^4 \text{ e}^2\text{fm}^8$, com o mínimo de difração a um momento transferido igual a 3.4 fm^{-1} . Para o estado a 4.12 MeV, extraímos que $B(C4; 0^+ \rightarrow 4^+) = (3.9 \pm 0.1) \times 10^3 \text{ e}^2\text{fm}^8$, com o mínimo de difração a um momento transferido igual a 1.96 fm^{-1} . Como comparação, a análise da referência 10 obtém para os estados a 6.01 e 4.12 MeV, $B(C4; 0^+ \rightarrow 4^+)$ respectivamente iguais a $(4.3 \pm 0.6) \times 10^4 \text{ e}^2\text{fm}^8$ e $(2.0 \pm 0.3) \times 10^3 \text{ e}^2\text{fm}^8$.

Concluindo, observamos que, diferentemente de $F_{0^+ \rightarrow 2^+}^L(q)^2$, o modelo de camadas do oscilador é incapaz de descrever não só a grandeza como também o formato dos fatores de forma $F_{0^+ \rightarrow 4^+}^L(q)^2$, dos dois primeiros estados excitados com $J^\pi = 4^+$ no ^{24}Mg .

A inclusão de configurações com energia de excitação de oscilador igual a $2\hbar\omega$, na descrição dos estados excitados, melhora o ajuste dos dados experimentais. Entretanto, para o estado de transição mais fraca, a análise sugere que essa extensão não é suficiente, sendo necessário incluir configurações com energia de excitação igual a $4\hbar\omega$ e configurações excitadas na descrição do estado fundamental.

6.3.2. Fator de forma transversal elétrico

Na referência 2 foram medidos os fatores de forma transversal elétrico para os níveis 2^+ , a uma energia de excitação de 1.37 MeV e 4^+ , a uma energia de excitação de 6.01 MeV.

Impondo o teorema de Siegert, vemos que $|F_{0^+ \rightarrow 2^+}^T(q)| / S_{E;2}(q)$ é o módulo de uma parábola e $|F_{0^+ \rightarrow 4^+}^T(q)| / S_{E;4}(q)$ é o módulo de uma reta.

Para o estado $J^\pi = 4^+$ fizemos um ajuste com o parâmetro $a_{E;4}^{(3)}$ livre, para verificarmos até que ponto os dados experimentais refletem a equação da continuidade, a baixos momentos transferidos, que impõe $B(E4; 0^+ \rightarrow 4^+) = B(C4; 0^+ \rightarrow 4^+)$. Do ajuste, extraímos que $B(E4; 0^+ \rightarrow 4^+) = (3.9 \pm 0.7) \times 10^4 \text{ e}^2\text{fm}^8$, que deve ser comparado com

$(3.7 \pm 0.1) \times 10^4 \text{ e}^2\text{fm}^8$ extraído da análise do fator de forma longitudinal. A análise do gráfico da fig. 6 mostra que o formato do fator de forma $F_{0^+ \rightarrow 4^+}^T(q)^2$ é compatível, dentro das incertezas experimentais, com o formato do modelo de camadas. Para o estado com $J^\pi = 2^+$, o ajuste não reflete o comportamento para baixos momentos transferidos. O que fizemos, nesse caso, foi impor o teorema de Siegert para obtermos a curva da fig. 5, que difere, consideravelmente, da curva experimental.

6.3.3. Fator de forma transverso magnético

Na referência 11, foi medido o fator de forma transverso magnético para o estado 3^+ a uma energia de excitação de 5.24 MeV. De acordo com o modelo de camadas, o gráfico de $\left| F_{0^+ \rightarrow 3^+}^T(q) \right| / S_{M;3}(q)$ é uma linha reta, compatível com os dados experimentais, como mostrado na fig. 7. Do ajuste dos dados extraímos $B(M3; 0^+ \rightarrow 3^+) = (14 \pm 3) \mu_N^2 \text{ fm}^4$.

7. Conclusões

Neste trabalho, deduzimos uma expansão formalmente exata para os multipolos da densidade de carga e da densidade de corrente. Esta expansão é dada por uma gaussiana multiplicada por uma série no momento transferido q , onde os coeficientes das potências de q são específicos operadores de um corpo. Por sua vez, os operadores de um corpo são polinômios homogêneos dos operadores de criação e aniquilação de quanta do oscilador, ordenados normalmente. Desse modo, separamos a dependência no momento transferido, dada pelas funções de q determinadas a priori, da dependência na estrutura nuclear, dada pelos elementos de matriz dos operadores de um corpo. No caso especial do modelo de camadas do oscilador harmônico, a série termina. Para os estados excitados de paridade idêntica à do estado fundamental, somente contribuem os termos que conservam o número de bosons e, para os estados de paridade oposta à do estado fundamental, apenas os termos que adicionam um quanta do oscilador. Uma consequência desta propriedade é que, de acordo com o modelo de camadas do oscilador, existem fatores de forma cujo formato independe da estrutura nuclear, ou seja, é o mesmo para qualquer núcleo e para quaisquer estados (de mesmo momento angular e paridade) de um mesmo núcleo.

Para núcleos na N -ésima camada do oscilador, vimos que os formatos dos fatores de forma $F_{0 \rightarrow N}^L(q)^2$, $F_{0 \rightarrow (2N+1)}^T(q)^2$, $F_{0 \rightarrow (2N+1)}^L(q)^2$ e $F_{0 \rightarrow (2N+2)}^T(q)^2$, são independentes da estrutura nuclear. Além disso, a magnitude dos fatores de forma transversos depende apenas da corrente de magnetização.

Outra propriedade apresentada no nosso trabalho é o caráter solenoidal (divergência nula) da corrente do modelo de camadas, para estados de paridade idêntica à do estado fundamental. Isto viola a equação da continuidade e como consequência, o teorema de Siegert é violado de um modo qualitativo. Elaborando esta nossa afirmação, vimos que o termo dominante do fator de forma transversal elétrico, para pequeno momento transferido, é q^{J+1} , em desacordo com o teorema de Siegert, que impõe que o termo dominante seja

q^{J-1} . 2) Assim, vemos que o fator de forma transverso elétrico, calculado pelo modelo de camadas do oscilador, usando as eqs. 2.15 e 2.22, apresenta um comportamento errado para pequenos momentos transferidos. Para nós, isto indica a necessidade de usarmos expressões para os multipolos transversos elétricos que incorporam os vínculos impostos pelo teorema de Siegert^{14,15)}. Estas propriedades do operador corrente do modelo de camadas do oscilador resultam trivialmente da equação da continuidade, satisfeita pela soma da corrente de convecção e da corrente de magnetização⁵⁾

$$\frac{i}{\hbar c} [\hat{T}, \hat{\rho}(\underline{x})] + \nabla \cdot (\hat{j}_c(\underline{x}) + \hat{j}_m(\underline{x})) = 0 \quad .$$

No capítulo 6, comparamos as previsões do modelo de camadas do oscilador e os dados experimentais, para os fatores de forma longitudinal e transverso no ^{24}Mg . Para o estado 2^+ , com $E_{\text{ex}} = 4.24 \text{ MeV}$, vimos que o formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 2^+}^L(q)^2$ está de acordo com a previsão do modelo de camadas, o mesmo não ocorrendo com a magnitude¹²⁾. Assim vemos que o truncamento da expansão bosônica nos dois primeiros termos continua válido, mas a magnitude dos coeficientes da expansão depende fortemente de configurações fora do espaço do modelo de camadas do oscilador. Os casos em que uma renormalização dos fatores de forma, calculados pelo modelo de camadas, é suficiente para descrever os dados experimentais são um exemplo da possibilidade de que a expansão bosônica tenha um caráter mais geral que a restrição ao espaço do modelo de camadas do oscilador.

Para os estados 4^+ , não só a magnitude mas também o formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 4^+}^L(q)^2$ estão em desacordo com as previsões do modelo de camadas. A inclusão de mais um termo na expansão bosônica melhora o ajuste dos dados experimentais para o estado 4^+ com $E_{\text{ex}} = 6.01 \text{ MeV}$, de transição mais forte, mas não para o estado com $E_{\text{ex}} = 4.12 \text{ MeV}$, de transição mais fraca.

Esta nossa análise mostra o comportamento diferente dos graus de liberdade quadrupolar e hexadecapolar no ^{24}Mg , nos fatores de forma longitudinais.

Os fatores de forma transversos, analisados no capítulo 6, foram os fatores de forma transversos elétricos $F_{0 \rightarrow 2+}^T(q)^2$ e $F_{0 \rightarrow 4+}^T(q)^2$, para os níveis 2^+ com $E_{\text{ex}} = 1.37 \text{ MeV}$ e 4^+ com $E_{\text{ex}} = 6.01 \text{ MeV}$, e o fator de forma transverso magnético $F_{0 \rightarrow 3+}^T(q)^2$, para o nível 3^+ com $E_{\text{ex}} = 5.24 \text{ MeV}$.

Para o nível 4^+ vimos que o ajuste dos dados é compatível com o teorema de Siegert e com o truncamento nos dois primeiros termos da expansão bosônica para $F_{E,4}(q)$. Por outro lado, nenhuma destas duas afirmações estão corretas para o nível 2^+ com $E_{\text{ex}} = 1.37 \text{ MeV}$. Para o nível 3^+ , com $E_{\text{ex}} = 5.24 \text{ MeV}$, o formato do fator de forma $F_{0 \rightarrow 3+}^T(q)^2$ é compatível com a previsão do modelo de camadas.

Em resumo, acreditamos que a expansão bosônica dos operadores multipolares leva a uma parametrização econômica e de imediata interpretação física dos fatores de forma. Sua utilização é claramente factível na análise dos dados experimentais em núcleos nas camadas $1p$, $2s-1d$ e $2p-1f$, para valores moderados de q (veja referência 7 e outras referências mencionadas neste trabalho).

O ajuste dos dados experimentais nos permite extrair os coeficientes da expansão bosônica que, como mostrado em nosso trabalho, estão relacionados com elementos de matriz reduzidos de específicos operadores de um corpo. Uma comparação com os valores calculados pelo modelo de camadas, nos permite investigar fenômenos de aumento e supressão dos operadores multipolares e suas inter-relações, como função de q ¹⁶⁾.

Outra perspectiva interessante de uso das expansões bosônicas é a de utilizarmos os elementos de matriz dos operadores multipolares, extraídos da análise do espalhamento de elétrons, na descrição de outros processos, como por exemplo, a foto-produção de pions¹⁷⁾.

Finalmente, gostaríamos de enfatizar a possibilidade de a expansão bosônica ter um caráter mais geral que a restrição ao modelo de camadas do oscilador, como exemplificado pela análise do fator de forma longitudinal do estado 2^+ com $E_{\text{ex}} = 4.24 \text{ MeV}$.

Apêndice A

No nosso trabalho, determinamos uma expansão bosônica para a transformada de Fourier dos operadores densidade de carga, $\hat{\rho}(\underline{x})$, e densidade de corrente, $\hat{\mathbf{j}}(\underline{x})$.

Em muitos casos, é igualmente importante determinar uma expansão bosônica para $\hat{\rho}(\underline{x})$ e $\hat{\mathbf{j}}(\underline{x})$, o que faremos neste apêndice.

A.1. Expansão bosônica para $\hat{\rho}(\underline{x})$

A transformada de Fourier do operador densidade de carga nuclear, $\hat{\rho}(\underline{x})$, pode ser expandida como (eq. 2.3):

$$\hat{\rho}(\underline{q}) = \sum_{\underline{LM}} 4\pi(-i)^L Y_{\underline{LM}}^*(\Omega(\underline{q})) \hat{\rho}_{\underline{LM}}(\underline{q}) \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{\rho}_{\underline{LM}}(\underline{q})$ é o operador multipolar da densidade de carga, eq.(2.4),

$$\hat{\rho}_{\underline{LM}}(\underline{q}) = \int \mathbf{j}_L(\underline{q}\underline{x}) Y_{\underline{LM}}(\Omega(\underline{x})) \hat{\rho}(\underline{x}) d^3\underline{x} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Fazendo a transformada de Fourier inversa, e usando a expressão (A.1) para $\hat{\rho}(\underline{q})$, determinamos a expansão multipolar de $\hat{\rho}(\underline{x})$ ¹⁸⁾:

$$\hat{\rho}(\underline{x}) = \sum_{\underline{LM}} Y_{\underline{LM}}^*(\Omega(\underline{x})) \hat{\rho}_{\underline{LM}}(\underline{x}) \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\hat{\rho}_{LM}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} j_L(qx) \hat{\rho}_{LM}(q) q^2 dq \quad . \quad (A.4)$$

Dada a expressão (2.1) para o operador densidade de carga nuclear , $\hat{\rho}(x)$, deduzimos no capítulo 3 a expansão bosônica para $\hat{\rho}_{LM}(q)$,

$$\hat{\rho}_{LM}(q) = e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{2K+L} \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} \quad , \quad (A.5)$$

onde $\hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)}$ é dado pelas eqs.(3.15) e (3.16). Substituindo na eq.(A.4) $\hat{\rho}_{LM}(q)$ pela sua expansão bosônica e usando que (eqs. 6.631, 9.212 1 e 8.972 1 da referência 9):

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2K+L+2} j_L(\beta x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(K+1)}{2^{L+3/2}} e^{-\beta^2/4} \beta^L L_K^{L+1/2}(\beta^2/4) \quad , \quad (A.6)$$

obtemos:

$$\hat{\rho}_{LM}(x) = \frac{1}{b_0^3} e^{-x^2/b_0^2} \sum_{K=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{2K+L+3/2} K! \left[\frac{x}{b_0} \right]^L L_K^{L+1/2} \left[\frac{x^2}{b_0^2} \right] \hat{\rho}_{LM}^{(2K+L)} \quad . \quad (A.7)$$

A.2. Expansão bosônica para $\hat{j}(x)$

A transformada de Fourier do operador densidade de corrente nuclear, $\hat{j}(\underline{x})$, pode ser expandida como (eq.(2.9)):

$$\hat{j}(\underline{q}) = \sum_{JLM} 4\pi(-i)^L Y_{JL;M}^*(\Omega(\underline{q})) \hat{j}_{JL;M}(\underline{q}) \quad , \quad (\text{A.8})$$

onde $\hat{j}_{JL;M}(\underline{q})$ é o operador multipolar da densidade de corrente, eq.(2.10),

$$\hat{j}_{JL;M}(\underline{q}) = \int d^3x j_L(\underline{qx}) Y_{JL;M}(\Omega(\underline{x})) \cdot \hat{j}(\underline{x}) \quad . \quad (\text{A.9})$$

Fazendo a transformada de Fourier inversa de $\hat{j}(\underline{q})$, e usando a expressão (A.8), determinamos a expansão multipolar de $\hat{j}(\underline{x})$ ¹⁸⁾:

$$\hat{j}(\underline{x}) = \sum_{JLM} Y_{JL;M}^*(\Omega(\underline{x})) \hat{j}_{JL;M}(\underline{x}) \quad , \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\hat{j}_{JL;M}(\underline{x}) = \frac{2}{\pi} \int j_L(\underline{qx}) \hat{j}_{JL;M}(\underline{q}) q^2 dq \quad . \quad (\text{A.11})$$

Das equações (2.11) e da expansão bosônica para os multipolos longitudinal, transversal elétrico e transversal magnético de $\hat{j}(\underline{q})$, obtemos imediatamente:

$$\hat{j}_{JL;M}(\underline{q}) = \frac{\hbar}{mcb_0} e^{-b_0^2 q^2/4} \sum_{K=0}^{\infty} (qb_0)^{2K+L} \hat{j}_{JL;M}^{(2K+L)} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Não vamos escrever aqui a expressão para $\hat{j}_{JL;M}^{(2K+L)}$, apesar dela poder ser deduzida diretamente das equações do capítulo 2.

Usando a eq.(A.12) na eq.(A.11) e exprimindo a integral usando a eq.(A.6) temos:

$$\hat{j}_{JL;M}(x) = \frac{\hbar}{mc b_0} \frac{1}{b_0^3} e^{-x^2/b_0^2} \sum_{K=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{2K+L+3/2} K! \left[\frac{x}{b_0} \right]^L L_K^{L+1/2} \left[\frac{x^2}{b_0^2} \right] \hat{j}_{JL;M}^{(2K+L)} . \quad (A.13)$$

A.3. O multipolo transversal elétrico e o teorema de Siegert

Considerações gerais mostram que a equação da continuidade

$$\frac{i}{\hbar c} [\hat{H}, \hat{\rho}(x)] + \nabla \cdot \hat{j}(x) = 0 ,$$

impõe que o comportamento para $q \rightarrow 0$ do fator de forma transversal elétrico, está relacionado com o do fator de forma de Coulomb, pela equação²⁾,

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left[F_{EJ}(q) + \frac{q_{ph}}{q} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} F_{CJ}(q) \right] = 0 , \quad (A.14)$$

onde q_{ph} é o momento transferido para um foton,

$$q_{ph} = \frac{(E_f - E_i)}{\hbar c} .$$

Esta imposição da equação da continuidade é denominada de teorema de Siegert¹⁵⁾.

Como vimos anteriormente, o teorema de Siegert, eq.(A.14), é violado de um modo qualitativo, pois a soma da corrente de convecção mais a corrente de magnetização satisfaz a eq. de continuidade para nucleons livres, e o operador corrente do modelo de camadas,

para estados de paridade idêntica à do estado fundamental, é solenoidal. Em outras palavras, o comportamento para $q \rightarrow 0$ de $F_{EJ}(q)$ é qualitativamente errado. Um modo simples de resolver este problema, é usar expressões para o fator de forma transverso elétrico que satisfazem, por construção, o teorema de Siegert^{14,15)}.

Para isto, usamos a equação da continuidade para escrevermos o multipolo transverso elétrico como:

$$\hat{j}_{JM}^{(el)}(q) = - \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \frac{1}{\hbar c q} [\hat{H}, \hat{\rho}_{JM}(q)] - i \left[\frac{2J+1}{J} \right]^{1/2} \hat{j}_{JJ+1;M}(q) \quad .$$

É fácil mostrar que esta expressão para o multipolo transverso elétrico, satisfaz automaticamente o teorema de Siegert¹⁵⁾.

A expressão (6.19) utilizada na análise dos dados experimentais, para os fatores de forma transversos elétricos no ^{24}Mg , decorre da expansão bosônica deste operador.

Referências

- 1— T. de Forest Jr. e J.D. Walecka, *Advances in Physics* **15** (1966) 1.
- 2— T.W. Donnelly e J.D. Walecka, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25** (1975) 329.
- 3— T.W. Donnelly e W.C. Haxton, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **23** (1979) 104.
- 4— M.G. Vassanji e D.J. Rowe, *Nucl. Phys.* **A466** (1987) 227.
- 5— E.J.V. de Passos, D.J. Rowe e M.G. Vassanji, *Nucl. Phys.* **A510** (1990) 381.
- 6— E.J.V. de Passos, trabalho a ser publicado.
- 7— D.M. Manley et al., *Phys. Rev.* **C36** (1987) 1700.
- 8— E. Lifchitz e L. Pitayevski, *Theorie Quantique Relativiste I* (Moscow, Mir, 1972) pag. 35.
- 9— I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, 1980).
- 10— H. Zarek et al., *Phys. Letters* **80B** (1978) 26.
- 11— A. Hotta et al., *Phys. Rev.* **C36** (1987) 2212.
- 12— B.A. Brown, R. Radhi e B.H. Wildenthal, *Physics Reports* **101** (1983) 313.
- 13— R.S. Willey, *Nucl. Phys.* **40** (1963) 529.
- 14— J. Heisenberg, *Advances in Nuclear Physics* **12** (1981) 61.
- 15— J.L. Friar e W.C. Haxton, *Phys. Rev.* **C31** (1985) 2027.
- 16— T.W. Donnelly e I. Sick, *Reviews of Modern Phys.* **56** (1984) 461.
- 17— L. Tiator, C. Bennhold e R. Neuhausen, *Nucl. Phys.* **A501** (1989) 751.
- 18— H. Uberall, *"Electron Scattering from Complex Nuclei"* (Academic Press, 1971).

Fig. 1 — As curvas são formatos de fatores de forma na camada sd. A curva cheia, é o fator de forma $F_{0 \rightarrow 4+}^L(q)^2$ em função de $(qb_0)^2$. A curva pontilhada, são os fatores de forma $F_{0 \rightarrow 5+}^T(q)$ e $F_{0 \rightarrow 5-}^L(q)$, que têm o mesmo formato. A curva tracejada, é o fator de forma $F_{0 \rightarrow 6-}^L(q)$. O gráfico é a razão do fator de forma e o seu valor máximo.

Fig. 2 — Gráfico da razão $|F_{0 \rightarrow 2^+}^L(q)|/S_{C;2}(q)$, em função de q^2 , para o estado 2^+ de $E_{\text{ex}} = 4.24$ MeV. Os dados experimentais são da referência 10. A curva cheia é a previsão do modelo de camadas para χ^2 mínimo. O valor de b_0 é 1.813 fm e $\chi^2/n = 3.8$.

Fig. 3 – Gráfico da razão $|F_{0 \rightarrow 4^+}^L(q)|/S_{C;4}(q)$, em função de q^2 , para o estado 4^+ de $E_{\text{ex}} = 4.12$ MeV. Os dados experimentais são da referência 10 e $\chi^2/n = 42.1$. Veja texto para maiores detalhes.

Fig. 4 — Gráfico da razão $|F_{0 \rightarrow 4}^L(q)|/S_{C;4}(q)$, em função de q^2 , para o estado 2^+ de $E_{\text{ex}} = 6.01$ MeV. Os dados experimentais são da referência 11 e $\chi^2/n = 5.4$. Veja texto para maiores detalhes.

Fig. 5 — Gráfico da razão $|F_{0^+ \rightarrow 2^+}^T(q)|/S_{E,2}(q)$, em função de q^2 , para o estado 2^+ de $E_{\text{ex}} = 1.37$ MeV. Os dados experimentais são da referência 11 e $\chi^2/n = 7.9$. No ajuste, impusemos a validade do teorema de Siegert, com $B(C2;0^+ \rightarrow 2^+) = 428 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ ¹¹⁾. Veja texto para maiores detalhes.

Fig. 6 — Gráfico da razão $|F_{0^+ \rightarrow 4^+}^T(q)|/S_{E;4}(q)$, em função de q^2 , para o estado 4^+ de $E_{\text{ex}} = 6.01 \text{ MeV}$. Os dados experimentais são da referência 11 e $\chi^2/n = 1.4$. Veja texto para maiores detalhes.

Fig. 7 — Gráfico da razão $|F_{0 \rightarrow 3^+}^T(q)|/S_{M;3}(q)$, em função de q^2 , para o estado 3^+ de $E_{\text{ex}} = 5.24$ MeV. Os dados experimentais são da referência 11 e $\chi^2/n = 2.3$. Veja texto para maiores detalhes.