N.T. 141

SBI-IFUSP

305M810T0141

ANALITICIDADE E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS TRAJETÓRIAS
MESONICAS

HENRIQUE FLEMING

Tese de Livre-Docência

1 9 7 1

Dedicado a

Saverio D'Agostino

INTRODUÇÃO

A construção, ou obtenção de propriedades gerais, das trajetórias de Regge é um problema fundamental na formulação da teoria das interações fortes via matriz S . Embora o domínio natural dos polos de Regge seja o espalhamento a altas energias, as trajetórias de Regge, interpolando ressonâncias, classificam-se em famílias, sugerindo um modo de levar um pouco de ordem ao caos produzido pela existência de um número enorme de ressonâncias. É claro, também, que o conhecimento das possíveis formas das trajetórias informa sobre o espectro de massa das ressonâncias ou, no esquema da "democracia nuclear" de Chew, sobre o espectro de massa de todos os hadrons.

As trajetórias têm sido estudadas a partir da equação de Schrödinger, da equação de Bethe-Salpeter, de modelos baseados na dominância de certos diagramas de Feynman, de "boot - straps", etc.

Neste trabalho é apresentada uma maneira de construir trajetórias usando propriedades que julgamos fundamentais numa teoria de matriz S : analiticidade e unitariedade. Os polos de Regge foram descobertos em teoria de potencial, e ali foram demonstradas rigorosamente suas propriedades. Nossa experiência mostra que as propriedades que melhor sobrevivem à passagem para as teorias relativísticas são as ligadas à analiticidade. Assim temos esperança de que o nosso método contenha muito do que venham a ser efetivamente as trajetórias de Regge quando houver uma teoria completa para as interações fortes.

Por razões de tempo e porque o assunto, de copiosa bibliografia, assim me permite, procurei ser tão breve quanto o permitiu a clareza.

Como método de exposição, preferi reservar o texto para os resultados em que tive alguma participação, reunindo em apêndices tópicos necessários para a compreensão da tese mas que poderiam ser encontrados em outro lugar, tendo sido incluídos para conveniência do leitor.

É um prazer agradecer a colaboração dos professores : Enrico Predazzi e Tetsuo Sawada, que participaram de maneira importante do projeto, e aos Drs. Eduardo Galli, Alicia Galli e Muhsin Abo-Shaeer por sugestões e críticas.

A Srta. Renata Maria Venditte, realizou o trabalho de datilografia com grande dedicação, pelo que lhe sou imensamente grato.

1 - Propriedades das trajetórias de Regge

Procura-se conhecer a trajetória percorrida por um polo de Regge quando s varia, em razão de dois fatos bem conhecidos :

(1) Se, para $s = s_R$, a trajetória fôr da forma $\alpha(s_R) = L + i\gamma$, onde L é um número inteiro e $\gamma/L \ll 1$, a amplitude representará uma ressonância de spin L , massa $\sqrt{s_R}$ e largura

$$\Gamma = \frac{\text{Im } \alpha(s)}{\sqrt{s} \frac{d\text{Re}\alpha(s)}{ds}} \quad (1.1)$$

Isto significa que as trajetórias classificam as ressonâncias em famílias, pertencendo a uma família tôdas as ressonâncias interpoladas por uma mesma trajetória.

(2) Para t negativo e de módulo pequeno e grandes valores de s , a amplitude de espalhamento elástico de partículas escalares no canal s é dominada por um comportamento $s^{\alpha(+)}$, sendo $\alpha(+)$ a trajetória de Regge no canal t de maior parte real.

A propriedade (1) foi descoberta por Regge⁽¹⁾ e a (2) - por Chew e Frautschi.⁽²⁾ São elas que permitem a obtenção de informações experimentais sobre as trajetórias. Por outro lado, eventuais construções de trajetórias a partir de teorias e modelos podem ser usadas para testar essas teorias e modelos através das propriedades (1) e (2).

Neste trabalho procuram-se informações sobre a forma das trajetórias de Regge como consequência de suas propriedades analíticas e da unitariedade.

Uma possível maneira de realizar este programa é supor que as trajetórias tenham a analiticidade usual, demonstrada em teoria do potencial⁽³⁾, e escrever relações de dispersão com um número de subtrações sugerido pela experiência. Usando-se então a relação (1.1) transforma-se a relação de dispersão em uma equação íntegro-diferencial para $\text{Re } \alpha(s)$. Trata-se então de construir soluções desta equação, ou obter teoremas gerais que forneçam informações sobre as trajetórias. Nesta forma o programa foi consideravelmente desenvolvido por Antoniou⁽⁴⁾, Degasperis, Predazzi⁽⁵⁾ e Fleming⁽⁶⁾.

Recentemente Fleming e Sawada⁽⁷⁾ observaram que uma análise das propriedades de analiticidade e dos limites assintóticos das trajetórias a altas energias é suficiente para a obtenção de resultados muito gerais sobre as trajetórias e, em particular, sobre as larguras das ressonâncias interpoladas. O resultado principal é que o comportamento assintótico das larguras é linear na massa das ressonâncias, um fato que, além de ser de importância na análise de vários modelos que dependem de hipóteses sobre o comportamento das larguras a altas energias, constitui-se em uma condição necessária para a existência de soluções das equações íntegro-diferenciais acima mencionadas.

No capítulo 2 expõe-se o método de construção de trajetórias através da análise de equações íntegro-diferenciais. No capítulo 3 um caso particular é resolvido e discutido. O capítulo 4 regulariza a equação transformando-a numa de Fredholm. O capítulo 5 obtém resultados gerais sobre comportamentos assintóticos de trajetórias e larguras e o capítulo 6 discute aplicações, programas para desenvolvimento ulterior e conexão desses resulta

dos com um teorema sobre o decaimento de estados excitados.

Seguem-se apêndices sobre a notação, introdução aos polos de Regge e analiticidade das trajetórias, teorema de Phragmen-Lindelöff.

2 - Construção dinâmica de trajetórias de Regge.

As informações experimentais à nossa disposição sobre as trajetórias de Regge não são muito detalhadas. Essencialmente as únicas propriedades que se podem dizer universais são que a inclinação ($\alpha'(0)$) é sempre da ordem de $1(\text{GeV})^{-2}$ e que a "intersecção" ($\alpha(0)$), que é forçada pela unitariedade⁽⁸⁾ apenas a ser inferior a 1, fenomenologicamente parece ser da ordem de 1/2 para trajetórias mesônicas. Experimentalmente pode-se também dizer que uma grande degenerescência de troca ocorre⁽⁹⁾, o que é previsto no contexto da dualidade^(10,11).

O comportamento das trajetórias para pequenos valores de $|s|$ é linear⁽¹²⁾, enquanto que a situação para grandes valores de $|s|$ é muito menos conhecida. Para s positivo (região de ressonâncias), o desvio da trajetória de uma linha reta é, até as ressonâncias de massas mais altas já observadas, imperceptível. Na região de s negativo (região de espalhamento) contudo, os dados de altas energias e ângulo fixo parecem sugerir uma gradual diminuição da inclinação, se uma parametrização da forma $t^{\alpha(s)}$ for usada⁽¹³⁾. Este resultado é consistente com a propriedade aparentemente geral exi-

bida por distribuições angulares elásticas de caírem tanto mais lentamente quanto mais se afastam do pico difrativo, de maneira a não exceder o limite de Cerulus-Martin⁽¹⁴⁾. O comportamento típico é a exponencial de Orear^(15,16).

Do ponto de vista teórico admite-se que a melhor maneira de se estudarem as propriedades das trajetórias de Regge é - através do uso de propriedades de analiticidade e comportamento assintótico. Em muitas das investigações nessa linha chega-se à conclusão que $\alpha(s)$ deve crescer assintoticamente mais rapidamente que $\sqrt{s}$ ⁽¹⁷⁾. Nos bootstraps baseados sobre a dualidade⁽¹⁸⁾ o resultado é alcançado de que as trajetórias não podem afastar-se muito de um comportamento linear. É sabido, porém, que um comportamento assintótico linear implica em ressonâncias estáveis⁽¹⁹⁾, contrariamente ao que se observa.

Suponhamos que $\alpha(s)$ seja analítica no plano complexo s com um corte no eixo real a partir do limiar da região física. Para que uma relação de dispersão possa ser escrita é necessário ainda postular o número mínimo de subtração para o qual a integral de Cauchy converge. Usando então a equação (1.1) para Γ , obtém-se a equação íntegro-diferencial a ser tratada. No caso de N subtrações tem-se:

$$\text{Re}\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \dots + \frac{\alpha^{(N-1)}(0)}{(N-1)!} s^{N-1} + \frac{s^N}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'^N} \frac{\sqrt{s'} \Gamma(s') \text{Re}\alpha'(s')}{s' - s} \quad (2.1)$$

Como procuramos trajetórias que cresçam indefinidamente

escrever (2.2) em termos da parte imaginária.

A relação de dispersão inicial é escrita

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \alpha(s) &= \alpha(0) + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha(s') ds'}{s' (s' - s)} \\
 &= \alpha(0) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \operatorname{Im} \alpha(s') \frac{s - s' + s'}{s' (s' - s)} \\
 \operatorname{Re} \alpha(s) &= \alpha(0) - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \operatorname{Im} \alpha(s') + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \operatorname{Im} \alpha(s') \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Derivando em relação a s ,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \alpha'(s) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \operatorname{Im} \alpha(s') = \\
 &= \frac{-1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{d}{ds'} \frac{1}{s' - s} \operatorname{Im} \alpha(s') ds' = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \frac{d}{ds'} \operatorname{Im} \alpha(s') \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Então, usando (3.1)

$$\operatorname{Im} \alpha(s) = \frac{g(s)}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \frac{d}{ds'} \operatorname{Im} \alpha(s') \quad (3.4)$$

e, com

$$g(s) = \gamma(s - s_0) \theta(s - s_0)$$

obtem-se, usando tabelas de transformada de Hilbert⁽²⁰⁾, a solução

$$\operatorname{Im} \alpha(s) = \frac{\gamma A}{\epsilon} (s - s_0)^{\epsilon} \quad (3.5)$$

para $s > s_0$.

Usando (3.1) obtem-se

$$(s > s_0) : \operatorname{Re} \alpha(s) = \frac{A}{\varepsilon^2} (s - s_0)^\varepsilon + \alpha(0) \quad (3.6)$$

Para $s < s_0$ a solução pode ser obtida usando-se (3.3):

$$(s < s_0) : \operatorname{Re} \alpha(s) = \frac{A}{\varepsilon^2 \cos \pi \varepsilon} (s_0 - s)^\varepsilon + \alpha(0) \quad (3.7)$$

A consistência de (3.6) com a equação (3.4) exige que a condição

$$-\varepsilon \cotg(\pi \varepsilon) = \frac{1}{\gamma} \quad (3.8)$$

seja satisfeita.

Além disso, como a largura deve ser positiva,

$$\varepsilon \cotg(\pi \varepsilon) < 0 \quad (3.9)$$

o que exige

$$\frac{1}{2} < \varepsilon < 1 \quad (3.10)$$

Esta condição, através de (3.5), garante que $\operatorname{Im} \alpha(s) > 0$, um resultado rigoroso em teoria do potencial (V. Apêndice I).

Para que esta solução seja consistente com o método usado é preciso que a largura seja pequena em relação à energia da ressonância.

Uma maneira de impôr esta condição é exigir que

$$\frac{\text{Im}\alpha(s)}{\text{Re}\alpha(s)}$$

seja uma quantidade pequena. É fácil ver que se deve ter

$$\epsilon \approx 1 \quad (3.11)$$

O comportamento no limiar foi estudado por Barnt e Zwanziger⁽²¹⁾ supondo válida a representação de Mandelstam. O resultado é

$$\text{Im}\alpha(s) \approx (s-s_0)^{\alpha(0)+\frac{1}{2}} \sin\pi \left[\alpha(0) + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.12)$$

Usando-se (3.5), (3.8) e (3.11) obtém-se, impondo (3.12), que

$$\alpha(0) \approx \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

em torno do valor observado experimentalmente.

A inclinação da trajetória imediatamente acima do limiar é (21)

$$\frac{d\text{Re}\alpha(s)}{ds} = \text{const.} \cos \left[\pi \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \right] \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{\alpha_0 - \frac{1}{2}}$$

que é infinito para $-\frac{1}{2} < \alpha_0 < \frac{1}{2}$ mas não para $\alpha_0 > \frac{1}{2}$.

Isto é consistente com a trajetória proposta e com (3.13) desde que $\alpha(0)$ aproxime $\frac{1}{2}$ por valores inferiores, o que é também uma consequência de que, em (3.11), ϵ deve aproximar 1 por baixo.

O fato de que as ressonâncias mesônicas são nos aceleradores usuais, estudadas apenas em processos de produção, reduz muito a precisão com que se conhecem suas larguras. Não se pode, por conse-

guinte, determinar γ da experiência, testando assim a condição de consistência (3.8). Apenas como ilustração pode-se supor que o comportamento das trajetórias fermiônicas seja semelhante. Usando-se então as trajetórias que contêm mais ressonâncias ($\Delta(1236)$, $N(1518)$, $\Lambda(1115)$, $\Sigma(1385)$) obtém-se, com a forma $\Gamma(s) = \frac{\gamma}{\sqrt{s}} (\bar{s} - s_0)$, $\gamma \approx 0,2$ que é consistente com valores de ϵ próximos a 1.

Fique claro que, apesar de que os parâmetros da solução podem ser ajustados de maneira a reproduzir razoavelmente as trajetórias observadas, este exemplo tem a finalidade principal de estudar características gerais da solução, que eventualmente dependam pouco da particular forma escolhida para a largura $\Gamma(s)$.

As trajetórias (3.6) e (3.7) são, evidentemente, soluções particulares da equação. Não se pode nem mesmo afirmar que sejam as únicas possíveis para esta escolha de $\Gamma(s)$. Será discutido a seguir como podem ser obtidas informações sobre a existência e unicidade das soluções e será apresentado um novo método, sistemático, de procura de soluções que possibilita a resolução numérica do problema.

4 - Regularização da equação.

Equações do tipo de (3.4), que contêm uma integral de Cauchy, foram estudadas em detalhe por matemáticos russos, em particular Mushkhelishvili e Vekua, com resultados de grande importância para problemas bidimensionais, porque grande parte dos

problemas de contorno de funções analíticas de uma variável podem ser expressos na forma de equações integrais singulares (problema de Hilbert).

Mushkhelishvili⁽²²⁾ resolve uma equação especialmente interessante para o nosso caso, e que surge no estudo de asas de avião de extensão finita,

$$\frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma'(t)}{t-t_0} dt = f(t_0) \quad (4.1)$$

onde $\Gamma(t)$ é a função incôgnita, $B(t)$ e $f(t)$ são funções dadas. Por simetria, as seguintes equações devem ser satisfeitas,

$$\Gamma(t) = \Gamma(-t) , \quad B(t) = B(-t) , \quad f(t) = f(-t) \quad (4.2)$$

$$e \quad \Gamma(-a) = \Gamma(a) = 0 \quad (4.3)$$

Supõe-se que $B(t)$ não se anule, com a possível exceção dos extremos e que $1/B(t)$ e $f(t)$ sejam Hölder- contínuas, embora as condições possam ser enfraquecidas um pouco⁽²²⁾. A condição de Hölder-continuidade garante que o limite que aparece na definição de integral de Cauchy seja definido, limitando as oscilações da função no ponto singular. A equação (4.1) será agora reduzida a uma equação regular de Fredholm. (4.1) pode ser escrita

$$\Gamma'(t_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - t_0^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \Gamma(t)}{B(t) (t-t_0)} dt + F(t_0) \quad (4.4)$$

sendo

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - t_0^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - t_0} f(t) dt \quad (4.5)$$

sendo tomada a raiz positiva, usando-se a fórmula de inversão de Mushkhelishvili⁽²²⁾. De (4.5) obtem-se

$$B(t_0) \Gamma'(t_0) = - \frac{B(t_0)}{\pi \sqrt{a^2 - t_0^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{B(t)(t - t_0)} \Gamma(t) dt + B(t_0) F(t_0)$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma(t) dt}{t - t_0}$ e rearranjando os termos, chega-se a

$$B(t_0) \Gamma'(t_0) = - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma(t)}{t - t_0} dt + B(t_0) F(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi \sqrt{a^2 - t_0^2}} \times \int_{-a}^{+a} R(t_0, t) \Gamma(t) dt \quad (4.6)$$

$$\text{com } R(t_0, t) = \frac{1}{t - t_0} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{B(t)} - \frac{\sqrt{a^2 - t_0^2}}{B(t_0)} \right\} \quad (4.7)$$

Suponhamos agora, por simplicidade, que a função

$$P(t) = \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{B(t)}, \quad -a \leq t \leq a$$

tenha uma derivada contínua. $R(t_0, t)$ será uma função contínua de ambos os argumentos. Nestas condições

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma(t) dt}{t - t_0} = - \int_{-a}^{+a} \Gamma'(t) \log |t - t_0| dt$$

Derivando ambos os membros em relação a t_0 , vem

$$\frac{d}{dt_0} \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma(t) dt}{t - t_0} = \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma'(t) dt}{t - t_0}.$$

Derivando (4.6) e usando este resultado segue-se que

$$\frac{d}{dt_0} \left[B(t_0) \Gamma'(t_0) \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\Gamma'(t)}{t - t_0} dt = g(t_0) \quad (4.8)$$

onde

$$g(t_0) = \frac{d}{dt_0} \left\{ B(t_0) F(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi \sqrt{a^2 - t_0^2}} \int_{-a}^{+a} R(t_0, t) \Gamma(t) dt \right\}, \quad (4.9)$$

Combinando (4.8) com (4.1) obtém-se

$$B(t_0) \frac{d}{dt_0} \left[B(t_0) \Gamma'(t_0) \right] = B(t_0) \left[f(t_0) + g(t_0) \right] - \Gamma'(t_0). \quad (4.10)$$

Considerando-se, por um instante, o segundo membro de (10) como uma função conhecida, (10) será uma equação diferencial linear de segunda ordem para $\Gamma(t)$. A solução é

$$\Gamma(t_0) = C_1 \cos \tau(t_0) + C_2 \sin \tau(t_0) + \int_0^{t_0} (f(t) + g(t)) \sin (\tau(t_0) - \tau(t)) dt \quad (4.11)$$

$$\text{onde } \tau(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{B(t)}$$

e C_1 e C_2 são constantes indeterminadas. Pondo, em (4.11), $t_0=0$, obtém-se

e C_1 e C_2 são constantes indeterminadas. Pondo, em (4.11), $t_0=0$, obtem-se

$$\Gamma(0) = C_1$$

Por outro lado, $\tau(-t_0) = -\tau(t_0)$. Trocando t por $-t$, resulta

$$\Gamma(-t_0) = \Gamma(t_0), \text{ logo } C_2 = 0$$

Colocando, em (4.11), o valor de $g(t)$, obtem-se

$$\Gamma(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} K(t_0, t) \Gamma(t) dt = h(t_0) \quad (4.12)$$

com

$$K(t_0, t) = \int_0^{t_0} \frac{R(t_1, t)}{\sqrt{a^2 - t_1^2}} \cos [\tau(t_0) - \tau(t_1)] dt_1 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \text{e } h(t_0) = & \Gamma(0) \cos \tau(t_0) + \int_0^{t_0} \sin [\tau(t_0) - \tau(t_1)] f(t_1) dt_1 + \\ & + \int_0^{t_0} \frac{\cos [\tau(t_0) - \tau(t_1)]}{\pi \sqrt{a^2 - t_1^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f(t) dt}{t - t_1} dt_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

A razão da exposição detalhada da solução desta equação é didática. O mesmo método será usado para a equação (3.4), mas a seqüência de transformações é mais clara em uma equação integral com extremos finitos, como (4.1), do que no caso que nos interessa.

A equação (3.4) pode ser invertida pelo método de Mushkhelishvili, obtendo-se

$$\frac{d}{ds} \text{Im} \alpha(s) = - \frac{1}{\pi} \sqrt{s-s_0} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im} \alpha(x)}{g(x) \sqrt{x-s_0}} \frac{dx}{x-s} \quad (4.15)$$

Dai segue facilmente que

$$\sqrt{s-s_0} g(s) \frac{d}{ds} \operatorname{Im} \alpha(s) = - \frac{\sqrt{s-s_0}}{\pi} \left\{ \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \alpha(x)}{x-s} dx - \right. \\ \left. - \frac{s-s_0}{\pi} g(s) \int_{s_0}^{\infty} R(s,x) \operatorname{Im} \alpha(x) dx \right\} \quad (4.16)$$

com

$$R(s,x) = \frac{1}{x-s} \left[\frac{1}{g(x)\sqrt{x-s_0}} - \frac{1}{g(s)\sqrt{s-s_0}} \right] \quad (4.17)$$

Derivando em relação a s ,

$$\frac{d}{ds} \left[g(s) \frac{d}{ds} \operatorname{Im} \alpha(s) \right] = - \frac{\operatorname{Im} \alpha(s)}{g(s)} - \\ - \frac{d}{ds} \left[\frac{\sqrt{s-s_0}}{\pi} g(s) \int_{s_0}^{\infty} R(s,x) \operatorname{Im} \alpha(x) dx \right] \quad (4.17)$$

Finalmente,

$$g(s) \frac{d}{ds} \left[g(s) \frac{d}{ds} \operatorname{Im} \alpha(s) \right] = -\operatorname{Im} \alpha(s) - g(s) G(s) \quad (4.19)$$

$$\text{com } G(s) = - \frac{d}{ds} \left[\frac{\sqrt{s-s_0}}{\pi} g(s) \int_{s_0}^{\infty} R(s,x) \operatorname{Im} \alpha(x) dx \right]$$

Considerando (4.19) como uma equação diferencial, a solução geral é:

$$\operatorname{Im} \alpha(s) = C_1 \cos \tau(s) + C_2 \sin \tau(s) + \int_{s_0}^s G(x) \sin [\tau(s) - \tau(x)] dx \quad (4.20)$$

$$\text{com} \quad \tau(x) = \int_{s_0}^x \frac{dx}{g(x)} \quad (4.21)$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \text{Im}\alpha(s) &= C_1 \cos\tau(s) + C_2 \sin\tau(s) - \int_0^\infty K(y,s) \text{Im}\alpha(y) dy \\ K(u,s) &= \int_{s_0}^s \sin \left[\tau(s) - \tau(x) \right] \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{x-s_0}}{\pi} - g(x) R(x,y) \right] dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

A condição $\text{Im}\alpha(s_0)=0$ exige que $C_1=0$. Tem-se assim uma equação de Fredholm inhomogênea com uma constante indeterminada, que corresponde à derivada da trajetória no limiar. A solução então, dada a largura, existe e contém uma constante livre. No cálculo da parte real, que exige uma integração a mais, surge outra constante que corresponde à "interseção".

5 - Resultados gerais sobre comportamentos assintóticos.

Todos os resultados apresentados até agora dependiam de informações experimentais sobre a largura das ressonâncias e sobre o comportamento assintótico, que determina o número de subtrações que devem ser feitas na relação de dispersão inicial. Informações experimentais sobre as trajetórias só são disponíveis, na região de espalhamento, quando se trata de uma trajetória dominante em algum processo físico. Por exemplo, a trajetória do meson ρ é bem conhecida na região de espalhamento porque no processo $\pi-p \rightarrow \pi^0 n$ os números quânticos do canal cruzado admitem só esta trajetória, e a

determinação de seus parâmetros é favorecida ainda mais pela característica da distribuição angular do processo de ter um "dip" em $t \approx -0,6 \text{ (GeV)}^2$. A trajetória é determinada pelo espalhamento (best-fit linear para $|t| < 1 \text{ (GeV)}^2$) como $a(t) = 0,57 + 0,91t$. (5.1)

O "dip" aparece devido ao anulamento da amplitude de spin-flip, que é proporcional à trajetória do ρ . A trajetória deve então se anular para $t \approx 0,6$, o que é verificado e confirma a determinação dos parâmetros.

Além de ser este um caso excepcional, resta a região das ressonâncias, que deve fornecer as informações sobre as trajetórias para s abaixo do limiar físico. Como já mencionado anteriormente, os dados sobre a localização e largura das ressonâncias mesônicas não são conhecidos com precisão suficiente em virtude do fato de que as ressonâncias mesônicas são estudadas através de processos de produção, e não de formação, isto é, aparecem em estados finais contendo também outras partículas, ao contrário das ressonâncias bariônicas, que podem aparecer como único produto final de reações. A assimetria é, claramente, causada pelo fato de que os alvos que permitem medidas de precisão nos aceleradores usuais são prótons, a conservação do número bariônico exigindo, então, que o estado final tenha número bariônico 1, se o feixe incidente for de mésons. Uma possibilidade de estudar melhor ressonâncias mesônicas é através do uso dos anéis de acumulação, que permitem a colisão e^-e^+ , de número bariônico zero, e permitirão futuramente colisões $p\bar{p}$ a enormes energias no centro-de-massa. Experiências nesse sentido estão sendo realizadas e os resultados serão de grande valor para uma implementação mais precisa do nosso programa.

Alguns resultados muito gerais podem ser, porém, obtidos

através de uma análise das propriedades de analiticidade das trajetórias e sob hipóteses fracas sobre comportamentos assintóticos.

Supõe-se que as trajetórias mesônicas satisfaçam as seguintes propriedades:

- (a) $\alpha(s)$ é analítica no plano complexo s cortado ao longo do eixo real positivo a partir do threshold físico e contínua no eixo real exceto eventualmente em uma região finita.
- (b) $\alpha(s)$ é real analítica, i.e., satisfaz ao princípio de Schwartz, $\alpha^*(s) = \alpha(s^*)$.
- (c) Em qualquer direção do semiplano superior, na folha física, $\alpha(s)$ cresce mais lentamente do que uma exponencial.
- (d)
$$\lim_{s \rightarrow \pm \infty} \frac{\alpha(s)}{(-s)^\epsilon} = C_{\pm}$$

sendo ϵ uma potência real e positiva. Esta condição pode ser generalizada pela inclusão de termos do tipo $(\ln(-s))^\beta (\ln \ln(-s))^\gamma \dots$ sem que se alterem os resultados essenciais.

Estas são precisamente as condições de validade do teorema de Phragmén-Lindelöff no semiplano superior para a função $\frac{\alpha(s)}{(-s)^\epsilon}$. O teorema então afirma que $C_+ = C_-$.

As condições (a) e (b) são verdadeiras para trajetórias mesônicas exceto em condições muito particulares de "colisão" de singularidades⁽²³⁾. A rigor não há razão, para que $\alpha(s)$ não possa crescer exponencialmente em uma região restrita do plano s , violando a condição (c). Intuitivamente, porém, se espera que uma mudança de comportamento assintótico esteja associada à presença de uma singularidade, o que é excluído por (a). Os vários modelos que se

conhecem estão de acordo com (c). Finalmente, (d) elimina oscilações no infinito, das quais não há nenhum sinal nos resultados experimentais. É importante notar ainda que não se introduziu nada de novo em relação às hipóteses necessárias para que a trajetória satisfaça uma relação de dispersão. Na verdade o conjunto de hipóteses acima permite que se escreva uma relação de dispersão com um número mínimo de subtrações arbitrário. A especificação de ϵ em (d) fixaria este número.

Vamos agora usar o resultado fornecido pelo teorema de Phagmên-Lindelöff para obter informações sobre as trajetórias. Mais detalhes sobre o teorema no Apêndice 2.

Por causa de (a), (b) e (d),

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\alpha(s)}{(-s)^\epsilon} = C$$

com $C = C^- = C^+$, real. Como o teorema afirma que o limite para $s \rightarrow +\infty$ é o mesmo, resulta que

$$\alpha(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{-i\pi\epsilon} s^\epsilon \quad (5.1)$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{Re} \alpha(s) \sim C \cos(\pi\epsilon) s^\epsilon \quad (5.2)$$

$$\operatorname{Im} \alpha(s) \sim -C \sin(\pi\epsilon) s^\epsilon \quad (5.3)$$

Para a largura, usando (1.1), se obtém

$$\Gamma(s) = - \frac{\operatorname{tg}(\pi\epsilon)}{\epsilon} \sqrt{s} \quad (5.4)$$

Isto é, qualquer comportamento do tipo potência, exceto $\epsilon = 1$ (ϵ inteiro, em geral), dá origem a uma largura que cresce

como $\sqrt{s}$, ou seja, linearmente com a massa das ressonâncias interpoladas. Para $\epsilon = 1$ temos o resultado conhecido de que as ressonâncias têm largura zero, já mencionado acima.

O resultado pode ainda ser generalizado pela inclusão de termos logarítmicos. Por exemplo, suponhamos que, quando $s \rightarrow -\infty$,

$$\alpha(s) \approx (-s)^\epsilon [\ln(-s)]^\eta [\ln \ln(-s)]^\mu \quad (5.5)$$

Um cálculo perfeitamente análogo mostra então que

$$\Gamma(s) = - \frac{\text{tg}(\pi\epsilon)}{\epsilon} \sqrt{s} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln s}\right) \right], \quad (5.6)$$

obtendo-se o mesmo comportamento assintótico. Porque fatores logarítmicos são dificilmente perceptíveis a não ser em intervalos muito amplos de energia, vamos restringir nossa análise às equações (5.2), (5.3) e (5.4). Os resultados são, porém, gerais. Um caso importante e que foge à regra é $\epsilon' = \frac{1}{2}$ (trajetórias parabólicas) que será tratado separadamente.

Como a largura deve ser positiva, (5.4) restringe ϵ aos intervalos

$$\frac{1}{2} < \epsilon < 1 ; \quad \frac{3}{2} < \epsilon < 2 ; \quad \text{etc}$$

C deve ser negativo porque as trajetórias são simétricas em relação à origem. Assim, a condição de unitariedade que exige $\text{Im}\alpha(s) > 0$ acima do limiar restringe adicionalmente ϵ a estar nos intervalos

$$\frac{1}{2} < \epsilon < 1 ; \quad \frac{5}{2} < \epsilon < 3 \quad \text{etc} \quad (5.7)$$

Note-se ainda que a condição (3.8), que essencialmente é

a responsável pelo comportamento no threshold e por outras características interessantes da solução do capítulo 3, está exatamente expressa em (5.4), dependendo assim apenas de características assintóticas.

O resultado mais importante deste capítulo é a equação (5.4), que afirma que, qualquer que seja o comportamento assintótico da trajetória compatível com as hipóteses (a), (b), (c) e (d), o comportamento assintótico da largura é do tipo $\sqrt{s}$. Como o programa de construir trajetórias pelo uso da equação integro-diferencial (3.4) depende das mesmas propriedades, (5.4) é uma condição necessária para que (3.4) tenha solução. Isto significa que um modelo de trajetória, assim calculada, difere de outro apenas pelo comportamento da largura $\Gamma(s)$ para baixos valores de s , que é exatamente onde podemos ter resultados experimentais. Além disso as características da solução que podem ser obtidas apenas por considerações assintóticas (Eq.(5.2), (5.3), (5.4) (5.7)) devem ser comuns a todas as soluções provenientes de diversas escolhas de $\Gamma(s)$. Em outras palavras, a eq.(3.4) é um processo de prolongar analiticamente as soluções para baixos valores de s , quando $\Gamma(s)$ é dada.

Finalmente vamos analisar um caso de interesse especial: as trajetórias de comportamento assintótico do tipo $\sqrt{s}$.

Anteriormente foram discutidos argumentos em favor de trajetórias muito próximas às lineares, tendo-se visto também que os valores de ϵ próximos a 1 são os que fazem com que o modelo apresentado no capítulo 3 apresente características interessantes do ponto de vista tanto experimental quanto de consistência interna.

Por outro lado, uma análise dos resultados experimentais

a altas energias sugere que os espalhamentos de duas partículas em duas partículas são fortemente periféricos, isto é, a seção de choque é praticamente devida unicamente a colisões com parâmetro de impacto muito grande, os parâmetros de impacto menores sendo responsáveis pelos processos inelásticos^(24,25). Uma boa aproximação para o elástico é, então, um parâmetro de impacto - fixo⁽²⁶⁾. Neste caso a aproximação semiclássica prevê

$$J + \frac{1}{2} \approx k R \approx R \sqrt{s} \quad (5.8)$$

J sendo o momento angular e R o alcance da interação, que é o máximo parâmetro de impacto. (5.8) é uma trajetória parabólica, sugerida assim pela aproximação semi-clássica para grandes momentos angulares.

Usando a eq.(5.2) vemos que as trajetórias parabólicas têm a desagradável característica de terem a parte real assintoticamente nula, com todas as suas derivadas. Isto significa que a analiticidade impõe um alcance nulo às forças que geram uma trajetória parabólica, ao menos no sentido usado agora. Existe, porém, uma possibilidade de escape a este resultado incômodo.

Existirão trajetórias com um comportamento, como um todo, diferente do parabólico, mas cuja parte real, que corresponde ao momento angular da eq.(5.8), se comporte com $\sqrt{s}$ para grande s ?

Considere-se uma trajetória tal que, para $s \rightarrow -\infty$,

$$\alpha(s) \approx -A\sqrt{-s} \ln(-s) \quad (5.9)$$

Para s grande e positivo ter-se-á então

$$\operatorname{Re} \alpha(s) = \pi A \sqrt{s} \quad (5.10)$$

$$\operatorname{Im} \alpha(s) = A \sqrt{s} \ln s \quad (5.11)$$

porque, pelo teorema de Phragmén-Lindelöff, (5.9) determina a trajetória nesta região como sendo

$$\alpha(s) = iA\sqrt{s} (\ln s - i\pi) \quad (5.12)$$

Segue então que

$$\Gamma(s) = \frac{2}{\pi} \sqrt{s} \ln s \quad (5.13)$$

ou seja, obtem-se um comportamento assintótico da largura diferente do resultado geral (5.6). Este caso é, contudo, suficientemente patológico para não ser de nenhuma utilidade. De fato, é impossível impôr a condição $\operatorname{Re} \alpha(s) \gg \operatorname{Im} \alpha(s)$ para grandes valores de s , que é importante para a interpretação de um polo de Regge como uma ressonância. Consequentemente, a relação (5.8) não deve ser interpretada como o comportamento de uma trajetória isolada mas de uma família de trajetórias cujos comportamentos dão origem a um momento angular efetivo da forma (5.8).

6 - Consequências várias.

Os resultados obtidos, e, em particular (5.4), são importantes para a discussão de modelos baseados na "teoria qualitativa" de Harari⁽²⁶⁾ para processos do tipo

$$a+b \rightarrow c+d$$

não difrativos, isto é, que se realizam com a troca de um objeto com números quânticos diferentes dos do vácuo. Numa síntese de muitos trabalhos que combinou as características mais importantes dos modelos duais, dos modelos do tipo eikonal⁽²⁷⁾ e dos modelos a quarks⁽²⁸⁾ Harari propôs um esquema que descreve muito bem a estrutura em t da amplitude de espalhamento, com uma amplitude tal que

$$\text{Im}f(s,t) = \beta(s) " J_{|\Delta\lambda|}(R\sqrt{-t}) " \quad (6.1)$$

onde " $J_{|\Delta\lambda|}(z)$ " é uma função que tem os mesmos zeros, máximos e mínimos que a função $J_{|\Delta\lambda|}(z) \cdot \Delta\lambda$ é a diferença de helicidades $\equiv \lambda_c - \lambda_d - \lambda_a + \lambda_b$; R é um "raio de interação" da ordem de 1 fm e $\beta(s)$ é assintoticamente constante. O ponto essencial na discussão a seguir é que (6.1) dá uma estrutura em t independente de s , um fato em bom acordo com a experiência.

Para construir explicitamente uma amplitude do tipo (6.1), Ingraham⁽²⁹⁾ supôs que a parte imaginária da amplitude - fôsse bem representada por uma superposição de ressonâncias no canal s , dentro do espírito da dualidade. Supondo, adicionalmente, que as ressonâncias fizessem parte de uma recorrência de Regge, isto é, que fôsssem interpoladas por uma só trajetória, obteve uma amplitude com a forma

$$\text{Im}f \approx \beta(s) J_0 \left[\left(\alpha_R + \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{-t}}{k} \right] \quad (6.2)$$

onde a trajetória é $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ e k é o módulo do momento das partículas no sistema de centro-de-massa, tendo sido a análise restrita a partículas sem spin e de massas iguais. Para que se obtenha uma estrutura em t independente de s é necessário que

$$\alpha_R + \frac{1}{2} \approx kR$$

isto é, que a trajetória seja parabólica. Por outro lado, para que $\beta(s)$ tenha o comportamento adequado (assintoticamente constante), Ingraham tomou $\Gamma(s) \approx \sqrt{s}$. Da discussão feita no final do capítulo anterior se conclui que essas escolhas são incompatíveis. Para que se possa ter um raio de interação finito, é necessário que a largura cresça como $\sqrt{s} \ln s$. Mas então as aproximações feitas por Ingraham não são verdadeiras e a eq. (6.2) não pode ser obtida⁽³⁰⁾. Conseqüentemente, as ressonâncias não podem estar dispostas sobre uma única trajetória, e a realização da amplitude de Harari através da construção de Ingraham é necessariamente mais complicada.

Outro resultado interessante é a conexão entre (5.4) e o teorema de Brower and Harte^(31,32).

Consideremos uma ressonância de grande spin, massa M e largura Γ , localizada na trajetória de Regge dominante para um certo processo, de maneira que o seu spin é dado por $\text{Re} \alpha_0(M^2)$, $\alpha_0(s)$ sendo a trajetória dominante. A ressonância pode decair num canal de n_f partículas, localizadas em N trajetórias, α_p , de modo que a v -ésima partícula sobre f -ésima trajetória tenha a massa m_v^f , largura Γ_v^f e spin $\text{Re} \alpha_f (m_v^f)^2$. O teorema, que provém de uma análise da cinemática do decaimento pode ser assim

enunciado: sejam

$$\operatorname{Re} \alpha_0(s) \sim s^\epsilon$$

$$\operatorname{Re} \alpha_f(s) \sim s^{\eta_f}$$

com $\eta_f < \epsilon$, $f = (1, \dots, N)$.

Se $\epsilon > \frac{1}{2}$ uma das seguintes condições deve ser violada quando $M \rightarrow \infty$

$$(i) \quad \frac{L}{\operatorname{Re} \alpha_0(M^2)} \rightarrow 0$$

(L é o momento angular orbital total do canal de decaimento)

$$(ii) \quad \frac{\Gamma + \sum_{f=1}^N \sum_{\nu=1}^{\eta_f}}{M} \rightarrow 0$$

$$(iii) \quad \frac{m_v^f}{M} < 1$$

Supondo verificada a última, que só pode ser violada - em condições muito particulares, o teorema afirma que uma das duas primeiras deve ser falsa. No caso de trajetórias retilíneas a largura é zero, e temos (ii) verdadeira, logo (i) é falsa e uma ressonância de alto spin não pode decair em um canal de baixo L. Para as trajetórias que satisfazem (5.7) é interessante verificar que Γ cresce da maneira mais lenta possível compatível com o decaimento em baixo L, isto é, a largura cresce apenas o suficiente para garantir a falsidade de (ii).

APÊNDICE I

NOTAÇÃO

Neste trabalho se estudam amplitudes de scattering relativas a processos em que há duas partículas incidentes e duas emergentes. Simbolicamente, temos um diagrama

onde todas as partículas são representadas como incidentes, a troca de $p_k \leftrightarrow -p_k$ levando partícula em antipartícula. Sabe-se que um processo desse tipo é descrito por uma (ou mais, dependendo dos spins das partículas) amplitude função de dois escalares independentes. Contudo, é vantajoso introduzir três escalares não-independentes que dão ao problema um máximo de simetria. São as chamadas variáveis de Mandelstam. Para simplificar, suponhamos que todas as partículas tenham massa μ .

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$t = (p_1 + p_3)^2$$

$$u = (p_1 + p_4)^2$$

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = \mu^2$$

Considere o processo em que 1 e 2 são incidentes e $\bar{3}$ e $\bar{4}$ são emergentes. No sistema de centro-de-massa temos

$$s = (p_1^0 + p_2^0)^2 = W^2 \quad (\text{"energia"})$$

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta) \quad (\text{"momento transferido"})$$

$$u = -2k^2(1 + \cos\theta)$$

s é então o quadrado da energia no sistema de centro de massa. O processo $1+2 \rightarrow \bar{3}+\bar{4}$ é chamado o canal s. O canal t é o correspondente ao processo $1+3 \rightarrow \bar{2}+\bar{4}$ e no sistema de centro de massa t é o quadrado da energia. Análogamente para u. Os canais t e u são chamados "canais cruzados" do "canal direto" s, quando se estuda o processo $1+2 \rightarrow \bar{3}+\bar{4}$.

APÊNDICE II

ANALITICIDADE DAS TRAJETÓRIAS DE REGGE.

Como se pode introduzir um momento angular complexo de uma maneira que conduza a resultados fisicamente interessantes ?

Seja $F(s,t)$ a amplitude de espalhamento e

$$F(s,t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) F_l(s) P_l(\cos\theta) \quad (1)$$

a expansão em ondas parciais. Queremos definir uma função $F(s,\lambda)$ que interpole as amplitudes de ondas parciais físicas, isto é, tal que $F(s,l) = F_l(s)$ para l inteiro. A interpolação $F(s,\lambda)$ deve ser única e refletir as propriedades do sistema físico. O instrumento matemático que permite demonstrar a unicidade do prolongamento analítico é o teorema de Carlson⁽³³⁾, que diz que, se existir uma função $F(s,\lambda)$ tal que

$$F(s,l) = F_l(s) \quad l > N$$

e analítica para $\text{Re}\lambda > N$, com

$$|F(s,\lambda)| < 0 \quad (e^{a|\text{Im}\lambda| + b\text{Re}\lambda}) \quad (2)$$

onde $a < \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$, e b são constantes reais.

O prolongamento analítico que satisfaz às condições do teorema foi descoberto por Gribov e Froissart⁽³⁴⁾ e é realizado através de uma relação de dispersão a s fixo para $F(s,t)$. Tem-se

$$F(s,t) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(s) t^n + \frac{t^N}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{A_t(s,t')}{t'^N (t'-t)} +$$

$$+ \frac{u^N}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{A_u(s,u')}{u'^N (u'-u)} \quad (3)$$

A_t e A_u são as partes absorptivas de $F(s,t)$ nos canais t e u respectivamente, incluindo eventuais polos. O número N é suficientemente grande para garantir a convergência das integrais e ser compatível com o comportamento assintótico de $F(s,t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

A amplitude de onda parcial l é definida

$$F_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dc P_l(c) F(s, t(c)) \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) verifica-se que, para $l > N$, o polinômio em t , bem como as subtrações das integrais não contribuem para a expressão final, que é

$$F_l(s) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv \frac{1}{2v^2(s)} Q_l \left[1 + \frac{v}{2v^2(s)} \right] \left[A_t(s,v) + (-1)^l A_u(s,v) \right] \quad (5)$$

tendo sido usadas as relações

$$Q_l(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dc P_l(c) \frac{1}{z-c} \quad (6)$$

$$Q_l(-z) = -(-1)^l Q_l(z)$$

$$\text{e } v_0 \leq \min(t_0, u_0).$$

A expressão (5) é convergente para $l > N$ e só não obedece ao comportamento no infinito requerido pelo teorema de Carlson (eq. (2)) por causa do termo $(-1)^l$. A solução então é a seguinte : introduzem-se as funções

$$F_{\pm}(s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} dv \frac{1}{2v^2} Q_{\lambda} \left(1 + \frac{v}{2v^2} \right) A_{\pm}(s, v) \quad (7)$$

onde

$$A_{\pm}(s, v) = A_t(s, v) \pm A_u(s, v) \quad (8)$$

Para $l > N$ tem-se, então,

$$F_{\pm}(s, \lambda=1) = F_1(s) \quad \text{para} \quad l \begin{cases} \text{par} \\ \text{ímpar} \end{cases} \quad (9)$$

Pode-se mostrar que não existe uma função analítica $F(s, \lambda)$ que interpola todas as ondas parciais (pares e ímpares) com $l > N$ a não ser que $F_+ = F_-$, o que implica $A_u=0$, ou seja, não há forças de exchange. Esta situação é conhecida como "exchange degeneracy", ou degenerescência de troca.

É de especial interesse para nós o conhecimento das singularidades de $F_{\pm}(s, \lambda)$ no plano s . Uma análise cuidadosa da expressão (7) mostra que $F_{\pm}(s, \lambda)$, como $F_1(s)$, possui dois cortes, um para $s > 4\mu^2$ e outro para $s < -8\mu^2$, para partículas externas de massa μ , provenientes dos cortes de $A_{\pm}(s, v)$ em

$$s > 4\mu^2 + \frac{4\mu^4}{v-4\mu^2} \quad (10)$$

$$s < -v - \frac{4\mu^4}{v-4\mu^2} \quad (11)$$

Suponhamos agora que $F_{\pm}(s, \lambda)$ tenha um polo para λ diferente de um inteiro negativo. Seja $\lambda = \alpha(s)$ a posição do polo, chamado polo de Regge. Nosso objetivo é determinar as singularidades de $\alpha(s)$, chamada a trajetória de Regge⁽³⁶⁾.

Escrevendo-se a representação (7) na forma

$$F_{\pm}(s, \lambda) = E_{\pm}(s, \lambda) + D_{\pm}(s, \lambda) \quad (12)$$

onde

$$D_{\pm}(s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{a^2}^{\infty} dv \frac{1}{2q^2} Q_{\lambda} \left(1 + \frac{v}{2q^2}\right) A_{\pm}(s, v) \quad (13)$$

e $E_{\pm}$ é definido pela integral correspondente de v_0 a a^2 , vê-se - que $E_{\pm}(s, \lambda)$ é meromórfica no plano λ com polos em valores inteiros negativos de λ . Todas as outras singularidades, e em particular os polos de Regge, são singularidades de $D_{\pm}$. Como a^2 é arbitrário, desde que finito, essas singularidades dependem apenas do comportamento assintótico de $A_{\pm}(s, v)$ quando $v \rightarrow \infty$, isto é, do comportamento a altas energias das partes absorptivas no canal t e u .

As posições dos polos podem ser obtidas como soluções da equação

$$D^{-1}(s, \alpha(s)) = 0 \quad (14)$$

Se $D^{-1}(s, \lambda)$ for uma função regular na vizinhança de

um ponto $(s, \lambda = \alpha(s))$ e se

$$\left[\frac{\partial D^{-1}(s, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda = \alpha(s)} \neq 0 \quad (15)$$

o teorema da função implícita garante que $\alpha(s)$ é também uma função regular de s . Assim, esperam-se singularidades da função $\alpha(s)$ nos pontos em que $D^{-1}(s, \lambda)$ for singular ou em que a derivada (15) se anular. Usando-se (13), (10) e (11) vê-se que $D(s, \lambda)$ tem um corte para $s > 4\mu^2$ e que os cortes à esquerda mais próximos começam em

$$s = -a^2 - \frac{4\mu^2}{a^2 - 4\mu^2} \quad (16)$$

$$s = 4\mu^2 - a^2$$

Como esses pontos de ramificação tendem a $-\infty$ quando a^2 cresce, e a^2 pode ser tomado arbitrariamente grande, desde que finito, podemos ignorá-los.

Assim, as trajetórias de Regge não herdam os pontos de ramificação à esquerda que estão presentes em $F(s, \lambda)$.

É ainda importante lembrar que novas singularidades podem aparecer quando a derivada de D^{-1} se anular. Suponhamos que duas trajetórias de Regge se cruzem em um ponto s_0 . Haverá então aí um zero duplo, e conseqüentemente a anulação da derivada. Então a interseção de duas trajetórias (a "colisão" de duas singularidades) pode gerar um novo ponto de ramificação. Um exemplo importante ocorre no caso de trajetórias fermiônicas, quando a simetria de Mac Dowell⁽³⁷⁾ gera a conspiração de Gribov⁽³⁸⁾, que obriga trajetórias de paridades opostas a se cruzarem na origem do -

plano complexo $\sqrt{s}$. Esta é a razão pela qual as demonstrações que fizemos não se aplicam a trajetórias fermiônicas, exceto em condições especiais.

REFERÊNCIAS

- (1) T.Regge: Nuovo Cimento 18, 947 (1960).
- (2) G.Chew, S.Frautschi: Phys.Rev.Letters 5,580 (1960).
- (3) T.Regge, V.de Alfaro: Potential Scattering (North-Holland-1965).
- (4) N.G.Antoniou: Preprint de Trieste IC/68/103 (não publicado).
- (5) A.Degasperis, E.Predazzi: Nuovo Cimento 65A, 764 (1970).
- (6) H.Fleming, E.Predazzi: Lett.Nuovo Cimento 4, 556 (1970).
- (7) H.Fleming, T.Sawada: Lett.Nuovo Cimento I, 1045 (1971).
- (8) M.Froissart: Theoretical Physics (Vienna,1963),p.379.
- (9) R.Arnold: Phys.Rev.Lett. 14, 657 (1965).
- (10) M.Jacob: Duality in Strong Interaction Physics-Schladming (1969).
- (11) E.Predazzi: Boulder Lectures (1969).
- (12) V.D.Barger, D.B.Cline: Phenomenological Theories of High Energy Scattering - Benjamin (1969).
- (13) Ver figura 2 de S.Pinsky: Phys.Rev.Lett.21, 1776 (1968).
- (14) F.Cerulus, A.Martin: Phys.Lett. 8,80 (1964).
- (15) J.Orear: Phys.Rev.Lett. 12, 112 (1964); Phys.Rev.Lett. 13,190 (1964).
- (16) H.Fleming, A.Giovannini, E.Predazzi: Ann.of Physics 54, 62 (1969).

- (17) N.N.Khuri: Phys.Rev.Lett. 18, 1094 (1967); M.Kugler: Phys.Rev. Lett. 21,570 (1968); R.W.Childers: Phys.Rev.Lett.21 868 (1968); L.Corgnier, A.D'Adda, M.Prastaro: Nuovo Cimento 57A,881 (1968); R.N.Mohapatra: Phys.Rev.Lett. 22,735 (1969); Chung-I Tan and Jiunn-Ming Wang:Phys. Rev.Lett. 22, 1152 (1969).
- (18) S.Y.Chu, G.Epstein, P.Kaus, R.C.Slansky, F.Zachariasen: Phys. Rev. 175,2098 (1968).
- (19) S.Mandelstam: Brandeis Lectures (1970). MIT press.
- (20) A.Erdélyi (ed) : Tables of Integral Transforms Vol.2, p.249(28). New York, 1954.
- (21) A.O.Barnt, D.Zwanziger: Phys.Rev.127,974 (1962).
- (22) N.I.Mushkhelishvili: Singular Integral Equations, P.Noordhoff Ltd., Holland (1963) Part V (Chapter 17).
- (23) Veja apêndice II. V.Tb.P.D.B.Collins,E.J.Squires: Regge Poles in Particle Physics (S pringer - 1968), pg. 70 e seguintes.
- (24) T.T.Wu, C.N.Yang: Phys.Rev.137 B 708 (1965).
- (25) H.Fleming, A.Giovannini; E.Predazzi: ref. (16).
- (26) H.Harari: SLAC - PUB - 821 (1970)
SLAC - PUB - 837 (1970)
- (27) R.J.Glauber: Lectures in theoretical physics Vol.1 (Wiley, New York, 1959).
- (28) J.J.Kokkedee: The Quark Model - Benjamin (1969).
- (29) R.L.Ingraham: Connection of "Parabolic" Mass and Width Trajectories with High Energy Scattering preprint de New Mexico State University (1971).

- (30) H.Fleming: Analyticity and Dual Absorptive Models.
- preprint do Instituto de Física - U.S.P. (1971).
- (31) R.C.Brower, J.Harte: Phys.Rev. 164, 1841 (1967).
- (32) D.Sivers: Phys.Rev. (1971).
- (33) E.C.Titchmarsh: The Theory of Functions, 2nd edition. Oxford
(1939), pg. 185.
- (34) V.N.Gribov: JETP 14, 1395 (1962).
- (35) T.Regge: Nuovo Cimento 14, 951 (1959).
Nuovo Cimento 18, 947 (1960).
- (36) R.Oehme: Strong Interaction and High Energy Physics, R.G.
Moorhouse (ed.) - Oliver and Boyd (1964).
- (37) S.W.Mac Dowell: Phys.Rev. 116, 774 (1959).
- (38) V.N.Gribov: JETP 16, 1080 (1963) . Veja também referência (39).
- (39) Y.Hara: Phys.Rev.136, 507 (1964).