UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

PARTÍCULAS AUTO-DUAIS EM DUAS DIMENSÕES

Victor de Oliveira Rivelles

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos à obtenção do título de Livre-Docente

Julho, 1989

AGRADECIMENTOS

Sou grato aos colegas Adilson J. da Silva, Horácio Girotti, Marcelo Gomes e Valério Kurak e também à Jorge Gamboa pelas longas discussões e pela colaboração nos trabalhos.

RESUMO

Estudamos as partículas auto-duais com spin e sem spin em duas dimensões. As teorias clássicas são formuladas e suas simetrias estudadas. A quantização é efetuada no formalismo de BFV. No caso bosônico mostramos que é possível reproduzir todos os propagadores dos campos auto-duais conhecidos. No caso fermiônico demonstramos que a teoria de campo resultante pode ser bosônica ou fermiônica. Além disso, a estrutura tensorial de Lorentz dos campos, que na formulação bosônica não é transparente, é tornada explícita na formulação fermiônica. Propomos também uma modificação na integral funcional que fornece a amplitude de transição, modificação esta que deve ser comum a todas as teorias que são invariantes por reparametrizações do parâmetro de evolução.

ABSTRACT

We study self-dual particles and spinning self-dual particles in two dimensions. The classical theories are formulated and their symmetries are studied. The quantization is performed in the BFV formalism. In the bosonic case we show that it is possible to reproduce all the propagators found for the known self-dual fields. In the fermionic case we show that the resulting field theory can be either bosonic or fermionic. Besides that, the Lorentz tensorial structure of the fields, which remains hidden in the bosonic formulation, becomes explicit in the fermionic formulation. We also propose a modification in the functional integral which gives the transition amplitude, and we argue that this modification must be commom to all theories which are invariant by reparametrizations of the evolution parameter.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Campos auto-duais em duas dimensões, também conhecidos como bósons quirais, desempenham um papel fundamental na teoria da corda heterótica [1]. Usando-se a fórmula de bosonização [2] eles podem ser interpretados como excitações solitônicas de férmions de Weyl [3]. De uma maneira mais geral, a fórmula de bosonização pode ser estendida e revela que os bósons quirais fornecem toda uma classe de campos auto-duais de spin superior [4,5]. Os bósons quirais também foram utilizados na construção sistemática do campo de Thirring tendo sido usado, neste caso, campos que movem-se para a esquerda e para a direita [6].

Apesar dos campos auto-duais em duas dimensões obedecerem a uma equação de movimento simples

$$(\eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu})\partial_\nu \phi = 0 \tag{1.1}$$

onde $\eta_{\mu\nu} = diag(+1,-1)$, $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$, $\epsilon_{01} = 1$, ou em componentes $\dot{\phi} = \phi'$, com $\dot{\phi} =$

$\partial_0\phi, \phi' = \partial_1\phi$, sua formulação através de um princípio variacional e sua quantização apresentam várias sutilezas.

Poderíamos partir da Lagrangiana de Klein-Gordon e via um multiplicador de Lagrange agregar um vínculo que reproduzisse (1.1). O vínculo mais simples que poderíamos impor seria $T = \dot{\phi} - \phi'$, um vínculo de segunda classe [7], cujo colchete de Poisson satisfaz

$$\{T(x), T(y)\} = 2\delta'(x-y) \tag{1.2}$$

Já a nível Lagrangiano teríamos problemas pois as equações de movimento provenientes de

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \lambda T \tag{1.3}$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange, fornecem

$$\begin{aligned} \partial^\mu\partial_\mu\phi - \dot{\lambda} + \lambda' = 0 \\ \dot{\phi} - \phi' = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

da qual obtemos $\dot{\lambda} - \lambda' = \dot{\phi} - \phi' = 0$ ou seja dois campos quirais. Neste caso o multiplicador de Lagrange torna-se um campo dinâmico e deixa de ser um mero campo auxiliar utilizado para implementar o vínculo. A quantização produz uma teoria em que o espaço de Hilbert possui uma métrica que não é positiva definida [8].

O passo seguinte seria tentar usar como vínculo o quadrado do vínculo anterior [9], isto é

$$T = (\dot{\phi} - \phi')^2 \tag{1.5}$$

Esse vínculo é de primeira classe [7]

$$\{T(x), T(y)\} = \delta'(x-y)(T(x) + T(y)) \tag{1.6}$$

e está associado a uma invariância local na formulação Lagrangiana. O tratamento de vínculos quadráticos de primeira classe que são o quadrado de vínculos de segunda classe é problemático [10]. Usualmente, lineariza-se o vínculo quadrático mas neste caso isto conduz à teoria anterior que não é satisfatória. A simetria local gerada pelo vínculo (1.5) pode ser interpretada como uma reparametrização em duas dimensões com o multiplicador de Lagrange fazendo o papel da componente λ^{++} do tensor energia-momento (as componentes do cone de luz de um vetor V^μ em duas dimensões são definidas por $V^\pm = V^0 \pm V^1$). A teoria é quantizada no gauge $\lambda^{++} = 0$ e uma anomalia é gerada na simetria local. Para remover a anomalia um termo do tipo Wess-Zumino é acrescentado à teoria original [11].

Uma alternativa para descrever bósons quirais, e que evitam anomalias, utiliza uma equação de movimento não local proveniente de uma Lagrangiana também não local [3]

$$L = \frac{1}{4}\int dx_1\, dy_1\, \chi(x_0,x_1)\,\epsilon(x_1 - y_1)\,\dot{\chi}(x_0,y_1) - \frac{1}{2}\int dx_1 \chi^2(x_0,x_1) \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\,\dot{\chi}(x_0,y_1) - \chi(x_0,x_1) = 0 \tag{1.8}$$

Obviamente a equação de movimento (1.8) implica em que χ é um bóson chiral. Note que as condições de contorno a serem satisfeitas por χ, isto é, $\chi(+\infty) = -\chi(-\infty)$ mostram que ele pode descrever um sóliton. Esta formulação possui um vínculo de segunda classe [12]

$$T = \Pi - \phi' \tag{1.9}$$

$$\{T(x), T(y)\} = 2\delta'(x-y) \tag{1.10}$$

onde Π é o momento canonicamente conjugado à χ. Isso significa que devemos utilizar colchetes de Dirac, e, em particular, obtemos

$$\{\chi(x), \chi(y)\}_D = \delta'(x-y) \tag{1.11}$$

onde $\{\}_D$ indica colchetes de Dirac. Isso explica a relação de comutação não usual que aparece na ref.[3], $[\chi(x), \chi(y)] = i\delta'(x-y)$. Esta formulação não é covariante pelo grupo de Poincaré completo mas por uma versão contraída em que os geradores P_0 e P_1 são iguais.

A equação de movimento (1.8), no entanto, é covariante pelo grupo de Poincaré completo [3].

Utilizando o campo χ, podemos também introduzir um novo campo não-local [3]

$$\chi(x) = \frac{1}{2} \int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\phi(x_0, y_1) \tag{1.12}$$

mas que é descrito por uma Lagrangiana local

$$L = \frac{1}{2}\phi'(\dot{\phi} - \phi') \tag{1.13}$$

As equações de movimento são

$$\dot{\phi}' - \phi'' = 0 \tag{1.14}$$

demonstrando que ϕ é quiral se condições de contorno apropriadas forem utilizadas. Esse campo ϕ apesar de ser não-causal [5] pode ser utilizado, através da fórmula de bosonização, para a construção de campos causais [4,5].

Em vista das diferentes formulações para descrever bósons quirais vamos apresentar, neste trabalho, uma formulação para partículas quirais (ou auto-duais), isto é, partículas relativísticas de massa nula que movem-se apenas para a esquerda, como uma forma alternativa para compreender algumas das propriedades dos bósons quirais.

No capítulo 2 apresentamos a partícula bosônica auto-dual [13]. Construímos uma ação requerendo que a mesma seja invariante por reparametrização e encontramos uma família de partículas auto-duais dependendo de um parâmetro real $\gamma \neq 0$. A quantização é efetuada no formalismo de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) [14] e algumas considerações referentes à teoria de campos resultante são feitas utilizando a quantização operatorial. Para $\gamma = 1$ reproduzimos a formulação do campo ϕ (1.13) enquanto para $\gamma = -1$ encontramos a formulação do campo χ (1.7). Para γ arbitrário obtemos a classe de campos auto-duais descobertos na ref.[4]. Para $\gamma = 0$ a teoria perde a invariância por reparametrização e formalmente reproduz a formulação (1.3). Para que a teoria seja causal é necessário que γ seja um inteiro negativo [5].

No terceiro capítulo estudamos as partículas auto-duais com spin [15] (spinning self-dual particles). Elas são obtidas utilizando-se a técnica da raiz quadrada [16] originalmente proposta para obter-se uma teoria supersimétrica à partir de uma teoria puramente bosônica. A técnica consiste, essencialmente, em introduzir variáveis de Grassmann $\theta_\mu(\mu = 0, \ldots, D-1$, onde D é a dimensão do espaço-tempo) e a partir delas construir vínculos fermiônicos $\mathcal{S}$ tais que seus colchetes de Poisson sejam proporcionais aos vínculos bosônicos. Quando aplicado à partícula relativística [17] a amplitude de transição fornece o propagador de Feynman para o campo de Dirac, enquanto à nivel de partícula aparece uma supersimetria entre as coordenadas X_μ e θ_μ da partícula com spin.

Quando aplicamos a técnica da raiz quadrada às partículas bosônicas auto-duais obtemos uma classe de partículas auto-duais dependentes do parâmetro γ se γ for negativo e ímpar. A ação obtida é invariante por reparametrização e por transformações de supersimetria locais. A teoria é quantizada operatorialmente e via BFV. Contrário ao esperado, obtemos tanto bósons quanto férmions. Escrevendo γ como $\gamma = 1 - 2n, n$ um inteiro positivo, demonstramos que para n par obtemos campos fermiônicos enquanto que para n ímpar obtemos campos bosônicos. Além disso, esta formulação torna manifesta a estrutura tensorial de Lorentz dos campos envolvidos, estrutura esta ausente nas formulações anteriores.

Para o cálculo das amplitudes de transição no formalismo de BFV propomos uma modificação na integral funcional usual. Isso é devido ao fato de que a teoria clássica apresenta mais de uma trajetória (clássica) para um dado conjunto de condições de contorno. É necessário, portanto, modificar a integral funcional adicionando um termo que selecione apenas uma das trajetórias clássicas. A descrição detalhada desse procedimento encontra-se no Apêndice, onde também apresentamos argumentos de que essa modificação é válida para qualquer teoria invariante por reparametrizações do parâmetro de evolução, como as teorias de cordas ou a relatividade geral [18]. No Apêndice também é feito uma breve discussão da quantização de BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) [19] no formalismo de BFV.

CAPÍTULO 2

PARTÍCULAS BOSÔNICAS AUTO-DUAIS

Uma partícula relativística de massa nula que move-se para a esquerda pode ser caracterizada pela igualdade entre sua energia e seu momento, isto é, $P_0 = P_1$. Além disso, devemos requerer que a ação que descreve tal partícula seja invariante por reparametrizações em τ, o tempo próprio da partícula. Isto, por sua vez, implica que existe um vínculo de primeira classe, T, e que a Hamiltoniana canônica é nula [7]. A ação pode ser escrita como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(P^\mu \dot{X}_\mu + NT \right) \tag{2.1}$$

onde N é o multiplicador de Lagrange que implementa o vínculo T e $\dot{X}_\mu = \frac{dX_\mu}{d\tau}$.

A escolha mais simples para T seria

$$T = P_0 - P_1 \tag{2.2}$$

porém, sob a reparametrização

$$\delta P_\mu = 0, \qquad \delta X_\mu = \epsilon \dot{X}_\mu, \qquad \delta N = (\epsilon N)^{\cdot} \tag{2.3}$$

com parâmetro $\epsilon(\tau)$, verificamos facilmente que a ação (2.1) não é invariante.

A próxima escolha mais simples poderia ser $T = (P_0 + P_1)(P_0 - P_1)$ mas este é o vínculo da partícula relativística usual e não implica que ela move-se apenas para a esquerda. Poderíamos, alternativamente, escolher $T = (P_0 - P_1)^2$ mas, como comentado anteriormente, existem problemas com vínculos quadráticos de primeira classe e sua linearização (2.2), como vimos, não produz uma teoria satisfatória.

Devemos então considerar vínculos do tipo $T = P_0(P_0 - P_1)$ ou $P_1(P_0 - P_1)$ que são essencialmente equivalentes. De fato, vamos tomar uma versão generalizada de digamos $P_1(P_0 - P_1)$ e considerar

$$T = (P_0 - P_1)P_1^{\gamma} \tag{2.4}$$

com $\gamma \neq 0$. Obviamente T é um vínculo de primeira classe. Utilizando as equações de movimento provenientes da ação (2.1) encontramos

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{X}_1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{1+\gamma}{\gamma}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ P_1 &= \left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

e substituindo de volta em (2.1) obtemos a Lagrangiana

$$L = \left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(\dot{X}_0 - \dot{X}_1) \tag{2.6}$$

Verificamos facilmente que sob reparametrizações

$$\delta X_\mu = \epsilon \dot{X}_\mu, \qquad \delta N = (\epsilon N)^{\cdot} \tag{2.7}$$

a Lagrangiana (2.6) transforma-se como $\delta L = (\epsilon L)^{\cdot}$ e portanto a ação é invariante se $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$. Estas condições de contorno para ϵ implicam, por sua vez, que devemos escolher uma condição de gauge que forneça uma equação diferencial de segunda ordem para ϵ. Isso permite, então, a escolha do chamado gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$.

No formalismo de quantização de BFV [14] aumentamos o espaço de fase original introduzindo o momento canonicamente conjugado ao multiplicador de Lagrange N, denotado por Π

$$\{N, \Pi\} = 1 \tag{2.8}$$

além de introduzir dois pares de fantasmas, descritos por variáveis de Grassmann, que são canonicamente conjugados $\eta, \overline{\eta}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}}$ e que satisfazem os colchetes de Poisson

$$\{\eta, \overline{\mathcal{P}}\} = \{\overline{\eta}, \mathcal{P}\} = 1 \tag{2.9}$$

Esse novo espaço de fase é dotado de uma simetria global de BRST que é gerado pela carga

$$Q = \eta T + \Pi \mathcal{P} \tag{2.10}$$

Verificamos facilmente que a carga de BRST (2.10) é nilpotente, isto é, $\{Q, Q\} = 0$. As transformações de BRST são definidas como $\delta\phi = \{Q, \phi\}$ e obtemos

$$\begin{gathered}
\delta X_0 = -\eta P_1^\gamma \\
\delta X_1 = -\eta(\gamma + 1 - \gamma \frac{P_0}{P_1}) P_1^\gamma \\
\delta P_0 = \delta P_1 = 0 \\
\delta N = -\mathcal{P} \\
\delta \Pi = 0 \\
\delta \eta = \delta \mathcal{P} = 0 \\
\delta \overline{\eta} = \Pi \\
\delta \overline{\mathcal{P}} = T
\end{gathered} \tag{2.11}$$

O propagador é definido pela integral funcional †

$$K(X(1), X(2)) = \int DX_\mu \, DP_\mu \, DN \, D\Pi \, D\mathcal{P} \, D\overline{\eta} \, D\overline{\mathcal{P}} \, D\eta \, \Theta(I) \, e^{iS_{ef}} \tag{2.12}$$

onde $I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, N$ e a ação efetiva S_{ef} é dada por

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (P^\mu \dot{X}_\mu + \Pi \dot{N} - \mathcal{P}\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} - \{Q, \Psi\}) \tag{2.13}$$

e onde Ψ é o férmion fixador de gauge [14]. Em (2.12) está ainda subentendido um fator de normalização arbitrário que multiplica toda a integral funcional.

Como vimos anteriormente uma escolha de gauge conveniente é o gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$ que pode ser obtido se escolhermos

$$\Psi = N\overline{\mathcal{P}} \tag{2.14}$$

Utilizando (2.10) obtemos

$$\{Q, \Psi\} = -NT - \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}} \tag{2.15}$$

de forma que a ação efetiva (2.13) torna-se

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (P^\mu \dot{X}_\mu + \Pi \dot{N} - \mathcal{P}\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + NT + \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}}) \tag{2.16}$$

As equações de movimento clássicas fornecem

$$\begin{aligned}
&\dot{X}_0 + NP_1^\gamma = 0 \\
&\dot{X}_1 - N(\gamma + 1 - \gamma\frac{P_0}{P_1})P_1^\gamma = 0 \\
&\dot{P}_0 = \dot{P}_1 = 0 \\
&\dot{N} = 0 \\
&\dot{\Pi} - T = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

† Veja o Apêndice para uma discussão detalhada de (2.12)

enquanto que para os fantasmas encontramos

$$\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}} = 0$$

$$\dot{\overline{\mathcal{P}}} = 0$$

$$\dot{\eta} + \mathcal{P} = 0$$

$$\dot{\mathcal{P}} = 0 \tag{2.18}$$

Devemos escolher condições de contorno que sejam invariantes pelas transformações de BRST (2.11). Para as variáveis canônicas (X_μ, P_μ) escolhemos as condições de contorno $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1)$ e $X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$. Para (N, Π) tomamos como condições de contorno $\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2) = 0$. Para os fantasmas podemos eliminar $\mathcal{P}$ derivando novamente a terceira equação em (2.18) obtendo $\ddot{\eta} = 0$. Tomamos então como condições de contorno para as variáveis $(\eta, \overline{\mathcal{P}})$ $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0$. Similarmente, para as variáveis $(\overline{\eta}, \mathcal{P})$ podemos escolher as condições de contorno $\overline{\eta}(\tau_1) = \overline{\eta}(\tau_2) = 0$. Verificamos facilmente que essas condições de contorno são consistentes com as transformações de BRST (2.11).

Podemos, agora, efetuar as integrações funcionais. A integração funcional em $\mathcal{P}$ produz um $\delta(\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}})$ que pode ser utilizado para efetuar a integração em $\overline{\mathcal{P}}$. Isso nos deixa com um termo na ação efetiva da forma $\int d\tau(-\dot{\overline{\eta}}\dot{\eta}) = \int d\tau \overline{\eta}\ddot{\eta}$ devido às condições de contorno escolhidas. Efetuando a integral em $\overline{\eta}$ obtemos $\delta(\ddot{\eta})$ que devido às condições de contorno sobre η pode ser reescrito como $(det\, \partial_\tau^2)\, \delta(\eta)$. A integral em η é trivial restando apenas o fator com o determinante.

O determinante de ∂_τ^2 pode ser calculado no espaço Euclidiano usando a regularização da função ζ de Riemann. Vamos definir a equação de autovalores

$$-\partial_\tau^2\, \psi_n = \lambda_n^2\, \psi_n \tag{2.19}$$

onde ψ_n são as autofunções com autovalores λ_n. A solução de (2.19) que satisfaz as mesmas condições de contorno de η, isto é, $\psi_n(\tau_1) = \psi_n(\tau_2) = 0$ tem autovalores $\lambda_n = \frac{n\pi}{\Delta\tau}$

com $n = 0, 1, \ldots$ e $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$. O determinante do operador ∂_τ^2 é o produto de seus autovalores, excetuando-se o modo zero, isto é,

$$det\left(-\partial_\tau^2\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{(\Delta\tau)^2} \tag{2.20}$$

Tomando o logarítimo obtemos

$$\ln det\left(-\partial_\tau^2\right) = 2\left(\ln \frac{\pi}{\Delta\tau}\zeta(0) + \sum_{n=1} \ln n\right) \tag{2.21}$$

onde a função ζ de Riemann é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2} \tag{2.22}$$

Tomando a derivada com relação à s em (2.22) obtemos

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\ln n, \qquad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{2.23}$$

Portanto, podemos reescrever o último termo de (2.21) usando (2.23) e obtemos

$$\ln det\left(-\partial_\tau^2\right) = \ln 2\Delta\tau \tag{2.24}$$

e portanto

$$det\left(-\partial_\tau^2\right) = 2\Delta\tau \tag{2.25}$$

Dessa forma, a integração funcional dos fantasmas fornece um fator $\Delta\tau$.

A integração em Π fornece $\delta(\dot{N})$ ou seja a condição de gauge do tempo próprio. Esse delta funcional anula todos os modos de $N(\tau)$ exceto $N(0)$ de forma que a integral funcional reduz-se a uma integral ordinária sobre $N(0)$, além de contribuir com um fator $(det\partial_\tau)^{-1}$. Como $N(\tau)$ não satisfaz condições de contorno (as condições de contorno são impostas em $\Pi(\tau)$), $det\partial_\tau$ não pode ser determinado. Como ele não envolve $\Delta\tau$ podemos modificar a medida de integração $DN \to DN\,(det\partial_\tau)$ e dessa forma absorver o determinante. O termo

$\Theta(I)$ reduz-se à $\Theta(N(0)\Delta\tau)$ de forma que os limites de integração para $N(0)$ são de 0 à ∞, assumindo $\Delta\tau > 0$.

Para efetuarmos a integração em X_μ vamos fazer uma mudança de variáveis

$$X_\mu(\tau) = X_\mu(1) + \frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1) + Y_\mu(\tau) \tag{2.26}$$

onde $\Delta X_\mu = X_\mu(2) - X_\mu(1)$, de forma que as condições de contorno para Y_μ são $Y_\mu(\tau_1) = Y_\mu(\tau_2) = 0$. A mudança de variáveis em (2.26) tem o jacobiano igual a 1. A ação efetiva (2.16) fica então com a seguinte forma

$$S_{ef} = \int d\tau[P^\mu\left(\frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau} + \dot{Y}_\mu\right) + N(0)T] \tag{2.27}$$

A integral em Y_μ fornece $\delta(\dot{P}_\mu)$. Utilizando os mesmos argumentos que foram utilizados para $\delta(\dot{N})$ concluimos que a integral funcional em P_μ produz um fator $(det\partial_\tau)^{-2}$ que pode ser absorvido na medida de P_μ e a integral funcional reduz-se a uma integral ordinária sobre $P_\mu(0)$, que denotamos por p_μ. Dessa forma, o propagador (2.12) fornece

$$K(X(1), X(2)) = \int_0^\infty dN(0) \int_{-\infty}^{+\infty} d^2p\, \Delta\tau\, e^{i(p\cdot\Delta X + N(0)T\Delta\tau)} \tag{2.28}$$

onde T é calculado com $P_\mu \to p_\mu$. Definindo $c = N(0)\Delta\tau$ (que classicamente é igual à $\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, N(\tau)$) podemos reescrever (2.28) como

$$K(X(1), X(2)) = \int_0^\infty dc \int_{-\infty}^{+\infty} d^2p\, e^{i(p\cdot\Delta X + cT)} \tag{2.29}$$

e não há nenhuma dependência em $\Delta\tau$ no propagador. A integral em c pode ser efetuada fornecendo

$$K(X(1), X(2)) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{ip\cdot\Delta X} \frac{p_1^{-\gamma}}{p_0 - p_1 + i\epsilon} \tag{2.30}$$

Para $\gamma = 1$ obtemos o mesmo propagador do campo de dimensão zero da ref.[3] cuja Lagrangiana é (1.13). Para $\gamma = -1$ obtemos o propagador para o campo de dimensão um da ref.[3] cuja Lagrangiana é (1.7). Para outros valores de γ obtemos os propagadores correspondentes aos setores solitônicos construídos na ref.[4]. Note, porém, que levando em conta os resultados da ref.[5] o campo de dimensão zero, com $\gamma = 1$ não é causal, enquanto os outros campos são causais se γ for um inteiro negativo, isto é, $\gamma = 1-2s$, $s = 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ †

Vamos agora utilizar a quantização operatorial para determinarmos a dimensão (e portanto o spin) do campo quando (2.30) é encarado do ponto de vista da teoria de campos. A primeira quantização requer que o vínculo (2.4) seja considerado como um operador e seja imposto sobre as funções de onda ψ, isto é,

$$T\psi = 0 \tag{2.31}$$

Na segunda quantização devemos requerer que (2.31) seja a equação de movimento para um campo ψ proveniente de uma ação adequada. Obviamente obtemos (2.31) à partir da ação

$$S = \int d^2x\, \psi T \psi \tag{2.32}$$

Concluímos, então, que a dimensão de ψ é $\frac{1}{2}(1-\gamma) = s$ e portanto ψ pode ser um campo bosonico ou fernionico de spin s.

Obviamente teríamos chegado às mesmas conclusões se tivessemos reescrito o propagador $K(X(1), X(2))$ como $< T\psi(x_1)\psi(x_2) >$ e feito a análise dimensional de (2.30).

Note que apesar de determinarmos a dimensão de ψ através de (2.32) nada podemos concluir acerca de sua estrutura tensorial de Lorentz. O mesmo ocorre com a formulação (1.7) que envolve um campo de spin 1. Veremos, no próximo capítulo, como isso pode ser desvendado na formulação da partícula auto-dual com spin.

† Nosso γ está relacionado ao γ da ref.[5] através da equação $\gamma_{nosso} = 1 - \frac{\gamma^2}{2\pi}$.

CAPÍTULO 3

PARTÍCULAS AUTO-DUAIS COM SPIN

A aplicação da técnica da raiz quadrada [16] requer a introdução de variáveis de Grassmann $\theta_\mu(\tau)$, $\mu = 0, 1$, para a construção de vínculos fermiônicos $\mathcal{S}$ tais que seu colchete de Poisson seja proporcional ao vínculo bosônico (2.4), isto é,

$$\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} = \alpha T \tag{3.1}$$

com $\alpha \neq 0$. As variáveis de Grassmann devem satisfazer os colchetes de Poisson

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = 2i\eta_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Requerendo que $\mathcal{S}$ seja linear nas variáveis de Grassmann com coeficientes que dependam de P_μ, e que esses coeficientes possuam potências inteiras de P_μ (pois de outra forma a quantização seria problemática envolvendo operadores elevados à potências não inteiras), concluímos que γ em (2.4) deve ser ímpar de modo que T possua uma potência par de P_μ.

Nesse caso podemos encontrar facilmente os coeficientes da expansão de $\mathcal{S}$ em termos de θ_μ e, com uma normalização apropriada, obtemos

$$\mathcal{S} = -\frac{i}{4}\theta_0(1-2\alpha-\frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - \frac{i}{4}\theta_1(1+2\alpha-\frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}, \qquad \gamma=-1,-3,\ldots \tag{3.3}$$

O sinal relativo entre os dois termos do lado direito da eq.(3.3) não pode ser determinado. Ele corresponde a uma liberdade permitida pela simetria discreta $\theta_\mu \rightarrow -\theta_\mu$, em (3.2), válido para cada componente independentemente. Usando essa liberdade escolhemos o mesmo sinal para os dois termos de (3.3). O número real α que aparece em (3.1) e (3.3) também não é determinado. Ele corresponde à uma liberdade permitida pela simetria global $\theta_+ \rightarrow \tilde{\alpha}\theta_+$, $\theta_- \rightarrow \tilde{\alpha}^{-1}\theta_-$, $\theta_\pm = \theta_0 \pm \theta_1$, que é manisfesta quando reescrevemos (3.2) nas componentes do cone de luz

$$\{\theta_\pm, \theta_\pm\} = 0$$

$$\{\theta_+, \theta_-\} = 4i \tag{3.4}$$

Uma vez que não encontramos nenhum valor especial para α que simplificasse as expressões em que ele aparece, vamos mante-lo em todas as fórmulas. Obviamente, os resultados que obtemos são independentes de α e a única restrição que existe é $\alpha \neq 0$.

Podemos, então, escrever a ação

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu\dot{\theta}_\mu + NT + \lambda\mathcal{S}] - \frac{i}{4}\theta^\mu(\tau_2)\theta_\mu(\tau_1) \tag{3.5}$$

onde N e λ são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos T e $\mathcal{S}$, respectivamente. Adicionamos à (3.5) um termo que depende dos valores de θ_μ nos extremos da trajetória e que foi escolhido para que quando seja feita a variação da ação para obter-se as equações de movimento para θ_μ, esta variavel satisfaça apenas uma condição de contorno $\theta_\mu(\tau_1) + \theta_\mu(\tau_2) = \gamma_\mu$, já que as equações para θ_μ são de primeira ordem. As condições de contorno para X_μ continuam sendo $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1), X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$.

Eliminando P_μ através de sua equação de movimento

$$P_0 = \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{X}_1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{1+\gamma}{\gamma}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}} +$$
$$+ \lambda(\theta_0+\theta_1)[\frac{1-\gamma}{8\gamma^2}\frac{\dot{X}_1}{N^2}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-3\gamma}{2\gamma}} + \frac{1+\gamma}{8\gamma^2}\frac{1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}]+$$
$$+ \alpha\frac{1+\gamma}{4\gamma}\lambda(\theta_0-\theta_1)\frac{1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}$$
$$P_1 = \left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}}[1+\frac{1}{4\gamma}\lambda(\theta_0+\theta_1)\frac{1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{-\frac{1+\gamma}{2\gamma}}] \tag{3.6}$$

podemos reescrever a ação (3.5) como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(\dot{X}_0-\dot{X}_1) + \frac{i}{4}\theta^\mu\dot{\theta}_\mu$$
$$+ \frac{1}{4\gamma}\lambda(\theta_0+\theta_1)\frac{1}{N}(\dot{X}_0-\dot{X}_1)\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - \frac{1}{2}\alpha\lambda(\theta_0-\theta_1)\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}}] + b.t. \tag{3.7}$$

onde b.t. é o último termo da eq.(3.5). Sob reparametrizações

$$\delta X_\mu = \epsilon\dot{X}_\mu, \qquad \delta N = (\epsilon N)^{\cdot}$$
$$\delta\theta_\mu = \epsilon\dot{\theta}_\mu, \qquad \delta\lambda = (\epsilon\lambda)^{\cdot} \tag{3.8}$$

verificamos que a variação da Lagrangiana é

$$\delta L = (\epsilon L)^{\cdot} \tag{3.9}$$

de forma que para a ação (3.5) ser invariante é necessário que $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$.

Para determinarmos as trasformações de supersimetria local geradas pelo vínculo $\mathcal{S}$, calculamos o colchete de Poisson de $\mathcal{S}$ com X_μ e θ_μ e obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta X_0 &= \frac{1}{4}\xi(\theta_0+\theta_1)P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta X_1 &= \frac{1}{8}\xi(\theta_0+\theta_1)[\gamma+1-(\gamma-1)\frac{P_0}{P_1}]P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} - \alpha\frac{1+\gamma}{4}\xi(\theta_0-\theta_1)P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta\theta_0 &= \frac{1}{2}\xi(1-2\alpha-\frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} \\
\delta\theta_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1+2\alpha-\frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

com P_μ dado por (3.6) enquanto para os multiplicadores de Lagrange temos, de acordo com o formalismo de BFV [14]

$$
\delta N = \alpha\xi\lambda, \qquad \delta\lambda = \dot{\xi} \tag{3.11}
$$

onde $\xi(\tau)$ é o parâmetro para a supersimetria local. As transformações de supersimetria assim obtidas não possuem a forma usual e são muito complicadas. Enquanto que para o caso da partícula com spin essas transformações podem ser interpretadas como transformações para a supergravidade em uma dimensão acoplada à campos escalares, aqui elas não possuem essa interpretação ou qualquer outra interpretação simples.

Após usar (3.6) em (3.10) obtemos para a variação da Lagrangiana

$$
\delta L = \frac{d}{d\tau}[-\frac{1}{8}\xi(\theta_0+\theta_1)(\dot{X}_0-\dot{X}_1)\frac{1}{N}\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \alpha\frac{\gamma}{4}\xi(\theta_0-\theta_1)\left(-\frac{\dot{X}_0}{N}\right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}}] \tag{3.12}
$$

enquanto que a variação do último termo da eq.(3.5) fornece

$$
\begin{aligned}
-\frac{i}{4}\delta[\theta^\mu(2)\theta_\mu(1)] = &-\frac{i}{8}\xi(2)\{[\frac{1}{\gamma}[\dot{X}_0(2)-\dot{X}_1(2)]\frac{1}{N(2)}\left(-\frac{\dot{X}_0(2)}{N(2)}\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \\
&-\alpha\frac{1+\gamma}{4\gamma}\lambda(2)[\theta_0(2)-\theta_1(2)]\frac{1}{N(2)}][\theta_0(1)+\theta_1(1)] \\
&-2\alpha[\left(-\frac{\dot{X}_0(2)}{N(2)}\right)^{\frac{1+\gamma}{2\gamma}} + \frac{1+\gamma}{8\gamma}\lambda(2)[\theta_0(2)+\theta_1(2)]\frac{1}{N(2)}][\theta_0(1)-\theta_1(1)]\} \\
&-(\tau_1\leftrightarrow\tau_2)
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Adicionando os dois termos verificamos que para a ação ser invariante é necessário que $\xi(\tau_2) = \xi(\tau_1) = 0$ como no caso da partícula com spin [17].

As condições de contorno que encontramos para os parâmetros das transformações locais implicam que as condições de gauge escolhidas levam à equações diferenciais de segunda ordem para os mesmos. Dessa forma, podemos escolher o gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$ para reparametrizações e $\dot{\lambda} = 0$ para supersimetria.

Na quantização canonica promovemos P_μ e X_μ a operadores obedecendo relações de comutação canônicas, θ_μ à operadores γ_μ que, de acordo com (3.1), satisfaçam as relações de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

e impomos que o vínculo S (3.3), agora um operador, seja nulo quando aplicado às funções de onda ψ. Obviamente, existe uma representação em que os γ_μ são as matrizes de Dirac 2×2. Vamos tomar $\gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = i\sigma_2$ and $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1$. Nessa representação, usando (3.4), $S\psi = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - P_0 P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ -2\alpha P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \psi = 0 \tag{3.15}$$

Requerendo agora que essa equação seja obtida de uma ação

$$S = \int d^2x\, \overline{\psi} S \psi \tag{3.16}$$

concluímos que a dimensão de ψ é $1 - \frac{1}{4}(\gamma + 1)$. Como $\gamma = -1, -3, \ldots$, podemos reescreve-lo como $\gamma = 1 - 2n$, $n = 1, 2, \ldots$ e encontramos que para n ímpar ψ é um campo bosônico, enquanto que para n par ψ é um campo fermiônico. Em geral, a técnica da raiz quadrada produz uma teoria fermiônica mas neste caso estamos encontrando uma teoria que pode ser bosônica ou fermiônica.

Para $n = 1$, temos $\gamma = -1$ e ψ possui spin 1. A eq.(3.15) ou a ação (3.16) não fornecem nenhuma informação acerca da estrutura tensorial de Lorentz do campo ψ, a não ser que ψ tem que possuir no mínimo um índice espinorial. Levando em conta que as representações do grupo de Lorentz podem ser obtidas à partir da representação fundamental $(\frac{1}{2})$ vamos tomar ψ na representação simétrica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, isto é, $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$. Antes de prosseguir vamos introduzir a matriz conjugação de carga $C = i\sigma_2$ a fim de levantar e abaixar índices espinoriais. Verificamos que C é antisimétrico e $\gamma_\mu C$ e $\gamma_5 C$ são simétricos de forma que podemos expandir $\psi_{\alpha\beta}$ como

$$\psi_{\alpha\beta} = A^\mu(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} + B(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

De fato não necessitamos do campo pseudo-escalar B já que estamos interessados apenas no campo de spin 1, mas como veremos a seguir, as equações de movimento para B são triviais. Utilizando explicitamente a representação das matrizes de Dirac podemos reescrever (3.17) como

$$\psi = \begin{pmatrix} -A^+ & -B \\ -B & A^- \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

que quando inserida em (3.15) fornece as equações

$$\begin{aligned} B(x) - \frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\dot{B}(x_0, y_1) &= B(x) = 0 \\ A^-(x) - \frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\dot{A}^-(x_0, y_1) &= A^+(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto $B = A^+ = 0$ e A^- é um campo auto-dual. Note que acrescentando índices adicionais à ψ não invalida a eq.(3.16) de modo que podemos ainda usa-la como a ação para o campo vetorial.

Para $n = 2$, $\gamma = -3$ e ψ tem spin $\frac{3}{2}$. Vamos tomar ψ na representação totalmente simétrica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \psi^\mu_\alpha(\gamma_\mu C)_{\beta\gamma} + \psi^\mu_\beta(\gamma_\mu C)_{\alpha\gamma} + \psi^\mu_\gamma(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} \tag{3.20}$$

Neste caso (3.15) reduz-se à

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^{-1} - P_0 P_1^{-2} \\ -2\alpha P_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1\beta\gamma} \\ \psi_{2\beta\gamma} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

e encontramos as duas equações seguintes

$$\frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\psi_{2\beta\gamma}(x_0, y_1) - \frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\frac{1}{2}\int dz_1\, \epsilon(y_1 - z_1)\dot{\psi}_{2\beta\gamma}(x_0, z_1) = 0 \tag{3.22}$$

$$\int dy\, \epsilon(x_1 - y_1)\psi_{1\beta\gamma}(x_0, y_1) = 0 \tag{3.23}$$

A eq.(3.23) implica que $\psi_{1\beta\gamma} = 0$; multiplicando $C^{-1}\gamma^\lambda$ por (3.20) encontramos que $\psi_1^\mu = 0$ enquanto que multiplicando $C^{-1}\gamma_5$ por (3.20) encontramos $\psi_2^+ = 0$, onde $\psi_\alpha^\pm = \psi_\alpha^0 \pm \psi_\alpha^1$. Como $\psi_{1\beta\gamma} = 0$ a única componente não nula de $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ é $\psi_{222} = 3\psi_2^-$ e a equação (3.22) implica que ψ_2^- é auto-dual. Portanto, ψ^μ é um fermion de Weyl com $\psi^+ = 0$ e ψ^- auto-dual.

Este procedimento pode ser generalizado para $n > 2$ onde encontramos um campo $\psi_{\alpha\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ totalmente simétrico com spin $\frac{1}{2}(n+1)$ e com apenas uma de suas componentes não nula e auto-dual.

Note também que o caso $n = 0$ pode ser tratado sem nenhuma dificuldade. Temos agora $\gamma = 1$ e ψ está na representação $(\frac{1}{2})$. A eq.(3.15) torna-se

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1 - P_0 \\ -2\alpha P_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.24}$$

que fornece as seguintes equações

$$(\partial_1 - \partial_0)\psi_2 = 0$$

$$\partial_1 \psi_1 = 0 \tag{3.25}$$

Com condições de contorno apropriadas ψ é um férmion de Weyl. Este caso foi descartado porque ele provém de uma teoria bosônica não causal [5].

O procedimento para a quantização de BFV é análoga ao caso da partícula auto-dual. Aumentamos o espaço de fase original introduzindo o momento canonicamente conjugado dos multiplicadores de Lagrange N e λ, denotados por Π_N e Π_λ, respectivamente, satisfazendo os colchetes de Poisson

$$\{N, \Pi_N\} = \{\lambda, \Pi_\lambda\} = 1 \tag{3.26}$$

Além dos fantasmas $\eta, \overline{\eta}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}}$ introduzidos anteriormente para o vínculo T, introduzimos dois novos pares de fantasmas descritos por variáveis reais e canonicamente conjugados, $b, \overline{b}, c, \overline{c}$, que satisfazem os colchetes de Poisson

$$\{\overline{b}, c\} = \{b, \overline{c}\} = -1 \tag{3.27}$$

Esse novo espaço de fase é dotado de uma simetria global de BRST gerado pela carga

$$Q = \eta T + cS + \Pi_N \mathcal{P} + \Pi_\lambda b + \frac{i}{2}\alpha \overline{\mathcal{P}} c^2 \tag{3.28}$$

Verficamos facilmente a nilpotência de Q. As transformações de BRST são dadas por

$$\delta X_0 = -\eta P_1^\gamma + \frac{i}{4} c(\theta_0 + \theta_1) P_1^{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$\begin{aligned} \delta X_1 = & -\eta(\gamma + 1 - \gamma \frac{P_0}{P_1}) P_1^\gamma - \frac{1}{4} c[\theta_0 \left(\frac{1+\gamma}{2} + \alpha(1+\gamma) - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{P_0}{P_1} \right) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} + \\ & + \theta_1 \left(\frac{1+\gamma}{2} - \alpha(1+\gamma) - \frac{\gamma-1}{2}\frac{P_0}{P_1} \right) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}}] \end{aligned}$$

$$\delta P_0 = \delta P_1 = 0$$

$$\delta\theta_0 = \frac{1}{2} c(1 - 2\alpha \frac{P_0}{P_1}) P_1^{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$\delta\theta_1 = -\frac{1}{2} c(1 + 2\alpha \frac{P_0}{P_1}) P_1^{\frac{1+\gamma}{2}}$$

$$\delta N = -\mathcal{P}$$

$$\delta\lambda = b$$

$$\delta\Pi_N = \delta\Pi_\lambda = 0$$

$$\delta\eta = \frac{i}{2}c^2$$

$$\delta\mathcal{P} = 0$$

$$\delta\overline{\eta} = \Pi_N$$

$$\delta\overline{\mathcal{P}} = T$$

$$\delta c = \delta b = 0$$

$$\delta\overline{c} = -\Pi_\lambda$$

$$\delta\overline{b} = \mathcal{S} + i\alpha\mathcal{P}c \tag{3.29}$$

O propagador é definido por †

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) =$$
$$\int DX_\mu\, DP_\mu\, D\theta_\mu\, DN\, D\Pi_N\, D\lambda\, D\Pi_\lambda\, D\mathcal{P}\, D\overline{\eta}\, D\overline{\mathcal{P}}\, D\eta\, Db\, D\overline{c}\, D\overline{b}\, Dc\, \theta(I) e^{iS_{ef}} \tag{3.30}$$

onde a ação efetiva S_{ef} é dada por

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu\dot{\theta}_\mu + \Pi_N\dot{N} + \Pi_\lambda\dot{\lambda} - \mathcal{P}\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + b\dot{\overline{c}} + \overline{b}\dot{c} - \{Q, \Psi\}] \tag{3.31}$$

Como foi mencionado anteriormente uma escolha de gauge conveniente é o gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$ para reparametrizações e $\dot{\lambda} = 0$ para supersimetria local. Podemos obter essas condições de gauge escolhendo Ψ como

$$\Psi = N\overline{\mathcal{P}} + \lambda\overline{b} \tag{3.32}$$

Utilizando (3.28) obtemos

$$\{Q, \Psi\} = -NT + \mathcal{S}\lambda - \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}} - b\overline{b} + i\alpha\overline{\mathcal{P}}c\lambda \tag{3.33}$$

† Veja o Apêndice para detalhes

e a ação efetiva (3.31) torna-se

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + \Pi_N \dot{N} + \Pi_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{P}\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + b\dot{\overline{c}} + \overline{b}\dot{c} +$$
$$+ NT - \mathcal{S}\lambda + \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}} + b\overline{b} - i\alpha\overline{\mathcal{P}}c\lambda] \tag{3.34}$$

As equações clássicas do movimento fornecem

$$\dot{X}_0 + NP_1^\gamma - \frac{i}{4}\lambda(\theta_0 + \theta_1)P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} = 0$$

$$\dot{X}_1 - (\gamma + 1 - \gamma\frac{P_0}{P_1})P_1^\gamma - \frac{1}{4}\lambda[\theta_0 \left(\frac{1+\gamma}{2} - \alpha(1+\gamma) - \frac{\gamma-1}{2}\frac{P_0}{P_1}\right) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} +$$
$$+\theta_1 \left(\frac{1+\gamma}{2} + \alpha(1+\gamma) - \frac{\gamma-1}{2}\frac{P_0}{P_1}\right) P_1^{\frac{\gamma-1}{2}}] = 0$$

$$\dot{P}_0 = \dot{P}_1 = 0$$

$$i\dot{\theta}_0 - \lambda\left(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right) P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} = 0$$

$$i\dot{\theta}_1 - \lambda\left(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1}\right) P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} = 0$$

$$\dot{N} = \dot{\lambda} = 0$$

$$\dot{\Pi}_N - T = 0$$

$$\dot{\Pi}_\lambda + \mathcal{S} = 0 \tag{3.35}$$

enquanto que para os fantasmas encontramos

$$\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}} = 0$$

$$\dot{\mathcal{P}} = 0$$

$$\dot{\eta} + \mathcal{P} + i\alpha c\lambda = 0$$

$$\dot{\overline{\mathcal{P}}} = 0$$

$$\dot{\bar{c}} + \bar{b} = 0$$

$$\dot{b} = 0$$

$$\dot{c} + b = 0$$

$$\dot{\bar{b}} + i\alpha\overline{\mathcal{P}}\lambda = 0 \tag{3.36}$$

Podemos então escolher as seguintes condições de contorno invariantes pelas transformações de BRST (3.29): para as variáveis canônicas (X_μ, P_μ) escolhemos $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1)$ e $X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$ e para (N, Π_N) tomamos $\Pi_N(\tau_1) = \Pi_N(\tau_2) = 0$ como no capítulo anterior. Para θ_μ escolhemos $\theta_\mu(\tau_1) + \theta_\mu(\tau_2) = \gamma_\mu$ e para (λ, Π_λ) tomamos $\Pi_\lambda(\tau_1) = \Pi_\lambda(\tau_2) = 0$. Para os fantasmas temos as seguintes condições de contorno: para as variáveis $(c, \bar{b})$ podemos derivar a penúltima equação de (3.36) e usar a antepenúltima equação concluindo que $\ddot{c} = 0$; podemos, então, escolher $c(\tau_1) = c(\tau_2) = 0$. Para as variáveis $(\eta, \overline{\mathcal{P}})$ podemos derivar a terceira equação de (3.36) e usar a segunda (e a solução para c, isto é, $c(\tau) = 0$) obtendo $\ddot{\eta} = 0$ o que permite a escolha $\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0$. Analogamente, encontramos para as variáveis $(\bar{\eta}, \mathcal{P})$ as condições de contorno $\bar{\eta}(\tau_1) = \bar{\eta}(\tau_2) = 0$ enquanto que para as variáveis $(\bar{c}, b)$ escolhemos $\bar{c}(\tau_1) = \bar{c}(\tau_2) = 0$.

As integrações funcionais podem agora ser efetuadas. Integrando primeiro nos fantasmas obtemos: a integração em b fornece $\delta(\dot{\bar{c}} + \bar{b})$ e a integração em $\bar{b}$ fornece um termo $\int d\tau(-\dot{\bar{c}}\dot{c})$ na ação. A integral em $\mathcal{P}$ fornece $\delta(\dot{\bar{\eta}} - \overline{\mathcal{P}})$ e a integral em $\overline{\mathcal{P}}$ fornece um termo $\int d\tau(-\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta} - i\alpha\bar{\eta}c\lambda)$ na ação. Integrando agora em η obtemos $\delta(\ddot{\bar{\eta}}) = (det\partial_\tau^2)\delta(\bar{\eta})$ utilizando as condições de contorno para η; integrando em $\bar{\eta}$ obtemos $det\partial_\tau^2 = \Delta\tau$. A integração em c produz $\delta(\ddot{\bar{c}}) = (det\partial_\tau^2)^{-1}\delta(\bar{c})$ utilizando as condições de contorno para c; integrando em $\bar{c}$ obtemos $(det\partial_\tau^2)^{-1} = \Delta\tau^{-1}$. Portanto, a integração sobre os fantasmas fornece um fator de $\Delta\tau\,\Delta\tau^{-1} = 1$.

A integração em Π_N e Π_λ produzem, respectivamente, $\delta(\dot{N})$ e $\delta(\dot{\lambda})$, isto é, as condições de gauge apropriadas são implementadas. O $\delta(\dot{N})$, como vimos no capítulo 2 reduz a integral funcional em N à uma integral ordinária em $N(0)$ cujos limites de integração são de 0 à ∞ ao levarmos em conta o fator $\theta(I)$. O $\delta(\dot{\lambda})$ anula todos os modos de λ exceto seu modo zero de forma que a integral funcional reduz-se a uma integral de Berezin sobre $\lambda(0)$.

A integração em X_μ é efetuada do mesmo modo que no capítulo 2. Fazendo a mudança de variáveis (2.26) a ação efetiva reduz-se à

$$S_{ef} = \int d\tau [P\frac{\Delta X}{\Delta\tau} + P\dot{Y} + \frac{i}{4}\theta\dot{\theta} + N(0)T + \lambda(0)\mathcal{S}] \tag{3.37}$$

e a integral em Y_μ reduz a integral funcional em P_μ à uma integral ordinária sobre os p_μ. Resta apenas a integral funcional sobre θ_μ. Efetuando a mudança de variáveis $\theta_\mu = \frac{1}{2}\gamma_\mu + \tilde{\theta}_\mu$ onde $\tilde{\theta}_\mu$ satisfaz as condições de contorno $\tilde{\theta}_\mu(\tau_1) = \tilde{\theta}_\mu(\tau_2) = 0$. A integração funcional em $\tilde{\theta}_\mu$ fornece então um fator $(det\partial_\tau)^2$ que pode ser absorvido na normalização da medida de $D\tilde{\theta}_\mu$. Portanto, o propagador (3.30) fica

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int_0^\infty dN(0) \int d\lambda(0) \int_{-\infty}^{+\infty} d^2p\, e^{i[p\Delta X + N(0)T\Delta\tau + \lambda(0)\mathcal{S}\Delta\tau]} \tag{3.38}$$

onde $\mathcal{S}$ e T são calculados com $P_\mu \to p_\mu$ e $\theta_\mu \to \gamma_\mu$. A integral em $\lambda(0)$ produz

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int_0^\infty dN(0) \int_{-\infty}^{+\infty} d^2p\, \Delta\tau \mathcal{S} e^{i[p\Delta X + N(0)T\Delta\tau]} \tag{3.39}$$

e definindo $c = N(0)\Delta\tau$ verificamos que não há nenhuma dependência em $\Delta\tau$ no propagador. Finalmente, efetuando a integração em c obtemos

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\mathcal{S}}{T} e^{ip\Delta X} \tag{3.40}$$

Utilizando a forma explícita de $\mathcal{S}$ e T em termos de p_μ e γ_μ temos

$$K(X(1),X(2),\gamma_\mu)=\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{[\gamma_0(1-2\alpha-p_0/p_1)+\gamma_1(1+2\alpha-p_o/p_1)]p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0-p_1+i\epsilon}e^{ip\cdot\Delta X} \tag{3.41}$$

e utilizando a representação para as matrizes de Dirac fornecidas anteriormente, o propagador (3.41) fica com a seguinte forma

$$K(X(1),X(2),\gamma_\mu)=\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}e^{ip\cdot\Delta X}K(p) \tag{3.42}$$

$$K(p)=\begin{pmatrix} 0 & p_1^{\frac{\gamma-3}{2}} \\ \frac{2\alpha p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0-p_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Podemos interpretar esse propagador numa teoria de campos se levarmos em conta os resultados obtidos anteriormente. Demonstramos que o campo que descreve a partícula auto-dual com spin é da forma $\psi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_n}$, portanto, podemos escrever o propagador (3.42) como

$$K(X(1),X(2),\gamma_\mu)=\begin{pmatrix} <\psi^\dagger_{2\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{1\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2)> & <\psi^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{1\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2)> \\ <\psi^\dagger_{2\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{2\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2)> & <\psi^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{2\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2)> \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

Por exemplo, para $\gamma=1$, de (3.43) e (3.41) obtemos, no espaço dos momentos,

$$\begin{pmatrix} -<A^-A^+> & <A^+A^+> \\ <A^-A^-> & -<A^+A^-> \end{pmatrix}=\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{-2p_1}{p_0-p_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

que é precisamente (a menos de fatores numéricos) o propagador para as componentes do cone de luz do campo A_μ que satisfaz as equações de movimento (3.19).

A teoria das partículas auto-duais com spin tem a propriedade de descrever bósons ou férmions. De fato, ela reproduz os propagadores da partícula auto-dual bosônica pois de (3.43) a componente não trivial do propagador é $\frac{p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0-p_1}$ que para γ ímpar produz p_1 à uma potência inteira no numerador. Esse é o mesmo resultado que o obtido para a partícula auto-dual bosônica (2.30). A vantagem desta formulação, porém, é que a estrutura tensorial de Lorentz é manifesta e abre a possibilidade de acoplar covariantemente bósons auto-duais à outros campos, principalmente à gravitação.

APÊNDICE

QUANTIZAÇÃO DE BRST

Neste Apêndice vamos apresentar de forma resumida o procedimento de quantização de BRST [19] no formalismo Hamiltoniano de BFV [14].

Vamos considerar um sistema Hamiltoniano con N graus de liberdade descrito pelas coordenadas q_i e momentos canonicamente conjugados $p_i, i = 1, \ldots, N$. O sistema apresenta também p vínculos de primeira classe $\phi_\alpha(p,q), \alpha = 1, \cdots, p$ que satisfazem a álgebra †

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma \qquad (A.1)$$

onde $C^\gamma_{\alpha\beta}$ são as constantes de estrutura que podem, em geral, depender das coordenadas

† Os vínculos de segunda classe já foram eliminados através dos colchetes de Dirac. Nesse caso, todos os colchetes de Poisson que se seguem devem ser substituidos por colchetes de Dirac.

e dos momentos. A ação para o sistema é dada por

$$S = \int_{\tau 1}^{\tau_2} d\tau \,(p\dot{q} - H_0 - \lambda^\alpha \phi_\alpha) \qquad (A.2)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana canonica e λ^α são os multiplicadores de Lagrange que implementam os vínculos ϕ_α.

Vamos estender o espaço de fase original (p, q) considerando os multiplicadores de Lagrange λ^α como coordenadas e introduzindo seus momentos canonicamente conjugados Π_α

$$\{\lambda^\alpha, \Pi_\beta\} = \delta^\alpha_\beta \qquad (A.3)$$

ao mesmo tempo que impomos $\Pi_\alpha = 0$ como novos vínculos. Se denotarmos todos os vínculos por $G_a = (\Pi_\alpha, \phi_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, 2p$ estendemos a álgebra (A.1) para

$$[G_a, G_b] = K^c_{ab} G_c \qquad (A.4)$$

O próximo passo consiste em introduzir um par de fantasmas canonicamente conjugados $(\eta^a, \mathcal{P}_a)$ para cada um dos $2p$ vínculos G_a

$$\{\eta^a, \mathcal{P}_b\} = \delta^a_b \qquad (A.5)$$

Os fantasmas $(\eta^a, \mathcal{P}_a)$ tem estatística oposta ao dos vínculos correspondentes G_a.

Dessa maneira substituimos a simetria local gerada pelos vínculos ϕ_a por uma simetria global gerada pela carga de BRST, denotada por Q. No caso geral a carga de BRST pode ser expandida num dos fantasmas, digamos $\mathcal{P}_a$

$$Q = \sum_{n=0} Q^{(n)a_1 \ldots a_n} \mathcal{P}_{a_1} \ldots \mathcal{P}_{a_n} \qquad (A.6)$$

onde os $Q^{(n)}$ tem paridade de Grasmann $n + 1$.Além disso Q está sujeito à condição inicial

$$Q^{(0)} = \eta^a G_a \qquad (A.7)$$

e a carga de BRST apresenta a propriedade fundamental de ser nilpotente sob colchetes de Poisson

$$\{Q, Q\} = 0 \tag{A.8}$$

Estas duas propriedades determinam os coeficientes $Q^{(n)}$. No caso particular em que as constantes de estrutura K^{a}_{bc} não dependem de (p, q) a carga de BRST tem uma expansão finita em $\mathcal{P}_a$ e sua forma geral é dada por

$$Q = \eta^a G_a + \frac{1}{2}\mathcal{P}_c K^c_{ab}\eta^a \eta^b \tag{A.9}$$

O passo seguinte consiste em construir uma integral funcional que contenha as propriedades desejadas para descrever a teoria em questão. A resposta a este problema é fornecida pelo Teorema de Fradkin-Vilkowsky [14]: Dada uma Hamiltoniana com vínculos de primeira classe e tal que as variáveis obedeçam condições de contorno invariantes por transformações de BRST, a integral funcional

$$K = \int D\mu \, e^{iS_{ef}} \tag{A.10}$$

onde

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p\dot{q} + \dot{\lambda}^\alpha \Pi_\alpha + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a - H_{ef}) \tag{A.11}$$

e

$$H_{ef} = H_0 + [\Psi, Q]$$

é independente de Ψ. Aqui Ψ é o férmion fixador de gauge e para cada escolha de Ψ existe, em princípio, uma escolha de gauge associado à teoria inicial (isto é, antes de estendermos o espaço de fase). $D\mu$ é a medida de Liouville usual e compreende todas as variáveis do espaço de fase estendido.

Para ilustrar a técnica vamos aplica-la a uma situação simples: a partícula relativística massiva. A teoria é descrita pela variavel $X^\mu(\tau)$ que fornece a posição da partícula no espaço- tempo e τ é o tempo-próprio. O vínculo de primeira classe associado à partícula relativística é

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + m^2) \qquad (A.12)$$

onde P_μ é o momento canonicamente conjugado à X^μ e m é a massa da partícula. Note que poderíamos ter obtido esse vínculo à partir da Lagrangiana usual

$$L = -m \int d\tau (\dot{X}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (A.13)$$

Verificamos facilmente que (A.12) gera as seguintes transformações (com parâmetro $\epsilon(\tau)$)

$$\delta X_\mu = \epsilon P_\mu$$

$$\delta P_\mu = 0 \qquad (A.14)$$

que são a versão Hamiltoniana da invariância por reparametrizações do tempo-próprio de (A.13). Aumentamos o espaço de fase acrescentando um multiplicador de Lagrange N para o vínculo H, além de seu momento canonicamente conjugado Π. Também, introduzimos dois pares de fantasmas

$$\{\eta, \overline{\mathcal{P}}\} = \{\overline{\eta}, \mathcal{P}\} = 1 \qquad (A.15)$$

e construímos a carga de BRST (A.9)

$$Q = \eta H + \mathcal{P}\Pi \qquad (A.16)$$

Note que neste caso a álgebra (A.4) é abeliana.

Sob as transformações (A.14), suplementadas por $\delta N = \dot{\epsilon}$, a variação da ação

$$S = \int d\tau (P^\mu \dot{X}_\mu + NH) \qquad (A.17)$$

fornece

$$\delta S = \Big[\epsilon(P^\mu \dot{X}_\mu + NH)\Big]_{\tau_1}^{\tau_2} \qquad (A.18)$$

Para que a ação seja invariante é necessário então que $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$. Essa condição exige que ao fixarmos o gauge tenhamos uma equação de segunda ordem para ϵ. Isso é obtido pelo uso do gauge do tempo-próprio $\dot{N} = 0$.

Podemos implementar o gauge do tempo-próprio escolhendo o férmion fixador de gauge Ψ como

$$\Psi = N\overline{\mathcal{P}} \qquad (A.19)$$

Além disso, escolhemos as seguintes condições de contorno

$$X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1), X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$$

$$\eta(\tau_1) = \eta(\tau_2) = 0$$

$$\overline{\eta}(\tau_1) = \overline{\eta}(\tau_2) = 0$$

$$\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2) = 0 \qquad (A.20)$$

Verificamos facilmente que essas condições de contorno são invariantes pelas transformações de BRST geradas por (A.16).

A integral funcional (A.10) é então

$$K = \int DX_\mu\, DP_\mu\, DN\, D\Pi\, D\eta\, D\overline{\mathcal{P}}\, D\overline{\eta}\, D\mathcal{P}\; e^{iS_{ef}} \qquad (A.21)$$

e a ação efetiva (A.11) fica

$$S_{ef} = \int_{\tau 1}^{\tau_1} d\tau (P^\mu \dot{X}_\mu + \Pi \dot{N} + \dot{\eta}\overline{\mathcal{P}} + \dot{\overline{\eta}}\mathcal{P} + NH + \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}}) \qquad (A.22)$$

As integrais funcionais podem agora ser efetuadas facilmente. Integrando em Π obtemos $\delta(\dot{N})$ o que implementa o gauge do tempo-próprio. Esse delta funcional reduz a integral funcional em N a uma integral ordinária em $N(0)$ como veremos adiante. As integrais funcionais nos fantasmas são triviais e resultam num fator $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$. Chamando de $c = N(0)\Delta\tau$ a integral (A.21) torna-se

$$K = \int dc \int DX_\mu \, DP_\mu \, e^{i\int (P\dot{X} + \frac{c}{\Delta\tau} H)} \tag{A.23}$$

Neste ponto a integral em c é irrestrita, isto é, os limites de integração são de $-\infty$ à $+\infty$. No entanto, sabemos que isto não conduz ao resultado correto para o propagador de uma partícula relativística. Podemos traçar a origem da dificuldade ao fato de que as condições de contorno $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1)$, $X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$, $\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2) = 0$ não fixam uma única trajetória no espaço de fase sendo necessário, para esse fim, fornecer uma condição adicional. Isso implica que a amplitude de transição no formalismo de BFV (A.10) deve ser modificada pois a integral de trajetória deve ser efetuada considerando-se uma trajetória clássica apenas. A modificação necessária, é claro, deve, de alguma forma, levar em conta a condição adicional acima referida.

Esse problema é comum, de fato, a todas as teorias que são invariantes por reparametrizações do parâmetro de evolução [18]. No entanto, nos limitaremos aqui a discutir o caso das diversas partículas relativísticas, tratando-as de forma unificada.

Vamos considerar apenas o caso bosônico. No formalismo de BFV partimos da ação

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (P^\mu \dot{X}_\mu + NH) \tag{A.24}$$

onde o vínculo H é da forma

$$H = h(P) - m^2 \tag{A.25}$$

com $h(P)$ uma função homogenea em P_μ de grau n

$$h(\alpha P) = \alpha^n h(P) \tag{A.26}$$

e tal que $\frac{\delta h}{\delta P_\mu} \neq 0$ para qualquer μ.

As transformações geradas pelo vínculo (A.25) e a transformação para o multiplicador de Lagrange N são

$$\begin{aligned} \delta X_\mu &= -\epsilon \frac{\delta h}{\delta P^\mu} \\ \delta P_\mu &= 0 \\ \delta N &= \dot{\epsilon} \end{aligned} \tag{A.27}$$

de modo que a ação (A.24) transforma-se como

$$\delta S = \left[\epsilon \left(H - P^\mu \frac{\delta h}{\delta P^\mu} \right) \right]_{\tau_1}^{\tau_2} \tag{A.28}$$

A ação é invariante em dois casos: se h for linear em P_μ (e $m = 0$)ou se $\epsilon(\tau_1) = \epsilon(\tau_2) = 0$. No primeiro caso não há restrições sobre o parâmetro da transformação, o que caracteriza a situação de simetria interna. No segundo caso h pode ser qualquer função homogenea de P_μ de grau $n \neq 1$ e a restrição de que a transformação reduza-se à identidade nos extremos caracteriza a situação de uma simetria externa ou de reparametrização [16]. Isto fica evidenciado se utilizarmos as equações de movimento para X_μ. Variando P_μ em (A.24) encontramos

$$\dot{X}_\mu + N \frac{\delta h}{\delta P^\mu} = 0 \tag{A.29}$$

Se h for linear em P_μ (A.29) pode ser usada para determinar N. Se não for linear em P_μ podemos determinar P_μ à partir de (A.29) e substituindo na primeira das equações em (A.27) encontramos

$$\delta X_\mu = \xi \dot{X}_\mu, \qquad \xi = \frac{\epsilon}{N} \tag{A.30}$$

que é a forma usual da lei de transformação de um escalar sob reparametrizações.

Devemos agora aumentar o espaço de fase introduzindo o momento canonicamente conjugado à N e dois pares de fantasmas canonicamente conjugados, descritos por variáveis de Grassmann $\eta, \overline{\eta}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}}$ satisfazendo (A.15). A carga de BRST é facilmente obtida

$$Q = \eta H + \Pi \mathcal{P} \tag{A.31}$$

As condições de contorno sobre ϵ permitem a escolha do gauge do tempo próprio que é obtido se escolhermos $\Psi = N\overline{\mathcal{P}}$. A ação efetiva (A.11) torna-se então

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (P^\mu \dot{X}_\mu + \Pi \dot{N} - \mathcal{P}\dot{\overline{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + NH + \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}}) \tag{A.32}$$

As equações de movimento obtidas de (A.32), (excetuando-se os fantasmas) são

$$\dot{X}_\mu + N\frac{\delta h}{\delta P^\mu} = 0 \tag{A.33}$$

$$\dot{P}_\mu = 0 \tag{A.34}$$

$$\dot{\Pi} - H = 0 \tag{A.35}$$

$$\dot{N} = 0 \tag{A.36}$$

Derivando (A.33) com respeito à τ e utilizando (A.34) e (A.36) obtemos $\ddot{X}_\mu = 0$. Impondo as condições de contorno $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1)$ e $X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$ obtemos a solução

$$X_\mu(\tau) = X_\mu(1) + \frac{\Delta X_\mu}{\Delta \tau}(\tau - \tau_1) \tag{A.37}$$

Inserindo (A.37) em (A.33) obtemos

$$\frac{\delta h}{\delta P^\mu} = -\frac{\Delta X_\mu}{N\Delta\tau} \tag{A.38}$$

Se efetuarmos a mudança de variáveis $\tilde{P}_\mu = N^{\frac{1}{n-1}} P_\mu$ e utilizarmos o fato de que h é homogeneo em P_μ de grau n, obtemos a equação

$$\frac{\delta h(\tilde{P})}{\delta \tilde{P}^\mu} = -\frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau} \tag{A.39}$$

que é independente de N. Note que a mudança de variáveis é válida para qualquer N quando n é par, mas somente para N positivo quando n é ímpar. Podemos então resolver

(A.39) para encontrar $\tilde{P}_\mu$ em função de $\frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau}$. Se n for ímpar $\frac{\delta h}{\delta \tilde{P}^\mu}$ é uma função homogenea de grau par, portanto encontramos sempre duas soluções para as eqs.(A.39), uma com o sinal oposto ao da outra. Como, porém, a eq.(A.35) não admite a simetria $P_\mu \to -P_\mu$, pois h em H é de grau ímpar, devemos escolher apenas uma das soluções e, como veremos a seguir, a escolha é irrelevante.

Derivando (A.35) com relação à τ encontramos $\ddot{\Pi} = 0$ e com as condições de contorno $\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2) = 0$, obtemos a solução $\Pi(\tau) = 0$. Utilizando a solução de volta em (A.35) obtemos $H = 0$, ou seja, a equação de vínculo. Efetuando a mudança de variáveis de P_μ para $\tilde{P}_\mu$ a equação de vínculo torna-se

$$N^{-\frac{n}{n-1}} h(\tilde{P}) - m^2 = 0 \qquad (A.40)$$

Como já resolvemos (A.39) $h(\tilde{P})$ só depende de $\frac{\Delta X_\mu}{\Delta\tau}$ e portanto (A.40) fornece uma equação para N. Se n for par encontramos duas soluções para N, uma com o sinal oposto ao da outra e temos

$$N = \pm \left(\frac{h(\tilde{P})}{m^2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$P_\mu = \pm \left(\frac{m^2}{h(\tilde{P})}\right)^{\frac{1}{n}} \tilde{P}_\mu, \qquad n = par \qquad (A.41)$$

Quando n for ímpar também devemos considerar a mudança de variáveis de P_μ para $\tilde{P}_\mu$ com $N < 0$. Obtemos então duas soluções para N, como no caso anterior, e temos

$$N = \pm \left(\frac{h(\tilde{P})}{m^2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$P_\mu = \left(\frac{m^2}{h(\tilde{P})}\right)^{\frac{1}{n}} \tilde{P}_\mu, \qquad n = impar \qquad (A.42)$$

O fato de encontrarmos soluções duplas quando n é par é devido à simetria discreta $X_\mu \to X_\mu, P_\mu \to -P_\mu, N \to -N, \Pi \to \Pi$ que as eqs.(A.33 - 36) apresentam. Note que essas transformações deixam as condições de contorno invariantes, dando origem, portanto, à duas trajetórias clássicas. Note também que essa simetria não é uma simetria da ação. Para n ímpar a eq.(A.33) ou (A.39) é invariante por $P_\mu \to -P_\mu$ mas não a eq.(A.35). Note que a solução para N em (A.42) não depende da escolha da solução de (A.39) pois é invariante pela transformação $\tilde{P}_\mu \to -\tilde{P}_\mu$. O fato de haver duas soluções em (A.42) é devido à simetria de inversão no parâmetro de evolução $\tau \to -\tau$ e $X_\mu \to X_\mu, P_\mu \to P_\mu, N \to -N, \Pi \to -\Pi$. As condições de contorno são invariantes por essa transformação. Novamente a ação não é invariante por essas transformações.

Para efetuar a quantização de BFV é necessário uma condição adicional para selecionar uma das soluções em (A.41) ou (A.42). Uma escolha simples é impor que a quantidade

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, N(\tau) \qquad (A.43)$$

seja sempre positiva. Essa condição seleciona apenas uma das trajetórias pois I não é invariante pela transformação $N \to -N$, com τ_1 e τ_2 fixos. A quantidade (A.43) é de fato um invariante por reparametrizações (o parâmetro de Teichmüller), como podemos constatar facilmente utilizando (A.27) e as condições de contorno para ϵ. Por outro lado, ela não é um invariante por transformações de BRST pois

$$\delta I = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, \mathcal{P}(\tau) \qquad (A.44)$$

(sendo porém invariante on-shell pois a equação de movimento para $\mathcal{P}$ derivada de (A.32) é $\mathcal{P} - \dot{\eta} = 0$).

Podemos impor a condição $I > 0$ acrescentando à medida da integral funcional de BFV o termo $\theta(I)$ de forma que a amplitude de transição de $X_\mu(1)$ para $X_\mu(2)$ seja definida por

$$K(X(1), X(2)) = \int D\mu \, \Theta(I) e^{iS_{ef}}$$

$$D\mu = DX_\mu \, DP_\mu \, DN \, D\Pi \, D\mathcal{P} \, D\overline{\eta} \, D\overline{\mathcal{P}} \, D\eta \qquad (A.45)$$

onde S_{ef} é dado por (A.32). Como I não é invariante por transformações de BRST a amplitude (A.45) também não é invariante, além de não ser invariante por reparametrizações após a integração dos fantasmas. De fato, isso deve ser esperado devido ao seguinte argumento. O gerador funcional

$$Z = \int D\mu \, e^{iS_{ef}} \qquad (A.46)$$

é invariante por transformações de BRST (ou por reparametrizações, após a integração dos fantasmas), por construção. A partir dele podemos obter as funções de Green adicionando um termo de fonte. Por outro lado, as funções de Green são objetos que em geral dependem do gauge escolhido, não sendo, portanto, invariantes por transformações de BRST (ou reparametrizações). Dessa forma, não devemos esperar que a amplitude de transição (A.45), que fornece o propagador de Feynmann, seja invariante por transformações de BRST (ou reparametrizações). Devemos esperar, isso sim, que não dependa da escolha dos valores iniciais e finais do parâmetro de evolução, que, como veremos mais adiante, é o que ocorre de fato.

A integração funcional nos fantasmas em (A.45) pode ser efetuada facilmente e fornece um fator $\Delta\tau$. A integral em Π fornece $\delta(\dot{N})$. A amplitude (A.45) reduz-se então à

$$K(X(1), X(2)) = \int DX_\mu \, DP_\mu \, DN \, \theta(I) \, \delta(\dot{N}) \, \Delta\tau \, e^{i\int d\tau (P\dot{X} + NH)} \qquad (A.47)$$

Separando o modo zero de N através da equação $N(\tau) = N(0) + \tilde{N}(\tau)$, com $\tilde{N}(\tau) = 0$, podemos escrever $\delta(\dot{N}) = (det\partial_\tau)^{-1}\delta(\tilde{N})$ de forma que a integral funcional em N reduz-se a uma integral ordinaria em $N(0)$

$$K(X(1), X(2)) = \int DX_\mu \, DP_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} dN(0) \, \theta(N(0)\Delta\tau) \, \Delta\tau \, e^{i\int d\tau (P\dot{X} + N(0)H)} \qquad (A.48)$$

Chamando de $c = N(0)\Delta\tau$ e utilizando a função θ, (A.48) reduz-se à

$$K(X(1),X(2)) = \int DX_\mu \, DP_\mu \int_0^{+\infty} dc \; e^{i\int d\tau P\dot{X}+icH} \qquad (A.49)$$

a qual, após a mudança de variáveis $X_\mu(\tau) = X_\mu(1) + \frac{\Delta X_\mu}{\Delta \tau}(\tau - \tau_1) + Y_\mu(\tau)$, com $Y_\mu(\tau_1) = Y_\mu(\tau_2) = 0$, e integração em Y_μ, fornece o resultado esperado

$$K(X(1),X(2)) = \int d^D p \int_0^{+\infty} dc \; e^{ip\Delta X+icH} \qquad (A.50)$$

Note que como antecipado não há nehuma dependência em τ_1 ou τ_2.

A mesma modificação na integral funcional deve ser efetuada no caso supersimétrico [18]. De fato, essa modificação é efetuada em qualquer teoria invariante por reparametrizações do parâmetro de evolução, como a teoria de cordas ou a relatividade geral, sem que nenhuma justificativa convincente seja apresentada. Estudos desse problema estão em andamento [18].

REFERÊNCIAS

[1] D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec e R.Rohm, Phys.Rev.Lett. 54 (1985) 502, Nucl.Phys.B 256 (1985) 253 e B 267 (1986) 75

[2] S.Coleman, Phys.Rev. D11 (1975) 2088

S.Mandelstam, Phys.Rev. D11 (1975) 3026

[3] R.Floreanini e R.Jackiw, Phys.Rev.Lett. 59 (1987) 1873

[4] H.O.Girotti, M.Gomes, V.Kurak, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1913

[5] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, Phys.Rev. D39 (1989) 3792

[6] M.Gomes, V.Kurak, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, Phys.Rev.D 38 (1988) 1344

[7] P.A.M.Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Sciences, Yeshiva University, N.Y. (1964)

A.J.Hanson, T.Regge e C.Teitelboim, "Constrained Hamiltonian Systems", Accademia Nazionale dei Lincei (1976)

[8] M.Gomes, V.Kurak, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, não publicado

[9] W.Siegel, Nucl.Phys.B 238 (1984) 307

[10] P.A.M.Dirac, Can.J.Math. 2 (1950) 129

[11] C.Imbimbo e A.Schwimmer, Phys.Lett. 193B (1987) 435

J.M.F.Labastida e M.Pernici, Nucl.Phys.B 297 (1988) 557

[12] M.E.V.Costa e H.Girotti, Phys.Rev.Lett. 60 (1988) 1771

[13] M.Gomes, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, Phys.Lett. 218B (1989) 63

[14] E.S.Fradkin e G.Vilkovisky, Phys.Lett. 55B (1975) 224

I.A.Batalin e G.Vilkovisky, Phys.Lett. 69B (1977) 309

[15] J.Gamboa e V.O.Rivelles, "Spinning Self-Dual Particles", preprint IFUSP/P-772 (1989)

[16] C.Teitelboim, Phys.Rev.Lett. 38 (1977) 1106

R.Tabensky e C.Teitelboim, Phys.Lett.B 69 (1977) 453

[17] M.Henneaux e C.Teitelboim, Ann.Phys.(N.Y.) 143 (1982) 143

[18] J.Gamboa e V.O.Rivelles, em andamento

[19] C.Becchi, A.Rouet e R.Stora, Ann.Phys.(N.Y.) 98 (1976) 287