

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA



ASPECTOS DA
ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA

Humberto de Menezes França

SBI-IFUSP



305M810T1729

Tese submetida ao Instituto
de Física da Universidade de
São Paulo como parte dos re-
quisitos para a obtenção do
título de Livre-Docente.

SÃO PAULO

1990

*Dedicado a meus pais
Tonico e Nina.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão aos colegas do departamento de Física Matemática pelo estímulo e interesse em meu trabalho.

Agradeço à José Carlos Brunelli pelo excelente trabalho com o T_EX.

Sou muito grato à Coraci P. Malta pela ajuda na infundável tarefa de encontrar erros de português mas, principalmente, por encorajar-me a concluir esta tese.

Ao meu amigo Yogiro Hama agradeço as inúmeras conversas que mantivemos sobre estes e muitos outros assuntos interessantes.

Não tenho palavras para agradecer à Maria Odete, Rita e Laura.

All these fifty years of conscious brooding have brought me no nearer to the answer to the question "what are light quanta ?" Nowadays every Tom, Dick and Harry thinks he knows it, but he is mistaken.

A. Einstein

1951

Einstein himself had great difficulty in reaching a sharp formulation of Bohr's meaning. What hope then for the rest of us?

J. Bell

1987

RESUMO

A radiação de ponto zero é responsável pelas principais características que fazem da eletrodinâmica clássica estocástica uma teoria semelhante à eletrodinâmica quântica. Isto é mostrado neste trabalho através do estudo de alguns sistemas físicos simples.

1) O oscilador harmônico forçado é discutido no caso em que existem efeitos térmicos e dissipação por reação da radiação. Neste exemplo apresentamos uma extensa comparação entre os cálculos clássicos estocásticos e os cálculos baseados na teoria quântica. O papel da radiação de ponto zero é facilmente identificado.

2) Discutimos as propriedades estatísticas de um dipolo magnético rígido imerso na radiação de ponto zero. Observamos paramagnetismo diferente daquele descrito por Langevin. A comparação com dados experimentais mostra muito bom acordo com a eletrodinâmica estocástica e a mecânica quântica.

3) Sem fazer uso do conceito corpuscular do foton analisamos também, com bastante detalhe, o papel da radiação de ponto zero na descrição semi quantitativa do espalhamento Compton.

4) Através de uma análise simplificada tentamos justificar classicamente a estabilidade do estado fundamental do hidrogênio. Ela poderia ser devida ao equilíbrio dinâmico entre a emissão de radiação no movimento acelerado e a absorção de energia da radiação de ponto zero. Mecanismo semelhante é válido também para os estados excitados e foi observado recentemente em átomos dentro de cavidades óticas.

SUMMARY

Zero point electromagnetic radiation is responsible for the main characteristics which makes stochastic electrodynamics a theory similar to quantum electrodynamics. This is shown in the present work by studying some simple physical systems.

1) The forced harmonic oscillator is discussed in the case where thermal effects and dissipation by radiation reaction are present. In this example we make an extensive comparison between the calculation based on stochastic electrodynamics and the calculation based on quantum theory. The role of the zero point radiation is clearly identified.

2) We discuss the statistical properties displayed by a rigid magnetic dipole immersed in the zero-point radiation. We have found a paramagnetic behaviour which is different from that described by Langevin. Comparison with experimental data shows very good agreement with stochastic electrodynamics and quantum theory.

3) Without making use of the corpuscular concept of the photon we also analyse, with enough details, the role of zero-point radiation in a semi-quantitative description of Compton scattering.

4) Through a simplified analysis, we try to justify classically the stability of the ground-state of hydrogen. This may be attributed due to the dynamical equilibrium between the radiation emitted in the accelerated motion and the energy absorbed from the zero-point radiation. A similar mechanism is valid also for the excited states and was observed recently in atoms inside optical cavities.

ÍNDICE

1-INTRODUÇÃO	1
2-OSCILADOR HARMÔNICO.....	8
3-ESTADOS EXCITADOS.....	16
4-SPIN E PARAMAGNETISMO	32
5-EFEITO COMPTON	48
6-PERSPECTIVAS.....	75
REFERÊNCIAS	88
FIGURAS	94

1-INTRODUÇÃO

A Eletrodinâmica Estocástica (SED) vem gradualmente ampliando o campo de suas aplicações desde os trabalhos pioneiros de Braffort¹ e Marshall². Atualmente a teoria é bastante vasta³⁻⁷ e apresenta perspectivas concretas de maior expansão.

Como uma teoria clássica capaz de descrever fenômenos microscópicos a SED está penetrando o domínio da Mecânica Quântica (MQ). O ingrediente que permite este fato é a bem conhecida radiação aleatória atérmica, também chamada radiação de ponto zero, que é a principal característica da teoria. Esta possui campos eletromagnéticos aleatórios considerados como superposição de ondas planas com todas as frequências. A existência desta radiação de fundo é uma hipótese que talvez possa ser justificada se admitirmos que a radiação de ponto zero é aquela emitida por todas as cargas aceleradas do Universo⁸. Desta maneira o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$, em um ponto \vec{x} num instante t , associado a esta radiação é solução das equações homogêneas de Maxwell e pode ser escrito como

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) [c^3 \rho(\omega, T)/\omega^2]^{1/2} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t + i\nu(\vec{k}, \lambda)]. \quad (1.1)$$

Aqui estamos denotando por $\rho(\omega, T)$ a densidade espectral que é função da temperatura T de uma cavidade com radiação aleatória sendo ω a frequência de uma onda plana caracterizada pelo vetor de onda \vec{k} . A polarização de cada onda é definida pelos versores $\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ tais que $\vec{k} \cdot \hat{\epsilon} = 0$ e também

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i(\vec{k}, \lambda) \epsilon_j(\vec{k}, \lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (1.2)$$

As fases $\nu(\vec{k}, \lambda)$ são completamente aleatórias, isto é, são estatisticamente independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $0 \leq \nu(\vec{k}, \lambda) \leq 2\pi$.

Esta maneira de caracterizar radiação aleatória foi introduzida por Einstein⁹, no início do século, com o objetivo de estudar a interação de matéria com radiação térmica gerada por um número muito grande de fontes emitindo incoerentemente. Com a introdução destas fases aleatórias é fácil mostrar que médias no "ensemble" fornecem³⁻⁷

$$\langle \exp[i\nu(\vec{k}, \lambda) - i\nu'(\vec{k}', \lambda')] \rangle \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\nu'}{2\pi} \exp(i\nu - i\nu') \rightarrow \delta_{\lambda, \lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (1.3)$$

Com este procedimento simples é possível calcular médias no "ensemble" de várias quantidades de interesse como por exemplo a densidade de energia eletromagnética em um ponto arbitrário do espaço. Desta maneira a função de correlação das componentes do campo

elétrico em um ponto \vec{x} do espaço toma a forma³⁻⁷:

$$\frac{\langle E_i(\vec{x}, t) E_j(\vec{x}, 0) \rangle}{4\pi} = \frac{\delta_{ij}}{3} \int_0^{\infty} d\omega \rho(\omega, T) \cos(\omega t), \quad (1.4)$$

onde $\rho(\omega, T)$ é a densidade espectral total, isto é, engloba as contribuições da radiação térmica e da radiação de ponto zero.

A existência da radiação de ponto zero com distribuição espectral

$$\rho_0(\omega) \equiv \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} = \rho(\omega, T = 0), \quad (1.5)$$

foi concebida pela primeira vez por Planck, em 1911, na sua segunda teoria da radiação do corpo negro¹⁰. A constante de Planck $2\pi\hbar$ aparece na expressão para $\rho_0(\omega)$. Seu valor numérico, obtido pela primeira vez por Planck pela comparação de cálculos teóricos com resultados experimentais, dá uma idéia da intensidade dos campos eletromagnéticos de ponto zero. Esta constante é o único parâmetro livre da SED. Ela aparecerá na teoria inúmeras vezes, em diferentes contextos e em muitas grandezas físicas. Entretanto a sua origem pode ser, sem nenhuma ambiguidade, facilmente identificada na distribuição espectral da radiação de ponto zero.

É importante lembrar que podemos concluir que $\rho_0(\omega) \sim \omega^3$ baseado em argumentos inteiramente clássicos. Um deles é que a distribuição espectral para a radiação de ponto zero deve ser tal que ela seja homogênea e isotrópica em qualquer sistema de referência inercial, i.e., ela é invariante de Lorentz^{11,12}. O espectro (1.5) é o único com esta propriedade. Outro argumento é baseado na lei de Wien,

$$T \frac{\partial \rho}{\partial T} = 3\rho - \omega \frac{\partial \rho}{\partial \omega}, \quad (1.6)$$

estabelecida em 1893 e que implica em que a distribuição espectral deve ser tal que $\rho(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T)$ onde $f(x)$ é uma função arbitrária. Pode-se ver diretamente de (1.6) que $\rho \sim \omega^3$ quando a temperatura T é nula.

A introdução da radiação aleatória de ponto zero na eletrodinâmica clássica gera modificações conceituais imediatas. O movimento de partículas eletrizadas, ou mesmo partículas neutras polarizáveis, somente poderá ser descrito probabilisticamente (isto é consequência direta do fato de que na SED não existe sistema isolado). A radiação de ponto zero e também a radiação térmica, presentes em qualquer arranjo experimental, caracterizam um processo estocástico Gaussiano não Markoviano. Isto ocorre porque as frequências não contribuem igualmente para a função de correlação (1.4). O processo estocástico ficará completamente caracterizado somente depois de se determinar a distribuição espectral $\rho_T(\omega)$ da radiação térmica:

$$\rho_T(\omega) = \rho(\omega, T) - \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}. \quad (1.7)$$

Deduções *clássicas* de $\rho_T(\omega)$ foram apresentadas no passado por Marshall², Boyer¹² e muitos outros⁹. Essas deduções não são livres de críticas. Apesar disso, é digno de nota o fato de que métodos totalmente diferentes têm levado ao mesmo resultado para a distribuição espectral da radiação térmica que, como é bem conhecido, toma a forma:

$$\rho_T(\omega) = \frac{(\hbar\omega^3/\pi^2c^3)}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}. \quad (1.8)$$

onde k é a constante de Boltzmann. Uma dedução clássica, particularmente simples, para $\rho_T(\omega)$ pode ser encontrada em nosso trabalho recente em colaboração com G. C. Santos¹³. É importante notar que a constante de Planck que aparece em (1.8) tem sua origem em $\rho_0(\omega)$.

Neste ponto é interessante mencionar os principais resultados da SED no domínio dos fenômenos microscópicos. Um exemplo é a descrição correta das propriedades diamagnéticas de cargas livres e ligadas harmonicamente^{2,14}. Outro exemplo é a análise extensa de forças de van der Waals entre partículas polarizáveis, condutores e materiais dielétricos^{6,15}. Aqui encontramos uma das evidências experimentais mais famosas da radiação de ponto zero: a medida da força (F) de atração entre placas metálicas (área A) separadas pela distância d . O resultado experimental de Sparnaay¹⁶, a saber

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240d^4}, \quad (1.9)$$

corroboros os cálculos de Casimir e Polder¹⁷ (no contexto da Eletrodinâmica Quântica) e de Marshall² e Boyer¹⁸ no contexto da SED.

O sistema preferido dos físicos, i.e., o oscilador harmônico, tem sido amplamente estudado na SED desde os trabalhos pioneiros de Braffort¹, Marshall² e outros¹⁴. A abordagem probabilística clássica característica da SED facilitou a discussão de questões mais sutis como por exemplo a que se refere à existência real dos estados excitados do oscilador. Este ponto foi abordado em nossos estudos recentes em colaboração com M. T. Thomaz¹⁹ e T. W. Marshall²⁰. A conclusão é que somente estados coerentes e estados comprimidos pulsantes são excitados a partir do estado fundamental. Este ponto será discutido mais adiante.

Mais recentemente um novo campo da SED, chamado de "ótica estocástica", começou a ser desenvolvido por Marshall e Santos^{21,22}. Os novos fenômenos descritos por essa teoria, por exemplo a anticorrelação observada em ambos os canais de um divisor de feixe no experimento de Grangier et al.²³, nos estimula a rever o conceito de foton. Na ótica estocástica ftons são pulsos de ondas eletromagnéticas onde os efeitos da radiação aleatória de ponto zero não podem ser desprezados.

O sucesso da SED na descrição dos fenômenos acima mencionados não deve ser atribuído a uma simples coincidência. Por isso muitos autores, como Milonni⁷, Boyer³,

de la Peña⁶ e outros^{4,5}, tem enfatizado que a SED merece ser analisada mais profundamente. O fato de ser uma teoria clássica, e portanto desembaraçada de conceitos abstratos muito comuns na MQ, facilita o trabalho de interpretação de resultados teóricos e experimentais.

Se consideramos o sucesso inicial da SED é bastante natural levantar a seguinte questão: Será possível obter com a SED, uma explicação clássica satisfatória de todo o conjunto de fenômenos microscópicos atualmente descritos pela MQ? Para responder a esta questão será necessário estender os cálculos da SED para muitos outros fenômenos incluindo forças não lineares como o átomo de hidrogênio, por exemplo. Neste ponto a SED encontrou seu maior obstáculo e nenhum problema não linear foi resolvido de maneira satisfatória até agora³⁻⁷. Aparentemente a principal dificuldade é que a distribuição espectral, invariante de Lorentz da radiação de ponto zero, gera um processo estocástico não Markoviano difícil de ser tratado rigorosamente. Entretanto a resposta à questão levantada acima, não importa qual seja, será muito importante para o nosso entendimento da Natureza. Se afirmativa, podemos dizer que a MQ é algo como o "limite estacionário" da SED já que se observa que ambas as teorias coincidem neste regime. Isto se pode facilmente verificar no caso do oscilador harmônico como veremos mais adiante. Se a resposta for negativa, esperamos que ela nos ajude a identificar mais claramente quais são os ingredientes "verdadeiramente não clássicos" de nosso mundo microscópico. Mesmo esta última alternativa, muito menos ambiciosa, certamente possibilitará uma compreensão mais profunda da teoria quântica.

Tendo comentado estas questões preliminares podemos agora esboçar a estrutura do presente trabalho. Começaremos discutindo no capítulo 2, qual é a situação atual da SED na descrição de alguns sistemas microscópicos no espaço de fase. Isto será feito com o uso da equação de Fokker-Planck, obtida na aproximação Markoviana.

Esta aproximação é válida para sistemas lineares como por exemplo o oscilador harmônico e o movimento de cargas em campo magnético uniforme. Mostraremos em que condições se pode afirmar que a equação de Schrödinger fornece uma descrição equivalente à da SED. Com algumas aproximações a equação de Schrödinger será obtida da equação de Fokker-Planck que descreve o movimento Browniano do sistema no espaço de fase^{24,25}. A extensão para sistemas com forças não lineares é comentada no mesmo capítulo. Mostra-se também que a SED fornece uma descrição do oscilador harmônico muito mais ampla que a descrição quântica usual²⁶. Na SED é possível estudar o movimento do oscilador no espaço de fase. Não há nenhuma dificuldade em introduzir os efeitos de uma força externa com dependência temporal arbitrária e também os efeitos da dissipação bem como estudar a influência de um banho térmico¹⁹. Outras diferenças entre a SED e a MQ aparecem naturalmente como veremos ao discutir os estados excitados do oscilador²⁰. Este ponto é apresentado no capítulo 3.

Com a equação de Schrödinger apenas, não se pode mostrar que os estados excitados são instáveis. Na MQ é necessário invocar os efeitos das flutuações (quânticas) da radiação de ponto zero que induzem o decaimento do estado excitado, como é bem conhecido²⁷. É curioso notar que na MQ se invoca a radiação de ponto zero em muitos contextos *exceto* para explicar a própria estabilidade de sistemas microscópicos, como o estado fundamental de um átomo de hidrogênio por exemplo. Além disso, na abordagem de Schrödinger para o oscilador se pode chegar a diferentes conjuntos de estados excitados (estados com energia bem definida ou então estados coerentes por exemplo). Quais são gerados por uma perturbação externa? Quais permitem uma descrição do oscilador no espaço de fase? A análise do sistema no contexto da SED fornece uma resposta clara: os estados coerentes são gerados naturalmente do estado fundamental¹⁹, enquanto que os estados com energia bem definida não passam de soluções formais, porém matematicamente aceitáveis²⁰.

O sucesso da SED em descrever as propriedades diamagnéticas¹⁴ de cargas livres e também ligadas harmonicamente, nos estimulou a estudar a possibilidade de se obter paramagnetismo²⁸ nesta teoria clássica estocástica. Consideramos inicialmente um modelo de partícula composta de dois constituintes eletrizados ligados por uma força harmônica. Os constituintes são tomados como puntiformes e sem "spin". Já que as cargas e massas dos constituintes são arbitrarias é possível mostrar que o momento magnético $\vec{\mu}$ e o momento angular orbital intrínseco ("spin") \vec{S} são tais que $\vec{\mu} = Qg\vec{S}/2Mc$. Aqui Q e M são respectivamente a carga e a massa totais do sistema e g é o fator giromagnético. Mostramos que g pode tomar quaisquer valores, positivos ou negativos, conforme se varia as cargas e massas dos constituintes. Obtivemos também que $\langle \vec{S}^2 \rangle \sim \hbar^2$ e é independente da frequência do oscilador. Além disso, baseados em trabalho recente de Boyer²⁹, analisamos o movimento Browniano de um dipolo magnético rígido em presença de campo magnético externo. Concluimos que o sistema apresenta paramagnetismo diferente do paramagnetismo de Langevin. A comparação com os dados experimentais é feita para $(\langle \vec{S}^2 \rangle / \hbar^2)^{1/2} = 2, 3$ e 4 revelando excelente acordo com os cálculos baseados na SED. O estudo é apresentado com mais detalhe no capítulo 4 e também em trabalho recente com os colaboradores A. V. Barranco e S. A. Brunini²⁸.

No capítulo 5 estudamos a possibilidade de se descrever o efeito Compton no contexto da SED. A idéia principal pode ser apreciada de (1.4). Se considerarmos uma caixa com volume V , a densidade de energia nos campos eletromagnéticos de ponto zero pode ser escrita formalmente como^{3,6,7}

$$\frac{\langle \vec{E}^2(\vec{x}, t) \rangle}{4\pi} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}}. \quad (1.10)$$

Esta expressão é muito sugestiva. Em primeiro lugar vemos que existe uma energia média $\hbar\omega_{\vec{k}}$, associada a ondas de frequência $\omega_{\vec{k}}$ dentro do volume V . Se no volume V

existe também uma partícula carregada e, por alguma razão a ser explicada mais adiante, a partícula absorver energia de uma onda com frequências $\omega_{\vec{k}}$ presente no fundo de radiação, então uma energia da ordem de $\hbar\omega_{\vec{k}}$ e um momento da ordem de $\hbar\vec{k}$ serão conferidos à carga. Isto se assemelha muito à cinemática usada por Compton³⁰ em sua teoria corpuscular da luz, proposta em 1923, cujo objetivo era explicar o deslocamento observado no comprimento de onda da radiação espalhada por eletrons. Baseados nesta idéia tentamos descrever as principais características qualitativas do efeito Compton. Encontramos indicações muito claras de que a ação combinada da radiação incidente (frequência ω), da força da reação da radiação e dos campos eletromagnéticos flutuantes da SED, é capaz de conferir uma elevada velocidade de recuo à partícula. A velocidade (v) tem, em média, a direção da onda incidente e é tal que $v = c\alpha/(1 + \alpha)$. Nossa estimativa de parâmetro α fornece $\alpha = \hbar\omega/mc^2$ onde mc^2 é a energia de repouso da partícula. Verificamos que este recuo é justo o necessário para explicar o deslocamento, observado na radiação espalhada, como sendo devido ao efeito Doppler clássico. Calculamos também a seção de choque diferencial para a radiação espalhada usando o eletromagnetismo clássico. Encontramos a mesma expressão obtida por Compton em seu trabalho fundamental publicado em 1923. Este estudo, feito em colaboração com A. V. Barranco³¹, inclui também uma análise da teoria de radiação proposta por Einstein e Ehrenfest³² no mesmo ano de 1923. Entretanto, a teoria de Einstein e Ehrenfest é modificada com o objetivo de introduzir os efeitos dos campos eletromagnéticos de ponto zero característicos da SED. Como resultado as relações cinemáticas de Compton são obtidas a partir de argumentos inteiramente clássicos, isto é, sem fazer uso do conceito corpuscular do foton³³.

No capítulo final abordamos rapidamente o problema de Coulomb na SED. A análise (muito simplificada) é baseada em resultados recentes de Boyer³, de la Peña⁶, Claverie⁴ e Puthoff³⁴. Mostramos que o estado fundamental do hidrogênio pode ser entendido como um estado de equilíbrio dinâmico entre a radiação emitida e a radiação absorvida dos campos eletromagnéticos de ponto zero. Conclui-se primeiro que a reação da radiação contribui para tornar circulares as órbitas do eletron em torno do próton. Sob a hipótese de órbitas circulares e usando analogia com o oscilador harmônico, indicamos como obter a distribuição de probabilidades $Q_0(r)$ associada ao estado de equilíbrio no espaço de configurações, como função da distância r entre o próton e o elétron. O resultado,

$$Q_0(r) = \frac{\exp(-2r/a)}{\pi a^3}, \quad (1.11)$$

coincide com aquele obtido pela teoria de Schrödinger já que $a = \hbar^2/me^2$ é o raio de Bohr. A energia média do eletron no estado $Q_0(r)$ é $\langle \mathcal{E} \rangle = -me^4/2\hbar^2$. Os resultados acima estão em acordo com a observação experimental e indicam que a SED possui os ingredientes necessários para fornecer uma descrição detalhada do átomo. Entretanto, ninguém obteve até agora o espectro do átomo no contexto desta teoria.

A idéia de que os estados quânticos do átomo poderiam ser determinados pela interação com a radiação de ponto zero (quântica ou clássica) é discutida novamente neste capítulo final. Tentamos ali mostrar pontos em comum entre a SED e a Eletrodinâmica Quântica (QED). A argumentação é ilustrada com resultados experimentais recentes no contexto da assim chamada Cavity Quantum Electrodynamics³⁵. O nosso objetivo é mostrar que a radiação de ponto zero (clássica ou quântica) é muito mais importante do que comumente se pensa. Ela tem um papel muito grande na dinâmica de sistemas microscópicos. É ilusório pensar que ela é responsável apenas por efeitos menores como o deslocamento Lamb e a pequena modificação no momento magnético do elétron³⁶. Talvez também seja ilusório pensar que a radiação de ponto zero do vácuo somente influi em sistemas microscópicos. Por isso comentamos no capítulo final, a conjectura recente de Sakharov^{37,38} de que a gravitação pode ser uma interação eletromagnética gerada pela radiação de ponto zero quando em presença de matéria.

2-OSCILADOR HARMÔNICO

Vamos considerar o movimento unidimensional de uma partícula de carga e e massa m sob a ação de uma força harmônica de frequência natural ω_0 . Suporemos que o movimento é não relativístico e que a equação de Abraham Lorentz, que inclui a força de reação da radiação, pode ser aproximada por

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} + eE_x(t). \quad (2.1)$$

Aqui a força dissipativa $-m\gamma\dot{x}$ é devida à reação da radiação e a constante $\gamma = (2e^2/3mc^3)\omega_0^2$. Suporemos $\gamma \ll \omega_0$ mais adiante. A função $E_x(t)$ é a componente x do campo elétrico aleatório característico da SED.

Ao escrevermos a equação (2.1) desprezamos os efeitos do campo magnético de ponto zero e, consistentemente, não consideramos a dependência espacial de E_x visto que o movimento é não relativístico. Todas estas aproximações foram discutidas com grande detalhe no nosso trabalho em colaboração com G. C. Santos¹³.

A solução estacionária da equação (2.1) é obtida facilmente tendo-se em conta que $E_x(t)$ é dado por (1.1). Desta maneira a posição x da partícula pode ser escrita como

$$x(t) = \frac{e}{m} \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k [c^3 \rho(\omega, T)/\omega^2]^{1/2} \hat{e}_x(\vec{k}, \lambda) \frac{\exp[-i\omega t + i\nu(\vec{k}, \lambda)]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (2.2)$$

Desta expressão conclui-se imediatamente que $x(t)$, assim como $E_x(t)$, é uma variável aleatória Gaussiana³⁹. Isto ocorre porque a integral (2.2) pode ser considerada como uma soma de infinitas contribuições estatisticamente independentes. Desta maneira o teorema central do limite⁴⁰ pode ser aplicado e a distribuição de probabilidades no espaço de fase (x e $p = m\dot{x}$) pode ser obtida. Para isso basta conhecer os valores médios $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$. Denotaremos $W(x, p)$ a distribuição estacionária no espaço de fase.

No caso particular que estamos estudando teremos $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ como se pode ver de (2.2) fazendo a média nas fases aleatórias. A expressão normalizada para a distribuição estacionária no espaço de fase será então⁶

$$W(x, p) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle} - \frac{p^2}{2\langle p^2 \rangle}\right) / 2\pi (\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle)^{1/2}. \quad (2.3)$$

De acordo com (2.2), teremos

$$\langle p^2 \rangle = m^2 \omega_0^2 \langle x^2 \rangle \quad (2.4)$$

onde

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth(\hbar\omega_0/2kT). \quad (2.5)$$

Estes resultados são conhecidos desde os trabalhos de Braffort¹, Marshall² e Boyer¹⁴.

A expressão simples para $W(x, p)$, obtida acima, fornece todas as informações estatísticas observadas no regime estacionário. Fora deste regime, entretanto, a distribuição de probabilidades depende do tempo t de modo mais complicado e será discutido depois. Por enquanto queremos apenas mencionar que, para obtermos a descrição estatística fora do regime estacionário, devemos escrever a solução da equação do movimento (2.1) dependendo explicitamente da posição inicial x_0 e do momento inicial p_0 além do tempo t . Neste caso a distribuição $W(x, p, t)$ deverá satisfazer

$$W(x, p, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta(x - x_0)\delta(p - p_0) \quad (2.6)$$

como condição de contorno.

Uma outra maneira de se obter a distribuição de probabilidades no espaço de fase é através do uso do método de Fokker-Planck⁴¹, muito aplicado em teorias do movimento Browniano. No caso da SED, onde o ruído não é branco, como se pode ver de (1.4) e (1.5), a aplicação do método de Fokker-Planck corresponderia a uma aproximação. Ela é conhecida como aproximação Markoviana para o cálculo da distribuição de probabilidades⁶. Entretanto, apesar de ser um método aproximado, o método de Fokker-Planck fornece $W(x, p, t)$ em perfeito acordo com os resultados obtidos usando o teorema central do limite⁸, desde que o sistema seja o oscilador harmônico.

Para o oscilador a equação de Fokker-Planck toma a forma⁶

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \left[(m\omega_0^2 x + \gamma p)W + D \frac{\partial W}{\partial p} \right] \quad (2.7)$$

onde D é o coeficiente de difusão.

No limite estacionário onde $\partial W/\partial t = 0$, é possível mostrar que (2.3) e (2.7) implicam que

$$D = \frac{\hbar m \gamma \omega_0}{2} \quad (2.8)$$

deve ser a expressão para o coeficiente de difusão à temperatura nula. Restringir-nos-emos daqui por diante à situação particular em que a temperatura $T = 0$.

Se $\partial W/\partial t = 0$ a equação (2.7) implica na seguinte expressão simples¹⁴ para $W(x, p)$,

$$W(x, p) = (\pi\hbar)^{-1} \exp \left[-\frac{2}{\hbar\omega_0} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \right]. \quad (2.9)$$

Este resultado, que está em acordo com (2.3), é o que devemos obter no regime estacionário, isto é, para tempos longos ($\gamma t \gg 1$).

O procedimento para obter $W(x, p, t)$, a partir de (2.7), válida para t arbitrário, pode ser encontrado em textos muito bem conhecidos. Como exemplo podemos citar aquele de N. Wax⁴² que contém trabalhos clássicos sobre o assunto. A probabilidade de transição $W(x, p, t|x_0, p_0)$ do ponto x_0, p_0 no instante inicial, para o ponto x, p no instante t , é tal que⁴¹

$$2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\eta^2)^{1/2}W(x, p, t|x_0, p_0) = \exp\left\{\left[\frac{(p-p_d)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-x_d)^2}{\sigma_2^2} - 2\eta\frac{(p-p_d)(x-x_d)}{\sigma_1\sigma_2}\right] / 2(\eta^2-1)\right\}. \quad (2.10)$$

Na expressão acima $p_d = m\dot{x}_d$ sendo $x_d(t)$ a trajetória clássica determinística, isto é, $x_d(t)$ é a solução de (2.1) para $E_x(t) = 0$. Se o oscilador é *forçado*, por uma perturbação externa com dependência temporal arbitrária, os resultados continuam válidos. Basta exigir que $x_d(t)$ seja a solução geral para o movimento determinístico do oscilador forçado.

Em (2.10) $\sigma_1^2 = \langle (p-p_d)^2 \rangle$, isto é, σ_1 é a variância do momento. A sua forma explícita é⁴¹

$$\frac{\gamma\sigma_1^2}{D} = 1 - \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t)\right] \exp(-\gamma t), \quad (2.11)$$

onde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ e D é o coeficiente de difusão (2.8). Analogamente $\sigma_2^2 = \langle (x-x_d)^2 \rangle$, isto é, σ_2 é a variância da posição. A sua expressão analítica é similar a (2.11) a saber⁴¹,

$$\frac{m^2\omega_0^2\gamma\sigma_2^2}{D} = 1 - \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t)\right] \exp(-\gamma t). \quad (2.12)$$

O parâmetro de correlação η é definido da maneira usual⁴¹ $\eta\sigma_1\sigma_2 = \langle (x-x_d)(p-p_d) \rangle$ de modo que pode ser escrito como:

$$\eta\sigma_1\sigma_2 = \frac{D}{m\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) \exp(-\gamma t). \quad (2.13)$$

A distribuição $W(x, p, t|x_0, p_0)$, obtida acima (também chamada de probabilidade de transição), fornece todas as informações sobre o movimento aleatório da partícula no espaço de fase. Como a partícula estava localizada no ponto (x_0, p_0) no instante $t = 0$ então $W(x, p, t|x_0, p_0)$ satisfaz a condição de contorno (2.6).

Todos estes resultados podem ser estendidos facilmente para temperaturas não nulas. Para isto basta modificarmos a expressão (2.8) para

$$D = \frac{\hbar m \gamma \omega_0}{2} \coth(\hbar \omega_0 / 2kT), \quad (2.14)$$

que passa a ser o novo coeficiente de difusão^{6,14}.

Neste ponto cabe fazer duas observações. Em primeiro lugar, o conhecimento de $W(x, p, t|x_0, p_0)$ possibilita a descrição do movimento no espaço de fase desde que se conheça a distribuição inicial. Em outras palavras a SED fornece, naturalmente, meios para a análise do movimento no espaço de fase. Pode-se mostrar que para se conseguir descrição equivalente na MQ é necessário introduzir as distribuições de Wigner⁴³ associadas a cada estado do oscilador quântico. Aparece então o problema de saber se a distribuição de Wigner de um estado excitado qualquer do oscilador é uma verdadeira distribuição de probabilidades, já que ela assume valores negativos para certas regiões do espaço de fase. Este ponto foi discutido recentemente nos nossos trabalhos em colaboração com M. C. Thomaz¹⁹ e T. W. Marshall²⁰. Voltaremos a ele no capítulo 3. Em segundo lugar é importante lembrar que, analisando o problema com a abordagem da SED, é muito fácil descrever (probabilisticamente) o movimento do oscilador *forçado* (força externa com dependência temporal arbitrária) *com dissipação e efeitos de temperatura não nula*. O mesmo problema é muito mais complicado de ser resolvido se partirmos da equação de Schrödinger.

Com o objetivo de obter uma conexão mais transparente com o problema correspondente no contexto da MQ, vamos introduzir uma função $\widetilde{W}(x, y, t)$ como sendo tal que^{24,25}

$$W(x, p, t|x_0, p_0) \equiv W(x, p, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi\hbar} \widetilde{W}(x, y, t) \exp\left(-\frac{2iyp}{\hbar}\right). \quad (2.15)$$

Esta função $\widetilde{W}(x, y, t)$ é simplesmente a transformada de Fourier da probabilidade de transição $W(x, p, t)$. Se, entretanto, definirmos funções auxiliares $\psi(x, t)$ tais que

$$\widetilde{W}(x, y, t) \equiv \psi(x + y, t)\psi^*(x - y, t), \quad (2.16)$$

então, $W(x, p, t)$ pode ser identificada com a distribuição de Wigner associada a $\psi(x, t)$ desde que mostremos que a função ψ está relacionada com as soluções da equação de Schrödinger. Assim, a questão que pretendemos responder em seguida é: Qual é a equação diferencial que as funções auxiliares $\psi(x, t)$ devem satisfazer se impusermos que $W(x, p, t)$ obedece à equação de Fokker-Planck (2.7)?

A resposta à questão acima nos leva diretamente à equação de Schrödinger, conforme foi apontado por Hayakava⁴⁴ e Surdin²⁵ há alguns anos.

Substituindo (2.16) em (2.7) obtemos

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial y \partial x} + \frac{2iym\omega_0^2 x}{\hbar} \widetilde{W} = -\gamma y \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y} - \frac{4y^2}{\hbar^2} D \widetilde{W} \equiv \Delta(x, y, t). \quad (2.17)$$

Como $D = \hbar m \omega_0 \gamma / 2$ ambos os termos do lado direito de (2.17) são correções radioativas. O primeiro termo é devido à força de reação da radiação e o segundo termo foi

introduzido pelas flutuações eletromagnéticas de ponto zero. No limite em que $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, que é a condição para movimento não relativístico, é possível mostrar que

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2 e^2 \hbar\omega_0}{3 \hbar c mc^2} \ll 1 \quad (2.18)$$

e podemos tomar $\Delta(x, y, t) = 0$ como primeira aproximação. Na verdade podemos mostrar²⁵ que $\Delta(x, y, t \rightarrow \infty) = 0$ se $W(x, p, t)$ é dada por (2.9). Neste caso obtemos

$$\widetilde{W}(x, y) = \left(\frac{\pi \hbar}{m\omega_0} \right)^{-1/2} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar} (x^2 + y^2) \right] \quad (2.19)$$

e $W(x, p)$ corresponde à distribuição no espaço de fase associada ao regime estacionário.

Tomando $\Delta(x, y, t)$ como aproximadamente nulo, mesmo quando não estamos no regime estacionário e, introduzindo novas variáveis $r = x + y$ e $s = x - y$, podemos obter uma equação aproximada para $\widetilde{W}(x, y, t) = \widetilde{W}(r, s, t)$. Em primeiro lugar, devemos reconhecer que

$$4yx = r^2 - s^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}.$$

Lembrando também que $\widetilde{W}(x, y, t) = \psi(x + y, t)\psi^*(x - y, t) = \psi(r, t)\psi^*(s, t)$ obtemos de (2.17) a igualdade

$$\frac{\partial}{\partial t} [\psi(r, t)\psi^*(s, t)] = \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) - \frac{i}{2\hbar} m\omega_0^2 (r^2 - s^2) \right] \psi(r, t)\psi^*(s, t). \quad (2.20)$$

De (2.20) é imediato mostrar que a função auxiliar $\psi(x, t)$ deve satisfazer a seguinte equação linear

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi(x, t), \quad (2.21)$$

isto é, a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico unidimensional.

Neste ponto é necessário fazer vários comentários. Em primeiro lugar, as funções $\psi(x, t)$ não são interpretadas na SED da mesma maneira que na MQ. Na SED não se introduz o conceito de dualidade onda-partícula. A função $\psi(x, t)$ é apenas uma função auxiliar sem significado físico. Entretanto, o nome amplitude de probabilidade é justificado naturalmente visto que da definição (2.15) segue que

$$|\psi(x, t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp W(x, p, t) \quad (2.22)$$

ou ainda $|\psi(x, t)|^2$ é a probabilidade de se encontrar a partícula no ponto x , no instante t , qualquer que seja o seu momento p . Analogamente, é possível mostrar que a distribuição no

espaço dos momentos pode ser obtida tomando-se o módulo ao quadrado da função $\tilde{\psi}(p, t)$ definida como

$$\tilde{\psi}(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \psi(x, t) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right). \quad (2.23)$$

Em segundo lugar, a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico foi obtida tomando $\Delta(x, y, t) = 0$ em (2.17). Sabemos que $\Delta = 0$ apenas na situação estacionária de modo que as descrições do oscilador no contexto das duas teorias (SED e MQ), podem não ser equivalentes fora deste regime.

Entretanto, a observação mais importante que se pode fazer se refere à descrição (pelas duas teorias) das propriedades do oscilador, em presença de um banho de radiação térmica. A abordagem pela SED, discutida no início deste capítulo, leva à probabilidade de transição dada por (2.10), *que descreve o movimento no espaço de fase e vale para qualquer temperatura e qualquer perturbação externa com dependência temporal arbitrária.*

A abordagem pela MQ não apresenta as mesmas facilidades. Tem-se primeiro que encontrar todas as soluções estacionárias da equação de Schrödinger (2.21). Se escrevermos estas funções na forma $\psi_n(x, t) = \phi_n(x) \exp(-i\mathcal{E}_n t/\hbar)$ encontraremos

$$\phi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n \left[x(m\omega_0/\hbar)^{1/2}\right] \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right), \quad (2.24)$$

onde $H_n(x)$ são polinômios de Hermite e os valores

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n\right) \quad (2.25)$$

são interpretados como níveis discretos de energia já que n somente pode tomar os valores $0, 1, 2, \dots$

Se o oscilador estiver em contacto com um banho térmico então cada estado $\phi_n(x)$ será excitado com probabilidade dada essencialmente pelo fator de Boltzman *clássico*, isto é, $\exp(-\mathcal{E}_n/kT)$. É possível então mostrar¹⁹ que a distribuição de probabilidades quântica⁴⁵ coincide com aquela obtida na SED, a saber expressão (2.3), integrada em todos os momentos. Explicitamente temos

$$(2\pi\langle x^2 \rangle)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}\right) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n(x)|^2 \exp(-\mathcal{E}_n/kT), \quad (2.26)$$

onde \mathcal{E}_n são os níveis de energia (2.25) e \mathcal{Z} é a função de partição correspondente.

A construção da distribuição quântica no espaço de fase traz dificuldades associadas ao princípio da incerteza (ausente na SED). Se adotarmos a prescrição de Wigner, que é a

mais popular, então a cada estado $\phi_n(x)$ estará associada uma função $W_{nn}(x, p)$ tal que⁴⁵:

$$W_{nn}(x, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi\hbar} \phi_n(x+y)\phi_n^*(x-y) \exp\left(-\frac{2ipy}{\hbar}\right). \quad (2.27)$$

Nesta altura surge um problema. As funções $W_{nn}(x, p)$ se tornam negativas em algumas regiões do espaço de fase (com exceção daquela associada ao estado fundamental $n = 0$). Consequentemente não se pode dizer que as funções $W_{nn}(x, p)$ sejam verdadeiras distribuições de probabilidades. Questiona-se inclusive se os estados são reais²⁰, isto é, podem ser excitados por algum mecanismo controlável e ser observados antes que decaiam, ou ainda, se os estados são apenas funções matemáticas características da particular abordagem de cálculo associada à equação de Schrödinger. Este ponto será discutido no próximo capítulo.

Se ignorarmos a questão acima e calcularmos a distribuição no espaço de fase usando expressão análoga a (2.26) obteremos

$$\frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} W_{nn}(x, p) \exp(-\mathcal{E}_n/kT) = (4\pi^2 \langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle} - \frac{p^2}{2\langle p^2 \rangle}\right), \quad (2.28)$$

onde

$$\langle p^2 \rangle = m^2 \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar m \omega_0 \coth(\hbar \omega_0 / 2kT).$$

Este é exatamente o resultado do regime estacionário obtido na SED e apresentado anteriormente em (2.3). Curiosamente, cada $W_{nn}(x, p)$ em (2.28) é negativa em alguma região do espaço de fase (com exceção de W_{00}) mas, a combinação acima, em que cada termo é multiplicado pelo fator de Boltzmann $\exp(-\mathcal{E}_n/kT)$, é sempre positiva em qualquer ponto (x, p) do espaço de fase. Pelo que conhecemos, entretanto, não existe um tratamento baseado na MQ, que forneça a probabilidade de transição *completa*, não estacionária, obtida no contexto da SED (veja (2.10) e (2.14)).

Desejamos concluir este capítulo com mais um comentário. A obtenção da equação de Schrödinger apresentada aqui foi baseada na equação de Fokker-Planck (2.7). Esta é uma generalização da equação de Liouville pois inclui a difusão, gerada pelos campos aleatórios de ponto zero, e a dissipação, gerada pela reação da radiação. Entretanto, S. Hayakawa⁴⁴ conjecturou, em 1965, que a equação de Schrödinger poderia ser obtida apenas da equação de Liouville e da definição (veja (2.15) e (2.16)) de função de Wigner. Isto vale (aproximadamente) para qualquer força externa $F(x) = -V(x)$ como foi mostrado por M. Surdin^{24,25} em 1971. Podemos verificar de maneira muito simples em que condições esta afirmação é válida. Em primeiro lugar nós modificamos o termo que envolve a força

externa $F(x)$ em (2.17), de $-m\omega_0^2 xy$ para $F(x)y$. Usando as novas coordenadas $r = x + y$ e $s = x - y$ obtemos

$$2yF(x) = (r - s)F\left(\frac{r + s}{2}\right).$$

Como r precisa ser próxima de s para que $\widetilde{W}(x, y, t)$ seja significativamente diferente de zero, podemos tomar

$$(r - s)F\left(\frac{r + s}{2}\right) \simeq \int_s^r du F(u) = V(s) - V(r), \quad (2.29)$$

de acordo com o teorema do valor médio. Introduzindo esta modificação em (2.17) e supondo novamente que $\Delta = 0$ obtemos, no lugar de (2.21), o seguinte resultado aproximado:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t), \quad (2.30)$$

que é a equação de Schrödinger para o movimento no potencial $V(x)$.

O fato de tomarmos $\Delta = 0$ significa que desprezamos correções radiativas, como por exemplo as associadas à reação da radiação. Por isso a equação de Schrödinger acima não é inteiramente equivalente à equação de Fokker-Planck de partida (veja (2.7) e (2.17)). Os efeitos dissipativos da reação da radiação se perderam e, conseqüentemente, os estados excitados não decaem por emissão de radiação como é esperado fisicamente. Este ponto será abordado novamente no próximo capítulo quando estudarmos os estados excitados do oscilador do ponto de vista das duas teorias SED e MQ.

Finalmente, desejamos mencionar que a obtenção de (2.30) discutida acima difere daquela apresentada por Hayakawa⁴⁴ quanto à origem da constante de Planck $2\pi\hbar$. Aqui, no contexto da SED, a origem de \hbar é bastante clara, isto é, \hbar está relacionada com a intensidade dos campos eletromagnéticos flutuantes da radiação de ponto zero.

3-ESTADOS EXCITADOS

Ao estudarmos o oscilador harmônico no capítulo 2 obtivemos a distribuição de probabilidade no espaço de fase válida para o regime estacionário. O resultado mostrado nas expressões (2.3), (2.4) e (2.5), vale para qualquer temperatura T sendo que para $T = 0$ obtem-se:

$$W(x, p) = (\pi\hbar)^{-1} \exp(-2\mathcal{E}/\hbar\omega_0). \quad (3.1)$$

Aqui \mathcal{E} é a energia total do oscilador unidimensional, isto é,

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad (3.2)$$

quando a partícula está na posição x com quantidade de movimento p .

O valor médio da energia pode ser obtido facilmente de (3.1) fornecendo

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \mathcal{E} W(x, p) = \frac{1}{2} \hbar\omega_0, \quad (3.3)$$

que é também o valor da energia do estado fundamental na teoria de Schrödinger do oscilador harmônico.

Neste ponto ve-se claramente uma das diferenças entre a SED e a MQ. Na teoria quântica os estados do oscilador possuem níveis de energia discretos (veja (2.25)) enquanto que na SED a energia se distribui continuamente. Esta discrepância originou a discussão sobre a existência real dos estados excitados. Isto se pode ver nos trabalhos de Marshall², Boyer¹⁴, de la Peña⁶ e Goedecke²⁶. Mais recentemente, em estudos com a colaboração de M. T. Thomaz¹⁹ e T. W. Marshall²⁰, abordamos novamente este ponto e chegamos a conclusão (radical) de que nenhum estado excitado do oscilador harmônico é um estado físico real, e por isso a afirmação de que um dado sistema "está" em um dado estado excitado pode não ser correta.

A discussão detalhada desta questão exige o exame da evolução temporal da distribuição de probabilidades $W(x, p, t)$. Na SED a equação de Fokker-Planck governa $W(x, p, t)$ e a probabilidade de transição no espaço de fase é dada por (2.10). Na MQ a evolução do sistema se dá de acordo com equação de Schrödinger e a função de onda $\psi(x, t)$ que satisfaz esta equação é usualmente escrita como

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \exp(-i\mathcal{E}_n t/\hbar), \quad (3.4)$$

onde $\phi_n(x)$ e \mathcal{E}_n são dados por (2.24) e (2.25).

Na expressão acima os coeficientes a_n são constantes cujos valores são fixados pela função de onda no instante inicial, isto é,

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi_n^*(x) \psi(x, 0), \quad (3.5)$$

já que, conforme é bem conhecido, os estados $\phi_n(x)$ formam um conjunto completo com a propriedade de ortogonalidade.

Se adotarmos a prescrição de Wigner⁴³ a distribuição de probabilidade $W(x, p, t)$ associada com $\psi(x, t)$ será

$$W(x, p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi\hbar} \psi^*(x+y, t) \psi(x-y, t) \exp(2ipy/\hbar). \quad (3.6)$$

De acordo com a teoria quântica de Schrödinger a evolução temporal de $W(x, p, t)$ se dá conforme a expressão

$$W(x, p, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_l^* a_n W_{ln}(x, p) \exp[i(\mathcal{E}_l - \mathcal{E}_n)t/\hbar], \quad (3.7)$$

onde a_l^* e a_n são constantes e as funções $W_{ln}(x, p)$ são tais que

$$W_{ln}(x, p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi\hbar} \phi_l^*(x+y) \phi_n(x-y) \exp(2ipy/\hbar). \quad (3.8)$$

Sistemas físicos reais não evoluem no tempo de acordo com (3.7) porque todos os estados $\phi_n(x)$, com exceção do estado fundamental ($n=0$), sofrem decaimento por emissão espontânea de radiação. Por isso, propomos estudar tais processos também através de $W(x, p, t)$ mas utilizando no lugar de (3.7) a expressão mais geral

$$W(x, p, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{ln}(t) W_{ln}(x, p). \quad (3.9)$$

As fórmulas explícitas para $C_{ln}(t)$ serão obtidas mais adiante, para o caso do oscilador harmônico livre e forçado, no contexto da SED.

A expansão acima é possível visto que o conjunto de funções W_{ln} é completo e ortogonal⁴⁶ no espaço de fase. A relação de completeza é²⁰

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{ln}^*(x, p) W_{ln}(y, q) = (2\pi\hbar)^{-1} \delta(x-y) \delta(p-q), \quad (3.10)$$

enquanto que a relação de ortogonalidade se escreve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp W_{ln}^*(x, p) W_{rs}(x, p) = \delta_{lr} \delta_{ns} (2\pi\hbar)^{-1}. \quad (3.11)$$

As relações de completeza e ortogonalidade escritas acima decorrem da prescrição de Wigner (3.6) e do fato de que os estados $\phi_n(x)$ constituem um conjunto completo e ortogonal²⁰. Assim (3.9) pode ser usada também para sistemas diferentes do oscilador harmônico.

No caso do oscilador cada função do conjunto completo de funções de Wigner $W_{ln}(x, p)$, definidas em (3.8), pode ser calculada explicitamente fornecendo²⁰

$$W_{ln}(x, p) = \frac{(-1)^l 2^{\frac{n-l}{2}}}{\pi\hbar} \left(\frac{l!}{n!}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar} - \frac{p^2}{m\omega_0\hbar}\right) \times \\ \times \left[x \left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^{1/2} - \frac{ip}{(\hbar m\omega_0)^{1/2}}\right]^{n-l} L_l^{n-l} (2m\omega_0 x^2/\hbar + 2p^2/m\omega_0\hbar) \quad (3.12)$$

se $l < n$. Aqui L_n^m são polinômios de Laguerre associados. No caso em que $l > n$ obtemos um resultado similar, isto é, basta trocar l por n em todos os lugares onde aparecem e também substituir i por $-i$.

Neste ponto já podemos perceber que as funções $W_{ln}(x, p)$ não passam de ferramentas matemáticas para o cálculo da distribuição de probabilidades $W(x, p, t)$ no espaço de fase. Esta última deve ser sempre positiva para qualquer ponto x, p enquanto que funções $W_{ln}(x, p)$ podem tomar qualquer valor no plano complexo.

O nosso objetivo entretanto é mostrar que os estados $\phi_n(x)$ não correspondem aos estados físicos²⁰. Para esclarecer melhor nosso ponto de vista consideraremos o interessante fenômeno de fluorescência ressonante. A razão desta escolha é que está se tornando comum na literatura descrever fluorescência ressonante como a radiação emitida por um átomo que está oscilando coerentemente entre dois estados. Mostraremos em seguida que tal linguagem não pode mais ser justificada no caso do oscilador harmônico.

Fluorescência ressonante aparece quando um átomo é sujeito a um campo eletromagnético externo cuja frequência é próxima de uma das frequências de transição do átomo. Se o campo externo é coerente, espera-se "intuitivamente" que o átomo sofra transições sucessivas entre os dois estados devido ao mecanismo de excitação e decaimento. Conclui-se então desta maneira que a radiação emitida deveria ter a largura de linha da transição. Entretanto se previu, muito antes de se tornarem disponíveis fontes de radiação coerentes (LASERS), que a radiação emitida tem a largura de linha do campo incidente ao invés da largura natural da transição⁴⁷⁻⁴⁹. A predição foi baseada na eletrodinâmica quântica e tem sido considerada um tanto paradoxal, embora seja agora bem verificada experimentalmente.

Este fenômeno recebe uma explicação muito natural no contexto da SED²⁰. Nesta teoria um oscilador harmônico forçado possui uma equação tipo Langevin que pode ser escrita como

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x(t) - \frac{e}{m} F \sin(\omega t). \quad (3.13)$$

Aqui o campo elétrico da força externa determinística com frequência ω é denotado por $-F \sin(\omega t)$.

Na ausência do campo elétrico $E_x(t)$ da radiação de ponto zero tem-se a seguinte solução determinística

$$x_d(t) = \text{Re} \left[\frac{ieF \exp(i\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \right], \quad (3.14)$$

válida no regime estacionário. Por outro lado, na ausência de F temos a solução estacionária $x_z(t)$ mantida pelos campos de ponto zero da SED. Esta última é bem conhecida e pode ser escrita na forma (2.2) apresentada anteriormente. Com isso a solução estacionária da equação (3.13) é tal que

$$x(t) = x_d(t) + x_z(t). \quad (3.15)$$

A distribuição espectral da radiação emitida por este sistema é obtida da função de correlação da aceleração, isto é,

$$K(\tau) \equiv \langle \ddot{x}(t)\ddot{x}(t + \tau) \rangle. \quad (3.16)$$

Como x_d e x_z são estatisticamente independentes temos

$$K(\tau) = \langle \ddot{x}_d(t)\ddot{x}_d(t + \tau) \rangle + \langle \ddot{x}_z(t)\ddot{x}_z(t + \tau) \rangle. \quad (3.17)$$

O primeiro termo do lado direito desta expressão está associado à radiação de frequência ω que é a frequência do movimento determinístico x_d . O segundo termo representa uma linha de largura γ centrada na frequência ω_0 . Entretanto, vimos anteriormente que o estado fundamental do oscilador, que é representado pelo processo estocástico x_z , é um estado de equilíbrio no qual a radiação emitida a uma dada frequência é igual, em média, à radiação absorvida naquela frequência. Este resultado foi mostrado com detalhe por Boyer¹⁴ em 1975 e será obtido mais adiante quando calcularmos os coeficientes de emissão espontânea e induzida (de Einstein) no contexto da SED. Por isso, somente a linha estreita na frequência ω da força determinística é observada.

Vejam em seguida como é a evolução do sistema no espaço de fase.

A distribuição no espaço de fase associada ao estado estacionário caracterizado por (3.15), é facilmente obtida. Como x_z é independente de x_d , a distribuição conjunta de

x_z e $p_z = m\dot{x}_z$ é simplesmente o estado fundamental caracterizado por (3.1). Por isso a distribuição de $x - x_d(t) = x_z$ e $p - p_d(t) = p_z$ é simplesmente uma Gaussiana:

$$W(x, p, t) = (\pi\hbar)^{-1} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar}(x - x_d)^2 - \frac{1}{m\omega_0\hbar}(p - p_d)^2 \right] \quad (3.18)$$

de acordo com o teorema central do limite.

Como as funções $W_{ln}(x, p)$ formam um conjunto completo no espaço de fase então $W(x, p, t)$ acima pode ser escrita na forma

$$W(x, p, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{ln}(t) W_{ln}(x, p), \quad (3.19)$$

onde

$$C_{ln}(t) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp W_{ln}^*(x, p) W(x, p, t), \quad (3.20)$$

visto que as funções $W_{ln}(x, p)$ satisfazem a relação de ortogonalidade (3.11). Estes coeficientes C_{ln} da expansão (3.19) podem ser obtidos usando a expressão (3.8) para as funções $W_{ln}(x, p)$ junto com a função geratriz dos polinômios de Hermite. O cálculo não apresenta dificuldades porém é longo. O resultado é²⁰

$$C_{ln}(t) = \left[\frac{\sigma^{l+n}(t)}{l!n!} \right]^{1/2} \exp[-\sigma + i(l-n)(\omega t + \delta)], \quad (3.21)$$

onde

$$\sigma^{1/2} \exp(i\delta(t)) = \left[\frac{m\omega_0}{2\hbar} x_d(t) + i \left(\frac{m}{2\omega_0\hbar} \right)^{1/2} \dot{x}_d(t) \right] \exp(i\omega t), \quad (3.22)$$

e $x_d(t)$ é dado por (3.14).

Em geral $\sigma(t)$ e $\delta(t)$ tem ambos uma parte periódica pequena, isto é, proporcional a γ . Entretanto no caso de ressonância ($\omega = \omega_0$) σ toma valor constante

$$\sigma = \frac{e^2 F^2}{2m\gamma^2\omega_0\hbar}, \quad \delta = 2\omega_0 t. \quad (3.23)$$

Neste caso de ressonância, $W(x, p, t)$ toma uma forma conhecida. Por isso sua interpretação física será muito simples e nos permitirá fazer uma análise bastante transparente do que está acontecendo com o nosso sistema físico. Verifica-se de (3.19), (3.21), (3.22) e (3.23) que $W(x, p, t)$ está associada a um estado *coerente* $\psi(x, t)$, já que (3.4) tem coeficientes^{19,20}

$$a_n = \left(\frac{\sigma^n}{n!} \right)^{1/2} \exp(-\sigma/2). \quad (3.24)$$

Isto é notável porque um estado coerente não apresenta correções radiativas explicitamente^{50,51}. Em outras palavras, assim como o estado fundamental na SED é devido ao balanceamento entre a reação da radiação e os campos de ponto zero, o estado coerente representa o balanceamento entre estes dois campos e o campo externo que força e guia o oscilador. Tal identificação não é tão simples no caso geral não ressonante, porque então σ e δ/t apresentam variação com o tempo. Assim (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) representam a generalização do estado coerente de acordo com a SED²⁰. Esta generalização é devida à inclusão da reação da radiação presente em (3.13). Este ponto será abordado em seguida ao estudarmos o oscilador sujeito a uma força externa com dependência temporal arbitrária.

No capítulo 2 obtivemos a equação de Schrödinger a partir da equação de Fokker-Planck no espaço de fase. Para isto desprezamos as correções radiativas presentes em (2.17) visto que tomamos $\Delta = 0$ como primeira aproximação. Assim a contribuição da reação da radiação, que estava presente em Δ , não aparece na equação de Schrödinger obtida em (2.21).

Veremos em seguida que, se introduzirmos os efeitos da força da reação da radiação, a descrição quântica do oscilador harmônico forçado será muito semelhante a descrição fornecida pela SED.

Nossa proposta é que a equação de Schrödinger completa (dissipação incluída) pode se escrita como¹⁹

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} \dot{A} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right] \psi(x, t), \quad (3.25)$$

onde $A(t) = A_{ext}(t) + A_{rad}(t)$ é o potencial vetor total. A força externa determinista é tal que

$$F_{ext} = -\frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{ext}(t) \quad (3.26)$$

e tem dependência temporal arbitrária enquanto que $A_{rad}(t)$ é o potencial vetor associado ao campo elétrico da força de reação da radiação. O significado preciso de $A_{rad}(t)$ será aclarado em seguida quando relacionarmos A_{rad} com a trajetória determinística $x_d(t)$ definida em (3.15).

Vejam os resultados anteriores, obtidos no contexto da SED, nos guiarão na tarefa de obter solução exata para (3.25). É possível mostrar de (3.18) que a distribuição de probabilidades no espaço das configurações é tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp W(x, p, t) = \frac{\exp [-(x - x_d)^2 m \omega_0 / \hbar]}{(\pi \hbar / m \omega_0)^{1/2}} = |\phi_0(x - x_d)|^2. \quad (3.27)$$

Isto sugere que procuremos a solução de (3.25) na forma

$$\psi(x, t) = \phi_0(x - x_d) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(p_d + \frac{e}{c} A \right) x - \frac{ig(t)}{\hbar} \right], \quad (3.28)$$

onde x_d é a trajetória determinística, $p_d = m\dot{x}_d$ e $g(t)$ é uma função a ser determinada substituindo-se $\psi(x, t)$ na equação de Schrödinger (3.25). Depois de um cálculo curto encontramos que (3.28) satisfaz (3.25) somente se¹⁹

$$m\ddot{x}_d = -m\omega_0^2 x_d - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} [A_{ext}(t) + A_{rad}(t)] \quad (3.29)$$

e também

$$g(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} t + \int_0^t dt' \left[\frac{p_d^2(t')}{2m} - \frac{m\omega_0^2}{2} x_d^2(t') \right]. \quad (3.30)$$

A equação (3.29) acima é a equação de Abraham-Lorentz para o oscilador na ausência do campo aleatório $E_x(t)$. Se aproximarmos a força da reação da radiação por $-m\gamma\dot{x}_d$ podemos identificar A_{rad} como sendo

$$\frac{e}{c} A_{rad}(t) = m\gamma\dot{x}_d(t). \quad (3.31)$$

É esta contribuição para o potencial vetor $A(t)$ que introduz a dissipação por reação da radiação na equação de Schrödinger (3.25).

Notamos que resolver (3.25) é o mesmo que resolver (3.29). Isto porque as duas equações são equivalentes desde que a função de onda $\psi(x, t)$ seja da forma (3.28). É importante lembrar neste ponto que, com este método, buscamos encontrar *solução exata* para a equação de Schrödinger (3.25) qualquer que seja a dependência temporal da força externa F_{ext} . A solução geral para (3.29) toma a forma³⁹

$$x_d(t) = \left[\left(\frac{m\gamma x_0 + 2p_0}{2m\omega_1} \right) \text{sen}(\omega_1 t) + x_0 \cos(\omega_1 t) \right] \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) + \frac{e}{m\omega_1} \int_0^t d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} A_{ext}(\xi) \text{sen}[\omega_1(t - \xi)] \exp\left[\frac{\gamma}{2}(\xi - t)\right]. \quad (3.32)$$

Aqui $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$ e x_0 e p_0 são parâmetros livres que representam, respectivamente, a posição inicial e o momento de uma partícula que segue a trajetória clássica determinística $x_d(t)$.

Para cada par de parâmetros x_0, p_0 nós podemos construir funções $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ que são diferentes soluções exatas da equação de Schrödinger (3.25). Estas funções são usualmente chamadas de estados coerentes do oscilador harmônico⁵⁰. Foram descobertas por Schrödinger (em 1926) que, mostrou a equivalência entre (3.25) e (3.29) sem, entretanto, incluir os efeitos da dissipação por reação da radiação⁵¹. Esta força é responsável pelo decaimento de qualquer estado coerente para o estado fundamental. Isto pode ser visto facilmente no primeiro termo do segundo membro de (3.32). Ali se percebe que $x_d(t)$ tende

a zero (se desligarmos a força externa) devido ao fator de amortecimento $\exp(-\gamma t/2)$ cuja origem está na força de reação da radiação. Isto significa que sem excitação externa

$$\psi_{x_0 p_0}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_0(x) \exp(-i\mathcal{E}_0 t/\hbar), \quad (3.33)$$

isto é, o estado coerente $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ sempre decai para o estado fundamental $\phi_0(x)$ quaisquer que sejam x_0 e p_0 .

Os estados coerentes $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ podem ser expandidos em termos dos estados da base $\{\phi_n(x)\}$ como em (3.4). Assim obtemos

$$\psi_{x_0 p_0}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \exp \left[-it\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.34)$$

onde os coeficientes $a_n(t)$ tomam a forma

$$\left(\frac{n!}{\sigma^n} \right)^{1/2} a_n(t) = \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2} + i\omega_0 t \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{i}{\hbar} \left(p_d + \frac{e}{c} A \right) \frac{x_d}{2} + \hbar n \varphi - g \right\}. \quad (3.35)$$

A fase φ é dada por

$$\tan \varphi = \frac{(p_d + \frac{e}{c} A)}{m\omega_0 x_d} \quad (3.36)$$

e também

$$\hbar\omega_0\sigma = \frac{(p_d + \frac{e}{c} A)^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x_d^2}{2}. \quad (3.37)$$

O caso de fluorescência ressonante estudado anteriormente é reproduzido aqui. No regime estacionário ressonante tem-se $A(t) = 0$ e σ toma o valor constante obtido em (3.23). Isto significa que a força da reação da radiação equilibra totalmente a força externa pois $A = A_{ext} + A_{rad} = 0$. Entretanto o centro do pacote de ondas (3.28) se move de acordo com a expressão (3.14)

$$x_d(t) = \frac{eF}{m\gamma\omega_0} \cos(\omega_0 t), \quad (3.38)$$

isto é, sem sofrer amortecimento. Assim, o campo de fundo da SED difunde a partícula em torno de x_d como ocorre no caso do oscilador livre. O efeito de todas estas forças é a distribuição de probabilidades $\phi_0^2(x - x_d)$.

É gratificante ver todos estes detalhes se aclararem nesta abordagem do problema quântico do oscilador forçado com dissipação. Nota-se ainda que o nosso conhecimento da solução do problema no contexto da SED foi essencial para que propuzessemos a inclusão da reação da radiação na equação de Schrödinger (3.25). Esta descreve mais adequadamente o fenômeno de fluorescência ressonante. Além disso a análise na SED também contribuiu para que encontrássemos facilmente a solução exata da nova equação de Schrödinger.

Os estados coerentes $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ obtidos aqui tem mais algumas propriedades interessantes. Em primeiro lugar eles formam um conjunto completo no limite $\gamma = 0$, isto é,

$$\iint \frac{dx_0 dp_0}{2\pi\hbar} \psi_{x_0 p_0}^*(x, t) \psi_{x_0 p_0}(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(y) \phi_n(x) = \delta(x - y). \quad (3.39)$$

Entretanto é fácil ver que os estados $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ não são ortogonais. Em segundo lugar pode-se mostrar facilmente que a distribuição de Wigner associada aos estados $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$ é sempre positiva¹⁹, isto é,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi\hbar} \psi_{x_0 p_0}^*(x + y, t) \psi_{x_0 p_0}(x - y, t) \exp \left[\frac{2iy}{\hbar} \left(p + \frac{e}{c} A \right) \right] = \\ & = (\pi\hbar)^{-1} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar} (x - x_d)^2 - \frac{(p - p_d)^2}{m\omega_0\hbar} \right] \equiv W(x, p, t). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta é exatamente a expressão (3.18) obtida anteriormente na SED usando o teorema central do limite.

O resultado (3.40) acima pode ser estendido para temperatura não nula. Basta lembrarmos que o efeito da agitação térmica se faz sentir nas variâncias associadas à posição e ao momento da partícula que se tornam

$$\langle (x - x_d)^2 \rangle = \frac{\langle (p - p_d)^2 \rangle}{m^2\omega_0^2} = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \quad (3.41)$$

no caso do oscilador harmônico. Entretanto, é possível ver que, mesmo introduzindo esta correção, a fórmula (3.40) não coincide com a probabilidade de transição calculada anteriormente na SED, isto é, a expressão mais completa (2.10). Como é de se esperar os resultados somente coincidem no regime estacionário. Fora deste regime a solução oferecida pela SED é mais detalhada que aquela obtida fazendo uso da MQ.

A discussão apresentada acima mostra que se abordarmos o problema do oscilador forçado usando a equação de Schrödinger é possível chegar a diferentes conjuntos de estados excitados. Obtem-se, por exemplo, os estados de energia bem definida $\phi_n(x)$ e também os estados coerentes $\psi_{x_0 p_0}(x, t)$. Ambos os conjuntos podem ser usados para se estudar a evolução temporal da distribuição de probabilidades. Para ilustrar mais uma vez este ponto estudaremos o mecanismo de emissão e absorção de radiação proposto por Einstein, em 1917, no qual ele introduz os conceitos de emissão espontânea e induzida⁵².

A equação de movimento para um oscilador na SED é dada pela equação tipo Langevin conforme já vimos anteriormente em (2.1). Nesta equação a força aleatória $E_x(t)$ é gerada

pela componente x do campo eletromagnético flutuante. Este caracteriza um processo estocástico Gaussiano com uma densidade espectral dada por³⁻⁶

$$I_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle E_x(t) E_x(t + \tau) \rangle \exp(i\omega\tau) = \frac{2}{3} \frac{\hbar\omega^3}{c^3}, \quad (3.42)$$

conforme já vimos em (1.4). Devido à linearidade da equação do movimento (2.1), a posição $x(t)$ e o momento $p(t) = m\dot{x}(t)$ são também processos estocásticos Gaussianos. Em particular, a distribuição estacionária no espaço de fase, é chamada de “distribuição do estado fundamental” e é dada por (3.1).

A fim de esclarecer um pouco mais o papel dos estados excitados $\phi_n(x)$ vamos considerar as funções $W_{ln}(x, p)$ definidas anteriormente em (3.8). Expressões explícitas podem ser obtidas de (3.12). No caso em que $l = n$ temos²⁰:

$$W_{nn}(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} L_n(2z) \exp(-z), \quad (3.43)$$

onde

$$z = \frac{m\omega_0 x^2}{\hbar} + \frac{p^2}{m\omega_0 \hbar} \quad \text{e} \quad L_n(2z) \equiv L_n^0(2z).$$

Veremos em seguida que, para estudar as transições induzidas pela radiação térmica, o subconjunto de funções $U_n(z) = W_{nn}(x, p)$ é suficiente. Neste caso é possível provar que o subconjunto de funções $U_n(z)$ é completo e ortogonal, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) U_n(z') = \frac{\delta(z - z')}{2\pi^2 \hbar^2} \quad (3.44)$$

e

$$\int_0^{\infty} dz U_l(z) U_n(z) = \frac{\delta_{ln}}{2\pi^2 \hbar^2}. \quad (3.45)$$

Estes resultados seguem-se diretamente das propriedades de completude e ortogonalidade dos polinômios de Laguerre.

O papel dos estados excitados será discutido considerando a evolução temporal de $W(x, p, t)$, no caso em que o oscilador está em interação não somente com a radiação de ponto zero, mas também com a outra radiação (térmica por exemplo) que estimulará as excitações. Isto significa que estamos considerando uma distribuição espectral total $I(\omega)$ ao invés de apenas aquela associada ao campo de ponto zero e que denotamos $I_0(\omega)$. Entretanto, devido ao fato de que os campos de ponto zero não são observáveis diretamente, escreveremos

$$I(\omega) = I_0(\omega) + I_{obs}(\omega), \quad (3.46)$$

onde $I_{obs}(\omega)$ é a parte da radiação incidente que é observável.

A distribuição de probabilidades no espaço de fase, $W(x, p, t)$, satisfaz a equação de Fokker-Planck (2.7) ou, equivalentemente^{2,20},

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi W) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta W) \right] + \tilde{D} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) W, \quad (3.47)$$

onde ξ e η são constantes do movimento determinístico tais que^{2,20}

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} x \cos(\omega_0 t) - \frac{p}{(m\omega_0 \hbar)^{1/2}} \sin(\omega_0 t), \\ \eta &= \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} x \sin(\omega_0 t) + \frac{p}{(m\omega_0 \hbar)^{1/2}} \cos(\omega_0 t), \end{aligned} \quad (3.48)$$

sendo que em (3.47)

$$\tilde{D} = \frac{e^2 I(\omega_0)}{4m\omega_0 \hbar} \quad (3.49)$$

é o coeficiente de difusão.

Como $\xi^2 + \eta^2 = z$ é fácil mostrar que a solução estacionária de (3.47) é $W = U_0(z) = (\pi \hbar)^{-1} \exp(-z)$ no caso particular em que $I_{obs} = 0$ e, conseqüentemente,

$$\tilde{D} = \tilde{D}_0 \equiv \frac{e^2 I_0(\omega_0)}{4m\omega_0 \hbar} = \frac{\gamma}{4}. \quad (3.50)$$

Todos estes resultados são conhecidos desde o trabalho de Marshall² de 1963.

Neste ponto é conveniente introduzir a transformação²⁰

$$\xi \equiv (z)^{1/2} \cos \varphi \quad e \quad \eta \equiv (z)^{1/2} \sin \varphi, \quad (3.51)$$

onde z é a mesma variável de antes (veja (3.43)). Com isto a equação de Fokker-Planck fica

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma \left(z \frac{\partial W}{\partial z} + W \right) + \tilde{D} \left(4z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.52)$$

Consideraremos em seguida sistemas tais que W seja uma função de z e t apenas. Isto ocorre para sistemas que, no instante $t = 0$, estejam em equilíbrio com a radiação de ponto zero, portanto $W = U_0(z)$, e que, para $t > 0$, interajam com radiação incoerente (térmica por exemplo). Assim, usando o fato que as funções $U_n(z)$ definidas em (3.34) formam um conjunto completo, podemos escrever

$$W(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) U_n(z), \quad (3.53)$$

onde os coeficientes $C_n(t)$ são tais que

$$C_n(t) = 2\pi^2 \hbar^2 \int_0^\infty dz U_n(z) W(z, t). \quad (3.54)$$

A normalização de $W(z, t)$ e a relação (3.45) implicam que

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) = 1. \quad (3.55)$$

Estamos interessados em analisar a evolução temporal dos coeficientes $C_n(t)$. Para isto basta substituir (3.53) na equação de Fokker-Planck (3.52). Usando relações de recorrência entre os polinômios de Laguerre $L_n(2z)$ e o fato que as funções $U_n(z)$ são ortogonais obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{C}_n(t) = (n+1) \left(2\tilde{D} + \frac{\gamma}{2} \right) C_{n+1}(t) + \\ + \left[\frac{\gamma}{2} - 2\tilde{D}(2n+1) \right] C_n(t) + \left(2\tilde{D} - \frac{\gamma}{2} \right) n C_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Se escrevermos a equação acima na forma

$$\dot{C}_n(t) = P_{n+1,n} C_{n+1}(t) + P_{n-1,n} C_{n-1}(t) + (P_{n,n} - P_{n,n+1} - P_{n,n-1}) C_n(t), \quad (3.57)$$

as constantes $P_{n,m}$ tem interpretação simples. Podemos interpretar $P_{n,n+1}$, $P_{n,n}$ e $P_{n,n-1}$ como “probabilidades de transição”, por unidade de tempo, dos estados matemáticos U_n para U_{n+1} , U_n e U_{n-1} respectivamente. As expressões explícitas para estas probabilidades de transição são²⁰

$$\begin{aligned} P_{n,n+1} &= (n+1) \left(2\tilde{D} - \frac{\gamma}{2} \right), \\ P_{n,n} &= 0, \\ P_{n,n-1} &= n \left(2\tilde{D} + \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

É interessante notar que as relações acima para as probabilidades de transição, correspondem exatamente às regras de seleção válidas para o oscilador, e obtidas na MQ para o caso de emissão ou absorção de radiação na aproximação de dipolo elétrico. Aqui mostramos que elas podem ser obtidas diretamente da equação de Fokker-Planck desde que usemos a expansão da distribuição de probabilidade $W(x, p, t)$ em termos do subconjunto de funções $U_n(z)$.

Com esta nossa abordagem podemos facilmente identificar, nas expressões (3.58) para $P_{n,n+1}$ e $P_{n,n-1}$, o papel da reação da radiação devida a presença de γ . Numa “transição descendente”, como $P_{n,n-1}$, encontramos uma contribuição positiva da reação da radiação

como se espera intuitivamente. Entretanto, numa “transição ascendente”, como $P_{n,n+1}$, encontramos uma contribuição negativa da reação da radiação.

Para obter os coeficientes de emissão (e absorção) espontânea e induzida⁵² de Einstein, nós substituímos a distribuição espectral (3.46) na expressão para o coeficiente de difusão \tilde{D} em (3.49). O resultado é

$$\begin{aligned} P_{n,n+1} &= B_{n,n+1} I_{obs}(\omega_0) + A_{n,n+1}, \\ P_{n,n-1} &= B_{n,n-1} I_{obs}(\omega_0) + A_{n,n-1}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde os coeficientes de Einstein tomam a forma

$$B_{n,n+1} = \frac{2(n+1)\pi^2 e^2}{\hbar m \omega_0}, \quad A_{n,n+1} = 0 \quad (3.60)$$

e

$$B_{n,n-1} = \frac{2n\pi^2 e^2}{\hbar m \omega_0}, \quad A_{n,n-1} = \frac{2 n e^2 \omega_0^2}{3 m c^3}. \quad (3.61)$$

Estes resultados estão em completo acordo com os cálculos formais no contexto da eletrodinâmica quântica. Em particular, o coeficiente $A_{n,n+1}$ de “absorção espontânea” é zero. Agora nós podemos ver claramente que isto ocorre porque existe um equilíbrio entre os efeitos da reação da radiação e os campos de vácuo ($\gamma = 4\tilde{D}_0$ conforme vimos em (3.50)). Além disso, também o coeficiente $A_{n,n-1}$ de “emissão espontânea” possui contribuição igual destas duas fontes (γ e \tilde{D}_0). A igualdade entre $B_{n,n+1}$ e $B_{n+1,n}$ também segue de (3.50) e (3.58). Retornaremos mais tarde a este ponto quando estudarmos o modelo de Einstein-Ehrenfest para absorção e emissão de radiação no contexto da SED (Capítulo 5).

Queremos observar ainda que estas conclusões concordam com aquelas obtidas recentemente por Milonni⁵³ embora seus argumentos tenham sido obtidos fazendo uso da MQ. Além disso notamos que um dos resultados acima, equação (3.61) para $A_{n,n-1}$, foi obtido por Marshall² em 1963 num dos primeiros trabalhos na linha da SED.

Queremos, entretanto, chamar a atenção para o fato de que os “estados” associados às “distribuições” $U_n(z)$ são, na SED, nada mais do que um conjunto conveniente de funções com a propriedade de completude. Seu papel, com relação à equação de Fokker-Planck (3.47) é muito semelhante a aquele que as funções

$$V_n(x, t) = \cos(nx) \exp(-n^2 t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

têm com relação à equação

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.63)$$

no problema de difusão com barreiras perfeitamente refletoras (por exemplo $\partial V/\partial x = 0$ para $x = 0$ e π). Nenhuma das funções V_n , obtidas da equação de difusão (3.63), representa

por si mesma uma solução física, com a única exceção do “estado fundamental” $n = 0$. Nós poderíamos considerar, por exemplo, a solução:

$$V(x, t) = 1 + \alpha \cos(x) \exp(-t) \quad (3.64)$$

como o decaimento da “mistura” dos estados $n = 0$ e $n = 1$, para o estado $n = 0$, à medida que o tempo tende a infinito. Entretanto, não podemos admitir que tal linguagem obscureça o fato de que esta mistura representa um estado físico somente para os valores de α tais que $V(x, t)$ seja positiva definida ($-1 < \alpha < 1$). As mesmas considerações se aplicam aos estados excitados do oscilador e, possivelmente, aos estados excitados de átomos. O estado $n = 1$ do oscilador é representado pela função de Wigner (veja (3.43))

$$W_{11}(x, p) = (\pi\hbar)^{-1}(2z - 1) \exp(-z) \quad (3.65)$$

que é negativa para $z = m\omega_0 x^2/\hbar + p^2/m\omega_0\hbar < 1/2$. Se considerarmos misturas de W_{11} com o estado fundamental W_{00} , como por exemplo

$$W(x, p) = \frac{W_{00}(z) + \alpha W_{11}(z)}{1 + \alpha}, \quad (3.66)$$

então tais estados correspondem a distribuições reais (estados físicos) apenas se $0 < \alpha < 1$.

A linguagem que estamos combatendo é muito usada na literatura. O fenômeno de fluorescência ressonante é comumente descrito como sendo a radiação emitida por um átomo que está oscilando coerentemente entre dois estados. Vimos acima, no caso de um oscilador forçado, que esta linguagem não se justifica. Nós concluímos que não é possível excitar a partícula oscilante para um estado excitado puro $\phi_n(x)$ com $n > 0$, se iniciarmos do estado fundamental e perturbarmos o sistema com uma força externa determinística com dependência temporal *arbitrária*. O que encontramos é que um estado coerente é gerado e todos os estados excitados são populados de acordo com a distribuição de Poisson

$$P_n = \frac{\sigma^n}{n!} \exp(-\sigma), \quad (3.67)$$

como se pode ver de (3.24) e de (3.35).

Com esta observação tocamos novamente a interessante questão que diz a respeito a uma *diferença fundamental* entre a MQ e a SED. Na SED não existem estados excitados do oscilador com níveis de energia estreitos e discretos como ocorre na MQ. A energia de um oscilador é continuamente distribuída. Apesar desta fundamental diferença, ambas as teorias são, até agora, indistinguíveis do ponto de vista experimental no que diz respeito ao oscilador harmônico.

As observações tecidas neste capítulo para o oscilador podem ser estendidas para outras situações. Como último exemplo consideremos o movimento de uma partícula carregada, deslocando-se em campo magnético constante \vec{B} , e também submetida a uma força externa

$$\vec{F}_{ext}(t) = -\frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_{ext}(t) \quad (3.68)$$

com dependência temporal arbitrária¹⁹. Se o campo \vec{B} for na direção z , o estudo do movimento aleatório deste sistema no plano x, y nos leva a concluir que^{14,19}

$$Q_0(x, y, t) = \frac{m\omega_B}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{m\omega_B}{2\hbar} [(x - x_d(t))^2 + (y - y_d(t))^2] \right\} \quad (3.69)$$

é a distribuição de probabilidades à temperatura zero. Aqui $x_d(t)$ e $y_d(t)$ são as componentes da trajetória determinística nos eixos x e y , e $\omega_B = eB/mc$.

Na MQ a equação de Schrödinger correspondente é

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 \psi, \quad (3.70)$$

onde o potencial vetor \vec{A} é tal que

$$\vec{A}(t) \equiv \vec{A}_{ext}(t) + \vec{A}_{rad}(t). \quad (3.71)$$

Aqui novamente $\vec{A}_{rad}(t)$ é o potencial vetor associado aos campos que geram a força de reação da radiação.

Também neste caso, a comparação com a distribuição $Q_0(x, y, t)$ (ver (3.69)) obtida no contexto da SED, sugere que procuremos solução exata para (3.70) na forma

$$\psi(\vec{r}, t) = u_0(x - x_d, y - y_d) \exp \left(-i \frac{\tilde{g}}{\hbar} + i \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}_d}{\hbar} \right), \quad (3.72)$$

onde $u_0(x, y)$ corresponde ao estado fundamental⁵⁴ de uma partícula eletrizada em um campo magnético constante \vec{B} , isto é,

$$u_0(x, y) = \left(\frac{m\omega_B}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{m\omega_B}{4\hbar} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.73)$$

Verificamos que (3.72) é solução exata da equação de Schrödinger (3.70) desde que o vetor \vec{p}_d definido como

$$\vec{p}_d \equiv m\dot{\vec{r}}_d + \frac{e}{2c} \vec{B} \times \vec{r}_d + \frac{e}{c} \vec{A}(t) \quad (3.74)$$

seja construído por integração da equação de Abraham-Lorentz

$$m\ddot{\vec{r}}_d = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}_d \times \vec{B} - \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t) \quad (3.75)$$

que governa a trajetória determinística $\vec{r}_d = (x_d, y_d)$. Além disso a função $\tilde{g}(t)$ precisa ser tal que

$$\tilde{g}(t) = \frac{\hbar\omega_B}{2} + \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_d - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + \frac{e^2}{8mc^2} (\vec{B} \times \vec{r}_d)^2. \quad (3.76)$$

Os resultados acima são válidos à temperatura zero. A extensão para $T > 0$ pode ser feita facilmente dentro do contexto da SED. Basta considerar que as variâncias

$$\langle (x - x_d)^2 \rangle = \langle (y - y_d)^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega_B} \coth(\hbar\omega_B/2kT) \quad (3.77)$$

devem ser introduzidas na expressão (3.69) para a distribuição de probabilidades. Além disso, poderíamos também, neste caso, analisar o movimento no espaço de fase, introduzir funções de Wigner, estudar transições entre estados etc.. Não temos a intenção de discutir tais detalhes para mais este exemplo, devido a sua grande semelhança com o oscilador harmônico. É portanto fácil de compreender que todas as observações relacionadas com os estados excitados, valem também para este caso. Gostaríamos apenas de mencionar, mais uma vez, que a análise destes sistemas no contexto da SED (onde encontramos facilmente a solução) tem nos guiado para que encontremos a solução do mesmo problema no contexto da MQ. Verificamos ainda que as duas teorias (a SED e a MQ) não são inteiramente equivalentes para os sistemas estudados neste capítulo. Observamos também que a MQ, na formulação de Schrödinger, não fornece uma descrição tão detalhada do sistema como aquela que se obtem da SED.

4-SPIN E PARAMAGNETISMO

Vimos anteriormente que a SED fornece uma descrição satisfatória de vários sistemas microscópicos como por exemplo o oscilador harmônico, radiação do corpo negro, forças de Van der Waals, comportamento diamagnético de cargas livres e ligadas harmônicamente. O sucesso da SED na descrição destes fenômenos, encorajou-nos a investigar se esta teoria é capaz de fornecer uma explicação clássica⁵⁵, satisfatória, para algumas propriedades do spin \vec{S} e do momento magnético $\vec{\mu}$ de sistemas muito simples. O nosso interesse principal é ver se algum sistema simples apresenta paramagnetismo diferente daquele proposto por Langevin (este não é observado em elétrons e átomos). Boyer^{14,29} e de la Peña^{6,56} tentaram, independentemente, obter algumas propriedades do spin e momento magnético associados ao elétron. Temos que reconhecer que o estudo apresentado neste capítulo foi inspirado nos interessantes esforços destes autores, bem como nos trabalhos de Sokolov e Tumanov⁵⁷, de Schiller e Tesser⁵⁸ e, mais recentemente, de Sachidanandam⁵⁹.

Vamos então analisar algumas propriedades do spin e do dipolo magnético de sistemas compostos muito simples. O primeiro exemplo é aquele em que consideramos uma partícula como sendo composta de dois constituintes²⁸. Este é o modelo mais simples de uma partícula elementar. Restringir-nos-emos a este modelo porque neste caso os resultados são mais facilmente interpretados e as conclusões são mais confiáveis.

Suporemos que os constituintes são cargas puntiformes q_1 e q_2 de sorte que $Q = q_1 + q_2$ é a carga total da partícula composta. Além disso, as suas massas serão denotadas por m_1 e m_2 de modo que $M = m_1 + m_2$ é a massa total. Suporemos também que o movimento interno dos constituintes é não relativístico e que estes não possuem momento angular intrínseco. Com isto, o spin da partícula somente poderá ser atribuído ao movimento orbital dos constituintes.

Outra aproximação a ser feita é que a força dominante entre os constituintes é uma força harmônica (frequência ω_0) de atração entre eles. Isto significa que a distância média que os separa deve ser grande o suficiente para que a atração ou repulsão Coulombiana seja praticamente desprezível. Em outras palavras, a força centrífuga é muito maior que a força Coulombiana entre as cargas q_1 e q_2 . Esta aproximação introduzirá restrições aos parâmetros livres (cargas, massas, e frequência ω_0) do sistema. Estas restrições serão discutidas mais adiante.

Nossa experiência anterior com osciladores harmônicos mostrou que no regime estacionário o sistema fica em ressonância com a radiação de fundo de frequência ω_0 . Se o movimento não é relativístico, nós podemos imaginar as cargas em "repouso" separadas pela distância x tal que $x\omega_0 \ll c$, isto é, o comprimento de onda da radiação ressonante é

muito maior que a separação entre as cargas. Isto significa que a aproximação de dipolo usada anteriormente para o campo elétrico, a saber $\vec{E}(x, t) \simeq \vec{E}(t)$, é muito boa no caso não relativístico. Consistentemente desprezaremos a força magnética de Lorentz.

Assim, as partículas constituintes localizadas nos pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , obedecerão as seguintes equações do movimento:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m\omega_0^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{2}{3} \frac{q_1^2}{c^3} \ddot{\vec{r}}_1 + q_1 \vec{E}(t) \quad (4.1)$$

e também

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -m\omega_0^2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{2}{3} \frac{q_2^2}{c^3} \ddot{\vec{r}}_2 + q_2 \vec{E}(t). \quad (4.2)$$

Aqui $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema de duas partículas, $q_1 \vec{E}(t)$ e $q_2 \vec{E}(t)$ são as forças aleatórias devidas à radiação de ponto zero e radiação térmica, e $(2q_i^2/3c^3)\ddot{\vec{r}}_i$ é a aproximação usual para a força da reação da radiação sobre as partículas 1 e 2. Esta última aproximação vale desde que as partículas irradiem independentemente. Uma outra hipótese é de que a força harmônica seja dominante, isto é, $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m\omega_0^2 \vec{r}$ onde $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, o que implica que a radiação é emitida principalmente na direção perpendicular a \vec{r} . Esta aproximação está em acordo com a nossa hipótese de que as cargas irradiam independentemente. Se isto não ocorrer, as equações (4.1) e (4.2) precisam ser modificadas conforme a proposta detalhadamente discutida em nossa interpretação clássica da lei de Debye para os calores específicos⁶⁰.

Este ponto necessita mais alguns comentários. As equações (4.1) e (4.2) não são exatas. As forças de reação da radiação correspondem à primeira aproximação de uma expressão mais complicada obtida em nosso trabalho com a colaboração de R. Blanco e E. Santos⁶⁰. Uma outra observação é de que (4.1) e (4.2) somente podem ser justificadas se temos $\vec{E}(t)$. Nós não podemos eliminar a interação externa tomando $\vec{E}(t) = 0$. A razão disto é que desprezamos a força Coulombiana entre os constituintes e o ruído é necessário para justificar esta aproximação. O campo aleatório agita o sistema e fornece a energia necessária para manter as cargas distantes uma da outra.

Neste momento podemos fazer uma estimativa da força Coulombiana $q_1 q_2 / r^2 \sim Q^2 / r^2$ que atua nos constituintes. Basta estimar o valor médio da distância r entre as cargas. A força harmônica é da ordem de $m\omega_0^2 (\langle r^2 \rangle)^{1/2}$. Como $\langle r^2 \rangle \simeq \hbar / m\omega_0$, então a desigualdade

$$\left(\frac{Q^2}{\langle r^2 \rangle} \right)^2 / m^2 \omega_0^4 \langle r^2 \rangle \ll 1 \quad (4.3)$$

deve ser observada se a interação Coulombiana for menos importante que a força harmônica. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{Q^4}{\hbar^2 c^2} \ll \frac{\hbar \omega_0}{m c^2} \ll 1, \quad (4.4)$$

onde a última desigualdade foi imposta visto que o movimento é não relativístico. A relação (4.4) deve ser satisfeita pelos parâmetros do modelo a fim de garantir que as aproximações usadas sejam válidas.

Para estudarmos as propriedades deste sistema simples é mais conveniente expressar as equações (4.1) e (4.2) em termos das coordenadas do centro de massa e da posição relativa, a saber,

$$\begin{aligned} M\vec{R} &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2, \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nestas novas coordenadas as equações do movimento tomam a forma

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} - \frac{\Gamma_1}{\omega_0^2}\ddot{\vec{r}} - \frac{\Gamma_2}{\omega_0^2}\ddot{\vec{R}} = \frac{\tilde{Q}}{M}\vec{E}(t) \quad (4.6)$$

e também

$$\ddot{\vec{R}} - \frac{\Gamma_3}{\omega_0^2}\ddot{\vec{R}} - \frac{\Gamma_4}{\omega_0^2}\ddot{\vec{r}} = \frac{Q}{M}\vec{E}(t). \quad (4.7)$$

Aqui introduzimos as constantes Γ_i e \tilde{Q} definidas abaixo:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &\equiv M \left(\frac{q_2}{m_2} - \frac{q_1}{m_1} \right), \\ \Gamma_1 &\equiv \frac{2}{3} \frac{m\omega_0^2}{c^3} \left(\frac{q_1^2}{m_1^2} + \frac{q_2^2}{m_2^2} \right), \\ \Gamma_2 &\equiv \frac{2}{3} \frac{\omega_0^2}{c^3} \left(\frac{q_2^2}{m_2} - \frac{q_1^2}{m_1} \right) \equiv \frac{M}{m} \Gamma_4, \\ \Gamma_3 &\equiv \frac{2}{3} \frac{\omega_0^2}{Mc^3} (q_1^2 + q_2^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vemos em (4.7) que o movimento do centro de massa depende da coordenada interna $\vec{r}(t)$. Este fato não nos é estranho já que sabemos que sistemas compostos^{13,60} (ou cargas extensas⁶¹) têm movimento mais complicado devido aos efeitos da força de reação da radiação.

É fácil ver de (4.4) que as constantes Γ_i são tais que

$$\frac{\Gamma_i}{\omega_0} \sim \frac{Q^2 \hbar \omega_0}{\hbar c m c^2} \leq 10^{-3} \ll 1. \quad (4.9)$$

Isto significa que as equações (4.6) e (4.7) se desacoplam aproximadamente no caso de movimento não relativístico. Estas equações, que são lineares em \vec{R} e \vec{r} , podem ser resolvidas exatamente no caso em que o campo elétrico $\vec{E}(t)$ seja dado por (1.1). Aqui, entretanto, preferiremos discutir uma solução aproximada usando o fato de que as razões Γ_i/ω_0 são

pequenas e que a força harmônica é dominante sobre as outras forças presentes na equação (4.6) para a coordenada relativa. Em outras palavras, tomaremos

$$\ddot{\vec{r}} \simeq -\omega_0^2 \vec{r} \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{r}} \simeq -\omega_0^2 \dot{\vec{r}} \quad (4.10)$$

e as equações (4.6) e (4.7) podem ser simplificadas. Deste modo pode-se mostrar que a coordenada relativa r obedece à seguinte equação:

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} \left(1 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_3 - \Gamma_2 \Gamma_4}{\omega_0^2} \right) - \Gamma_1 \dot{\vec{r}} + \frac{\tilde{Q}}{M} \vec{E}(t) + \left(\frac{\tilde{Q} \Gamma_3 - Q \Gamma_2}{M \omega_0^2} \right) \dot{\vec{E}}(t). \quad (4.11)$$

No regime estacionário teremos $\dot{\vec{E}} \sim \omega_0 \vec{E}$ devido à ressonância e, como $\Gamma_i/\omega_0 < 10^{-3}$, a equação acima para a coordenada relativa pode ser simplificada para

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma_1 \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{\tilde{Q}}{M} \vec{E}(t). \quad (4.12)$$

se desprezarmos as pequenas correções radiativas.

Esta equação governa o movimento relativo que é o mais interessante para os nossos propósitos. Ignoraremos o movimento do centro de massa na discussão que se segue.

A solução estacionária da equação (4.12) é bem conhecida pois aparece em muitos trabalhos anteriores no contexto da SED. Ela pode ser escrita como

$$\vec{r}(t) = \frac{\tilde{Q}}{M} \text{Re} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \frac{\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) H(\omega, T)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_1 \omega} \exp[-i\omega t + i\nu(\vec{k}, \lambda)]. \quad (4.13)$$

Aqui, como em (1.1), $\nu(\vec{k}, \lambda)$ são fases aleatórias e a função $H(\omega, T)$ está relacionada com a distribuição espectral $\rho(\omega, T)$ através da expressão:

$$\pi^2 H^2(\omega, t) = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega}{2} \coth(\hbar \omega / 2kT), \quad (4.14)$$

conforme mostramos na introdução.

Da expressão (4.13) obtida acima, podemos extrair muitas propriedades do momento angular intrínseco \vec{S} (ou spin), bem como do momento magnético $\vec{\mu}$ associado à partícula composta. As primeiras conclusões a que se pode chegar é de que o momento linear $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ e a coordenada relativa \vec{r} são tais que

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} \rangle &= \langle \vec{p} \rangle = \langle x_i p_j \rangle = 0, \\ \langle \vec{p}^2 \rangle &= m^2 \langle \dot{\vec{r}}^2 \rangle = m^2 \omega_0^2 \langle \vec{r}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A distribuição de probabilidades no espaço de fase $W(\vec{r}, \vec{p})$ pode ser obtida de (4.15) e (4.13) fazendo uso do teorema central do limite. O resultado é

$$W(\vec{r}, \vec{p}) = \left[\left(\frac{2\pi}{3} \right)^2 \langle \vec{r}^2 \rangle \langle \vec{p}^2 \rangle \right]^{-3/2} \cdot \exp \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}^2}{\langle \vec{r}^2 \rangle} + \frac{\vec{p}^2}{\langle \vec{p}^2 \rangle} \right) \right], \quad (4.16)$$

onde necessitamos saber a expressão para $\langle \vec{r}^2 \rangle$ para completarmos o cálculo de $W(\vec{r}, \vec{p})$. O valor quadrático médio $\langle \vec{r}^2 \rangle$ da coordenada relativa pode ser obtido de (4.13) tomando a média nas fases aleatórias $\nu(\vec{k}, \lambda)$. O resultado é bem conhecido visto que cálculo semelhante foi feito por muitos autores¹⁻⁷. A única diferença é devida à presença das constantes \tilde{Q} e Γ_i , definidas em (4.8).

O resultado explícito para a distância relativa média é

$$\langle \vec{r}^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{m\omega_0} \frac{(1 - \xi)^2}{(1 + \xi^2)} \coth(\hbar\omega_0/2kT) \quad (4.17)$$

e, portanto, análogo ao obtido anteriormente (veja (2.5)). O novo fator, dependendo das cargas e massas dos constituintes através da razão

$$\xi \equiv \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1}, \quad (4.18)$$

introduz novas características, visto que o resultado usual para $\langle \vec{r}^2 \rangle$ é obtido apenas quando $\xi = 0$, isto é, $q_1 = 0$ ou $m_1 \rightarrow \infty$, que corresponde à análise conhecida do oscilador harmônico na SED.

O spin ou o momento angular intrínseco da partícula composta, referido a um sistema no qual o centro de massa está instantaneamente em repouso, é definido como

$$\vec{S} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (4.19)$$

em termos da coordenada relativa \vec{r} e do momento \vec{p} . A variância associada a \vec{S} é tal que

$$\langle \vec{S}^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle \vec{r}^2 \rangle \langle \vec{p}^2 \rangle = \frac{2}{3} m^2 \omega_0^2 \langle \vec{r}^2 \rangle \quad (4.20)$$

visto que $W(\vec{r}, \vec{p})$ é a Gaussiana dada por (4.16).

Considerando que o valor quadrático médio da coordenada relativa é dado por (4.17) obtemos

$$\langle \vec{S}^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar^2 \frac{(1 - \xi)^4}{(1 + \xi^2)^2} \coth^2(\hbar\omega_0/2kT). \quad (4.21)$$

Aqui nós esperamos que $\hbar\omega_0 \gg 1\text{eV}$ para qualquer partícula microscópica (como um nucleon ou mesmo um átomo), porque $\hbar\omega_0$ representa a energia que caracteriza o movimento

interno dos constituintes. Isto significa que podemos tomar $\coth(\hbar\omega_0/2kT) = 1$ mesmo para valores muito altos da temperatura pois $\hbar\omega_0 \gg kT$. Neste caso podemos escrever então

$$\langle \vec{S}^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar^2 \frac{(1 - \xi)^4}{(1 + \xi^2)^2}. \quad (4.22)$$

Este resultado do nosso modelo é bastante interessante. Conforme mencionamos acima, existem na literatura muitos estudos nos quais $m_1 \gg m_2$ ou então $q_1 = 0$, isto é, $\xi = 0$, e consequentemente,

$$\langle \vec{S}^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar^2 \quad (4.23)$$

é a única possibilidade para $\langle \vec{S}^2 \rangle$. No nosso modelo de partícula composta encontramos maior flexibilidade no valor do spin, devido ao fato de que os constituintes são eletrizados e possuem massas *finitas*. Em outras palavras, duas partículas compostas, que diferem nas massas e cargas dos constituintes, podem apresentar spin diferente mesmo que a massa e a carga totais sejam iguais. Conforme o valor de $\xi = q_1 m_2 / q_2 m_1$ varia, obtemos valores diferentes para $\langle \vec{S}^2 \rangle$, isto é,

$$0 < \langle \vec{S}^2 \rangle < 6\hbar^2 \quad \text{ou} \quad 0 < \left(\langle \vec{S}^2 \rangle \right)^{1/2} < \frac{5}{2} \hbar. \quad (4.24)$$

É interessante observar que a versão quântica de uma partícula elementar, com dois constituintes sem spin, não pode gerar spin semi-inteiro. Nosso modelo não possui esta restrição mas prediz que o valor máximo de $\left(\langle \vec{S}^2 \rangle \right)^{1/2}$ é menor que $5\hbar/2$.

A variação de $\langle \vec{S}^2 \rangle$ com ξ pode ser apreciada na figura 1. Devemos excluir a vizinhança de $\xi = 1$, pois, neste caso $\langle \vec{r}^2 \rangle = 0$ e, portanto, a força Coulombiana não pode ser desprezada. Este fato pode ser entendido facilmente porque se $q_1/m_1 = q_2/m_2$, ambos os constituintes terão a mesma aceleração aleatória $(q_1/m_1)\vec{E}(t)$. Isto significa que a força harmônica atrativa fará com que os constituintes se aproximem mais e mais um do outro. A análise apresentada acima não se aplica neste caso particular em que $\xi = 1$.

Vamos agora discutir algumas propriedades simples do momento magnético $\vec{\mu}$ do sistema. De acordo com a definição o momento magnético é tal que

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \left(q_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + q_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \right). \quad (4.25)$$

Como $\vec{\mu}$ é referido ao sistema em que o centro da massa está instantaneamente na origem, devemos ter $\vec{r}_1 = -(m_2/M)\vec{r}$ e $\vec{r}_2 = (m_1/M)\vec{r}$. Desta maneira é fácil mostrar que

$$\vec{\mu} = \frac{gQ}{2Mc} \vec{S}, \quad (4.26)$$

onde g é o fator giromagnético porque Q é a carga total, M é a massa total e \vec{S} é o momento angular do movimento interno ou spin. A expressão para g é

$$g = \frac{q_1 m_2}{Q m_1} + \frac{q_2 m_1}{Q m_2} \quad (4.27)$$

e foi obtida aqui no contexto da mecânica e do eletromagnetismo clássicos⁶², sem necessidade de introdução de campos aleatórios. Da expressão (4.27) é fácil de ver que o fator giromagnético g pode assumir qualquer valor, dependendo de que valores atribuímos às cargas e massas dos constituintes, mesmo com os vínculos $q_1 + q_2 = Q$ e $m_1 + m_2 = M$.

As expressões (4.22) para $\langle \vec{S}^2 \rangle$ e (4.26) para $\vec{\mu}$ são os principais resultados obtidos até aqui. Mostramos que sob algumas circunstâncias (por exemplo duas partículas eletrizadas, irradiando independentemente, sob a ação de uma força harmônica e a radiação aleatória da SED) um sistema simples pode ter um momento angular intrínseco tal que $\langle \vec{S}^2 \rangle \sim \hbar^2$. Uma outra característica que, de fato, é um resultado antigo do eletromagnetismo clássico⁶², é que a relação $\vec{\mu} = (gQ/2Mc)\vec{S}$ é válida para o momento magnético. O fator giromagnético g pode tomar quaisquer valores, pequenos ou grandes, positivos ou negativos.

Neste ponto é importante lembrar afirmações existentes em excelentes livros texto de MQ, como por exemplo o de Landau e Lifshitz⁵⁵: “Na mecânica quântica uma partícula elementar precisa ter um certo momento angular intrínseco independentemente de seu movimento no espaço. Esta propriedade das partículas elementares é peculiar da teoria quântica (ela desaparece no limite $\hbar \rightarrow 0$) e portanto *não possui interpretação clássica por princípio*. Em particular, é inteiramente sem sentido imaginar o momento angular intrínseco de uma partícula elementar como resultado de sua rotação sobre um eixo próprio”. Este tipo de raciocínio, bastante veiculado por muitos outros livros textos, pode não ser correto conforme estamos vendo. A abordagem do problema do spin das partículas, oferecida pela SED (onde $\hbar \neq 0$), descortina um panorama muito interessante, onde os conceitos podem ser entendidos em bases clássicas muito mais familiares. Este aspecto ficará ainda mais claro no exemplo que analisaremos em seguida, que é o caso do movimento Browniano rotacional de um dipolo magnético rígido em um campo magnético externo constante \vec{B}_0 .

Este sistema foi tratado em 1979 por Sachidanandam⁵⁹ e, com mais detalhes, por Boyer⁵⁵ em 1984. Ambas as abordagens no contexto da SED.

Suporemos, conforme mostramos em (4.20), que uma partícula elementar possui um momento magnético $\vec{\mu}$ e spin \vec{S} tais que

$$\vec{\mu} = \frac{eg}{2mc}\vec{S}, \quad (4.28)$$

onde e é a carga, m a massa da partícula e g o seu fator giromagnético. Faremos, todavia, a hipótese adicional de rigidez, isto é, $|\vec{S}|$ é constante.

Entretanto, a direção de \vec{S} pode mudar devido ao torque aplicado pelos campos magnéticos \vec{B}_0 e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ que é o campo aleatório associado à radiação de ponto zero e à radiação térmica, característica de uma cavidade com distribuição de Planck à temperatura T . Uma expressão conveniente²⁸ para $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) H(\omega, T) \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \nu(\vec{k}, \lambda)], \quad (4.29)$$

onde $\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ são versores de polarização e $\nu(\vec{k}, \lambda)$ são as fases aleatórias estatisticamente independentes.

Como o dipolo magnético emite radiação, a equação do movimento para \vec{S} deve conter também o torque devido à reação da radiação. Então, de acordo com Boyer⁵⁵, a equação do movimento para o spin é aquela obtida anteriormente por Bhabha⁶³, isto é,

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times [\vec{B}_0 + \vec{B}(0, t)] - \frac{2}{3} \frac{\vec{\mu} \times \ddot{\vec{\mu}}}{c^3}, \quad (4.30)$$

onde a partícula foi tomada na origem do sistema de coordenadas. O último termo em (4.30) é o torque da força de reação da radiação, obtido por uma análise baseada na conservação de energia. Este termo será considerado pequeno, bem como o torque aleatório, quando comparados com $\vec{\mu} \times \vec{B}_0$.

Se a equação do movimento fosse somente

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0, \quad (4.31)$$

a solução seria uma precessão, com frequência

$$\eta = \frac{\mu B_0}{S}, \quad (4.32)$$

ao redor da direção z do campo magnético \vec{B}_0 . O ângulo θ que o spin \vec{S} forma com o eixo z seria constante nesta aproximação. Entretanto, a equação de movimento completa contém o torque da reação da radiação e o torque flutuante. Portanto esperamos encontrar uma distribuição de probabilidades $P(\theta)$ para a orientação do spin²⁹.

Para calcularmos a distribuição $P(\theta)$ escolheremos um sistema de coordenadas tal que o campo magnético \vec{B}_0 tem a direção z enquanto que $\vec{\mu}$ e conseqüentemente \vec{S} , estão orientados conforme a direção do versor \hat{n} mostrado na figura 2.

Assim podemos denotar

$$\vec{S} = S\hat{n} \quad (4.33)$$

e também

$$\dot{\vec{S}} = S \frac{d\hat{n}}{dt} = S (\hat{\theta}\dot{\theta} + \hat{\varphi} \text{sen } \theta \dot{\varphi}) \quad (4.34)$$

sendo que expressões análogas valem para o momento magnético.

Tendo em conta as equações (4.34) e (4.31) podemos mostrar facilmente que

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\varphi} = -\eta = -\frac{\mu B_0}{S} \quad (4.35)$$

são as equações para as variáveis angulares válidas em ordem mais baixa, i.e., sem correções radiativas. Em outras palavras, se ignorarmos a energia perdida por emissão de radiação e também o torque flutuante gerado pela radiação aleatória, teremos o spin orientado a um ângulo θ constante, relativamente ao eixo z , mas girando com velocidade angular constante.

A variação em θ devida à emissão de radiação pode ser obtida igualando a taxa de variação da energia magnética com a potência irradiada pelo dipolo em movimento de precessão, isto é,

$$\frac{d}{dt}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0) = -\frac{2}{3} \frac{(\ddot{\vec{\mu}})^2}{c^3}. \quad (4.36)$$

Levando em conta que $\dot{\theta} = 0$ em primeira ordem obtemos²⁹

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{\text{reac}} = -\frac{2}{3} \frac{\mu \text{sen } \theta (\dot{\varphi})^3}{c^3 B_0}, \quad (4.37)$$

que fornece a variação do ângulo θ com o tempo devida à emissão de radiação. Se não houvesse flutuação o dipolo se alinharia com \vec{B}_0 .

Se calcularmos $\ddot{\vec{\mu}}$ também de modo aproximado, isto é, levando em conta apenas o movimento de precessão obteremos²⁹

$$\ddot{\vec{\mu}} = -\hat{\varphi} \mu \text{sen } \theta (\dot{\varphi})^3 \quad (4.38)$$

Este resultado, combinado com a equação de movimento (4.30) e também desprezando-se o torque flutuante, implica que a equação do movimento se torna:

$$S[\hat{\theta} \dot{\theta}_{\text{reac}} + \hat{\varphi} \text{sen } \theta \dot{\varphi}] = -\hat{\varphi} \mu B_0 \text{sen } \theta - \hat{\theta} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{c^3} \text{sen } \theta \dot{\varphi}^3. \quad (4.39)$$

Tendo-se em conta que $\dot{\varphi} = -\mu B_0 \text{sen } \theta / S$ é possível verificar que (4.39) é equivalente a (4.37) que foi obtida por conservação de energia.

A equação (4.39) acima fornece-nos a taxa de variação do ângulo θ devida à emissão de radiação. Para levarmos em conta os efeitos das flutuações do campo magnético (flutuações térmicas e de ponto zero) devemos considerar a equação completa (4.30). Esta última é bastante complexa visto que possui uma não linearidade devida ao torque da reação da radiação. Além disso possui ruído multiplicativo ($\vec{\mu} \times \vec{B}(0, t)$). Isto significa que o torque flutuante depende do estado do sistema através da incógnita $\vec{\mu}(t)$.

A fim de avaliar a distribuição de probabilidades $P(\theta)$ para o ângulo de orientação θ , Boyer²⁹ construiu uma equação de Fokker-Planck. Para isso é necessário obter os momentos médios $\langle \Delta\theta \rangle$ e $\langle (\Delta\theta)^2 \rangle$ para a variação $\Delta\theta$ em θ , devida aos torques perturbadores durante um intervalo de tempo pequeno τ .

O cálculo de $\langle \Delta\theta \rangle$ e $\langle (\Delta\theta)^2 \rangle$ será aproximado visto que não conhecemos solução exata da equação não linear (4.30). De acordo com Boyer, $\langle \Delta\theta \rangle$ tem contribuição de ambos os torques presentes em (4.30), isto é, $\langle \Delta\theta \rangle = \langle (\Delta\theta)_{\text{reac}} \rangle + \langle (\Delta\theta)_{\text{flut}} \rangle$. Levando em conta (4.37) concluímos que

$$\langle (\Delta\theta)_{\text{reac}} \rangle = -\frac{2}{3} \frac{\mu^2 \eta^3 \text{sen } \theta}{c^3 S} \tau \quad (4.40)$$

é a contribuição da reação da radiação. A frequência η foi definida em (4.32).

Para obtermos a contribuição dos campos flutuantes escreveremos no lugar de (4.30) a equação aproximada

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times [\vec{B}_0 + \vec{B}(0, t)]. \quad (4.41)$$

Se considerarmos que o torque flutuante $\vec{\mu} \times \vec{B}(0, t)$ gera pequenas variações nos valores determinísticos para θ e φ teremos

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \delta(t), \\ \varphi &= \varphi_0 - \eta t + \sigma(t). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aqui δ e σ são consideradas pequenas variações de θ_0 e φ_0 que são os valores determinísticos. O ângulo φ_0 é uma fase inicial arbitrária, de modo que no cálculo de $\langle (\Delta\theta)_{\text{flut}} \rangle$, que apresentamos em seguida, deveremos fazer uma média sobre φ_0 .

Com estas considerações a equação (4.41) se torna

$$\begin{aligned} S[\dot{\theta} + \dot{\varphi} \text{sen } \theta] &= -\hat{\varphi} \mu B_0 \text{sen } \theta + \mu \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k H(\omega, T) \cos[\omega t + \nu(\vec{k}, \lambda)] \times \\ &\times \left\{ \hat{\theta} (\epsilon_x \text{sen } \varphi - \epsilon_y \text{cos } \varphi) + \hat{\varphi} [(\epsilon_x \text{cos } \varphi + \epsilon_y \text{sen } \varphi) \text{cos } \theta - \epsilon_z \text{sen } \theta] \right\}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

que, de acordo com as definições (4.42), nos fornece as seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \frac{\mu}{S} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k H(\omega, T) \cos(\omega t + \nu) \times \\ &\times [\epsilon_x \text{sen}(\varphi_0 - \eta t + \sigma) - \epsilon_y \text{cos}(\varphi_0 - \eta t + \sigma)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

e também

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \frac{\mu}{S \text{sen } \theta} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k H(\omega, T) \cos(\omega t + \nu) \times \\ &\times [(\epsilon_x \text{cos } \varphi + \epsilon_y \text{sen } \varphi) \text{cos } \theta - \epsilon_z \text{sen } \theta]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nesta última estamos escrevendo abreviadamente $\varphi = \varphi_0 - \eta t + \sigma(t)$.

A contribuição $\langle(\Delta\theta)_{flut}\rangle$ dos campos flutuantes será obtida de (4.44) tomando σ pequeno. Mais explicitamente, faremos $\cos\sigma \simeq 1$ em (4.44). Em seguida introduziremos em (4.44) o valor de $\sigma(t)$ obtido integrando (4.45) com a aproximação $\varphi = \varphi_0 - \eta t$, isto é, $\sigma = 0$ nesta equação.

Ao integrarmos $\dot{\delta}(t)$, no intervalo de 0 a τ , e tomarmos médias nas fases aleatórias $\nu(\vec{k}, \lambda)$ e também na fase inicial φ_0 , encontraremos:

$$\langle(\Delta\theta)_{flut}\rangle = \left\langle \int_0^\tau dt \dot{\delta}(t) \right\rangle = \frac{4\pi}{3c^3} \frac{\mu^2}{S^2} \cot(\theta_0) \int_0^\infty d\omega \omega^2 H^2(\omega, T) \times \left\{ \frac{\text{sen}^2[(\omega + \eta)\tau]}{(\omega + \eta)^2} + \frac{\text{sen}^2[(\omega - \eta)\tau]}{(\omega - \eta)^2} \right\}, \quad (4.46)$$

onde usamos o fato que a soma sobre polarizações nos permite escrever

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i^2(\vec{k}, \lambda) = 1 - \frac{k_i^2}{k^2}.$$

O segundo termo em (4.46) apresenta um pico quando $\omega = \eta = eB_0/mc$. Para campos magnéticos tais que $B_0 \sim 10^4$ Gauss (campo magnético obtido em laboratório), teremos $1/\eta \sim 10^{-11}$ seg, se e e m forem a carga e a massa do eletron respectivamente. Desta maneira, se considerarmos o tempo τ muito pequeno mas muito maior que $1/\eta$, isto é,

$$\tau\eta \gg 1, \quad (4.47)$$

então o termo não ressonante presente em (4.46) será desprezível quando comparado com o termo ressonante.

Com esta consideração podemos avaliar a integral (4.46) tomando $\omega^2 H^2(\omega, T) = \eta^2 H^2(\eta, T)$ e estendendo a integração em ω até $-\infty$. Lembrando que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\text{sen}^2(x\tau)}{x^2} = \pi\tau$$

obtemos, para a variação de θ gerada pelo torque flutuante, o seguinte resultado

$$\langle(\Delta\theta)_{flut}\rangle = \frac{2\pi^2}{3c^3} \left(\frac{\mu}{S}\right)^2 \cot(\theta_0) \eta^2 H^2(\eta, T) \tau. \quad (4.48)$$

Desta maneira a variação total média de θ no intervalo de tempo τ será

$$\langle\Delta\theta\rangle = \langle(\Delta\theta)_{reac} + (\Delta\theta)_{flut}\rangle = -\frac{2\mu^2\eta^3}{3c^3S} (\text{sen } \theta) \tau + \frac{2\pi^2\mu^2\eta^2 H^2(\eta, T)}{3c^3S^2} (\cot \theta) \tau, \quad (4.49)$$

onde substituímos θ_0 por θ para simplificar a notação (θ_0 é arbitrário).

O cálculo de $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ é inteiramente análogo. Basta tomarmos $\sigma = 0$ na expressão (4.44) para $\dot{\delta}(t)$ que será integrada no intervalo curto de tempo τ . Assim, obtemos

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle = \left\langle \left(\int_0^\tau dt \dot{\delta}(t) \right)^2 \right\rangle = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{c^3} \left(\frac{\mu}{S} \right)^2 \eta^2 H^2(\eta, T) \tau, \quad (4.50)$$

desde que consideremos apenas a contribuição do termo ressonante como fizemos em (4.46) quando calculamos $\langle(\Delta\theta)_{flut}\rangle$.

Tendo obtido os momentos $\langle\Delta\theta\rangle$ e $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ podemos escrever a equação de Fokker-Planck para a distribuição de probabilidades para o ângulo de orientação θ . No regime estacionário teremos $\partial P/\partial t = 0$ e, portanto,

$$-P(\theta) \frac{\langle\Delta\theta\rangle}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{\langle(\Delta\theta)^2\rangle}{\tau} P(\theta) \right] = 0. \quad (4.51)$$

Considerando as expressões (4.49) para $\langle\Delta\theta\rangle$ e (4.50) para $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ a equação de Fokker-Planck torna-se

$$\frac{dP}{d\theta} = \left[\cot\theta - \frac{(S\eta)^2 \sin\theta}{\mu B_0 \pi^2 H^2(\eta, T)} \right] P(\theta). \quad (4.52)$$

Esta equação possui solução exata de modo que a distribuição de probabilidades para o ângulo de orientação pode ser escrita explicitamente. A expressão analítica para $P(\theta)$ é

$$P(\theta) = \text{const} \times \sin\theta \exp \left[\frac{S\eta \cos\theta}{\pi^2 H^2(\eta, T)} \right]. \quad (4.53)$$

Desta fórmula podemos obter alguns resultados familiares se tomarmos o limite de altas temperaturas. Neste caso $\hbar\eta \ll kT$ e $\pi^2 H^2(\eta, T) \simeq kT$. Como $\eta = \mu B_0/S$ obtemos

$$\frac{S\eta}{\pi^2 H^2(\eta, T)} \simeq \frac{\mu B_0}{kT}, \quad (4.54)$$

e a distribuição de probabilidade $P(\theta)$ para o ângulo de orientação torna-se a distribuição de Boltzmann,

$$P_B(\theta) = \text{const} \times \sin\theta \exp \left(\frac{\mu B_0}{kT} \cos\theta \right), \quad (4.55)$$

usada na teoria clássica de Langevin para o movimento Browniano rotacional.

O resultado analítico para distribuição de probabilidades $P(\theta)$, obtido em (4.53), pode ser usado para calcularmos o valor médio da componente do momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ na direção do campo magnético uniforme \vec{B}_0 , isto é,

$$\langle\mu_z\rangle = \frac{ge}{2mc} \langle S_z \rangle = \frac{geS}{2mc} \langle \cos\theta \rangle. \quad (4.56)$$

Usando (4.53) para $P(\theta)$ e (4.14) para $H(\eta, T)$ obtemos

$$\frac{2mc}{geS} \langle \mu_z \rangle = \coth \left[\frac{2S}{\hbar \coth(\hbar \mu B_0 / 2SBT)} \right] - \frac{\hbar}{2S} \coth(\hbar \mu B_0 / 2SkT), \quad (4.57)$$

que é o resultado obtido por Boyer²⁹ em trabalho publicado em 1984. Nesse trabalho Boyer discute com destaque o limite de baixas temperaturas e conclui que, para $S \gg \hbar$, o resultado da análise na SED é semelhante ao resultado obtido na MQ.

Entretanto, em estudo que elaboramos com a colaboração de Barranco e Brunini²⁸, publicado em 1989, fazemos uma comparação muito mais detalhada entre $\langle \mu_z \rangle$ e os dados experimentais medidos em um grande intervalo de B_0/T . Para isso, duas hipóteses adicionais são introduzidas. Em primeiro lugar, supomos que $g = 2$ visto que este é o valor experimental do fator giromagnético do elétron (também tomamos m como sendo a massa do elétron). Em segundo lugar, consideramos $S = N\hbar$ onde N tem um valor ainda desconhecido e é o único parâmetro livre na discussão que segue. Estas hipóteses merecem alguns comentários. Supor que $g = 2$ não é uma hipótese quântica, isto é, fora do contexto da SED porque mostramos no início deste capítulo que g pode tomar qualquer valor no eletromagnetismo clássico. Vimos inclusive que isto pode ocorrer mesmo quando o movimento dos constituintes é não relativístico. Isto significa que são incorretas afirmações como “o desvio do momento magnético do elétron do seu valor clássico (com $g = 1$) tem sua origem em efeitos relativísticos e quânticos”, encontradas em livros textos muito bons, como por exemplo, “Classical Electrodynamics” de J. D. Jackson⁶⁴ e “Atomic Physics” de M. Born⁶⁵. A hipótese $S = N\hbar$ tampouco pode ser considerada quântica porque vimos, pelo menos no modelo simples de partícula composta discutido no início do capítulo, que $S \sim \hbar$ é perfeitamente admissível dentro do contexto clássico da SED.

Voltando à expressão (4.57) para $\langle \mu_z \rangle$ e introduzindo $g = 2$, $S = N\hbar$ e também lembrando que $|\vec{\mu}| = egS/2mc$ encontramos

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{g\mu_0} = N \coth \left[\frac{2N}{\coth(\mu_0 B_0 / kT)} \right] - \frac{1}{2} \coth(\mu_0 B_0 / kT), \quad (4.58)$$

onde $\mu_0 = e\hbar/2mc$ é o magneton de Bohr.

A comparação desta expressão com os dados experimentais é mostrada na figura 3. O único parâmetro livre é $N = S/\hbar$, que é então escolhido para ajustar os dados experimentais medidos para os íons paramagnéticos de Cr^{3+} , Fe^{3+} e Gd^{3+} . Em nosso modelo N é um parâmetro que poderia, talvez, ser calculado se levássemos em conta os detalhes da estrutura interna da partícula paramagnética (no caso o átomo). Nós não temos meios de calcular N neste modelo simples de dipolo magnético rígido proposto por Boyer. Entretanto, é surpreendente ver na figura 3 o excelente acordo entre os dados experimentais e a teoria de

Boyer modificada com nossa hipótese adicional, a saber, $S = N\hbar$. A principal surpresa é que de acordo com os cálculos apresentados aqui o ângulo de orientação θ é uma variável *contínua*. Não há uma quantização de S_z (que toma valores discretos na mecânica quântica). De acordo com a teoria quântica

$$\langle \vec{S}^2 \rangle = \hbar J(J+1) \quad (4.59)$$

e S_z toma valores discretos no intervalo $-J\hbar < S_z < J\hbar$. Entretanto, a teoria quântica de Brillouin é melhor sucedida na explicação dos dados experimentais apresentados na figura 3. A razão é que existe uma teoria quântica para a estrutura interna dos íons e, portanto, não há parâmetro livre⁶⁶⁻⁶⁸.

É interessante comparar as predições da SED para $\langle \mu_z \rangle$ com aquelas da MQ. Nesta teoria a formula que corresponde a (4.58) é

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{g\mu_0} = \left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left[2 \left(J + \frac{1}{2} \right) \frac{\mu_0 B_0}{kT} \right] - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\mu_0 B_0}{kT} \right) \quad (4.60)$$

que é a bem conhecida função de Brillouin⁶⁶⁻⁶⁸.

Para os íons paramagnéticos da figura 3 nós temos $g = 2$ e $J = 3/2$ para o íon Cr^{3+} , $J = 5/2$ para Fe^{3+} e $J = 7/2$ para o Gd^{3+} . Estes valores de J correspondem a $\langle \vec{S}^2 \rangle / \hbar^2$ igual a 1.94, 2.95 e 3.97 respectivamente. No modelo de spin rígido apresentado aqui, o parâmetro $N = S/\hbar$ deve ser identificado com $\langle \vec{S}^2 \rangle / \hbar^2$ da teoria quântica. Não é surpresa que, ao ajustar os dados experimentais fixando valores para o parâmetro livre N , nós encontramos $N = 2, 3$ e 4 para os íons paramagnéticos Cr^{3+} , Fe^{3+} e Gd^{3+} respectivamente, conforme se vê da figura 3. Podemos entender isto mais facilmente no caso em que $\mu_0 B_0 / kT$ é pequeno o suficiente, de sorte que $\tanh(\mu_0 B_0 / kT) \simeq \mu_0 B_0 / kT$. Apenas um cálculo elementar é necessário para mostrar que as expressões (4.58) e (4.60) tomam a mesma forma, a saber,

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{g\mu_0} = C \coth \left(\frac{2C\mu_0 B_0}{kT} \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\mu_0 B_0}{kT} \right), \quad (4.61)$$

onde $C = J + 1/2$ para a teoria quântica e $C = N$ para a eletrodinâmica estocástica²⁸.

Mesmo para valores grandes de $\mu_0 B_0 / kT$, o acordo entre a SED, a MQ e os dados experimentais⁶⁷ é tão grande (para os casos apresentados acima) que é quase impossível distinguir as predições de Boyer, dadas por (4.58), das curvas de Brillouin, dadas por (4.60). Por esta razão, nós decidimos fazer outra comparação numérica entre as duas teorias. Para isso, definimos uma grandeza adimensional que é a diferença entre as predições de Boyer e de Brillouin para a razão $\langle \mu_z \rangle / \mu_0$, a saber,

$$\mu_0 \Delta(y) \equiv \langle \mu_z \rangle_{\text{Boyer}} - \langle \mu_z \rangle_{\text{Brillouin}}, \quad (4.62)$$

com $y = \mu_0 B_0 / kT$. Esta diferença é apresentada na figura 4 para $N = 2$ ($J = 3/2$), $N = 3$ ($J = 5/2$) e $N = 4$ ($J = 7/2$). Vemos que $\Delta(y)$ é pequeno e se torna ainda menor à medida que o spin cresce, fato que foi previsto por Boyer em 1984²⁹.

Vamos resumir os principais pontos discutidos neste capítulo. Mostramos que o momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ e o momento angular orbital intrínseco (ou spin) \vec{S} são relacionados por $\vec{\mu} = g\vec{S}/2mc$. Esta relação é observada em muitas partículas elementares como o elétron e os núcleons. Este e outros resultados acima descritos foram obtidos supondo que a partícula é composta de dois constituintes em movimento não relativístico. Devido a dificuldades de cálculo associadas à eletrodinâmica clássica e ao processo estocástico envolvido, consideramos um modelo muito simples. Neste os constituintes são mantidos juntos por uma força harmônica que domina sobre as outras forças que atuam nos constituintes eletrizados. Apesar da simplicidade do modelo, nós fomos capazes de mostrar que o fator giromagnético g pode assumir qualquer valor. Este é um resultado geral da eletrodinâmica clássica, que é independente da presença de radiação eletromagnética aleatória ou radiação de ponto zero. Estes campos eletromagnéticos estocásticos são, entretanto, responsáveis pelo resultado $\langle \vec{S}^2 \rangle \sim \hbar^2$ que obtivemos para o spin, no exemplo simples de partícula composta considerado. Uma outra característica deste modelo é que $\vec{\mu}$ e \vec{S} não são constantes (em módulo) mas sim grandezas flutuantes. É sabido² que neste caso os efeitos diamagnéticos se misturam com os paramagnéticos. Então decidimos estudar um outro exemplo.

Consideramos o modelo simples de um dipolo magnético rígido proposto por Sachidanandam⁵⁹ em 1979, discutido com grande detalhe por Boyer²⁹ em 1984 e por nós²⁸ em 1989. Quando um dipolo magnético está em um campo magnético externo \vec{B}_0 , o spin precessiona e o sistema perde energia por emissão de radiação. Entretanto, devido à presença dos campos eletromagnéticos aleatórios (da radiação de ponto zero e térmica), o sistema absorve energia e, conseqüentemente, não existe alinhamento completo com o campo magnético \vec{B}_0 . Com uso de argumentos inteiramente clássicos, isto é, o ângulo θ de orientação entre \vec{S} e \vec{B}_0 sendo uma variável *contínua*, Boyer foi capaz de calcular a distribuição de probabilidades $P(\theta)$ para qualquer orientação de $\vec{\mu}$, ou \vec{S} , com relação à direção do campo magnético externo \vec{B}_0 . Com hipóteses adicionais simples, isto é, $g = 2$ e $S = |\vec{S}| = N\hbar$, introduzimos o único parâmetro livre (N) no modelo de Sachidanandam e Boyer. Desta maneira fomos capazes de usar a expressão analítica para $\langle \mu_z \rangle = eg/2mc \langle S_z \rangle$, obtida por Boyer em 1984, e compará-la com medidas experimentais.

A comparação entre os cálculos teóricos e os dados experimentais foram mostrados, na figura 3, para um amplo intervalo da variável B_0/T , isto é, principalmente para B_0 grande e baixas temperaturas T . O acordo com a experiência é impressionante. As predições da SED são quase que indistinguíveis daquelas fornecidas pela teoria quântica de Brillouin. É

importante mencionar que ambas são *muito diferentes* das previsões usuais (sem radiação de ponto zero) da teoria de Langevin⁶⁸ onde, no lugar de (4.61), se obtém:

$$\frac{\langle \mu_z \rangle}{g\mu_0} = \coth \left(\frac{g\mu_0 B_0}{kT} \right) - \frac{kT}{g\mu_0 B_0}. \quad (4.63)$$

Entretanto, devemos reconhecer que a teoria quântica do paramagnetismo é superior quando comparada com explicação baseada na SED e apresentada aqui. Conforme explicamos acima, tivemos que introduzir o parâmetro $N = S/\hbar$ nos cálculos clássicos estocásticos. Isto é inevitável no atual desenvolvimento da SED porque, devido a dificuldades matemáticas (ou talvez outras dificuldades mais profundas), não temos uma descrição estocástica completa da estrutura interna de partículas elementares ou átomos^{4,6}. Entretanto, algum progresso foi obtido pela SED no que se refere às propriedades paramagnéticas da matéria. Este novo entendimento vem se somar à compreensão que se tinha do diamagnetismo conhecida desde o trabalho pioneiro de Marshall² em 1963. Assim, afirmações muito fortes como por exemplo: “a Física Clássica não fornece nem diamagnetismo nem paramagnetismo”, encontrada no excelente texto de Feynmann⁶⁹, são perigosas. A Física Clássica, *com radiação aleatória de ponto zero*, está muito mais próxima da Física Quântica do que se imaginava há alguns anos. Nós esperamos que esta constatação encoraje outros pesquisadores a investigar as propriedades do spin e momento magnético no contexto da SED. Estes esforços adicionais são muito importantes para a nossa compreensão do mundo microscópico, pois o conceito de spin é intrigante visto que apesar de intuitivo é também extremamente difícil⁷⁰ (de acordo com a MQ o momento angular está relacionado com o conceito clássico de rotação e com o conceito não clássico de *quantização do espaço*). Voltaremos a este ponto no capítulo final, quando discutiremos as implicações da equação diferencial (4.30) no caso em que o campo aleatório $\vec{B}(\vec{r}, t)$ é substituído pelo campo magnético *quantizado* presente no vácuo da Eletrodinâmica Quântica. No próximo capítulo discutiremos o possível papel da radiação de ponto zero *clássica*, característica da SED, no espalhamento de raios-X por eletrons.

5-EFEITO COMPTON

O conceito de quanta de radiação foi introduzido na Física por Einstein em 1905, através de um modelo "heurístico"⁷¹ (termo de Einstein) para a explicação do efeito fotoelétrico. Inicialmente a hipótese dos quanta de luz de Einstein não recebeu grande aceitação de físicos influentes da época. Planck, indicando Einstein para a Academia Prussiana de Ciências em 1913, diz⁷²: "that (Einstein) may occasionally have missed the mark in his speculations, as, for example, with his hypothesis of light quanta, ought not to be held too much, against him, for it is impossible to introduce new ideas, even in exact sciences, without taking risk".

Por outro lado, o artigo de Compton³⁰, publicado em 1923, deu um grande ímpeto ao modelo do foton e atualmente é considerado⁷⁴ como "a turning point in physics".

Curiosamente, Compton, que começou em 1916 a fazer experimentos cuidadosos com raios X, era um defensor da teoria clássica ondulatória^{31,74}. Por isso Compton fez muitas tentativas, baseadas na eletrodinâmica clássica, para explicar resultados aparentemente estranhos à teoria. Ele concebeu em 1917, um modelo em que o elétron era extenso o suficiente para que efeitos de interferência explicassem a assimetria observada na intensidade da radiação espalhada. Propôs também outros modelos como o do elétron em forma de anel (1918) e do elétron com spin (1921). Nestes primeiros modelos, ele acreditava que o eletromagnetismo clássico fosse uma teoria boa o suficiente para explicar o espalhamento da radiação por elétrons. Os desvios observados deveriam ser atribuídos à estrutura do elétron^{31,74}.

Gradualmente, entretanto, ele modificou seu ponto de vista para a direção da teoria dos quanta de luz. Publicou então, em 1923, seu célebre trabalho sobre o modelo do foton para o espalhamento de raios X e γ por elétrons³⁰. Entretanto, conforme veremos em seguida, sua teoria era híbrida já que usou muitos conceitos clássicos³¹.

Aparentemente Compton desconhecia o trabalho de Einstein⁵², publicado em 1917, onde ele mostrava que a radiação emitida e absorvida por partículas materiais (átomos) possuía momento com direção bem definida. Einstein estabeleceu, em seu cálculo não relativístico de 1917, as relações cinemáticas usadas por Compton em 1923.

Muitos outros físicos rejeitaram o modelo do foton⁷² por muitos anos (a palavra foton foi cunhada pelo químico G. N. Lewis em 1926), como por exemplo N. Bohr que somente o aceitou em 1927. Paradoxalmente, o próprio Einstein, que ganhou o prêmio Nobel de 1921 principalmente por sua teoria explicando o efeito fotoelétrico, teve muitas dificuldades em aceitar o modelo do foton. Declarou em 1917 "for the rest of my life I will think what are light quanta" e, em 1951, "all these 50 years of conscious brooding have brought me no near to the answer to the question: what are light quanta?". Na nossa opinião estas declarações

constituem evidência de que restam muitos pontos para ser aclarados acerca do modelo do foton. Por esse motivo decidimos examinar os trabalhos fundamentais de Einstein (1917), Einstein-Ehrenfest³² (1923) e Compton⁷³ (1923) sob o prisma da eletrodinâmica clássica estocástica. Estes estudos preliminares, feitos em colaboração com A. V. Barranco^{31,33}, T. W. Marshall e E. Santos, indicam que as relações cinemáticas introduzidas por Einstein (1917) e utilizadas por Compton (1923) podem ser leis de conservação estatísticas, isto é, válidas em média. Isto lembra o trabalho de Bohr, Kramers e Slater⁷⁵ de 1924. Nosso cálculo, entretanto, está de acordo com a conservação local de energia e momento como mostraremos mais adiante.

Conforme vimos nos capítulos anteriores, a radiação de ponto zero aleatória tem gerado efeitos que são muito semelhantes aos fenômenos quânticos observados experimentalmente em sistemas microscópicos. A sua distribuição espectral foi estabelecida como sendo dada por

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}. \quad (1.5)$$

Se aceitarmos que os campos eletromagnéticos de ponto zero são clássicos mas aleatórios, poderemos tentar encontrar evidências de seus efeitos também no espalhamento de radiação de altas frequências por cargas elétricas. Com este propósito verificaremos que uma expressão formal para a densidade de energia associada à radiação de ponto zero, que podemos mostrar ser equivalente a (1.5), é bastante sugestiva conforme veremos em seguida.

Vamos considerar a energia eletromagnética em um volume infinitesimal ao redor de um ponto \vec{r} do espaço. Esta energia é uma grandeza rapidamente flutuante porque os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ são funções aleatórias na SED. O valor médio da densidade de energia eletromagnética pode ser escrito como³⁻⁷

$$\frac{\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \vec{B}^2(\vec{r}, t) \rangle}{8\pi} = \frac{\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle}{4\pi} = \int_0^\infty d\omega \rho_0(\omega) \quad (5.1)$$

onde todas as frequências contribuem para a energia presente no volume infinitesimal porque $\rho_0(\omega)$ é dada por (1.5).

Se, entretanto, considerarmos uma caixa com volume V e escrevermos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ como uma superposição de ondas planas com frequências $\omega_{\vec{k}} = C|\vec{k}|$, onde \vec{k} é o vetor de onda, então não é difícil mostrar que a expressão

$$\frac{\langle \vec{E}^2(\vec{r}, t) \rangle}{4\pi} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \quad (5.2)$$

é formalmente equivalente^{3,7} a (5.1) desde que a densidade espectral $\rho_0(\omega)$ seja dada por (1.5).

As expressões (5.1) e (5.2) acima merecem alguns comentários. Ambas são divergentes se (1.5) for válida para todas as frequências no intervalo $0 < \omega < \infty$. As questões relacionadas a esta divergência ultravioleta não serão discutidas neste trabalho. Nós simplesmente suporemos que (1.5) é válida até uma frequência de corte, muito alta, que não conseguimos estimar (veja entretanto o comentário apresentado no capítulo final sobre gravitação como uma força de Casimir).

Por outro lado, a expressão (5.2) é muito sugestiva. Em primeiro lugar, vemos que existe uma energia média $\hbar\omega_{\vec{k}}$ associada a ondas com frequência $\omega_{\vec{k}}$ dentro do volume V . Se V é o volume onde existe um objeto eletrizado (um átomo por exemplo) e, por alguma razão, o objeto absorver energia da onda com frequência $\omega_{\vec{k}}$ da radiação de ponto zero, então, uma energia da ordem de $\hbar\omega_{\vec{k}}$ (e um momento $\hbar\vec{k}$) poderão ser fornecidos à partícula eletrizada. Isto lembra muito a cinemática usada por Compton em seu modelo corpuscular da luz, proposto em 1923, cujo objetivo era explicar o deslocamento do comprimento de onda observado na radiação espalhada.

Tendo em mente as considerações tecidas acima, é bastante simples explicar o propósito da nossa presente investigação. Queremos ver, usando os cálculos mais simples, se é possível obter uma descrição semiquantitativa das principais características do espalhamento Compton, dentro do contexto da eletrodinâmica clássica estocástica^{31,33}.

Para atingirmos este objetivo, este capítulo será apresentado da seguinte maneira. Em primeiro lugar comentaremos os trabalhos de Einstein⁵² (1917) e Einstein-Ehrenfest³² (1923), adaptando-os ao contexto da SED³³. Obteremos assim as relações cinemáticas de Compton, a partir dos cálculos não relativísticos de Einstein e Ehrenfest, como sendo válidas em média. Em seguida apresentaremos descrição semiquantitativa do deslocamento no comprimento de onda da radiação espalhada. Discutiremos também os desvios³¹ da teoria de Thomson observados na seção de choque de espalhamento de raios X e raios γ .

Para obter estes efeitos (e também introduzir o caracter aleatório associado ao recuo dos eletrons) nos consideraremos a possibilidade de que possa ocorrer uma interferência construtiva entre o pulso incidente de raios X e as ondas (com as mesmas frequências) presentes na radiação de ponto zero. Em tal situação é possível mostrar que a força da reação da radiação é capaz de fornecer uma velocidade de recuo alta para o eletron. Esta partícula (em recuo) espalha a radiação em diferentes direções com diferentes comprimentos de onda. Isto pode ser entendido como sendo devido ao efeito Doppler, exatamente como foi proposto por Compton no seu trabalho híbrido (clássico e quântico) de 1923.

Consideremos inicialmente o trabalho de Einstein de 1917, hoje também conhecido como método dos coeficientes de emissão e absorção de radiação. Segundo Einstein estes processos poderiam ser espontâneos ou estimulados pela radiação eletromagnética presente⁵².

Com o objetivo de entender os processos de emissão e absorção de radiação eletro-

magnética, por átomos imersos em uma cavidade com radiação térmica caracterizada por uma densidade espectral $\rho_T(\omega)$, Einstein partiu das seguintes hipóteses:

- 1) Os átomos possuem dois níveis de energia discretos E_2 e E_1 ($E_2 > E_1$).
- 2) A distribuição de Boltzmann (temperatura T) é válida para os átomos nestes estados.
- 3) A lei de Wien é válida para a distribuição espectral à temperatura T , isto é,

$$\rho_T(\omega) = \omega^3 f(\omega/T), \quad (5.3)$$

onde f é uma função arbitrária.

Devido ao caráter discreto dos níveis de energia, apenas a primeira hipótese é de natureza quântica. As outras duas são completamente clássicas, baseadas na termodinâmica e no eletromagnetismo.

Com estas hipóteses, Einstein foi capaz de deduzir que a densidade espectral deve ser dada por

$$\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \quad (1.8)$$

se existir equilíbrio energético na interação da radiação com a matéria.

Einstein mostrou também que a regra de Bohr,

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega, \quad (5.4)$$

decorre das hipóteses acima.

Mais tarde (em 1923), Einstein e Ehrenfest³² descartaram a primeira hipótese (quântica) permitindo que os átomos ocupassem níveis de energia em um contínuo³³. Este fato, muito bem comentado por Lewis⁷⁶ em 1973, mudou nossa apreciação do trabalho de Einstein e Ehrenfest. Isto porque agora a dedução de $\rho_T(\omega)$ e da relação de Bohr (5.4), parece ser inteiramente clássica³³.

Nós vamos discutir estes pontos com um pouco mais de detalhes mas também com uma hipótese adicional, isto é, que na cavidade existem também os campos eletromagnéticos flutuantes de ponto zero com distribuição espectral $\rho_0(\omega)$ dada por (1.5). Se admitirmos isto, então, é bastante natural supor que esta radiação de ponto zero seja capaz de estimular emissões e absorções no átomo (partícula polarizável com oscilações internas harmônicas).

Por simplicidade estudaremos inicialmente, assim como Einstein em 1917, apenas transições entre as energias E_2 e E_1 com $E_2 > E_1$. Mais adiante consideraremos o caso contínuo.

Vamos supor que o sistema absorve energia de uma onda eletromagnética (com frequência ω) associada aos campos flutuantes e sofre uma transição do estado com energia E_1 para

o estado com energia E_2 . Então, de acordo com o modelo fenomenológico de Einstein⁵², a probabilidade de transição por unidade de tempo será dada por

$$\dot{P}(1 \rightarrow 2) = A_{12}\rho_0(\omega) + B_{12}\rho_T(\omega) \quad (5.5)$$

onde A_{12} e B_{12} são constantes independentes da frequência e da temperatura.

Aqui desejamos fazer algumas observações. A primeira é que (5.5) pode ser considerada como probabilidade de transição porque ambos os termos do lado direito estão relacionados com as densidades espectrais $\rho_0(\omega)$ e $\rho_T(\omega)$ dos campos eletromagnéticos flutuantes. A segunda é que a expressão fenomenológica acima pode ser justificada classicamente, porque é bem conhecido que um oscilador harmônico com frequência ω absorve energia da radiação aleatória numa taxa proporcional à densidade espectral na mesma frequência⁷⁷. Por último nós introduzimos o termo $A_{12}\rho_0(\omega)$ que corresponde à absorção da radiação de ponto zero.

Uma outra observação importante é que quando um átomo absorve energia de uma onda com frequência ω e vetor de onda \vec{k} , ele está também absorvendo momento (na direção \vec{k}) da radiação de fundo. Portanto é razoável supor que todos os processos de absorção induzidos por ρ_0 ou ρ_T são *direccionais*.

De maneira análoga, vamos escrever a probabilidade de transição por unidade de tempo do estado E_2 para o estado E_1 como

$$\dot{P}(2 \rightarrow 1) = A_{21}\rho_0(\omega) + B_{21}\rho_T(\omega). \quad (5.6)$$

Aqui $A_{21}\rho_0(\omega)$ está no lugar do termo que corresponde à emissão espontânea no cálculo original de Einstein e Ehrenfest. Isto significa que estamos supondo que a *emissão espontânea é de fato induzida pela radiação de ponto zero*. Esta hipótese foi utilizada há muitos anos por Welton³⁶ (1948) e discutida mais recentemente⁵³ por Milonni (1984). Na forma (5.6) fica bem claro porque o termo de emissão "espontânea" tem natureza *probabilística* já que de fato ela é induzida pela radiação de ponto zero *aleatoria*.

A segunda hipótese inicial de Einstein (estatística de Boltzmann para átomos) será mantida. Se existem $n(E_1)$ partículas no estado E_1 e $n(E_2)$ no estado E_2 a relação

$$\frac{n(E_2)}{n(E_1)} = \exp [(E_1 - E_2)/kT] \quad (5.7)$$

é válida em média. Além disso suporemos, como no trabalho original de Einstein, que o equilíbrio é atingido através da condição de balanceamento detalhado

$$n(E_2)\dot{P}(2 \rightarrow 1) = n(E_1)\dot{P}(1 \rightarrow 2). \quad (5.8)$$

Analisando esta expressão no limite $T \rightarrow \infty$, quando $n(E_2) = n(E_1)$ e $\rho_T \gg \rho_0$, encontramos que $B_{12} = B_{21} \equiv B$. No caso em que $T \rightarrow 0$ temos $n(E_2) \ll n(E_1)$, $\rho_T \ll \rho_0$ e portanto encontramos $A_{12} = 0$ e $A_{21} \neq 0$ ($A_{21} \equiv A$).

O fato de que $A_{12} = 0$ significa que a radiação de ponto zero não estimula absorções na situação de equilíbrio. Este resultado foi previsto por nós quando estudamos transições entre os estados do oscilador no capítulo 3 (veja (3.60)). Isto é esperado na SED porque nesta teoria nós admitimos que a radiação de fundo de ponto zero é responsável pela estabilidade do estado fundamental dos átomos.

É fácil mostrar de (5.8) que

$$\rho_T(\omega) = \frac{\frac{A}{B}\rho_0(\omega)}{\exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) - 1}. \quad (5.9)$$

A lei de Wien (terceira hipótese de Einstein) exige que $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ onde \hbar é uma constante universal. O valor da constante A/B pode ser fixado usando a expressão de Rayleigh-Jeans (ρ_{RJ}) para a radiação de corpo negro. Ela é válida para frequências baixas ($\hbar\omega \ll kT$) e deve coincidir com (5.9) neste limite. Desta maneira, como $\rho_{RJ} = kT\omega^2/\pi^2c^3$ e, por outro lado, $\rho_T(\omega) \simeq A\rho_0(\omega)kT/B\hbar\omega$, devemos ter $A = 2B$. A constante $2\pi\hbar$ deve então ser identificada com a constante de Planck.

Verificamos desta maneira que a dedução de Einstein da fórmula de Planck é compatível com a existência das flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

A relação $A = 2B$ merece alguns comentários. À primeira vista ela significa que as flutuações de ponto zero seriam duas vezes mais efetivas que as flutuações eletromagnéticas térmicas, no sentido de induzir a emissão de radiação. Nós, entretanto, vamos interpretar este resultado ($A = 2B$) da mesma maneira que Milonni⁵³ em trabalho de 1984 e França e Marshall²⁰ em análise mais recente (1988). Basta invocar a contribuição da força de reação da radiação para os processos de emissão (5.6). Este efeito se pode ver mais explicitamente nas transições entre os estados do oscilador estudado no capítulo 3 (veja (3.58)).

No que se segue vamos remover, baseados no trabalho de Einstein e Ehrenfest³² de 1923, a hipótese de níveis de energia discretos para as partículas materiais.

Vamos supor que (num intervalo de tempo muito curto) uma partícula sofra N absorções nas frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ e M emissões nas frequências $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_M$, de tal maneira que a partícula passa de um estado inicial com energia E_I para um estado final com energia E_F (E_I e E_F arbitrários). Do diagrama ilustrado na figura 5 nós podemos ter uma ideia intuitiva da proposição de Einstein e Ehrenfest.

A fim de se ter uma descrição matemática dos processos indicados acima, necessitamos de uma generalização das expressões (5.5) e (5.6) para as probabilidades de transição. Para isto Einstein e Ehrenfest escreveram para a probabilidade de transição por unidade de tempo, $\dot{P}(I \rightarrow F)$, representando a mudança de um estado de energia E_I para um estado

com energia E_F , a seguinte de expressão:

$$\dot{P}(I \rightarrow F) = \prod_{i=1}^N [B\rho_T(\omega_i)] \prod_{j=1}^M [A\rho_0(\omega'_j) + B\rho_T(\omega'_j)]. \quad (5.10)$$

Para o processo inverso devemos ter

$$\dot{P}(F \rightarrow I) = \prod_{i=1}^N [A\rho_0(\omega_i) + B\rho_T(\omega_i)] \prod_{j=1}^M [B\rho_T(\omega'_j)]. \quad (5.11)$$

É importante mencionar neste ponto que as expressões acima são válidas somente se os processos elementares (de emissão e absorção) forem estatisticamente independentes. De acordo com a análise de Lewis⁷⁶ esta hipótese de independência estatística está de acordo com o modelo do foton. Os corpúsculos seriam absorvidos ou emitidos instantaneamente o que justificaria as fórmulas (5.10) e (5.11). Esta seria a única hipótese não clássica em todo o cálculo de Einstein e Ehrenfest, segundo Lewis. Não podemos afirmar, entretanto, que a hipótese de independência estatística apresente contradição com teorias ondulatórias como a SED. Isto porque as equações de Maxwell são lineares e as ondas de diferentes frequências possuem fases aleatórias estatisticamente independentes conforme vimos em (1.1). Este ponto merece ser retomado em investigação futura visto que não chegamos a uma conclusão definitiva.

Um outro aspecto muito interessante que emerge do quadro acima é que, sob a influência da radiação térmica e de ponto zero, as partículas são induzidas a subtrair e adicionar energia e momento aos campos de radiação. Estes campos são representados por uma superposição de ondas planas com todas as frequências. Por isso se espera que cada absorção (em uma frequência $\omega_i = c|\vec{k}_i|$) seja acompanhada por uma transferência de momento (da onda para a partícula) que é *dirigida* conforme o correspondente vetor de onda \vec{k}_i . Se considerarmos a emissão induzida como o processo inverso de absorção induzida, então é bastante natural supor que aquele processo envolve emissão de radiação com direção do momento bem definida. Com estas considerações, é simples de aceitar que a energia removida ou adicionada à radiação existente dentro da cavidade será convertida em energia cinética de translação adicionada ou removida da partícula. Todas estas considerações são consistentes com o modelo de Einstein e Ehrenfest e com a SED.

Com estas observações podemos dizer que a energia final E_F e a energia inicial E_I da partícula são relacionadas por

$$E_I + \sum_{i=1}^N \tilde{\phi}(\omega_i) = E_F + \sum_{j=1}^M \tilde{\phi}'(\omega'_j), \quad (5.12)$$

onde $\tilde{\phi}(\omega)$ e $\tilde{\phi}'(\omega')$ são quantidades positivas a ser fixadas em seguida. A primeira somatória representa a energia subtraída dos campos de radiação depois de N absorções. A segunda somatória representa a energia adicionada aos campos de radiação depois de M emissões.

De agora em diante, nosso objetivo passa a ser bastante diferente daquele do trabalho original de Einstein e Ehrenfest. Isto ocorre porque nossa intenção não é deduzir novamente a fórmula de Planck para $\rho_T(\omega)$. Esta fórmula já foi deduzida de diferentes maneiras no contexto da eletrodinâmica clássica estocástica⁹. Assim suporemos que $\rho_0(\omega)$ e $\rho_T(\omega)$ sejam bem conhecidas e mudaremos nosso objetivo, isto é, queremos obter as funções desconhecidas $\tilde{\phi}(\omega)$ e $\tilde{\phi}'(\omega')$.

O procedimento é o mesmo que antes, isto é, a distribuição de Boltzmann (5.7) é suposta válida para as partículas e o equilíbrio é atingido através da condição de balanceamento detalhado (5.8).

Tendo em conta (5.10), (5.11) e (5.12) obteremos da equação para o balanceamento detalhado a seguinte igualdade:

$$\prod_{i=1}^N \left[\frac{B\rho_T(\omega_i) \exp \left[\tilde{\phi}(\omega_i)/kT \right]}{A\rho_0(\omega_i) + B\rho_T(\omega_i)} \right] = \prod_{j=1}^M \left[\frac{B\rho_T(\omega'_j) \exp \left[\tilde{\phi}'(\omega'_j)/kT \right]}{A\rho_0(\omega'_j) + B\rho_T(\omega'_j)} \right]. \quad (5.13)$$

Esta expressão deve ser verdadeira para quaisquer N , M e também para conjuntos arbitrários de ω_i e ω'_j . Isto significa que cada fator nas produtórias deve ser igual a 1. Já que sabemos que $A/B = 2$ e que $\rho_0(\omega)$ e $\rho_T(\omega)$ são bem conhecidas, as únicas incógnitas são $\tilde{\phi}(\omega)$ e $\tilde{\phi}'(\omega')$. É simples de mostrar que estas funções deverão ser tais que:

$$\tilde{\phi}(\omega) = \hbar\omega = \tilde{\phi}'(\omega'). \quad (5.14)$$

Se usarmos este resultado em (5.12) obteremos:

$$E_I + \sum_{i=1}^N \hbar\omega_i = E_F + \sum_{j=1}^M \hbar\omega'_j, \quad (5.15)$$

que é uma expressão muito sugestiva no que diz respeito à cinemática usada por Compton no seu modelo *corpúscular* do foton. Entretanto, na análise apresentada aqui, nós concluímos que as energias $\hbar\omega_i$ (ou $\hbar\omega'_j$) devem ser extraídas (ou adicionadas) às *ondas* da radiação eletromagnética de ponto zero e térmica, para que o equilíbrio térmico entre radiação e matéria seja mantido. Não consideramos a radiação como sendo constituída de corpúsculos.

Na segunda parte do artigo de Einstein de 1917, considerada por ele a mais importante, é feito um estudo detalhado da troca de momento entre partículas materiais e a radiação presente na cavidade. Este estudo, que é feito impondo a condição de equilíbrio novamente,

tem como objetivo mostrar a necessidade de que todos os processos elementares de emissão ou absorção sejam *direccionais*. Esta conclusão é óbvia se adotarmos o modelo corpuscular do foton. Entretanto, não faremos esta hipótese. Conduziremos o cálculo ao longo da mesma linha do trabalho de Einstein de 1917. Já que o método usado é um tanto mais sofisticado do que aquele apresentado na primeira parte, usaremos explicitamente aproximações não relativísticas (como foi apresentado originalmente por Einstein) visto que assim importantes simplificações serão introduzidas. Mostraremos também que o reconhecimento, bastante explícito neste nosso estudo, de que a “emissão espontânea aleatória” é de fato “emissão induzida pela radiação de ponto zero aleatória” torna esta parte do trabalho de Einstein muito mais clara em nossa opinião³³. Todos sabem o quanto foi difícil, mesmo para Einstein, aceitar o conceito de “emissão espontânea aleatória”.

Consideremos que um átomo (partícula polarizável) esteja em movimento dentro de uma cavidade com temperatura T , de sorte que podemos dividir a influência da radiação eletromagnética em duas partes. A primeira será identificada com a força flutuante e a segunda terá um caráter dissipativo, em analogia com as teorias de movimento Browniano.

Se inicialmente a partícula tiver momento linear com projeção mv na direção x , então, depois de um pequeno intervalo de tempo ela terá momento mv' tal que

$$mv' = mv + \tilde{\Delta} - Rv\tau. \quad (5.16)$$

Aqui $\tilde{\Delta}$ se refere à parte flutuante do momento, gerada pela ação *aleatória* dos campos de radiação eletromagnética térmica e de ponto zero. O termo $-Rv\tau$ é justamente a parte dissipativa das forças que agem sobre a partícula. Veremos que apenas a radiação térmica contribui para R . O cálculo desta força dissipativa será apresentado em primeiro lugar.

No modelo de Einstein as hipóteses sobre as taxas de emissão e absorção de radiação (fórmulas (5.5) e (5.6)) foram estabelecidas em um sistema de referências em que a partícula está em repouso. Por isso averiguaremos como a distribuição espectral da radiação se apresenta em tal sistema inercial.

No sistema da cavidade (o recipiente onde estão as partículas) a distribuição espectral é isotrópica. Isto significa que a densidade de energia eletromagnética entre as frequências ω e $\omega + d\omega$, compreendida pelo ângulo sólido $d\Omega$ ao redor de uma direção arbitrária, será escrita como:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} \rho(\omega) d\omega \quad (5.17)$$

Aqui $\rho(\omega) = \rho_0(\omega) + \rho_T(\omega)$ é a distribuição total que inclui a densidade espectral de ponto zero $\rho_0(\omega)$, bem como a densidade espectral da radiação térmica $\rho_T(\omega)$.

Entretanto, para uma partícula que se move com velocidade v ao longo do eixo x , a distribuição espectral não será isotrópica. No sistema da partícula a densidade de energia

será denotada por

$$\frac{d\Omega'}{4\pi} \rho'(\omega', \theta') d\omega'. \quad (5.18)$$

Aqui θ' é o ângulo entre o eixo x e o vetor \vec{k}' associado à onda com frequência $\omega' = c|\vec{k}'|$.

É bem conhecido o fato de que a radiação de ponto zero é isotrópica em qualquer sistema de referência inercial, isto é, $\rho'_0(\omega') = \rho_0(\omega')$. Entretanto, o mesmo não ocorre com a distribuição espectral da parte térmica $\rho_T(\omega)$. Para esta temos¹²

$$\rho'_T(\omega', \theta') = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \frac{\rho_T(\gamma(\omega' + vk'_x))}{\gamma(1 + vk'_x/\omega')}, \quad (5.19)$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Entretanto, se pode mostrar que⁵²

$$\rho'_T(\omega', \theta') \simeq \left[\rho_T(\omega') + \frac{v}{c} \omega' \cos \theta' \frac{\partial}{\partial \omega'} \rho_T(\omega') \right] \left(1 - 3 \frac{v}{c} \cos \theta' \right) \quad (5.20)$$

no caso em que $v/c \ll 1$. Na expressão acima $\rho_T(\omega')$ é a densidade espectral no sistema da cavidade. É a anisotropia de $\rho'_T(\omega', \theta')$ que causará a força dissipativa na partícula.

Por simplicidade, consideraremos que a partícula sofre transições entre os estados de energia E_1 e E_2 com $E_2 > E_1$. Esta não é uma hipótese quântica porque E_2 pode estar arbitrariamente próxima de E_1 conforme vimos anteriormente. Seguindo ainda o modelo anterior, um feixe de radiação (térmica e de ponto zero) associado ao ângulo sólido $d\Omega'$ vai induzir

$$N_2 = n(E_2) [A\rho'_0(\omega') + B\rho'_T(\omega', \theta')] \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (5.21)$$

processos de emissão por unidade de tempo e

$$N_1 = n(E_1) B\rho'_T(\omega', \theta') \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (5.22)$$

processos de absorção por unidade de tempo. Como antes, $n(E_1)$ e $n(E_2)$ são os fatores de Boltzmann dados por (5.7). Os coeficientes A e B também são os mesmos que apareceram anteriormente ($A/B = 2$).

Neste ponto existe uma diferença fundamental entre a abordagem de Einstein e o nosso cálculo, baseado na SED. Na visão de Einstein, o fato de que as emissões e absorções *induzidas* são *direcionais* é classicamente aceitável. A necessidade de que a emissão *espontânea* seja também *direcional* é que o conduziu à hipótese dos *quanta* de radiação. Esta insatisfação com a emissão espontânea transparece em suas próprias palavras⁵²: "The weakness of the theory lies, on the one hand, in the fact that it does not bring any nearer the connection with the wave theory and on the other hand, in the fact that it leaves moment and direction of the elementary (spontaneous emission) processes to chance".

Para nós, entretanto, todos os processos de emissão e absorção de radiação são induzidos (pelos campos eletromagnéticos térmicos e de ponto zero). Portanto nós esperamos que em todos eles ocorrerá uma transferência de momento que será *direcional*. Assim, ao escrevermos (5.21) e (5.22) acima, já estamos considerando que cada processo envolve uma frequência, ω' no caso, e um vetor de onda \vec{k}' bem definido. Tal onda possui momento na direção \vec{k}' e esta será a direção do momento transferido. Nossa intenção agora é calcular seu módulo, que denotaremos por $q(\omega')$, já que esperamos que seja uma função da frequência ω .

Como todos os processos são direcionais, então a fração de momento linear (na direção x) acrescentada à partícula por unidade de tempo será

$$d\dot{p} = (N_1 - N_2)q(\omega') \cos \theta'. \quad (5.23)$$

A variação total no momento, considerando todas as direções de propagação, será

$$\int d\dot{p} = \frac{dp}{dt} = -n(E_2)Aq(\omega')\rho_0(\omega') \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \cos \theta' + q(\omega')B [n(E_1) - n(E_2)] \times \\ \times \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \cos \theta' \left(1 - 3\frac{v}{c} \cos \theta'\right) \left[\rho_T(\omega') + \frac{v}{c} \omega' \cos \theta' \frac{\partial}{\partial \omega'} \rho_T(\omega')\right]. \quad (5.24)$$

A primeira integral, que contém a contribuição da emissão induzida pela radiação de ponto zero, é nula porque a emissão é *direcional* mas $\rho_0(\omega')$ é *isotrópica* em qualquer sistema de referências inercial. Este ponto não fica tão claro no trabalho original de Einstein (veja D. ter Haar⁵² e Milonni⁷ (1976)). A segunda integral é facilmente calculável. Obtemos então, considerando apenas termos da ordem v/c , o resultado:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{v}{c}q(\omega) [n(E_1) - n(E_2)] B \left[\rho_T(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{\partial}{\partial \omega} \rho_T(\omega)\right] \equiv -vR(\omega) \quad (5.25)$$

onde simplificamos a notação, escrevendo ω no lugar de ω' já que esta frequência é arbitrária.

No que segue analisaremos a parte flutuante $\tilde{\Delta}$ do momento da partícula e estabeleceremos a relação entre $\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle$ e $q(\omega)$.

Suporemos que, num intervalo de tempo curto τ , ocorram N^* processos de absorção e de emissão de radiação (na frequência ω), sendo que cada um deles contribui com um momento linear δ_i . A contribuição total para a componente x da parte flutuante do momento será:

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{N^*} \delta_i. \quad (5.26)$$

Como estamos considerando que os momentos δ_i são variáveis aleatórias, teremos $\langle \delta_i \rangle = 0$ e, conseqüentemente, $\langle \tilde{\Delta} \rangle = 0$ em média. Entretanto $\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle \neq 0$ visto que

$$\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N^*} \langle \delta_i^2 \rangle. \quad (5.27)$$

Já mencionamos acima que todos os processos são direcionados de modo que cada processo elementar envolve um momento transferido $\delta_i = q(\omega) \cos \theta_i$, onde θ_i , é o ângulo entre o eixo x e o vetor de onda da radiação emitida ou absorvida pela partícula. A média do quadrado de δ_i sobre todas as direções possíveis fornece

$$\langle \delta_i^2 \rangle = \frac{q^2(\omega)}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi d\theta_i \sin \theta_i \cos^2 \theta_i = \frac{q^2(\omega)}{3}, \quad (5.28)$$

de modo que

$$\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N^*} \langle \delta_i^2 \rangle = \frac{N^*}{3} q^2(\omega). \quad (5.29)$$

O próximo passo é expressar N^* , o número total de processos de emissão e absorção que ocorrem no intervalo de tempo τ , como função das outras grandezas relevantes do problema. Sabemos que $A\rho_0(\omega) + B\rho_T(\omega)$ é a taxa de emissões estimuladas enquanto que $B\rho_T(\omega)$ é a taxa de absorções estimuladas. Assim o número total de absorções e emissões no intervalo τ será:

$$N^* = n(E_2)A\rho_0(\omega)\tau + [n(E_2) + n(E_1)] B\rho_T(\omega)\tau. \quad (5.30)$$

Com isso, podemos escrever que a variância do momento flutuante $\tilde{\Delta}$ é, de acordo com (5.29) e (5.30), dada por

$$\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle = \frac{q^2(\omega)}{3} 2n(E_1)B\rho_T(\omega)\tau. \quad (5.31)$$

Na última igualdade invocamos novamente a hipótese de balanceamento detalhado.

Um outro ingrediente importante que usaremos é o princípio de equipartição

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}m\langle v'^2 \rangle = \frac{1}{2}kT, \quad (5.32)$$

válido para partículas massivas (caso não relativístico) que obedecem a distribuição de Boltzmann.

Desta maneira, já que conhecemos $R(\omega)$, $\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle$ e $\langle v^2 \rangle$ podemos voltar à equação tipo Langevin (5.16) e tomar a média do seu quadrado, estabelecendo a relação flutuação-dissipação válida para este modelo. Supondo que não exista correlação entre a velocidade v e o momento flutuante $\tilde{\Delta}$, isto é $\langle v\tilde{\Delta} \rangle = \langle v \rangle \langle \tilde{\Delta} \rangle = 0$, e que, no limite de massas grandes, podemos desprezar o termo $R^2\tau^2kT/m$ quando comparado com $2kTR\tau$, obtemos

$$\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle = 2kTR(\omega)\tau. \quad (5.33)$$

Levando em conta as expressões (5.31) para $\langle \tilde{\Delta}^2 \rangle$, (5.25) e também (5.9), com $A/B = 2$, encontramos que o módulo do momento transferido $q(\omega)$, em cada processo de absorção ou emissão de radiação com frequência ω , é dado por

$$q(\omega) = 2\frac{kT}{c} \left(3 - \frac{\omega}{\rho_T} \frac{\partial}{\partial \omega} \rho_T \right) \left[\frac{\rho_0(\omega)}{\rho_T(\omega) + 2\rho_0(\omega)} \right]. \quad (5.34)$$

Esta expressão, aparentemente complicada, simplifica-se muito se usarmos os resultados conhecidos para a distribuição espectral de ponto zero $\rho_0(\omega)$ e a densidade espectral térmica $\rho_T(\omega)$, obtida anteriormente quando estudamos a troca de energia no modelo de Einstein e Ehrenfest de 1923. O resultado para $q(\omega)$ se torna simplesmente

$$q(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar|\vec{k}|, \quad (5.35)$$

o que é esperado intuitivamente já que havíamos obtido que a troca de energia entre radiação e matéria ocorre conforme a equação (5.15). Para $N = M = 1$ a expressão (5.15) se reduz a

$$E + \hbar\omega = E' + \hbar\omega'. \quad (5.36)$$

A expressão equivalente governando a troca de momento entre radiação e matéria, se escreve

$$\vec{p} + \hbar\vec{k} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}', \quad (5.37)$$

onde $E = |\vec{p}|^2/2m$ e $E' = |\vec{p}'|^2/2m$.

Einstein mostrou, em 1917, que se estas relações forem verdadeiras, então, existe o equilíbrio entre radiação de cavidade (com temperatura T) e partículas materiais massivas, isto é, vale a relação flutuação-dissipação (5.33). Para que isto ocorra, enfatizou, é necessário que todos os processos de troca de radiação com matéria sejam *direcionados*. Devido à dificuldade de justificar emissão espontânea, *direcionada mas aleatória*, no contexto de uma teoria ondulatória, Einstein introduziu novamente os quanta de radiação. Como estamos considerando que a emissão "espontânea" é de fato induzida pela radiação de ponto zero aleatória, não temos esta dificuldade. Por isso, podemos afirmar que as relações cinemáticas (5.36) e (5.37) não são inconsistentes com uma teoria ondulatória como a eletrodinâmica clássica estocástica. Desta maneira, não podem ser consideradas como evidência de que a radiação eletromagnética é necessariamente constituída de corpúsculos. Na nossa maneira de entender, as relações (5.36) e (5.37) exprimem a conservação de energia e momento que devem valer num processo de interação entre partículas eletrizadas e as radiações aleatórias térmica e de ponto zero. Apesar da complexidade deste processo de interação (do ponto de vista da teoria eletromagnética de Maxwell a sua análise envolveria a força de Abraham-Lorentz, onde estariam presentes os campos que geram a força da reação da radiação bem como a força aleatória), a análise estatística de Einstein leva aos resultados (5.36) e (5.37) que são surpreendentemente simples. É que Einstein, no seu trabalho extremamente engenhoso, sabiamente se restringiu a analisar o importante aspecto da conservação de energia e momento⁵².

A extensão destes resultados para o regime relativístico pode ser obtida postulando que a substituição

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \longrightarrow \sqrt{m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2} \quad (5.38)$$

seja válida. Deixamos para um projeto futuro demonstrar, usando o método de Einstein por exemplo, as relações (5.36) e (5.37), sem fazer aproximação de movimento não relativístico para as partículas materiais.

Em 1923 Compton postulou a validade das equações (5.36) e (5.37) como hipótese fundamental para explicar os fenômenos característicos do espalhamento de raios X por eletrons. "The quanta of radiation are received from definite directions and are scattered in definite direction", dizia Compton³⁰. Entretanto, conforme lembramos anteriormente, Compton não menciona o trabalho de Einstein de 1917.

Tendo postulado as relações cinemáticas (5.36) e (5.37) o espalhamento de um quantum foi visualizado por Compton de maneira muito simples conforme é mostrado na figura 6.

Compton então considerou, conforme é bem conhecido, que um quantum de frequência ν_0 (momento $h\nu_0/c$) colide com um eletron em repouso de tal maneira que energia e momento sejam conservados de acordo com (5.36) e (5.37). Com um simples cálculo relativístico, ele obteve a lei do deslocamento do comprimento de onda,

$$\frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{mc^2}(1 - \cos \theta), \quad (5.39)$$

onde $\lambda_0\nu_0 = \lambda'\nu' = c$ e θ é o ângulo de espalhamento.

Esta fórmula de Compton, obtida em 1923, e a explicação do efeito fotoelétrico fornecida por Einstein em 1905, são consideradas na literatura como as mais claras evidências de que um quantum de luz é um corpúsculo. Já que a radiação também possui muitas propriedades ondulatórias surgiu então o conceito de dualidade onda-corpúsculo para os quanta de radiação.

Gostaríamos de lembrar que nem Einstein⁵² e nem Compton³⁰ afirmavam em seus trabalhos originais que os quanta eram corpúsculos. Diziam explicitamente apenas que os processos de absorção e emissão de radiação eram *direccionados*, o que é uma consideração muito mais fraca.

As evidências de que não é necessário supor que o foton seja um corpúsculo⁷² para explicar o efeito fotoelétrico e o efeito Compton (fórmula (5.39)), apareceram alguns anos depois do trabalho pioneiro de Einstein (1905). Em 1914, Richardson⁷⁴ obteve a equação de Einstein para o efeito fotoelétrico usando argumentos termodinâmicos que consideravam a emissão de eletrons pela radiação como um fenômeno análogo à evaporação de uma superfície líquida (a função trabalho comparável ao calor latente de vaporização). Em 1927, Wentzel^{72,78} deduziu a equação de Einstein (para o efeito fotoelétrico) e a distribuição angular dos eletrons, com a hipótese de que um eletron poderia ser descrito pela equação de Schrödinger e que a radiação poderia ser tratada classicamente. Este resultado é relativamente popular já que aparece em livros texto de mecânica quântica. Discussões bastante

interessantes sobre este ponto, aparecem em artigos recentes de M. O. Scully et al.⁷⁹ (1972) e R. Kidd et al.⁷² (1989).

No mesmo ano de 1927, E. Schrödinger⁸⁰ publicou um trabalho (quase desconhecido) tratando o efeito Compton da mesma maneira com que Wentzel tratou o efeito fotoelétrico. Ele considerou que os eletrons são caracterizados por uma função de onda que é solução de uma equação tipo Klein-Gordon, isto é, eletrons quânticos. Para Schrödinger, entretanto, a radiação era constituída de ondas eletromagnéticas clássicas que eram difratadas pela configuração (quântica) de eletrons incidentes e espalhados. O único resultado obtido por ele foi o deslocamento do comprimento de onda (5.39). Ele não calculou a seção de choque de espalhamento.

Mais tarde em 1929, Klein e Nishina⁸¹ (usando a equação de Dirac, mais adequada para descrever eletrons) obtiveram a famosa expressão para a seção de choque de espalhamento de radiação por eletrons. O tratamento inclui efeitos devidos ao momento magnético do eletron, e os resultados estão em bom acordo com os dados experimentais. A fórmula de Klein-Nishina para radiação não polarizada é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{KN} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)}\right] \left\{1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]}\right\}, \quad (5.40)$$

onde a constante α está relacionada com a frequência $\nu_0 = \omega/2\pi$ da radiação incidente, isto é:

$$\alpha = \frac{\hbar\omega}{mc^2}. \quad (5.41)$$

É interessante salientar que a análise de Klein e Nishina foi feita *sem a quantização explícita* do campo eletromagnético. Somente Tamm,⁸² em 1930, realizou os cálculos no contexto da eletrodinâmica quântica pela primeira vez, isto é, 35 anos depois da descoberta dos (misteriosos) raios X por Roentgen em 1895.

Mais interessante ainda é observar que, em seu trabalho de 1923, Compton apresentou um cálculo da seção de choque de espalhamento que era inteiramente clássico. Isto foi logo apontado por Woo⁸³ em 1925. Na verdade Compton reconhecia que seu cálculo da seção de choque era baseado na eletrodinâmica clássica³⁰. O resultado obtido apresentava bom acordo com a experiência. Discutiremos este cálculo mais adiante.

Além disso, Compton mostrou, também em 1923, que a fórmula (5.39) para o deslocamento da frequência podia ser obtida classicamente considerando que os eletrons, em movimento de recuo, espalham a radiação que sofre efeito Doppler. Isto é, a variação no comprimento de onda seria devida ao efeito Doppler clássico desde que se considerasse os eletrons recuando com velocidade ("efetiva") uniforme $v = c\beta$ na direção do feixe incidente. A relação entre β e α definida em (5.41), deveria ser

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (5.42)$$

de acordo com Compton. Explicaremos o raciocínio de Compton com detalhes mais adiante.

O que vamos fazer em seguida é mostrar que os efeitos da radiação de ponto zero flutuante e da força da reação da radiação *não são desprezíveis*, quando se trata de analisar o espalhamento de raios X por elétrons. Muito pelo contrário, quando os incluímos nos cálculos podemos descrever semiquantitativamente importantes aspectos do espalhamento Compton, como por exemplo, a fórmula (5.39) e os desvios da seção de choque de Thomson,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Thomson} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad (5.43)$$

para o espalhamento de uma onda plana circularmente polarizada.

Se desprezarmos a reação da radiação, é possível encontrar soluções exatas para o movimento relativístico da carga mesmo quando a força magnética não é desprezível. No texto de Landau e Lifshitz, por exemplo, nós encontramos uma solução sofisticada para o problema⁸⁴. A conclusão é de que não existe recuo sistemático e o espalhamento da radiação se dá conforme a fórmula de Thomson acima. Além disso, a radiação emitida tem a mesma frequência da radiação incidente. Todos estes resultados desta análise relativística estão em contradição com os fatos experimentais discutidos acima. Nosso argumento é que os cálculos que conduzem à seção de choque de Thomson são incompletos, isto é, não foram consideradas todas as forças existentes.

Em nossos trabalhos anteriores, em colaboração com A. J. da Silva, G. C. Marques⁶¹ e G. C Santos¹³, vimos que a reação da radiação é importante para a consistência interna da eletrodinâmica clássica. Vamos ver o que ocorre se levamos em conta a força de reação da radiação gerada pelos campos próprios da partícula eletrizada.

Este difícil problema não possui solução exata no caso relativístico mas é possível usar um método iterativo conforme foi indicado no trabalho recente de Hagenbush⁸⁵, por exemplo. Aqui, entretanto, usaremos uma aproximação não relativística e depois faremos uma adaptação para o caso de movimento relativístico, da mesma maneira como é feito no texto de Landau e Lifshitz⁸⁶.

A força de reação da radiação pode ser escrita como sendo $\vec{F}_r = 2e^2\ddot{\vec{v}}/3c^3$, no sistema de referência em que a velocidade é baixa. Portanto, se a partícula está sob a ação dos campos elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}) de uma onda, a equação do movimento será⁸⁶

$$m\dot{\vec{v}} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} \quad (5.44)$$

Supondo que a força da reação da radiação seja pequena quando comparada com as outras teremos

$$\ddot{\vec{v}} \simeq \frac{e}{m} \dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc} \dot{\vec{v}} \times \vec{B} \quad (5.45)$$

como uma equação válida no sistema de referências em que a partícula está instantaneamente em repouso. Neste sistema temos $\dot{\vec{v}} = e\vec{E}/m$ e a força da reação da radiação fica

$$\vec{F}_r = \frac{2}{3} \frac{e^3}{c^3} \dot{\vec{E}} + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (5.46)$$

É claro que o segundo termo acima é a parte da força de reação da radiação que está na direção \vec{k} da onda incidente. O primeiro termo, que é perpendicular à direção incidente, oscila com o tempo e não dá contribuição em média. Este termo será desprezado no que se segue. Assim, o valor médio do módulo da força de reação da radiação pode ser escrito como

$$F_r = \frac{\sigma}{4\pi} \langle \vec{E}_{inc}^2 \rangle. \quad (5.47)$$

Aqui, \vec{E}_{inc}^2 é o campo elétrico associado à onda incidente e

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (5.48)$$

é a seção de choque de Thomson, isto é, (5.43) integrada sobre todas as direções.

A força \vec{F}_r é na direção do feixe incidente, mas é em geral muito pequena (exceto para feixes muito intensos) e portanto produz um recuo desprezível. Veremos em seguida em que condições o recuo se torna apreciável podendo inclusive atingir velocidades relativísticas. Além disso veremos também porque a direção do recuo não coincide exatamente com a direção da onda incidente mas varia aleatoriamente em torno desta direção.

Quando analisamos nos capítulos anteriores diferentes sistemas físicos, chegamos a uma conclusão simples. Se tivermos um sistema oscilante, como um oscilador harmônico por exemplo, ocorrerá uma ressonância entre o sistema e a radiação de ponto zero de mesma frequência. O sistema oscilante absorve principalmente a radiação incidente que possui aquela frequência do movimento oscilatório. Nós vamos supor que este fenômeno possa ocorrer com o elétron que esteja oscilando nos campos da onda proveniente da fonte de raios X. É claro que para que isto aconteça é necessário haver interferência construtiva entre a onda incidente e a onda de mesma frequência presente na radiação de ponto zero. Isto é mostrado esquematicamente na figura 7.

Se supusermos que a energia total das ondas eletromagnéticas (associadas à radiação de ponto zero em interferência construtiva com a radiação proveniente da fonte), dentro de um pequeno volume V ao redor da partícula, é tal que

$$\frac{\langle (\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{pto\ zero})^2 \rangle}{4\pi} = \frac{2\hbar\omega}{V}, \quad (5.49)$$

então, a energia da ordem de $\hbar\omega$ poderia ser absorvida pelo corpúsculo conforme foi sugerido anteriormente (veja (5.2) e a argumentação que se segue). Por isso nossa proposta é de que a radiação aleatória de ponto zero pode contribuir para \vec{F}_r , obtida acima em (5.47). Se a frequência for alta o suficiente (um raio γ por exemplo) então $\hbar\omega$ poderá ser tão grande quanto a energia de repouso mc^2 da partícula.

Com estas idéias simplificadas em mente, nós podemos generalizar (5.47) com a inclusão dos campos elétricos de ponto zero. Assim, o valor médio da força de reação da radiação se torna

$$F_r = \frac{\sigma}{4\pi} \left\langle (\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{pto\ zero})^2 \right\rangle = \frac{\sigma}{4\pi} \left\langle \vec{E}^2 \right\rangle, \quad (5.50)$$

onde \vec{E} é o campo total (veja figura 7). Nós esperamos que \vec{E}_{inc} seja comparável com $\vec{E}_{pto\ zero}$ para que tenhamos uma interferência construtiva apreciável entre estes dois campos (veja que Marshall e Santos^{21,22} dão argumentação semelhante no contexto da recém proposta ótica estocástica). Neste caso teremos $F_r \sim \sigma\hbar\omega/V$ em ordem de magnitude. O pequeno volume V ao redor da partícula será relacionado com o raio "clássico" do eletron ($r = e^2/mc^2$) conforme veremos mais adiante.

Gostaríamos de observar que a força da reação da radiação completa é aleatória (veja (5.46) considerando que $\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{pto\ zero}$). A contribuição da radiação de ponto zero é responsável por esta característica. Desta maneira, a direção da velocidade de recuo do eletron é uma variável aleatória no contexto da eletrodinâmica clássica estocástica. Isto se pode notar facilmente da figura 7. No nosso estudo simplificado consideraremos apenas o valor médio da componente de F_r na direção da onda incidente, isto é, a expressão (5.50).

Devemos lembrar que a fórmula (5.50) para F_r é válida no sistema de referências em que a carga está instantaneamente em repouso. Para que possamos calcular a velocidade de recuo $\vec{v} = c\beta\hat{k}$, no sistema de laboratório, vamos usar o procedimento explicado muito claramente no texto de Landau e Lifshitz⁸⁷. Neste sistema a aceleração $c\dot{\beta}_{\parallel}$ na direção de incidência é tal que

$$c\dot{\beta}_{\parallel} = \frac{\sigma}{m} \frac{E^2}{4\pi} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \gamma^{-3}, \quad (5.51)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz.

Esta equação pode ser integrada exatamente e a velocidade de recuo $v(t) = c\beta(t)$ é tal que

$$3 \frac{\sigma}{mc} \frac{E^2}{4\pi} t = \left(\frac{2-\beta}{1-\beta} \right) \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} - 2, \quad (5.52)$$

onde supusemos que a partícula estivesse em repouso no sistema de laboratório no instante $t = 0$.

A expressão (5.52) obtida por Landau e Lifshitz nos permite fazer uma estimativa do tempo necessário para se atingir uma velocidade de recuo relativística. Se a energia

média, no pequeno volume V ao redor da partícula, for da ordem de mc^2 , então, a equação (5.52) implica em velocidade relativística para tempos da ordem de $V/\sigma c$. No caso em que $V \sim (e^2/mc^2)^3$, por exemplo, o tempo t será da ordem de e^2/mc^3 (10^{-23} seg.). Em outras palavras, a força da reação da radiação fornece um impulso tão forte que velocidades relativísticas são atingidas quase que instantaneamente.

Se a partícula estiver recuando com velocidade $v = c\beta$ nos campos de uma onda eletromagnética transversal, então, ela sofrerá uma aceleração $\vec{v} = c(\dot{\beta}_{\parallel}, \dot{\beta}_{\perp})$. Aqui $\dot{\beta}_{\perp}$ e $\dot{\beta}_{\parallel}$ são as componentes perpendicular e paralela à direção de incidência. A expressão para $\dot{\beta}_{\parallel}$ tem a origem na força de reação e foi dada acima (veja (5.51)). A aceleração transversal tem sua origem na força de Lorentz e, de acordo com Landau e Lifshitz⁸⁸, é dada por

$$c\dot{\beta}_{\perp} = \frac{e}{m} \left(\frac{1-\beta}{\gamma} \right) E, \quad (5.53)$$

onde E , como antes, é o campo elétrico total.

De acordo com fórmula bem conhecida, obtida por Liénard⁸⁹ em 1898, a potência total irradiada pela partícula é

$$P_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^4}{c} \dot{\beta}_{\perp}^2 \left[1 + \gamma^2 \left(\dot{\beta}_{\parallel} / \dot{\beta}_{\perp} \right)^2 \right]. \quad (5.54)$$

Usando $\dot{\beta}_{\perp}$ e $\dot{\beta}_{\parallel}$ dados acima (veja (5.51) e (5.53)) podemos facilmente mostrar que

$$P_{rad} = \sigma c \frac{E^2}{4\pi} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \left[1 + \alpha_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right], \quad (5.55)$$

onde o parâmetro α_0 é tal que

$$\alpha_0 \equiv \frac{V}{mc^2} \frac{E^2}{4\pi}. \quad (5.56)$$

Aqui $V = \sigma^2 mc^2 / 4\pi e^2 = (16\pi/9)(e^2/mc^2)^3$ é um pequeno volume ligeiramente maior que o volume associado ao raio "clássico" do elétron.

Podemos extrair informações interessantes de (5.55) se supusermos que a potência total incidente sobre o elétron é tal que

$$P_{inc} = c\sigma \frac{E^2}{4\pi} = P_{rad}(\beta). \quad (5.57)$$

Esta hipótese merece alguns comentários. Em primeiro lugar estamos supondo que a partícula tem sua carga distribuída numa região finita cuja extensão é da ordem do raio "clássico" do elétron. Esta suposição é baseada em estudo anterior em colaboração com A. J. da Silva e G. C. Marques⁶¹. Neste trabalho verificamos que o movimento da partícula

é causal somente se a carga do elétron estiver distribuída em uma região extensa com raio maior ou igual ao raio de carga mínimo do elétron ($\frac{3}{5} \frac{c^2}{mc^2}$ no caso de distribuição uniforme de carga). Em segundo lugar, a igualdade (5.57) é uma forma aproximada de lei de conservação de energia para o processo de espalhamento. Em outras palavras, se a igualdade $P_{inc} = P_{rad}(\beta)$ for satisfeita por algum valor de β então $v = c\beta$ é a velocidade de recuo estacionária da partícula eletrizada. Nós usamos a palavra estacionária porque se $P_{inc} = P_{rad}$ não existe energia disponível para aumentar a velocidade da carga em recuo.

Vejamos em seguida como se pode estimar a velocidade de recuo. Se usarmos a notação $\beta \equiv \alpha/(1 + \alpha)$, introduzida por Compton, é possível mostrar, com um cálculo simples, que a igualdade (5.57) é equivalente a

$$2\alpha(1 + 2\alpha) = \alpha_0. \quad (5.58)$$

Esta é uma equação para o parâmetro α que sempre tem uma solução para cada α_0 definido em (5.56). Isto significa que a velocidade de recuo $v = c\alpha/(1 + \alpha)$ é sempre atingida em intervalo de tempo extremamente curto conforme vimos acima em (5.52). Compton chamava esta velocidade de "effective velocity" dos elétrons³⁰.

Da equação (5.58) para α nós podemos concluir que

$$\alpha \leq \frac{\alpha_0}{2} = \frac{V}{mc^2} \frac{E^2}{8\pi} \quad (5.59)$$

onde a igualdade é válida se $\alpha^2 \ll 1$.

Já que esta parte da análise é qualitativa, a desigualdade acima é boa o bastante para nossos propósitos. Nós podemos ver facilmente que o valor médio de α depende do valor médio da densidade de energia $\langle E^2 \rangle 4\pi$. Então, de acordo com (5.49) e a definição (5.56), nós esperamos que

$$\langle \alpha_0 \rangle = \frac{V}{mc^2} \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi} \simeq 2 \frac{\hbar\omega}{mc^2}. \quad (5.60)$$

Desta relação, e também de (5.59), podemos concluir que o valor médio de α é da ordem de $\hbar\omega/mc^2$. Assim, a velocidade de recuo $v = c\alpha/(1 + \alpha)$ fica determinada de modo aproximado. O valor mais preciso de α será fixado mais adiante quando discutirmos o deslocamento do comprimento de onda (veja (5.39)) com base no efeito Doppler relativístico.

Neste ponto, é importante reconhecer que α é uma grandeza flutuante. Em cada evento (caracterizado por um pacote de ondas emitido pela fonte) α toma diferentes valores devido à intervenção aleatória dos campos eletromagnéticos da radiação de ponto zero. Poderíamos tentar calcular a distribuição de probabilidades para α usando um método similar à aquele proposto recentemente por Marshall e Santos no contexto da ótica estocástica²¹. Nesta teoria, a interferência entre um sinal eletromagnético e a radiação de ponto zero de mesma

frequência, é muito importante para a compreensão (a nível ondulatório) de experimentos recentes no campo da ótica quântica. Conforme estes autores apontam, a distribuição de probabilidades para a intensidade da radiação (α_0 no nosso caso) depende dos detalhes do pacote de ondas proveniente da fonte. Não temos condições de entrar em tais pormenores aqui de modo que basearemos nossa análise apenas no conhecimento do valor médio de α .

Um outro ponto importante para se notar é que, na verdade, tomar α como sendo da ordem de $\hbar\omega/mc^2$ é, de fato, uma *hipótese* sobre a intensidade da radiação incidente. Esta deverá ser tal que a sua densidade de energia é

$$\frac{\vec{E}_{inc}^2}{4\pi} \simeq \frac{\langle \vec{E}_{pto\ zero}^2 \rangle}{4\pi} \simeq \frac{\hbar\omega}{V}, \quad (5.61)$$

onde ω é a *frequência mais importante* associada ao sinal eletromagnético. V (conforme vimos em (5.56)) é um volume característico que depende da carga e massa da partícula isto é:

$$V = \frac{16\pi}{9} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^3. \quad (5.62)$$

Em outras palavras, do ponto de vista clássico, as condições (5.61) e (5.62) acima são necessárias para que possamos observar um recuo relativístico gerado pela força da reação da radiação. O carater *aleatório* associado à direção da velocidade de recuo (e também ao seu valor absoluto) está diretamente ligado à interferência com a radiação de ponto zero flutuante. Este ponto foi ilustrado anteriormente de modo esquemático na figura 7.

Os nossos próximos objetivos são mostrar que o deslocamento do comprimento de onda (5.39), bem como os desvios observados na seção de choque de espalhamento, podem ser entendidos classicamente. Basear-nos-emos nos mesmos argumentos utilizados por Compton³⁰, no seu trabalho de 1923, onde foi invocado o efeito Doppler para explicar o deslocamento no comprimento de onda da radiação espalhada.

Para isso faremos algumas aproximações de sorte que os cálculos que se seguem serão grandemente simplificados. Suporemos que o pulso de radiação proveniente da fonte seja bastante longo no tempo, quando comparado com e^2/mc^3 que é a ordem de grandeza do tempo de aceleração (veja (5.52)). Isto significa que a onda plana incidente tem duração infinita para efeito de cálculo. Suporemos também que a partícula entrará no regime estacionário (veja (5.57)) imediatamente depois que o sinal eletromagnético chegar, e ficará com velocidade constante $v = c\beta = c\alpha/(1 + \alpha)$ durante todo tempo.

Neste caso, devido ao efeito Doppler, o comprimento de onda no sistema de repouso da partícula fica dado por

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2}, \quad (5.63)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda no sistema de laboratório. Por isso a radiação emitida no sistema próprio terá comprimento de onda λ_1 .

Para um observador no laboratório, a radiação emitida sofrerá um outro deslocamento Doppler e o comprimento de onda observado na direção θ , em relação ao feixe primário, será:

$$\lambda' = \lambda_1 \left[\frac{1 - \beta \cos \theta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.64)$$

O resultado acima, junto com (5.63), pode ser escrito na forma (5.39) desde que façamos uso de (5.42), isto é,

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) (1 - \cos \theta) = \alpha (1 - \cos \theta). \quad (5.65)$$

Esta expressão coincide exatamente com (5.39) desde que α seja igual a $\hbar\omega/mc^2$. O valor aproximado de α foi estimado antes de outra maneira, quando analisamos o recuo sob a ação da força de reação da radiação. Estabelecemos, então, qual deveria ser a ordem de grandeza do campo elétrico da onda incidente (veja (5.61)) para que a velocidade de recuo fosse $v = c\beta = c\alpha/(1 + \alpha)$ com $\alpha = \hbar\omega/mc^2$.

Vemos então que o deslocamento do comprimento de onda pode ser justificado de duas maneiras. Uma delas fazendo uso das relações cinemáticas (5.36) e (5.37). A outra é baseada em conceitos ondulatórios conforme acabamos de ver. Na nossa opinião nenhuma delas exige que a radiação seja *necessariamente* constituída de corpúsculos.

Passaremos agora ao cálculo da seção de choque de espalhamento. Utilizaremos somente a *eletrodinâmica clássica* como no trabalho original de Compton³⁰ em 1923. Esta característica do trabalho original de Compton aparentemente não é muito conhecida. O fato é que Compton, tendo calculado o deslocamento do comprimento de onda por *dois métodos*, um considerando a radiação incidente como constituída de quanta (veja (5.39)) e outro por meio do efeito Doppler clássico (veja (5.65)), calculou a intensidade da radiação espalhada utilizando a eletrodinâmica clássica. Este ponto ficou bastante claro em trabalho de Y. H. Woo⁸³ (colaborador de Compton) publicado em 1925. É interessante lembrar as próprias palavras de Compton³⁰: "I have not, however, succeeded in showing rigidly that if two methods of scattering result in the same relative wave-lengths at different angles, they also result in the same relative intensity at different angles. Nevertheless, we shall assume that this proposition is true, and shall proceed to calculate the relative intensity of the scattered beam at different angles on the hypothesis that the scattering electrons are moving in the direction of the primary beam with velocity $v = c\beta = c\alpha/(1 + \alpha)$ ".

Do ponto de vista da eletrodinâmica quântica, a afirmação de Compton seria naturalmente entendida como dualidade onda-partícula, característica dos quanta de radiação. Nós,

por outro lado, estamos tentando interpretar o efeito Compton num contexto puramente ondulatório.

Se a partícula se mover com velocidade $\vec{v} = c\beta\hat{k}$ na direção z de propagação da onda, com campo elétrico total

$$\vec{E} = E_0\hat{i}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] + E_0\hat{j}\sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right], \quad (5.66)$$

então a sua aceleração $\dot{\vec{v}}$ poderá ser facilmente calculada. De acordo com a eletrodinâmica clássica o resultado (relativístico) é⁸⁸:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m}(1 - \beta^2)^{1/2} \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{E})}{c^2} \right]. \quad (5.67)$$

Como o movimento do eletrón é aproximadamente uniforme, teremos $\vec{v} \cdot \vec{E} = 0$ e, consequentemente,

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \left(\frac{1 - \beta}{\gamma} \right) \vec{E}. \quad (5.68)$$

O campo elétrico da radiação emitida em um ponto $\vec{R} = R\hat{n}$ a grandes distâncias da carga será

$$\vec{E}_{rad} = \frac{e}{c^2 R} \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} - \vec{v}/c) \cdot \dot{\vec{v}}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^3} \right], \quad (5.69)$$

de modo que a intensidade da radiação emitida em um ângulo sólido $d\Omega$, ao redor da direção \hat{n} , será $dI = cE_{rad}^2 R^2 d\Omega/4\pi$ ou,

$$\left(\frac{e^2}{\pi c^3} \right)^{-1} \frac{dI}{d\Omega} = \frac{\dot{v}^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^4} + \frac{2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v})}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^5} - \frac{(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})^2(1 - \beta^2)}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c)^6}, \quad (5.70)$$

conforme se vê do texto de Landau e Lifschitz⁹⁰.

Agora podemos introduzir a expressão (5.68) para $\dot{\vec{v}}$ e tomar a média no tempo. Aqui, entretanto, precisamos lembrar que na expressão (5.69) para o campo elétrico à distância R , devemos considerar o tempo retardado $t' = t - R/c$. Portanto, ao calcularmos a média no tempo, o incremento dt deve ser substituído por dt' e isto introduz um fator $dt/dt' = 1 - \hat{n} \cdot \vec{v}/c$ em (5.70). A integração no tempo é trivial. A seção de choque é obtida dividindo o resultado pelo módulo do vetor de Poynting associado ao feixe incidente. O resultado final obtido por Compton³⁰ (em 1923) e Woo⁸³ (em 1925) é

$$(1 - \beta^2)^{-1}(1 - \beta)^{-2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^{-2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Woo} = \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} - \frac{\sin^2 \theta (1 - \beta^2)}{2(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (5.71)$$

Substituindo $\beta = \alpha/(1 + \alpha)$ obtem-se

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{W_{oo}} = \left(\frac{1 + 2\alpha}{2}\right) \left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \left(\frac{1 + \cos^2\theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos\theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]^5}\right), \quad (5.72)$$

onde $\alpha = \hbar\omega/mc^2$.

No limite $\hbar\omega \ll mc^2$, a expressão acima se reduz ao resultado de Thomson (veja (5.43)) conforme é esperado. Ambos os cálculos, por Compton e por Woo, conduzem à expressão (5.72) para a seção de choque de espalhamento já que são equivalentes. Neste ponto, entretanto, Compton fez uma correção que melhorou a concordância com os dados experimentais medidos pelo próprio Compton. Para isso, ele se baseou nas propriedades corpusculares dos quanta de radiação. Considerou que o espalhamento de um foton na direção dianteira ($\theta = 0$) não é acompanhado pelo recuo do eletron. Neste caso, afirmou Compton, é de se esperar que a seção de choque deva ser a mesma que aquela obtida pela teoria de Thomson, isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 0) = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \quad (5.73)$$

Entretanto, na expressão (5.72) existe um fator adicional $1 + 2\alpha$ mesmo para $\theta = 0$. Compton eliminou este fator baseado no fato de que, para $\theta = 0$, a velocidade de recuo do eletron é zero, de acordo com a teoria corpuscular.

Considerando as hipóteses feitas anteriormente para obter-se (5.72) nós entendemos que $(d\sigma/d\Omega)_{W_{oo}}$ superestima a intensidade espalhada em todas as direções. Para compreender isto melhor basta lembrar que supusemos que a partícula já estivesse em movimento com velocidade constante $v = c\alpha/(1 + \alpha)$ quando da chegada do pulso de radiação incidente. Isto significa que estamos superestimando a energia irradiada quando usamos $(d\sigma/d\Omega)_{W_{oo}}$, visto que não foi descontada a energia necessária para acelerar o eletron desde o repouso até a velocidade $v = c\alpha/(1 + \alpha)$. Por isso, entendemos que o cálculo de Compton e Woo exposto acima vale apenas para a intensidade espalhada relativa $I(\theta)/I(0)$. De acordo com (5.72), a intensidade relativa é dada por

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{1 + \cos^2\theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos\theta)^2}{[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]^5}. \quad (5.74)$$

Gostaríamos de enfatizar, conforme mencionou Compton em 1923 (veja pg. 69), que este cálculo clássico para a intensidade relativa é análogo ao cálculo da variação relativa do deslocamento do comprimento de onda que foi baseado no efeito Doppler (veja (5.65)).

Admitindo que a seção de choque para $\theta = 0$ deve ser obtida através da teoria clássica de Thomson e que o cálculo clássico de Compton³⁰ e Woo⁸³ para a intensidade relativa é

justificado, obtemos de (5.73) e (5.74) o seguinte resultado para a seção de choque

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{I(\theta)}{I(0)}. \quad (5.75)$$

Curiosamente, o fator excedente $(1 + 2\alpha)$ que aparece em (5.72) corresponde à razão entre a intensidade da onda incidente no sistema de laboratório e no sistema próprio do eletrón.

A comparação de (5.75) com a experiência mostra que o cálculo teórico de Compton, baseado na eletrodinâmica clássica, apresenta muito bom acordo com os dados experimentais medidos por ele mesmo. Esta comparação é mostrada na figura 8. A curva tracejada corresponde à intensidade relativa, de acordo com a teoria de Thomson (sem recuo do eletrón). A curva contínua é a expressão (5.75) para $\alpha = 1.1$ o que corresponde a um comprimento de onda $\lambda_0 = 0.022\text{\AA}$. Os pontos experimentais medidos por Compton estão indicados pelos círculos negros.

Conforme se pode ver, é possível justificar o recuo do eletrón sem fazer uso do conceito de "foton" como sendo um corpúsculo. Apesar da simplicidade dos cálculos e das muitas aproximações feitas, mostramos como fazer uma estimativa da velocidade média do recuo. Conhecendo esta velocidade foi possível obter o deslocamento do comprimento de onda (como sendo devido ao efeito Doppler) bem como a seção de choque de espalhamento (como sendo devida ao espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma carga recuando nos campos da onda incidente).

No que diz respeito aos eletróns de recuo, entretanto, existe uma apreciável diferença entre os cálculos, discutidos acima, e os fatos experimentais, onde uma *distribuição* de eletróns é observada. Baseados no conceito de quanta de radiação Compton e Hubbard⁹¹, foram capazes de calcular a seção de choque diferencial para os eletróns de recuo. De acordo com o conceito de absorção e emissão *direcional* cada quantum é espalhado por um eletrón de modo que o ângulo entre eles é fixado univocamente. Decorre das relações cinemáticas (5.36) e (5.37), deduzidas anteriormente, que os ângulos θ e φ da figura 6 são tais que

$$(1 + \varphi) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \tan \varphi = 1 \quad (5.76)$$

isto é, radiação emitida na direção θ implica em eletrón recuando na direção φ . Assim, o conhecimento da distribuição angular da radiação espalhada, a saber, a expressão (5.75), permite o cálculo da distribuição de eletróns de recuo conforme foi mostrado por Compton e Hubbard⁹¹ em 1924. Entretanto, na discussão semiquantitativa apresentada aqui nós nos limitamos à obtenção da velocidade "efetiva" de recuo ($v = c\alpha/(1 + \alpha)$) na direção do feixe de radiação incidente. Por outro lado, nos parece óbvio que não levamos em conta todos os possíveis efeitos das flutuações eletromagnéticas de ponto zero. Um fato importante que

não consideramos é de que os eletrons estão executando um tipo de movimento Browniano ("zitterbewegung") devido à ação dos campos eletromagnéticos aleatórios, conforme mostramos na figura 7. Isto, obviamente, introduz flutuações transversais e a velocidade de recuo não é simplesmente $\vec{v} = \beta c \hat{k}$, mas uma distribuição ao redor da direção \hat{k} do feixe incidente. É nosso projeto futuro calcular esta distribuição de probabilidades para a velocidade de recuo \vec{v} . Logo, podemos concluir que existe uma importante diferença entre a abordagem, baseada na SED e a interpretação quântica, no que diz respeito aos eletrons de recuo. Na interpretação proposta aqui, o recuo dos eletrons é também influenciado pela radiação de ponto zero (veja figura 7). Na interpretação quântica (corpuscular), apenas a radiação primária (proveniente da fonte) constituída de fons é responsável pelo recuo dos eletrons.

Um ponto importante relacionado com este e que merece ser retomado no futuro, diz respeito ao balanço de energia na interpretação estocástica do efeito Compton. Nós concluímos que a radiação incidente e a *radiação de fundo*, combinadas, geram uma força de reação da radiação capaz de fornecer uma energia cinética alta para a partícula, de sorte que ela tem um recuo relativístico. De acordo com a teoria quântica, entretanto, a energia vem somente do feixe primário. Nesta descrição convencional, muito bem aceita, objetos quânticos (fons) de natureza dual (ondas e partículas), estão em interação com outros quanta (eletrons) de tal maneira que a conservação de energia é restrita ao sistema foton-eletron, *sem qualquer menção à radiação de ponto zero quântica*. Isto nos parece estranho porque o campo eletromagnético de ponto zero quântico é responsável por muitos efeitos observáveis, como a largura natural das linhas espectrais, o deslocamento Lamb ou ainda os recentemente observados estados "squeezed" da luz⁹². É que, em muitas situações, trata-se o problema dizendo que o campo de ponto zero é "virtual", um conceito mal definido em nossa opinião. Isto significa simplesmente que o campo eletromagnético de ponto zero é, muitas vezes, tomado real ou não real de acordo com a conveniência do momento. Questões deste tipo aparecem frequentemente no contexto da eletrodinâmica quântica e da ótica quântica onde a radiação de ponto zero é considerada "virtual" mas com efeitos observáveis. No contexto da eletrodinâmica estocástica, entretanto, a radiação de ponto zero é considerada real. Sob este aspecto é importante destacar as relações qualitativas deste nosso trabalho com aquele de Marshall e Santos no contexto da ótica estocástica^{21,22}. O objetivo é essencialmente o mesmo, isto é, tentar identificar propriedades pseudo-corpusculares da luz invocando as flutuações eletromagnéticas de ponto zero clássicas.

Finalmente, devemos salientar que os cálculos simplificados apresentados aqui, têm como objetivo apenas dar indicações sobre a possibilidade de se abordar o efeito Compton no contexto de uma teoria clássica como a SED. Um estudo quantitativo certamente requererá uma nova abordagem, sofisticada o suficiente para caracterizar um novo trabalho. Devemos reconhecer, entretanto, que as características qualitativas do efeito Compton po-

deriam ser entendidas no contexto de uma teoria clássica como a SED. Nós esperamos que a análise apresentada aqui encoraje outros pesquisadores a concentrar seus esforços nesta direção promissora. É nossa opinião sincera que o conceito de luz como um corpúsculo deve ser reexaminado. Nós acreditamos que Albert Einstein, com sua relutância em aceitar completamente o conceito de quanta de luz (e a própria teoria quântica como um todo), talvez estivesse tentando nos dizer isto há muitas décadas⁹³.

6-PERSPECTIVAS

Teceremos neste capítulo final algumas considerações adicionais sobre o papel dos campos eletromagnéticos flutuantes associados à radiação de ponto zero. Não temos qualquer dúvida quanto à existência dessa radiação, embora se possa ainda questionar se ela é de natureza clássica (estocástica) ou de natureza puramente quântica, isto é, é constituída de fons com comportamento dual (ondas e/ou corpúsculos)⁹⁴. Os sistemas simples considerados nos capítulos anteriores serão de grande utilidade para nossos comentários finais.

Discutimos, nos capítulos 2 e 3, muitas propriedades do oscilador harmônico no contexto da eletrodinâmica clássica estocástica. Verificamos a similaridade entre a descrição clássica estocástica e a descrição quântica baseada na equação de Schrödinger, por exemplo. Desejamos agora destacar ainda mais as semelhanças (e diferenças) se considerarmos a radiação de ponto zero no contexto do formalismo quântico^{14,18,36,57,58}. Neste caso, a equação do movimento para o oscilador harmônico, isto é,

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + eE_x(0, t), \quad (2.1)$$

tem uma interpretação diferente. A posição da partícula, $x(t)$, é considerada como sendo um operador que não comuta com o operador momento linear, $p(t) = m\dot{x}(t)$. Isto ocorre porque o próprio campo eletromagnético, $E_x(t)$, é um operador que pode ser escrito como uma superposição de ondas planas:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \frac{(\hbar\omega)^{1/2}}{2\pi} \left[a(\vec{k}, \lambda) \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) + \right. \\ \left. + a^+(\vec{k}, \lambda) \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right]. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Aqui, os versores de polarização $\hat{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ são os mesmos introduzidos em (1.2). Os fatores $a(\vec{k}, \lambda)$ e $a^+(\vec{k}, \lambda)$ são operadores de aniquilação e criação de quanta tais que satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}, \lambda), a(\vec{k}', \lambda')] = [a^+(\vec{k}, \lambda), a^+(\vec{k}', \lambda')] = 0, \\ [a(\vec{k}, \lambda), a^+(\vec{k}', \lambda')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (6.2)$$

A similaridade entre (6.1) e o campo estocástico (1.1) é muito grande, tendo-se em vista que a densidade espectral da radiação de ponto zero é dada por (1.5), isto é, *é a mesma na teoria quântica e na teoria estocástica*. Boyer¹⁴ apontou, em 1975, que as funções de correlação de N pontos associadas aos campos \vec{E} e \vec{B} podem ser computadas na eletrodinâmica

quântica (QED) e na eletrodinâmica estocástica (SED). Elas diferem em geral, por causa da dependência na ordem dos operadores quânticos no caso de produtos de operadores. Entretanto, se todos os produtos de operadores quânticos forem simetrizados tomando todas as permutações na ordem dos operadores, então as duas teorias darão resultados idênticos para as funções de correlação¹⁴.

Outras conclusões muito interessantes podem ser tiradas de (2.1) e (6.1) conforme foi mostrado por Sokolov e Tumonov⁵⁷ em 1957, por Schiller e Tesser⁵⁸ em 1971 e, mais recentemente, por Milonni⁵³ em 1984. É o que mostraremos em seguida.

Já que a equação (2.1) é linear, é fácil de encontrar a solução formal mesmo no caso em que o campo $E_x(t)$ seja quantizado. Basta reescrevermos (2.2) substituindo os fatores que envolvem as exponenciais nas fases aleatórias $\nu(\vec{k}, \lambda)$, pelos operadores de aniquilação e criação $a(\vec{k}, \lambda)$ e $a^+(\vec{k}, \lambda)$. Como o operador momento $p(t) = m\dot{x}(t)$ pode ser obtido da solução formal para $x(t)$, então, a relação de comutação entre x e p poderá ser facilmente calculada^{53,58}. O resultado é:

$$[x, p] = \frac{4i\hbar e^2}{3mc^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega^3\right)^2} = i\hbar. \quad (6.3)$$

O que temos aqui é um exemplo (quântico) do teorema flutuação-dissipação. Se existir um campo de ponto zero é necessário que exista a força de reação da radiação $2e^2\ddot{x}/3c^3$ e vice-versa. Em outras palavras, a relação de comutação entre x e p não seria preservada se não tivéssemos a força da reação da radiação na equação de movimento.

A equação de movimento (2.1) para o operador posição $x(t)$ pode também ser interpretada da seguinte maneira. A interação da carga com a radiação quantizada resulta na quantização de grandezas dinâmicas associadas à partícula material como se pode ver de (6.3). O raciocínio no sentido inverso, isto é, a matéria quantizada emite quanta de radiação, também é válido, de modo que se tem um quadro autoconsistente⁵⁸.

Conclusão idêntica pode obter-se quando se analisa o movimento quântico de uma partícula com spin \vec{S} e momento magnético $\vec{\mu} = eg\vec{S}/2mc$, em presença de campo magnético uniforme \vec{B}_0 e do campo magnético quantizado $\vec{B}(t)$. A análise clássica (no contexto da SED) foi apresentada no capítulo 4. Concluímos que o sistema clássico apresenta paramagnetismo (muito semelhante ao paramagnetismo quântico) desde que se leve em conta a radiação de ponto zero aleatória característica da SED.

No caso quantizado, a equação do movimento para o spin \vec{S} também toma a forma

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times [\vec{B}_0 + \vec{B}(t)] - \frac{2}{3} \frac{\vec{\mu} \times \ddot{\vec{\mu}}}{c^3}, \quad (4.30)$$

que foi usada no capítulo 4 quando $\vec{B}(t)$ era então o campo magnético estocástico.

Na equação acima \vec{S} e $\vec{\mu}$ são operadores já que o campo quantizado $\vec{B}(t)$ é também um operador. Este pode ser escrito na forma (6.1), em termo dos operadores criação $a^+(\vec{k}, \lambda)$ e aniquilação $a(\vec{k}, \lambda)$.

A solução desta equação não linear somente pode ser obtida de modo aproximado, conforme mostraram Sokolov⁵⁷ em 1957 e Schiller⁵⁸ em 1971. Boyer²⁹, em 1984, obteve a solução aproximada de (4.30) no caso em que $\vec{B}(t)$ é o campo magnético flutuante da eletrodinâmica estocástica. Em 1989 nós estendemos o trabalho de Boyer, através do modelo explicado no capítulo 4. Mostramos que a análise clássica apresenta excelente acordo com os dados experimentais²⁸.

A solução aproximada⁵⁸ da equação quântica (4.30), pode ser obtida supondo que a componente de \vec{S} , na direção de \vec{B}_0 (isto é S_z), é aproximadamente constante. Assim, a equação do movimento pode ser linearizada, sendo fácil obter S_x e S_y como função de S_z e dos operadores $a(\vec{k}, \lambda)$ e $a^+(\vec{k}, \lambda)$. O resultado é:

$$S_x(t) + iS_y(t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \frac{eg}{2mc} S_z \frac{(\hbar\omega)^{1/2}}{2\pi} [\epsilon_x(\vec{k}, \lambda) + i\epsilon_y(\vec{k}, \lambda)] \times \\ \times \left[\frac{a(\vec{k}, \lambda) e^{-i\omega t}}{\frac{egB_0}{2mc} - \omega + i\frac{S_z e^2 g^2 \omega^3}{6m^2 c^5}} + \frac{a^+(\vec{k}, \lambda) e^{i\omega t}}{\frac{egB_0}{2mc} + \omega - i\frac{S_z e^2 g^2 \omega^3}{6m^2 c^5}} \right]. \quad (6.4)$$

Desta expressão para S_x e S_y é possível calcular o comutador associado a estes operadores já que conhecemos as relações de comutação que os operadores de criação-aniquilação devem obedecer.

É possível, então, mostrar que

$$[S_x, S_y] = \frac{2}{3} \frac{i\hbar}{\pi c^3} \left(\frac{egS_z}{2mc} \right)^2 \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{\left(\frac{egB_0}{2mc} - \omega \right)^2 + \left(\frac{e^2 g^2 \omega^3 S_z}{6m^2 c^5} \right)^2} = i\hbar S_z, \quad (6.5)$$

desde que

$$\frac{e^2 g^2}{\hbar c 24} \left(\frac{\hbar\omega_L}{mc^2} \right)^2 \frac{S_z}{\hbar} \ll 1,$$

onde $\omega_L = egB_0/mc$ é a frequência de Larmor.

Verifica-se novamente o que havíamos obtido anteriormente no caso do oscilador (veja (6.3)), ou seja, a *relação de comutação para o spin é preservada* devido à inclusão do termo de reação da radiação $-2\vec{\mu} \times \vec{\mu}/3c^3$ na equação do movimento (4.30). Este termo de amortecimento decorre das leis de conservação de energia e momento para o sistema partícula material e o campo eletromagnético. O fato de que as relações de comutação para as variáveis associadas à partícula, são determinadas pelas relações de comutação para os

campos flutuantes do vácuo, constitui uma evidência de que as relações entre as grandezas que descrevem as partículas e aquelas que descrevem os campos estão mais intimamente ligadas do que se imagina à primeira vista.

Sokolov e Tumanov mostram também, no caso simples do oscilador harmônico, que a energia do estado fundamental ($1/2\hbar\omega_0$) é determinada pelo equilíbrio dinâmico entre a flutuação gerada pelos campos eletromagnéticos quantizados do vácuo e a dissipação associada à força de reação da radiação. A extensão dos resultados para temperatura não nula é muito simples nos casos discutidos por Sokolov e Tumanov⁵⁷ (veja Schiller⁵⁸).

Esta é uma conclusão muito importante. O estado fundamental de alguns sistemas quânticos pode ser considerado como resultado do equilíbrio dinâmico entre a absorção da radiação de ponto zero do vácuo e a emissão de radiação pelas cargas em movimento acelerado. Esta idéia, quando considerada no contexto do eletromagnetismo clássico, é exatamente a filosofia de trabalho na eletrodinâmica clássica estocástica. Neste caso, a radiação de ponto zero é considerada como constituída apenas de ondas eletromagnéticas, isto é, *não se introduz a hipótese adicional¹⁸ de que os ftons também sejam corpúsculos⁷²*. Para aclarar melhor este ponto consideremos mais um exemplo em que o estado fundamental de um sistema microscópico também poderia ser entendido como decorrente do equilíbrio dinâmico entre absorção e emissão de radiação. É o caso do átomo de hidrogênio³⁻⁶. De acordo com a eletrodinâmica clássica (sem radiação de ponto zero) um eletrón em órbita elíptica ao redor do próton, perde energia lentamente e cai no núcleo. Este movimento, estudado em muitos textos como o de Landau e Lifchitz⁹⁵ e Jackson⁹⁶, é tal que a excentricidade da órbita vai diminuindo à medida que o momento angular L decresce. Isto é devido ao torque da força de reação da radiação. Conclui-se que a órbita vai se tornando circular à medida que o tempo passa. A excentricidade decresce a partir do seu valor inicial como $(L/L_i)^{3/2}$ onde L_i é o valor inicial do momento angular.

Neste regime de órbitas circulares, nós podemos calcular a potência emitida supondo que a força de Coulomb é dominante. Com esta hipótese e, fazendo uso da fórmula de Larmor, obtem-se

$$P_{emit}(r_c) = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3} \left(\frac{1}{r_c} \right)^4, \quad (6.6)$$

onde r_c é o raio da órbita circular.

Por outro lado, tendo-se em conta que o eletrón está em presença da radiação de ponto zero, podemos calcular a potência absorvida deste fundo. Este cálculo é simples e foi apresentado pela primeira vez por Boyer³ (1975) e Claverie⁴ (1976) independentemente. Mais recentemente Puthoff (1987) reconsiderou o problema³⁴.

A idéia é que o movimento circular (no plano xy por exemplo) pode ser considerado como superposição de dois movimentos harmônicos com frequência $\omega_c = (e^2/mr_c^3)^{1/2}$. Neste

caso a potência absorvida da radiação de ponto zero seria o dobro da potência absorvida por um oscilador com frequência ω_c , isto é,

$$P_{abs}(r_c) = 2 \frac{2\pi^2 e^2}{3m} \rho_0(\omega_c) = \frac{2}{3} \frac{e^5 \hbar}{m^5/2 c^3} \left(\frac{1}{r_c} \right)^{9/2} \quad (6.7)$$

Deste cálculo simples vemos que movimento estável é possível pois $P_{emit} > P_{abs}$ quando $r_c \rightarrow \infty$, enquanto que obtemos $P_{abs} > P_{emit}$ no limite $r_c \rightarrow 0$. Isto significa que equilíbrio dinâmico pode ser atingido para órbitas tais que $P_{abs}(r_{eq}) = P_{emit}(r_{eq})$. Com este raciocínio obtem-se que o raio de equilíbrio é dado por

$$r_{eq} = \frac{\hbar^2}{me^2} = a, \quad (6.8)$$

que é exatamente o raio de Bohr.

Em outras palavras, obtém-se o tamanho correto do átomo de maneira inteiramente análoga àquela empregada no estudo de sistemas mais simples (lineares). Foi o que vimos no caso de movimento sob ação de força harmônica e movimento em campo magnético uniforme, estudados anteriormente nos capítulos 3 e 4.

O cálculo da distribuição de probabilidades no espaço de configurações é mais difícil. Apesar disso, guarda semelhança com o cálculo da distribuição de probabilidade para o oscilador harmônico, quando fizemos uso do teorema central do limite. Entretanto, como a força de Coulomb é não linear, o cálculo é qualitativo.

Consideremos a equação que governa a variação com o tempo de momento angular \vec{L} . Se o vetor posição do elétron (em órbita circular) é denotado por \vec{r}_c teremos

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_c \times \left[\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{r}}_c + e\vec{E}(t) \right] \quad (6.9)$$

O primeiro termo é o torque associado à reação da radiação e o segundo termo é o torque da força aleatória. É este torque que faz com que a longo prazo a órbita deixe de ser plana. Nós, entretanto, suporemos que durante muitos períodos a órbita será determinística e circular^{3,4}. Isto é aproximadamente correto porque $\dot{\vec{L}} = 0$ se desprezarmos as correções radiativas presentes em (6.9).

Já que o movimento é aproximadamente circular e a força Coulombiana é dominante^{3,34}, então podemos tomar

$$\ddot{\vec{r}}_c \simeq -\frac{e^2}{m} \frac{\vec{r}_c(t)}{r_{eq}^2}, \quad (6.10)$$

onde consideramos a distância r , entre o próton e o elétron, como constante e aproximadamente igual ao raio de equilíbrio (6.8).

Suporemos que o movimento circular é tal que a posição instantânea do elétron é dada pelo vetor $\vec{r}_c(t)$,

$$\vec{r}_c(t) = \hat{i}a \cos(\omega_c t + \varphi) + \hat{j}a \sin(\omega_c t + \varphi). \quad (6.11)$$

Aqui supusemos que o movimento se mantém por muitos períodos como sendo um círculo de raio a no plano xy . O ângulo φ que aparece na expressão (6.11), é uma fase totalmente arbitrária. Além disso a frequência angular do movimento circular é tomada como sendo novamente $\omega_c = (e^2/ma^3)^{1/2}$ pois, a força Coulombiana domina sobre as outras forças. O raio a é tomado como sendo o raio de Bohr (6.8) e, neste caso, $\omega_c = \omega_{eq} = me^4/\hbar^3$.

Tendo em vista estas considerações e lembrando que o momento angular $\vec{L} = m\vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c$ podemos reescrever (6.9) como

$$\dot{L} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 a^3 c^3} L + e \left(\vec{r}_c \times \vec{E} \right)_z, \quad (6.12)$$

onde $L(t) = L_z$. Esta equação governa a variação instantânea do momento angular⁹⁷. O primeiro termo de (6.12) é o torque da força de reação da radiação enquanto o segundo termo é o torque gerado pelo campo elétrico aleatório.

A equação acima se assemelha à equação de Langevin para o movimento Browniano já que apresenta flutuação e dissipação. Considerando que o campo elétrico flutuante pode ser escrito (veja (1.1)) como uma superposição de ondas planas é fácil verificar que o torque flutuante em (6.12) se escreve como (veja semelhança formal com (4.44))

$$e \left(\vec{r}_c \times \vec{E} \right)_z = ea \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left[\frac{c^3 \rho_0(\omega)}{\omega^2} \right]^{1/2} \cos[\omega t + \nu(\vec{k}, \lambda)] \times \\ \times \left[\hat{\epsilon}_y(\vec{k}, \lambda) \cos(\omega_{eq} t + \varphi) - \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \sin(\omega_{eq} t + \varphi) \right], \quad (6.13)$$

onde $\nu(\vec{k}, \lambda)$ e φ são fases aleatórias estatisticamente independentes, e uniformemente distribuídas no intervalo de 0 a 2π . Por isso, é possível verificar também que o torque aleatório corresponde a um processo estocástico Gaussiano. Desta maneira, de acordo com o teorema central do limite, a distribuição de probabilidades $W(L)$ para o momento angular L será uma função Gaussiana, isto é,

$$W(L) = \text{const} \times \exp \left(-\frac{L^2}{2\langle L^2 \rangle} \right). \quad (6.14)$$

A variância $\langle L^2 \rangle$ pode ser calculada diretamente de (6.12) e (6.13) e ser expressa em termos do raio de Bohr $a = \hbar^2/me^2$ e da frequência $\omega_{eq} = me^4/\hbar^3$.

O resultado para $\langle L^2 \rangle$, obtido de (6.12) e (6.13), é exatamente \hbar^2 e tem a ordem de magnitude esperada. Conforme vimos anteriormente em (6.8), se a distância r (entre o

proton e o eletron) for da ordem de $r_{eq} = a$ então teremos $\langle L^2 \rangle \sim me^2 a \sim \hbar^2$. Entretanto, o valor correto de $\langle L^2 \rangle$ é difícil de se obter neste cálculo aproximado.

Podemos utilizar o resultado acima para $W(L)$ e calcular a distribuição de probabilidades $Q_0(r)$ no espaço de configurações. Ela é obtida de (6.14) impondo que, em uma órbita circular, em que a força Coulombiana é dominante, teremos $L^2 = me^2 r$. Assim encontramos

$$Q_0(r) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\langle L^2 \rangle}{me^2} \right)^{-3} \exp \left(-\frac{me^2 r}{2\langle L^2 \rangle} \right), \quad (6.15)$$

já que $Q_0(r)$ deve ser normalizada, isto é,

$$4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 Q_0(r) = 1. \quad (6.16)$$

Nesta altura, gostaríamos de lembrar que estamos tentando corroborar a idéia de Sokolov e Tumanov⁵⁷, de que o estado fundamental do átomo é devido ao equilíbrio dinâmico entre emissão de radiação, devida ao movimento acelerado, e absorção de energia da radiação de ponto zero aleatória. Desta maneira se espera que o ponto máximo de $r^2 Q_0(r)$, que é a distância mais provável entre o eletron e o proton, deva coincidir com o raio de Bohr, conforme mostramos anteriormente, igualando a potência emitida (6.6) com a potência absorvida (6.7). Com este raciocínio é fácil mostrar que (6.15) implica em

$$\langle L^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (6.17)$$

e, conseqüentemente, $Q_0(r)$ coincide com o resultado fornecido pela teoria quântica de Schrödinger. Além disso, é simples verificar que (para órbitas circulares) a energia total média será dada por

$$\langle \mathcal{E}_0 \rangle = -\frac{e^2}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = -\frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad (6.18)$$

coincidindo com cálculo análogo no contexto da teoria quântica não relativística⁹⁸.

Estes resultados não nos surpreendem já que verificamos que a eletrodinâmica clássica estocástica descreve satisfatoriamente muitos outros fenômenos do mundo microscópico. Entretanto, estamos percebendo que também no caso do átomo de hidrogênio a teoria é *diferente* da teoria quântica na sua versão mais aceita, a chamada interpretação de Copenhagen. De acordo com esta linha filosófica, partículas microscópicas não seguem trajetórias bem definidas. Entretanto, como existem hoje um certo número de teorias⁴⁻⁶ inerentemente baseadas na idéia de trajetórias, as quais simulam extensivamente os resultados quânticos, entendemos que a proposta da eletrodinâmica estocástica, pode ser considerada como, no mínimo, bastante respeitável.

É sabido, entretanto, que a distribuição espectral observada experimentalmente para o átomo de hidrogênio, não foi ainda obtida de maneira satisfatória no contexto da SED, embora diversos pesquisadores proclamem haver deduzido a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio⁴⁻⁶. Nenhum destes trabalhos parece-nos ser fisicamente transparente, de modo que continua em aberto a questão de se entender o espectro do hidrogênio numa teoria estocástica como a SED.

Por outro lado, a maneira diferente com que a SED aborda o problema de estado fundamental do hidrogênio, já nos permite vislumbrar uma possível solução alternativa para algumas questões ainda não esclarecidas no contexto da teoria quântica usual. Um exemplo é o problema do átomo à temperatura finita.

De acordo com R. Peierls⁹⁹, o átomo deveria ionizar-se à temperatura não nula. Isto porque os níveis de energia E_n dependem do número quântico principal n na forma $E_n \sim n^{-2}$. Com isso, a função de partição associada a estes níveis diverge como n^2 . Assim, um átomo de hidrogênio ionizar-se-ia mesmo a temperaturas extremamente baixas⁹⁹. Este fato parece não ser observado experimentalmente. Deste modo, procura-se explicar a estabilidade do átomo como sendo devida à interação com os átomos vizinhos (o raio de cada átomo cresceria com a temperatura já que o átomo vai se excitando^{99,100}).

No caso da SED se oferece uma outra explicação para a estabilidade do hidrogênio à temperatura finita. Podemos entender o argumento facilmente se recordarmos o cálculo clássico do raio de Bohr apresentado anteriormente em (6.8). O fato é que, quando a temperatura é diferente de zero, a distribuição espectral da radiação aleatória que banha o átomo passa a ter a contribuição da parte térmica, $\rho_T(\omega)$ (veja (1.8)), além da parte de ponto zero, $\rho_0(\omega)$. Desta maneira, a equação (6.7) é modificada para

$$P_{abs}(r_c) = \frac{2 e^5 \hbar \coth(\hbar\omega_c/2kT)}{3 c^3 m^{5/2} r_c^{9/2}}, \quad (6.19)$$

enquanto que a potência emitida (6.6) permanece a mesma. Assim, usando o mesmo raciocínio anterior, concluímos que à temperatura $T > 0$ o raio médio do átomo deverá ser dado aproximadamente por

$$r_{eq} \simeq \frac{\hbar^2}{me^2} \coth^2 \left(-\frac{\langle \mathcal{E}_0 \rangle}{kT} \right). \quad (6.20)$$

Como $-\langle \mathcal{E}_0 \rangle = 13.6\text{ev}$, é possível concluir que o raio médio do átomo praticamente não varia com a temperatura, mesmo que se considere T como sendo da ordem de milhares de graus Kelvin. Seria interessante ver este cálculo confrontado com os dados experimentais já que a teoria quântica faz uma previsão qualitativamente diferente.

O papel da radiação de ponto zero, como responsável pela estabilidade do átomo, torna-se mais interessante quando se considera átomos em cavidades ou entre espelhos.

Neste novo ramo da eletrodinâmica quântica (Cavity Quantum Electrodynamics), uma nova geração de experimentos, mostra que a emissão espontânea de átomos excitados pode ser fortemente suprimida, ou intensificada, colocando-se os átomos entre espelhos ou em cavidades³⁵. Abordaremos brevemente este tema.

Desde o início da teoria quântica se percebeu que a emissão espontânea é tão fundamental que ela é usualmente considerada como uma propriedade intrínseca da matéria. A visão mais moderna considera o fato de que emissão “espontânea” não seja uma propriedade de um átomo isolado mas sim uma característica do sistema átomo-“vácuo”. Assim, na descrição quântica atual, admitimos que uma infinidade de estados (no “vácuo”) pode ser ocupada pelo foton irradiado. Se estes estados forem modificados, por exemplo, colocando o átomo excitado entre espelhos, a emissão “espontânea” pode ser fortemente inibida ou intensificada³⁵.

Notamos, nesta altura, que a linguagem quântica usada acima guarda uma enorme semelhança com a linguagem estocástica por nós usada no capítulo 5, quando estudamos a teoria quântica da radiação proposta por Einstein em 1917. Vimos que é possível considerar a emissão “espontânea” como sendo a *emissão induzida* pela radiação de ponto zero. Com esta interpretação, sugerida por muitos autores desde a proposta de Welton³⁶ em 1948, fica conceitualmente simples analisar experimentos recentes feitos no MIT, na Universidade de Yale e na Universidade de Roma.

Consideremos um átomo no interior de uma cavidade metálica. A estrutura da distribuição espectral da radiação de ponto zero é dramaticamente alterada nos comprimentos de onda comparáveis às dimensões da cavidade. Uma das primeiras manifestações deste fato, foi prevista por Casimir e Polder¹⁷ em 1948 e observada experimentalmente por Sparnay¹⁶ na década de 50, como atração entre placas condutoras (veja (1.9)). No caso de um átomo confinado entre dois espelhos planos paralelos, separados pela distância d , a inexistência de certos modos do campo eletromagnético altera a maneira de o átomo emitir (ou absorver) radiação e, conseqüentemente, afeta a sua estabilidade.

De acordo com a teoria ondulatória de Maxwell, não existem modos de propagação de um campo elétrico com polarização paralela ao plano dos espelhos, a menos que o comprimento de onda λ seja menor que $2d$. Se o átomo excitado emitir radiação, cuja origem sejam oscilações de seu dipolo elétrico orientado paralelamente aos espelhos, então a emissão é *classicamente inibida* no caso em que $\lambda > 2d$. Somente a componente do seu dipolo elétrico perpendicular aos espelhos gera radiação que se propaga. Isto porque neste caso não existe supressão dos modos associados às ondas eletromagnéticas.

Com o objetivo de investigar este tipo de fenômeno, físicos no MIT¹⁰¹, em Yale¹⁰² e na Universidade de Roma¹⁰³ efetuaram experimentos usando a geometria de espelhos paralelos mostrada na figura 9.

O experimento do MIT demonstrou a inibição da emissão espontânea de estados de Rydberg de átomos de césio em um feixe. Os átomos emitem no comprimento de onda de aproximadamente 0.4mm, à medida que atravessam espelhos de alumínio separados pela distância aproximada de 0.2mm. Antes de entrar na cavidade, os átomos foram preparados de tal maneira que seus dipolos estivessem estritamente paralelos aos espelhos, como no “estado circular”, esboçado na figura 9. Os átomos que sobreviveram no estado quântico inicial foram detectados na saída da cavidade ionizando-os por um campo elétrico fraco. Os átomos que sofreram emissão espontânea não se ionizam visto que o elétron passa para um estado ligado mais fortemente ao núcleo. Observa-se, assim, que o tempo de vida do estado de Rydberg é *pelo menos 20 vezes mais longo que no espaço livre*.

Os experimentadores de Yale suprimiram a emissão espontânea, no infravermelho próximo, usando uma geometria similar à do experimento do MIT. Empregaram também um feixe de Césio atômico excitado ao nível $5d$. A transição inibida foi a $5d \rightarrow 6p$ num comprimento de onda de 3.5 microns, muito além do comprimento de onda de corte que neste caso é de 2.2 microns. Foi observado que os átomos excitados se propagam entre os espelhos por cerca de 13 tempos de vida sem decaimento apreciável. A aplicação de um campo magnético fraco para mudar a orientação dos dipolos atômicos, demonstrou, de maneira espetacular na nossa opinião, a anisotropia da emissão “espontânea” entre os espelhos. Se o campo magnético tem uma componente paralela à superfície dos espelhos, o dipolo precessiona de modo que adquire uma componente perpendicular aos espelhos. Neste caso, de acordo com a teoria de Maxwell, o dipolo pode, “espontaneamente”, emitir radiação polarizada perpendicularmente aos espelhos porque estes modos não são suprimidos. Na figura 10, mostram-se os dados experimentais¹⁰² que medem a transmissão de átomos excitados através do microtúnel entre os espelhos, como função do ângulo entre o campo magnético e a normal aos espelhos. A grande alteração na dinâmica interna do estado excitado é evidente, já que para atravessar o aparato é necessário um intervalo de tempo de cerca de 13 vezes o tempo de vida do estado $5d$ do Césio.

A explicação quântica convencional³⁵ (baseada na QED) para estes fenômenos pode ser posta nos seguintes termos: “We expect that the metallic boundaries alter the modes of the vacuum field around the atom and affect not only real photon emission—that is, spontaneous emission rates—but also the virtual processes responsible for radiative energy shifts. An atom dressed by the cavity vacuum is different from the atom dressed by the free-field vacuum”.

A interpretação destes fenômenos no contexto da SED é muito semelhante^{105,106}. Ambas teorias (a SED e a QED) parecem convergir para um ponto comum entre elas: A dinâmica dos átomos é governada essencialmente pela troca de energia, momento linear e momento angular entre os elétrons e a configuração de campos eletromagnéticos carac-

terística do ambiente onde os átomos se encontram. Neste ambiente devemos incluir o “vácuo” como imenso reservatório de radiação eletromagnética de ponto zero, interagindo dinamicamente com as partículas eletrizadas. Este reservatório contribui de maneira essencial para a dinâmica dos sistemas microscópicos. Por isso, há bastante tempo a palavra vácuo deixou de ter o seu significado original de espaço completamente vazio nas teorias modernas do mundo microscópico^{18,105}.

Além destes fenômenos interessantes, ocorrendo em sistemas microscópicos, é possível prever efeitos da existência da radiação de ponto zero também em fenômenos macroscópicos. Como exemplos temos as forças de Casimir entre condutores e dielétricos, bem como a conjectura recente de Sakharov (1968) de que a gravitação pode ser uma interação eletromagnética³⁷. A idéia de Sakharov poderia ser resumida da seguinte maneira^{38,104}:

“Embora muito se saiba acerca da gravidade, sua natureza fundamental ainda não é bem conhecida. Quer abordada simplesmente em termos da lei de Newton, ou então com o inteiro rigor da relatividade geral, a teoria da gravitação é de natureza basicamente descritiva, sem revelar a dinâmica subjacente que corresponderia àquela descrição. Como resultado, tentativas de unificar a gravidade com outras forças (eletromagnética ou forças nucleares fortes e fracas) ou ainda desenvolver uma teoria quântica da gravitação, tem mergulhado frequentemente em dificuldades que podem ser identificadas como devidas a uma falta de entendimento a um nível mais fundamental. Na tentativa de superar estas dificuldades, um grande número de teóricos tem lançado mão de abordagens matemáticas com crescente nível de sofisticação e abstração, como é o caso das recentes teorias de supergravidade e supercordas.

“Ao abordar estas dificuldades nos anos sessenta, o conhecido físico russo A. Sakharov tomou uma direção completamente diferente e formulou a hipótese um tanto radical de que a gravitação poderia não ser uma interação fundamental, mas sim um efeito secundário ou residual associado com outros campos não gravitacionais. Mais especificamente, Sakharov sugeriu que a gravidade poderia ser entendida como sendo um efeito gerado por mudanças na energia quântica flutuante do vácuo (energia de ponto zero), devidas à presença de matéria. O modelo de Sakharov pressupõe que a presença de matéria neste mar de radiação de ponto zero resulta em forças que atuam nos objetos na maneira que nós conhecemos como gravidade.”

Mencionamos na Introdução que efeitos análogos podem ser encontrados em certas forças químicas (as forças de van der Waals e de Casimir) que são baseadas em mecanismos similares (veja (1.9)). Embora Sakharov não tenha desenvolvido o conceito muito mais além, ele delineou certos critérios que tal teoria deveria satisfazer. Por exemplo, ao contrário das teorias atuais em que a constante de gravitação G é dada, uma teoria mais fundamental deveria fornecer o valor de G em termos dos parâmetros da teoria. Assim, com base em

argumentos heurísticos e dimensionais, retirados da relatividade geral, Sakharov propôs que a constante G seria tal que

$$G \sim \frac{c^5}{\hbar \omega_{max}^2}, \quad (6.21)$$

onde ω_{max} corresponde a uma frequência de corte associada à distribuição espectral da radiação eletromagnética de ponto zero:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (1.5)$$

Em outras palavras, a constante de gravitação, G ficaria determinada pelos parâmetros \hbar , ω_{max} e c que caracterizam a radiação de ponto zero (quântica ou clássica).

Recentemente, a abordagem esboçada por Sakharov foi analisada com detalhe por Puthoff³⁸ com resultados aparentemente positivos. No trabalho "Gravity as a Zero-Point-Fluctuation Force", Puthoff mostra que a massa gravitacional, e os efeitos gravitacionais associados a ela, poderiam emergir de modo natural do movimento da partícula, induzido pelas flutuações eletromagnéticas de ponto zero. Segundo Puthoff^{38,104}:

"A interação gravitacional se origina no fato de que a partícula, situada em um mar de radiação de ponto zero, desenvolve um movimento de agitação, conhecido na literatura como "zitterbewegung". Quando duas ou mais partículas estão próximas, elas são influenciadas não somente pelo campo de fundo flutuante, mas também pelos campos eletromagnéticos gerados pelas outras partículas, todas executando movimentos de "zitterbewegung" similares. O acoplamento entre as partículas devido a estes campos resulta na força gravitacional atrativa. A gravidade pode então ser entendida como uma força flutuante do tipo de van der Waals, mas de alcance muito maior, porque envolve os campos de radiação ao invés dos campos de indução usuais. Devido à sua base eletromagnética, a teoria da gravitação nesta forma constitui uma teoria já unificada.

"O maior benefício desta nova abordagem é que, se correta, ela nos fornece uma base para o entendimento de várias características da interação gravitacional até aqui inexplicadas. A fraqueza relativa da força gravitacional sob circunstâncias ordinárias, por exemplo, é devida ao fato de que a constante gravitacional G é inversamente, proporcional ao quadrado da frequência máxima (ω_{max}) associada ao espectro da radiação de ponto zero (veja (6.21)); a natureza atrativa da força parece ser simplesmente o reflexo de uma propriedade típica de forças de van der Waals em geral; o caráter unipolar da "carga" gravitacional (massa gravitacional) está identificado com o fato de que a energia cinética de "zitterbewegung" (sempre positiva) é o parâmetro associado à massa; a observação de que a gravitação não pode ser blindada é uma consequência do fato de que o amplo espectro de altas frequências do ruído eletromagnético (quântico ou clássico) em geral não pode ser blindado. Em resumo, com uma teoria detalhada em mãos, talvez sejamos capazes de ampliar o nosso entendimento da interação gravitacional sob várias condições, enriquecendo

o nosso conhecimento dos mecanismos que estão por trás da força gravitacional. O elo de ligação entre gravidade e as flutuações de ponto zero do campo eletromagnético já fornece um elemento chave no esforço de desenvolver uma teoria unificada das interações físicas.”

Outras tentativas de explicar a interação gravitacional e também a interação forte, como casos particulares da interação eletromagnética com radiação de ponto zero, apareceram nas décadas de 70 e 80 com os trabalhos de M. Surdin⁵ e colaboradores. Não é necessário esperar que estas conjecturas se concretizem, para que reconheçamos que a interação eletromagnética, além de ser a melhor conhecida por nós, é a mais importante das interações da natureza descobertas até agora. O Eletromagnetismo, além de ser o berço da teoria da relatividade, tem revelado uma dinâmica tão rica que acreditamos sinceramente não ter sido esta teoria ainda explorada em todas as suas potencialidades.

REFERÊNCIAS

1. P. Braffort, M. Spighel and C. Tzara, *C. R. Acad. Sc. Paris* **239**, 157(1954).
2. T. W. Marshall, *Proc. Royal Soc. (London)* **276A**, 475(1963); *Nuovo Cim.* **38**, 206(1965).
3. T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **D11**, 790(1975). Veja também o artigo de revisão em "Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics", edited by A. O. Barut (Plenum, New York, 1980), pg. 49. Recomendamos também o artigo publicado em *Sci. Am.* **253**, 56(1985).
4. P. Claverie and S. Diner, *Intern. J. Quantum Chemistry* **12 Supl.1**, 41(1977).
5. M. Surdin em "Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy and Theoretical Biology" ed. A. Van der Merwe (Plenum Press, New York, 1983), pg. 469.
6. L. de la Peña em "Stochastic Processes Applied to Physics and Other Related Fields" eds. B. Gomes, S. M. Moore, A. M. Rodriguez—Vargas and A. Rueda (World Scientific, Singapore, 1982) pg. 428. Este é o artigo de revisão mais completo publicado até agora.
7. P. W. Milonni, *Phys. Rep.* **25**, 1(1976).
8. H. E. Puthoff, *Phys. Rev.* **A40**, 4857(1989).
9. J. L. Jiménez, L. de la Peña and T. A. Brody, *Am. J. Phys.* **48**, 840(1980).
10. M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ger.* **13**, 138(1911), *Ann. Phys. (Leipzig)* **37**, 642(1912).
11. T. W. Marshall, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **61**, 537(1965).
12. T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **182**, 1374(1969).
13. H. M. França and G. C. Santos, *Nuovo Cimento* **B86**, 51(1985).
14. T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **D11**, 809(1975).
15. T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **A7**, 1832(1973).
16. M. J. Sparnaay, *Physica* **24**, 751(1958).

17. H. B. G. Casimir and D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360(1948).
18. T. H. Boyer, *Annals of Physics* **56**, 474(1970).
19. H. M. França and M. T. Thomaz, *Phys. Rev.* **D31**, 1337(1985). Errata: *Phys. Rev.* **D38**, 2651(1988).
20. H. M. França and T. W. Marshall, *Phys. Rev.* **A38**, 3258(1988).
21. T. W. Marshall and E. Santos, *Found. Phys* **18**, 185(1988).
22. T. W. Marshall and E. Santos, *Phys. Rev.* **A39**, 6271(1989).
23. P. Grangier, A. Roger and A. Aspect, *Europhys. Lett.* **1**, 173(1986).
24. M. Surdin, *Ann. Inst. Henri Poincaré* vol **XV**, 203(1971).
25. M. Surdin, *Int. Jour. Theor. Phys.* **4**, 117(1971).
26. G. H. Goedecke, *Found. Phys.* **14**, 41(1984).
27. J. J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (Addison-Wesley, Reading-Massachusetts, 1967), pg. 36.
28. A. V. Barranco, S. A. Brunini and H. M. França, *Phys. Rev.* **A39**, 5492(1989).
29. T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **A29**, 2389(1984).
30. A. H. Compton, *Phys. Rev.* **21**, 483(1923).
31. A. V. Barranco and H. M. França, *Phys. Essays* **3**, 53(1990).
32. A. Einstein and P. Ehrenfest, *Z. Phys.* **19**, 301(1923). Agradecemos a J. Barata a tradução deste artigo.
33. A. V. Barranco and H. M. França, in "Einstein-Ehrenfest's Radiation Theory and Compton-Debye's Kinematics", IFUSP/P-819, Janeiro 1990.
34. H. E. Puthoff, *Phys. Rev.* **D35**, 3266(1987).
35. S. Haroche and D. Kleppner, *Phys. Today*, January 1989, pg. 24.
36. T. A. Welton, *Phys. Rev.* **74**, 1157(1948).
37. A. D. Sakharov, *Sov. Phys. Dokl.* **12**, 1040(1968).

38. H. E. Puthoff, *Phys. Rev. A* **39**, 2333(1989).
39. G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, *Phys. Rev.* **36**, 823(1930).
40. F. Reif, "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics", (McGraw-Hill, New York, 1965), capítulo 1.
41. Ming Cheng Wang and G. E. Uhlenbeck, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 323(1945).
42. N. Wax, "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes", Dover (1954).
43. E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749(1932).
44. S. Hayakawa, *Sup. Prog. Theor. Phys* **6**, 532(1965).
45. R. W. Davies and K. T. R. Davies, *Ann. Phys. (N.Y.)* **89**, 261(1975).
46. J. E. Moyal, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45**, 99(1949).
47. P. L. Knight and P. W. Milonni, *Phys. Lett.* **C66**, 21(1980).
48. V. Weisskopf, *Ann. Phys.* **9**, 23(1931).
49. W. Heitler, "The Quantum Theory of Radiation" (Oxford Univ. Press, New York, 1954), pg. 348-353.
50. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Am. J. Phys.* **33**, 537(1965).
51. E. Schrödinger, "Collected Papers on Wave Mechanics" (Blackie & Son, London), pg. 41.
52. A. Einstein, *Phys. Z.* **18**, 121(1917). Veja a tradução para o inglês em D. ter Haar, "The Old Quantum Theory" (Pergamon Press, Oxford, 1967), pg. 167.
53. P. W. Milonni, *Am. J. Phys.* **52**, 340(1984).
54. L. Landau and E. Lifshitz, "Mécanique Quantique (Editions Mir, Moscow, 1966), capítulo XV.
55. A idéia mais frequente é que o spin não pode ser entendido classicamente. Veja ref. 54, capítulo VIII.
56. L. de la Peña and A. Jauregui, *Found. Phys.* **12**, 441(1982).
57. A. A. Sokolov and V. S. Tumanov, *JETP (Soviet Physics)* **3**, 958(1956).

58. R. Schiller and H. Tesser, *Phys. Rev.* **A3**, 2035(1971).
59. S. Sachidanandam, *Phys. Lett.* **97A**, 323(1983).
60. R. Blanco, H. M. França and E. Santos in "Classical interpretation of the Debye law for the specific heat of solids", preprint Univ. de Cantabria, june (1990), aceito para publicação no Physical Review A.
61. H. M. França, G. C. Marques and A. J. da Silva, *Nuovo Cimento* **A48**, 65(1978).
62. L. Landau and E. Lifshitz, "Theorie du Champ" (Editions Mir, Moscou, 1970), pg. 142.
63. H. J. Bhabha, *Proc. Indian Acad. Sci.* **A11**, 247(1940).
64. J. D. Jackson em "Classical Electrodynamics", (John Wiley & Sons, 1975), pg. 183.
65. M. Born, "Atomic Physics", (Blackie and Son Ltd, Glasgow, 1958), pg. 157.
66. C. Kittel em "Introduction to Solid State Physics" (Wiley, New York, 1968), pg. 434.
67. W. E. Henry, *Phys. Rev.* **88**, 559(1952).
68. Veja ref. 66 pg. 432.
69. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands em "The Feynman Lectures on Physics", (Addison-Wesley, Reading-Massachusetts, 1966), seção 34-6.
70. R. H. Young, *Am. J. Phys.* **44**, 581(1976). Este é um excelente artigo sobre modelos clássicos do spin.
71. A. Einstein, *Ann. Phys* **17**, 132(1905). Veja a tradução para o ingles por A. Arons and M. Peppard, *Am. J. Phys.* **33**, 367(1965).
72. R. Kidd, J. Ardini and A. Anton, *Am. J. Phys.* **57**, 27(1988). Aqui os autores discutem pelo menos quatro interpretações distintas para o conceito de *foton*.
73. Veja ref. 30.
74. R. H. Stuewer, "The Compton Effect. A Turning Point in Physics", (Science History Publication, New York, 1975).
75. N. Bohr, A. Kramers and J. Slater, *Phil. Mag.* **47**, 785(1924).
76. H. R. Lewis, *Am. J. Phys.* **41**, 38(1973).

77. Veja ref. 65, apêndice XXXIV.
78. G. Wentzel, *Z. Phys.* **41**, 828(1927).
79. M. O. Scully and M. Sargent III, *Phys. Today*, March 1972, pg. 38.
80. E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **82**, 257(1927). Veja também J. Strnad, *Eur. J. Phys.* **7**, 217(1986).
81. O. Klein and Y. Nishima, *Z. Phys.* **52**, 853(1929).
82. I. Tamm, *Z. Phys.* **62**, 545(1930).
83. Y. H. Woo, *Phys. Rev.* **25**, 444(1925).
84. Veja ref. 62 pg. 159.
85. K. Hagenbush, *Am. J. Phys.* **45**, 693(1977).
86. Ref. 62 pg. 272.
87. Ref. 62 pg. 290.
88. Ref. 62 pg. 71.
89. Ref. 64 pg. 660.
90. Ref. 62 pg. 259.
91. A. H. Compton and J. C. Hubbard, *Phys. Rev.* **23**, 439(1924).
92. E. Giacobino and C. Fabre, *La Recherche* **21**, 170(1990). Compare a fig. 7 desta ref. com a fig. 1 da ref. 21.
93. A. Pais, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 863(1979).
94. Veja "ADDED NOTE" na ref. 18.
95. Veja ref. 62 pg. 274
96. Veja ref. 64 pg. 807.
97. A rigor a equação (6.12) governa as flutuações da componente z do momento angular.
98. A. A. Sokolov, I. M. Ternov and V. C. Zhukovskii in "Quantum Mechanics" (Mir Publishers, Moscow, 1984), pg. 207.

99. R. Peierls, "Surprises in Theoretical Physics" (Princeton University Press, 1979), pg. 53.
100. E. D. Yorke, *Am. J. Phys.* **51**, 16(1983).
101. W. Jhe et al., *Phys. Rev. Lett.* **58**, 666(1987).
102. F. DeMartini et al., *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2955(1987).
103. P. Goy et al., *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1903(1983).
104. H. E. Puthoff, comunicação privada, não publicada.
105. A. M. Cetto and L. de la Peña, *Phys. Rev.* **A37**, 1952, 1960(1988).
106. H. M. França and E. Santos in "Spontaneous emission in confined space according to stochastic electrodynamics", preprint Univ. Cantabria, july (1990).

FIGURAS

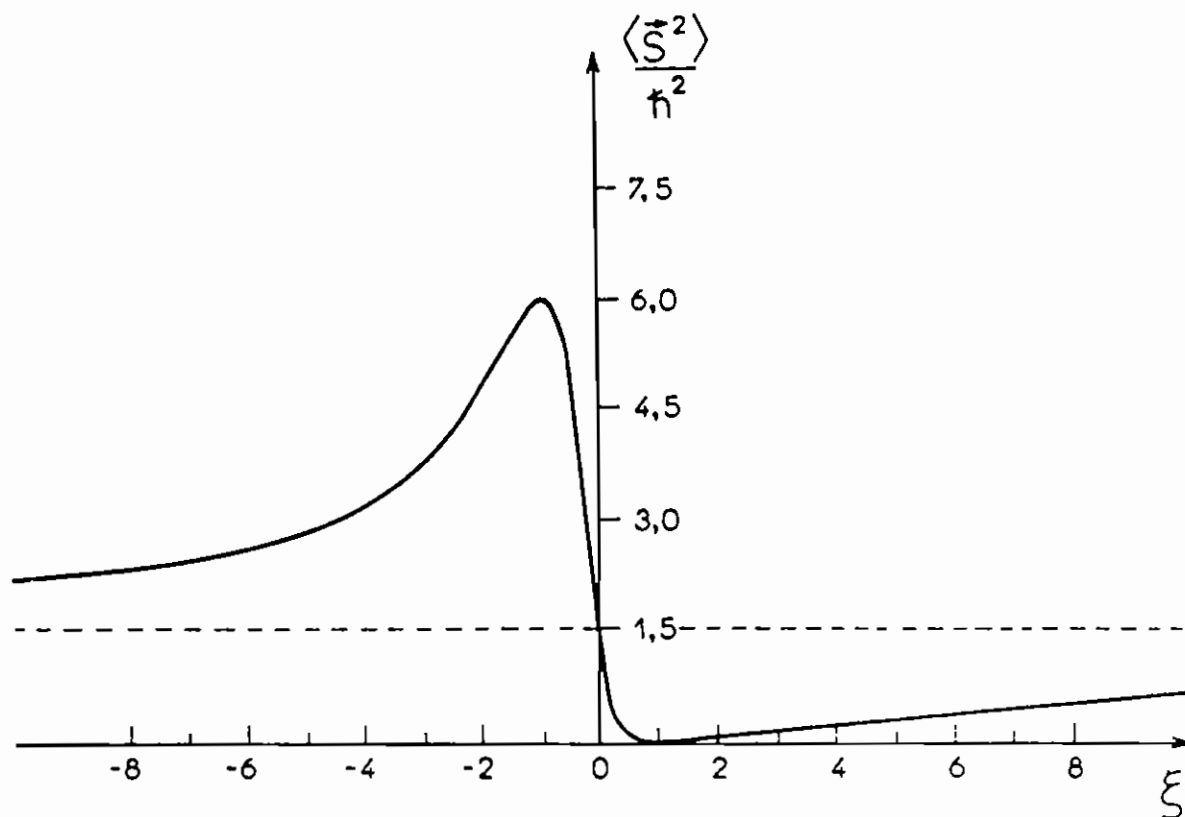


Figura 1 - Valor quadrático médio do momento angular intrínseco como função da variável $\xi = q_1 m_2 / q_2 m_1$. A linha tracejada representa o valor obtido por outros autores, isto é, o caso particular em que um dos constituintes é muito mais pesado que o outro.

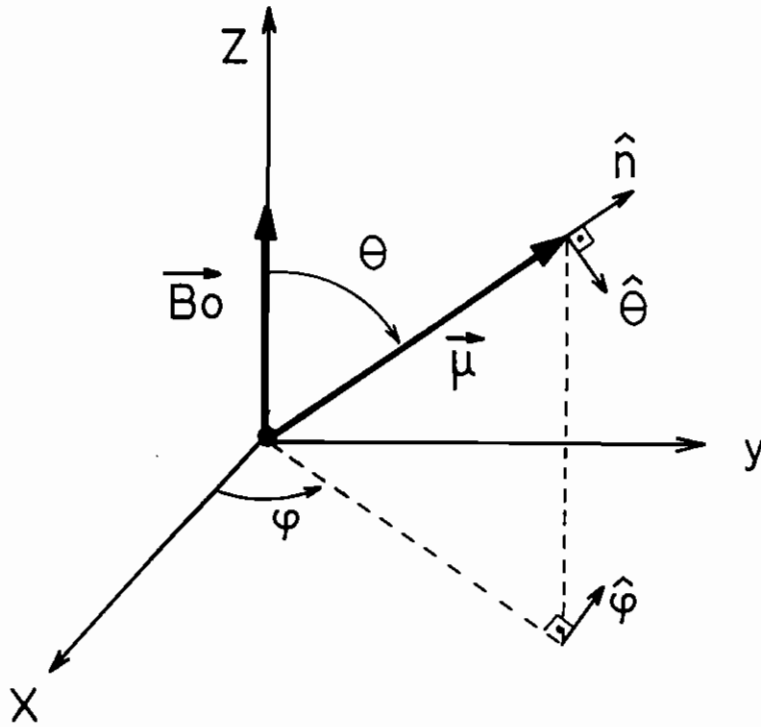


Figura 2 – Orientação instantânea do momento magnético $\vec{\mu}$ em relação ao campo externo constante \vec{B}_0 .

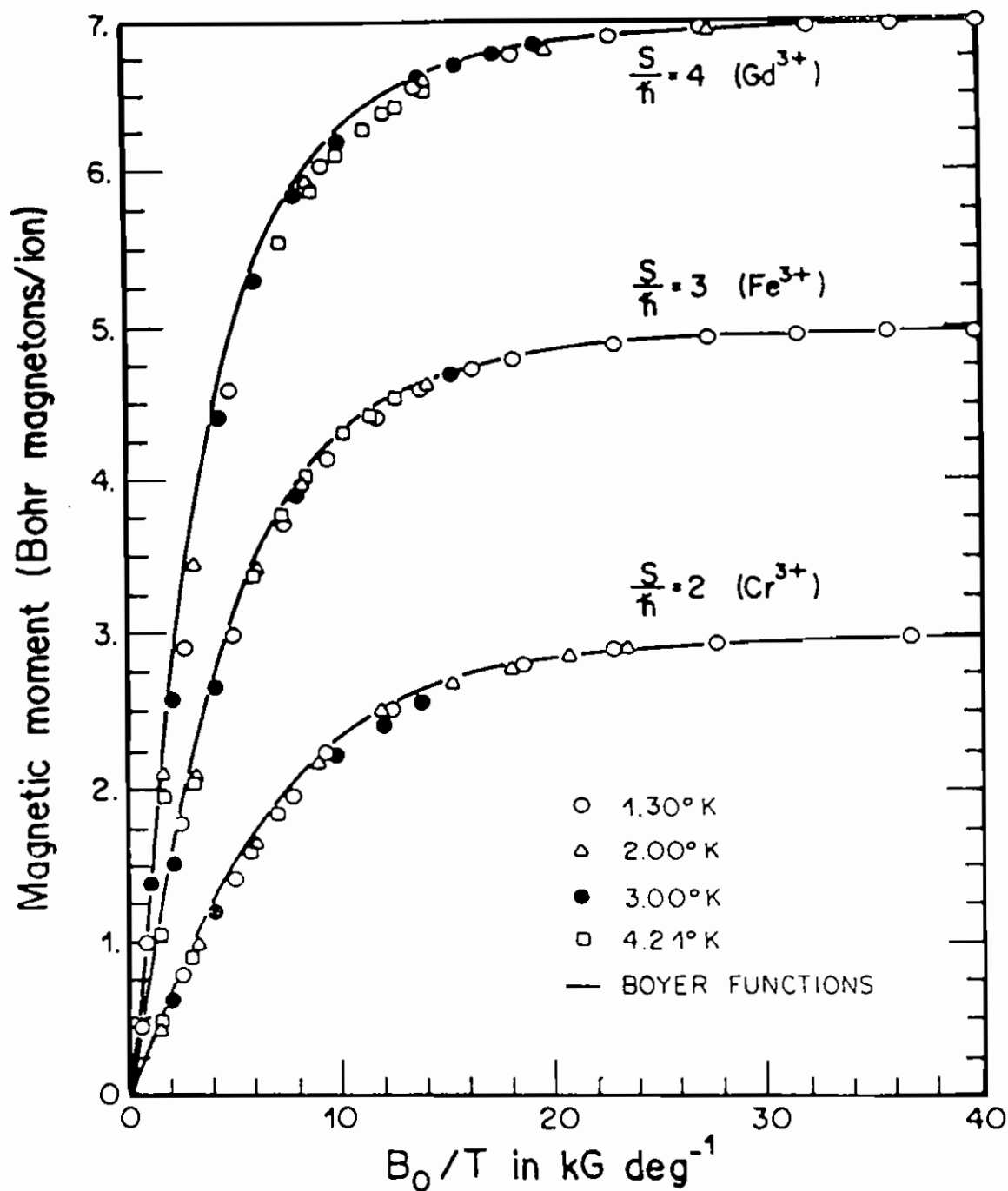


Figura 3 - Valor médio da componente z do momento magnético ($\langle \mu_z \rangle / \mu_0$) como função do inverso da temperatura (B_0/T). Estamos denotando o magneton de Bohr por μ_0 e o campo magnético por B_0 . A curva corresponde ao cálculo baseado na SED (ref. 28).

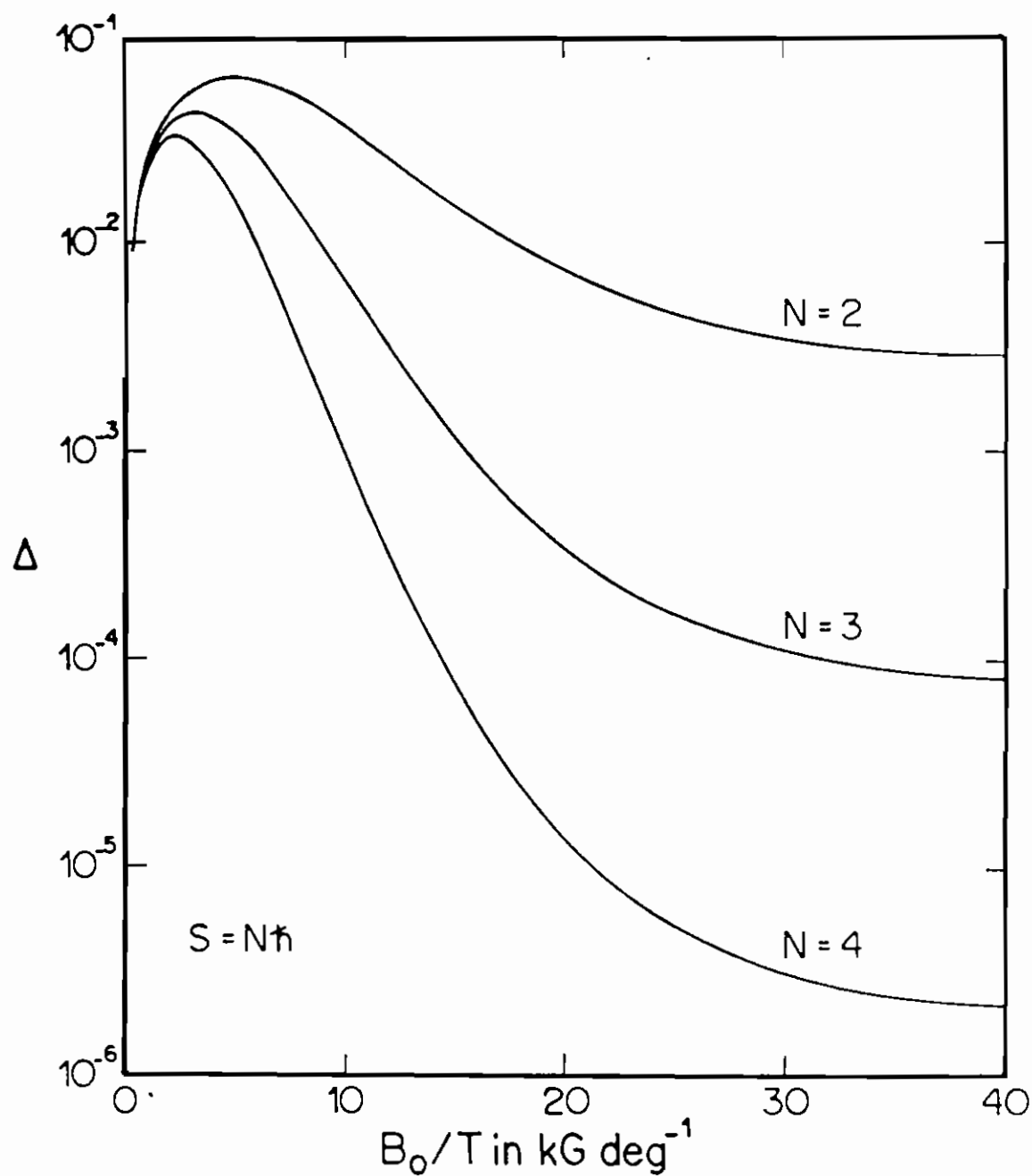


Figura 4 - Comparação entre o cálculo estocástico e o cálculo quântico para o valor médio da componente z do momento magnético. A grandeza Δ , definida como $\Delta \equiv \langle \mu_z \rangle_{\text{Boyer}} - \langle \mu_z \rangle_{\text{Brillouin}}$, aparece como função do inverso da temperatura (ref. 28).

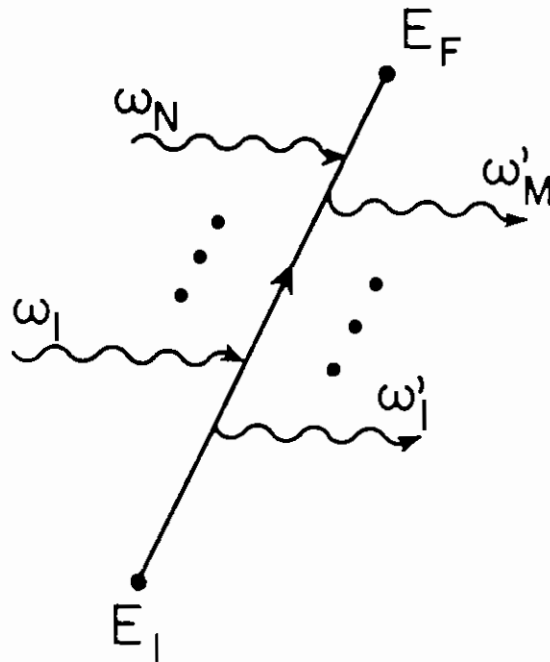


Figura 5 – Quadro esquemático representando o processo de N absorções nas frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ e M emissões nas frequências $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_M$. E_F e E_I são, respectivamente, os valores (arbitrários) das energias final e inicial da partícula.

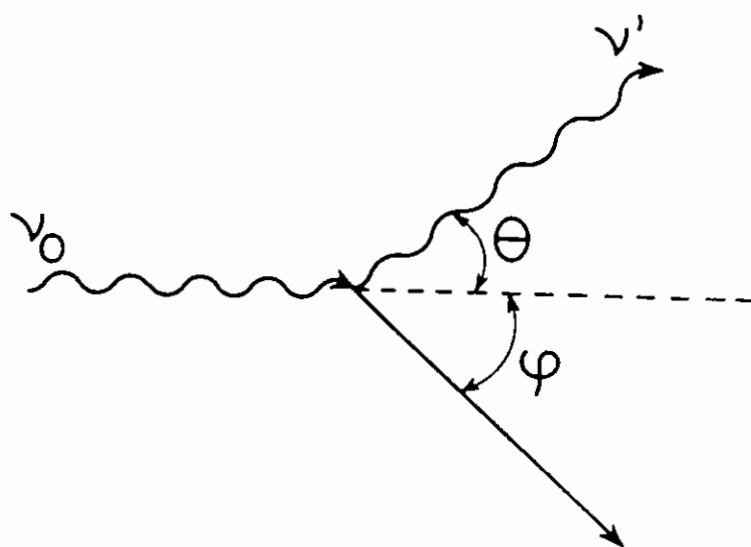


Figura 6 – Quadro esquemático do espalhamento de um foton por um eletron segundo Compton. Se mostra a radiação incidente (frequência ν_0), a radiação emitida (frequência ν') espalhada na direção θ e o eletron recuando na direção φ .

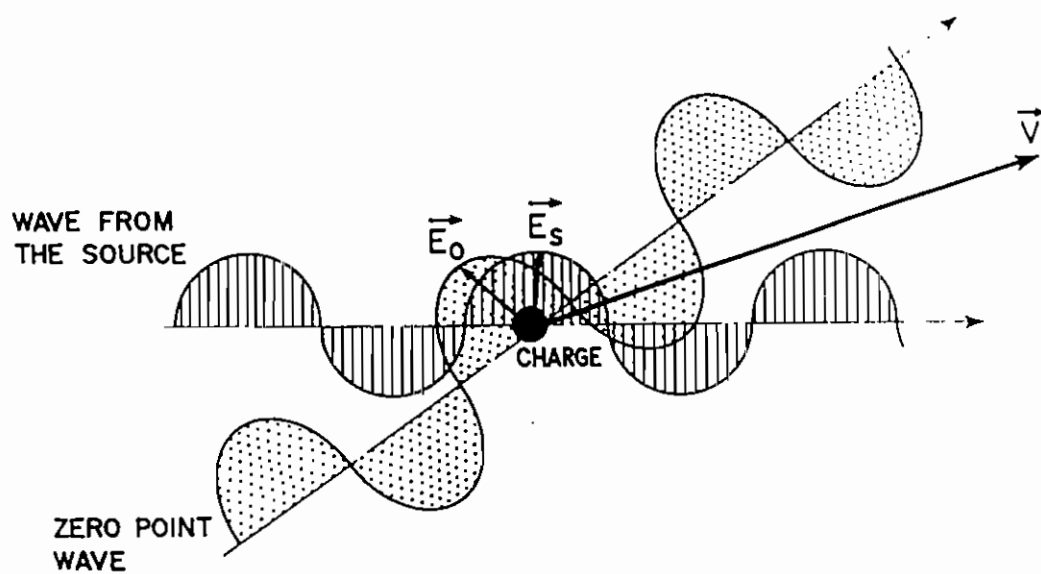


Figura 7 - Quadro esquemático mostrando a interferência construtiva entre a onda proveniente da fonte (campo elétrico \vec{E}_s) e uma onda da radiação de ponto zero aleatória (campo elétrico \vec{E}_0). Também se mostra a partícula eletrizada recuando com velocidade \vec{V} aleatória.

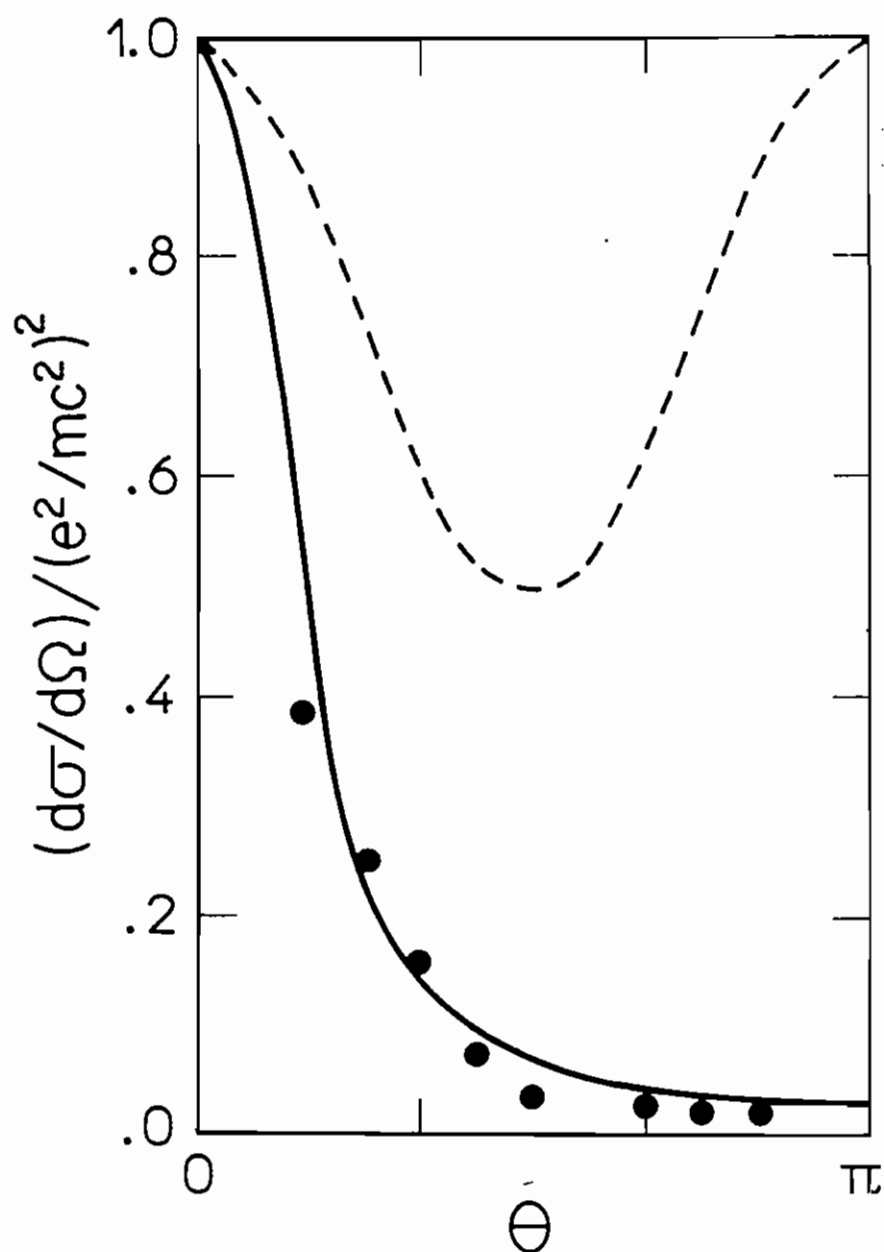


Figura 8 – Seção de choque de espalhamento de raios X, não polarizados, por elétrons. A curva tracejada, corresponde à intensidade relativa, como função do ângulo de espalhamento θ , de acordo com a teoria de Thomson. A curva contínua representa a intensidade relativa na teoria clássica de Compton (com recuo do elétron), isto é, expressão (5.74) com $\alpha = 1.1$, o que corresponde a um comprimento de onda $\lambda_0 = 0.022\text{\AA}$. Os pontos experimentais medidos por Compton estão indicados pelos círculos negros.

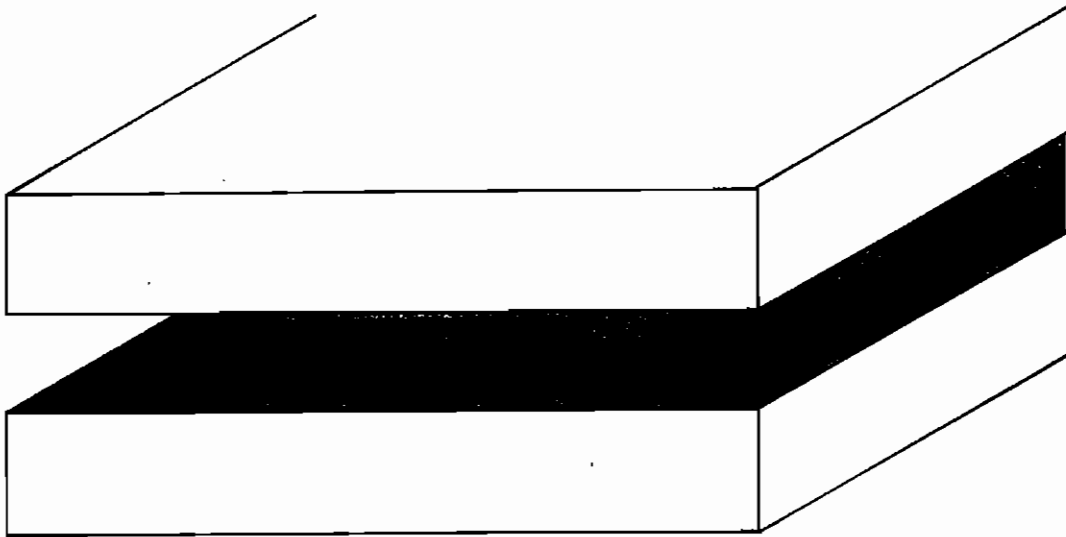


Figura 9 - Diagrama esquemático mostrando um átomo entre dois espelhos paralelos. O átomo ficaria permanentemente excitado (mantido pelos campos do "vácuo") se o espaçamento (d) é menor que a metade do comprimento de onda da transição atômica, desde que o dipolo elétrico seja paralelo às superfícies dos espelhos (ref. 35 e 102).

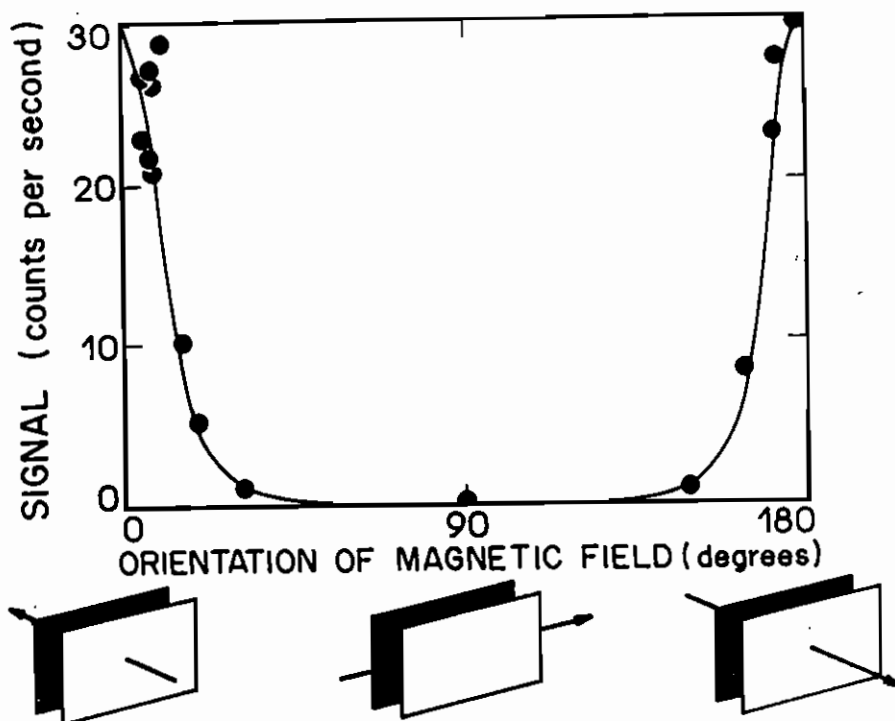


Figura 10 - Transmissão de átomos excitados entre os espelhos da figura 9. O espaçamento entre os espelhos provoca um corte na emissão espontânea de radiação no regime infravermelho, em torno de 3.5 microns. O sinal dos átomos que não decaíram é desenhado, como função do ângulo entre um pequeno campo magnético aplicado e a normal aos espelhos. Os diagramas na parte de baixo da figura ilustram as orientações do campo magnético a 0° , 90° e 180° . No ângulo zero, os átomos estão polarizados paralelamente aos espelhos (figura 9) e o grande número de transmissões de átomos excitados é evidência de que a emissão espontânea está inibida. Quando o ângulo não é zero, a precessão de Larmor reorienta os dipolos atômicos, de sorte que eles podem emitir radiação polarizada perpendicularmente aos espelhos, a qual tem condições de propagar-se. Como resultado os átomos irradiam "espontaneamente" e não atingem o detetor no seu estado excitado. A curva contínua corresponde ao cálculo baseado na QED (ref. 101) e na SED (ref. 106).