

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

N.T. 96

SBI-IFUSP



305M810T0096

LAGRANGEANAS EFETIVAS,  
NO SISTEMA PION-NUCLEON

TESE DE LIVRE-DOCÊNCIA  
APRESENTADA Á CADEIRA DE  
MÉCANICA QUÂNTICA E  
MÉCANICA ESTATÍSTICA DA  
FACULDADE DE FILOSOFIA,  
CIÊNCIAS E LETRAS DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ROLAND KÖBERLE

SÃO PAULO

1969



## AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Prof. J. Tiouno a hospitalidade e à ele dispensada no Departamento de Física da F.P.C.D. - U.S.P., à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela ajuda financeira durante a execução do presente trabalho e ao Prof. J. A. Siqueira pelas discussões estimulantes, que muito ajudaram a esclarecer pontos críticos.

Os cálculos numéricos foram feitos num computador IBM/360 do Setor de Matemática Aplicada - U.S.P. e entendo meus agradecimentos aos membros daquêle setor.

## Í N D I C E

SUMÁRIO .....	1
CAPÍTULO I : Introdução .....	1
CAPÍTULO II : Princípios a serem satisfeitos ....	2
CAPÍTULO III : Construção da Legrangeana .....	10
CAPÍTULO IV : Aplicação ao conjunto $A, \varphi, \pi, N$ ....	20
IV-A : Sistema $A, \varphi - \pi$ .....	20
IV-B : Sistema $\pi - N$ .....	26
IV-C : Sistema $\pi - \pi$ .....	30
CAPÍTULO V : Produção de dois pions em colisões $NN$ .....	33
CAPÍTULO VI : Comparação com a experiência .....	41
BIBLIOGRAFIA .....	44

## S U M Á R I O

Por meio de uma lagrangeana efetiva, construída para que incorpore álgebra decorrentes, dominação por mésons vectoriais e CAPC, discutimos as propriedades dos sistemas  $A - \rho - \pi$ ,  $\pi - N$  e  $\pi - \pi$  a baixas energias. Em particular calculamos o elemento de matriz  $S$  para a colisão  $\pi N \rightarrow 2\pi N$ , já que este é o único processo em que existem dados experimentais com suficiente estatística, para que se possa determinar as propriedades da interação  $\pi - \pi$  próximas ao limitar. Dentro deste esquema os dados experimentais parecem favorecer os seguintes comprimentos de encaimento  $\pi - \pi$ :

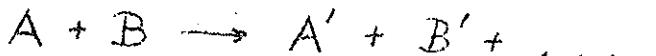
$$a_0 = 0,3 \quad \mu_{\pi}^{-1}$$

$$a_2 = -0,09 \quad \mu_{\pi}^{-1}$$

CAPÍTULO I  
INTRODUÇÃO

- 1 -

Qualquer arcoabógo teórico necessita de dados experimentais como fonte de informação. No caso da teoria das partículas elementares, o que se faz na maioria é uma experiência de espalhamento, i.e.



A incidindo no alvo B produz as partículas  $A'$ ,  $B'$  etc. A interação de A com B se dá numa pequena região do espaço-tempo, cujas propriedades ignoramos em grande parte. O fato é que desconhecemos a dinâmica destas partículas. Não dispomos de uma equação de Schrödinger como no caso não-relativista.

Têm-se cristalizado com tudo certos princípios, cuja validade parece bem estabelecida, pelo menos a baixas energias. O nosso objetivo é dar uma receita para o cálculo de elementos de matriz  $S$ , que automaticamente garanta, que os tais princípios sejam satisfeitos. Usaremos a linguagem Lagrangeana para obter esse objetivo. Esta Lagrangeana será quantizada canonicamente e a matriz  $S$  será calculada na aproximação de Born, já que a teoria não é renormalizável no sentido usual. Espera-se contudo que a aproximação de Born desta Lagrangeana "efetiva" já contenha efeitos que seriam de ordem mais alta em termos de uma descrição mais fundamental. O meson  $\phi$  por exemplo é introduzido fenomenologicamente e não como uma resonância de dois mesons . . .

No Capítulo II discutiremos os princípios, que queremos incorporar à nossa teoria. No Capítulo III daremos o método para a construção de uma Lagrangeana efetiva, que nos Capítulos IV e V será aplicado aos sistemas  $A - \phi - \pi$ ,  $\pi - N$ ,  $\pi - \pi$  e  $2\pi - N$ . A reação  $\pi N \rightarrow 2\pi N$  será comparada com a experiência no Capítulo VI e no Capítulo VII apresentaremos nossas conclusões.

CAPÍTULO II  
PRINCÍPIOS A SEREM SATISFEITOS

Como foi dito na Introdução na física das partículas elementares não existe um esquema dinâmico, que tenha encontrado sucesso. É igualmente desconhecido quais seriam os elementos fundamentais numa nova teoria. Nesta situação é prudente escolher como variáveis básicas grandezas que sejam diretamente mensuráveis.

Sabemos que muito de nosso conhecimento atual das interações fracas e eletromagnéticas provém da observação de elementos de matriz de operadores tipo corrente. Em particular temos as correntes leptônicas

$$j_\mu^{\gamma} \rightarrow j_\mu^{fr} \quad (2.1)$$

e as correntes hadrônicas

$$(J_\mu^{\gamma})_{I=0,1}, (V_\mu^{fr})_{S=0,1}, (A_\mu^{fr})_{S=0,1} \quad (2.2)$$

onde " $\gamma$ " quer dizer eletrônico e " $fr$ " fraco. "I" indica spin isotópico e "S" estranheza.

Os elementos de matriz destes operadores resumem os nossos conhecimentos experimentais de processos eletromagnéticos e processos fracos leptônicos. Se a interação não-leptônica for do tipo (corrente  $\times$  corrente) o mesmo valerá para processos fracos não-leptônicos.

Estas correntes possuem a propriedade notável de serem mais simétricas do que o sistema físico que descrevem. Apesar de que a massa do muon ( $\mu$ ) seja cem vezes maior do que a do elétron ( $e$ ), as correntes  $j_\mu^{\gamma}$  e  $j_\mu^{fr}$  são simétricas pela troca  $e \leftrightarrow \mu$ . Se definirmos o operador de troca  $Tr(t)$

por

$$Tr(t)|e\rangle = |\mu\rangle \quad (2.3)$$

$$Tr(t)|\mu\rangle = |e\rangle$$

sabemos que

$$\frac{d}{dt} Tr(t) \neq 0 \quad (2.4)$$

apesar disto os comutadores para tempos iguais satisfazem

$$[Tr(t), j_r^s(x, t)] = [Tr(t), j_\mu^r(x, t)] = 0. \quad (2.5)$$

Torna-se então natural investigar se existem simetrias satisfeitas por estas correntes, mesmo que não haja nenhum vestígio no espectro experimental de massa. Históricamente esta formulação se originou com a descoberta da não-conservação de paridade durante o ano de 1956/1957 e com a elucidação da estrutura V - A das interações fracas<sup>1)</sup>. Foi com este intuito que Gell-Mann<sup>2)</sup> postulou a existência de correntes hadrônicas (2.2), satisfazendo as seguintes relações de comutação para tempos iguais

$$[U_4^a(x, t), U_4^b(y, t)] = i \epsilon_{abc} U_4^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (2.6a)$$

$$[A_4^a(x, t), U_4^b(y, t)] = i \epsilon_{abc} A_4^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (2.6b)$$

$$[A_4^a(x, t), A_4^b(y, t)] = i \epsilon_{abc} A_4^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (2.6c)$$

onde a, b, c = 1, 2, 3, são índices da simetria interna SU(2), i.e. supõe-se que a corrente eletromagnética neutra e as correntes fracas carregadas se transformam como um triploto por uma transformação de SU(2). Isto vale tanto para as correntes vetoriais (2.6a), como para as axiais (2.6b). Além

disso postula-se a equ.(2.6c). As fórmulas (2.6) chamam-se álgebra de correntes (AC) de  $SU(2) \times SU(2)$ .

Foi deduzido grande número de consequências teóricas das equ.(2.6)<sup>3)</sup> e pode-se considerá-las como bem estabelecidas. Como exemplos citaremos apenas a relação de Adler-Weissberger<sup>4)</sup>, que segue de (2.6c); a regra de soma de Cabibbo-Radicati<sup>5)</sup>, espalhamento de pions<sup>6)</sup> e nucleons<sup>7)</sup>.

Existe outra propriedade das correntes (2.2), que parece conter uma boa parte da física de baixa energia entre hadrons conhecidos. É o que se chama dominância por mesons vetoriais, proposta inicialmente por Nambu<sup>8)</sup>, para explicar fatores de forma eletromagnéticos<sup>9)</sup>, ela veio sendo incorporada como um bom elemento de verdade a toda física de baixa energia<sup>10)</sup>.

Para fixar idéias consideramos o caso do fator de forma eletromagnético do protão. É definido da seguinte maneira:

$$\langle p' | J_{\mu}^{\delta}(0) | p \rangle = \bar{u}(p') [ \gamma_{\mu} F_1(t) + \sigma_{\mu\nu}(p'-p)_\nu F_2(t) ] u(p) \quad (2.7)$$

onde  $p$  e  $p'$  são estados de um protão com momentum  $p$  e  $p'$  respectivamente e  $t = (p' - p)^2$  é o momentum transferido. Gráficamente estamos considerando

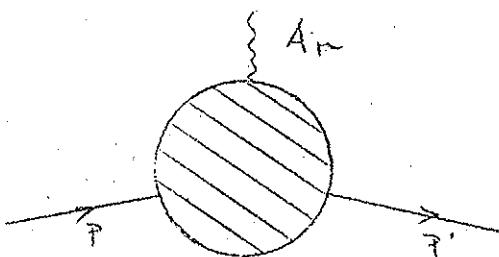


Fig. II 1

onde  $A_p$  é o campo eletromagnético. Um possível estado intermediário que pode contribuir para (2.7) é o meson  $\gamma^0$ . Desprezando todos os outros estados possíveis como nucleon-antinucleon, dois pions etc., obtemos para  $F_i(t)$  o seguinte:

$$F_i(t) \approx \frac{m_p^2}{m_p^2 - t} \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

ou graficamente

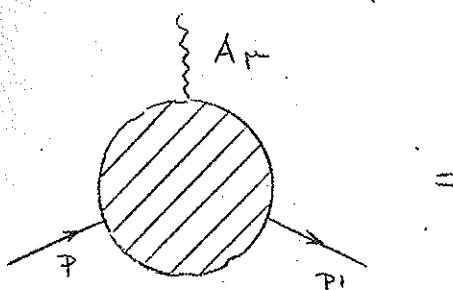
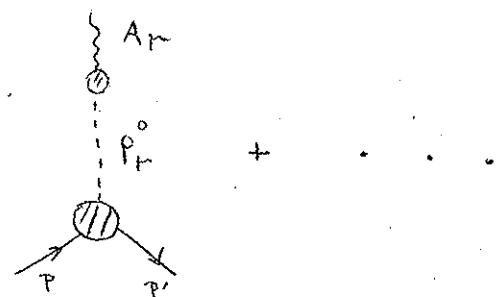


Fig. II 2



A parte isovetorial do campo eletromagnético interage com hadrons carregados através do meson vetorial  $\rho^0$ .

Igualmente os mesons  $\omega$  e  $\varphi$  dominam a parte isoescalar. A concordância com a experiência é excelente<sup>11)</sup>. Contudo para  $t$  grande parece que o comportamento de  $F_i(t)$  é pelomenos  $t^{-2}$ , o que mostra a limitação de (2.8) para  $I=1$ . Para corrigir este defeito veja e.g. Wataghin<sup>12)</sup>.

Supõe-se então que todas as correntes (2.2) sejam dominadas pelos respectivos mesons vetoriais com os números quânticos correspondentes:

o triplete  $\bar{V}_r^\alpha$  é dominado pelo meson  $\rho$  e

o triplete  $\bar{A}_r^\alpha$  é dominado pelo meson  $A_1$ .

As massas correspondentes são<sup>13)</sup>

$$m_\rho = 765 \pm 20 \text{ Mev} \quad (2.9)$$

$$m_{A_1} = 1070 \pm 20 \text{ Mev}$$

A existência do meson  $A_1$  ainda não é perfeitamente estabelecida, mas parece certo que se existir será um meson axial com spin 1. Discutiremos no Cap. IV-A um esquema sem o meson  $A_1$ .

Um modelo no qual é satisfeita a dominação por mesons vetoriais (DMV) é um no qual vale a "identidade entre corrente e campo" (ICC), i.e.<sup>14)</sup>

$$J_\mu^\alpha = (\text{constante}) \times \phi_r^\alpha \quad (2.10)$$

onde  $\Phi_\mu^\alpha$  é o operador renormalizado do meson vetorial que domina  $J_\mu^\alpha$ .

Lembremos que a distinção entre campos e fontes originou históricamente do estudo de campos eletromagnéticos e gravitacionais. Ambos, satisfazendo estatística de Bose e tendo massa zero, tomam o seu limite clássico no infinito. As fontes por outro lado são localizáveis no espaço e exibem um comportamento completamente diferente. Consequentemente há uma nítida distinção entre o campo  $F_{\mu\nu}$  e sua fonte  $J_\mu^\nu$ . Tal diferença desaparece no caso de um campo bosônico massivo  $\Phi_\mu^\alpha$  é sua fonte  $S_\mu = i \partial_\mu \bar{\Psi} \delta_\mu^\alpha \Psi + \dots$

Da equação de movimento

$$(\square - m^2) \Phi_\mu = S_\mu \quad (2.11)$$

segue-se

$$\langle B | \Phi_\mu | A \rangle = \frac{-1}{m^2 - t} \langle B | S_\mu | A \rangle \quad (2.12)$$

ou (2.8) para  $\langle B | S_\mu | A \rangle$  constante. Os elementos de matriz de  $\Phi_\mu$  são mais convergentes para  $t$  grande. Na IGC as correntes observadas são consideradas como campos básicos.

Finalmente discutiremos uma propriedade de  $A_\mu$ , que tem sido essencial para comparar as equ.(2.6) com a experiência. Sabemos que, desprezando correções eletromagnéticas<sup>15)</sup>,

$$\partial_\mu U_\mu^\alpha (\times) = 0 \quad (2.13)$$

onde  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,

i.e. a corrente vetorial é conservada. O mesmo não se dá com  $A_\mu^\alpha$ . Contudo postularemos que ela satisfaça a seguinte equação<sup>16)</sup>

$$\partial_\mu A_\mu^\alpha(x) = \mu_\pi^2 f_\pi \Pi^\alpha(x) \quad (2.14)$$

onde  $\mu_\pi$  é a massa do pion ( $\pi$ ),  $f_\pi$  a constante de decaimento  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  e  $\Pi^\alpha(x)$  o operador de campo renormalizado do triplete do meson  $\pi$ .  $f_\pi$  é definido por

$$\langle 0 | A_\mu^\alpha(x) | \pi^\alpha \rangle = i f_\pi P_\mu \frac{e^{i p \cdot x}}{\sqrt{2 P_0}} \quad (2.15)$$

onde  $p$  é o momento de  $\pi^\alpha$ .

Não podemos impor que

$$\partial_\mu A_\mu^\alpha(x) = 0, \quad (2.16)$$

se não da equ. (2.15) seguiria que

$$P_\mu f_\pi = -\mu_\pi^2 f_\pi = 0 \quad (2.17)$$

e como  $\mu_\pi \neq 0$  o processo  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  seria proibido, contrário a experiência. Além disso a equ. (2.16) induziria uma constante pseudoescalar no decaimento do neutron de magnitude incompatível com o termo de Gamow-Teller observado.

A relação (2.14) ou a hipótese da corrente axial parcialmente conservada (CAPC), teve sua origem na famosa relação de Goldberger-Treiman<sup>17)</sup> para o decaimento do  $\pi^-$ .

Para obter esta relação definamos os seguintes fatores de forma para o nucleon  $N$ :

$$\begin{aligned} \langle N' | A_\mu^\alpha(x) | N \rangle &= \sqrt{\frac{m^2}{E E'}} \bar{u}(p') \left\{ i \delta_\mu^\lambda \delta_5 \frac{\tau_\alpha}{2} F_A(t) + \right. \\ &\quad \left. + g_\mu \delta_5 \frac{\tau_\alpha}{2} \bar{r}_p(t) \right] u(p) \text{ e } \\ &\quad i(p^\lambda - p'^\lambda) \cdot x \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $E = P_0$ ,  $E' = P'_0$ ,  $q_{\mu} = (P' - P)_{\mu}$  e  $t = q^2$

De (2.18) segue-se que

$$\left\langle N' \left| \partial_{\mu} \delta_F^{\alpha}(x) \right| N \right\rangle \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{m^2}{E E'}} i \overbrace{\tilde{u}(P')}^{Z_A/z} \left[ -2m \delta_5 F_A(t) + q^2 \delta_5 F_p(t) \right] u \quad (2.19)$$

onde  $m$  é a massa do nucleon. Tomando o seguinte elemento de matriz:

$$\left\langle N' \left| (\square - \mu_{\pi}^2) \pi^{\alpha}(x) \right| N \right\rangle \Big|_{x=0} = -(q^2 + \mu_{\pi}^2) \left\langle N' \left| \pi^{\alpha}(x) \right| N \right\rangle \Big|_{x=0} = \quad (2.20)$$

$$= (q^2 + \mu_{\pi}^2) : \delta_{\pi N}(q^2) \tilde{u}(P') \delta_5 Z_A u(P)$$

e usando a equ. (2.19) através da equ. (2.14) obtemos no ponto  $q^2 = 0$

$$f_{\pi} \delta_{\pi N}(0) = m F_A(0) \quad (2.21)$$

Pondo  $F_A(0) = - \delta_A / g_V$  obtemos

$$f_{\pi} = \frac{m}{\delta_{\pi N}(0)} \left( - \delta_A / g_V \right) \quad (2.22)$$

que é a relação de Goldberger-Treiman.

Supondo que os fatores de forma variem pouco entre  $q^2 = 0$  e  $q^2 = -\mu^2$  podemos substituir  $\delta_{\pi N}(0)$  por  $\delta_{\pi N}(q^2 = -\mu^2)$  e usar a constante de acoplamento pion-nucleon, que é o fator de forma na concha de massa. Neste caso a equ. (2.22) dá:

$$f_{\pi} = 82 \text{ Mev} \quad (2.23)$$

enquanto que experimentalmente a vida média do  $\pi^+$  dá:

$$f_{\pi} = 94 \text{ Mev} \quad (2.24)$$

Vemos que CAPC é válido dentro de 10%<sup>18)</sup>

Resumindo, postularemos que os princípios a serem satisfeitos pela nossa Lagrangeana serão a álgebra de correntes (2.6), a identidade de campo e corrente (2.10) como tradução de dominação por mesons vetoriais e a hipótese da conservação parcial da corrente axial (2.14). As variáveis básicas na construção da Lagrangeana serão os operadores de campo dos mesons vetoriais (2.9).

### CAPÍTULO III CONSTRUÇÃO DA LAGRANGEANA

Como foi mencionado no Capítulo II foi a teoria simétrica V-A, que sugeriu a introdução da simetria quiral nas Lagrangeanas de interação forte. Com exceção dos trabalhos de Nambu<sup>19)</sup> as consequências desta simetria não foram calculadas. O desenvolvimento da álgebra de correntes é que deu o impulso necessário para aplicar a teoria de perturbação a tais Lagrangeanas.

Neste Capítulo daremos a receita para a construção de uma Lagrangeana  $\mathcal{L}$  satisfazendo os princípios do Capítulo anterior.  $\mathcal{L}$  descreverá as interações dos tripletos mesônicos  $\rho$ ,  $A_S$ ,  $\pi$  e do duploto nucleônico  $N$ .

Uma parte de  $\mathcal{L}$  será invariante por transformações do grupo  $SU(2)_E \times SU(2)_D$ , os nucleons transformando-se da seguinte maneira:

$$SU(2)_E : \quad N_E \rightarrow U'(x) N_E \quad (3.1a)$$

$$N_D \rightarrow N_D$$

$$SU(2)_D : \quad N_E \rightarrow N_E \quad (3.1b)$$

$$N_D \rightarrow U''(x) N_D$$

onde

$$N_E = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) N \quad (3.2)$$

$$N_D = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) N$$

e  $U'(x)$ ,  $U''(x)$  podem ser parametrizados da seguinte maneira:

$$U(x) = \exp \{ i \alpha^\alpha(x) \tau_\alpha \} \quad (3.3a)$$

$\alpha = 1, 2, 3$

$$U''(x) = \exp \{ i \beta^\alpha(x) \tau_\alpha \} \quad (3.3b)$$

onde  $\tau_\alpha$  são as matrizes de Pauli.

Os geradores deste grupo definem a álgebra  $SU(2)_E \times SU(2)_D$ :

$$[F_a^+, F_b^-] = 0$$

$$[F_a^\pm, F_b^\pm] = i \epsilon_{abc} F_c^\pm \quad (3.4)$$

Como consequência de termos imposto invariança por um grupo de calibre, i.e. os  $U(x)$  são funções da posição  $x_\mu$ , torna-se necessário a introdução de campos de calibre  $V_\mu^+$  e  $V_\mu^-$  para a construção de derivadas covariantes. É fácil de verificar que

$$D_\mu N_E = (\partial_\mu - ig/2) N_E \quad (3.5)$$

$$D_\mu N_D = (\partial_\mu + ig/2) N_D$$

se transformam como os próprios espinores (3.1), contanto que os campos de calibre  $V_\mu^+$ ,  $V_\mu^-$  se transforma da seguinte maneira<sup>20)</sup>:

$$V_\mu' \rightarrow U(x) V_\mu' U'(x) - \frac{2}{g} U^{-1}(x) \partial_\mu U'(x) \quad (3.6)$$

$$V_\mu'' \rightarrow U''(x) V_\mu'' U''(x) - \frac{2}{g} U''^{-1}(x) \partial_\mu U''(x)$$

onde  $g$  é uma constante de acoplamento e  $V_\mu = V_\mu^\alpha \epsilon_\alpha$  as combinações

$$W_\mu = \frac{1}{2} (V_\mu' + V_\mu'') \quad (3.7)$$

$$A_\mu = \frac{1}{2} (V_\mu' - V_\mu'')$$

serão associados correntes e campos vetoriais e axiais. Necessitamos então de um termo em  $\mathcal{L}$  correspondendo à energia cinética dos mesons  $A_1$  e  $\rho$  descritos por  $W_\mu$  e  $A_\mu$ . As combinações que se transformam sem o termo inhomogêneo em (3.6) são:

$$V_{\mu\nu}^{/\alpha} = \partial_\mu V_\nu^{/\alpha} - \partial_\nu V_\mu^{/\alpha} + g (V_\mu' \times V_\nu')_\alpha \quad (3.8a)$$

$$V_{\mu\nu}^{/\alpha} = \partial_\mu V_\nu^{/\alpha} - \partial_\nu V_\mu^{/\alpha} + g (V_\mu'' \times V_\nu'')_\alpha \quad (3.8b)$$

onde o produto vetorial é no espaço isotópico.

O termo de energia cinética estará incluído em

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ V_{\mu\nu}^{\prime 2} + V_{\mu\nu}^{''2} \right\} \quad (3.9)$$

onde o traço é tomado no espaço isotópico.  $\mathcal{L}_{YM}$  é invariante pelas transformações (3.6). Além da energia cinética  $\mathcal{L}_{YM}$  contém acoplamentos tri e quadri-lineares em  $A_{\mu}^{\alpha}$  e  $V_{\mu}^{\alpha}$ .  $\mathcal{L}$  deverá conter também um termo que descreva o nucleon e poderíamos pôr

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}_E \gamma_{\mu} D_{\mu} N_E - \bar{N}_D \gamma_{\mu} D_{\mu} N_D - m(\bar{N}_D N_E + \bar{N}_E N_D) \quad (3.10)$$

Acontece porém que o termo de massa do nucleon não é invariante pelas transformações (3.1), traduzindo o bem conhecido fato, que a massa do nucleon quebra a simetria quiral, i.e. a transformação (3.1) para  $\phi^a = -\beta^a$ . Contudo podemos introduzir<sup>21)</sup> uma matriz  $2 \times 2$

$$IM(\phi) = M^a(\phi) \tilde{\tau}^a \quad (3.11)$$

função do campo piônico não-renormalizado  $\phi^a$ . Para obter invariança por  $SU(2) \times SU(2)$ , o campo piônico  $\phi^a$  deve-se transformar como se segue :

$$SU(2)_E : \phi^a \rightarrow \phi'^a, \text{ onde } IM(\phi') = U(x) IM(\phi)$$

$$SU(2)_D : \phi^a \rightarrow \phi''^a, \text{ onde } IM(\phi'') = \cancel{U''(x)} IM(\phi) U''(x) \quad (3.12)$$

De (3.12) segue-se que

$$IM^+(\phi') IM(\phi') = IM^+(\phi) IM(\phi)$$

$$IM(\phi') IM^+(\phi') = e^{i\alpha \cdot \tau} IM(\phi) IM^+(\phi) e^{-i\alpha \cdot \tau} \quad (3.13)$$

Como  $\phi$  e  $\phi'$  são hermiteânos,  $IM(\phi)$  comuta com  $IM^+(\phi)$  e igualmente  $IM(\phi')$  com  $IM^+(\phi')$ . Da equ. (3.13) segue-se que  $IM^+ IM$  comuta com todos os  $\tilde{\tau}_a$ , o que sómente é possível se

$$IM^+(\phi) IM(\phi) = I \quad (3.14)$$

i.e.  $|M(\phi)|$  é unitário usando uma normalização conveniente. A Lagrangeana  $\mathcal{L}_N$  será escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_N = -\bar{N}_E \gamma_\mu D_\mu N_E - \bar{N}_D \gamma_\mu D_\mu N_D - m (\bar{N}_E |M| N_D + \bar{N}_D |M|^+ N_E) \quad (3.15)$$

Devido à unitariedade de  $|M|$  o primeiro termo na expansão de  $|M|$  em potências de  $\phi^\alpha$  dará a equ. (3.10) e os outros conterão interações  $\pi-N$ .

Além da condição (3.14) e a da expandibilidade em potências de  $\phi^\alpha$  em torno da origem não há outra restrição imposta sóbre  $|M|$ . A forma mais geral de parametrizar  $|M|$  é

$$|M(\phi)| = \frac{1}{c_\pi} [\sigma(\phi^2) + i\phi\rho(\phi^2)] \quad (3.16)$$

onde

$$\sigma^2(\phi^2) + \rho^2(\phi^2)\phi^2 = c_\pi^2 \quad (3.16a)$$

devido a condição (3.14). Consideraremos vários modelos para  $|M|$  e esta será uma das ambiguidades da nossa formulação. A cada forma de  $|M|$  corresponderá uma interação  $\pi-\pi$  diferente e usaremos o processo  $\pi N \rightarrow \lambda \pi N$  para determinar esta interação a baixas energias.

Notamos ainda que a simetria da Lagrangeana livre (3.10) é menor que a da Lagrangeana (3.15) e que

$$\langle 0 | \sigma(\phi^2) | 0 \rangle \neq 0 \quad (3.17)$$

A simetria só existe no nível algébrico e é espontaneamente quebrada<sup>22)</sup>.

Necessitamos ainda um termo invariante pelas transformações (3.12) e que contenha a energia simétrica, digo energia cinética do  $\pi$ . Para tal definimos a seguinte derivada covariante de  $|M|$ :

$$D_\mu |M| \equiv \partial_\mu |M| - i \frac{g}{2} W_\mu' |M| + i \frac{g}{2} |M| W_\mu'' \quad (3.18)$$

$D_\mu IM$  tem as mesmas propriedades de transformação que  $IM$ .  
A equ.(3.18) pode ser escrita:

$$D_\mu IM = D_\mu \sigma + i D_\mu \phi \quad (3.19)$$

onde

$$D_\mu \sigma = \partial_\mu \sigma + g \rho A_\mu^\alpha \phi^\alpha \quad (3.19a)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu (\rho \phi) + g \rho (V_\mu \times \phi) \cdot \vec{e} - g \sigma A_\mu \quad (3.19b)$$

O termo contendo a energia cinética do  $\pi$  é obviamente

$$\mathcal{L}_M = - \frac{c_\pi^2}{4} \text{Tr} \{ D_\mu IM D_\nu IM^\dagger \} \quad (3.20)$$

Recapitulando impuzemos a invariança de calibre  $SU(2) \times SU(2)$  e construimos uma Lagrangeana  $\mathcal{L}_I$  invariante pelas transformações deste grupo. Esta Lagrangeana

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{\pi} + \mathcal{L}_M \quad (3.21)$$

de maneira alguma é única e aqui entra a segunda ambiguidade de nossa formulação. A expressão (3.21) é uma Lagrangeana mínima e veremos a necessidade de introduzir outros termos, contanto que também sejam invariantes por  $SU(2) \times SU(2)$ .

Obviamente não queremos mesons vetoriais com massa nula, por tanto adicionamos

$$\mathcal{L}_{MV} = - \frac{1}{2} m_\pi^2 (A_\mu^\alpha)^2 + (V_\mu^\alpha)^2 \quad (3.22)$$

que é invariante sómente por uma transformação (3.6) com parâmetros independentes de  $x_\mu$ .

Vejamos quais as consequências de  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{MV}$  23). Do teorema de Noether ou das equações de movimento para  $V_\mu$  e  $A_\mu$  segue-se que :

$$\partial_\mu V_\mu^\alpha = 0 \quad (3.23a)$$

$$\partial_\mu A_\mu^\alpha = 0 \quad (3.23b)$$

Os geradores do grupo são:

$$F_a^\pm = \int d^3x (V_0^\alpha \pm A_0^\alpha) \quad (3.24)$$

Quantizaremos a nossa Lagrangeana canônicamente escolhendo como variáveis independentes

$$V_i^\alpha, A_i^\alpha, N, \phi^\alpha \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

Os momentos canônicamente conjugados de  $V_i^\alpha$  e  $A_i^\alpha$  serão:

$$\Pi(V_i^\alpha) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{V}_i^\alpha} = V_{(0)}^\alpha \quad (3.26)$$

$$\Pi(A_i^\alpha) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i^\alpha} = A_{(0)}^\alpha$$

com as seguintes relações de comutação para tempos iguais:

$$[V_i^\alpha(x, t), V_j^\beta(y, t)] = i \delta_{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y) \quad (3.27a)$$

$$[A_i^\alpha(x, t), A_j^\beta(y, t)] = i \delta_{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y) \quad (3.27b)$$

As equações de movimento são:

$$\partial_\mu V_{\mu\nu}^\alpha = m_0^2 V_\nu^\alpha - g (V_{\nu\mu} \times V_\mu + A_{\nu\mu} \times A_\mu)^\alpha + \dots \quad (3.28)$$

$$\partial_\mu A_{\mu\nu}^\alpha = m_0^2 A_\nu^\alpha - g (V_{\nu\mu} \times A_\mu + A_{\nu\mu} \times V_\mu)^\alpha + \dots$$

onde os pontos indicam contribuições de outras partes de  $\mathcal{L}_I$ . Tomando  $\gamma = 0$  nas equ. (3.28) determinamos as variáveis de pendentes  $A_0^a$  e  $V_0^a$  em termos das variáveis independentes (3.25) e (3.26) obtendo as seguintes relações de comutação para tempos iguais:

$$\left[ \frac{\mu_0}{g} V_0^a(x, t), \frac{\mu_0}{g} V_0^b(y, t) \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\mu_0}{g} V_0^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (3.29a)$$

$$\left[ \frac{\mu_0}{g} A_0^a(x, t), \frac{\mu_0}{g} V_0^b(y, t) \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\mu_0}{g} A_0^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (3.29b)$$

$$\left[ \frac{\mu_0}{g} A_0^a(x, t), \frac{\mu_0}{g} A_0^b(y, t) \right] = i \epsilon_{abc} \frac{\mu_0}{g} V_0^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \quad (3.29c)$$

As equações (3.29) coincidem com as equ. (2.6) identificando  $\mu_0^2/g V_r^a$  e  $\mu_0^2/g A_r^a$  como correntes vetoriais e axiais, obtendo assim a AC e a ICC (2.10).

Notamos que  $\mathcal{L}_I$  pode no máximo depender linearmente de  $A_r^a$  e  $V_r^a$  para que as equ. (3.29) continuem válidas. Os outros comutadores são:

$$[A_i^a(x, t), A_j^b(y, t)] = [A_i^a(x, t), V_j^b(y, t)] = [V_i^a(x, t), V_j^b(y, t)] = 0 \quad (3.30)$$

já que são variáveis independentes.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\mu_0}{g} V_0^a(x, t), \frac{\mu_0}{g} V_i^b(y, t) \right] &= i \epsilon_{abc} V_i^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) \frac{\mu_0}{g} + \\ &+ i \frac{\mu_0}{g} \delta_{ab} \partial_i \delta^{(3)}(x-y) \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\mu_0}{g} A_0^a(x, t), \frac{\mu_0}{g} A_i^b(y, t) \right] &= i \epsilon_{abc} \frac{\mu_0}{g} V_i^c(x, t) \delta^{(3)}(x-y) + \\ &+ i \frac{\mu_0}{g} \delta_{ab} \partial_i \delta^{(3)}(x-y) \end{aligned} \quad (3.31b)$$

As equ. (3.29), (3.30) e (3.31) são chamadas álgebra de campos de  $SU(2) \times SU(2)$ <sup>24)</sup>, exibindo um termo de Schwinger<sup>25)</sup>, que é um número c.

Obtivemos assim todos princípios expostos no Capítulo anterior como consequência de  $\mathcal{L}$ , menos CACP. Para remediar isto introduzimos um termo  $\lambda_Q$ , que quebra a simetria de  $\lambda$ , mantendo sómente  $SU(2)$ . Nesse caso a equ. (3.23b) fica:

$$\partial_\mu A_r^\alpha = - \frac{\partial(\delta\lambda_Q)}{\partial \alpha_a} \quad (3.32)$$

onde  $\delta\lambda_Q$  é a variação de  $\lambda_Q$  por uma transformação quiral.  $\lambda_Q$  dependerá das formas escolhidas para  $M$ . Usualmente se considera as seguintes parametrizações da matriz unitária:

$$\text{modelo } \sigma^{26)} : M = (\sigma + i\phi)/c_\pi \quad (3.33a)$$

$$\text{modelo exponencial }^{27)} : M = \exp\{i\phi/c_\pi\} \quad (3.33b)$$

$$\text{modelo Cayley }^{28)} : M = \frac{2c_\pi + i\phi}{2c_\pi - i\phi} \quad (3.33c)$$

$\lambda_Q$  determina-se da seguinte maneira<sup>29)</sup>. Sabemos da equ. (3.12) que a transformação quiral de  $\phi^\alpha$  é determinada por:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma - 2\alpha^\alpha \phi^\alpha \\ \rho \phi^\alpha &\rightarrow \rho \phi^\alpha + 2\alpha^\alpha \sigma \end{aligned} \quad (3.34)$$

Da formulação Lagrangeana segue-se<sup>26)</sup> que a corrente axial  $J_\mu^\alpha = \frac{m^2}{q} A_\mu^\alpha$  pode ser obtida de  $\mathcal{L}$  da seguinte maneira:

$$J_\mu^\alpha = - \frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial(\partial_\mu \epsilon^\alpha)} \quad (3.25)$$

onde  $\delta\mathcal{L}$  é variação de  $\mathcal{L}$  por uma transformação quiral com  $\alpha^a = -\beta^a = \varepsilon^a/2$ .  $J_\mu^\alpha$  satisfaaz:

$$\partial_\mu J_\mu^\alpha = - \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial \varepsilon^a} = \mu_\pi^2 f_\pi \pi^\alpha \quad (3.36)$$

onde impusemos CAPC (2.14). Pondo  $\Phi^2 = u$  obtemos das equ. (3.36) e (3.35)

$$\frac{d\mathcal{L}_Q}{d\alpha^a} = - \frac{\mu_\pi^2 f_\pi}{2} \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\phi \cdot d\phi} = - \frac{\mu_\pi^2 f_\pi}{2} Z^{-1} \frac{\phi \cdot \varepsilon}{\phi \cdot d\phi} \quad (3.37)$$

onde introduzimos a constante de renormalização

$$Z = \Phi^2 / \pi^2 \quad (3.38)$$

a ser determinada no Capítulo seguinte e usamos o fato  $\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}_Q$ . Diferenciando as equ. (3.34) obtemos

$$\frac{\varepsilon \cdot \phi}{\phi \cdot d\phi} = - 2 \frac{d\sigma}{d\alpha} \rho^{-1} \quad (3.39)$$

Introduzindo esta expressão na equ. (3.37) e integrando obtemos:

$$\mathcal{L}_Q = \frac{\mu_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{Z}} \int_0^{\phi^2} \frac{\sqrt{\alpha} \frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha}}{\sqrt{c_\pi^2 - \varepsilon^2(\alpha)}} d\alpha \quad (3.40)$$

Da equ. (3.40) obtemos as seguintes formas para  $\mathcal{L}_Q$ :

$$\mathcal{L}_Q^S = \mu_\pi^2 c_\pi Z^{-1} S \quad (3.41a)$$

$$\mathcal{L}_Q^E = -\frac{1}{2} \mu_\pi^2 Z^{-1} \phi^2 \quad (3.41b)$$

$$\mathcal{L}_Q^e = -\beta \mu_\pi^2 c_\pi^2 Z^{-1} \ln(1 + \phi^2 / 4c_\pi^2) \quad (3.41c)$$

onde usamos

$$S^{\text{exp}}(\phi^2) = c_\pi \cos(\sqrt{\phi^2}/c_\pi) \quad (3.42a)$$

$$S^{\text{Cayley}}(\phi^2) = C_\pi \frac{4c_\pi^2 - \phi^2}{4c_\pi^2 + \phi^2} \quad (3.42b)$$

Vemos que  $\mathcal{L}_Q$  satisfaz duas finalidades: dá CAPC e um termo de massa para o píon. A simetria quiral é quebrada somente pela massa do meson  $\pi$ . Para isso tivemos que introduzir uma transformação quiral não-linear para o meson  $\pi$ . Vemos ainda que uma vez determinado  $c_\pi$  nas equ. (3.33), que pode ser feito calculando o decaimento  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  e usando o valor experimental (2.24), a emissão de mesons  $\pi$  de ordem qualquer é determinada a partir da ordem mais baixa, que pode ser usada para determinar  $S_\pi$  e  $|M|$ .

A nossa Lagrangeana efetiva fica então:

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_Q \quad (3.43)$$

CAPÍTULO IV  
APLICAÇÃO AO CONJUNTO  $A_1, \phi, \pi, N$ .

IV - A: Sistema  $A_1 - \phi - \pi$

A Lagrangeana (3.43) construída segundo a receita do Capítulo anterior engloba todos os princípios expostos no Capítulo II, mas é obviamente não-renormalizável no sentido usual. Consequentemente calcularemos todos os processos na aproximação de Born.

A todo operador de campo associar-se-a a partícula correspondente, sendo que o operador  $\nabla_\mu^\alpha$  criará o meson  $\phi$ . O mesmo não é possível com a corrente axial, já que a sua parte longitudinal também contém o meson  $\pi$ . Sómente a parte que é transversal na concha de massa do meson  $A_1$  corresponderá a esta partícula.

Este acoplamento entre  $A_\mu$  e  $\pi$  aparece no termo de energia cinética do  $\pi$ :

$$D_\mu IM D_\mu IM^+ \quad (4.1)$$

em cuja expansão se encontra

$$\partial_\mu \Phi A_\mu \quad (4.2)$$

que será removido através de uma diagonalização conveniente da seguinte Lagrangeana parcial:

$$m_0^2 A_\mu^2 + (D_\mu \Phi)^2 \quad (4.3)$$

que contém todos os termos até segunda ordem em  $A_\mu$  e  $\Phi$ .

Definimos o operador de campo  $a_\mu$  do meson  $A_1$  como sendo:

$$a_\mu = A_\mu - \int A_\mu \Phi \quad (4.4)$$

onde

$$\Delta_\mu \phi = \partial_\mu (\rho \phi) + g (V_\mu \times \phi) \cdot \vec{e} \quad (4.5)$$

e  $\xi$  é determinado de tal maneira que o coeficiente de  $\alpha_\mu^2 \phi^2$  seja igual a zero:

$$\xi = \frac{g c_\pi}{m_0^2 + g^2 c_\pi^2} \quad (4.6)$$

Substituindo a equ. (4.4) na equ. (4.3) obtemos:

$$\begin{aligned} m_A^2 \alpha_\mu^2 + \frac{m_0^2}{m_A^2} \Delta_\mu \phi^2 + \Delta_\mu \phi^2 [ & 8^4 \sigma'^2 c_\pi^2 / m_A^4 - \\ & - 2 \frac{m_0^2}{m_A^4} g^2 \sigma' c_\pi ] - g^2 (\rho \phi)^2 \alpha_\mu^2 + \\ & + 2 \alpha_\mu \Delta_\mu \phi [ \frac{g \sigma'}{m_A^2} (g^2 c_\pi \sigma - m_0^2) ] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $\sigma' = \sigma - c_\pi$  e  $m_A^2 = m_0^2 + g^2 c_\pi^2$ , (4.7a)

O coeficiente de  $\alpha_\mu^2$  é a massa do meson  $A_1$  e devido à existência de excitações pseudos escalares  $m_A$  é diferente de  $m_0$ , apesar de que nossa álgebra de corrente seja  $SU(2) \times SU(2)$ .

Como o coeficiente de  $(\partial_\mu \phi)^2$  é diferente de um, introduzimos o campo de  $\Pi$  renormalizado

$$\Pi^\alpha = Z^{-1/2} \phi^\alpha \quad (4.8)$$

com  $Z = \frac{m_A^2}{m_0^2}$  (4.9)

Obtemos a fórmula de massa de Weinberg<sup>30)</sup>

$$m_A^2 = 2 m_\circ^2 \quad (4.10)$$

impondo a relação de Kawarabayashi-Suzuki-Fayazzudin-Riazzudin<sup>31)</sup>

$$m_\circ^2 = g^2 c_\pi^2 \quad (4.11)$$

Experimentalmente a relação (4.10) é

$$m_A^2 / m_\circ^2 = 1.95$$

A fórmula (4.10) não é consequência do nosso esquema do Capítulo III, mas comoveremos tem como consequência dominação pelo meson  $\rho$  da amplitude de aniquilação  $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$  para  $I = 1$ , o que é confirmado pela experiência.

Daqui em diante suporemos que a constante  $g$  seja dada pela relação (4.11).

Consideremos o sistema  $A_1 - \rho - \pi$  em particular:

O vértice  $A_1 - \rho - \pi$  provém da seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(A_1 \rho \pi) = \frac{3^2 c_\pi}{m_A^2} \frac{m_A}{m_\circ} \rho^2 V_\rho \cdot (\alpha_\rho \times \pi) \quad (4.12)$$

Esta Lagrangeana dá uma largura da ordem de 800 Mev ao  $A_1$ , muito maior que a experimental, que é da ordem de 100 Mev.

Para corrigir isto introduzimos a seguinte Lagrangeana adicional, também invariante por transformações  $SU(2) \times SU(2)$ :

$$\mathcal{L}_1 = i K c_\pi / 4 \text{ Tr} \left\{ D_\mu IM D_\nu IM^+ W_{\mu\nu}' + D_\mu IM^+ D_\nu IM W_{\mu\nu}'' \right\} \quad (4.13)$$

e  $K$  será ajustado para dar a largura  $A_1 \rightarrow \rho \pi$  em concordância com a experiência.

Incluindo  $\mathcal{L}_1$  obtemos:

$$\mathcal{L}(A_1 \rho \pi) = (4.13) - \frac{g^2 c_\pi \delta}{m_A m_\rho} [P_\rho^2 V_\mu (A_\mu \times \pi) + (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) \cdot \partial_\nu A_\mu \times \pi]$$

onde  $\delta = \frac{2 m_\rho^2 K}{g} \approx 0.5$  (32).

O vértice  $\rho \pi \pi$  provém de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho \pi \pi) &= g \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 c_\pi^2}{m_A^2} \frac{P_\rho^2}{m_\rho^2} + \frac{5}{2} \frac{P_\rho^2}{m_A^2} \right\} V_\mu \cdot (\partial_\mu \pi \times \pi) = \\ &= g_1 (P_\rho^2) V_\mu \cdot (\partial_\mu \pi \times \pi) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para  $P_\rho^2 = 0$  a constante acoplamento é  $g$  e como o acoplamento  $\rho \bar{N} N$  é

$$\mathcal{L}(\rho \bar{N} N) = i g \bar{N} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} N V_\mu^a \quad (4.15)$$

obtemos universalidade para o meson  $\rho$ . A equ. (4.14) dá para a largura  $\rho \rightarrow 2\pi$

$$T(\rho \pi \pi) = 130 \text{ Mev} \quad (4.16)$$

Como foi dito no Capítulo II a existência do meson  $A_1$  não é bem fundamentada experimentalmente. Surge então a seguinte pergunta: Será possível formular um esquema satisfazendo AC SU(2) x SU(2), DMV, PCAC; para cujo funcionamento a existência do  $A_1$  não seja necessária? Vamos respondê-la afirmativamente, mas rejeitar esta versão em bases experimentais.

Em termos precisos a questão é:

Usando os operadores de campo dos mesons  $\rho$  e  $\pi$ , será possível construir correntes vetoriais e axiais obedecendo às leis de transformação (3.14)?

O único problema é obter correntes transformando-se corretamente por uma simetria quiral, ou seja:

$$\begin{aligned} V_\mu &\rightarrow V_\mu - i [A_\mu, \alpha] \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - i [V_\mu, \alpha] + 2 \frac{\partial_\mu \alpha}{g} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\alpha$  são os parâmetros infinitesimais caracterizando esta transformação quiral. Vamos considerar somente o modelo  $\sigma$  e o mais simples é definir  $A_\mu$  como sendo<sup>33)</sup>:

$$A_\mu = \frac{1}{g\sigma} \Delta_\mu \Phi \quad (4.18)$$

e verifica-se facilmente que este  $A_\mu$  possui as propriedades desejadas.

Substituindo a expressão (4.18) nas equ. (3.26) verifica-se entretanto que

$$D_\mu IM = 0. \quad (4.19)$$

Neste caso a Lagrangeana para  $\phi$  e  $\pi$  fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \left( V_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{g\sigma} \Delta_\mu \phi^\alpha \times \Delta_\nu \phi^\beta \right)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \left\{ V_\mu^\alpha V^\mu_\alpha + \right. \\ & \left. + \frac{1}{g^2 \sigma^2} [\Delta_\mu \phi^\alpha]^2 \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sigma} V_{\mu\nu}^\alpha \times \phi^\beta + \partial_\mu \left( \frac{1}{g\sigma} \right) \Delta_\nu \phi^\alpha - \right. \\ & \left. - \partial_\nu \left( \frac{1}{g\sigma} \right) \Delta_\mu \phi^\alpha \right\}^2 + \mu_\pi^2 c_\pi Z^{-1} \sigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

Renormaliza-se o campo piônico como segue:

$$\phi_\pi^\alpha = \frac{m_0}{3c_\pi} \phi^\alpha \quad (4.21)$$

A única grandeza de interesse neste caso é o acoplamento  $\rho\pi\pi$  e obtém-se na concha de massa do  $\rho$ :

$$g_{\rho\pi\pi} = g/2 \quad (4.22)$$

Este resultado é que parece não estar de acordo com a experiência?

Com um modelo um pouco mais complicado consegu-se levantar

a restrição (4.19) e obter uma derivada covariante

$$D_\mu \neq 0.$$

Neste caso o operador de campo do meson  $\xi$  não será mais  $P_\mu$ , mas chamar-lo-emos de  $P_\mu^\alpha$ . Definimos:

$$W_\mu = P_\mu + i\alpha [\phi, \partial_\mu \phi] \quad (4.23)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sigma g} \left\{ -Z, \partial_\mu \phi + \frac{i\beta}{2} [P_\mu, \phi] \right\} + 2\alpha (\phi \partial_\mu \phi - \sigma \partial_\mu \phi)$$

onde  $Z_1 = 1 - 2\alpha g c_F^2$  e "a" é uma constante indeterminada.  $(P_\mu)$  se transforma da seguinte maneira:

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - i[A_\mu^\alpha, \phi] + 2\alpha i\sigma [\phi, \partial_\mu \phi] \quad (4.24)$$

$$\text{onde } A_\mu^\alpha = \frac{1}{\sigma g} \left\{ -Z, \partial_\mu \phi + \frac{i\beta}{2} [P_\mu, \phi] \right\}$$

Comparando equ. (4.24) com a equ. (4.17) vemos que a transformação de  $P_\mu^\alpha$  é mais geral, pois envolve a derivada  $\partial_\mu \phi$ .

Neste caso  $D_\mu \phi$  e  $D_\mu \xi$  ficam:

$$D_\mu \phi_a = -2\alpha g \left\{ \phi^2 \partial_\mu \phi_a + \phi_a \phi_b \partial_\mu \phi_b + [(\phi \times \partial_\mu \phi) \times \phi]_a \right\} + \delta(\phi^2) \quad (4.25)$$

$$D_\mu \xi = \delta(\phi \partial_\mu \phi)$$

Apesar de que  $D_\mu \xi$  seja diferente de zero, as equ. (4.25) não contém o operador  $\phi$  em primeira ordem, de modo que a equ. (4.22) subsiste e devemos também rejeitar este modelo.

O autor tem a impressão que um modelo fugindo da equ. (4.22) sem invocar a existência do meson  $A_1$  será algebricamente por de mais complicado e artificial para ser um esquema convincente.

Concluimos que no caso do falecimento do meson  $A_1$  há pouca probabilidade de que a Lagrangeana (3.43) sobreviva.



#### IV - B: Sistema $N\bar{N}$ .

O vértice  $N\bar{N}\pi$  provém de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N\bar{N}\pi) = & i \frac{m}{c_\pi} \frac{m_A}{m_0} \bar{N} \gamma_5 \pi \cdot \nabla N + i \frac{3^2 c_\pi}{2 m_A m_0} \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu \pi \cdot \nabla N + \\ & + \frac{m}{2 c_\pi^2} \frac{m_A^2}{m_0^2} \bar{N} N \pi^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Notamos que a interação  $N\bar{N}A$  provém de

$$\mathcal{L}(N\bar{N}A) = i g \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 A_\mu \frac{\epsilon_a}{2} N \quad (4.27)$$

Comparando com a equ. (4.15) conclui-se a não-renormalização da constante axial (2.23), mas a relação (2.23) de Goldberger-Treiman está satisfeita. Para obter a razão  $g_A/g_V$  diferente de um, podemos introduzir a seguinte Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{\epsilon}{2} \left\{ \bar{N}_D IM^+ \gamma_\mu (D_\mu IM) N_D - \bar{N}_D \gamma_\mu (D_\mu IM^+) IM N_D + \right. \\ & \left. + \bar{N}_E IM \gamma_\mu (D_\mu IM^+) N_E - \bar{N}_E \gamma_\mu (D_\mu IM) IM^+ N_E \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

A equ. (4.27) torna-se

$$\mathcal{L}(N\bar{N}A) = i g (1+2\epsilon) \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 A_\mu \frac{\epsilon_a}{2} N \quad (4.27')$$

e a renormalização é

$$g_A/g_V = -(1+2\epsilon)/2 \quad (4.29)$$

$\mathcal{L}_2$  também contribui para  $\mathcal{L}(N\bar{N}\pi)$  o termo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(N\bar{N}\pi) = & \frac{i\epsilon}{c_\pi^2} [\bar{N} \gamma_\mu (\pi \times \partial_\mu \pi) \cdot \nabla N - \\ & - \frac{1}{c_\pi} \frac{m_A}{m_0} \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \pi \cdot \partial_\mu \pi \cdot \nabla N - C \frac{m_0}{m_A} \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \partial_\mu \pi \cdot \nabla N] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$\mathcal{L}_2$  também introduz um vértice  $N\bar{N}\gamma\gamma$  proporcional a  $\epsilon$ . Contudo como a renormalização da corrente axial é pequena ( $2\%$ )<sup>35</sup>,  $\epsilon$  será posto igual a zero daqui por diante.

Como as amplitudes de espalhamento  $\pi N$  serão usados para o cálculo de produção de dois  $\gamma$ , necessitamos estas amplitudes com o nucleon inicial fora da concha de massa.

A amplitude mais geral para o processo

$$\pi^a(k_1) + N(p_1) \rightarrow \pi^b(k_2) + N(p_2)$$

com a restrição  $p_2^2 = -m^2$  é

(4.31)

$$M_{\pi N} = -i \bar{u}(p_2) \left\{ -A_{ab} - (i\gamma_i + m) \tilde{A}_{ab} + \right. \\ \left. + i\gamma_i \tilde{B}_{ab} + (i\gamma_i + m) \tilde{\tilde{B}}_{ab} \right\}$$
(4.32)

onde cada amplitude pode ser decomposta como:

$$A_{ab} = A^{(+)} \delta_{ab} + A^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_a, \tau_b]$$
(4.33)

e os  $A^{(\pm)}$  etc. são funções de

$$S = -(p_1 + k_1)^2$$

$$t = -(k_1 - k_2)^2$$

$$k_1^2, k_2^2 \text{ e } p_1^2.$$
(4.34)

As Lagrangeanas  $\mathcal{L}(N\bar{N}\pi)$ ,  $\mathcal{L}(N\bar{N}\rho)$  e  $\mathcal{L}(\rho\pi\pi)$  dão<sup>36</sup>:

$$\hat{A}^{(+)} = \frac{m}{2c_\pi^2} - (p_1^2 + m^2) \frac{1}{4c_\pi^2 D_1} \quad , \quad A^{(-)} = -\frac{m}{4c_\pi^2} \frac{p_1^2 + m^2}{D_1}$$

$$\hat{A}^{(+)} = -\frac{m^2}{c_\pi^2} \left( \frac{1}{8m^2} + \frac{1}{D_1} \right) \quad , \quad \hat{A}^{(-)} = -\frac{m^2}{c_\pi^2} \left( \frac{1}{8m^2} - \frac{1}{D_1} \right) + \underbrace{\frac{2g_1(-t)}{4m_p^2 - t}}_{(4.35)} - \frac{\epsilon}{c_1}$$

$$\hat{B}^{(+)} = \frac{m^2}{2c_\pi^2} \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right), \quad \hat{B}^{(-)} = \frac{m^2}{2c_\pi^2} \left( \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) - \frac{2g_3(-t)}{4m_p^2 - t} + \frac{2\epsilon}{c_\pi^2}$$

$$\tilde{B}^{(+)} = \frac{m^2}{4c_\pi^2} \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right) \quad , \quad \tilde{B}^{(-)} = -\frac{m}{4c_\pi^2} \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right)$$

onde  $D_1 = m^2 + (P_1 + k_1)^2$  e  $D_2 = m^2 + (P_1 - k_2)^2$ .

Podemos verificar explicitamente que as amplitudes (4.35) satisfazem à condição de consistência de Adler<sup>37)</sup>, que se segue de CAPC e diz que

$$A^{(+)}(P_1^2 = -m^2, k_1^2 = 0, s = m^2, t = 0) = \frac{g_r^2}{m} K_{\bar{N}N\pi}(t=0) \quad (4.36)$$

onde  $g_r$  é a constante de acoplamento  $\bar{N}N\pi$  e  $K_{\bar{N}N\pi}$  é o fator de forma associada a este vértice normalizado tal que

$$K_{\bar{N}N\pi}(t = \mu_\pi^2) = 1.$$

De (4.35) temos que

$$A^{(+)} = \frac{m}{2c_\pi^2} \quad (4.37)$$

Para  $P_1^2 = P_2^2 = -m^2$  obtemos da equ. (4.26)

$$\mathcal{L}(N\bar{N}\pi) = i \left( \frac{m}{c_\pi} \frac{m_0}{M_A} \right) \bar{N} \gamma_5 \pi^\mu \gamma_N \quad (4.38)$$

$$g_r = \frac{m}{c_\pi} \frac{m_0}{M_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{c_\pi}$$

de onde  $g_r^2/m = \frac{1}{2} m/c_\pi^2$

concordando com a equ. (4.37). Segue-se que  $K_{\bar{N}N\pi}(0) = 1$ .

Para a amplitude  $B^{(+)}$  obtemos para todas as partículas na concha de massa o resultado da AG:

$$B^{(+)} = \frac{g_r^2}{m} \frac{2s + t - 4\mu_\pi^2}{t - 2\mu_\pi^2 - (4\mu_\pi^2 - 2s - t)^2} \quad (4.39)$$

No limiar da reação obtemos os seguintes complementos de espalhamento (o índice se referindo ao isospin):

$$a_1 - a_3 = \frac{-3/4\pi}{1 + \mu_\pi/m} \left\{ \frac{g_r^2}{m} \frac{\mu_\pi}{2m} \frac{1}{(\frac{\mu_\pi}{2m} + 1)(\frac{\mu_\pi}{2m} - 1)} + \left( 1 - \frac{M_A^2}{m_0^2} \right) - \frac{g_r^2 M_\pi}{m_\rho^2} \right\}$$

para  $m_A^2 = 2m_0^2$  ( $a_1 - a_3$ ) é dominado pelo  $\xi$  e obtemos:

$$a_1 - a_3 = - \left(1 + \mu_\pi/m\right)^{-1} \frac{3}{4\pi} \left(- \frac{g_F^2 \mu_\pi}{m_p^2}\right) + O\left(\frac{\mu_\pi^2}{m^2}\right). \quad (4.40)$$

$$a_1 + 2a_3 = + \left(1 + \mu_\pi/m\right)^{-1} \frac{3}{4\pi} \frac{g_F^2}{m} \frac{\mu_\pi^2}{(\mu_\pi + 2m)(\mu_\pi - 2m)} \quad (4.41)$$

Desprezando termos da ordem de  $(\mu_\pi/m)^2$  obtemos

$$a_1 + 2a_3 = 0.$$

Experimentalmente temos<sup>37)</sup>

$$a_1 - a_3 = (0.25 \pm 0.009) \mu_\pi^{-1} \quad (4.42)$$

$$a_1 + 2a_3 = (-0.005 \pm 0.004) \mu_\pi^{-1}$$

em boa concordância com as expressões (4.40) e (4.41), que dão

$$a_1 - a_3 = 0.24 \mu_\pi^{-1}$$

$$a_1 + 2a_3 = -0.003 \mu_\pi^{-1}$$

IV - C : Sistema  $\pi$ - $\pi$ .

Passamos a discutir espalhamento  $\pi$ - $\pi$ . Há uma interação direta de 4  $\pi$ :

$$\mathcal{L}(4\pi) = -f_1 \pi^2 (\partial_\mu \pi)^2 - f_3 (\pi \cdot \partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{8} f_4 \pi^4 - f_2 (\partial_\mu \pi \times \partial_\nu \pi)^2 \quad (4.43)$$

onde

$$f_2 = \frac{c_2 + \delta}{8 c_\pi^2 m_\pi^2}$$

e para o modelo  $\sigma$

$$f_1^\sigma = f_3^\sigma = \frac{1}{2 c_\pi^2} \rightarrow f_4^\sigma = \frac{2 \mu_q^2}{c_\pi^2} \quad (4.44a)$$

Para o modelo exponencial

$$f_1^E = -f_3^E = \frac{1}{6 c_\pi^2} \rightarrow f_4^E = 0 \quad (4.44b)$$

Para o modelo Cayley

$$f_1^C = 0, \quad f_3^C = \frac{-1}{2 c_\pi^2} \rightarrow f_4^C = -\frac{\mu_q^2}{c_\pi^2} \quad (4.44c)$$

e um termo de troca de  $\zeta$ , proveniente de  $\mathcal{L}(\rho \pi \pi)$ .

A amplitude mais geral do processo

$$\pi^a(k_1) + \pi^b(k_2) \rightarrow \pi^c(k_3) + \pi^d(k_4)$$

pode ser parametrizada como:

$$\mathcal{M} = +i \left\{ \delta_{ab} \delta_{cd} A(s, t, u, k_i^2) + \delta_{ac} \delta_{bd} B(s, t, u, k_i^2) + (4.45) \right. \\ \left. + \delta_{ad} \delta_{bc} C(s, t, u, k_i^2) \right\}$$

onde

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

$$s = -(k_1 + k_2)^2; t = -(k_1 - k_3)^2; u = -(k_1 - k_4)^2$$

satisfazendo  $s + t + u = -\sum_i k_i^2$ . (4.46)

$\mathcal{L}(4\pi) \in \mathcal{L}(\rho\pi\pi)$ , dão as amplitudes seguintes

$$A(s, t, u, k_i^2) = -2 f_1 (2s + \Sigma) + 4 f_3 s - f_4 + f_2 [(t + \Sigma_{13})(t + \Sigma_{24}) - 2(s + \Sigma_{12})(s + \Sigma_{34}) + (u + \Sigma_{14})] + (u + \Sigma_{23})] - \frac{g_i^2(-t)}{m_0^2 - t} (u - s) + \frac{g_i^2(-u)}{m_0^2 - u} (t - s)$$
(4.47)

onde

$$\Sigma = \sum_{i=1}^4 k_i^2 > \sum_{i,j} k_i^2 + k_j^2$$

$$B(s, t, u, k_i^2) = A(s \leftrightarrow t, i \leftrightarrow 3) (4.48)$$

$$C(s, t, u, k_i^2) = A(s \leftrightarrow u, i \leftrightarrow 4)$$

Também neste caso há uma condição de consistência decorrente do CAPC<sup>38</sup>, que diz que

$$\sqrt{N}(s = t = u = \mu_\pi^2, k_i^2) = 0 (4.49)$$

para um dos  $k_i^2$  satisfazendo

$$k_i^2 = 0.$$

É imediato que os termos provenientes de  $f_2$  e de troca de  $\varphi$  se anulam neste caso. Obtemos a seguinte condição

$$f_1 + f_3 = f_4 / 3 \mu_\pi^2 (4.50)$$

Introduzindo as equ. (4.44) na condição acima verifica-se a igualdade (4.49) para os três modelos.

Na concha de massa e no limite da reação obtemos:

$$A = 8\mu_{\pi}^2 \left( -f_1 + f_3 + \frac{g^2}{m_0^2} \right) - f_4 \quad (4.51)$$

$$B = C = 8\mu_{\pi}^2 \left( f_2 - \frac{2g^2}{m_0^2} \right) - f_4$$

Vemos que para nenhum modelo o termo da troca de  $g$  é cancelado por outros, contrário a afirmação de Weinberg<sup>39)</sup>.

Os comprimentos de espalhamento para os três modelos são:

modelo $\sigma$	40)	$a_0/a_2 = -7/2$ , $a_0 = 0,3 \mu_{\pi}^{-1}$
modelo exponencial	41)	$a_0/a_2 = -2$ ; $a_0 = 0,22 \mu_{\pi}^{-1}$ (4.52)
modelo Cayley	41)	$a_0/a_2 = -3/2$ ; $a_0 = 0,2 \mu_{\pi}^{-1}$

Experimentalmente sabemos do decaimento  $K_{14}$  <sup>42)</sup>, que

$$a_0 = 0,6^{+0,6}_{-0,5} \mu_{\pi}^{-1}$$

Com um erro tão grande devido a estatística pobre torna-se impossível determinar com precisão, qual dos três modelos melhor descreve a interação  $\pi-\pi$ . No Capítulo seguinte calcularemos a produção de um par de pions em colisões  $n-n$ , onde há uma estatística melhor para tentar decidir esta questão.

## CAPÍTULO V PRODUÇÃO DE DOIS $\pi$ 'S EM COLISÕES $\pi N$ .

Finalmente apliquemos o nosso esquema à produção de dois pions em colisões de pion com nucleon. Este processo é o único em que há estatística experimental suficiente para determinar a interação  $\pi\pi$  a baixas energias com alguma precisão.

O primeiro esforço para entender esta reação foi feito por Chew e Low<sup>43)</sup>, tentando extender a teoria formulada por eles e que teve grande sucesso na descrição do canal  $\pi N$ . A fonte é estática, o pion incidente interagindo diretamente com o nucleon e dois pions são emitidos. Como o acoplamento é essencialmente pseudo-vetorial, os pions estando na maioria na onda S, obtiveram pequena seção de choque de produção. Além disso desprezaram interação  $\pi\pi$  e simetria de Bose-Einstein<sup>44)</sup>.

Posteriormente espalhamento  $\pi\pi$  foi incluído por Rodberg<sup>45)</sup>, obtendo resultados concordantes com a experiência. Simetrizando agora os pions<sup>46)</sup> obtém-se seções de choque maiores que as experimentais.

Também se usou o modelo isobárico<sup>47)</sup> obtendo resultados bons para um grande intervalo de energia. Neste caso despreza-se interação  $\pi\pi$ .

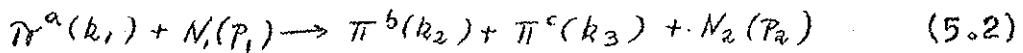
A técnica de pions moles oferece um método para tratar os pions simetricamente, remove a restrição a uma fonte estática e inclui interação  $\pi\pi$ . Foram feitos análises deste tipo por Nambu e Lurie<sup>19)</sup>, Shrauner<sup>19)</sup> e mais recentemente por Chang<sup>48)</sup>, este usando álgebra de correntes em que não se despreza os comutadores para tempos iguais como fizeram Nambu e colaboradores.

Como a energia do  $\pi$  incidente é grande, torna-se recomendável tratar os pions como duros. isto foi feito por Olsson e Turner<sup>49)</sup>, que obtiveram boa concordância com a experiência,

mas desprezaram correlações devido a mesons vetoriais e termos com nucleons fora da concha da massa. Obtiveram para os comprimentos de espalhamento  $\pi\bar{\pi}$  os valores de Weinberg<sup>40)</sup> ou seja:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,2 \mu_{\pi}^{-1} \\ a_2 &= -0,06 \mu_{\pi}^{-1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

No presente cálculo incluiremos os efeitos despresados por Olesen e Turner, calculando-os dentro do esquema do Capítulo III. Consideremos então a reação



A forma mais geral para este processo é :

$$M = -i \bar{u}(p_2) \gamma_5 \{ G_1 k_1 + G_2 k_2 + G_3 k_3 + G_4 (k_1 + k_2)(k_1 + k_3) \} u(p_1) \quad (5.3)$$

onde as amplitudes  $G_i$  são matrizes no espaço isotópico e funções das cinco variáveis independentes, para as quais escolhemos:

uma delas é sempre constante no tempo

$$\begin{aligned} X &= -(p_1 + k_1)^2 \\ Y &= -(p_1 - k_2)^2 \\ S &= -(k_1 - k_2)^2 \\ T &= -(k_1 - k_3)^2 \\ U &= -(k_2 + k_3)^2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$\sqrt{X}$  é a energia total no sistema centro de massa inicial e  $\sqrt{U}$  é a energia dos pions finais no sistema centro de massa deles e as outras variáveis são momentos transferidos.

Tipo I são os polos do nucleon (Fig. Ia)



Fig. Ia

e para calculá-los usamos  $\mathcal{L}(N\bar{N}\pi)$  e as fórmulas (4.35).

Tipo II são os têrmos de contato (Fig. Ib)

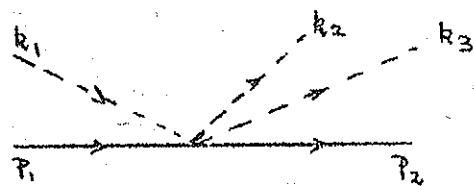


Fig. Ib

provenientes de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(N\bar{N}\pi\pi\pi) = & -i\alpha \frac{m}{c_n^3} \frac{m_A^3}{m_0^3} \bar{N} \gamma_5 \pi \cdot \gamma^2 N \pi^2 \\ & - i\epsilon 2m \frac{\alpha}{c_n^3} \frac{m_A}{m_0} \bar{N} \gamma_5 \pi \cdot \gamma^2 N \pi^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $\alpha_S = 0$ ,  $\alpha_F = 1/6$  e  $\alpha_E = 1/4$ .

Tipo III são os polos do meson  $A_1$  (Fig. Ic)

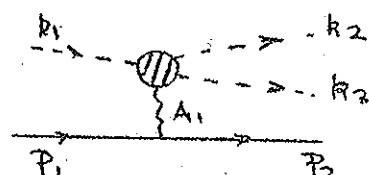


Fig. Ic

provenientes de  $\chi(N\bar{N}\Lambda)$  e da amplitude de espalhamento  $A_1 3\pi$  com o  $A_1$  fora da concha de massa.

Os do tipo IV são os polos do meson  $\pi$  (Fig. Id).

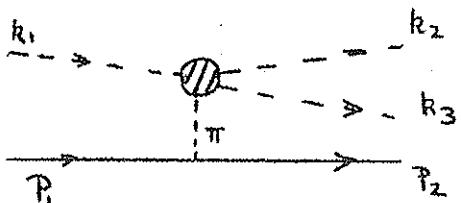


Fig. Id

é contém a interação  $\pi\pi$ , que queremos determinar.

Estes elementos de matriz serão calculados para o processo  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$  para o qual existem os melhores resultados a baixa energia. Obtemos os seguintes elementos de matriz:

$$M_I = i\sqrt{2} \bar{u}(P_2) \sim$$

$$\gamma_5 K_1 \left\{ [-\Delta A^I + \Delta \tilde{B}^I (y + s - m^2 - 2\mu_\pi^2 - d_1)] \frac{g'_N}{D_1} - \right.$$

$$- G_N \Delta \tilde{A}^{III} - \tilde{\alpha}_3 g'_N \Delta \tilde{B}^{III} / D_3 + G_N h_2(s) -$$

$$- 2 h_1 g'_N / D_1' \} +$$

$$+ \gamma_5 K_2 \left\{ G_N (\Delta \tilde{A}^I + \Delta \tilde{B}^I) + \Delta \tilde{B}^I \left( \frac{g'_N d_2}{D_1} + \frac{g'_N \tilde{d}_2}{D_3} + \right. \right.$$

$$+ 4m G_N) + G_N (\tilde{\Delta} A^{III} + \Delta B^{III}) + G_N h_2(s) + (5.6)$$

$$+ G_N h_2(u) \} +$$

$$+ \gamma_5 K_3 \left\{ \frac{g'_N \Delta A^{III}}{D_3} + G_N \Delta \tilde{A}^I - \Delta \tilde{B}^{III} [ (y + u - m^2 - 2\mu_\pi^2 - \right.$$

$$- \tilde{\alpha}_1) \frac{g'_N}{D_3} + \frac{g'_N d_3}{D_1} ] - G_N h_2(u) + 2 h_1 \frac{g'_N}{D_3'} \} +$$

$$- \cancel{\Delta \tilde{B}^{III}} (y + u - m^2 - 2\mu_\pi^2 - \tilde{\alpha}_1) \frac{g'_N}{D_3}$$

$\overbrace{[\Delta \tilde{B}^I - \Delta \tilde{B}^{III}] G -}$

$$\begin{aligned}
 & + (-i) P_4 / 3 \left\{ -g_N' \Delta B^I / D_1 + g_N' \Delta B^{III} / D_3 \right\} - \\
 & - i \gamma_5 \left\{ -4 g_N (\Delta A^I + \Delta \tilde{A}^{III}) [G_N (2y + u - 2m^2 - 4\mu_\pi^2 - \right. \\
 & \quad \left. - \alpha_1 - \tilde{\alpha}_1) + \frac{2m g_N'}{3} ((\mu_\pi^2 + t + x - s - y - u) / D_1 + \right. \\
 & \quad \left. + (\mu_\pi^2 + t + \tilde{x} - u - y - s) / D_3)] - 2g_N' \Delta \tilde{A}^I + (-4h, G_N) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{g_N'}{3} [\Delta B^I (\mu_\pi^2 + t + x - s - y - u) / D_1 + \Delta B^{III} (\mu_\pi^2 + \right. \\
 & \quad \left. + t + \tilde{x} - u - y - s) / D_3] + \frac{1}{3} (t - 4\mu_\pi^2) [G_N \Delta \tilde{B}^I - \right. \\
 & \quad \left. - g_N' \Delta B^{III} / D_3] + \frac{1}{3} h_2(s) g_N' / D_3' (3m^2 + \mu_\pi^2 + t - \right. \\
 & \quad \left. - u - s - y - 2x + 3\alpha_1) + \frac{1}{3} h_2(u) g_N' / D_1' (3m^2 + \mu_\pi^2 + t - \right. \\
 & \quad \left. - s - u - y - 2\tilde{x} + 3\tilde{\alpha}_1) + \frac{1}{3} (t - 4\mu_\pi^2) g_N' 2h_2(u) / D_1' \right\} * \\
 & * u(P_1),
 \end{aligned}$$

nde

$$P_4 = (K_1 + K_2)(K_1 + K_3) \quad (5.7)$$

$$\bar{u}(P_2) \gamma_5 u(P_1) = \frac{i}{2m} \bar{u}(\gamma_5 K_1 - \gamma_5 K_2 - \gamma_5 K_3) u(P_1)$$

$$\Delta A^I = \cancel{\Delta A^{III}} = \frac{m}{2c_\pi^2} \xrightarrow{\times(1+D_1/D_3')} \Delta \tilde{A}^I = \cancel{\Delta \tilde{A}^{III}} = -\frac{2m^2}{4c_\pi^2 D_3'}$$

$$\Delta B^I = \frac{m^2}{4c_\pi^2} \left[ \frac{-1}{m^2} + \frac{4}{D_3'} \right] + 2g g_1 (-s) / (m_p^2 - s) \quad (5.8)$$

$$\Delta B^{III} = \frac{m^2}{4c_\pi^2} \left[ \frac{-1}{m^2} + \frac{4}{D_1'} \right] + 2g g_1 (-s) / (m_p^2 - s)$$

Para obter  $\Delta A^{III}$  e.g. pós  $1 \leftrightarrow 3$   
 $s \leftrightarrow u$

$$\Delta \tilde{B}^I = \Delta \tilde{B}^{\overline{II}} = \frac{m}{2c_{\pi}^2} \frac{1}{D_3'}$$

$$D_1 = (p_i + k_1)^2 + m^2 \quad , \quad D_1' = (p_{i'} - k_1)^2 + m^2$$

$$D_2 = (p_i - k_2)^2 + m^2 \quad , \quad D_2' = (p_{i'} + k_2)^2 + m^2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} (-3m^2 - 5\mu_{\pi}^2 + 2s + t - u + 2y + x)$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\mu_{\pi}^2 + m^2 - s - y$$

$$\tilde{x} = 6\mu_{\pi}^2 + 3m^2 - (s + t + u + x + y)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{3} (-3m^2 - 5\mu_{\pi}^2 + 3u + t - s + 2y + \tilde{x}) \quad (5.8)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_1 + m^2 + 2\mu_{\pi}^2 - u - y$$

$$\alpha'_1 = \frac{1}{3} (3m^2 + 7\mu_{\pi}^2 - s - 3u - x - 2y)$$

$$g_N = \frac{m}{12c_{\pi}} \quad , \quad G_N = \frac{1}{312c_{\pi}} \quad , \quad h_1 = \frac{m}{c_{\pi}^2}$$

$$h_2(x) = g^2/2 [1 - \frac{x}{4m_0^2}(1 + 2g\delta)]/(m_0^2 - x)$$

$$M_{\overline{II}} = 16 \alpha \frac{m}{c_{\pi}^3} \overline{u}(p_2) \underbrace{\delta_5}_{(\pi\pi)^2} u(p_1) \frac{1}{2} - i2m\alpha e \frac{m}{m_p} \overline{u}(p_2) \delta_5 \pi \delta u(p_1) \pi^2$$

onde

$$\alpha_5 = 0 \quad , \quad \alpha_{exp} = 1/6 \quad , \quad \alpha_{eagley} = 1/4$$

Para calcular  $M_{\overline{III}}$  necessitamos a amplitude  $A_1 \pi \rightarrow \pi\pi$ . Temos um termo de contato de  $\mathcal{L}(N\bar{N}A_1)$

$$\mathcal{L}(A_1 \pi \pi \pi) = g_4 \alpha_{\mu} \pi \partial_{\mu} \pi \cdot \pi + \quad (5.9)$$

$$+ g_6 (\alpha_{\mu} \times \partial_{\mu} \pi) \cdot (\partial_{\mu} \pi \times \partial_{\mu} \pi) - g_7 (\partial_{\mu} \alpha_{\nu} - \partial_{\nu} \alpha_{\mu}) \cdot \partial_{\mu} \pi \pi \cdot \partial_{\nu} \pi$$

onde

$$g_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_0}{c_\pi^2} \rightarrow g_6 = -2^{-3/2} \frac{1}{m_0 c_\pi^2} \rightarrow g_7 = \frac{g \delta}{\sqrt{2} c_F m_0^2}$$

e um término de troca de  $\rho$  de  $\mathcal{L}(A_1\rho\pi)$  e  $\mathcal{L}(\rho\pi\pi)$ . Usando a mesma nomenclatura que <sup>para</sup> espalhamento  $\pi-\pi$ ,  $(A_1^a(k_1))$  tomando o lugar de  $\pi^a(k_1)$  temos a amplitude mais geral :

$$M = a_\mu [k_2^\mu D(s, t, u) + k_3^\mu E(s, t, u) + k_4^\mu F(s, t, u)] \quad (5.10)$$

onde

$$D = D_1 \delta_{da} \delta_{bc} + D_2 \delta_{ab} \delta_{ac} + D_3 \delta_{ad} \delta_{ab} \text{ etc.}$$

Necessitamos de

$$\begin{aligned} D_1 + D_3 &= -g_4 - \frac{1}{2} g_6 (u - 2\mu_\pi^2) + g_7 (\mu_\pi^2 - \frac{s+u}{2}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{g_1(-s)}{m_0^2 - s} [s g_2 + g_3 (s + u - 2\mu_\pi^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 + E_3 &= 2g_4 - g_6 (t - 2\mu_\pi^2) + g_7 (2\mu_\pi^2 - \frac{s+3t+u}{2}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{g_1(-s)}{m_0^2 - s} [s g_2 + g_3 (t + s - 2\mu_\pi^2)] + \frac{1}{2} \frac{g_1(-u)}{m_0^2 - u} [u g_2 + \\ &+ g_3 (u + t - 2\mu_\pi^2)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 &= g_4 + \frac{1}{2} g_6 (s - 2\mu_\pi^2) - g_7 (\mu_\pi^2 - \frac{s+u}{2}) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{g_1(-u)}{m_0^2 - u} [g_2 u + g_3 (s + u - 2\mu_\pi^2)] \end{aligned}$$

Obtemos para  $M_{\text{III}}$ :

$$M_{\text{III}} = i g / \sqrt{2} [m_{A_1}^2 + 3\mu_\pi^2 - s - t - u]^{-1} \bar{n}(p_2) *$$

$$\frac{1}{4} \left\{ -g_5 k_1 (D_1 + D_3) - g_5 k_2 (E_1 + E_3) - g_5 k_3 (F_1 + F_3) + \right. \\ + \frac{2im}{m_A^2} g_5 \left[ \left( \frac{s+t}{2} - \mu_\pi^2 \right) (D_1 + D_3) - \left( \frac{u+s}{2} - \mu_\pi^2 \right) (E_1 + E_3) - \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{u+t}{2} - \mu_\pi^2 \right) (F_1 + F_3) \right] \right\} u(p_1) \quad (5.12)$$

onde

$$\bar{u}(p_2) g_5 u(p_1) = \frac{i}{2m} \bar{u}(p_2) (g_5 k_1 - g_5 k_2 - g_5 k_3) u(p_1)$$

Finalmente para  $M_{\overline{IV}}$  obtemos:

$$M_{\overline{IV}} = \sqrt{2} g_N' \bar{u}(p_2) g_5 u(p_1) [4\mu_\pi^2 - s - t - u]^{-1} \times \\ \left\{ -4t f_1 - 2f_3(s+u) + 2f_4 - f_2(2us - \right. \\ \left. - st - ut) + \frac{g_1^2(-u)}{m_0^2 - u} (t-s) + \frac{g_1^2(-s)}{m_0^2 - s} (t-u) \right\} \quad (5.13)$$

Estas expressões serão comparadas com a experiência no Capítulo seguinte.

## CAPÍTULO VI

### COMPARAÇÃO COM A EXPERIÊNCIA

Compararemos os nossos resultados com os dados experimentais para a reação  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$ . Com isto determinaremos qual dos três modelos para  $|M|$  dá os melhores resultados e consequentemente determinaremos  $a_0$  e  $a_2$  (4.52). Foi escolhido o caso de  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$  devido à existência de melhores dados experimentais a baixas energias do píon incidente<sup>50)</sup>.

Neste caso infelizmente não se sabe como fazer uma análise de defasagens, i.e. para metrizar a matriz  $S$  de modo a satisfazer unitariedade, e os dados experimentais vêm sob forma de sessões de choque, que em nosso caso são:

$$\frac{d^4\sigma}{dsdtdu} = \frac{i}{8(2\pi)^5} \frac{\sum |M|^2 I}{[(x^2 + m^2 - \mu_\pi^2)^2 - m^2 \mu_\pi^2]^{1/2}} \quad (6.1)$$

onde as variáveis e  $M$  foram definidas nas equ. (5.4) e (5.3) e

$$I = \iiint d^4p_2 d^4k_2 d^4k_3 \delta(p_2^2 + m^2) \delta(k_2^2 + \mu_\pi^2) \delta(k_3^2 + \mu_\pi^2) \theta(p_{20}) \times \\ \times \theta(k_{20}) \delta^{(4)}(p_1 + k_1 - p_2 - k_2 - k_3) \delta[s + (k_1 - k_2)^2] \times \quad (6.2) \\ \times \delta[t + (k_1 - k_3)^2] \delta[u + (k_2 + k_3)^2] \delta[y + (p_1 - k_2)^2]$$

é o espaço de fase relativístico.

Para baixas energias e tendo em vista a precisão dos dados experimentais é uma excelente aproximação calcular  $|M|^2$  no limiar da reação, i.e. para os valores :

$$\begin{aligned}x_0 &= (m + 2\mu_\pi)^2 \\y_0 &= m^2 + \mu_\pi^2 - \mu_\pi(2m^2 + 3\mu_\pi^2 + 4m\mu_\pi)/(m + 2\mu_\pi) \\u_0 &= 4\mu_\pi^2 \\s_0 &= t_0 = -\mu_\pi^2(2m + \mu_\pi)/(m + 2\mu_\pi)\end{aligned}\quad (6.3)$$

e considerá-lo constante ao calcular

$$\sigma = \iiint \frac{\partial^4 \sigma}{\partial s \partial t \partial u \partial y} ds dt du dy \quad (6.4)$$

Neste caso obtemos para a integral de I:

$$\begin{aligned}\int dy ds du dt I &= \\&= \pi^2/4 \times \int_{4\mu_\pi^2}^{(\bar{x}-m)^2} du \left\{ [u - (\bar{x}+m)^2] [u - (\bar{x}-m)^2] \frac{u - 4\mu_\pi^2}{u} \right\}^{1/2} \quad (6.5)\end{aligned}$$

$|M|^2$  calcula-se a partir da equ. (5.3) e obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{spin}} |M|^2 &= 4 \left\{ 2 p_1 \cdot \alpha P_2 \cdot \alpha + (m^2 - p_1 \cdot P_2) \alpha^2 + 2m G_4 + \right. \\&\quad \times [(k_1 + k_2) \cdot (k_1 + k_3) \alpha \cdot (P_1 - P_2) + (k_1 + k_3) \cdot (P_1 + P_2) \alpha \cdot (k_1 + k_2) - \\&\quad - (k_1 + k_2) \cdot (P_1 + P_2) \alpha \cdot (k_1 + k_3)] + G_4^2 [(k_1 + k_2)^2 (k_1 + k_3)^2 + \\&\quad \left. + (m^2 + p_1 \cdot P_2) + 4(k_1 + k_2) \cdot (k_1 + k_3) P_2 \cdot (k_1 + k_2) P_1 \cdot (k_1 + k_3) - \right. \\&\quad \left. - 2p_1 \cdot (k_1 + k_3) P_2 \cdot (k_1 + k_3) (k_1 + k_2)^2 - 2p_1 \cdot (k_1 + k_2) P_2 \cdot (k_1 + k_2) (k_1 + k_3)^2 \right\} \quad (6.6)\end{aligned}$$

onde

$$\alpha_\mu = G_1 k_1^\mu + G_2 k_2^\mu + G_3 k_3^\mu$$

A comparação com a experiência da referência 51 é feita na Fig. III. Conclui-se que os comprimentos de espalhamento  $\pi-\pi$  devem ser:

$$a_0 = 0.30 \mu_\pi^{-1} \quad (6.7)$$

$$a_2 = -0.09 \mu_\pi^{-1}$$

Os resultados do presente trabalho podem ser resumidos da seguinte maneira. Parece que o conjunto de partículas elementares composto de  $N$ ,  $A_1$ ,  $\varphi$  e  $\pi$  pode ser descrito satisfatoriamente por meio de Lagrangeanas efetivas, pelo menos a baixas energias. Certas ambiguidades podem ser resolvidas com o auxílio de dados experimentais. Um passo a mais seria expandir estes resultados para o grupo  $SU(3) \times SU(3)$ ; o maior problema neste caso é de como quebrar esta simetria até  $SU(2) \times SU(2)$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. Veja e.g.: L.B. Okun, Ann. Nucl. Sci. 9, 61(1959)
2. M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962); Physics 1, 63(1964)
3. Veja e.g.: S. L. Adler & R. F. Dashen, "Current Algebras", W.A. Benjamin Inc. (1968)
4. S.L. Adler, Phys. Rev. Letters 14, 1051 (1965); W.I. Weissberger Phys. Rev. Letters 14, 1047(1965)
5. N. Cabbibo & L.A. Radicati, Phys. Letters 19, 697 (1966)
6. S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 17, 616 (1966)
7. Veja e.g.: Y. Tomozawa, Nuovo Cimento 46, 707 (1966)
8. Y. Nambu, Phys. Rev. 106, 1366 (1957)
9. W.R. Frazer & J. Fulco, Phys. Rev. Letters 2, 365 (1959)
10. J. J. Sakurai, Ann. Phys. 11, 1 (1960); M. Gell-Mann & F. Zachariasen, Phys. Rev. 124, 953 (1961)
11. S. D. Drell, Scuola Internazionale di Fisica "Enrico Fermi" - 1962, Academic Press.
12. V. Wataghin Nuovo Cimento 54A, 805 (1968)
13. N. Barash-Schmidt et al., Review of Particle Properties, UCRL - 8030, agosto 1968.
14. N. M. Kroll, T.D. Lee & B. Zumino, Phys. Rev. 157, 1376 - (1967)
15. M. Gell-Mann & R. Feynman, Phys. Rev. 109, 193 (1958); - S.S. Gershtein & I. B. Zeldovitch, Soviet Phys. JETP 2, 576 (1956)
16. M. Gell-Mann & M. Levy, Nuevo Cimento 16, 705 (1960); Y. Nambu Phys. Rev. Letters 4, 380 (1960); Chou Kuang-Chao, Soviet Phys. JETP 12, 492 (1961)
17. M. Goldberger & S. Treiman, Phys. Rev. 110, 1178 (1958)
18. H. Pagels, "Hadronic Corrections to the Goldberger-Treiman Relation", Rockefeller Univ. (1969); onde se discute a possível origem desta diferença de 10%.
19. Y. Nambu & D. Lurié, Phys. Rev. 125, 1429(1962); E. Shrauner Phys. Rev. 131, 1847 (1963)
20. C. N. Yang & F. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954)

21. S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 18, 188 (1967)  
       J. Schwinger, Phys. Letters 24B, 473 (1967)  
       J. Cronin, Phys. Rev. 161, 1483 (1967)  
       F. Gursey, Ann. Phys. (N.Y.) 12, 91 (1961)  
       K. Nishijima, Nuovo Cimento II, 698 (1959)
22. J. Goldstone, A. Salam & S. Weinberg, Phys. Rev. 127, 965  
       (1962); J. A. Swieca, "Quebra Espontânea de Simetrias",  
       Tese de Docência Livre, Univ. de São Paulo (1967)
23. T. D. Lee, S. Weinberg & B. Zumino, Phys. Rev. Letters 18,  
       1029 (1967)
24. Veja e.g.: J. Wess & B. Zumino, Phys. Rev. 163, 1727 (1967)
25. T. Goto & T. Imamura, Progr. Theoret. Phys. (E) 14, 396  
       (1955); J. Schwinger, Phys. Rev. Letters 3, 296 (1959); R.  
       Serber, Phys. Rev. 42, 545 (1936).
26. M. Gell-Mann & M. Levy, Nuovo Cimento 16, 705 (1960)
27. F. Gursey, Nuovo Cimento 16, 230 (1960); R. Glauber, Phys.  
       Rev. 84, 395 (1951)
28. G. Kramer, H. Rollnik & B. Stech, Z. Physik 154, 564 (1959)
29. J. Cronin, Phys. Rev. 161, 1483 (1967); H. Chang & F. Gur-  
       sey, Phys. Rev. 164, 1752 (1967)
30. S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 18, 507 (1967)
31. K. Karawabayashi & M. Suzuki, Phys. Rev. Letters 16, 255 -  
       (1966); Riazuddin & Rayazzudin, Phys. Rev. 147, 1071 (1966)
32. S. Weinberg & M. Schnitzer Phys. Rev. 164, 1829 (1967)  
       Nosso tratamento está em correspondência biunívoca com o  
       desta referência. Podemos caracterizar o nosso esquema da  
       seguinte maneira:  
       Impomos todas as identidades de Ward-Takahashi decorrentes  
       da simetria  $SU(2) \times SU(2)$ , dominamos as correntes pelos me-  
       mos vetoriais correspondentes e impomos que as funções de  
       vértice tenham a menor dependência possível nos momentos  
       envolvidos. Estas restrições não determinam o parâmetro  $\delta$ ,  
       de acordo com a nossa formulação.
33. S. Gasiorowicz & D.A. Geffen, "Effective Lagrangians", Ar-  
       gonne Natl. Lab. (1967)
34. Experiências de  $e^+ + e^- \rightarrow \rho \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ,  $\gamma + C \rightarrow C + \rho$  indicam  
 $Q_{\rho\pi\pi} / Q_\gamma = 0.8 \pm 0.1$
35. Veja e. g.: T. D. Lee & C.S. Wu, Ann. Rev. Nucl. Sci. 17,  
       513 (1967)
36. Há um termo proporcional a  $(k_1^2 - k_2^2)$  proveniente da tro-  
       ca do meson  $\rho$ , mas cuja omissão em nada afeta as consi-  
       derações e fórmulas que se seguem.
37. S. Adler, Phys. Rev. 137, B1022 (1965); ibid. 139, B1638  
       (1965)
38. Veja e. g.: J. Hamilton & W. S. Woolcock, Rev. of Mod. -  
       Phys. 35, 737 (1963)

39. S. Weinberg, Phys. Rev. 164, 1757 (1968)
40. S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 18, 188 (1967)
41. J. Schwinger, Phys. Letters 24B, 473 (1967)
42. R. Birge et al., Phys. Rev. 139, B1600 (1965)
43. G. Chew & F. Low, Phys. Rev. 101, 1570 (1956)
44. Kin Tae Peng & W. Zoellner, Nucl. Phys. 34, 491 (1962)
45. L. Rodberg, Phys. Rev. 106, 1090 (1957)
46. C. J. Goebel & H. Schnitzer, Phys. Rev. 123, 1021 (1961)
47. S. Lindenbaum & R. M. Sternheimer, Phys. Rev. 104, 1723 - (1956); M. Olsson & G. Jodh, ibid. 145, 1309 (1966)
48. Lay-Mam Chang, Phys. Rev. 162, 1497 (1967). Veja também A. N. Kamal & R. G. Levers, Phys. Rev. 162, 1543 (1962)
49. M. G. Olsson & L. Turner, Phys. Rev. Letters 20, 1127 (1968)
50. Yv. A. Batusov et al., Soviet Phys. Nucl. Phys. 1, 374 - (1965)

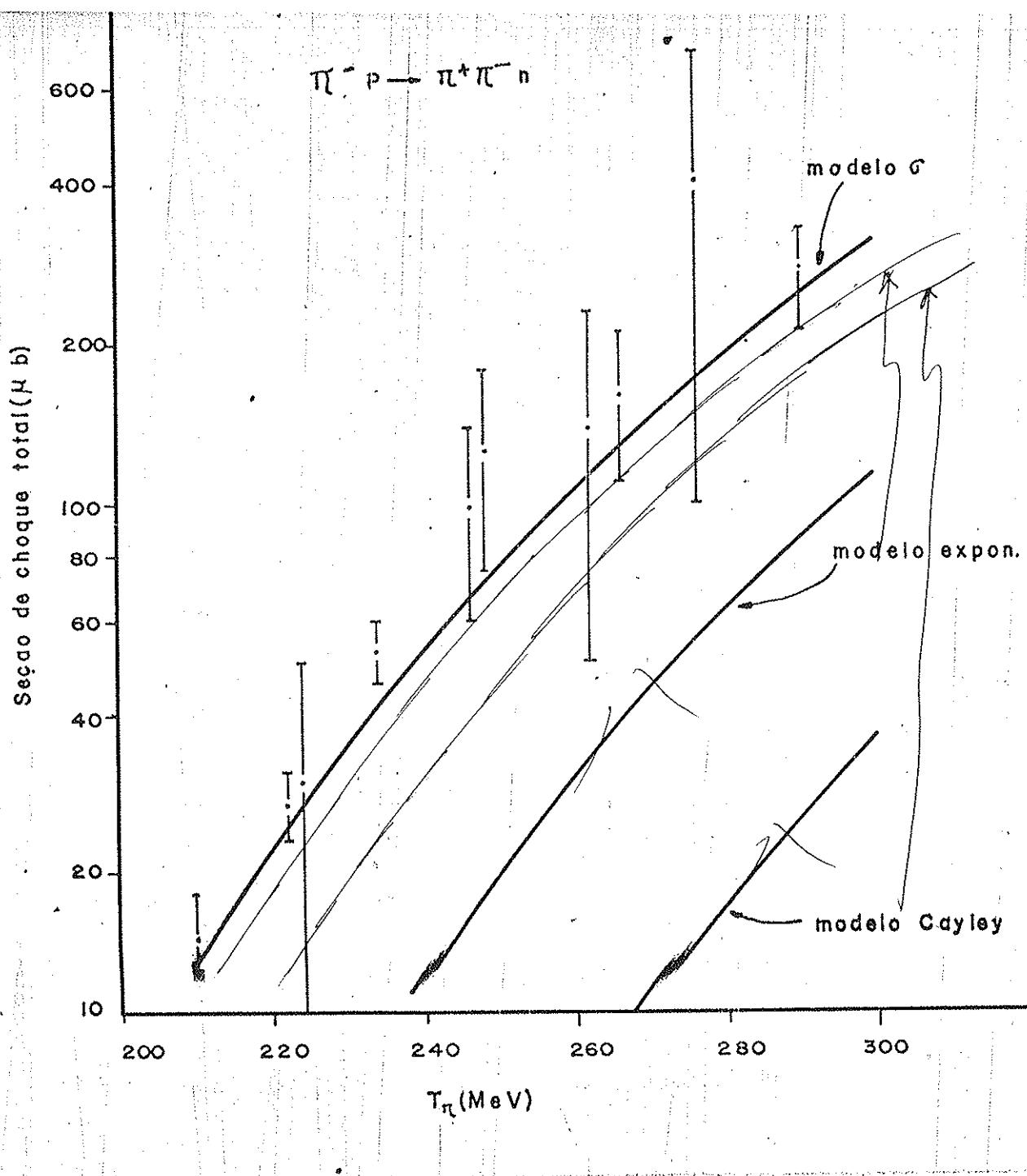


Fig. III. Resultados teóricos e experimentais para o processo  $\pi^- N \rightarrow 2\pi^- N$ .  $T_\pi$  é a energia cinética do  $\pi^-$  incidente no sistema de laboratório.