

**DINÂMICA INFLACIONÁRIA NA
REPRESENTAÇÃO FUNCIONAL DE SCHRÖDINGER**

SBI-IFUSP



305M810T1604

OSCAR JOSÉ PINTO ÉBOLI

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo
para o concurso de professor livre-docente
no Departamento de Física Matemática



São Paulo

1989

RESUMO

A análise dos diversos modelos cosmológicos requer um estudo detalhado da evolução temporal do universo primordial. Neste trabalho obtemos um conjunto coerente de equações acopladas para a matéria e a gravitação na aproximação Gaussiana. O uso de um princípio variacional permite-nos obter efeitos quânticos não perturbativos, tanto para estados puros como de mistura.

ABSTRACT

Establishing the validity of the different cosmological scenarios requires a detailed time evolution of the early universe. In this work, we obtain, in the Gaussian approximation, a set of equations governing the dynamics of matter and gravitation. The use of a variational principle allows us to keep some of the non-perturbative effects for pure and mixed states.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os que para tornar este livro possível, também ajudaram a superar as diferentes fases de escrita, desde a primeira ideia, passando pelas sugestões de colaborações e amigos: Dr. Carlos, Sr. Sérgio, Raul, Manoel, Sérgio, Domingos, Angela, Dionísio, Lúcia e Stella. Também agradeço a todos os que me ajudaram pelo caminho a percorrer.

Muito obrigado a todos os que me ajudaram a superar as diferentes fases de escrita, desde a primeira ideia, passando pelas sugestões de colaborações e amigos: Dr. Carlos, Sr. Sérgio, Raul, Manoel, Sérgio, Domingos, Angela, Dionísio, Lúcia e Stella. Também agradeço a todos os que me ajudaram pelo caminho a percorrer.

Many thanks are due to the friends who helped me in preparing this manuscript.

Muito obrigado a todos os que me ajudaram a superar as diferentes fases de escrita, desde a primeira ideia, passando pelas sugestões de colaborações e amigos: Dr. Carlos, Sr. Sérgio, Raul, Manoel, Sérgio, Domingos, Angela, Dionísio, Lúcia e Stella. Também agradeço a todos os que me ajudaram pelo caminho a percorrer.

Gostaria também de agradecer a todos os que me ajudaram a superar as diferentes fases de escrita, desde a primeira ideia, passando pelas sugestões de colaborações e amigos: Dr. Carlos, Sr. Sérgio, Raul, Manoel, Sérgio, Domingos, Angela, Dionísio, Lúcia e Stella. Também agradeço a todos os que me ajudaram pelo caminho a percorrer.

Para minhas quatro garotas: Lúcia, Stella, Mônica e Juliana.

AGRADECIMENTOS

Aproveito a ocasião para tornar pública minha gratidão a todos aqueles que participaram das diferentes fases da minha vida profissional. Em especial gostaria de destacar os colaboradores e amigos Gil, Adriano, So-Young, Roman, Marcelo, Sérgio, Dominique, Angela, Dionísio, Escobar, Sami, Milton, Juan, Ivan, Simão, Manda, Adilson e Aragão.

Gostaria de agradecer especialmente às minhas quatro garotas (Lúcia, Stella, Mônica e Juliana) pelo carinho e paciência.

Many thanks are due to the Emeritus TEX prof. Roger Gilson for the very needed help in preparing this manuscript.

Milton obrigado pela leitura desta durante o parto.

Gostaria também de agradecer ao CNPq pelo suporte financeiro.

ÍNDICE

Capítulo I

Introdução	1
Referências	4

Capítulo II

Representação Funcional de Schrödinger	5
II.A Generalidades	5
II.B Quantização do campo escalar num espaço de Robertson–Walker	9
II.C Estados de mistura	17
II.D Princípios variacionais	22
Referências	29

Capítulo III

Aplicações do princípio variacional para estados de mistura	30
III.A Oscilador anarmônico	30
III.B Teoria $\lambda\Phi^4$	42
Referências	50

Capítulo IV

Renormalização do tensor energia–momento	51
IV.A O tensor energia–momento	51
IV.B Teoria livre	55
IV.C Teoria interagente na aproximação Gaussiana	59
Referências	65

Capítulo V

Conclusões	66
-------------------------	----

Apêndice A

Convenções e fórmulas geométricas	67
--	----

Apêndice B

Expansão adiabática até quarta ordem de Ω_c	70
--	----

"With method and logic one can accomplish anything"

Hercule Poirot

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Para que possamos estabelecer a validade dos diversos modelos cosmológicos devemos ser capazes de analisar a evolução temporal do universo primordial. Por exemplo, a dinâmica da cosmologia inflacionária depende fortemente da evolução de um campo escalar antes, durante e após o período inflacionário¹. Um outro exemplo é o aparecimento dos barbantes cósmicos (*cosmic strings*), que poderiam ter sido formados após as transições de fase experimentadas pelo universo².

A formulação tradicional da Teoria Quântica de Campos em termos de funções de Green causais não é de todo apropriada para o estudo de problemas dependentes do tempo nos quais uma condição inicial é fornecida. Funções de Green contêm toda a informação necessária para determinar probabilidades e taxas de transição de sistemas para os quais a condição inicial é um dado supérfluo. Todavia, a análise da evolução temporal de um sistema é melhor tratada na representação funcional de Schrödinger, onde a condição inicial consiste da especificação de um estado puro ou de mistura.

A representação funcional de Schrödinger é bem conhecida para campos bosônicos³: o formalismo nada mais é do que a generalização da Mecânica Quântica usual para um sistema com infinitos graus de liberdade, o qual constitui o campo. De imediato podemos ver que este formalismo permite-nos utilizar a nossa intuição física (e também a matemática) que adquirimos com o estudo da Mecânica Quântica. Contudo, a representação funcional de Schrödinger não é tão utilizada quanto a de Heisenberg porque o tratamento de infinitos e sua renormalização são melhor abordados neste último formalismo. Todavia, recentemente, a renormalizabilidade da representação de Schrödinger foi demonstrada⁴⁻⁶ tanto para problemas estáticos quanto para dependentes do tempo.

Usualmente a análise da evolução temporal do universo é obtida através das equações clássicas de movimento para a matéria e a gravitação⁷. Efeitos quânticos e térmicos são em geral negligenciados ou no máximo introduzidos de maneira *ad-hoc* através da substituição do potencial clássico pelo potencial efetivo dependente da temperatura (calculado a 1 *loop*), onde a temperatura é tomada como sendo dependente do tempo. Não constitui um exagero afirmar que não existe nenhum tratamento quântico do problema que seja desenvolvido metodicamente. O objetivo deste trabalho é suprir esta lacuna e desenvolver o arcaboiço teórico necessário para a análise da evolução temporal do universo primordial.

O capítulo II apresenta os fatos básicos para a compreensão da representação funcional de Schrödinger para campos bosônicos e está organizado da seguinte maneira: A seção II.A contém uma rápida introdução ao assunto enquanto que a seção II.B é dedicada à aplicação desta representação à quantização de um campo escalar livre num espaço de Robertson–Walker. Nesta seção discutimos o funcional de onda do vácuo e sua relação com o procedimento usual de quantização na representação de Heisenberg. O formalismo para a descrição de estados de mistura⁸ na representação funcional de Schrödinger encontra-se na seção II.C. Uma vez que a classe de problemas exatamente solúveis é muito restrita, estudaremos na seção II.D métodos variacionais⁸, os quais podem ser aplicados para a obtenção de informações não perturbativas de sistemas não lineares.

No capítulo III aplicamos os princípios variacionais da seção II.D ao oscilador anarmônico bem como à teoria $\lambda\Phi^4$ num espaço de Robertson–Walker plano. Esta última aplicação fornece como resultado as equações de movimento para a matéria na aproximação Gaussiana⁸. Apesar destas equações serem apenas uma aproximação para o problema quântico completo, o uso do princípio variacional permite-nos reter algumas não linearidades do problema.

O capítulo IV é consagrado ao estudo da renormalização do tensor energia-momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ tanto para a teoria livre bem como para a interagente. O cálculo de

um tensor energia–momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle_R$ finito e renormalizado envolve muitas sutilezas. Tradicionalmente, isto é feito de maneira covariante para teorias livres através do uso das séries de DeWitt–Schwinger, juntamente com regularização dimensional^{9,10}. Neste trabalho construímos, na aproximação Gaussiana, um tensor energia–momento renormalizado e finito empregando a representação funcional de Schrödinger. Apesar deste formalismo não ser manifestamente covariante, fomos capazes de expressar $\langle T_{\mu\nu} \rangle_R$ em termos de tensores geométricos e com isso demonstrar a covariância dos nossos resultados.

Considerando-se as equações de movimento para a matéria obtidas na seção III.B e a equação de Einstein semi-clássica $G_{\mu\nu} = -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle_R$, possuímos um conjunto de equações acopladas e finitas para a dinâmica da matéria e gravitação¹¹. Estas equações podem ser usadas para analisar a evolução temporal do universo primordial, a estabilidade do espaço de deSitter, *etc.*

Os apêndices contêm a nossa notação para a métrica de um espaço de Robertson–Walker plano, os tensores geométricos e também a expansão adiabática de quarta ordem. Em todo texto utilizamos $\hbar = c = 1$.

REFERÊNCIAS

1. Veja para uma revisão L. Abbott e S.-Y. Pi, *Inflationary Cosmology* (World Scientific, Singapore, 1986).
2. A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **121** (1985) 263.
3. Veja por exemplo, R. Jackiw na *V Jorge André Swieca Summer School*, O. Éboli, M. Gomes e A. Santoro editores (World Scientific, Singapore, to appear).
4. K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B190** (1983) 1; M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B254** (1985) 52.
5. S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 3128.
6. F. Cooper e E. Mattola, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 3114.
7. Veja por exemplo A. Albrecht, R. Brandenberger e R. Matzner, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 429 e referências aí contidas.
8. O. Éboli, R. Jackiw e S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3557.
9. B. S. DeWitt, *Phys. Rep.* **19** (1975) 295; J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 914.
10. N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982), e referências aí contidas.
11. O. Éboli, S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Renormalizability of the Functional Schrödinger Picture in Robertson-Walker Space-Time*. preprint MIT-CTP # 1638, novembro de 1988, to appear in *Ann. Phys.*

CAPÍTULO II

REPRESENTAÇÃO FUNCIONAL DE SCHRÖDINGER

Neste capítulo vamos introduzir a representação de Schrödinger para teoria quântica de campos (TQC). A formulação tradicional da TQC consiste no emprego da representação de Heisenberg e no uso das funções de Green causais. Este método mostra-se bastante útil para a análise de divergências e a consequente renormalização da teoria, bem como para o desenvolvimento de métodos perturbativos. Todavia esta formulação não é adequada para o tratamento de problemas de condição inicial. Estes, por outro lado, são melhor analisados utilizando-se a representação de Schrödinger. Além disso, uma das grandes vantagens da representação funcional de Schrödinger para a TQC é que ela nos possibilita usar a intuição e as ferramentas matemáticas desenvolvidas para problemas de Mecânica Quântica em aplicações da TQC.

O uso da representação de Schrödinger em TQC não é tão difundido quanto o da representação de Heisenberg por causa da maior facilidade em isolar os infinitos e renormalizá-los nesta última. Contudo Symanzik¹ demonstrou a renormalizabilidade da representação de Schrödinger para problemas estáticos, ao passo que o tratamento dos infinitos para casos dependentes do tempo foi desenvolvido pelos autores da ref. [2].

II.A Generalidades

Na representação funcional de Schrödinger para teorias contendo somente campos bosônicos³, estados são descritos por funcionais de onda $\Psi(\varphi)$ de configurações de campos clássicas (*c-numbers*) $\varphi(\mathbf{r})$.

$$\Psi(\varphi) = \langle \varphi | \Psi \rangle \quad (2.1)$$

O produto interno de dois estados é definido através da seguinte integral funcional:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \Psi_1^*(\varphi) \Psi_2(\varphi) \quad (2.2)$$

Operadores são representados por kernels funcionais $O(\varphi_1, \varphi_2)$.

$$O|\Psi\rangle \implies \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} O(\varphi, \tilde{\varphi}) \Psi(\tilde{\varphi}) \quad (2.3)$$

Na representação de Schrödinger os operadores são avaliados no mesmo instante de tempo, e a relação de comutação fundamental é

$$[\Phi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.4)$$

A representação por nós escolhida é tal que o kernel associado ao operador de campo canônico $\Phi(\mathbf{r})$ é diagonal

$$\Phi(\mathbf{r}) \iff \varphi(\mathbf{r})\delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \quad (2.5)$$

enquanto que o kernel associado ao momento canonicamente conjugado $\Pi(\mathbf{r})$ apresenta uma derivada funcional.

$$\Pi(\mathbf{r}) \iff \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{r})} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \quad (2.6)$$

Portanto, ação do operador Φ nos funcionais de onda é meramente a multiplicação destes por φ , ao passo que a ação de Π é derivar funcionalmente o funcional de onda com respeito a φ . A representação de qualquer operador construído através de Φ e Π é dada por

$$O(\Pi, \Phi) \iff O\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi}, \varphi\right) \Psi(\varphi) \quad (2.7)$$

A equação dinâmica fundamental nesta representação é a equação funcional de Schrödinger para um estado dependente do tempo $|\Psi; t\rangle \leftrightarrow \Psi(\varphi; t)$. Esta equação fica determinada uma vez que a Hamiltoniana $H(\Pi, \Phi)$ do sistema é conhecida.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\varphi; t) = H \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi}, \varphi \right) \Psi(\varphi; t) \quad (2.8)$$

Para sistemas cujas Hamiltonianas sejam independentes do tempo é possível fazer-se a separação das variáveis, resultando em uma equação funcional de autovalores:

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi; t) &= e^{-iEt} \Psi_E(\varphi) \quad , \\ H \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi} \right) \Psi_E(\varphi) &= E \Psi_E(\varphi) \quad . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim como o problema análogo em Mecânica Quântica, esta equação funcional de autovalores só pode ser resolvida em alguns casos especiais. Como ilustração do método consideremos um sistema cuja dinâmica é governada pela seguinte Hamiltoniana quadrática *:

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} [\Pi^2(\mathbf{x}) + (\Phi h \Phi)(\mathbf{x})] \quad (2.10)$$

onde h é um kernel real e simétrico. Para que o modelo seja invariante por Poincaré h deve assumir a forma $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\nabla^2 + m^2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. A equação funcional de autovalores a ser resolvida então é

$$\int \left(-\frac{\delta^2}{\delta \varphi \delta \varphi} + \varphi h \varphi \right) \Psi_E(\varphi) = E \Psi_E(\varphi) \quad . \quad (2.11)$$

O estado fundamental desta equação é dado por um funcional de onda Gaussiano

* Aqui, bem como em todo texto, $\int_{\mathbf{x}}$ representa a integral sobre todo espaço d -dimensional $\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^d \mathbf{x}$. Também utilizaremos uma notação matricial, a saber, $KG(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \int_{\mathbf{z}} K(\mathbf{x}, \mathbf{z})G(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

$$\Psi_0(\varphi) = \det^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \exp -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \quad , \quad (2.12a)$$

onde a covariância ω é

$$\omega^2 = h \quad , \quad (2.12b)$$

e o autovalor corresponde é

$$E_0 = \frac{1}{2} \text{tr} \omega \quad . \quad (2.12c)$$

A analogia com a Mecânica Quântica convencional é bem ilustrada neste exemplo: o estado fundamental de uma teoria, cuja Hamiltoniana é quadrática nos graus de liberdade do sistema, é uma exponencial de uma forma quadrática nestes. Todavia, este exemplo também nos proporciona observar o aparecimento de infinitos em TQC por causa da existência de infinitos graus de liberdade. Por exemplo, para sistemas invariantes por Poincaré, a covariância ω é invariante por translações espaciais e dada por

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \omega(\mathbf{k}) \quad , \quad (2.13)$$

onde a integral no espaço dos momentos representa $\int_{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d}$. A forma (2.13) para ω acarreta que a normalização do funcional de onda (2.12a)

$$\det^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \exp \frac{1}{4} \text{tr} \ln \frac{\omega}{\pi} = \exp \frac{V}{4} \int_{\mathbf{k}} \ln \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{\pi} \quad (2.14)$$

é divergente tanto no ultravioleta (por causa da integração sobre os momentos) como no infravermelho (por causa do aparecimento do volume espacial V).

A seguir valer-nos-emos da representação de Schrödinger para TQC para discutir o problema da quantização de um campo bosônico livre num espaço de Robertson-Walker. Discutiremos o funcional de onda do vácuo e definiremos o vácuo adiabático.

II.B Quantização do campo escalar num espaço de Robertson–Walker

Consideremos um campo escalar livre propagando-se num espaço de Robertson–Walker plano cujo sistema de coordenadas é tal que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (2.15)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. A dinâmica do campo escalar é regida pela ação clássica

$$I = \int d^n x \mathcal{L} = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^2 \right], \quad (2.16)$$

onde μ é a massa do campo escalar e ξ é o acoplamento entre o campo e o escalar de Ricci R [Este modelo, ao nível clássico, apresenta invariância por transformações conformes para $\mu = 0$ e $\xi = \alpha_d \equiv \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{d})$]. Apesar de estarmos interessados no espaço físico onde $n = 3 + 1$, vamos considerar que a dimensão do espaço é $n = d + 1$. Esta continuação analítica na dimensão espacial será usada mais tarde para regularizar a teoria.

O momento canonicamente conjugado ao campo é dado por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = a^d \dot{\Phi}, \quad (2.17)$$

e a Hamiltoniana do sistema é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_{\mathbf{x}} (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} a^d [a^{-2d} \Pi^2 + a^{-2} (\nabla \Phi)^2 + (\mu^2 + \xi R) \Phi^2]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Utilizando-se a Hamiltoniana acima, obtemos que a equação de Schrödinger dependente do tempo que rege a dinâmica deste modelo é dada por

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} a^d \left[-a^{-2d} \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2(\mathbf{x})} + a^{-2} (\nabla \varphi(\mathbf{x}))^2 + (\mu^2 + \xi R) \varphi^2(\mathbf{x}) \right] \right\} \Psi . \quad (2.19)$$

O funcional de onda do vácuo (Ψ_0) é uma solução de (2.19), a qual é Gaussiana. Como mostraremos, este funcional de onda é aniquilado por uma combinação linear de Φ e Π , que é o operador de aniquilação.

$$\Psi_0 = N(t) \exp -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x}) \Xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \quad (2.20)$$

$N(t)$ é um fator de normalização dependente do tempo e Ξ é a covariância da Gaussiana, a qual pode ser separada em suas partes real e imaginária.

$$\Xi \equiv \frac{1}{2} \Omega^{-1} - 2i\Sigma \quad (2.21)$$

Para entendermos melhor o significado dos parâmetros deste funcional Gaussiano é conveniente considerarmos alguns valores esperados neste estado. Médias lineares anulam-se, isto é, $\langle \Phi \rangle = \langle \Pi \rangle = 0$. Por outro lado médias de bilineares dos operadores Π e Φ resultam em

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{y}) \rangle &= \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ \langle \Pi(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 4(\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ \langle \Phi(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{i}{2} + 2(\Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Uma vez que a dinâmica é invariante por translação e o vácuo partilha desta propriedade, é conveniente o uso da transformada de Fourier (TF), já que os kernels Ξ , Ω e Σ devem ser diagonais no espaço dos momentos. Definimos a TF de $\varphi(\mathbf{x})$ através de

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}) , \quad (2.23)$$

onde $\varphi(-\mathbf{k}) = \varphi^*(\mathbf{k})$. Desta definição segue que

$$-i \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (-i(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi(-\mathbf{k})}) \quad , \quad (2.24)$$

e para os operadores temos a seguinte realização[†]

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}) &\iff \varphi(\mathbf{k})\delta(\varphi - \varphi') \quad , \\ \Pi(\mathbf{k}) &\iff -i(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi(-\mathbf{k})} \delta(\varphi - \varphi') \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

As TF de Ξ , Ω e Σ são

$$\begin{aligned} \Xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) &= \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Xi(\mathbf{k}; t) \quad , \\ \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) &= \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Omega(\mathbf{k}; t) \quad , \\ \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) &= \Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Sigma(\mathbf{k}; t) \quad . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizando-se as TF a equação de Schrödinger funcional (2.19) transforma-se em

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} a^d \left[-a^{-2d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2}{\delta\phi(\mathbf{k})\delta\phi(-\mathbf{k})} + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) \phi(\mathbf{k})\phi(-\mathbf{k}) \right] \right\} \Psi \quad . \quad (2.27)$$

O funcional de onda Ψ_0 , o qual pode ser escrito como

$$\Psi_0 = N(t) \exp -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \phi(\mathbf{k}) \Xi(\mathbf{k}, t) \phi(-\mathbf{k}) \quad , \quad (2.28)$$

é solução da equação de Schrödinger caso a covariância Ξ satisfaça a equação

$$i \frac{\partial \Xi}{\partial t} = a^{-d} \Xi^2 - a^d (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) \quad , \quad (2.29)$$

[†] As relações de comutação para as TF de $\Phi(\mathbf{x})$ e $\Pi(\mathbf{x})$ são: $[\Phi(\mathbf{k}, t), \Phi(\mathbf{k}', t)] = [\Pi(\mathbf{k}, t), \Pi(\mathbf{k}', t)] = 0$, $[\Phi(\mathbf{k}, t), \Pi(\mathbf{k}', t)] = i(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$.

ou seja, caso as partes real e imaginária de Ξ satisfaçam

$$\dot{\Omega} = 4a^{-d}\Omega\Sigma \quad , \quad (2.30a)$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{8}a^{-d}\Omega^{-2} - 2a^{-d}\Sigma^2 - \frac{1}{2}a^d(k^2a^{-2} + \mu^2 + \xi R) \quad . \quad (2.30b)$$

A partir destas últimas equações podemos obter uma equação de segunda ordem para Ω quando eliminamos Σ de (2.30b) usando (2.30a).

$$\ddot{\Omega} = \frac{1}{2}a^{-2d}\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\Omega^{-1}\dot{\Omega}^2 - dH\dot{\Omega} - 2(k^2a^{-2} + \mu^2 + \xi R)\Omega \quad (2.31)$$

As equações (2.29) e (2.31) são difíceis de serem resolvidas diretamente. Todavia, a equação de Ricatti (2.29) pode ser linearizada pela seguinte transformação

$$\Xi = -ia^d \frac{\partial}{\partial t} \ln F^* \quad , \quad (2.32)$$

a qual acarreta que F satisfaz a equação de movimento do campo

$$\ddot{F} + dH\dot{F} + (k^2a^{-2} + \mu^2 + \xi R)F = 0 \quad . \quad (2.33)$$

As soluções complexas desta equação podem ser normalizadas utilizando -se

$$F\dot{F}^* - \dot{F}F^* = ia^{-d} \quad . \quad (2.34)$$

Esta relação nada mais é do que o Wronskiano associado à equação (2.33). Dada uma solução normalizada F de (2.33), podemos obter Ξ :

$$\Xi = \frac{1}{2|F|^2} \left[1 - ia^d \frac{\partial}{\partial t} |F|^2 \right] \quad , \quad (2.35)$$

e conseqüentemente a solução de (2.31) é dada por

$$\Omega = |F|^2 \quad . \quad (2.36)$$

Uma solução particular χ de (2.33) define um funcional de onda do vácuo através de (2.28) e (2.35). Esta solução pode ser obtida a partir de duas soluções particulares de (2.33) $[\chi_{1(2)}(\mathbf{k}, t)]$ e duas funções $d_{1(2)}(\mathbf{k})$, as quais são independentes do tempo.

$$\chi(\mathbf{k}, t) = d_1(\mathbf{k})\chi_1(\mathbf{k}, t) + d_2(\mathbf{k})\chi_2(\mathbf{k}, t) \quad (2.37)$$

Esta arbitrariedade na escolha da solução χ é inerente à quantização em espaços curvos. Quando quantizamos um sistema no espaço de Minkowski, existe uma escolha natural para χ : este espaço possui um vetor de Killing $\partial/\partial t$ ortogonal às hipersuperfícies de t constante, portanto é natural escolhermos as autofunções de $\partial/\partial t$ com autovalores $-i\omega$ com $\omega > 0$. Todavia, espaços curvos, em geral, podem não exibir nenhum vetor de Killing com respeito ao qual podemos definir os modos de frequência positiva. Este fato está intimamente relacionado com o espírito da relatividade geral, o qual afirma que sistemas de coordenadas são fisicamente irrelevantes. Além disso, os espaços de Fock gerados por escolhas diferentes para χ não são equivalentes e com isso é difícil considerar-se o vácuo como o estado sem quantas ou mesmo definir o conceito de partícula⁴.

Na representação de Schrödinger podemos expressar os operadores de campo em termos de operadores de criação e aniquilação $*$, onde estes são definidos através de

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k}) &= -ia^d \dot{\chi}^* \Phi(\mathbf{k}) + i\chi^* \Pi(\mathbf{k}) \\ \iff -ia^d \dot{\chi}^* \phi(\mathbf{k}) \delta(\phi - \phi') + (2\pi)^d \chi^* \frac{\delta}{\delta\phi(-\mathbf{k})} \delta(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os operadores b e b^\dagger satisfazem as seguintes relações de comutação:

* Esta escolha de operadores $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$ corresponde a escrevermos a transformada de Fourier do operador de campo na representação de Heisenberg como $\Phi_H(\mathbf{k}, t) = b(\mathbf{k})\chi(\mathbf{k}, t) + b^\dagger(\mathbf{k})\chi^*(\mathbf{k}, t)$.

$$\begin{aligned}
[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] &= [b^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad , \\
[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad .
\end{aligned}
\tag{2.39}$$

Apesar destas relações de comutação serem verdadeiras para qualquer instante de tempo, $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$ não podem ser interpretados como sendo operadores de criação e aniquilação de um estado de uma partícula, por causa de sua complicada dependência temporal. Isto faz com que não seja possível expressar a Hamiltoniana do sistema como uma soma em \mathbf{k} de $b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$.

Podemos facilmente verificar que estes operadores de aniquilação se anulam quando aplicados ao funcional de onda Ψ_0 dado por (2.28). Portanto, o estado Ψ_0 pode ser interpretado como o vácuo de Fock do espaço gerado por $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$.

A escolha de uma solução *particular* χ pode ser feita através da imposição de uma condição inicial (ou final) a ser satisfeita pela equação de Schrödinger dependente do tempo. Num espaço de Robertson–Walker é natural requerer que a solução χ comporte-se como um modo de frequência positiva onde a taxa de expansão é muito menor que a frequência efetiva da teoria, o que geralmente ocorre em um dos limites $t \rightarrow -\infty$ ou $t \rightarrow +\infty$.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \ll \omega_k^0 = \sqrt{k^2 a^{-2} + \mu^2} \tag{2.40}$$

Neste limite, a variação da frequência é muito lenta (adiabática)

$$\frac{\dot{\omega}_k^0}{\omega_k^0} \simeq O(H) \ll \omega_k^0 \quad , \tag{2.41}$$

e para um k fixo, o espaço tempo pode ser considerado como sendo quase Minkowskiano. A maioria dos modelos cosmológicos enquadram-se nesta classe de espaços. Para discutir a forma assintótica da solução no limite $H \ll \omega_k^0$ é conveniente utilizar o tempo conforme η :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 = c(\eta)(d\eta^2 - dx^2) \tag{2.42}$$

onde η é definido pela relação $d\eta/dt = 1/a(t)$ e $c(\eta) \equiv a^2(t)$. Utilizando-se as variáveis conformes

$$\begin{aligned} F(k, t) &= c^{(1-d)/4} F_c(k, \eta) \quad , \\ \Omega(k, t) &= c^{(1-d)/2} \Omega_c(k, \eta) \quad , \end{aligned} \quad (2.43)$$

obtemos que as equações de movimento (2.31) e (2.33) transformam-se em

$$F_c'' + (k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R]) F_c = 0 \quad , \quad (2.44a)$$

$$\Omega_c'' = \frac{1}{2} \Omega_c^{-1} + \frac{1}{2} \Omega_c^{-1} \dot{\Omega}_c^2 - 2(k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R]) \Omega_c = 0 \quad , \quad (2.44b)$$

onde a linha significa diferenciação com respeito ao tempo conforme η . A condição de normalização (2.34) implica que F_c deve ser normalizado segundo

$$F_c F_c'^* - F_c' F_c^* = i \quad , \quad (2.45)$$

e para uma solução propriamente normalizada F_c de (2.44a), temos que $\Omega_c = |F_c|^2$ é uma solução de (2.44b). A solução de (2.44a) que desempenha o papel de modo de frequência positiva no limite $k \rightarrow +\infty$ é

$$\chi_c \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \quad . \quad (2.46)$$

Para um k fixo, podemos obter a expansão assintótica de χ_c para $H \ll \omega_k^0$ utilizando-se uma solução formal do tipo de WKB.

$$\chi_c = \frac{1}{\sqrt{2W}} \exp -i \int^\eta W(\eta') d\eta' \quad (2.47a)$$

onde a função $W(\eta)$ satisfaz

$$W^2 = k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R] - \frac{1}{2} \left(\frac{W''}{W} - \frac{3}{2} \frac{W'^2}{W^2} \right) \quad . \quad (2.47b)$$

Com o *ansatz* (2.47a) temos que $\Omega_c = (2W)^{-1}$. No limite de variações adiabáticas do fator de escala ($H \ll \omega_k^0$), W pode ser determinado iterativamente partindo-se da seguinte solução de ordem zero para (2.47b):

$$W^{(0)} = (k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R])^{1/2} \quad (2.48)$$

Utilizando-se (2.47b) podemos obter a solução de i -ésima ordem

$$\left(W^{(i)}\right)^2 = \left(W^{(i-1)}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{W^{(i-1)''}}{W^{(i-1)}} - \frac{3}{2} \frac{\left(W^{(i-1)'}\right)^2}{\left(W^{(i-1)}\right)^2} \right) \quad (2.49)$$

As correções para a solução de ordem zero podem ser expressas em termos de parâmetros pequenos, tais como H/ω_k^0 e suas derivadas temporais. Iterações de ordem mais alta contêm derivadas de ordem mais elevada do fator de escala. Termos que contêm até a n -ésima derivada temporal do fator de escala são chamados de termos adiabáticos de ordem n [Para o leitor mais curioso, exibimos no apêndice B a expansão de Ω_c até quarta ordem adiabática].

A condição de contorno para Ω_c é dada para algum valor assintótico de η , onde $H \ll \omega_k^0$. Neste limite a solução possui um comportamento semelhante à solução para um espaço de Minkowski. A condição de contorno a ser adotada é que o comportamento assintótico de χ_c deve ser

$$\begin{aligned} \chi_c &\sim \frac{1}{\sqrt{2(k^2 + c\mu^2)^{1/2}}} e^{-i \int^\eta (k^2 + c\mu^2)^{1/2} d\eta'} \quad , \\ \Omega_c &\sim \frac{1}{2\sqrt{k^2 + c\mu^2}} \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Neste limite a covariância Ξ é bem aproximada por sua parte real,

$$\Xi = \frac{1}{2}\Omega^{-1} - 2i\Sigma \sim a^d \sqrt{k^2 a^{-2} + \mu^2} \quad (2.51)$$

A solução de (2.44a) que satisfaz (2.50) define o *vácuo adiabático*. Utilizando-se o vácuo adiabático, pode se mostrar que a Hamiltoniana do sistema, no limite assintótico, assume a forma

$$\mathcal{H} \sim \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^0 [b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] \quad (2.52)$$

e conseqüentemente, podemos interpretar b e b^\dagger como sendo operadores de aniquilação e criação de estados de uma partícula na região onde a aproximação adiabática é válida.

II.C Estados de mistura

Nesta seção vamos apresentar o formalismo para análise de estados de mistura utilizando a representação funcional de Schrödinger para TQC. Como vimos anteriormente neste capítulo, estados puros são descritos por funcionais de onda cuja evolução temporal é determinada pela equação de Schrödinger funcional (2.8). Contudo nem sempre o sistema em que estamos interessados encontra-se num estado puro. Por exemplo, podemos desejar analisar o comportamento das simetrias de um modelo como função da temperatura, ou então, podemos querer estudar a evolução temporal do universo, o qual pode encontrar-se num estado de mistura.

Estados de mistura na representação funcional de Schrödinger⁵ são descritos por matrizes densidades funcionais

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_n p_n \Psi_n(\varphi_1) \Psi_n^*(\varphi_2) \quad (2.53a)$$

$$\text{tr } \rho = \int \mathcal{D}\varphi \rho(\varphi, \varphi) = 1 \quad , \quad (2.53b)$$

onde $\{\Psi_n\}$ é um conjunto completo de funcionais de onda [†] e p_n é a probabilidade de encontrar o sistema no estado n . Valores médios de quantidades físicas representadas

[†] Por simplicidade, assumimos que a matriz densidade é diagonal com respeito à base $\{\Psi_n\}$.

por operadores O , aos quais associamos kernels $O(\varphi, \tilde{\varphi})$, são obtidos da seguinte maneira:

$$\langle O \rangle = \text{tr } \rho O = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\tilde{\varphi} \rho(\tilde{\varphi}, \varphi) O(\varphi, \tilde{\varphi}) \quad . \quad (2.54)$$

A evolução temporal destas médias fica determinada uma vez que saibamos qual a evolução temporal da matriz densidade. No caso particular de estados de equilíbrio térmico, o conjunto completo de funcionais de onda $\{\Psi_n\}$ é dado pelos auto-estados da Hamiltoniana, cujos autovalores denotamos por E_n , e as probabilidades de ocupação são dadas por $p_n = e^{-\beta E_n} / \sum_{n'} e^{-\beta E_{n'}}$. Neste caso, a dependência temporal reside na fase dos estados $\{\Psi_n\}$, e conseqüentemente ela desaparece já que (2.53a) é da forma $\Psi^* \Psi$.

Em geral, a evolução temporal da matriz densidade não é trivial. Existem duas fontes de variações temporais para a matriz densidade: os estados Ψ_n podem evoluir, tendo a sua dinâmica regida por uma equação de Schrödinger com uma Hamiltoniana H , e além disso, as probabilidades de ocupação p_n podem ser dependentes do tempo. Derivando-se a equação (2.53a) é fácil verificar que matriz densidade deve obedecer à equação

$$\frac{d\rho}{dt} = i[\rho, H] + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad . \quad (2.55)$$

O comutador do lado direito da última equação é devido à variação temporal dos funcionais de onda [Note que o sinal é o oposto ao que aparece na equação de Heisenberg].

O último termo é por definição dado por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv \sum_n \frac{dp_n}{dt} \Psi_n \Psi_n^* \quad . \quad (2.56)$$

Para especificarmos completamente o problema da evolução temporal de um estado de mistura precisamos de três informações: em primeiro lugar para a equação (2.55) estar bem definida devemos conhecer a Hamiltoniana do sistema e como as variações das probabilidades de ocupação dependem do tempo, *i.e.*, $\frac{\partial p_n}{\partial t}$. Além disso,

como a equação (2.55) é de primeira ordem no tempo devemos especificar uma condição inicial para a matriz densidade.

Para melhor compreendermos o significado da equação (2.55), desenvolveremos um modelo microscópico no qual ρ é obtido a partir de um estado puro de um sistema maior. Por simplicidade consideraremos um exemplo em Mecânica Quântica, o qual pode ser facilmente estendido para TQC usando-se o formalismo desenvolvido neste capítulo. A matriz densidade $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ pode ser obtida partindo-se de um estado puro de um sistema maior, que contenha dois conjuntos de variáveis $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}\}$ e $\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}$, quando integramos sobre as variáveis do primeiro:

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{X} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \quad , \quad (2.57a)$$

$$\text{tr } \rho = \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{X} d\mathbf{x} |\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x})|^2 = 1 \quad . \quad (2.57b)$$

Aqui assumimos que a Hamiltoniana para o sistema como um todo é dada por

$$\mathbb{H}(\mathbf{P}, \mathbf{X}; \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \quad . \quad (2.58)$$

Diferenciando-se (2.57a) com respeito ao tempo e usando a equação de Schrödinger para todo o sistema, obtemos a equação diferencial satisfeita por ρ .

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \rho = & \int d\mathbf{X} \left\{ \left(-\frac{\nabla_{\mathbf{X}}^2}{2M} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \right) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) + \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \left(\frac{\nabla_{\mathbf{X}}^2}{2M} \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \right) \right\} \\ & + \int d\mathbf{X} \left\{ \left(-\frac{\nabla_{\mathbf{x}_1}^2}{2m} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \right) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) + \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \left(\frac{\nabla_{\mathbf{x}_2}^2}{2m} \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \right) \right\} \\ & + \int d\mathbf{X} \left\{ V(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) - V(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \right\} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (2.59a)$$

O primeiro termo do lado direito de (2.59a) anula-se uma vez que este é basicamente um termo de superfície no espaço dos \mathbf{X} .

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{X} \left\{ \left(-\frac{\nabla_{\mathbf{X}}^2}{2M} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \right) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) + \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \left(\frac{\nabla_{\mathbf{X}}^2}{2M} \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2M} \int d\mathbf{X} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \left\{ \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \nabla_{\mathbf{X}} \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) - \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \right\} \end{aligned}$$

Os dois últimos termos em (2.59a) podem ser reescritos como

$$\frac{d}{dt} \rho = i[\rho, H] + \int d\mathbf{X} \left\{ \left(V(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) - V(\mathbf{x}_1) \right) - \left(V(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) - V(\mathbf{x}_2) \right) \right\} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2) \quad (2.59b)$$

aonde

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (2.59c)$$

e $V(\mathbf{x}_i)$ é uma média de $V(\mathbf{X}, \mathbf{x}_i)$ sobre a função de onda completa $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x}_1) \Psi^*(\mathbf{X}, \mathbf{x}_2)$.

Comparando-se (2.55) e (2.59) vemos que a primeira pode ser obtida a partir da segunda desde que seja possível definir o potencial médio $V(\mathbf{x})$, o qual nos permite definir uma Hamiltoniana para o sistema $\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}$ e também obter uma expressão para $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. É importante notar que em geral $V(\mathbf{x})$ é dependente do tempo já que $\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ o é. A Hamiltoniana efetiva (2.59c) descreve um sistema isolado, no sentido que ela contém apenas as variáveis \mathbf{p} e \mathbf{x} , contudo os efeitos do meio ambiente ainda são sentidos através da dependência temporal de H . Além disso, o meio ambiente influencia o sistema através do último termo em (2.55). Para um dado sistema físico a obtenção de H e $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é, em princípio, factível.

Com o intuito de simplificar o problema do tratamento de estados de mistura, vamos assumir que $\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$. Esta hipótese significa que estamos considerando que as probabilidades p_n são independentes do tempo, portanto o que estamos fazendo é considerar processos isoentrópicos, *i.e.*, processos nos quais a entropia do sistema

$$S \equiv -k \operatorname{tr} \rho \ln \rho = -k \sum_n p_n \ln p_n \quad (2.60)$$

é constante. Apesar de sermos forçados a fazer esta hipótese, já que não sabemos como as probabilidades de ocupação variam com o tempo, ela é fisicamente plausível, permitindo que analisemos processos em que a entropia é constante mas a energia não é necessariamente conservada, já que a Hamiltoniana pode vir a ser dependente do tempo.

A nível microscópico, esta aproximação significa que a Hamiltoniana do sistema completo $\{\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{x}\}$ pode ser escrita na forma

$$\mathbb{H} \approx \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + U(\mathbf{X}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (2.61)$$

onde $U(\mathbf{X}) + V(\mathbf{x})$ na última expressão deve ser entendido como sendo uma aproximação de campo médio para $V(\mathbf{X}, \mathbf{x})$. Portanto $U(\mathbf{X}) + V(\mathbf{x})$ pode ser dependente do tempo, retendo assim a influência de um sistema sobre o outro. Para a Hamiltoniana dada por (2.61) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ anula-se identicamente.

Com o uso desta aproximação, a dinâmica de um estado de mistura fica sendo governada pela equação de Liouville–von Neumann

$$\frac{d\rho}{dt} = i[\rho, H] \quad , \quad (2.62)$$

onde a Hamiltoniana H é possivelmente dependente do tempo.

Apesar de termos simplificado em muito o problema de analisar a evolução temporal de um estado de mistura, a equação (2.62) pode ser resolvida apenas em alguns casos particulares em que a Hamiltoniana é quadrática em \mathbf{p} e \mathbf{x} . Portanto vamos apresentar na próxima seção métodos variacionais, os quais serão de muita valia para obter informações sobre a dinâmica de sistemas representados por estados de mistura ou puros.

II.D Princípios variacionais

Princípios variacionais são uma ferramenta muito útil em quase todas as áreas da Física. Já na Mecânica Clássica encontramos exemplos de princípios variacionais que fornecem as equações de movimento de um sistema quer em situações estáticas, quer em processos dependentes do tempo. Soluções estáticas são aquelas que deixam estacionária a Hamiltoniana do sistema. Isto pode ser notado analisando-se as equações de Hamilton:

$$\dot{q} = 0 = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p}, \quad -\dot{p} = 0 = \frac{\partial H(p, q)}{\partial q}. \quad (2.63)$$

As equações dinâmicas do sistema podem ser obtidas considerando-se o princípio variacional de Hamilton, o qual requer que a ação clássica I_{cl} seja estacionária com respeito a variações da variável dinâmica $q(t)$.

$$I_{cl} = \int dt L$$

$$\frac{\delta I_{cl}(q)}{\delta q(t)} = 0 \quad (2.64)$$

É sempre bom ressaltar que o princípio variacional estático não requer condições de contorno ao passo que o dinâmico deve ser complementado com o requisito das variações anularem-se nos extremos da integral sobre o tempo que define a ação.

Analogamente à Mecânica Clássica, podemos encontrar dois princípios variacionais na Mecânica Quântica: um estático e um dependente do tempo. O primeiro postula que o valor esperado da Hamiltoniana é estacionário, conduzindo-nos à equação de Schrödinger independente do tempo. O segundo, apesar de pouco divulgado, é devido a Dirac e conduz-nos à equação de Schrödinger dependente do tempo.

Estes princípios variacionais aplicados à TQC, além de produzirem as equações de Schrödinger funcionais, também fornecem valiosas informações sobre os funcionais geradores da teoria, desde que a implementação deste princípios seja feita em duas

etapas⁶. Na primeira consideramos variações sujeitas a um vínculo, o qual é posteriormente removido para obter-se a teoria física.

Para o caso estático definimos a *energia efetiva* $E(\phi)$ como sendo o valor esperado estacionário da Hamiltoniana do sistema, em um estado normalizado $|\Psi\rangle$, sujeito ao vínculo de que o valor esperado do operador de campo $\Phi(\mathbf{r})$ é dado pela função $\phi(\mathbf{r})$.

$$E(\phi) = \underset{\text{estacionário}}{\text{valor}} \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad (2.65a)$$

$$\langle \Psi | \Phi(\mathbf{r}) | \Psi \rangle = \phi(\mathbf{r}) \quad (2.65b)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (2.65c)$$

O vínculo (2.65b) é removido exigindo-se que

$$\frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi(\mathbf{r})} = 0 \quad , \quad (2.66)$$

e a solução desta equação fornece a teoria física. Podemos ainda impor que a configuração ϕ seja independente de \mathbf{r} , obtendo desta forma o *potencial efetivo* vezes o volume do espaço. A energia efetiva é o funcional gerador das funções de Green 1PI a energia zero, ao passo que o potencial efetivo é o funcional gerador das funções de Green 1PI a momento e energia nulos.

Para situações dependentes do tempo, devemos implementar o princípio variacional de Dirac com a introdução de vínculos. Definimos a *ação efetiva* Γ como sendo o valor estacionário da ação do princípio variacional de Dirac sujeita ao vínculo de que o elemento de matriz do campo Φ seja dado por $\phi(t, \mathbf{r})$.

$$\Gamma(\phi) = \underset{\text{estacionário}}{\text{valor}} \int dt \langle \Psi_-; t | i \frac{d}{dt} - H | \Psi_+; t \rangle \quad (2.67a)$$

$$\langle \Psi_-; t | \Phi(\mathbf{r}) | \Psi_+; t \rangle = \phi(t, \mathbf{r}) \quad (2.67b)$$

$$\langle \Psi_-; t | \Psi_+; t \rangle = 1 \quad (2.67c)$$

Uma vez que temos um princípio variacional dependente do tempo, devemos também impor condições de contorno. Neste caso requeremos que os estados $|\Psi_{\pm}; t\rangle$ tendam ao estado fundamental $|0\rangle$ de H :

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} |\Psi_{\pm}; t\rangle = |0\rangle \quad . \quad (2.68)$$

Podemos recuperar a teoria física no final do problema através da remoção dos vínculos:

$$\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi(t, \mathbf{r})} = 0 \quad . \quad (2.69)$$

A partir das definições acima é possível mostrar que Γ é o funcional gerador das funções de Green 1PI com momento e energia arbitrários.

Até este momento tratamos de princípios variacionais para estados puros. Passemos agora ao estudo de princípios variacionais que forneçam a equação de Liouville-Neumann. Consideremos a seguinte ação⁷:

$$I = - \int dt \operatorname{tr} \rho \left(\frac{d}{dt} \Lambda + i[H, \Lambda] \right) - \operatorname{tr}(\rho \Lambda) \Big|_{t=t_i} = - \int dt \left\langle \frac{d}{dt} \Lambda + i[H, \Lambda] \right\rangle - \langle \Lambda \rangle \Big|_{t=t_i}, \quad (2.70)$$

onde o kernel Λ é um multiplicador de Lagrange. Os kernels Λ , ρ e H são dependentes do tempo, o traço deve ser tomado sobre estes kernels e a integral temporal varia do tempo inicial t_i até o tempo final t_f . A variação do multiplicador de Lagrange Λ fornece

$$\delta_{\Lambda} I = \int dt \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} \rho + i[H, \rho] \right) \delta \Lambda - \operatorname{tr}(\rho \delta \Lambda) \Big|_{t=t_f} \quad . \quad (2.71)$$

Analogamente, as variações com respeito a ρ conduzem a

$$\delta_{\rho} I = - \int dt \operatorname{tr} \left(\frac{d}{dt} \Lambda + i[H, \Lambda] \right) \delta \rho - \operatorname{tr}(\Lambda \delta \rho) \Big|_{t=t_i} \quad . \quad (2.72)$$

O próximo passo é a imposição das condições de contorno para eliminar os últimos termos de (2.71) e (2.72). Requeremos que

$$\Lambda|_{t=t_f} = 1 \quad , \quad (2.73)$$

i.e., o multiplicador de Lagrange Λ no tempo final t_f é dado pelo kernel unitário $\delta(\varphi_1 - \varphi_2)$. A condição de contorno para ρ é dada no instante inicial t_i

$$\rho|_{t=t_i} = \rho_0 \quad , \quad (2.74)$$

e com isso a variação $\delta\rho$ anula-se neste instante. Impondo-se que a ação I seja estacionária com respeito a variações de Λ e ρ obtemos que tanto ρ como Λ satisfazem à equação de Liouville–von Neumann. Além disso, visto que Λ deve satisfazer (2.73), temos que $\Lambda \equiv 1$ em todos os instantes de tempo. Com isso, o multiplicador de Lagrange Λ desaparece da discussão do problema e ainda temos um princípio variacional para a dinâmica de ρ .

A condição de contorno usada para Λ além de propiciar a eliminação desta variável do problema, também permite-nos associar I com a ação efetiva para um sistema num estado de mistura. Antes de demonstrarmos este fato é bom recordar que esta última é definida, na representação de Heisenberg, através das seguintes relações:

$$e^{-W(J)} \equiv \text{tr} \left[\rho_0 T \exp - \int d^4x J(x) \Phi_H(x) \right] = \left\langle T \exp - \int d^4x J(x) \Phi_H(x) \right\rangle , \quad (2.75a)$$

onde $W(J)$ é a energia livre de Helmholtz do sistema. A ação efetiva Γ é definida como a transformada de Legendre de W com respeito a J .

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \phi(x) \quad (2.75b)$$

$$\Gamma(\phi) = W(J) - \int dx J(x) \phi(x) \quad (2.75c)$$

Para obtermos a ação efetiva usando o princípio variacional devemos implementá-lo em dois passos, como foi feito nos casos anteriores. No primeiro passo introduzimos os vínculos⁵

$$\text{tr } \rho \frac{1}{2} \{\Lambda, \Phi\} = \left\langle \frac{1}{2} \{\Lambda, \Phi\} \right\rangle = \phi(t, \mathbf{r}) \quad , \quad (2.76a)$$

$$\text{tr } \rho \Lambda = \langle \Lambda \rangle = 1 \quad (2.76b)$$

[A primeira destas equações escrita explicitamente é

$$\frac{1}{2} \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \{ \Lambda(\varphi_1, \varphi_2) \rho(\varphi_2, \varphi_1) (\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})) \} = \phi(t, \mathbf{r}) \quad ,$$

com a dependência temporal originando-se do fato que os kernels Λ e ρ serem dependentes do tempo]. A seguir vamos demonstrar que a ação efetiva definida em (2.75) está relacionada com a ação I em (2.70), *i.e.*,

$$\Gamma(\phi) = \underset{\text{estacionário}}{\text{valor}} \int dt \text{tr } \rho \left(-\frac{d\Lambda}{dt} - i[H, \Lambda] \right) = \underset{\text{estacionário}}{\text{valor}} \int dt \left\langle -\frac{d}{dt} \Lambda - i[H, \Lambda] \right\rangle \quad (2.77)$$

onde as variações estão sujeitas aos vínculos (2.76).

A prova começa com introdução de multiplicadores de Lagrange $J(x)$ e $w(t)$ para implementar os vínculos (2.76).

$$I' = I + \int dx J(x) \text{tr } \rho \frac{1}{2} \{\Lambda, \Phi\} - \int dt w(t) \text{tr } \rho \Lambda \quad (2.78)$$

[aonde denotamos o conjunto das variáveis t, \mathbf{r} por x .] Variações com respeito a Λ e ρ conduzem, respectivamente, às equações

$$\frac{d\rho}{dt} + i[H, \rho] + \int dr J(x) \frac{1}{2} \{\rho, \Phi\} - w(t)\rho = 0 \quad , \quad (2.79a)$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} + i[H, \Lambda] - \int dr J(x) \frac{1}{2} \{\Lambda, \Phi\} + w(t)\Lambda = 0 \quad . \quad (2.79b)$$

O último termo destas equações pode ser removido através da seguinte redefinição de variáveis:

$$\tilde{\rho} = \rho \exp - \int_{-\infty}^t dt' w(t') \quad , \quad (2.80a)$$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \exp - \int_t^{\infty} dt' w(t') \quad , \quad (2.80b)$$

enquanto que o comutador é eliminado introduzindo-se o operador de evolução U , o qual satisfaz

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H U(t) \quad (2.81)$$

sujeito à condição de contorno que $U(-\infty)$ é a identidade.

$$\tilde{\rho} = U \rho_H U^{-1} \quad (2.82a)$$

$$\tilde{\Lambda} = U \Lambda_H U^{-1} \quad (2.82b)$$

Podemos reconhecer esta última transformação como a passagem para a representação de Heisenberg relativamente à Hamiltoniana H , aonde os estados ainda são dependentes do tempo por causa da fonte J , *i.e.*, estamos na representação de interação onde $H_{int} = \int J \Phi$. A nova variável ρ_H satisfaz a mesma condição de contorno que ρ para $t = -\infty$, ao passo que Λ_H é idêntico a Λ para $t = +\infty$, desde que o último seja igual ao operador identidade. As equações satisfeitas por ρ_H e Λ_H são

$$\frac{d\rho_H}{dt} = - \int d\mathbf{r} J(x) \frac{1}{2} \{ \rho_H, \Phi_H \} \quad , \quad (2.83a)$$

$$\frac{d\Lambda_H}{dt} = + \int d\mathbf{r} J(x) \frac{1}{2} \{ \Lambda_H, \Phi_H \} \quad , \quad (2.83b)$$

onde $\Phi_H(x)$ é o operador Φ na representação de Heisenberg [$\Phi_H(x) = U^{-1}(t)\Phi(\mathbf{r})U(t)$]. A solução destas equações é

$$\rho_H = T \exp - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dx J(x) \Phi_H(x) \rho_0 T \exp - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dx J(x) \Phi_H(x) \quad , \quad (2.84a)$$

$$\Lambda_H = T \exp - \int_t^{\infty} dx J(x) \Phi_H(x) \quad . \quad (2.84b)$$

Agora podemos provar a nossa afirmação. A partir de (2.84) temos que

$$e^{-W(J)} = \text{tr } \rho_H \Lambda_H \quad . \quad (2.85)$$

Utilizando-se as expressões (2.76), (2.80) e (2.82) relacionamos $W(J)$ com o multiplicador de Lagrange $\omega(t)$.

$$W(J) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \omega(t) \quad (2.86)$$

Por outro lado, $\omega(t)$ pode ser obtido a partir de (2.79), resultando que

$$W(J) = \Gamma(\phi) + \int dx J(x)\phi(x) \quad . \quad (2.87)$$

Isto basicamente fecha o argumento, já que a partir de (2.85) temos que

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \phi(x) \quad , \quad (2.88)$$

concluindo assim a prova.

Portanto, para situações fora de equilíbrio, o princípio (2.70) também pode ser usado para obter a ação efetiva do sistema. A existência dos princípios variacionais tratados nesta seção induz-nos a considerar aproximações nas quais as variações são feitas sobre um espaço de teste restrito, *i.e.*, variações paramétricas como no método de Rayleigh–Ritz na Mecânica Quântica.

REFERÊNCIAS

1. K. Symanzik, *Nucl. Phys.* B190 (1983) 1; M. Lüscher, *ibid.* 36 (1987) 52.
2. F. Cooper e E. Mottola, *Phys. Rev. D* 36 (1987) 3114; S.-Y. Pi e M. Samiullah, *ibid.* 36 (1987) 3128.
3. Para uma revisão do assunto veja R. Jackiw, *Proceedings of the V Jorge André Swieca Summer School*, editado por O. J. P. Éboli, M. O. C. Gomes e A. Santoro (World Scientific, Singapore, to appear).
4. Veja, por exemplo, N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982), e referências aí contidas.
5. O. J. P. Éboli, R. Jackiw e S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 3557.
6. R. Jackiw e A. Kerman, *Phys. Lett.* A71 (1979) 158.
7. R. Balian e M. Vénéroni, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981) 1353; 47 (1981) 1765 (E); *Ann. Phys.* 164 (1985) 334.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA ESTADOS DE MISTURA

Para sistemas cuja Hamiltoniana é quadrática, é fácil verificar¹ que podemos resolver exatamente a equação de Liouville–von Neumann através de um *ansatz* Gaussiano para a matriz densidade ρ . Todavia, para sistemas cuja dinâmica não é trivial a equação de Liouville–von Neumann é não linear e, em geral, não é possível obter uma solução exata. É exatamente para estes sistemas que é interessante aplicar o princípio variacional para estados de mistura desenvolvido no capítulo anterior, esperando-se que o *ansatz* utilizado permita-nos manter parte das não linearidades do sistema.

Neste capítulo vamos discutir duas aplicações do princípio variacional para estados de mistura, a saber, o oscilador anarmônico e a teoria $\lambda\Phi^4$ em um espaço de Robertson–Walker. No primeiro exemplo aplicaremos o princípio variacional sem precisarmos nos preocupar com aspectos técnicos, tais como renormalização. Uma vez adquirida uma certa familiaridade com o método passaremos ao estudo da teoria $\lambda\Phi^4$, onde trataremos do problema da renormalizabilidade das equações de movimento para os parâmetros que caracterizam o *ansatz* para a matriz densidade do sistema.

III.A Oscilador anarmônico

O *ansatz* que vamos empregar para a matriz densidade será Gaussiano. *A posteriori*, verificamos que esta escolha nos conduz a algumas aproximações bem

conhecidas em Física, tais como Hartree-Fock, *large-n limit*, ação efetiva a dois *loops*, etc. Para um sistema quântico $\{\mathbf{x}\}$ de n componentes utilizaremos o *ansatz*

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = N \exp -\frac{1}{2} \left(x_1^i A_{ij} x_1^j - 2x_1^i B_{ij} x_2^j + x_2^i C_{ij} x_2^j \right) , \quad (3.1)$$

onde por imposição da unitariedade de ρ [$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho^*(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$] temos

$$\begin{aligned} A^* &= C , \\ B^\dagger &= B , \end{aligned} \quad (3.2)$$

e o fator de normalização N é tal que $\int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$. Visando satisfazer (3.2), e também para maior simplicidade das expressões a seguir, reparametrizamos ρ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \\ &= e^{-\gamma} \exp -\frac{1}{2} \left\{ x_1^i \left(\frac{G^{-1}}{2} - 2i\Pi \right)_{ij} x_1^j + x_2^i \left(\frac{G^{-1}}{2} + 2i\Pi \right)_{ij} x_2^j - x_1^i \left(G^{-1/2} \delta G^{-1/2} \right)_{ij} x_2^j \right\} . \end{aligned} \quad (3.3)$$

As matrizes G e Π são reais e simétricas, enquanto que δ é Hermitiana, *i.e.* $\delta = \delta_R + 4iG^{1/2}\delta_I G^{1/2}$, onde δ_R é real e simétrica e δ_I é real e anti-simétrica. A matriz densidade (3.3) está propriamente normalizada desde que

$$-\ln N = \gamma = \frac{1}{2} \ln \det 2\pi G^{1/2} (1 - \delta_R)^{-1} G^{1/2} . \quad (3.4)$$

É importante observar que δ não nulo é uma medida de quanto a matriz densidade difere de um estado puro. Para $\delta = 0$, $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Psi(\mathbf{x}_1)\Psi^*(\mathbf{x}_2)$, com $\Psi(\mathbf{x}) = (\det^{-1/4} 2\pi G) \exp -\frac{1}{2} x^i \left(\frac{G^{-1}}{2} - 2i\Pi \right)_{ij} x^j$. Portanto vamos apelidar δ de *grau de mistura*.

Para melhor compreendermos o significado dos parâmetros do *ansatz* (3.3) calculemos alguns valores médios. Médias de \mathbf{p} e \mathbf{x} anulam-se:

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 , \quad (3.5a)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int d\mathbf{x} \frac{1}{i} \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} = 0 , \quad (3.5b)$$

enquanto as médias de bilineares em \mathbf{x} e \mathbf{p} são dadas por

$$\langle x^i x^j \rangle = \int d\mathbf{x} x^i x^j \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left(G^{1/2} (1 - \delta_R)^{-1} G^{1/2} \right)_{ij} , \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \langle p^i p^j \rangle &= - \int d\mathbf{x} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{4} \left(G^{-1/2} (1 + \delta_R) G^{-1/2} \right)_{ij} + 4 \left((\Pi + \delta_I) G^{1/2} (1 - \delta_R)^{-1} G^{1/2} (\Pi - \delta_I) \right)_{ij} \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$\begin{aligned} \langle x^i p^j \rangle &= -i \int d\mathbf{x} x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} \\ &= \frac{i}{2} \delta_{ij} + 2 \left(G^{1/2} (1 - \delta_R)^{-1} G^{1/2} (\Pi - \delta_I) \right)_{ij} . \end{aligned} \quad (3.6c)$$

Para sistemas que exibem simetria de rotação no espaço n dimensional dos \mathbf{x} , todas as matrizes são proporcionais a δ_{ij} exceto a matriz δ_{Iij} para $n = 2$, já que neste caso esta pode ser igual a ϵ_{ij} . Neste trabalho ignoraremos esta possibilidade [†].

Podemos compreender melhor este *ansatz* para a matriz densidade se o expressarmos como o valor esperado de um operador. Por simplicidade, vamos considerar o caso de um sistema com um único grau de liberdade. É possível mostrar-se que o *ansatz* Gaussiano (3.3) pode ser escrito da seguinte forma³:

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \langle x_1 | \hat{\rho} | x_2 \rangle \\ \hat{\rho} &= \sqrt{\frac{2\pi}{w} \sinh bw} e^{-\gamma} \exp -\frac{b}{2} [p^2 - 2\Pi(xp + px) + ax^2] , \end{aligned} \quad (3.7)$$

aonde

$$G = \frac{1}{2w} \tanh bw , \quad (3.8a)$$

$$\delta^{-1} = \cosh bw , \quad (3.8b)$$

$$w = \sqrt{a - 4\Pi^2} . \quad (3.8c)$$

[†] Este tensor anti-simétrico aparece em sistemas planares aos quais encontra-se aplicado um campo magnético perpendicular ao plano do sistema.²

A normalização de ρ é garantida se γ é dado por (3.4):

$$\hat{\rho} = 2 \sinh \frac{bw}{2} \exp -\frac{b}{2} [p^2 - 2\Pi(xp + px) + ax^2] \quad , \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{1-\delta}{2\pi G}} \exp -\frac{1}{4G} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\delta) \exp i\Pi(x_1^2 - x_2^2) \\ &= \sqrt{\frac{w}{\pi} \tanh \frac{bw}{2}} \exp -\frac{w}{2 \sinh bw} \left((x_1^2 + x_2^2) \cosh bw - 2x_1x_2 \right) \exp i\Pi(x_1^2 - x_2^2). \end{aligned} \quad (3.9b)$$

A partir desta última expressão é fácil calcular a entropia deste estado¹.

$$S = -k \left\langle \ln \left(2 \sinh \frac{bw}{2} \right) - \frac{b}{2} p^2 + b\Pi(xp + px) - \frac{ba}{2} x^2 \right\rangle \quad (3.10a)$$

Utilizando-se (3.6) e (3.8) temos que

$$\begin{aligned} S &= -k \ln \left(2 \sinh \frac{bw}{2} \right) + k \frac{bw}{2} \frac{bw}{2} \\ &= -k \left[\ln (2 \sinh z) - z \frac{d}{dz} \ln (2 \sinh z) \right] \Bigg|_{z=\frac{bw}{2}}. \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Uma vez que bw é relacionado com δ , entropia constante significa que o grau de mistura δ permanece constante, enquanto só G e Π são dependentes do tempo.

Para que possamos implementar o princípio variacional (2.70) para sistemas fora do equilíbrio térmico devemos também proceder a uma escolha de um *ansatz* para o multiplicador de Lagrange Λ . Uma vez que a ação (2.70) é linear em ρ e Λ , variações em um destes operadores produzem as equações de movimento para o outro. Consequentemente, o número de parâmetros variacionais definindo ρ e Λ deve ser o mesmo, para que possamos obter um sistema cujas equações determinem todos os parâmetros envolvidos. A partir da condição de contorno para Λ ($\Lambda|_{t=t_f} = 1$) e da equação de Liouville-von Neumann, sabemos que $\Lambda = 1$. Portanto, o *ansatz* para Λ deve acomodar esta possibilidade. Por último, é bom lembrar que as equações variacionais exatas

para ρ e Λ desacoplam, mas as equações obtidas com variações restritas não necessariamente exibem esta propriedade. Logo um outro fator que usaremos na escolha do *ansatz* para Λ , é que as equações para os parâmetros de ρ desacoplem das equações para Λ .

Para motivar a nossa escolha do *ansatz* para Λ , vamos primeiro recordar alguns fatos sobre o princípio variacional que conduz à distribuição de Boltzmann no caso de sistemas estáticos. Este princípio nada mais é do que minimizar o valor esperado de $\ln \rho$ sujeito à condição de que o valor médio da energia ($U \equiv \text{tr} \rho H$) seja constante. Isto é, devemos minimizar a energia livre de Helmholtz $F \equiv U - TS$:

$$\beta F = \text{tr} \rho \ln \rho + \beta \text{tr} \rho H = \langle \ln \rho \rangle + \beta \langle H \rangle \quad , \quad (3.11)$$

onde β funciona como um multiplicador de Lagrange para assegurar que o valor médio da energia seja constante. Deveríamos também introduzir mais um multiplicador de Lagrange para impor que ρ seja normalizado. Todavia isto não é necessário já que podemos absorver este multiplicador extra na Hamiltoniana. Impondo-se que a variação de (3.11) com respeito a ρ se anule implica que

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr} e^{-\beta H}} \quad . \quad (3.12)$$

Analogamente, $\hat{\rho} = e^{-\beta \Theta} / \text{tr} e^{-\beta \Theta}$ maximiza a entropia quando impomos que a média do operador Θ é mantida fixa.

Examinando-se (3.7)–(3.8), podemos ver que a matriz densidade Gaussiana (3.3) é da forma de máxima entropia, aonde o operador Θ é uma superposição linear de $x^i x^j$, $p^i p^j$, $x^i p^j + p^j x^i$ e o operador identidade $\mathbf{1}$, com coeficientes dependentes do tempo relacionados com γ , G , Π , e δ . Portanto é natural considerar-se Λ neste espaço de operadores. A escolha de Λ sugerida por Balian e Vénéroni⁴ é

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & \Lambda^{(1)} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \Lambda_{ij}^{(p^2)} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_1^j} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ & + \Lambda_{ij}^{(xp)} (x_1^i + x_2^i) \frac{\partial}{\partial x_1^j} \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \Lambda_{ij}^{(x^2)} x_1^i x_1^j \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad , \end{aligned} \quad (3.13a)$$

ou escrevendo-se como um operador $\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_1 | \hat{\Lambda} | \mathbf{x}_2 \rangle$

$$\hat{\Lambda} = \Lambda^{(1)} \mathbf{1} + \Lambda_{ij}^{(p^2)} p^i p^j - \Lambda_{ij}^{(xp)} (x^i p^j + p^j x^i) + \Lambda_{ij}^{(x^2)} x^i x^j, \quad (3.13b)$$

onde $\Lambda^{(a)}$ são os parâmetros variacionais dependentes do tempo. A grande vantagem do uso deste *ansatz* para Λ é que as equações para os parâmetros de ρ não envolvem $\Lambda^{(a)}$.

Nesta seção vamos aplicar o princípio variacional (2.70) para estudar a evolução temporal de um oscilador anarmônico com n componentes cuja dinâmica é governada pela Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2(t) \mathbf{x}^2 + \frac{\lambda(\mathbf{x}^2)^2}{2(n+2)}. \quad (3.14)$$

Substituindo-se (3.1), (3.13) e (3.14) em (2.70) obtemos a ação em termos dos parâmetros que caracterizam o nosso *ansatz*. Impondo-se que esta ação seja estacionária com respeito a variações dos $\Lambda^{(a)}$, determinamos as equações de movimento para os parâmetros de ρ :

$$\frac{\dot{N}}{N} = \text{tr } A_I, \quad (3.15a)$$

$$\dot{A}_R \pm \dot{B}_R \pm [B_I, A_R \pm B_R] = \{A_I, A_R \pm B_R\}, \quad (3.15b)$$

$$\dot{B}_I = \{A_I, B_I\} + [B_R, A_R], \quad (3.15c)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_I = & -A_R^2 + B_R^2 + A_I^2 + B_I^2 + \omega^2 \\ & + \frac{\lambda}{n+2} \left[\text{tr} (A_R - B_R)^{-1} + 2(A_R - B_R)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (3.15d)$$

onde o ponto indica diferenciação com respeito ao tempo. Assumindo-se que a estrutura matricial é trivial, estas equações [usando-se a reparametrização (3.3)] reduzem-se a

$$\dot{\delta} = 0, \quad (3.16a)$$

$$\dot{G} = 4\Pi G, \quad (3.16b)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1-\delta^2}{8G^2} - 2\Pi - \frac{\omega^2}{2} - \frac{\lambda G}{1-\delta} \quad (3.16c)$$



Antes de analisarmos as consequências de (3.16) é bom mencionar o resultado obtido empregando-se um outro *ansatz* para Λ . Já que ρ e Λ satisfazem a equação de Liouville–von Neumann poderíamos ter assumido um *ansatz* Gaussiano para Λ :

$$\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{-\gamma_\Lambda} \exp -\frac{1}{2} \left\{ x_1^i \left(\frac{G_\Lambda^{-1}}{2} - 2i\Pi_\Lambda \right)_{ij} x_1^j + x_2^i \left(\frac{G_\Lambda^{-1}}{2} + 2i\Pi_\Lambda \right)_{ij} x_2^j - x_1^i \left(G_\Lambda^{-1/2} \delta_\Lambda G_\Lambda^{-1/2} \right)_{ij} x_2^j \right\}. \quad (3.17)$$

Todavia esta escolha conduz-nos a equações para os parâmetros da matriz densidade que envolvem os parâmetros de Λ . Além disso, também é difícil implementar a condição final $\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|_{t=t_f} = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ na expressão (3.17). Todavia estes dois impecílios podem ser contornados através do seguinte truque. Primeiro introduzimos um parâmetro ϵ e expandimos ρ e Λ como uma série em ϵ . Todos os parâmetros em ρ bem como Π_Λ e δ_Λ são assumidos ser de $\mathcal{O}(\epsilon^0)$. O primeiro termo em G_Λ é $\mathcal{O}(\epsilon)$, enquanto γ_Λ começa com $\ln \epsilon$. Neste ponto derivamos as equações de movimento e tomamos o limite ϵ indo a zero. Neste limite, as equações para ρ ficam inalteradas já que são as equações de $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, enquanto que $\Lambda(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tende para $\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Omitiremos aqui os detalhes já que as equações obtidas são idênticas a (3.16).

As equações variacionais (3.16) possuem duas qualidades desejadas: o grau de mistura δ é uma constante já que este está relacionado à entropia através de (3.10) [lembre-se que a equação de Liouville–von Neumann descreve processos isoentrópicos]. Além disso, para $\lambda = 0$ as equações (3.16) são exatas, uma vez que neste caso a equação de Liouville–von Neumann exhibe soluções Gaussianas.

Como uma primeira aplicação das equações (3.16) podemos obter uma aproximação para a distribuição de equilíbrio para sistemas independentes do tempo. Neste caso (3.16b) implica que Π se anula, enquanto (3.16c) fornece uma relação funcional entre G_{eq} e δ . Neste caso definimos $G_{eq} \equiv \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{2\omega} g$, e g satisfaz

$$2 \frac{\lambda}{\omega^3} \ell g^3 + g^2 - 1 = 0 \quad , \quad (3.18a)$$

onde

$$\ell = \frac{1}{4} \left[\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right] . \quad (3.18b)$$

A equação cúbica para g pode ser resolvida, sendo que para acoplamentos fracos obtemos

$$g \approx 1 - \frac{\lambda}{\omega^3} \ell , \quad (3.19a)$$

enquanto que para acoplamentos fortes temos que

$$g \approx \frac{\omega}{(2\lambda\ell)^{1/3}} - \frac{\omega^3}{6\lambda\ell} , \quad (3.19b)$$

e na ausência do termo harmônico ($\omega = 0$) segue que

$$G_{eq} = \frac{(1 - \delta)^{2/3}(1 + \delta)^{1/3}}{2\lambda^{1/3}} . \quad (3.19c)$$

É possível mostrar[†] que o resultado acima para a matriz densidade estática coincide com o que é obtido usando o princípio variacional estático (3.11) com o *ansatz* (3.8) para ρ , aonde o parâmetro b deve ser identificado com o inverso da temperatura β .

A partir de (3.16) podemos obter uma equação de segunda ordem para a variável $Q = (1 - \delta)^{-1/2} G^{1/2}$.

$$\ddot{Q} - \frac{\ell^2}{Q^3} + \omega^2 Q + 2\lambda Q^3 = 0 \quad (3.20)$$

Esta equação também pode ser obtida da seguinte forma[†]. Diferenciando-se $Q^2 \equiv \langle x^2 \rangle$ temos que

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{2Q} \text{tr } \dot{\rho} x^2 = \frac{1}{2Q} \text{tr } i[\rho, H] x^2 \\ &= \frac{1}{2Q} \text{tr } \rho i[H, x^2] . \end{aligned} \quad (3.21a)$$

[†] Este procedimento também pode ser usado para obter as equações na aproximação $1/n$, bastando para isso avaliar as médias em (3.21) nesta aproximação.

Para uma Hamiltoniana da forma $H = \frac{p^2}{2} + V(x)$, a última expressão implica que

$$\dot{Q} = \frac{1}{2Q} \langle px + xp \rangle \quad . \quad (3.21b)$$

Derivando-se mais uma vez e calculando-se os comutadores temos que

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{4Q^3} \langle px + xp \rangle^2 + \frac{1}{Q} \langle p^2 \rangle - \frac{1}{Q} \left\langle x \frac{d}{dx} V(x) \right\rangle \quad . \quad (3.21c)$$

Os dois primeiros termos do segundo membro da equação acima podem ser calculados usando-se a nossa matriz densidade Gaussiana, sendo que eles se combinam em $\frac{\ell^2}{Q^3}$. O último termo desta equação depende da forma do potencial, em particular, para um potencial do tipo $V(x) = \lambda_n x^{2n}$, precisamos calcular o valor esperado de $2n\lambda_n x^{2n}$, o qual na aproximação Gaussiana é $\lambda_n \frac{(2n)!}{2^{n-1}(n-1)!} Q^{2n}$, e com isso recuperamos a equação (3.20).

Uma vez que (3.20) é não linear a obtenção de soluções analíticas é rara [A solução de (3.20) envolve funções elípticas]. Todavia esta equação possui a forma da equação de movimento de um sistema mecânico, permitindo com que tenhamos uma maior intuição sobre o comportamento do sistema. Em particular para ω^2 constante o movimento de Q é governado pelo potencial efetivo

$$V_{\text{eff}}(Q) = \frac{\ell^2}{2Q^2} + \frac{1}{2}\omega_f^2 Q^2 + \frac{\lambda}{2} Q^4 \quad , \quad (3.22)$$

onde o termo centrífugo depende do grau de mistura δ . Em geral Q vai oscilar ao redor do mínimo de V_{eff} .

Como uma aplicação do formalismo aqui desenvolvido analisemos a evolução temporal de um sistema para o qual λ é independente do tempo, ao passo que ω é dependente do tempo e tal que ω é constante para $t < t_i$ ou $t > t_f$. Mais ainda, suponhamos que inicialmente o sistema estivesse em equilíbrio térmico¹.

Intuitivamente esperamos que para variações muito lentas (adiabáticas) o estado do sistema será bem descrito pela matriz densidade de equilíbrio com ω substituído

por seu valor instantâneo. Eurísticamente, também esperamos que para acoplamentos fortes o sistema permaneça próximo ao estado de equilíbrio. Para verificar se a nossa intuição está correta vamos resolver numericamente o sistema (3.16) para a seguinte dependência temporal de ω :

$$\omega^2(t) = \begin{cases} \nu^2 & t \leq t_i \\ \frac{2t-t_i-t_f}{t_i-t_f} \nu^2 & t_i < t < t_f \\ -\nu^2 & t \geq t_f \end{cases} . \quad (3.23)$$

Esta forma para ω descreve a passagem do sistema de uma situação onde o mínimo do potencial encontra-se na origem para uma nova configuração onde o potencial exibe dois mínimos. A solução numérica das equações (3.16) encontra-se nas figuras 1(a)–1(d) e 2(a)–2(d), onde a variável ΔG é definida por

$$\Delta G(t) = \frac{G(t) - G_{\text{eq}}(t)}{G_{\text{eq}}(t)} , \quad (3.24)$$

com G_{eq} sendo a solução estática de (3.16) onde ω é substituído por $\omega(t)$. A partir da figura 1 podemos inferir que para valores crescentes de $\tau \equiv t_f - t_i$, com λ fixo, o sistema é cada vez melhor descrito pela matriz densidade de equilíbrio G_{eq} . Por outro lado, para τ fixo, podemos deduzir da figura 2 que o sistema mantém-se mais próximo do estado de equilíbrio G_{eq} para acoplamentos fortes. Portanto estes dois resultados são os esperados intuitivamente.

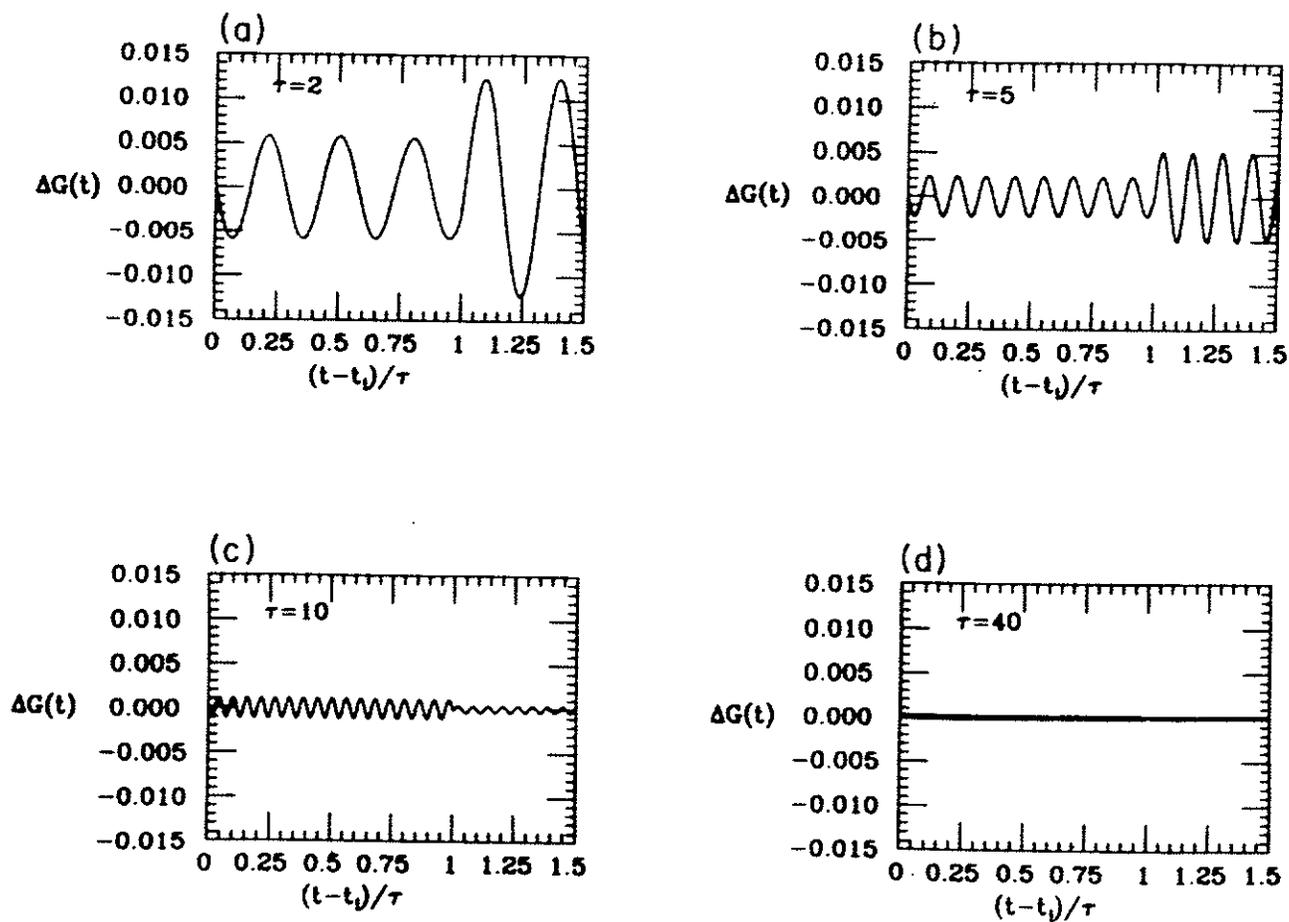


Figura 1: $\Delta G(t)$ como uma função de $\frac{t-t_i}{\tau}$ para diferentes valores de τ : (a) $\tau = 2$; (b) $\tau = 5$; (c) $\tau = 10$; (d) $\tau = 40$. Neste exemplo consideramos $\xi = 0.5$, $\nu^2 = 1$ e $\lambda = 1$.

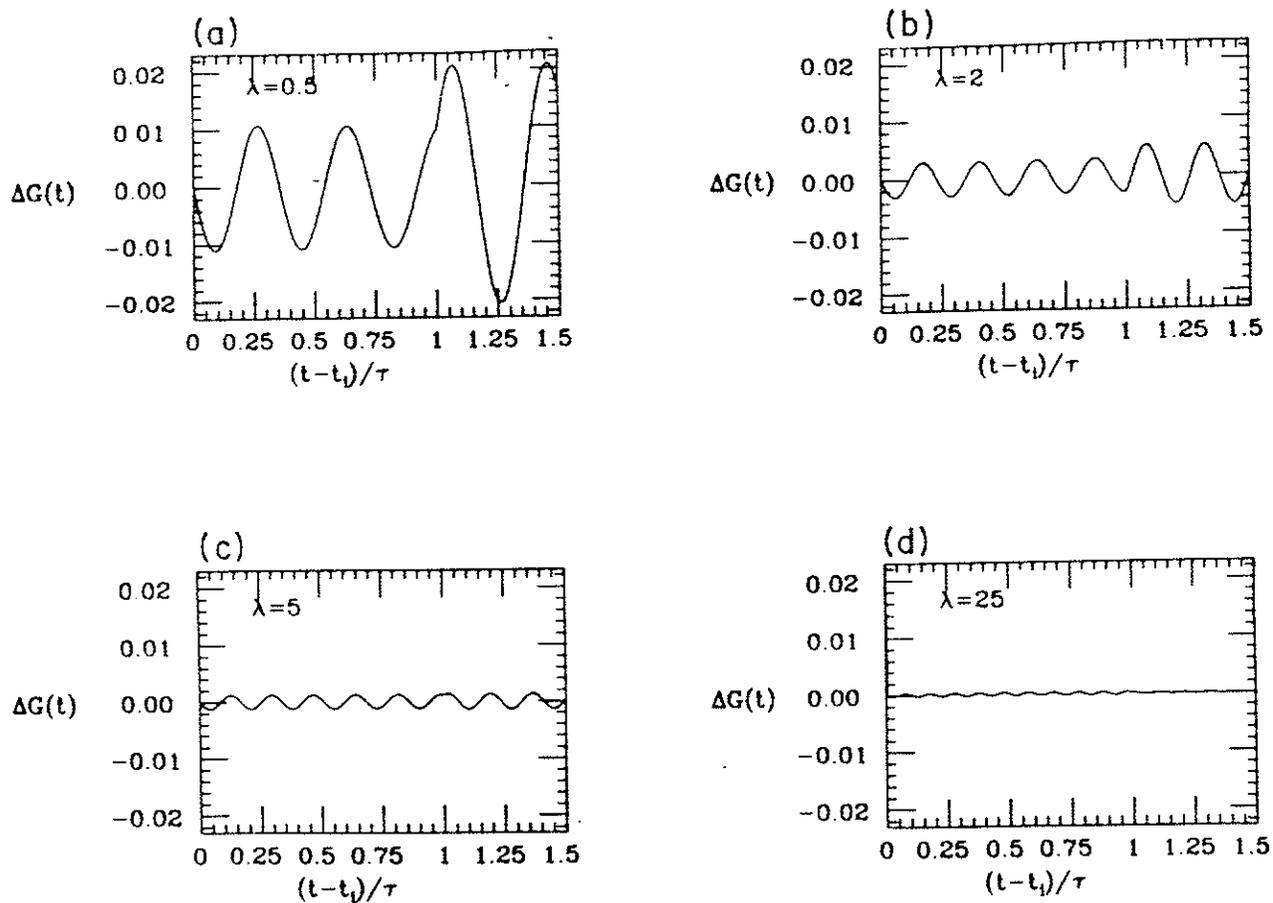


Figura 2: $\Delta G(t)$ como função de $\frac{t-t_i}{\tau}$ para diversos valores de λ : (a) $\lambda = 0.5$; (b) $\lambda = 2$; (c) $\lambda = 5$; (d) $\lambda = 25$. Adotamos que $\tau = 2$, $\nu^2 = 1$ e $\xi = 0.5$.

III.B Teoria $\lambda\Phi^4$

Passaremos agora à aplicação do princípio variacional (2.70) para TQC. Para tanto vamos analisar a dinâmica da teoria $\lambda\Phi^4$ com n campos em um espaço de Robertson-Walker plano com d dimensões espaciais⁵. A nossa escolha de coordenadas é tal que

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 \quad (3.25)$$

O apêndice A contém as expressões para alguns tensores geométricos neste espaço. Assumimos que a dinâmica dos campos Φ^i é governada pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = a^d \left\{ \frac{1}{2} \dot{\Phi}^i \dot{\Phi}^i - \frac{1}{2} a^{-2} \nabla \Phi^i \cdot \nabla \Phi^i - \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^i \Phi^i - \frac{\lambda}{4!} (\Phi^i \Phi^i)^2 \right\} \quad (3.26)$$

cujo momento canonicamente conjugado é

$$\Pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i} = a^d \dot{\Phi}^i \quad (3.27)$$

A densidade Hamiltoniana associada à Lagrangiana \mathcal{L} é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a^{-d} \Pi^i \Pi^i + a^d \left\{ \frac{1}{2} a^{-2} \nabla \Phi^i \cdot \nabla \Phi^i + \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^i \Phi^i + \frac{\lambda}{4!} (\Phi^i \Phi^i)^2 \right\} \quad (3.28)$$

Para utilizar o princípio variacional (2.70) façamos os seguintes *Ansätze* para ρ e Λ .

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = e^{-\gamma} e^{i\pi(\varphi_1 - \varphi_2)} \exp - \frac{1}{2} \left\{ (\varphi_1 - \varphi) A(\varphi_1 - \varphi) + (\varphi_2 - \varphi) A^*(\varphi_2 - \varphi) - 2(\varphi_1 - \varphi) B(\varphi_2 - \varphi) \right\} \quad (3.29a)$$

$$\hat{\Lambda} = \Lambda^{(1)} \mathbf{1} + \Lambda^{(\Phi)} \Phi + \Lambda^{(\Pi)} \Pi + \Pi \Lambda^{(\Pi^2)} \Pi - \left(\Phi \Lambda^{(\Phi\Pi)} \Pi + \Pi \Lambda^{(\Phi\Pi)} \Phi \right) + \Phi \Lambda^{(\Phi\Phi)} \Phi \quad (3.29b)$$

O fator γ em ρ é dado por $\frac{1}{2} \ln \det \pi(A_R - B_R)^{-1}$. Utilizando-se este *ansatz* para ρ , o valor esperado de médias lineares em Π e Φ são dadas por

$$\langle \Phi \rangle = \varphi \quad , \quad (3.30a)$$

$$\langle \Pi \rangle = \pi \quad , \quad (3.30b)$$

enquanto bilineares fornecem

$$\langle \Phi_i(\mathbf{x})\Phi_j(\mathbf{y}) \rangle = \varphi_i(\mathbf{x})\varphi_j(\mathbf{y}) + \Upsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad , \quad (3.30c)$$

$$\langle \Pi_i(\mathbf{x})\Pi_j(\mathbf{y}) \rangle = \pi_i(\mathbf{x})\pi_j(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}(A_R + B_R)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - ((B_I - A_I)\Pi(B_I + A_I))_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.30d)$$

$$\langle \Phi_i(\mathbf{x})\Pi_j(\mathbf{y}) \rangle = \frac{i}{2}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varphi_i(\mathbf{x})\pi_j(\mathbf{y}) - (\Upsilon(B_I + A_I))_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad , \quad (3.30e)$$

onde

$$\Upsilon^{-1} \equiv 2(A_R - B_R) \quad . \quad (3.30f)$$

Exigindo-se que a ação (2.70) seja estacionária com respeito a variações em $\Lambda^{(a)}$, obtemos as seguintes equações de movimento.

$$\dot{\varphi}_i(\mathbf{x}) = a^{-d}\pi_i(\mathbf{x}) \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_i(\mathbf{x}) = -a^d \left\{ a^{-2}\nabla^2\varphi_i(\mathbf{x}) + (\mu^2 + \xi R)\varphi_i(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{6}\varphi_i(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{6}\varphi_i(\mathbf{x})\Upsilon_{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{\lambda}{3}\Upsilon_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$\dot{A}_R \pm \dot{B}_R \pm a^{-d}[B_I, A_R \pm B_R] = a^{-d}\{A_I, A_R \pm B_R\} \quad (3.31c)$$

$$\dot{B}_I = a^{-d}(\{A_I, B_I\} + [B_R, A_R]) \quad (3.31d)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{Iij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a^{-d}(-A_R^2 + B_R^2 + A_I^2 + B_I^2)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + a^d \left(-a^{-2}\nabla^2 + \mu^2 + \xi R \right) \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ + \frac{\lambda a^d}{6} \left(\delta_{ij}\varphi_k(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x}) + 2\varphi_i(\mathbf{x})\varphi_j(\mathbf{x}) + \delta_{ij} \operatorname{tr} \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\Upsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.31e)$$

Para sistemas invariantes por translação espacial, podemos diagonalizar os kernels através do uso de (2.23) e (2.26). Iremos, por simplicidade, também assumir que a estrutura matricial é trivial e que $B_I = 0$. Definimos

$$\Omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{2A_R(\mathbf{p})} \quad , \quad (3.32a)$$

$$\Sigma(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2}A_I(\mathbf{p}) \quad , \quad (3.32b)$$

$$\delta(\mathbf{p}) = \frac{B_R(\mathbf{p})}{A_R(\mathbf{p})} \quad . \quad (3.32c)$$

As equações de movimento em termos das variáveis φ , π , δ , Ω e Σ são

$$\dot{\varphi} = a^{-d}\pi \quad , \quad (3.33a)$$

$$\dot{\pi} = -a^d \left\{ \mu^2 + \xi R + \frac{n}{6}\lambda\varphi^2 + \frac{(n+2)}{6}\lambda \int_{\mathbf{k}} \frac{\Omega(\mathbf{k})}{1-\delta(\mathbf{k})} \right\} \varphi \quad , \quad (3.33b)$$

$$\dot{\Omega}(\mathbf{p}) = a^{-d}4\Sigma(\mathbf{p})\Omega(\mathbf{p}) \quad , \quad (3.33c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}(\mathbf{p}) = a^{-d} \left(\frac{1-\delta^2(\mathbf{p})}{8\Omega^2(\mathbf{p})} - 2\Sigma^2(\mathbf{p}) \right) \\ - \frac{a^d}{2} \left\{ a^{-2}\mathbf{p}^2 + \mu^2 + \xi R + \frac{n+2}{6}\lambda\varphi^2 + \frac{n+2}{6}\lambda \int_{\mathbf{k}} \frac{\Omega(\mathbf{k})}{1-\delta(\mathbf{k})} \right\} \quad , \quad (3.33d) \end{aligned}$$

e δ é constante, como era esperado. A partir deste ponto, novamente por simplicidade, vamos considerar $n = 1$. As integrais sobre os momentos que aparecem nas equações (3.33) são potencialmente divergentes no ultravioleta. Para que estas equações façam algum sentido será necessário renormalizá-las para eliminarmos suas divergências. Como um primeiro passo para tanto, regularizaremos estas expressões, considerando-as em d dimensões espaciais, sendo que somente após as subtrações serem realizadas tomaremos o limite $d = 3$. Para obtermos o comportamento assintótico (grandes k) de Ω é conveniente eliminar-se Σ de (3.33d) utilizando-se (3.33c), o que implica que Ω deve satisfazer

$$\ddot{\Omega} = \frac{1-\delta^2}{2}a^{-2d}\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\Omega^{-1}\dot{\Omega}^2 - dH\dot{\Omega} - 2(a^{-2}k^2 + m^2 + \xi R)\Omega \quad , \quad (3.34)$$

onde

$$\begin{aligned} m^2 \equiv m^2(t) &= \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &= \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbf{k}} \frac{\Omega(\mathbf{k}, t)}{1 - \delta(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (3.35)$$

É interessante notar que a equação (3.34) para $\delta = 0$ reduz-se à equação (2.31), desde que a massa dependente do tempo $m^2(t)$ seja substituída por μ^2 . Isto significa que as equações (3.33) reproduzem corretamente as equações de um campo livre num estado puro.

Inicialmente renormalizaremos as equações (3.33) para estados puros, *i.e.*, $\delta = 0$. Neste caso é interessante generalizar o conceito de vácuo adiabático da teoria livre, definido o vácuo para a teoria interagente na aproximação Gaussiana. Isto é possível porque as equações de movimento para estados puros nesta aproximação são as mesmas da teoria livre com μ^2 substituído por $m^2(t)$.

As equações variacionais (3.33c) e (3.33d) com $\delta = 0$ podem ser combinadas em uma única equação para $\Xi \equiv \frac{1}{2}\Omega^{-1} - 2i\Sigma$.

$$i \frac{\partial \Xi}{\partial t} = a^{-d}\Xi^2 - a^d [a^{-2}k^2 + m^2 + \xi R] \quad (3.36a)$$

$$m^2(t) = \mu^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{2 \operatorname{Re} \Xi} \quad (3.36b)$$

Definindo-se $\Xi = -ia^d \frac{\partial}{\partial t} \ln F^*$ e utilizando-se as variáveis conformes (2.43), obtemos que

$$F_c'' + (k^2 + c [m^2 + (\xi - \alpha_d)R]) F_c = 0 \quad (3.37)$$

Se F_c satisfizer a normalização (2.45), $\Omega_c = |F_c|^2$ é solução de

$$\Omega_c'' = \frac{1}{2}\Omega_c^{-1} + \frac{1}{2}\Omega_c^{-1}\Omega_c'^2 - 2(k^2 + c [m^2 + (\xi - \alpha_d)R]) \Omega_c \quad (3.38)$$

Apesar de (3.37) ser não linear na aproximação Gaussiana, por causa da massa dependente do tempo envolver Ω_c , ainda podemos procurar uma solução formal do tipo de ondas planas

$$\chi_c = \frac{1}{\sqrt{2W}} \exp -i \int^\eta W(\eta') d\eta' \quad , \quad (3.39a)$$

$$W^2 = k^2 + c [m^2 + (\xi - \alpha_d)R] - \frac{1}{2} \left(\frac{W''}{W} - \frac{3}{2} \frac{W'^2}{W^2} \right) \quad , \quad (3.39b)$$

e a solução de (3.38) é

$$\Omega_c = (2W)^{-1} \quad . \quad (3.40)$$

Assim como procedemos no caso da teoria livre, W pode ser obtido iterativamente, no limite $H \ll \omega_k = \sqrt{k^2 a^{-2} + m^2}$, onde a solução de ordem zero é dada por

$$W^{(0)} = (k^2 + c [m^2 + (\xi - \alpha_d)R])^{1/2} \quad , \quad (3.41)$$

e a iteração de i -ésima ordem é obtida como em (2.49). Ao contrário da teoria livre, cada ordem de iteração não é uma solução aproximada no limite $H \ll \omega_k$, uma vez que a massa $m^2(t)$ é determinada de uma maneira auto-consistente envolvendo toda a solução. Pela mesma razão, as derivadas de n -ésima ordem não correspondem a termos de n -ésima ordem adiabática uma vez que $m^2(t)$ contem derivadas de todas as ordens do fator de escala. Todavia, esta expansão ainda é útil por nos fornecer o comportamento assintótico da solução para grandes momentos. O apêndice B exhibe a expressão para Ω_c até a segunda iteração.

Agora vamos passar a renormalização do setor do vácuo, que por definição é o conjunto de estados com o mesmo comportamento assintótico (grandes k) que Ω_c exibido no apêndice B. Também estudaremos qual a classe de estados cujas equações de movimento são finitas usando-se a prescrição de renormalização do vácuo. Além

disso mostraremos como estender facilmente este resultado para estados de mistura. Visando simplificar a notação vamos tomar $\varphi = 0$, já que este não influi na prescrição de renormalização.

A partir da expressão (B.2) para o comportamento a grandes k de Ω_c , podemos ver que

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) &= a^{(1-d)} \int_k \left[\frac{1}{2\bar{\omega}_k} - \frac{(\xi - \alpha_d)Ra^2}{4\bar{\omega}_k^3} + \mathcal{O}(\bar{\omega}_k^{-5}) \right] \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \frac{4}{(d-1)} [m^{d-3}\Gamma(3-d)] [m^2 + (\xi - \alpha_d)R] \cdot \quad (3.42a) \\ &\quad + \text{termos finitos para } d = 3\end{aligned}$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama e $\bar{\omega}_k = (k^2 + m^2c)^{1/2}$. Definimos a parte finita de $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ isolando o pólo que aparece para $d = 3$.

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \frac{4}{d-1} \left[\frac{1}{(3-d)} - \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right] [m^2 + (\xi - \alpha_d)R] \\ &\quad + \text{termos finitos para } d = 3 \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \frac{4}{(d-1)(3-d)} [m^2 + (\xi - \alpha_d)R] + \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \quad (3.42b)\end{aligned}$$

Aqui γ é a constante de Euler e Λ é uma escala arbitrária de massa.

As equações de movimento são finitas desde que adotemos a seguinte prescrição de renormalização:

$$\begin{aligned}\frac{\mu^2}{\lambda} &= \frac{\mu_R^2}{\lambda_R} \quad ; \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - \frac{2}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \frac{1}{(d-1)(3-d)} \quad ; \\ \xi &= (\xi_R - \alpha_d) \frac{\lambda}{\lambda_R} + \alpha_d \quad ,\end{aligned} \quad (3.43)$$

onde o índice R indica as quantidades renormalizadas. É trivial mostrar que a quantidade $\bar{m}^2 \equiv m^2 + (\xi - \alpha_d)R$, que aparece nas equações de movimento, é finita tendo em vista as relações (3.43).

$$\begin{aligned}
\bar{m}^2 &= m^2 + (\xi - \alpha_d)R \\
&= \mu_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + (\xi_R - \alpha_d)R \\
&\xrightarrow{d=3} \mu_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \left(\xi_R - \frac{1}{6}\right)R
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Consequentemente, as equações de movimento na aproximação Gaussiana são finitas e bem definidas no setor do vácuo em $n = 3 + 1$ dimensões.

Agora devemos analisar qual é a classe de estados Gaussianos para os quais as equações de movimento são finitas quando utilizamos as relações de renormalização para o vácuo (3.43). A partir de (3.42), analisando-se o comportamento assintótico (grandes k) de Ω_c , é fácil mostrar que $\Omega_c(k, \eta)$ e $\Omega'_c(k, \eta)$ devem satisfazer

$$\begin{aligned}
\Omega_c(k, \eta) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \bar{m}^2(\eta)c(\eta)}} [1 + O(k^{-3}) \text{ ou menor}] \quad , \\
\Omega'_c(k, \eta) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} [O(k^{-2}) \text{ ou menor}] \quad ,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

onde $\bar{m}^2(\eta)$ é a massa determinada consistentemente a partir de (3.35) utilizando-se a solução completa.

Voltemos agora ao estudo do problema da renormalização das equações de movimento (3.34) no caso de termos um estado de mistura^{1,5}. Para tanto definimos

$$\Omega \equiv \Omega_\delta \sqrt{1 - \delta^2} \quad , \tag{3.46}$$

que satisfaz a mesma equação que um estado puro. *i.e.*,

$$\ddot{\Omega}_\delta = \frac{1}{2}a^{-2d}\Omega_\delta^{-1} + \frac{1}{2}\Omega_\delta^{-1}\dot{\Omega}_\delta^2 - dH\dot{\Omega}_\delta - 2(a^{-2}k^2 + m_\delta^2 + \xi R)\Omega_\delta \tag{3.47}$$

com a única diferença que a massa efetiva contém δ em sua definição.

$$m_\delta^2(t) = \mu^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbf{k}} \Omega_\delta(k, t) \sqrt{\frac{1 + \delta(k)}{1 - \delta(k)}} \tag{3.48}$$

Neste ponto assumimos que o grau de mistura $\delta(\mathbf{k})$ se anula para grandes k . Esta hipótese é muito natural considerando-se que δ tende a zero exponencialmente para estados em equilíbrio térmico¹. Com isso, é trivial verificar que $m_\delta^2(t)$ é finita desde que Ω_δ possua o comportamento assintótico (3.45), quando expresso em variáveis conformes.

REFERÊNCIAS

1. O. J. P. Éboli, R. Jackiw e S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3557.
2. R. P. Feynman e A. R. Hibbs. "Quantum Mechanics and Path Integrals" (McGraw-Hill, NY, 1965).
3. R. Floreanini, *Ann. Phys.* **178** (1987) 227.
4. R. Balian e M. Vénéroni, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1353; **47** (1981) 1765 (E); *Ann. Phys.* **164** (1985) 334.
5. O. J. P. Éboli, S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Ann. Phys.* (1989) to appear.

CAPÍTULO IV

RENORMALIZAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Para que possamos ter um quadro coerente da evolução do universo primordial devemos possuir um conjunto completo de equações acopladas para a matéria e gravitação. Uma vez que ainda não existe uma descrição quântica para a gravitação, o que é feito usualmente é considerar a equação de Einstein semi-clássica

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad , \quad (4.1)$$

onde $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ é o valor esperado do tensor energia-momento no estado quântico do sistema. Como qualquer colegial sabe, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ é divergente, mesmo para um campo livre no espaço de Minkowski, por causa da soma sobre os modos zeros¹. Para que (4.1) faça sentido é necessário encontrar-se um meio de eliminar estes infinitos. Neste capítulo vamos discutir este problema tanto para a teoria livre, bem como para o modelo $\lambda\Phi^4$ na aproximação Gaussiana. Para simplificar a notação vamos analisar o caso de estados puros, sendo que o leitor mais interessado pode encontrar a generalização para estados de mistura na ref. [2].

IV.A O tensor energia-momento

O tensor energia-momento para uma teoria escalar descrita pela ação

$$I = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) - \frac{1}{2}\xi R\Phi^2 \right] \quad (4.2)$$

é

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - V(\Phi) \right] - \xi \left[G_{\mu\nu} \Phi^2 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Phi^2_{;\alpha;\beta} + \Phi^2_{;\mu;\nu} \right] \quad (4.3)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein e $;\mu$ representa a derivada covariante com respeito ao índice μ do espaço-tempo[†]. Na representação funcional de Schrödinger o tensor energia-momento é expresso em termos do operador de campo $\Phi(\mathbf{x}) [\longleftrightarrow \phi(\mathbf{x})\delta(\phi - \phi')]$ e o seu momento canonicamente conjugado $\Pi(\mathbf{x}) [\longleftrightarrow -i \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \delta(\phi - \phi')]$ para que possamos calcular o seu valor esperado em um estado dado.

No caso de um espaço plano de Robertson-Walker, o valor esperado de $T_{\mu\nu}$ em um estado Gaussiano invariante por translações *

$$\begin{aligned} \Psi(\phi, t) = & N(t) \exp i \int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}, t) (\phi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}, t)) \\ & \times \exp - \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} (\phi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}, t)) \left[\frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - i \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right] (\phi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}, t)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

é dado por

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle = & \frac{1}{2} a^{-2d} \pi^2 + V(\varphi) - \xi \left[G_{00} \varphi^2 - 2a^{-d} dH \varphi \pi \right] \\ & + \frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-2d} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ & + \frac{1}{2} \left([-a^{-2} \nabla_x^2 + m^2] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ & - \xi \left[G_{00} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - 4dH a^{-d} (\Sigma \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] - \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

[†] $T_{\mu\nu}$ em (4.3), o qual é a fonte na equação de Einstein, não coincide com o tensor energia-momento canônico, $T_{\mu\nu}^c = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$, para $\xi \neq 0$.

* Os parâmetros deste *ansatz* satisfazem as equações (3.33) com $\delta = 0$.

$$\equiv \langle T_{00}^0 \rangle - \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \quad , \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{ij} \rangle &= a^2 \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{2} a^{-2d} \pi^2 - V(\varphi) - \xi \left[a^{-2} \frac{1}{d} \delta^{nm} G_{nm} \varphi^2 + 2a^{-d} (d-1) H \varphi \pi + \partial_t^2 \varphi^2 \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-2d} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\left[- \left(1 - \frac{2}{d} \right) a^{-2} \nabla_x^2 + m^2 \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ &\quad - \xi \left[\frac{a^{-2}}{d} \delta^{nm} G_{nm} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 4a^{-d} (d-1) H (\Sigma \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} \\ &\equiv \langle T_{ij}^0 \rangle + a^2 \delta_{ij} \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \quad , \quad (4.5b) \end{aligned}$$

$$\langle T_{0i} \rangle = 0 \quad . \quad (4.5c)$$

Nas equações acima, $m^2(t)$ é a massa dependente do tempo definida em (3.35) com $\delta = 0$. $\langle T_{\mu\nu}^0 \rangle$ é tensor energia-momento para a teoria livre quando m^2 é substituído por μ^2 . Como esperado, este tensor é diagonal, e pode ser expresso em termos da densidade de energia $\langle \epsilon \rangle$ e da pressão $\langle p \rangle$. Em quatro dimensões temos que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \text{diag} (\langle \epsilon \rangle, \langle p \rangle a^2, \langle p \rangle a^2, \langle p \rangle a^2) \quad . \quad (4.6)$$

Como pode ser visto a partir de (4.5), $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ é potencialmente divergente no ultravioleta no limite $d = 3$, mesmo para a teoria livre ($\lambda = 0$) por causa do comportamento a curtas distâncias de $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t)$. Contudo a expressão para $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ regularizada dimensionalmente é finita e bem definida, sendo também covariantemente conservada. Para um espaço de Robertson-Walker plano, a conservação covariante de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ reduz-se a

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle + dH \langle \epsilon + p \rangle = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Neste capítulo discutiremos como é possível obter uma expressão renormalizada e finita para $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ na aproximação Gaussiana. Começaremos analisando a renormalização de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ para o vácuo da teoria livre. Posteriormente, passaremos à análise da teoria interagente. Por simplicidade, assumiremos que $\varphi = \pi = 0$.

Para podermos utilizar a expansão assintótica para Ω_c é conveniente reescrever $\langle T_{\mu\nu}^0 \rangle$ em (4.5).

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}^0|0 \rangle &= \frac{1}{8}a^{-2d}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-2d}(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left([-a^{-2}\nabla_x^2 + m^2] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ &\quad - \xi [G_{00}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - 4dHa^{-d}(\Sigma\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{ij}^0|0 \rangle &= a^2\delta_{ij} \left\{ \frac{1}{8}a^{-2d}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-2d}\Sigma\Omega\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\left[-\left(1 - \frac{2}{d}\right)a^{-2}\nabla_x^2 + m^2 \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \right. \\ &\quad \left. - \xi \left[\frac{a^{-2}}{d}\delta^{nm}G_{nm}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 4a^{-d}(d-1)H(\Sigma\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.8b)$$

Podemos eliminar Σ empregando que $\Sigma = \frac{1}{4}a^d\Omega^{-1}\dot{\Omega}$. Utilizando-se as variáveis conformes η e $\Omega_c(k, \eta)$ e expressando (4.8) como integrais no espaço dos momentos obtemos que

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}^0|0 \rangle &= c^{-(d+1)/2} \int_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{4}\Omega_c'' + \left(k^2 + c[m^2 + (\xi - \alpha_d)R] \right) \Omega_c \right. \\ &\quad \left. - (\xi - \alpha_d) \left[\left(G_{00}c + \frac{1}{2}Rc + \frac{d(d-1)}{4}D^2 \right) \Omega_c - \frac{d}{2}D\Omega_c' \right] \right\} , \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$\langle 0|T_{ij}^0|0 \rangle = c^{-(d-1)/2}\delta_{ij} \int_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{4d}\Omega_c'' + \frac{1}{d}k^2\Omega_c \right.$$

$$- (\xi - \alpha_d) \left[\left(\frac{1}{cd} \delta^{mn} G_{mn} - \frac{1}{2} R - \frac{(1-d)}{4c} D^2 + \frac{(d-1)}{2c} D' \right) \Omega_c - \frac{d}{2} D \Omega'_c + \Omega''_c \right] \Bigg\}, \quad (4.9b)$$

onde $c(\eta) = a^2(t)$ e $D = c'/c$ como definido anteriormente.

IV.B Teoria livre

Para a teoria livre $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ é dado por $\langle 0|T_{\mu\nu}^0|0\rangle$ com $m^2(t) = \mu^2$. Usando-se a forma explícita da expansão adiabática para Ω_c dada no apêndice B, obtemos $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$, o qual é a expansão de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ até quarta ordem adiabática. Esta última quantidade contém todas as divergências de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$. Dividiremos $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$ em suas partes divergente e finita no limite $d = 3$.

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4} = \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4} + \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} \quad (4.10)$$

As partes divergente e finita de $\langle 0|T_{00}|0\rangle^{A=4}$ são

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4} = c^{-(d+1)/2} \int_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\omega}_k^0 - (\xi - \alpha_d) \frac{c}{2\bar{\omega}_k^0} G_{00} + (\xi - \alpha_d)^2 \frac{c^2}{8(\bar{\omega}_k^0)^3} {}^{(1)}H_{00} \right\}, \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} = c^{-(d+1)/2} \int_{\mathbf{k}} & \left\{ \frac{\mu^4 c^2}{64(\bar{\omega}_k^0)^5} D^2 \right. \\ & - \frac{\mu^4 c^2}{256(\bar{\omega}_k^0)^7} (2D'' D - D'^2 + 4D' D^2 + D^4) \\ & + \frac{7\mu^6 c^3}{256(\bar{\omega}_k^0)^9} (D' D^2 + D^4) - \frac{105\mu^8 c^4}{4096(\bar{\omega}_k^0)^{11}} D^4 \\ & \left. + (\xi - \alpha_d) \left[-\frac{1}{8\bar{\omega}_k^0} d(d-1) D^2 - \frac{\mu^2 c}{8(\bar{\omega}_k^0)^3} d D^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu^2 c}{64(\bar{\omega}_k^0)^5} d \left(4D''D - 2D'^2 + 4D^2D' + (3-d)D^4 \right) \\
 & + \frac{\mu^4 c^2}{512(\bar{\omega}_k^0)^7} d \left(-80D^2D' + (5d-85)D^4 \right) + \frac{35d}{256} \frac{\mu^6 c^3}{(\bar{\omega}_k^0)^9} D^4 \Big] \\
 & + (\xi - \alpha_d)^2 \left[\frac{c}{16(\bar{\omega}_k^0)^3} (d-3)dD^2R + \frac{3\mu^2 c^2}{16(\bar{\omega}_k^0)^5} dD^2R \right] \Big\} , \quad (4.11b)
 \end{aligned}$$

onde $\bar{\omega}_k^0 = (k^2 + c\mu^2)^{1/2}$ e ${}^{(1)}H_{00}$ é a componente $(0,0)$ do tensor

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} R^2 , \quad (4.12)$$

o qual é covariantemente conservado [A expressão explícita de ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ num espaço de Robertson-Walker encontra-se no apêndice A]. Analogamente as partes finita e divergente de $\langle 0|T_{ij}|0\rangle^{A=4}$ são

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T_{ij}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4} & = c^{-(d-1)/2} \delta_{ij} \int_k \left\{ \frac{1}{2d} \bar{\omega}_k^0 - \frac{1}{2d} \frac{\mu^2 c}{\bar{\omega}_k^0} - (\xi - \alpha_d) \frac{1}{2\bar{\omega}_k^0} \frac{1}{d} \delta^{mn} G_{mn} \right. \\
 & \left. + (\xi - \alpha_d)^2 \frac{c}{8(\bar{\omega}_k^0)^3} \frac{1}{d} \delta^{mn} {}^{(1)}H_{mn} \right\} , \quad (4.13a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T_{ij}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} & = c^{-(d-1)/2} \delta_{ij} \frac{1}{d} \int_k \left\{ -\frac{\mu^4 c^2}{64(\bar{\omega}_k^0)^5} (4D' + 3D^2) \right. \\
 & + \frac{\mu^4 c^2}{256(\bar{\omega}_k^0)^7} (4D''' + 14DD'' + 13D'^2 + 20D'D^2 + 3D^4 + 20D^2\mu^2 c) \\
 & - \frac{\mu^6 c^3}{256(\bar{\omega}_k^0)^9} (28DD'' + 21D'^2 + 119D'D^2 + 42D^4) \\
 & + \frac{\mu^8 c^4}{4096(\bar{\omega}_k^0)^{11}} (1743D^4 + 1848D'D^2) - \frac{1155\mu^{10} c^5}{4096(\bar{\omega}_k^0)^{13}} D^4 \\
 & + (\xi - \alpha_d) \left[\frac{1}{\bar{\omega}_k^0} \left(\frac{d-1}{4d} Rc + \frac{1-d}{8} D^2 - \frac{1-d}{4} D' \right) \right. \\
 & + \frac{\mu^2 c}{(\bar{\omega}_k^0)^3} \left(\frac{Rc}{4d} + \frac{2-d}{8} D^2 + \frac{D'}{4} \right) \\
 & \left. + \frac{\mu^2 c}{(\bar{\omega}_k^0)^5} \left(-\frac{3}{8} \mu^2 c D^2 + \frac{1}{32} \left(-4D''' - 6D''D - 7D'^2 + [4d-14]D^2D' + \frac{1}{2}[d-3]D^4 \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu^4 c^2}{128(\bar{\omega}_k^0)^7} \left(60D'^2 + 80D''D + (-10d + 270)D'D^2 + \frac{1}{4}(-55d + 375)D'D^2 \right) \\
& + \frac{\mu^6 c^3}{512(\bar{\omega}_k^0)^9} \left(35(d - 27)D^4 - 1120D'D^2 \right) + \frac{315}{256} \frac{\mu^8 c^4}{(\bar{\omega}_k^0)^{11}} D^4 \Big] \\
& + (\xi - \alpha_d)^2 d \left[\frac{1}{16(\bar{\omega}_k^0)^3} (3 - d) \left((3d - 6)D^2 D' + \frac{1}{16}(d - 1)(d - 13)D^4 + 3D'^2 + 4D''D \right) \right. \\
& + \frac{\mu^2 c}{64(\bar{\omega}_k^0)^5} \left(-48D''D - 36D'^2 - 12(2d - 1)D'D^2 + \frac{3}{4}(d - 1)(3d - 7)D^4 \right) \\
& \left. + \frac{\mu^4 c^2}{128(\bar{\omega}_k^0)^7} \left(120D'D^2 + 30(d - 1)D^4 \right) \right] \Big\} . \tag{4.13b}
\end{aligned}$$

Após realizarmos as integrações, obtemos a parte divergente de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$, resultado este que está em acordo com a ref. [1].

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4} &= \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \left[\frac{1}{3-d} - \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\
&\times \left\{ -\frac{4\mu^4}{(d+1)(d-1)} g_{\mu\nu} + (\xi - \alpha_d) \frac{4\mu^2}{(d-1)} G_{\mu\nu} + (\xi - \alpha_d)^{2(1)} H_{\mu\nu} \right\} \tag{4.14a}
\end{aligned}$$

onde Λ é uma escala de massa, a qual assumimos obedecer

$$\Lambda = \mu e^{\gamma/2} \tag{4.14b}$$

de tal forma que $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4}$ contenha somente o pólo.

Antes de mais nada é conveniente expressar-se $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fn}}^{A=4}$ em termos de tensores conservados covariantemente. Definindo-se

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^n x \sqrt{-g} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} , \\
{}^{(2)}H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^n x \sqrt{-g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} , \tag{4.15}
\end{aligned}$$

podemos expressar obter uma fórmula para $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fn}}^{A=4}$ manifestamente covariante.†

† As expressões explícitas de $H_{\mu\nu}$ e ${}^{(2)}H_{\mu\nu}$ para o caso n -dimensional encontram-se no apêndice A.

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} &= \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} e^{(3-d)/2} \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right) \\
 &\times \left\{ -\frac{1}{3} \frac{\mu^2}{d(d-1)} G_{\mu\nu} + \frac{(5-d)}{240} \frac{1}{d^2} {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right. \\
 &+ \frac{(5-d)}{360(d-2)(d-3)} \left(H_{\mu\nu} - 4{}^{(2)}H_{\mu\nu} + {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right) \\
 &\left. - (\xi - \alpha_d) \frac{1}{6d} {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

O terceiro termo entre colchetes em (4.16) é finito por causa da seguinte relação, a qual é válida para métricas conformemente planas.

$$\begin{aligned}
 H_{\mu\nu} - 4{}^{(2)}H_{\mu\nu} + {}^{(1)}H_{\mu\nu} &= (4-n) \left[\frac{4(n-3)}{(n-2)^2} R_{\mu\alpha} R^{\alpha}_{\nu} \right. \\
 &- \frac{2(n-3)}{(n-2)^2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{2n(n-3)}{(n-1)(n-2)^2} R R_{\mu\nu} + \frac{(n+2)(n-3)}{2(n-1)(n-2)^2} R^2 g_{\mu\nu} \left. \right] \\
 &\equiv (4-n) {}^{(3)}H_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Portanto $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$ pode ser expresso de maneira manifestamente covariante e conservada. A parte divergente de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$, dada por (4.14), coincide com o resultado obtido covariantemente para $\langle 0_{\text{out}}|T_{\mu\nu}|0_{\text{in}}\rangle^{A=4}$ utilizando-se as séries de DeWitt-Schwinger para a ação efetiva [$\langle 0_{\text{out}}|$ e $|0_{\text{in}}\rangle$ são os vácuos "out" e "in"]. Todavia a parte finita de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$ difere do resultado obtido usando-se este método.^{1,3}

Apesar da parte divergente de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$ ser covariantemente conservada, é natural subtrair-se todo $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4}$, uma vez que a parte convergente contém termos de quarta ordem adiabática, e a expansão adiabática satisfaz a equação de movimento ordem a ordem. Portanto definimos $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_R$ como sendo

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_R \equiv \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle - \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle^{A=4} \tag{4.18}$$

O significado físico desta subtração é bem definido: Consideremos a seguinte extensão para a ação de Einstein para a gravitação

$$I_G = \int d^n x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G_N} \{ \Lambda + R + h R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_1 R^2 + g_2 R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \}. \quad (4.19)$$

A subtração (4.18) pode ser vista como uma renormalização dos parâmetros da ação (4.19). Assumindo-se que parâmetros renormalizados satisfaçam $h_R = g_{1R} = g_{2R} = \Lambda_R = 0$ recobramos a equação de Einstein semi-clássica

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_R \langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle_R. \quad (4.20)$$

No caso do sistema ser invariante classicamente por transformações conformes, *i.e.*, para $\mu^2 = 0$ e $\xi = \frac{1}{6}$, nossos resultados reproduzem a anomalia do traço^{1,3}. A origem desta é a parte finita da subtração (4.18) para $d = 3$.

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\mu}{}^{\mu}|0 \rangle_R \Big|_{\substack{\mu^2=0 \\ \xi=\frac{1}{6}}} &= - \langle 0|T_{\mu}{}^{\mu}|0 \rangle^{A=4} \Big|_{\substack{\mu^2=0 \\ \xi=\frac{1}{6}}} \\ &= - \frac{1}{2880\pi^2} \left[\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu}{}^{\mu} - {}^{(3)}H_{\mu}{}^{\mu} \right] \\ &= - \frac{1}{2880\pi^2} \left[R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 + \square R \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

IV.C Teoria interagente na aproximação Gaussiana

Mostraremos a seguir que mesmo na presença de interações $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle$ dado por (4.5) é finito para $\lambda_R \neq 0$, desde que a renormalização da massa e das constantes de acoplamento seja dada por (3.43). A seguir consideraremos somente os termos potencialmente divergentes em $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle = \langle 0|T_{\mu\nu}^0|0 \rangle - g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ e demonstraremos que alguns infinitos desaparecem após a renormalização de μ , λ e ξ e que as divergências que sobrevivem em $\langle 0|T_{\mu\nu}^0|0 \rangle$ cancelam as contidas em $g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \Omega\Omega$.

Da mesma forma que procedemos para o cálculo de $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ para a teoria livre, substituímos a expansão adiabática (B.2) para Ω_c em (4.9) e obtemos que

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}^0|0\rangle_{\text{div}} &= \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \left[\frac{1}{3-d} - \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &\times \left\{ -\frac{4m^4}{(d+1)(d-1)} g_{00} + (\xi - \alpha_d) \left[\frac{4m^2}{d-1} G_{00} - 2dH\partial_t m^2 \right] + (\xi - \alpha_d)^{2(1)} H_{00} \right\}, \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{ij}^0|0\rangle_{\text{div}} &= \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \left[\frac{1}{3-d} - \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &\left\{ -\frac{4m^4}{(d+1)(d-1)} g_{ij} + (\xi - \alpha_d) \left[\frac{4m^2}{d-1} G_{ij} + a^2 \delta_{ij} ((10-2d)H\partial_t m^2 + \partial_t^2 m^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + (\xi - \alpha_d)^{2(1)} H_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (4.22b)$$

As equações (4.22a,b) possuem a mesma estrutura que (4.14), exceto pelos termos que envolvem derivadas de $m^2(t)$, os quais se anulam para a teoria livre.

O nosso próximo passo é obter a parte divergente de $-g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \Omega \Omega$:

$$\begin{aligned} &-g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Big|_{\text{div}} = \\ &-g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \left\{ \left(\frac{4\bar{m}^2}{(4\pi)^{(d+1)/2} (d-1)(3-d)} \right)^2 - \frac{8\bar{m}^2}{(4\pi)^{(d+1)/2} (d-1)(3-d)} \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $\bar{m}^2 = m^2 + (\xi - \alpha_d)R$.

Neste ponto é conveniente proceder à renormalização de μ , λ e ξ e considerar-se o limite de $d \rightarrow 3$. Para tanto é interessante notar que (3.43) acarreta que

$$\lim_{d \rightarrow 3} \lambda = -16\pi^2(3-d) \left[1 + \frac{16\pi^2(3-d)}{\lambda_R} + O((3-d)^2) \right] \quad \text{para } \lambda_R \neq 0, \quad (4.24)$$

e também que

$$\begin{aligned} (\xi - \alpha_d) &= (\xi_R - \alpha_d) \frac{\lambda}{\lambda_R} \\ &= \frac{(\xi_R - \alpha_d)}{\lambda_R} [-16\pi^2(3-d)] \left[1 + \frac{16\pi^2(3-d)}{\lambda_R} + O((3-d)^2) \right], \end{aligned} \quad (4.25a)$$

$$\begin{aligned} m^2(t) &= \bar{m}^2 - (\xi - \alpha_d)R \\ &= \bar{m}^2 - \frac{(\xi_R - \alpha_d)R}{\lambda_R} [-16\pi^2(3-d)] \left[1 + \frac{16\pi^2(3-d)}{\lambda_R} + O((3-d)^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.25b)$$

Substituindo-se (4.24) e (4.25) em (4.22) e (4.23) obtemos que o tensor energia-momento é finito para $\lambda_R \neq 0$.

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{d \rightarrow 3 \\ \lambda_R \neq 0}} \left\{ \langle 0|T_{\mu\nu}^0|0 \rangle_{\text{div}} - g_{\mu\nu} \frac{\lambda}{8} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Big|_{\text{div}} \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_R} \left[\frac{1}{2} \mu_R^4 g_{\mu\nu} - 2(\xi_R - \alpha_d) \mu_R^2 G_{\mu\nu} - (\xi_R - \alpha_d)^2 {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right] \\ &+ \text{termos finitos de } O(\lambda_R^n; n \geq 0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Em termos dos parâmetros renormalizados $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle$ no limite $d \rightarrow 3$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}|0 \rangle_{\mu_R, \lambda_R, \xi_R} &= \left[\frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \left(\Omega^{-1} \dot{\Omega}^2 \right) (\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left([-a^{-2} \nabla_x^2 + \bar{m}^2] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \right. \\ &\left. \left. - \alpha_d \left(G_{00} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - dH\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \right]_{\text{finite part}} \right. \\ &- (\xi_R - \alpha_d) \left[\left(G_{00} + \frac{1}{2} R \right) \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - dH\dot{\Omega}_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \\ &- \frac{\lambda_R}{8} \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &\left. + \frac{1}{\lambda_R} \left[\frac{1}{2} \mu_R^4 g_{00} - 2(\xi_R - \alpha_d) \mu_R^2 G_{00} - (\xi_R - \alpha_d)^2 {}^{(1)}H_{00} \right], \right. \end{aligned}$$

(4.27a)

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{ij}|0\rangle \Big|_{\mu_R, \lambda_R, \xi_R} &= a^2 \delta_{ij} \left\{ \left[\frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} (\Omega^{-1} \dot{\Omega}^2)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\left[- \left(1 - \frac{2}{d} \right) a^{-2} \nabla_x^2 + \bar{m}^2 \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \alpha_d \left(\frac{1}{d} a^{-2} \delta^{mn} G_{mn} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - (1-d) H \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \right] \right]_{\text{finite part}} \\
&\quad - (\xi_R - \alpha_d) \left[\left(\frac{1}{d} a^{-2} \delta^{mn} G_{mn} - \frac{1}{2} R \right) \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\
&\quad \left. - (1-d) H \dot{\Omega}_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \ddot{\Omega}_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_R}{8} \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_R} \left[\frac{1}{2} \mu_R^4 g_{ij} - 2(\xi_R - \alpha_d) \mu_R^2 G_{ij} - (\xi_R - \alpha_d)^2 {}^{(1)} H_{ij} \right] .
\end{aligned} \tag{4.27b}$$

Aqui $\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ é definido através de (3.42b) ao passo que a escala de massa Λ foi escolhida como em (4.14b):

$$\Lambda = \mu_R e^{\gamma/2} . \tag{4.28a}$$

A expressão $[\dots]_{\text{finite part}}$ em (4.27a,b) significa que os pólos devem ser eliminados:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \Omega^{-1} \dot{\Omega}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\left[-a^{-2} \nabla_x^2 + \bar{m}^2 \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \alpha_d \left(G_{00} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - d H \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \\
&\quad \stackrel{d \rightarrow 3}{=} - \frac{\bar{m}^4}{32\pi^2(3-d)} + \text{parte finita} ,
\end{aligned} \tag{4.28b}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \Omega^{-1} \dot{\Omega}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\left[- \left(1 - \frac{2}{d} \right) a^{-2} \nabla_x^2 + \bar{m}^2 \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_d \left(\frac{1}{d} a^{-2} \delta^{nm} G_{nm} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - (1-d) H \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \\
 & \stackrel{d \rightarrow 3}{=} \frac{\bar{m}^4}{32\pi^2(3-d)} + \text{parte finita} \tag{4.28c}
 \end{aligned}$$

Para incluirmos o caso $\lambda_R = 0$ na nossa discussão devemos proceder com mais cuidado. A razão para tanto é a existência de termos proporcionais a $\frac{1}{\lambda_R}$ em $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$, os quais possuem a mesma estrutura tensorial que $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{div}}^{A=4}$ para a teoria livre. No limite $\lambda_R = 0$ a prescrição de renormalização nos ensina que

$$\lambda = 0 ; \quad \mu_R^2 = \mu^2 ; \quad \xi_R - \alpha_d = \xi - \alpha_d$$

e recuperamos a teoria livre na qual as divergências em $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ reaparecem na forma de termos contendo $\frac{1}{\lambda_R}$. Para que as nossas expressões assim sejam bem definidas neste limite devemos subtrair os termos de ordem λ_R^{-1} . Assim como foi feito para a teoria livre, também subtrairemos $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4}$ no limite de $\lambda_R = 0$. Portanto a expressão renormalizada para o tensor energia-momento da teoria interagente na aproximação Gaussiana é dada por

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_R &= \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{|\mu_R, \lambda_R, \xi_R} \\
 & - \left\{ \frac{1}{\lambda_R} \left[\frac{1}{2} \mu_R^4 g_{\mu\nu} - 2(\xi_R - \alpha_d) \mu_R^2 G_{\mu\nu} - (\xi_R - \alpha_d)^2 {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right] \right. \\
 & \left. + \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} \Big|_{\lambda_R=0} \right\} . \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

onde $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{fin}}^{A=4} \Big|_{\lambda_R=0}$ é dado por (4.16). É extremamente simples mostrar que a expressão acima é covariantemente conservada, como deveria sê-lo.

Em resumo, acabamos de mostrar que $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_R$ para a teoria interagente é finito após a renormalização das constantes de acoplamento e a massa do campo da matéria. Para que possamos considerar o caso particular da teoria livre devemos efetuar

as mesmas subtrações necessárias para que esta exiba um tensor energia-momento finito.

No limite $\xi_R = \frac{1}{6}$ e $\mu_R = 0$ podemos obter as correções à anomalia do traço devidas à interação.

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\mu}^{\mu}|0\rangle_R \Big|_{\substack{\mu_R=0 \\ \xi_R=\frac{1}{6}}} &= -\frac{\lambda_R^2}{128\pi^2}\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &\quad -\frac{1}{2880\pi^2}\left[R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 + \square R\right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalmente, é possível demonstrar² que os estados Gaussianos exibindo o comportamento assintótico a seguir conduzem a um tensor energia-momento finito.

$$\begin{aligned} \Omega_c(k, \eta) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \tilde{m}^2(\eta)c(\eta)}} (1 + O(k^{-5})) \\ \Omega'_c(k, \eta) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} O(k^{-5}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

REFERÊNCIAS

1. N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982), e referências aí contidas.
2. O. Éboli, S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Renormalizability of the Functional Schrödinger Picture in Robertson-Walker Space-Time*, preprint MIT-CTP # 1638, novembro de 1988, to appear in *Ann. Phys.*
3. S. Deser, M. J. Duff e C. J. Isham, *Nucl. Phys.* B111 (1976) 45; S. M. Christensen e M. J. Duff, *Phys. Lett.* 76B (1978) 571.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos o alicerce teórico necessário para a descrição da evolução temporal do universo primordial. Para tanto utilizamos a representação funcional de Schrödinger, a qual é adequada para o tratamento de problemas de condição inicial. Aqui valemo-nos de métodos variacionais, os quais nos permitem extrair alguns efeitos não perturbativos dos modelos considerados.

No capítulo II desenvolvemos a representação funcional de Schrödinger para estados de mistura. Posteriormente no capítulo III, utilizamos este formalismo para obter as equações de movimento na aproximação Gaussiana para o campo da matéria num espaço de Robertson–Walker plano. Neste capítulo também procedemos à renormalização destas equações.

Completando o nosso plano inicial analisamos no capítulo IV a renormalização do tensor energia–momento $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ para a teoria livre e para a interagente na aproximação Gaussiana. Para esta última generalizamos o conceito de regularização adiabática e também estabelecemos que o tensor energia–momento é renormalizado pela mesma subtração que torna finita a teoria livre, desde que procedamos à renormalização da massa e das constantes de acoplamento.

Como um todo, nossos resultados fornecem um conjunto coerente de equações para a matéria (3.33) e gravitação (4.1, 4.29) na aproximação Gaussiana. Estas equações permitem-nos analisar algumas questões concernentes a dinâmica do universo, tais como a estabilidade do espaço de de Sitter e quais são as condições iniciais que acarretam inflação. Presentemente, estas questões estão sendo objeto de análise.

APÊNDICE A

CONVENÇÕES E FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Neste trabalho assumimos que o espaço tempo é do tipo de Robertson–Walker plano e que as coordenadas são tais que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 \\ &= c(\eta) [d\eta^2 - d\mathbf{x}^2] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e segundo as nossas convenções o tensor de Riemann é definido por

$$\begin{aligned} R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} &= \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \quad , \\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

O tensor de Ricci, $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$, e o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ são dados pelas seguintes expressões para o caso da dimensão do espaço ser $n = d + 1$.

$$\begin{aligned} R_{00} &= d \left(\dot{H} + H^2 \right) = \frac{1}{2c} dD' \\ R_{ij} &= - \left(\dot{H} + dH^2 \right) a^2 \delta_{ij} = - \left(\frac{D'}{2} + \frac{d-1}{4} D^2 \right) \delta_{ij} \\ R &= d \left[2\dot{H} + (d+1)H^2 \right] = \frac{1}{c} d \left[D' + \frac{d-1}{4} D^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Os tensores conservados covariantemente, os quais foram obtidos variando a ação

generalizada de Einstein, possuem as seguintes expressões em termos de $R_{\mu\nu}$ e R .

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^n x \sqrt{-g} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&= -\frac{4(n^2 - 3n + 4)}{(n-2)^2} R_{\mu\alpha} R^\alpha{}_\nu + \frac{2n}{(n-2)^2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{4(n^2 - 2n + 2)}{(n-1)(n-2)^2} R R_{\mu\nu} - \frac{(3n-2)}{(n-1)(n-2)^2} R^2 g_{\mu\nu} - 4\Box R_{\mu\nu} + 2R_{;\mu;\nu} \\
(1) H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^n x \sqrt{-g} R^2 \\
&= 2R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} - 2\Box R g_{\mu\nu} + 2R_{;\mu;\nu} \\
(2) H_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^n x \sqrt{-g} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{4}{(n-2)} R_{\mu\alpha} R^\alpha{}_\nu - \frac{n-6}{2(n-2)} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{2n}{(n-1)(n-2)} R R_{\mu\nu} - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R^2 g_{\mu\nu} \\
&\quad - \Box R_{\mu\nu} + R_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2} \Box R g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Utilizamos também o tensor $(3)H_{\mu\nu}$ que é definido por

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} - 4(2)H_{\mu\nu} + (1)H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu} \\
&\quad - 2C_{\mu\alpha\beta\gamma} C_\nu^{\alpha\beta\gamma} + (4-n)(3)H_{\mu\nu} \quad ,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

onde $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o tensor de Weyl. Para uma métrica conformemente plana, como (A.1), $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ anula-se e $(3)H_{\mu\nu}$ é conservado de forma covariante.

No cálculo do valor esperado de $T_{\mu\nu}$ utilizamos as expressões explícitas para

(¹) $H_{\mu\nu}$ e (³) $H_{\mu\nu}$ em um espaço de Robertson-Walker plano com dimensão $n = d + 1$.

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{00} &= \frac{d^2}{c^2} \left[-D''D + \frac{1}{2}D'^2 - \frac{1}{2}(d-3)D'D^2 + \frac{1}{32}(d-1)(9-d)D^4 \right] \\ {}^{(1)}H_{ij} &= \frac{\delta_{ij}d}{c} \left[2D''' + (2d-7)D''D + \frac{1}{2}(3d-8)D'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}(d^2-8d+11)D'D^2 + \frac{1}{32}(d-1)(4-d)(9-d)D^4 \right] \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$${}^{(3)}H_{00} = \frac{1}{32c^2} [d(d-1)(d-2)D^4]$$

$${}^{(3)}H_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{c} (d-1)(d-2) \left[-\frac{1}{4}D'D^2 + \frac{4-d}{32}D^4 \right]$$

Num espaço conformemente plano com $n = 3 + 1$ dimensões, os tensores (¹) $H_{\mu\nu}$ e (²) $H_{\mu\nu}$ não são independentes: (²) $H_{\mu\nu} = \frac{1}{3}({}^{(1)}H_{\mu\nu})$.

APÊNDICE B

EXPANSÃO ADIABÁTICA ATÉ QUARTA ORDEM DE Ω_c

A expansão assintótica da solução para o vácuo $\Omega_c(k, \eta)$, a qual é válida tanto para a teoria livre como para a interagente, pode ser escrita em termos das quantidades M , $\bar{\omega}_k$ e r definidas como sendo

$$\begin{aligned} M &= \left(\mu^2 + \frac{\lambda}{2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) c = m^2 c \quad , \\ r &= (\xi - \alpha_d) R c \quad , \\ \bar{\omega}_k &= (k^2 + M)^{1/2} \quad . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Esta expansão é obtida considerando-se até a segunda iteração de (2.47) ou (3.39), e contem termos envolvendo derivadas temporais até quarta ordem. A sua expressão é

$$\begin{aligned} \Omega_c(k, \eta) &= (2W(\eta))^{-1} \\ &= \frac{1}{2\bar{\omega}_k} - \frac{r}{4(\bar{\omega}_k)^3} + \frac{1}{16(\bar{\omega}_k)^5} [M'' + r'' + 3r^2] \\ &\quad + \frac{1}{64(\bar{\omega}_k)^7} [-5M'^2 - M'''' - 10rM'' - 10M'r'] \\ &\quad + \frac{1}{256(\bar{\omega}_k)^9} [21M''^2 + 28M'M'''' + 70rM'^2] \\ &\quad - \frac{231}{512(\bar{\omega}_k)^{11}} M'' M'^2 + \frac{1155}{4096} \frac{M'^4}{(\bar{\omega}_k)^{13}} \quad . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Para a teoria livre $m^2 = \mu^2$, $\bar{\omega}_k = \bar{\omega}_k^0 = (k^2 + \mu^2 c)^{1/2}$ e Ω_c em (B.2) é chamada de solução *adiabática* de quarta ordem e apresenta derivadas temporais de $c(\eta)$ de até

quarta ordem.

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_c^{A=4} = & \frac{1}{2\bar{\omega}_k^0} + \frac{\mu^2 c (D' + D^2)}{16(\bar{\omega}_k^0)^5} - \frac{5\mu^4 c^2 D^2}{64(\bar{\omega}_k^0)^7} \\
& - \frac{\mu^2 c}{64(\bar{\omega}_k^0)^7} (D''' + 4D''D + 3D'^2 + 6D'D^2 + D^4) \\
& + \frac{\mu^4 c^2}{256(\bar{\omega}_k^0)^9} (21D'^2 + 28D''D + 126D'D^2 + 49D^4) \\
& - \frac{231\mu^6 c^3}{512(\bar{\omega}_k^0)^{11}} (D'D^2 + D^4) + \frac{1155\mu^8 c^4}{4096} D^4 \\
& + (\xi - \alpha_d) \left[-\frac{1}{4(\bar{\omega}_k^0)^3} \left(dD' + \frac{d(d-1)}{4} D^2 \right) \right. \\
& + \frac{1}{32(\bar{\omega}_k^0)^5} (2dD''' + d(d-1)D'^2 + d(d-1)D''D) \\
& - \frac{5\mu^2 c}{32(\bar{\omega}_k^0)^7} \left(dD''D + dD'^2 + \frac{d(3d+1)}{4} D'D^2 + \frac{d(d-1)}{4} D^4 \right) \\
& \left. + \frac{35}{128} \frac{\mu^4 c^2}{(\bar{\omega}_k^0)^9} \left(dD'D^2 + \frac{d(d-1)}{4} D^4 \right) \right] \\
& + (\xi - \alpha_d)^2 \left[\frac{3}{16(\bar{\omega}_k^0)^5} \left(d^2 D'^2 + \frac{1}{2} d^2 (d-1) D'D^2 + \frac{d^2 (d-1)^2}{16} D^4 \right) \right].
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Para a teoria com interações, Ω_c em (B.2) apresenta termos contendo derivadas temporais de m^2 além dos termos que podem ser obtidos de (B.3) através da substituição de μ^2 por m^2 .