

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Criticalidade Auto-organizada e Leis de Escala na Natureza

Carmen Pimentel Cintra do Prado

SBI-IFUSP



305M810T3354

Resenha apresentada ao Instituto de
Física da USP como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Livre -
Docente

Setembro de 1999



Agradecimentos

Seria difícil agradecer individualmente a todos os que me apoiaram ao longo de todos esses anos de vida acadêmica. Mas não poderia deixar de dizer um 'muito obrigada' especial a Suani, Osame e Josué, com os quais realizei a maior parte dos trabalhos apresentados nesse texto. Queria agradecer também aos colegas e amigos do grupo de mecânica estatística da USP, que por duas vezes me acolheram de braços abertos.

E especialmente ao professor Silvio Salinas, pelo apoio decisivo em todas as etapas da minha carreira.

Para meus filhos, Camila e Filipe, pela compreensão que sempre tiveram pelo meu trabalho; Para meus pais, Luiz Patrício e Maria Alice, pelo apoio incondicional, durante toda a minha vida. À minha tia Glorinha, com quem compartilho os prazeres e dificuldades da vida acadêmica.

Vão-se as folhas, caem os frutos.
Novas sementes germinam.

Resumo

Este texto resume e comenta os resultados de seis trabalhos recentes envolvendo o conceito de criticalidade auto-organizada. Eles têm em comum a preocupação em buscar compreender as condições necessárias ao aparecimento do comportamento crítico auto-organizado (SOC), tanto em modelos numéricos como na natureza. Buscam ainda desenvolver métodos mais precisos para identificar a presença de SOC em simulações numéricas.

Em dois deles estudamos o comportamento da versão vizinhos aleatórios do modelo Olami-Feder-Christensen, proposto inicialmente para descrever a dinâmica de terremotos. Em um outro estudamos a relação entre criticalidade auto-organizada, invariância de escala e comportamento complexo em quatro modelos unidimensionais do tipo 'pilha de areia'. No quarto trabalho propomos um modelo numérico para descrever o comportamento de pilhas de areia com inércia (uma característica importante das pilhas de areia reais) No quinto e sexto trabalhos mostramos a importância do estudo da taxa de ramificação na compreensão e identificação da criticalidade auto-organizada.

Abstract

This text summarizes recent results presented in six papers related to the concept of Self-organized Criticality (SOC). They are concerned about the problem of understanding the necessary conditions for the appearance of SOC both in nature and in cellular automata models. They also propose new methods to identify the presence of SOC in computer simulations.

In two papers we study the behavior of the random neighbor version of the Olami-Feder-Christensen model for the dynamic of earthquakes. The third paper discusses the relationship among scale invariance, complex behavior and self-organized criticality in four one-dimensional sandpile models. The fourth paper proposes a numerical model to deal with the effects of inertia, present in real sandpiles. And in the last two ones we show how the concept of branching rate can help to identify the existence of Self-organized Criticality in numerical models.

Índice

| | |
|---|----|
| 1. Introdução | 1 |
| 2. Criticalidade auto-organizada | |
| 2.1. Algumas considerações gerais..... | 3 |
| 2.2. Modelos mais importantes..... | 7 |
| 2.3. Algumas questões atuais | 11 |
| 3. Criticalidade auto-organizada e invariância de escala | |
| 3.1. Introdução | 14 |
| 3.2. Criticalidade no modelo Olami-Feder-Christensen com vizinhos aleatórios | 15 |
| 3.3. Criticalidade auto-organizada em pilhas de areia unidimensionais | 20 |
| 4. Criticalidade auto-organizada como um processo ramificado | |
| 4.1. Processos ramificados e SOC | 29 |
| 4.2. Robustez da invariância de escala em modelos com SOC | 31 |
| 4.3. O modelo Feder e Feder Extremal | 32 |
| 5. Criticalidade auto-organizada em modelos não conservativos | |
| 5.1. Pilhas de areia com inércia | 40 |
| 5.2. Criticalidade no modelo Olami-Feder-Christensen | 43 |
| 6. Conclusões | 49 |
| 7. Anexos: Artigos nos quais esta resenha está baseada | 58 |

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese pretendo apresentar alguns resultados recentes envolvendo o conceito de Criticalidade auto-organizada. A maior parte desses resultados foram obtidos em colaboração com Osame Kinouchi, Suani Rubin T. Pinho e Josué Xavier de Carvalho. Comecei uma colaboração com Osame quando ele fazia estágio de pós-doutoramento no grupo de mecânica estatística do IFUSP, há cerca de 4 anos. Atualmente Osame encontra-se no departamento de física da USP em Ribeirão Preto, mas nossa colaboração continua. Suani R. T. Pinho terminou seu doutoramento em dezembro de 1998 e encontra-se na Universidade Federal da Bahia, onde é professora. Josué Xavier de Carvalho continua trabalhando em seu projeto de doutoramento.

Modelos com criticalidade auto-organizada tem recebido muita atenção recentemente. Em poucas palavras podemos dizer que modelam sistemas dinâmicos extensos, fora do equilíbrio, que apresentam um comportamento crítico sem necessidade do ajuste de um parâmetro externo. A bibliografia na área é enorme, dispersa, e muitas vezes não conclusiva. A vitalidade da área, e o interesse despertado pelo tema tem a ver, no meu ponto de vista, com a importância real dos fenômenos de escala na natureza. Em pouco mais de 10 anos - desde que Per Bak e colaboradores introduziram o conceito de SOC em 1987 - são mais de 2 000 trabalhos. com inúmeros resultados contraditórios.

Ao longo desses anos, porém, foram dados alguns passos na compreensão de quais são os ingredientes essenciais para a existência de um comportamento crítico auto-organizado. O estudo dos chamados modelos de vizinhos aleatórios, as abordagens de campo médio, o desenvolvimento de uma teoria de renormalização, o estabelecimento de conexões entre

SOC e outros problemas de mecânica estatística, como a transições de fase entre estados absorventes e a teoria de processos ramificados, por exemplo, vem permitindo que se avance lentamente em direção a resultados analíticos mais consistentes.

Sem ter a pretensão de fazer uma revisão da área - aliás inexistente até hoje - é minha intenção, nessa tese, discutir melhor algumas das muitas questões ainda em aberto nesse tema, às quais demos alguma contribuição.

Com esse objetivo, essa tese está organizada da seguinte forma: O capítulo 2 faz uma introdução à idéia de criticalidade auto-organizada, apresentando alguns dos modelos mais estudados na literatura e alguns problemas com os quais nos envolvemos mais diretamente. O capítulo 3 apresenta resultados que possibilitam elucidar alguns aspectos da relação entre criticalidade auto-organizada e a existência de leis de potência. O capítulo 4 trata SOC sob a ótica de processos ramificados, mostrando alguns avanços recentes conseguidos a partir dessa abordagem. O capítulo 5 discute o problema da existência de SOC nos chamados modelos não conservativos e finalmente o capítulo 6 apresenta as conclusões finais.

Capítulo 2

Criticalidade auto-organizada

2.1 Algumas considerações gerais

Mais de 10 anos após o trabalho pioneiro de Bak, Tang e Wisenfeld (BTW) [1], o significado preciso do conceito de criticalidade auto-organizada (SOC) ainda é controverso. Originalmente, o conceito de SOC foi apresentado como uma teoria geral capaz de explicar o aparecimento das leis de escala e do ruído $1/f^\alpha$ na natureza. Segundo as idéias de Bak e colaboradores, alguns sistemas dinâmicos, com muitos graus de liberdade, sujeitos a uma lenta (e permanente) perturbação, evoluiriam naturalmente (sem o ajuste fino de um parâmetro externo, daí o nome auto-organizado) para um estado crítico estatisticamente estacionário, que seria, assim, um atrator da dinâmica do sistema. Uma vez nesse estado, e sob a ação desta pequena perturbação, a resposta do sistema obedeceria uma lei de potências (em lugar de apresentar um tamanho característico e um decaimento exponencial), comportamento esse típico dos fenômenos críticos em mecânica estatística de equilíbrio. É importante ressaltar que a possibilidade de existência de um ponto crítico estável (acessível ao sistema sem o ajuste fino de um parâmetro externo) é bastante atraente, porque oferece, de fato, uma explicação para a constante presença de leis de escala na natureza.

Costuma-se introduzir o conceito de criticalidade auto-organizada (SOC) a partir de um modelo numérico simplificado para o comportamento de avalanches em uma pilha de areia. Numa versão pictórica unidimensional, podemos pensar uma pilha de areia como uma seqüência de n sítios, ($n = 1, \dots, L$), cada sítio i com um número h_i de grãos de areia (ver figura 1).

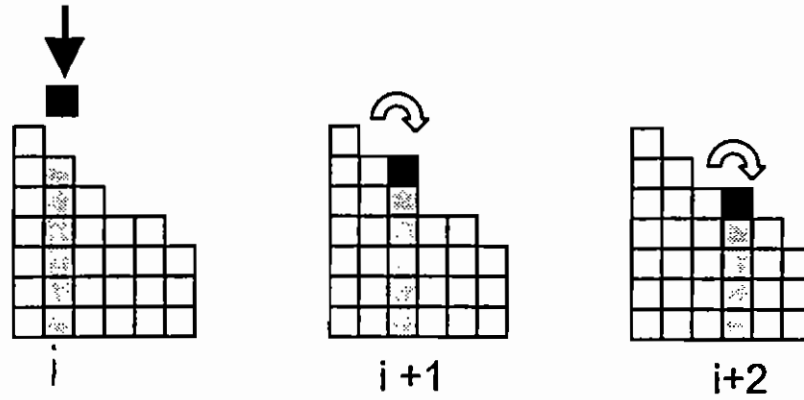


Figura 1 Um grão de areia é adicionado ao sítio i . Como $E_i > E_c$, um grão rola do sítio i para o sítio $i+1$, e depois para o sítio $i+2$. O processo só para quando $E_i < E_c$ para todos os sítios da rede

Define-se a variável $E_i = h_i - h_{i+1}$ como a diferença de altura da pilha de areia entre os sítios i e $i+1$. Escolhe-se aleatoriamente um sítio i , ao qual é acrescentado um grão de areia, de modo que

$$h_i \rightarrow h_i + 1,$$

o que significa

$$E_i \rightarrow E_i + 1$$

e

$$E_{i-1} \rightarrow E_{i-1} - 1 \quad .$$

Cada vez que E_i excede ou se iguala a um valor crítico E_c , a pilha se torna instável e um grão de areia rola do sítio i para o sítio $i+1$. Em termos das diferenças de altura E_i

isso corresponde a fazer

$$E_i \rightarrow E_i - 2$$

e

$$E_{i\pm 1} \rightarrow E_{i\pm 1} + 1 \quad .$$

Um dos sítios vizinhos ao sítio i pode então se tornar instável, gerando uma reação em cadeia (avalanche) que só é interrompida quando novamente $E_i < E_c$ para todos os sítios da rede. Assume-se condições de contorno abertas em pelo menos uma borda, isto é, quando um sítio da borda se torna crítico, um grão de areia cai fora do sistema. Depois de um transiente, o sistema evolui para um estado estatisticamente estacionário, onde a massa de areia da pilha oscila em torno de uma constante. Uma vez neste estado, a adição de um único grão de areia pode iniciar uma avalanche de qualquer tamanho, e as distribuições de probabilidade das grandezas que caracterizam o sistema obedecem a uma lei de potências.

O modelo original proposto por Bak, Tang e Wisenfeld em 1997 é um modelo definido numa rede quadrada (bidimensional). O sistema é perturbado fazendo-se $E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} + 1$ e caso $E_{i,j} \geq E_c$ o sistema relaxa segundo as regras

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} - 4$$

e

$$E_{i\pm 1, j\pm 1} \rightarrow E_{i\pm 1, j\pm 1} + 1$$

(onde as energias $E_{i\pm 1, j\pm 1}$ são as energias dos quatro vizinhos mais próximos do sítio (i, j)). É importante esclarecer que o modelo unidimensional de pilha de areia (através do qual acabamos de introduzir a idéia de SOC) não apresenta criticalidade auto-organizada. No estado estacionário esse modelo possui um comportamento trivial, onde $E_i = E_c - 1$,

$\forall i$. Porém ele permite entender, de forma mais clara, as regras dinâmicas do modelo originalmente proposto. A introdução do conceito de SOC através desta versão unidimensional tem se tornado tradicional na literatura.

Os modelos com criticalidade auto-organizada representam sistemas físicos extensos, dissipativos, abertos e portanto fora do equilíbrio. Existe no entanto uma diferença importante entre os sistemas com criticalidade auto-organizada e os sistemas estudados usualmente na mecânica estatística fora do equilíbrio. Nos modelos usuais da mecânica estatística fora do equilíbrio a escala de tempo da perturbação (causada, por exemplo por um ruído externo) é comparável à escala de tempo da evolução dinâmica do sistema. Já nos modelos com SOC existem duas escalas distintas de tempo. A primeira, considerada 'lenta', é aquela na qual o sistema é perturbado (τ_p = tempo entre duas perturbações consecutivas). No nosso exemplo esse é o intervalo de tempo entre a adição de dois grãos de areia. A segunda, a escala 'rápida', é aquela na qual ocorre a relaxação, isto é, o tempo durante o qual o sistema reage à perturbação inicial (τ_r = tempo que o sistema demora para voltar ao equilíbrio, uma vez perturbado). No exemplo da pilha de areia isso corresponde à duração de uma única avalanche. Em todos os modelos com SOC a separação entre estas duas escalas é infinita, isto é, $\tau_p \gg \tau_r$. Um novo grão de areia só é adicionado ao sistema após o término da avalanche. A razão τ_r/τ_p é as vezes chamada de taxa de perturbação (driving rate), e então nos sistemas com SOC $\tau_r/\tau_p \rightarrow 0$. Devido a essa separação infinita das escalas de tempo, geralmente é impossível escrever uma equação mestra para estes modelos.

Ao trabalho de Bak e colaboradores seguiu-se uma 'avalanche' de trabalhos teóricos, numéricos e experimentais, sugerindo aplicações das idéias de SOC a fenômenos tão distintos como a dinâmica dos terremotos [2], o efeito Barkhausen [3], a emissão acústica de rochas vulcânicas [6], o fluxo de fluidos em meios porosos [4], processos de micro-fraturas [5] e o fluxo de radiação solar [7], apenas para citar alguns exemplos mais ligados à área de física. E embora hoje esteja claro que a tentativa original de Bak e colaboradores – a

de explicar com uma única teoria todas as leis de escala na natureza – seja provavelmente muito simplista, as idéias por trás do conceito de SOC deram um grande impulso nos estudos estatísticos de sistemas dinâmicos sujeitos a uma perturbação lenta e contínua (slow driven systems) e a processos ramificados ou de reação em cadeia (branching processes). Embora a bibliografia na área seja enorme, dispersa, e muitas vezes não conclusiva, nos últimos anos alguns trabalhos tem ajudado a entender aspectos do mecanismo geral por trás do aparecimento de um comportamento crítico auto-organizado. Alguns pontos de partida para o estudo do conceito de SOC podem ser encontrados, por exemplo, nas referências [8, 9, 31]).

2.2 Modelos mais importantes

Os inúmeros modelos estudados tem sido reunidos em alguns grandes ‘grupos’, numa primeira classificação que leva em conta algumas características comuns de suas regras dinâmicas e também, às vezes, uma certa afinidade histórica.

Em um primeiro grupo estão os chamados modelos ‘tipo pilha de areia’, como o modelo BTW. Eles tem em comum o fato de serem definidos numa rede (cuja dimensionalidade pode variar) e de serem perturbados localmente. Estes modelos são ‘conservativos’, uma vez que a energia é dissipada apenas nas bordas. Em geral, nesses modelos, a variável E_{ij} , que caracteriza a diferença de altura entre dois sítios, é um número inteiro. A aleatoriedade, quando existe, está presente apenas durante a etapa de perturbação do modelo. As regras da dinâmica de relaxação são, em geral, determinísticas. São exceções conhecidas e bastante citadas um modelo introduzido por Zhang em 1989 [10] no qual as variáveis E_{ij} são números reais, e o modelo de dois estados, introduzido por Manna em 1991 [11] no qual a dinâmica tem uma componente aleatória. Um modelo mais recente, também com dinâmica estocástica, é o chamado modelo de Oslo [12], um modelo unidimensional proposto para explicar o comportamento crítico de uma série de experimentos realizados

com uma pilha de arroz [13].

Parte dos modelos de pilha de areia se enquadram numa classe que ficou conhecida como a dos modelos abelianos, introduzidos por D. Dhar em 1990 [14, 15, 16, 17]. Nestes modelos o mecanismo que detona uma avalanche depende apenas do valor absoluto da variável que caracteriza o sistema e não dos gradientes do sítio perturbado em relação aos seus vizinhos. Como consequência dessa característica, eles possuem uma propriedade comutativa. Dhar mostrou ser possível construir um conjunto de operadores de criação a_i (que geram um grupo abeliano) e que permitem o cálculo analítico exato de muitas de suas propriedades, como correlações entre alturas de sítios e o número de estados estacionários [14, 18, 19]. No entanto, propriedades dinâmicas do modelo, como os expoentes das distribuições de probabilidade não são conhecidos exatamente. Recentemente Pietronero e colaboradores [61] propuseram um esquema de renormalização, posteriormente aperfeiçoado por Ivashkevich [60], que permite estimar esses expoentes.

Uma outra classe de modelos é formada pelos modelos do tipo ‘massa-mola’ (stick-slip models, SSM), como o modelo Olami-Feder-Christensen (OFC) [20] e o modelo Feder e Feder [21]. Surgiram com o objetivo de explicar o comportamento de escala dos terremotos, cuja distribuição de magnitude obedece a uma lei de potências conhecida com lei de Gutenberg-Richter

$$\log N = a - bM,$$

onde N é o número de terremotos com magnitude igual ou maior que M . a e b são constantes positivas.

Os modelos massa-mola, ao contrário dos modelos de pilha de areia, são mapas acoplados ($E_{i,j}$ é um número real) e tem como principal característica o fato de sofrerem uma perturbação global. A cada unidade de tempo, a energia $E_{i,j}$ de todos os sítios da rede sofre um pequeno acréscimo, processo que continua até que eventualmente um destes sítios exceda o limiar E_c . Ao contrário dos modelos de pilha de areia, existem razoáveis

evidências numéricas de que esses modelos possam ter SOC mesmo num regime não conservativo [20, 22, 23, 24]. Um estudo recente desenvolvido em colaboração com Josué X. Carvalho mostra, porém, que esta ainda é uma questão aberta [41]. Esse ponto será melhor explorado no capítulo 5.

Outro modelo que se tornou conhecido é o chamado ‘modelo de fogo em floresta’ (FFM). Aqui as variáveis $E_{i,j}$ representam a altura de uma ‘árvore’ no sítio (i, j) . De acordo com o valor de $E_{i,j}$ a árvore está: (a) Em chamas ($E_{i,j} \geq 2$), (b) verde e crescendo ($1 \leq E_{i,j} < 2$) ou (c) morta (transformada em cinzas, com $0 \leq E_{i,j} < 1$).

Todas as árvores verdes ou mortas crescem um pouco a cada etapa

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} + p$$

e portanto a perturbação é global. Eventualmente $E_{i,j} \geq 2$ para algum sítio i, j e a árvore aí localizada pega fogo. Uma árvore em chamas queima completamente (morre) em uma etapa de atualização

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} - 2,$$

mas pode propagar o incêndio para árvores vizinhas. Uma árvore verde pega fogo se um dos vizinhos estiver em chamas

$$E_{i,j} \rightarrow \gamma [E_{i,j} - 1] + 2.$$

(no modelo original $\gamma = 1$).

Este modelo trabalha com 3 estados (morto, vivo e em chamas) e tem sido apontado como capaz de gerar estruturas típicas de fenômenos com turbulência [25]. Ele também é conhecido como modelo de epidemias, por descrever a propagação de uma epidemia [26].

Em 1993 uma nova classe de modelos foi introduzida com o trabalho de P. Bak e K. Sneppen [27] (modelo BS) para a evolução de uma ecologia de espécies interagentes. Estes modelos obedecem a uma dinâmica extremal, na qual não há uma perturbação

externa. Também não há a transferência de nenhuma quantidade de um sítio para o outro. N espécies estão arrumadas sobre uma linha, com condições periódicas de contorno. Cada sítio corresponde a uma espécie, que tem uma certa adaptabilidade E_i , escolhida aleatoriamente. A cada iteração a cadeia é atualizada, localizando-se o sítio com menor adaptabilidade, $E_k^{\min} = \min \{E_i\}$. Este sítio sofre uma ‘mutação’, que por sua vez vai afetar a adaptabilidade das espécies vizinhas, ou seja, novo valor é sorteado para o sítio E_k com a menor adaptabilidade, e também para seus vizinhos $E_{k\pm 1}$. A atividade do sistema (número de espécies que sofreram mutações) determina o tamanho de uma ‘avalanche’. O conceito de ‘avalanche’ nesse modelo é um pouco diferente, e precisa ser redefinido. A avalanche agora é um conceito dependente de um limiar de adaptabilidade b . Uma b -avalanche inicia-se com a escolha (e conseqüente atualização) do sítio com menor E_i , (este primeiro sítio tem sempre $E_i > b$). Como a adaptabilidade de seus dois vizinhos é também atualizada, um desses sítios pode vir a ter adaptabilidade menor que b , e o processo de atualização prossegue enquanto houverem sítios na rede com adaptabilidade E_i menor que o limiar b . Pode-se mostrar que no modelo Bak-Sneppen existe um limiar natural $b_c = E_c$, tal que no estado estacionário, após uma avalanche, todos os sítios tem adaptabilidade $E_i > b_c$, ao contrário do que ocorre nos demais modelos, onde o limiar E_c é fixado *a priori*. Isto significa que, depois de um transiente, o sistema se auto-organiza num estado onde todas as adaptabilidades $E_i < E_c$. Embora esse modelo forneça uma descrição bastante grosseira para uma ecologia de espécies, ele tem um comportamento estatístico extremamente rico, proveniente de regras dinâmicas locais extremamente simples. Uma revisão do comportamento do modelo Bak-Sneppen pode ser encontrada na referência [28].

Finalmente, tornou-se comum o desenvolvimento dos chamados modelos de ‘vizinhos aleatórios’. Nestes modelos, cada vez que um sítio se torna crítico e relaxa, a energia por ele perdida é redistribuída entre outros sítios escolhidos aleatoriamente. Eles correspondem a uma versão de campo médio de modelos com regras dinâmicas similares definidos

numa rede, e podem ter um tratamento analítico. Existem hoje versões do tipo ‘vizinhos aleatórios’ para os principais modelos presentes na literatura (e que foram originalmente definidos numa rede). A maioria dos resultados analíticos recentes foi obtida para modelos que se enquadram nessa categoria.

2.3 Algumas questões atuais

O conceito de criticalidade ‘espontânea’, como vem sendo usada na literatura, apresenta diversas ambiguidades. Do ponto de vista puramente semântico, temos um jogo de palavras: O termo ‘auto-organizado’ tem sido utilizado no sentido de mostrar que o estado crítico é um atrator da dinâmica. Porém, qualquer sistema fora do equilíbrio, quando colocado próximo a um ponto de equilíbrio estável, evolui ‘naturalmente’ para esse estado estacionário, sem que isso seja chamado de auto-organização. Uma crítica mais fundamental no entanto tem sido feita em relação à idéia de que não existe o ajuste fino de um parâmetro de controle em modelos com SOC. Alguns críticos do conceito de SOC tem tentado mostrar que na verdade existe um parâmetro de controle oculto, inicialmente fixado em seu valor crítico, para que o sistema de fato exiba SOC. Já em 1992 Sornette e colaboradores [29, 30] sugeriram que o ajuste fino do parâmetro de ordem usual de um fenômeno crítico ordinário poderia gerar um comportamento crítico auto-organizado, se interpretado de maneira correta. A taxa de perturbação (driving rate) também tem sido apontada por diversos autores como um possível parâmetro de controle – a ser ajustado em zero – e que cumpriria a função desse parâmetro oculto.[31, 32, 33, 34]. Vale ressaltar que definir uma taxa de perturbação igual a zero não é problema em simulações numéricas, quando uma separação infinita entre as duas escalas de tempo pode facilmente ser estabelecida, mas é crucial no mundo real, onde essa taxa nunca é zero. Em algumas situações reais, porém, as escalas de tempo envolvidas são realmente bem diferentes. É o caso dos terremotos, onde a escala de tempo associada à perturbação – que corresponde ao movimento

das placas tectônicas, da ordem de dezenas ou centenas de anos – é muito maior que a escala de tempo da dinâmica de relaxação – ou seja, do terremoto propriamente dito, que é da ordem de segundos.

Tem-se também argumentado que a existência de um algum tipo de lei de conservação é essencial para a existência de SOC. Esse seria então outro parâmetro de controle a ser ‘ajustado’ externamente para que o sistema seja crítico [35]. Sabe-se que nos modelos de pilha de areia, por exemplo, a criticalidade é consequência de uma lei de conservação local [16]. O campo externo e a dissipação local seriam os parâmetros de controle que teriam que ser ajustados para que o sistema exiba criticalidade [34, 8, 36]. O estudo do comportamento das avalanches em pilhas de areia com inércia [37] também mostra que a existência de uma lei de conservação local é decisiva para que o sistema se auto-organize num estado crítico.

Também se evoluiu no sentido de se estabelecer uma definição mais precisa do conceito de SOC [31] e dos ingredientes necessários ao seu aparecimento (veja, por exemplo, [8]). Segundo essa definição, um sistema que apresenta SOC deve evoluir para um estado estatisticamente estacionário, que exhibe invariância de escala. Esta evolução deve ainda obedecer certas regras dinâmicas: (a) A taxa de perturbação deve tender a zero ($\tau_r/\tau_p \rightarrow 0$) e (b) ela deve ocorrer sem que haja o ajuste de parâmetros de controle. Na tentativa de entender melhor as condições necessárias e suficientes para o aparecimento de SOC, têm-se buscado reunir os inúmeros modelos em classes de universalidade. Avalanches tem sido geralmente caracterizadas por três variáveis: o número s de grãos de areia que rolam, a área afetada pela avalanche a , e a duração da avalanche T . A distribuição de probabilidade de cada uma dessas variáveis é descrita por uma lei de potências com um ‘cutoff’ (aqui x pode assumir o significado de s, a, T), $P(x) = x^{-\tau_x} F(x/x_c)$. Quando o tamanho do sistema vai para infinito, o ‘cutoff’ x_c diverge como $x_c \sim L^{\beta_x}$. Os expoentes $\{\tau_x, \beta_x\}$ definem a classe de universalidade do modelo. No entanto a identificação precisa de classes de universalidade nos modelos com SOC permanece um problema em aberto,

veja, por exemplo [38].

Paralelamente ao esforço de definir melhor o conceito de SOC, houve também um esforço no sentido de estabelecer, de modo mais rigoroso, formas de identificar a existência de criticalidade em determinado modelo. A grande maioria dos modelos que apresentam um comportamento crítico auto-organizado são definidos como automatos celulares ou mapas acoplados numa rede. Como consequência, a maior parte desses modelos só podem ser estudados através de simulações numéricas, e tornou-se uma prática usual identificar SOC a partir da existência de uma lei de potência na distribuição de probabilidade $P(x)$ dos eventos que caracterizam a sua dinâmica, com um 'cutoff' que escala com o tamanho do sistema. No entanto essa abordagem não é satisfatória, como iremos discutir melhor no capítulo 3.

Capítulo 3

Criticalidade auto-organizada e invariância de escala

3.1 Introdução

Identificar quando um modelo, com invariância de escala, apresenta criticalidade auto-organizada, muitas vezes não é uma tarefa fácil. Além de não existir uma definição precisa de SOC, a maioria dos modelos estudados são modelos numéricos definidos em uma rede, para os quais só existem resultados de simulações, que por sua vez dificilmente são conclusivos.

Muitas vezes assume-se que um sistema extenso, fora do equilíbrio, sujeito a uma perturbação lenta e contínua, está num estado crítico auto-organizado se a distribuição $P(x)$ de uma ou mais grandezas que caracterizam a resposta do sistema às lentas perturbações (o tamanho da avalanche, por exemplo), obedece a uma lei de potência, $P(x) = x^{-\tau_x}$. Como as simulações são feitas em redes finitas, existe sempre um ‘cutoff’. Para verificar se esse ‘cutoff’ é um efeito do tamanho finito da rede ou revela alguma característica mais fundamental da dinâmica do modelo (como por exemplo um decaimento exponencial), costuma-se usar um método que ficou conhecido como ‘finite-size scaling’ (FSS) [45]. Realiza-se simulações em redes de diferentes tamanhos para verificar se esse ‘cutoff’ escala com o tamanho da rede. Caso isso ocorra, após o ajuste de FSS, as curvas $P(x)$ devem colapsar em uma única curva. Assim, em geral, a observação de uma lei de escala junto com a existência de FSS tem sido considerado suficiente para provar a ocorrência de SOC num modelo. Essa abordagem, no entanto, pode levar a enganos [40]. Alguns modelos supostamente com SOC apresentam uma região subcrítica com avalanches muito grandes. Se as redes consideradas para o estudo numérico não são grandes o suficiente

para mostrar esse fato, o modelo se comporta exatamente como se tivesse SOC, isso é, apresenta leis de potência com um ‘cutoff’ que escala com o tamanho da rede (FSS). Só a análise de resultados em redes maiores é capaz de revelar o engano.

Além de fornecer um critério pouco eficiente para a identificação de SOC, a confusão que comumente é feita entre invariância de escala e SOC, esconde o que de importante existe por trás desse conceito. A ocorrência frequente de leis de escala na natureza é um fato bem estabelecido, e não precisa de um novo nome. O conceito de criticalidade auto-organizada especifica um conjunto de mecanismos através do qual o aparecimento freqüente de leis de potência na natureza pode ser explicado. Sem mergulhar mais a fundo nos mecanismos dinâmicos que estão por trás das leis de escala, porém, é impossível dizer se um sistema com invariância de escala exibe um comportamento crítico auto-organizado.

Em três trabalhos recentes discutimos esse problema. Dois foram realizados colaboração com Suani T. R. Pinho e Osame Kinouchi [40, 43], e neles analisamos a versão de vizinhos aleatórios do modelo Olami-Feder-Christensen (R-OFC), mostrando que a existência de leis de potência e de FSS não bastam para assegurar a existência de SOC. Num outro trabalho, realizado em colaboração com Suani T. R. Pinho e Silvio R. Salinas, exploramos as diferentes características da dinâmica existente em quatro modelos unidimensionais de pilha de areia, numa tentativa de esclarecer a diferença entre invariância de escala e SOC [39].

3.2 Criticalidade no modelo Olami-Feder-Christensen com vizinhos aleatórios

Num trabalho recente, Lise e Jensen [46] mostram, através de simulações numéricas e de resultados analíticos, que a versão vizinhos aleatórios do modelo Olami-Feder-Christensen (modelo R-OFC) tem um comportamento crítico auto-organizado mesmo na presença de dissipação. Os autores desenvolvem toda uma argumentação teórica, baseada no estudo

da taxa de ramificação e em argumentos de campo médio, justificando a existência de SOC nesse modelo. Apresentam ainda simulações numéricas para sistemas que variam de 100 a 400 sítios e que parecem confirmar integralmente seus resultados analíticos. Esses resultados numéricos mostram claramente que, para $\alpha < 0.22$, a distribuição de tamanho das avalanches não escala com o tamanho do sistema. Mas para $\alpha > 0.22$ o comportamento do sistema é aparentemente crítico. Neste caso, após uma análise de FSS, as distribuições $F(s)$ (tamanho das avalanches) colapsam numa única curva para todos os tamanhos de rede estudados. Essas simulações numéricas estão de acordo com uma análise teórica do modelo apresentada pelos autores, que prevê criticalidade para $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{4}$. Esse resultado, no entanto, está incorreto. Sabe-se hoje que o modelo R-OFC só é crítico quando $\alpha = \frac{1}{4}$, como mostrado por Chabanol e colaboradores, Bröker e colaboradores e Pinho, Kinouchi e Prado em três trabalhos independentes em 1997 e 1998 [47, 40, 43]. Se repetirmos essas simulações numéricas em sistemas maiores, por exemplo em sistemas com 600 sítios, veremos que, já para $\alpha = 0.23$, as distribuições de tamanho das avalanches coincidem sem necessidade de um FSS, exatamente como observado por Lise e colaboradores para $\alpha < \frac{2}{9}$ [40]. A figura 2 mostra $F(s)$ para diversos tamanhos de rede. Podemos ver que, sem nenhum ajuste, $F(s)$ para $L = 400$ coincide exatamente com $F(s)$ para $L = 600$.

As considerações teóricas apresentadas por Lise e Jensen também estão incorretas. O problema não está no método apresentado por eles, mas em uma das hipóteses simplificadoras utilizada no decorrer da aplicação deste método ao modelo R-OFC [40, 43].

O modelo R-OFC é definido a partir de um conjunto de sítios com energia E_i , escolhidos inicialmente de forma aleatória. O sistema é perturbado aumentando-se lentamente a energia de todos os sítios da rede, até que eventualmente um sítio se torna instável ou ativo ($E_i^+ \geq E_c$, onde o superescrito $+$ indica um sítio ativo). Esse sítio então relaxa e uma energia αE^+ é distribuída entre sítios escolhidos aleatoriamente (‘vizinhos’ aleatórios E_{rn}), ou seja:

$$E_i^+ \rightarrow 0$$

e

$$E_{rn} \rightarrow E_{rn} + \alpha E_i^+,$$

onde o parâmetro $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ controla o nível de conservação do modelo. Se $\alpha = \frac{1}{4}$ o sistema é dito conservativo. O processo continua até que todos os sítios da rede voltem a situação estável, $E_i < E_c \forall i$.

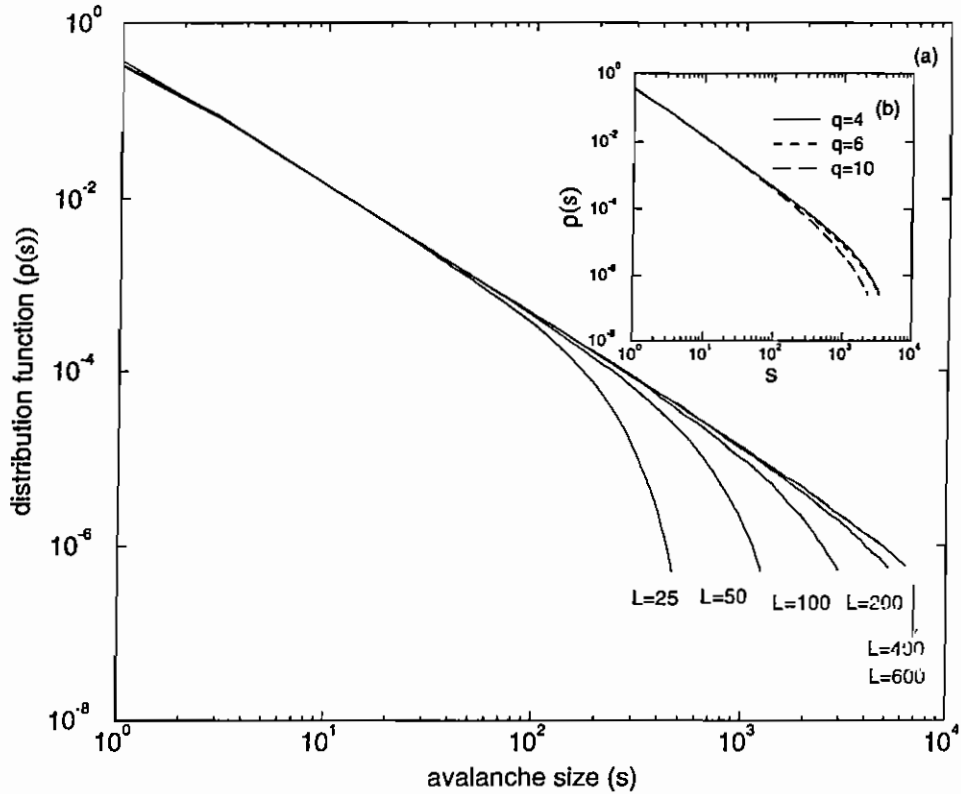


Figura 2 (a) Distribuição de tamanho das avalanches no modelo *R-OFC*, para $\alpha=0.23$ e para redes de diferentes tamanhos. Para $L \geq 400$ as curvas colapsam sem necessidade de ajuste FSS. (b) Mesmo resultado para rede com $L = 100$, mas com número de coordenação q diferente.

Seja $P_+(E^+)$ a probabilidade que um sítio qualquer da rede tem de se tornar ativo como consequência de receber uma energia αE^+ , e seja σ a taxa de ramificação, definida como o número médio de novos sítios ativos criados a partir do decaimento de um sítio instável. Se o sistema é crítico, devemos ter $\sigma = 1$. Pode-se mostrar que, numa modelo com número de coordenação 4,

$$\sigma = 4 \frac{\int_{E_c}^{\infty} P_+(E^+) p(E^+) dE^+}{\int_{E_c}^{\infty} p(E^+) dE^+},$$

onde

$$P_+(E^+) = \frac{\int_0^{E_c} p(E) dE}{\int_0^{\infty} p(E) dE}$$

e $p(E)$ é a distribuição de energia dos sítios no estado estacionário. Para continuar os cálculos a partir daí, porém, temos que conhecer a forma da distribuição de energias $p(E)$. Por simplicidade, Lise e colaboradores [46] supuseram ser $p(E)$ uma distribuição uniforme no intervalo $[0, E_c]$, hipótese essa pouco realista, conforme reconhecido pelos próprios autores. Esta suposição é a responsável pela conclusão (incorreta) obtida por eles. A simples consideração de uma hipótese um pouco mais realista para a distribuição de energias $p(E)$ é suficiente para mostrar o engano, deixando claro que o modelo R-OFC só é crítico no regime conservativo.

Na figura 3 podemos ver os resultados de simulações numéricas para $p(E)$, no modelo R-OFC com número de coordenação 4. Esses resultados mostram claramente que $p(E)$ não é uma constante, mas uma função de quatro picos, que vão se tornando mais estreitos e mais altos a medida que nos aproximamos do limite conservativo. É possível mostrar que no limite conservativo ($\alpha = 0.25$) os quatro picos de $p(E)$ tendem a quatro funções delta de Dirac localizadas em $(i - 1) \alpha E_c$, onde $i = 1, \dots, 4$ identifica cada um dos picos. Decidimos então repetir os cálculos de Lise e Jensen supondo que a distribuição $p(E)$ tenha a forma (mais realista) mostrada no detalhe da figura 3: quatro picos quadrados

de igual altura e igual largura, centrados em $E = 0, \alpha E_c, 2\alpha E_c$ e $3\alpha E_c$. Conforme pode ser visto na figura 3, $2\Delta_p$ é a largura de cada pico, Δ_b é a distancia entre dois picos consecutivos, a é a altura dos picos e $E^* = 3\Delta_b + 7\Delta_p$ é o valor máximo de E para o qual $p(E) \neq 0$. Podemos então escrever:

$$P_+(E^+) = \frac{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE}{\int_0^{\infty} p(E) dE} = \frac{1}{7a \Delta_p} \int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE$$

O limite inferior desta integral, $E_c - \alpha E^+$, pode agora pertencer a qualquer um dos quatro picos que definem a distribuição $p(E)$, e temos que considerar cada caso separadamente. Os cálculos, um pouco trabalhosos mas não difíceis [40], mostram que no limite conservativo (que corresponde a considerar $\Delta_p \rightarrow 0, \Delta_b \rightarrow \alpha E_c$), para que σ seja 1 devemos necessariamente ter $\alpha = 0.25$, e alternativamente, no limite de $p(E)$ constante (aproximação usada por Lise e Jensen e que corresponde a fazer $\Delta_b \rightarrow 0$ e $\Delta_p \rightarrow \frac{E_c}{7}$) impor a condição de criticalidade $\sigma = 1$ leva a $\alpha = \frac{2}{9}$, o que recupera o resultado obtido anteriormente por esses autores.

É possível mostrar ainda que a distribuição de energias $p(E)$ constante usada por Lise e Jensen embora não corresponda ao modelo que eles pretenderam analisar, é exata para outro modelo não conservativo, que se enquadra na classe de modelos extremais. Esse modelo corresponde a versão extremal do modelo Feder e Feder (EFF) [43]. Se adotarmos as regras dinâmicas do modelo EFF, o método de Lise e Jensen novamente levará às conclusões corretas. O reconhecimento da validade desta abordagem permitiu que introduzíssemos, em 1999 [44], a idéia de ‘quase criticalidade’, sugerindo um método numérico complementar para a identificação numérica de SOC. Permitiu também que se revisse o comportamento do modelo OFC original (definido numa rede). Esse aspecto será melhor discutido no capítulo 5, quando tratarmos de criticalidade em modelos não conservativos [41].

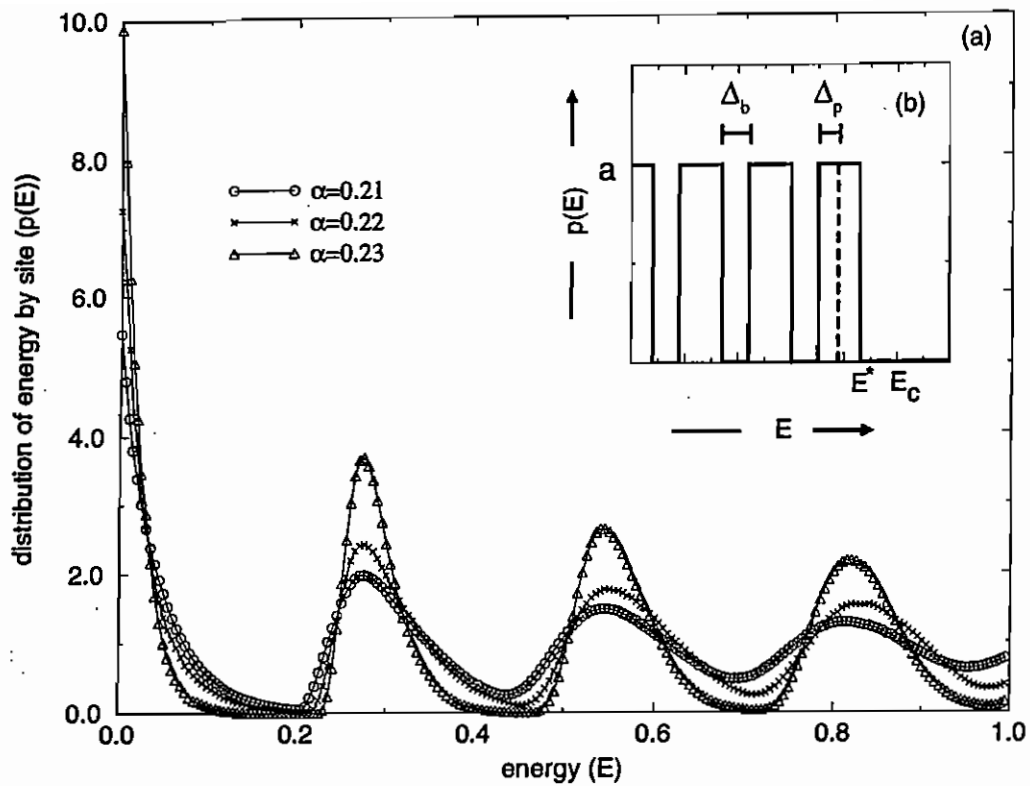


Figura 3 (a) Distribuição de energia por sítio, $p(E)$ para diferentes valores de α . A largura dos picos diminui a medida que α aumenta; (b) Aproximação para $p(E)$ utilizada em nossos cálculos. Δ_p é metade da largura de um pico, Δ_b é a largura dos intervalos entre eles e a é a altura do pico.

3.3 Criticalidade em pilhas de areia unidimensionais

Mas ainda que uma lei de potências seja observada, e que se verifique um efeito de tamanho finito da rede, diversos mecanismos podem ser responsáveis pelo aparecimento da invariância de escala. Na classe de modelos mais estudada, a dos modelos do tipo pilha de areia, para a qual existe uma grande diversidade de regras sugeridas, os termos ‘comportamento complexo’ e ‘invariância de escala’ tem sido frequentemente usados como sinônimo de criticalidade auto-organizada. Costuma-se dizer que um sistema extenso tem comportamento complexo se apresenta uma dinâmica global não trivial a partir de regras simples de interação local. O grau de ‘complexidade’ pode ser associado então à nossa habilidade de entender e prever as propriedades desse comportamento global a partir dessas regras locais.

Através de alguns exemplos, é possível ilustrar o fato de que invariância de escala não pode ser considerada sinônimo de comportamento complexo. Como mostrado por Pinho, Prado e Salinas [39], uma análise cuidadosa e comparativa de quatro modelos unidimensionais de pilha de areia, bastante estudados na literatura, serve para mostrar que diferentes fenômenos podem estar por trás de uma invariância de escala.

Vamos olhar mais de perto o comportamento estatístico de quatro modelos do tipo pilha de areia. Em primeiro lugar iremos estudar a versão unidimensional do modelo proposto por Bak, Tang e Wisenfeld [1], que passaremos a chamar de modelo BTW1 e que sabemos tem um comportamento trivial. Em seguida, iremos resumir as propriedades de três outros modelos, o modelo local e limitado (LL) proposto em 1989 por Kadanoff e colaboradores [48], o modelo LLL [49] (local, limitado e sem armadilhas) proposto em 1993 por Chhabra e colaboradores e finalmente o modelo NLL (não local e limitado) utilizado por Prado e Olami em 1992 como ponto de partida para o estudo do efeito da inércia no comportamento de pilhas de areia [37]. Veremos nestes modelos uma ordem crescente de ‘complexidade’. Embora alguns deles tenham sido apresentados anteriormente na literatura como modelos unidimensionais que apresentam invariância de escala e um comportamento crítico auto-organizado, em nossa opinião, como mostraremos a seguir, só o modelo NLL possui um comportamento complexo e uma invariância de escala que pode ser creditada a um mecanismo dinâmico similar ao apresentado na versão bidimensional do modelo BTW, e que introduziu o conceito de criticalidade auto-organizada.

Considere uma rede unidimensional com L sítios, com condições de contorno aberta de um lado e fechada do outro, para a qual é definida uma variável inteira h_i que representa o número de grãos de areia nos sítios $i = 1, \dots, L$. Num certo instante t o sistema é perturbado, de modo que n_p grãos de areia são adicionados aleatoriamente ao sítio i ,

$$h_i \rightarrow h_i + n_p.$$

Em todos os modelos que iremos discutir, o critério de estabilidade é baseado na

inclinação da pilha de areia, ou seja, em $E_i = h_i - h_{i-1}$. Se $E_i > E_c$, onde E_c é um certo limiar de atividade, $n_f(i)$ grãos de areia rolam do sítio i , de modo que

$$h_i \rightarrow h_i - n_f(i).$$

Os $n_f(i)$ grãos de areia que saem do sítio i são então distribuídos entre outros sítios da rede de acordo com diferentes regras dinâmicas. Como a quantidade de grãos de areia que rolam $n_f(i)$ se conserva nesse processo (os grãos adicionados só saem quando rolam para fora do sistema através da borda aberta), dizemos que estes modelos são conservativos. Depois de um período transiente, a pilha de areia atinge um estado estacionário, onde, em média, o número de grãos permanece constante. Diferentes regras para a dinâmica de relaxação e diferentes valores para n_p e $n_f(i)$ diferenciam os modelos de pilha de areia entre si.

Para toda a classe de modelos chamada limitada, $n_f(i)$ assume um valor inteiro constante, $n_f(i) = n$. Por sua vez, em toda a classe de modelos chamada local, todos os grãos de areia $n_f(i)$ que rolam do sítio i são depositados no seu vizinho mais próximo, o sítio $i - 1$. Já nos modelos limitados mas não-locais, se o critério de estabilidade é violado, n grãos de areia rolam do sítio i para os sítios $i - j$, com $j = 1, 2, \dots, n$, ou seja:

$$h_i \rightarrow h_i - n$$

e

$$h_{i-1} \rightarrow h_{i-1} + 1$$

$$h_{i-2} \rightarrow h_{i-2} + 1$$

⋮

$$h_{i-n} \rightarrow h_{i-n} + 1.$$

O estudo da dinâmica desses modelos fica mais transparente quando esta é escrita em função de novas variáveis ϵ_i , onde

$$\epsilon_i = h_i - h_{i-1} - 1 = E_i - 1.$$

O modelo BTW1 é um caso particular de modelo local e limitado (LL), no qual $n_p = n = 1$, ou seja, o número de grãos de areia adicionados ao sítio i durante a fase de perturbação é o mesmo que rola de um sítio que tenha eventualmente se tornado instável. Esta coincidência simples é a responsável pelo comportamento trivial do seu estado estacionário. Neste estado, que é minimamente estável, $\epsilon_i = 0$ para todo i . Todo o grão de areia adicionado a pilha rola de sítio em sítio até sair para fora pela borda aberta.

Em 1989 Kadanoff e colaboradores introduziram uma pequena modificação nesse modelo, definindo um novo modelo que ficou conhecido na literatura como modelo LL. No modelo LL, $n_p = 1$ mas $n = 2$ ($E_c = 2$), ou seja, perturba-se o sistema adicionando-se um grão de areia a um sítio j escolhido aleatoriamente, mas cada vez que um sítio se torna instável, dois grãos de areia rolam do sítio j para o sítio $j - 1$. Esta pequena modificação é suficiente para que este modelo apresente um comportamento ‘complexo’, com uma estatística não trivial, que já foi investigado por muitos autores [49, 50, 51]. São características importantes desse modelo:

- (a) A existência de avalanches que se propagam ‘para trás’, isso é, em direção à borda fechada;
- (b) a presença de sítios especiais, denominados ‘armadilhas’, (‘traps’ ou ‘troughs’ em inglês) capazes de interromper um processo de avalanche no interior da rede.

Armadilhas são sítios com $\epsilon < E_c - 2$ (no caso sítios com $\epsilon < 0$) e existem na rede mesmo após o estado estacionário ter sido atingido (no modelo BTW1 só existem armadilhas durante o transiente inicial, e no estado estacionário todas as avalanches se propagam até a borda do sistema).

É possível determinar o tamanho da avalanche (quais os sítios terão seus valores modificados) a partir apenas da configuração $\{\epsilon_k\}$ da rede e do sítio j que será perturbado. Isso fica claro se reescrevermos as regras da dinâmica em função das novas variáveis ϵ_k . Podemos perceber então que para o modelo LL existem apenas 3 situações possíveis:

- Se a perturbação ocorrer num sítio j para o qual $\epsilon_j \leq 0$ e $\epsilon_{j+1} < 1$ nenhuma avalanche é iniciada, e a dinâmica se resume a

$$\begin{cases} \epsilon_j \rightarrow \epsilon_j + 1 \\ \epsilon_{j+1} \rightarrow \epsilon_{j+1} - 1 \end{cases}$$

- Se a partícula for adicionada num sítio j para o qual $\epsilon_j = 1$ e $\epsilon_{j+1} \leq 0$, temos uma avalanche que se propaga apenas para a frente. O processo continua até que se encontre uma armadilha, ou seja, um sítio r para o qual $\epsilon_r < 0$. A configuração final de apenas 4 sítios é alterada, ou seja

$$\begin{cases} \epsilon_j \rightarrow \epsilon_j - 1 \\ \epsilon_{j+1} \rightarrow \epsilon_{j+1} + 1 \\ \epsilon_r \rightarrow \epsilon_r + 2 \\ \epsilon_{r+1} \rightarrow \epsilon_{r+1} - 2. \end{cases}$$

Estas regras valem sempre que $r \neq 1$. Caso $r = 1$, o valor de ϵ_r não é atualizado por causa da condição de contorno aberta ($\epsilon_1 = h_1 - 1$).

- Se a partícula for adicionada num sítio j para o qual $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = 1$ teremos uma avalanche se propagando para a frente e para trás. Haverá um deslizamento de todo o ‘cluster’ de partículas localizadas entre o sítio ℓ (primeira armadilha a esquerda, ou seja, para trás) e o sítio r (primeira armadilha a direita, ou seja, para a frente). Para $\ell \neq L$ e $r \neq 1$ isto significa

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_j \rightarrow \epsilon_j - 1 \\ \epsilon_{j+1} \rightarrow \epsilon_{j+1} - 1 \\ \epsilon_r \rightarrow \epsilon_r + 2 \\ \epsilon_\ell \rightarrow \epsilon_\ell + 2 \\ \epsilon_{r+j-\ell} \rightarrow \epsilon_{r+j-\ell} - 2. \end{array} \right.$$

Se $\ell = L$ e/ou $r = 1$ as atualizações são feitas de forma a respeitar as condições de contorno, ($\epsilon_1 = h_1 - 1$ e $\epsilon_{L+1} = -1$).

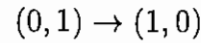
O tamanho médio das avalanches depende portanto da densidade de armadilhas na rede, que, por sua vez, escala como uma lei de potências com o tamanho da rede (pode-se mostrar que a distância média das armadilhas escala com $L^{1/3}$). O Modelo possui invariância de escala, mas possui outros comprimentos característicos além do tamanho da rede. Estes, no entanto divergem quando $L \rightarrow \infty$.

Em 1993 Chhabra, Feigenbaum, Kolan e Procaccia propuseram um outro modelo que ficou conhecido como modelo LLL (local, limited and limited to no traps), como um exemplo de um modelo unidimensional com invariância de escala plena. Ele é uma variação do modelo LL, onde não existem armadilhas. Isto é conseguido proibindo-se, *a priori*, perturbações que dêem origem a armadilhas, ou seja, a perturbação é proibida se para o sítio j tivermos $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = 0$. Note que para que o sítio $j = L$ (borda fechada) não seja uma armadilha, devemos redefinir as condições de contorno, fixando $\epsilon_{L+1} = 1$. Como pode-se mostrar que não se formam armadilhas durante uma avalanche, essa condição é suficiente para garantir a inexistência destas no modelo LLL.

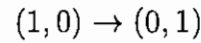
Em vez de olharem mais a fundo a dinâmica do modelo, Chhabra e colaboradores fixaram-se na análise das leis de escala, em particular na estatística dos grãos que rolam para fora do sistema. Investigando outras propriedades do modelo LLL, como por exemplo a distribuição do tamanho das avalanches, concluímos que este modelo corresponde a uma

reação binária de aniquilação e criação $A + A \rightarrow 0$, com um comportamento tão trivial quanto o do modelo BTW1 [39]. Devido a inexistência de armadilhas, só temos dois valores possíveis para ϵ_j . Ou $\epsilon_j = 1$ (presença de partículas no sítio j) ou $\epsilon_j = 0$. (ausência de partículas no sítio j). Podemos resumir a dinâmica como segue:

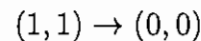
- Se o sítio j for sorteado para a perturbação e $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = 0$, a perturbação é proibida e nada acontece.
- Se o sítio j for sorteado para a perturbação e $\epsilon_j = 0$, mas $\epsilon_{j+1} = 1$, a perturbação ocorre mas não há avalanche. Isso corresponde a uma reação de difusão



- Se o sítio j for sorteado e $\epsilon_j = 1$ mas $\epsilon_{j+1} = 0$ a perturbação ocorre e provoca uma avalanche para a frente, num processo idêntico ao observado no modelo BTW1. O tamanho da avalanche corresponde ao sítio perturbado, $s = j$. Essa dinâmica também corresponde a uma difusão



- Se o sítio j for sorteado e $\epsilon_j = \epsilon_{j+1} = 1$, a perturbação ocorre e provoca uma avalanche que se propaga para trás até a borda fechada, retornando depois em direção a borda aberta até que os grãos que se moveram saiam todos do sistema. O tamanho da avalanche também pode ser trivialmente calculado a partir do sítio perturbado, $s = \sum_{i=k}^L k$. Isto corresponde a uma reação de aniquilação,



Nesse caso o comportamento do modelo não é idêntico, mas extremamente similar ao do modelo BTW1. A estatística do tamanho das avalanches reflete a estatística das

perturbações, e as avalanches não param antes de atingirem a borda aberta, pois não há armadilhas. A única diferença está na estatística das perturbações. Enquanto no modelo BTW1 ela é homogênea (todos os sítios tem a mesma probabilidade de serem perturbados), no modelo LLL ela obedece a uma lei de potências, pois é possível mostrar que a densidade de sítios que podem ser perturbados cai com $1/d$, onde d é a distância até a borda fechada. Essa assimetria é uma consequência direta da assimetria das condições de contorno, pois o sítio $j = L$ (correspondente à borda fechada) sempre pode ser perturbado.

A estatística não trivial observada no modelo pode ser entendida então como a superposição de duas situações. (a) Para avalanches com tamanho menor que o tamanho da rede ($s < L$), a distribuição de tamanho das avalanches, $F(s)$, reproduz exatamente o comportamento do modelo BTW1, exceto para $s \approx L$. O pico observado nessa região reflete o fato de que o sítio $i = L$ sempre pode ser perturbado (nunca é uma armadilha). (b) para $s > L$, $F(s)$ obedece a uma lei de potências. Essa lei de potências, no entanto, é uma manifestação direta da assimetria da regra de perturbação, e não da presença de SOC, conforme sugerido em estudos anteriores [52]. Ela apenas reflete a maneira inhomogênea com que o modelo é perturbado e não pode ser associada com um comportamento complexo.

O modelo não local NLL (com $n_p = 1$, $n = 2$ e $E_c = 2$) é o primeiro modelo unidimensional de pilha de areia que apresenta um comportamento complexo e invariância de escala de origem dinâmica similar a do modelo BTW em duas dimensões. Como ocorre nos modelos bi-dimensionais, a distribuição de tamanho da avalanches obedece uma lei de escala simples, $F(s) \sim s^{-\delta}$, com um ‘cutoff’ que escala com o tamanho da rede.

Neste modelo não é possível prever, *a priori*, onde uma avalanche irá acabar ou qual os ‘clusters’ de grãos que farão parte da avalanche, como ocorre com os modelos LL e LLL. Também não tem sentido definir qualquer extensão do conceito de ‘armadilha’ uma vez que é impossível identificar, baseado apenas no conjunto de valores $\{E_k\}$, quais são os sítios capazes de interromper uma avalanche. Não é possível traduzir a dinâmica num conjunto

de regras locais para as variáveis ϵ_j , uma vez que as consequências de uma perturbação no sítio j dependem da configuração global da rede $\{\epsilon_k\}$ no instante anterior, e não apenas do valor dessa variável nos sítios j e $j + 1$, como ocorre nos modelos LL e LLL. Novos ramos de avalanches são constantemente criados, e a formação destes novos ramos destrói ou ‘burla’ o que anteriormente eram armadilhas. Como consequência desse mecanismo de ramificação, notamos um aumento no número de grandes avalanches e a inexistência de comprimentos característicos além do tamanho da rede. A importância deste mecanismo de ramificação fica clara quando consideramos uma variante do modelo NLL, onde as configurações obtidas a partir de novos ramos foram proibidas. Esse novo modelo evolui para o estado minimamente estável ($\epsilon_k = 1, \forall$ sítio k da rede, e que corresponde ao estado fundamental do modelo BTW1 com $n_p = n = E_c = 2$), cujo comportamento é trivial. Em outras palavras, a simples análise das configurações da rede ou dos estados meta-estáveis do sistema não é suficiente para explicar o comportamento complexo observado.

Como conclusão, vemos que a existência de leis de potência na análise estatística de um modelo não deve ser considerada um sinônimo de comportamento complexo. Invariâncias de escala podem ser manifestações de diversos comportamentos dinâmicos, inclusive alguns bastante triviais, como no modelo LLL onde a assimetria da borda joga papel crucial no aparecimento de uma lei de potências.

Capítulo 4

Criticalidade auto-organizada como um processo ramificado

4.1 Processos ramificados e SOC

Em 1995 Zapperi, Lauritsen e Stanley [59] estabeleceram uma conexão entre a teoria dos processos ramificados e SOC. Esses autores mostraram que alguns modelos com SOC, sem correlações espaciais e no limite termodinâmico, podem ser mapeados em processos ramificados que foram batizados de SOBP (self-organized branching process).

Um processo ramificado é um processo marcoviano, que pode ser caracterizado por uma sequência de variáveis aleatórias $\{P(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $n \in N$, onde $P(n)$ representa o número total de indivíduos na n -ésima geração. Considere um grupo de indivíduos (pais) que replicam, dando origem a i novos indivíduos (filhos), de tal forma que p_i ($i = 0, 1, \dots, \infty$) é a probabilidade que um pai tem de gerar i filhos. Cada um de seus descendentes, por sua vez, pode dar origem a novos filhos com a mesma probabilidade p_i , de tal forma que p_i não depende das gerações precedentes nem do número de descendentes de outros indivíduos da mesma geração. A taxa de ramificação $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$ corresponde então ao número médio de filhos que um pai gera. Uma sequência de nascimentos pode ser pensada como uma ‘avalanche’, e processos ramificados também dão origem a leis de potência. É um resultado bastante conhecido que, para que um processo ramificado seja crítico, devemos ter $\sigma = 1$. A taxa de ramificação pode ser pensada então como um parâmetro que ‘controla’ o comportamento crítico do sistema.

São resultados conhecidos para processos ramificados com taxa de ramificação constante (veja, por exemplo, o segundo trabalho da referência [47]), que a distribuição de

tamanhos das avalanches assume a seguinte forma:

$$P(s) = \frac{1}{s} \binom{k s}{s-1} \left(1 - \frac{\sigma}{k}\right)^{k s - (s-1)} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{s-1}, \quad (4.1)$$

expressão essa que, no limite de grandes avalanches e de $\sigma \sim 1$, pode ser escrita como

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-1/k)}} s^{-3/2} \exp(-s/s_\xi), \quad (4.2)$$

onde

$$s_\xi \approx \frac{2(k-1)}{k} (1-\sigma)^{-2}. \quad (4.3)$$

Pode-se mostrar também (ver referência [44]), que

$$\bar{s} = \frac{1}{1-\sigma}. \quad (4.4)$$

Nos processos ramificados tradicionalmente estudados, a taxa de ramificação σ é constante. Os trabalhos relacionando SOC e processos ramificados tratam sempre de modelos do tipo campo médio, onde a taxa de ramificação também é constante.

No caso geral de modelos com SOC definidos numa rede, a taxa de ramificação σ não é uma constante, mas uma variável dinâmica que evolui no tempo e que depende de parâmetros do modelo, como por exemplo a taxa de dissipação α , ou seja $\sigma = \sigma_t(\alpha)$. Quando dizemos que tais sistemas dinâmicos são *auto-organizados*, estamos dizendo que este parâmetro $\sigma_t(\alpha)$, – que controla o processo de avalanche, e cujo valor não é fixado *a priori*, (como nos processos ramificados tradicionais), – evolui no tempo em direção a um valor estacionário σ_∞ que não depende das condições iniciais. Na verdade poderíamos dizer que $\sigma_t = \sigma(p_t(E))$, isto é, σ_t é um funcional da distribuição $p_t(E)$, que, por sua vez, também evolui para um estado estacionário $p_\infty(E)$. Assim $\sigma_\infty = \sigma(p_\infty(E))$. Se $\sigma_\infty = 1$ o sistema é crítico. A análise do valor da taxa de ramificação como função de um parâmetro do modelo, por exemplo do parâmetro de conservação, pode indicar de forma mais clara

em que condições e para que valores do parâmetro o modelo é crítico. Nos últimos dois anos essa abordagem vem sendo usado por inúmeros autores, e tem permitido determinar, de forma mais precisa, em que de condições alguns modelos tem SOC, ou seja, são de fato críticos.

4.2 Robustez da invariância de escala em modelos com SOC

A robustez dos modelos com SOC em relação às condições iniciais ($\sigma_t \rightarrow \sigma_\infty = 1$ para diferentes condições iniciais) não pode ser confundida com uma eventual robutez da criticalidade do modelo em relação a um parametro α . Para que o sistema apresente uma criticalidade ‘estruturalmente estável’, deve haver um intervalo de valores para α tal que $\sigma_t(\alpha) \rightarrow \sigma_\infty = 1$. Dizemos nesse caso que o sistema tem *SOC genérica*. Por exemplo, é um resultado conhecido que os modelos do tipo ‘pilha de areia’ não são críticos na presença de dissipação. Nesse sentido, podemos pensar que esses modelos são ajustados no estado crítico quando impomos uma dinâmica de relaxação conservativa, pois $\sigma_t(\alpha) \rightarrow \sigma_\infty = 1$ apenas para $\alpha = \alpha^* = \frac{1}{4}$. Se $\alpha < \alpha^*$ temos $\sigma_\infty < 1$, e o comportamento de escala não é mais observado. Embora possa ser argumentado que uma dinâmica conservativa é natural nesse caso, pois a areia em movimento não desaparece, a existência de SOC genérica seria altamente desejável, já que na natureza dissipação é um fenômeno constante. O modelo OFC, por exemplo – para que de fato represente a dinâmica dos terremotos – deve necessariamente ser não conservativo [20].

Num trabalho recente, no entanto, realizado em colaboração com Osame Kinouchi, notamos que uma vasta classe de modelos tem um comportamento curioso [44]. Embora sejam críticos apenas para um valor de α , (ou seja, $\sigma_\infty = 1$ apenas se $\alpha = \alpha^*$), observa-se que $\sigma_t(\alpha)$ é fortemente não linear em α , de modo que $\sigma \approx 1$ em todo um intervalo de valores de α próximo de α^* . Nesta situação leis de potência são observadas por muitas décadas, tornando praticamente impossível distinguir, através apenas das simulações numéricas e

da observação de leis de escala com FSS, esse comportamento ‘quase-crítico’ da verdadeira criticalidade.

Isto pode ser compreendido estudando-se, por exemplo, um modelo proposto por nós e que chamamos de modelo Feder e Feder Extremal (EFF). Nesse caso, no limite termodinâmico, a distribuição estacionária $p_\infty(E)$ e o tamanho médio das avalanches \bar{s} são funções analíticas simples de um parâmetro de acoplamento J (que, pode-se mostrar, está ligado ao parâmetro de dissipação α). A análise deste modelo, em termos de processos ramificados, é transparente, permitindo obter expressões analíticas para $\sigma_\infty(J)$. Pode-se então mostrar que o modelo EFF com ruído é quase-crítico (no sentido definido anteriormente e que será melhor explicado a seguir), enquanto que o modelo EFF sem ruído é claramente crítico só para $\sigma = 1$ ($\sigma_t(\alpha)$ nesse caso tem comportamento similar aos modelos do tipo pilha de areia). Mostramos também, comparando resultados analíticos e simulações numéricas, que diversos resultados tradicionais da teoria de branching, deduzidos para processos com taxa de ramificação constante, continuam válidos em modelos com SOC onde $\sigma = \sigma_t$, se usarmos no lugar de σ (constante) o valor assintótico de σ_∞ do estado estacionário.

4.3 O modelo Feder e Feder Extremal

Como já falamos, podemos ver um exemplo do que se chamou comportamento ‘quase-crítico’ estudando o chamado modelo EFF (Extremal Feder and Feder) com ruído [44], uma versão aleatória e unidimensional do modelo Feder e Feder, onde a perturbação externa global é substituída por uma dinâmica extremal, similar à usada no modelo Bak-Sneppen [27]. A dinâmica extremal, que substitui a lenta perturbação externa, é, nesse caso, um ingrediente essencial para a observação de criticalidade auto-organizada.

Podemos definir o modelo EFF com ruído através das seguintes regras: Consideremos um conjunto de sítios $i = 1, \dots, N$, a cada um dos quais é associada uma variável real

E_i . A cada passo de tempo o sítio com maior E_i relaxa. E_i então assume o valor zero mais um termo de ruído η . A energia liberada pelo sítio i se propaga pela rede segundo as regras dinâmicas do modelo Feder e Feder original: k vizinhos aleatórios (r_n) tem a sua energia aumentada de um valor constante J mais um ruído. Um passo no tempo significa, portanto, uma atualização do sítio de maior energia e de seus k vizinhos aleatórios.

Assim, se denotamos $E^* \equiv \max \{E_i(t)\}$ o valor máximo de E_i no instante t , temos

$$E_i^*(t+1) = \eta$$

e

$$E_{r_n}(t+1) = E_{r_n}(t) + J + \eta_{r_n}(t),$$

onde η e η_{r_n} são variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $[0, \epsilon]$. Note que cada vizinho aleatório recebe uma quantidade η_{r_n} diferente. Como veremos a seguir, num certo instante t , a densidade instantânea de estados $p_t(E)$ é formada por vários picos, e o valor máximo para o ruído ϵ é determinado a partir da condição de que estes picos não venham a se superpor. Esse processo continua até que a energia de todos os sítios esteja abaixo de um certo valor $E_c = 1$ ¹. Essa sequência define uma avalanche, cujo tamanho é igual ao número de sítios que se tornaram ativos e que relaxaram mais um (pois o sítio escolhido para começar a avalanche tem sempre $E < 1$).

Como, quando um sítio relaxa, a sua energia assume um valor aleatório $\eta \in [0, \epsilon]$, é claro que, no limite $t \rightarrow \infty$, todos os valores de E estarão dentro de um dos intervalos $I_n \equiv [(n-1)J, (n-1)J + n\epsilon]$, $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ (o valor de n_{\max} será obtido adiante). Esses intervalos discretizam o espaço de fases, de modo que $p(E)$ é formado por n picos. Podemos então definir as quantidades

$$P_n = \int_{(n-1)J}^{(n-1)J+n\epsilon} p(E) dE,$$

¹Essa escolha particular para o limiar E_c não tem influência nenhuma no modelo, pois E_c só define a escala no eixo E .

que correspondem à probabilidade de termos um sítio num intervalo I_n (n -ésimo pico).

O processo de avalanche pode ser pensado então como a transferência de sítios entre os intervalos I_n . A cada passo de tempo um sítio é transferido para o intervalo I_1 , e, com probabilidade $k P_1$, um sítio é removido desse intervalo. Para $t \rightarrow \infty$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= P_1(t) + \frac{1}{N} [1 - kP_1(t)], \\ P_n(t+1) &= P_n(t) + \frac{1}{N} [kP_{n-1}(t) - kP_n(t)]. \end{aligned}$$

No estado estacionário, temos $P_n(t+1) = P_n(t) = P$. Isto nos permite mostrar que $P_n^* = 1/k$ para todo n . Isso significa ainda que $p_\infty(E)$ é composto por k picos. Como

$$\int_0^\infty p(E) dE = 1,$$

temos $n_{\max} = k$, ou seja, o número de picos é igual à conectividade do modelo.

O modelo EFF pode ser interpretado como um processo ramificado, onde um sítio ativo (pai) produz k descendentes (filhos) com uma probabilidade p . A taxa de ramificação $\sigma = kp$ corresponde a probabilidade que um sítio ativo tem de gerar outro sítio ativo. A partir dessas considerações pode-se calcular analiticamente $p_\infty(E)$ e $\sigma_\infty(J)$. Obtendo-se $\sigma_\infty(J)$ podemos, por sua vez, estudar a dependência de σ_∞ com o parâmetro J , de forma a estabelecer com segurança para que valores de J o modelo é crítico. Os resultados tradicionais dos processos ramificados (equações ?? acima) continuam válidos se tomarmos $\sigma = \sigma_\infty(J)$ (valor de σ no estado estacionário).

Obter σ_∞ para $J = 1/k$ é trivial, pois pode-se mostrar que só os sítios pertencentes ao k -ésimo pico podem se tornar ativos durante o processo de avalanche.

Note que o k -ésimo pico (o último, correspondente a $n = n_{\max}$), que começa em $(k-1)J$, deve ficar abaixo do valor limite $E_c = 1$. Portanto ϵ deve satisfazer a condição $(k-1)/k + k\epsilon < 1$, ou seja,

$$\epsilon < \frac{1}{k^2}.$$

Isto também significa que sítios pertencentes aos outros picos não podem contribuir para σ_∞ , isto é, não se tornam críticos quando recebem uma contribuição $J + \epsilon$. Mas como todos os sítios pertencentes ao último pico recebem ao menos uma contribuição $J = 1/k$ (caso em que $\epsilon = 0$), cada vez que são sorteados ficam necessariamente críticos. Assim, o número médio de descendentes de um sítio ativo é

$$\sigma_\infty = k P_k^* = k \times \frac{1}{k} = 1,$$

que corresponde a um processo ramificado crítico (ou seja, para $J = 1/k$ o modelo EFF com ruído é crítico). Neste caso (veja eq. 4.2 e 4.3),

$$\bar{s} \rightarrow \infty,$$

$$\xi_s \rightarrow \infty$$

e

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-1/k)}} s^{-3/2}$$

É fácil também perceber que esse modelo só é crítico quando $J = 1/k$. Como $J < 1/k$, podemos escrever $kJ = 1 - \delta$, ($\delta > 0$ pequeno), e então temos necessariamente $\sigma_\infty < 1$, pois nesse caso alguns sítios do último pico, se sorteados como vizinhos aleatórios, podem não receber uma contribuição suficiente para se tornarem críticos. Assim, o modelo é subcrítico para qualquer valor de $J < J_c = 1/k$.

Também é possível calcular σ_∞ para $J < 1/k$, pois para esse modelo o cálculo de $p_\infty(E)$ é bastante simples (veja referência [44]). No estado estacionário, um sítio pertencente ao n -ésimo pico tem uma energia

$$E = (n - 1) J + z_n,$$

onde z_n é a soma de n variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $[0, \epsilon]$. Isto permite calcular a distribuição $p(z_n)$,

$$p(z_1) = \epsilon^{-1} \Theta(z_1) \Theta(\epsilon - z_1),$$

$$p(z_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_n dz_1 p(z_n) p(z_1) \delta(z_n + z_1 - z_{n+1}),$$

onde $\Theta(z)$ é a função degrau de Heaviside.

A distribuição estacionária $p_{\infty}(E)$ tem k picos, cada um deles começando em $E_n = (n-1)J$ e proporcional a $p(z_n)$. A figura 4 mostra uma comparação entre o valor teórico de $p_{\infty}(E)$ obtido por esse método e o resultado de simulações numéricas para $k = 4$, $J = 0.235$ e $\epsilon = 0.05$. Pode-se ver que a concordância é excelente.

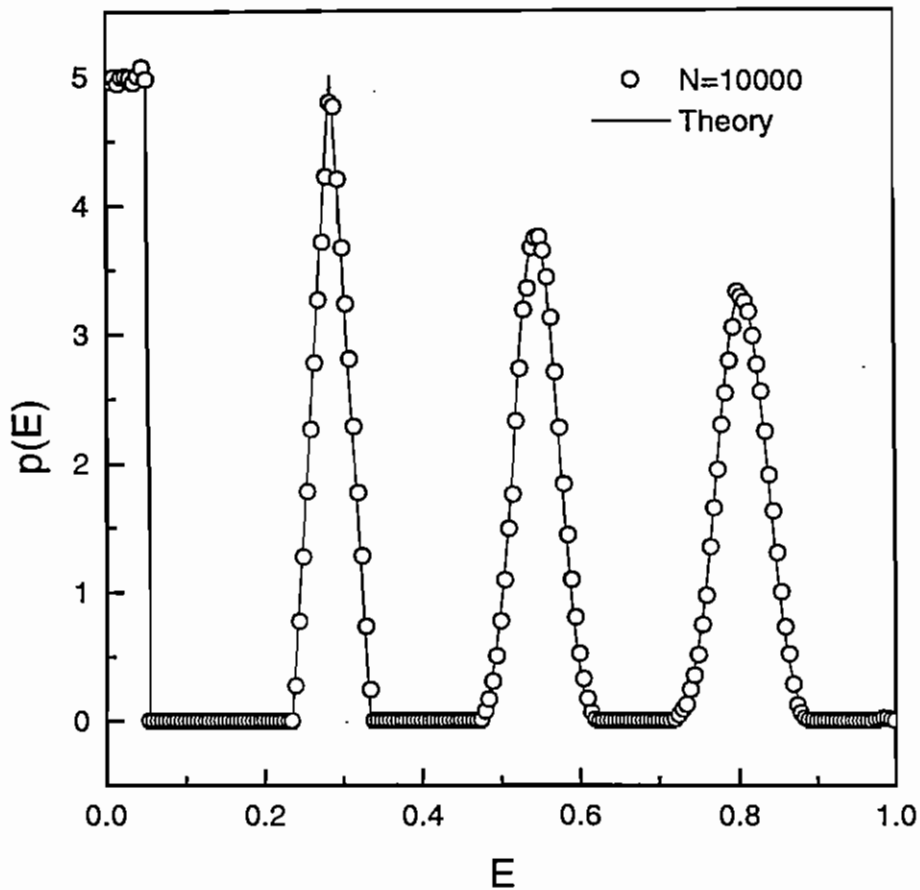


Figura 4 Comparação entre resultados analíticos e de simulação numérica para a distribuição de estados $p_{\infty}(E)$ numa rede de coordenação 4 com $J = 0.235$ e $\epsilon = 0.05$.

A partir de $p_\infty(E)$ podemos calcular σ_∞ através do seguinte raciocínio:

- (a) Todos os sítios passíveis de serem ativados pertencem ao k -ésimo pico.
- (b) Entre os sítios desse pico, sítios com $E > 1 - J$ são sempre ativados; Esses sítios dão uma contribuição

$$\sigma' = \int_{\delta}^{\delta+J} p(z) dz$$

para a taxa de ramificação, onde $z = E - (k - 1) J$ e $\delta = 1 - k J$ (veja referência [44] para detalhe das contas).

- (c) Sítios com $E < 1 - J - \epsilon$ nunca podem ser ativados, portanto não contribuem para a taxa de ramificação.
- (d) Sítios com $1 - J - \epsilon < E < 1 - J$ podem ser ativados se receberem uma contribuição $J + \eta > 1 - E$, ou seja, para $\eta > \delta - z$. Como isso ocorre com probabilidade $P(\eta > \delta - z) = 1 - (\delta - z)/\epsilon$, pode-se calcular a contribuição σ'' que estes sítios dão à taxa de ramificação. Temos

$$\sigma'' = \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z) \left(1 - \frac{\delta - z}{\epsilon}\right) dz,$$

e a taxa de ramificação total é dada por:

$$\sigma_\infty(J)\sigma' + \sigma''.$$

A figura 5 mostra o gráfico $\sigma_\infty(J) \times J$ para esse modelo.

Esses mesmos cálculos podem ser repetidos para uma versão sem ruído do modelo EFF (no qual $\eta_{rn} = 0$). Obtivemos para $\sigma_\infty(J)$

$$\sigma_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta > \epsilon \\ 1 - \frac{\delta}{\epsilon} & \text{se } 0 < \delta < \epsilon. \end{cases}$$

Um gráfico de $\sigma_\infty(J) \times J$ para esse caso pode ser visto também na figura 5. Fica claro que, ao contrário do que ocorre com o modelo EFF com ruído, neste modelo avalanches grandes só ocorrem quando J está bem próximo de J_c . É portanto fácil perceber, através de simulações numéricas, que esse modelo só é crítico se $J = J_c = 1/k$. Não podemos classifica-lo como ‘quase-crítico’ no sentido definido anteriormente.

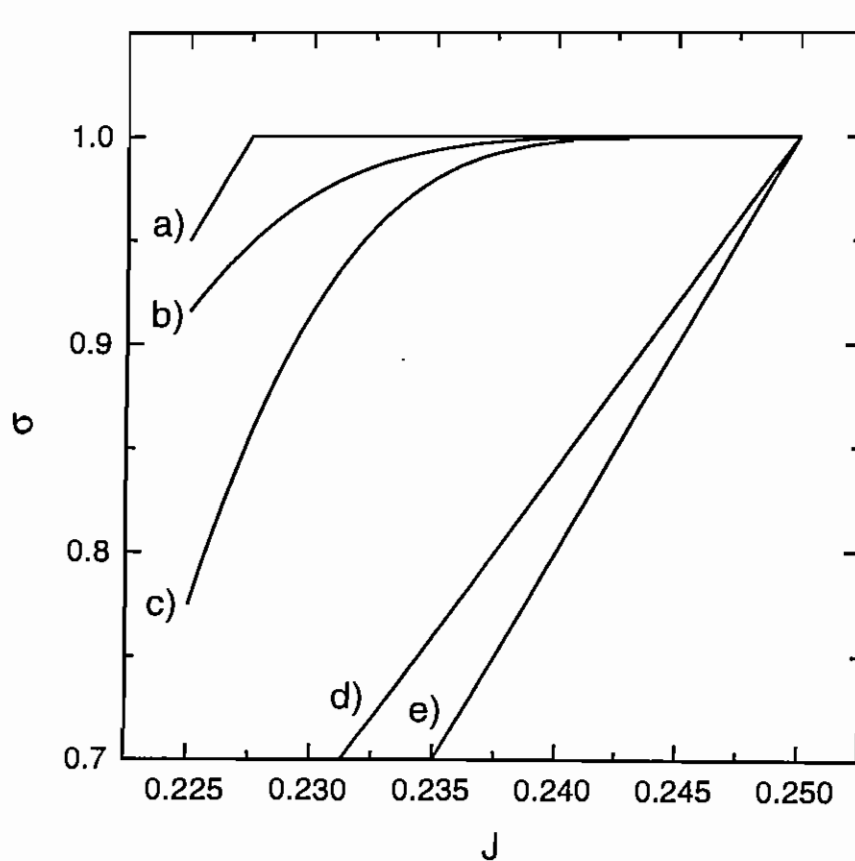


Figure 5 (a) *Criticalidade auto-organizada genérica*; (b) $\epsilon = 0.0625$ e (c) $\epsilon = 0.05$: *Modelo EFF com ruído*. σ_∞ é quase constante quando $J \sim J_c$. (d) $\epsilon = 0.25$ e (e) $\epsilon = 0.2$, *modelo EFF sem ruído*. σ_∞ aproxima σ_c de forma linear.

Esses resultados mostram que, se SOC genérica não é facilmente encontrada em modelos não conservativos, um comportamento ‘quase-crítico’ certamente é. Esse comportamento quase-crítico é muito difícil de ser distinguido, na prática, de um comportamento crítico genérico. Como tanto nas simulações numéricas quanto na natureza (devido a limi-

tações experimentais na aquisição de dados) leis de potência podem apenas ser medidas durante algumas dezenas, para explicar a presença freqüente de leis de escala na natureza SOC genérica ou quase-criticalidade são equivalentes.

Capítulo 5

Criticalidade auto-organizada em modelos não conservativos

5.1 Pilhas de areia com inércia

Como já afirmamos, a idéia de criticalidade auto-organizada engloba duas propriedades distintas. O termo *crítico* se refere à existência de leis de potência na resposta do sistema a pequenas perturbações e o termo *auto-organizado* refere-se ao fato dessa evolução se dar naturalmente. Mesmo partindo de condições iniciais distintas, o sistema evolui para o mesmo estado estacionário. Já dissemos também que os modelos de pilha de areia não são críticos na presença de dissipação. Isto pode ser visto, por exemplo, num modelo proposto por nós em 1992 [37], capaz de simular os efeitos da inércia presente em pilhas de areia reais.

Na natureza, muitas vezes, a medida que uma avalanche se desenvolve, energia potencial é transformada em energia cinética, os grãos rolantes ganham energia e momento, e toda a massa de areia é acelerada. Após um certo ponto, as forças de atrito e as colisões que atuam durante a avalanche não são mais suficientes para interromper o processo, e a avalanche só pára quando atinge a borda do sistema, numa espécie de ‘efeito bola de neve’.

Este efeito foi considerado num modelo de pilha de areia para o qual o limiar E^c , que detona uma avalanche, é uma função decrescente da energia acumulada por um grão durante o tempo em que este permanece em movimento. Foram estudados dois modelos, um uni-dimensional (baseado no modelo NLL já descrito no capítulo 2 dessa tese) e outro bidimensional, a partir de uma modificação do modelo BTW.

Na versão uni-dimensional, o sistema é perturbado adicionando-se um grão de areia em um sítio escolhido aleatoriamente. A dinâmica do modelo é governada pela diferença de altura entre dois sítios. Quando essa diferença $E_i = h_{i+1} - h_i$ excede um certo limiar E^c , dois grãos de areia rolam para dois sítios vizinhos, e temos

$$\begin{aligned} h_i &\rightarrow h_i - 2 \\ h_{i+1} &\rightarrow h_{i+1} + 1 \\ h_{i+2} &\rightarrow h_{i+2} + 1. \end{aligned}$$

Os grãos que alcançam os sítios $(i+1)$ e $(i+2)$ já rolaram uma vez, e como consequência, torna-se um pouco mais difícil pará-los. Este efeito foi incorporado no modelo fazendo-se E^c um pouco menor, isso é,

$$E_i^c = E^c - \alpha n_i,$$

onde n_i representa o número de vezes que o grão de areia, que acaba de chegar ao sítio i , já rolou antes de atingí-lo. E_i^c passa a ser então o novo limiar crítico para o sítio i . Note que, para um mesmo sítio i , E_i^c pode assumir diversos valores durante uma única avalanche, pois não é uma propriedade do sítio i , mas uma função decrescente do número de vezes que o grão que chega a este sítio já rolou. Como a energia de uma partícula não pode crescer para sempre, E_i^c diminui até um valor mínimo E_0 .

No modelo bidimensional algo parecido é considerado. Parte-se das regras dinâmicas do modelo original BTW, perturbado agora deterministicamente sempre no canto esquerdo superior. Para reproduzir a morfologia cônica de uma pilha de areia real, conectou-se a borda esquerda com a borda superior, permanecendo as outras duas bordas abertas.

Cada vez que um grão rola, energia é transmitida em igual parte aos grãos seguintes. A Energia crítica E^c a partir da qual o sítio se torna instável depende agora da energia total acumulada no sítio (agora mais de um grão pode cair no mesmo sítio no mesmo instante).

Energia é transmitida apenas para a frente, embora a avalanche possa se propagar também para trás [54], e é conservada durante a rolagem dos grãos. No entanto, se um grão pára, toda a energia que ele carrega é automaticamente dissipada. Define-se uma matriz de energia $e_{i,j}$ que é atualizada junto com a matriz $E_{i,j}$ que define as diferenças de altura para a pilha de areia. Essa dinâmica pode ser resumida nas seguintes regras:

Se $E_{i,j} < E_{i,j}^c(e_{i,j})$, então

$$e_{i,j} \rightarrow 0.$$

Se $E_{i,j} \geq E_{i,j}^c(e_{i,j})$, então

$$\begin{aligned} E_{i,j} &\rightarrow E_{i,j} - 4, \\ E_{i\pm 1, j\pm 1} &\rightarrow E_{i\pm 1, j\pm 1} + 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_{i,j} &\rightarrow 0, \\ e_{i+1, j} &\rightarrow \frac{1}{2}e_{i,j} + 1, \\ e_{i, j+1} &\rightarrow \frac{1}{2}e_{i,j} + 1. \end{aligned}$$

O limiar crítico $E_{i,j}^c(e_{i,j})$ é definido por

$$E_{i,j}^c(e_{i,j}) = E^c - \alpha e_{i,j},$$

onde α é um parâmetro de dissipação.

Diversos resultados experimentais puderam ser explicados por esse modelo, em particular (a) o perfil côncavo de uma pilha de areia real após uma grande avalanche e (b) a transição de fase observada entre o comportamento de pilhas de areia pequenas (que apresentam SOC) e pilhas de areia grandes (com uma estatística na qual predominam

grandes avalanches) [55]. Os resultados obtidos nesse trabalho podem porém ser considerados dentro de um contexto mais geral, como já apontado na época: a invariância de escala observada nos modelos (de pilha de areia) com SOC são resultado de um equilíbrio delicado entre as probabilidades de criação e de morte de novos ramos das avalanches. Se esse equilíbrio é destruído, seja pela quebra da conservação de energia, seja por meio de outro mecanismo qualquer, as leis de escala são destruídas e o sistema deixa de ser crítico. Num trabalho analítico, Dhar [16] mostrou, também no ano de 1992, que o aparecimento de correlações de longo alcance em modelos de pilha de areia é consequência desta lei de conservação.

5.2 Criticalidade no modelo Olami-Feder-Christensen

Em alguns outros modelos, no entanto, o estado estacionário crítico parece ser atingido mesmo num regime não conservativo. Esta observação está em contradição com resultados da mecânica estatística fora do equilíbrio, onde invariância de escala pode ser observada, mas só em sistemas com uma lei de conservação ou uma simetria especial (como por exemplo a invariância translacional) [56]. Entre os modelos com criticalidade auto-organizada, a única classe de modelos exatamente solúvel - a dos modelos abelianos - se comporta do mesmo modo. Exibe correlações críticas quando a dinâmica de relaxação é conservativa [14]. Como consequência, a existência de SOC em modelos não abelianos, mas conservativos, pode ser considerado um resultado natural. Mas a observação de criticalidade auto-organizada em modelos com dinâmicas de relaxação não conservativas parece, até certo ponto, surpreendente. No entanto essa seria uma propriedade altamente desejável, uma vez que, na natureza, sempre existe alguma dissipação.

Os dois modelos mais conhecidos com SOC e uma dinâmica de relaxação não conservativa são os modelos Feder e Feder (FF) e o modelo Olami-Feder-Christensen (OFC). O modelo FF apareceu primeiro, mas o modelo OFC tem a vantagem de ter um parâmetro

α que controla o nível de conservação. Este modelo é um modelo de mapas acoplados, inspirado no modelo massa mola desenvolvido por Burridge e Knopoff [57]. Associa-se a cada sítio i, j de uma rede quadrada um valor contínuo de ‘energia’ $E_{i,j}$, inicialmente com um valor aleatório no intervalo $(0, E_c)$. O sistema é perturbado globalmente, ou seja, a energia de todos os sítios aumenta de forma uniforme e simultânea. O processo continua até que eventualmente um sítio se torna ativo ($E_{i,j} \geq E_c$). Este sítio então relaxa de acordo com as regras:

$$\begin{aligned} E_{i,j} &\rightarrow 0, \\ E_{i\pm 1, j\pm 1} &\rightarrow E_{i\pm 1, j\pm 1} + \alpha E_{i,j}. \end{aligned}$$

Um dos vizinhos $E_{i\pm 1, j\pm 1}$ pode, por sua vez, se tornar ativo, gerando uma reação em cadeia que só acaba quando todos os sítios estão estáveis novamente. Este modelo já foi estudado com condições de contorno abertas (open) e fechadas (free). Quando as condições de contorno são fechadas (sistema é isolado) $\alpha_{borda} = \alpha/1 - \alpha$, e nenhuma energia extra é dissipada na borda. Já no caso de condições de contorno abertas, $\alpha_{borda} = \alpha$, e sempre que um sítio de borda fica ativo, parte de sua energia é perdida (sai fora do sistema). O parâmetro α controla o nível de conservação do modelo. Se $\alpha = \frac{1}{4}$, o sistema é conservativo, isto é, toda a energia perdida pelo sítio (i, j) é distribuída entre seus quatro vizinhos mais próximos. Se $\alpha < \frac{1}{4}$ o modelo é não conservativo. É importante notar que, para representar a dinâmica ‘real’ dos terremotos, este modelo deve ser necessariamente não conservativo, uma vez que energia sempre é liberada para a placa tectônica superior que se move.

Baseada em fortes evidências numéricas [20, 23, 22, 24], têm-se assumido que este modelo tenha criticalidade mesmo para $\alpha < \frac{1}{4}$, sem que haja consenso na literatura sobre o valor mínimo de α a partir do qual o sistema é crítico. Este é um resultado que ainda não é completamente compreendido. A origem do comportamento crítico no modelo OFC

vem sendo estudada por diversos autores [22, 24, 23, 58].

Sabe-se que com condições de contorno periódicas, o modelo OFC rapidamente entra num regime periódico. Seu comportamento nesse caso é trivial. Se eliminamos a possibilidade de dois sítios ficarem críticos ao mesmo tempo (ou seja, terem a mesma energia E_i), vemos que todas as avalanches tem tamanho 1 (em cada avalanche um único sítio relaxa), e os sítios da rede se alternam um por um nesse processo. Todos os sítios da rede relaxam num ciclo que dura exatamente $E_c - 4\alpha$ na escala longa de tempo. Toda a dissipação ocorre no interior da rede, de modo que a energia acrescentada durante a fase de perturbação é totalmente dissipada nessa sequência de avalanches. Qualquer inomogeneidade, porém, como as introduzidas por bordas abertas, frustram a tendência natural de sincronismo. Os sítios da borda têm agora apenas 3 vizinhos, e uma energia extra é dissipada cada vez que um deles fica crítico e relaxa. No início, o interior da rede rapidamente se sincroniza. Aparentemente as regiões assíncronas da borda invadem lentamente o interior da rede, destruindo a periodicidade e gerando uma espécie de ‘phase-locking’ responsável pelo aparecimento das leis de potência observadas [24]. Simulações numéricas cuidadosas em redes grandes não foram capazes de mostrar nenhum desvio desse comportamento.

Num trabalho recente, realizado em colaboração com Josué Xavier de Carvalho [41], mostramos que, do ponto de vista do comportamento da taxa de ramificação, não existe diferença entre o comportamento do modelo OFC e do modelo R-OFC (que só é crítico no caso conservativo). Ou seja, ao contrário de resultados anteriores, também o modelo OFC só seria crítico no regime conservativo. Na presença de dissipação esse modelo apresenta um comportamento ‘quase-crítico’, como definido na referência [44].

Nesse trabalho nós revisitamos o modelo OFC, mas com uma abordagem diferente. Em vez de analisar a invariância de escala em redes cada vez maiores, nós calculamos a taxa de ramificação. Como a rede introduz correlações espaciais, não é possível nesse caso calcular a probabilidade p_i analiticamente. A taxa de ramificação foi então obtida numericamente. Considerou-se $\sigma = \langle n_d \rangle$, onde $\langle n_d \rangle$ é o número médio de filhos gerados

por um sítio crítico que relaxa. Para efeito de comparação, repetimos as simulações para o modelo R-OFC que sabemos ser crítico apenas no caso conservativo.

Tomou-se um cuidado especial para garantir a eliminação dos longos transientes presentes nesse modelo. Para cada valor de α , e para cada tamanho da rede, gerou-se diferentes estados estacionários, a partir de condições iniciais distintas. Os erros foram estimados a partir da divergência destes resultados (obtidos a partir de condições iniciais diferentes). Calculamos então (a) o tamanho médio de uma avalanche; (b) a taxa de ramificação global e (c) a taxa de ramificação apenas dos sítios do interior da rede (a análise desta informação permite ter certeza que um eventual sincronismo inicial no interior da rede já foi destruído); e (d) a duração média de cada avalanche (o número médio de gerações em uma avalanche).

A figura 6 (na qual podemos ver a dependência de $\sigma(\alpha) \times \alpha$ para os modelos OFC e R-OFC), resume os resultados encontrados. Pode-se ver que não existe nenhuma diferença significativa entre o comportamento observado para o modelo R-OFC (para o qual, insistimos, existem resultados analíticos mostrando que a criticalidade só ocorre no caso conservativo). Em ambos os casos, $\sigma(\alpha) \rightarrow 1$ de maneira aparentemente suave e contínua, sendo que $\sigma(\alpha) < 1$ para $\alpha < \frac{1}{4}$.

Quando analisamos a dependência de σ com o tamanho da rede, constatamos que σ cresce de maneira quase linear com L . Vemos que apenas no caso conservativo (modelo OFC) $\sigma \rightarrow 1$ quando $1/L \rightarrow 0$.

A contradição existente entre os resultados anteriores da literatura e os nossos pode ser entendida a partir dos resultados analíticos obtidos para os modelos EFF com e sem ruído apresentados no capítulo 4 dessa tese [44]). Eles mostram que a consequência da introdução de ruído no modelo é o alargamento da região onde o sistema apresenta um comportamento (aparentemente) crítico, com leis de potência observadas por muitas dezenas. O modelo EFF com ruído tem então um comportamento 'quase-crítico'. Esse parece também ser o caso do modelo OFC. A aleatoriedade introduzida pela assimetria

das bordas cria correlações de longo alcance, levando ao mesmo comportamento ‘quase-crítico’. A introdução de ruído não parece porém suficiente para garantir a ‘verdadeira’ criticalidade no caso não conservativo.

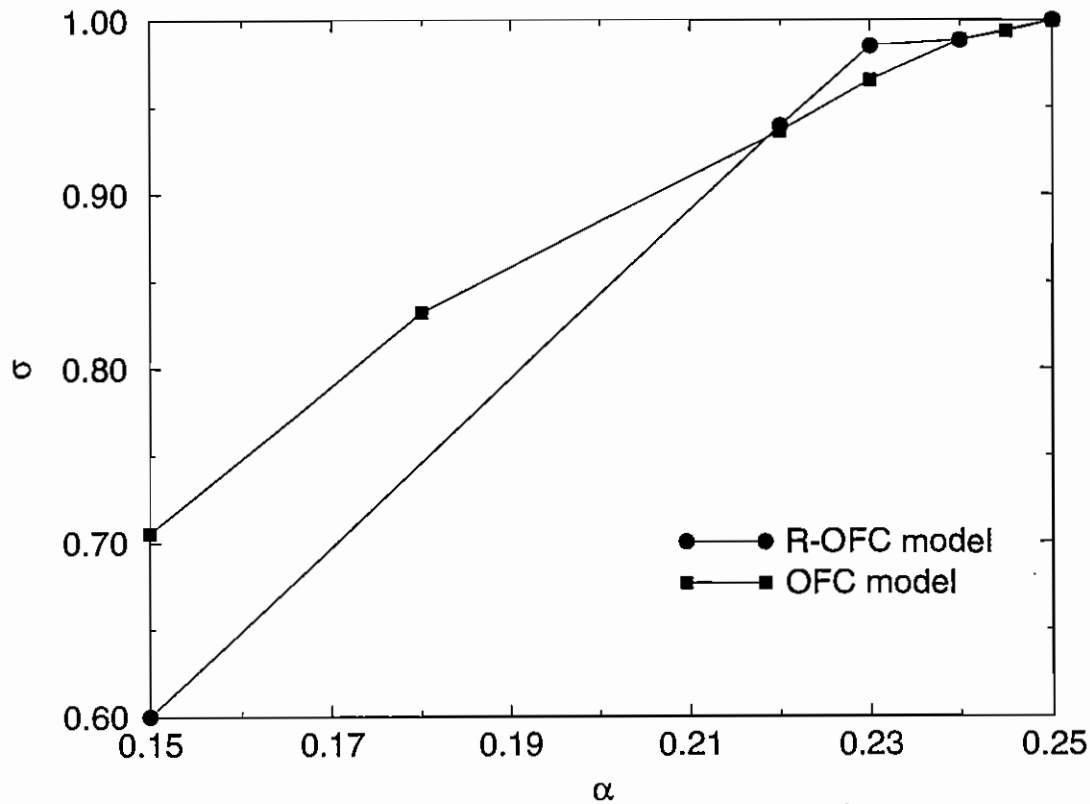


Figura 6 Dependência de σ com α para os modelos R-OFC e OFC. Ambos tem comportamento similar, quase crítico.

A análise de $\sigma(\alpha) \times \alpha$ mostrou-se um importante método complementar na identificação de SOC. O conceito de ‘quase-criticalidade’, por sua vez, torna relativa a importância da existência de SOC genérica: Uma vez que tanto nos resultados experimentais (devido à limitações dos dados disponíveis) quanto nas simulações numéricas (devido à limitações

computacionais) leis de potência só são mesmo observadas por algumas dezenas, para explicar a ampla presença de leis de escala na natureza vemos que os conceitos de criticalidade e 'quase-criticalidade' são, até onde podemos medir ou calcular, idênticos. E, se SOC genérica parece difícil de ser encontrada encontrada no conjunto de modelos estudados até agora (e eventualmente na natureza), o comportamento 'quase-crítico' certamente não o é.

Capítulo 6

Conclusões

Neste texto procuramos sistematizar alguns trabalhos relacionados com o conceito de criticalidade auto-organizada (SOC), mostrando as suas principais contribuições a esse tema, que é bastante atual, polêmico, com diversas questões em aberto e que continua a ser objeto de intensa pesquisa.

Nos capítulos 1 e 2 fizemos uma introdução ao conceito de criticalidade auto-organizada. No capítulo 3 resumimos algumas contribuições dadas ao problema de identificar a existência de criticalidade auto-organizada, contribuições essas que se encontram em quatro trabalhos dos quais participei (Pinho e colaboradores, PRE 55 (97), Pinho e colaboradores, *Physica A* 257 (98), Kinouchi e colaboradores, PRE 58 (98) e PRE 59 (99)). No capítulo 4 mostramos como alguns modelos com criticalidade auto-organizada podem ser tratados como processos ramificados. Com essa abordagem pudemos mostrar que a versão com vizinhos aleatórios do modelo Olami-Feder-Christensen só é crítica no caso conservativo (Pinho e colaboradores, *Physica A* 257 (98), Kinouchi e colaboradores, PRE 58 (98)); Com esse tratamento, e a partir de um novo modelo proposto por nós, que tem solução analítica, (modelo Feder e Feder Extremal), discutimos a robustez das leis de potência observadas nos modelos com criticalidade auto-organizada, mostrando que muitos desses modelos são quase-críticos (Kinouchi e colaboradores, PRE 59 (99)). E finalmente, no capítulo 5, discutimos dois problemas relacionados com a existência de criticalidade auto-organizada em modelos não conservativos. No primeiro mostramos um modelo de pilha de areia, proposto em colaboração com Z. Olami, que incorpora os efeitos de inércia. Esse modelo, além de deixar claro a importância das leis de conservação para a existência de SOC em modelos do tipo pilha de areia, é capaz de reproduzir boa parte dos resulta-

dos experimentais com pilhas de areia reais, que, em geral, não apresentam criticalidade auto-organizada. No segundo, um trabalho recente desenvolvido com J. de Carvalho, voltamos a estudar o problema da criticalidade no modelo Olami-Feder-Christensen (na rede), agora através da taxa de ramificação. Nossos resultados numéricos indicam que o modelo aparentemente só é crítico no caso conservativo (de Carvalho e colaboradores, cond-mat/9908264 (99)). Este resultados, que contradizem resultados anteriores, podem ser entendidos a partir dos resultados analíticos sobre a influência de ruído no modelo Feder e Feder Extremal e com a idéia de quase-criticalidade já expostas no capítulo 4 (Kinouchi e colaboradores, PRE 59 (99)).

Pretendemos continuar a investigar o tema, especificamente discutindo o problema da generalização do conceito de taxa de ramificação para modelos com SOC na rede.



Referências

- [1] P. Bak, C. Tang e K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise*, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
- [2] P. Bak and C. Tang, *Earthquakes as a self-organized critical phenomenon*, J. Geophys. Res. **94**, 15635 (1989); A. Sornette and D. Sornette, *Self-organized criticality and earthquakes*, Europhys. Lett. **9**, 197 (1989); *Earthquakes as self-organized phenomena*, K. Ito and M. Matsuzaki, J. Geophys. Res. **95**, 6859 (1990).
- [3] G. Durin, G. Bertotti and A. Magni, *Fractals, scaling and the question of self-organized criticality in magnetization*, Fractals **3**, 351 (1995); D. Sasojevic, S. Milosevic and H. E. Stanley, *Barkhausen noise: Elementary signals, power laws and scaling relations*, Phys. Rev. E **54**, 2531 (1996) and references therein.
- [4] S. Field, J. Witt, F. Nori e X. Ling, *Superconducting vortex avalanches*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1206 (1995); M. Sahimi, Rev. Mod. Phys. **65**, 1393 (1993).
- [5] A. Petri, G. Papparo, A. Vespignani, A. Alippi e M. Constantini, *Experimental evidence for critical dynamics in microfracturing processes*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3423 (1994); S. Zapperi, A Vespignani e H. E. Stanley, *Plasticity and avalanche behavior in microfracturing process*, Nature (London) **388**, 658 (1997).
- [6] P. Diodati, F. Marchesoni e S. Piazza, *Acoustic Emission from volcanic rocks: an example of self-organized criticality*, Phys. Rev. Lett. **67**, 2239 (1991).
- [7] L. Vlahos, M. Georgoulis, R. Kluiving e P. Paschos, *The statistical flare*, Astron. Astrophys. **299**, 897 (1995)
- [8] A. Vespignani e S. Zapperi, *How self-organized criticality works: a unified mean-field picture*, Phys. Rev. E **57**, 6345 (1998).

- [9] H. J. Jensen, *Self-organized criticality*, Cambridge University Press, (1998.)
- [10] Y.-C. Zhang, *Scaling theory of self-organized criticality*, Phys. Rev. Lett. **63**, 470 (1989).
- [11] S. S. Manna, *2-state model of self-organized criticality*, J. Phys. A **24**, L363 (1991).
- [12] K. Christensen, A. Corral, V. Frette, J. Feder e T. Jøssang, *Tracer dispersion in a self-organized critical system*, Phys. Rev. Lett. **77**, 107 (1996).
- [13] V. Frette, K. Christensen, A. Malthesorensen, J. Feder, T. Jossang e P. Meakin, *Avalanche dynamics in a pile of rice*, Nature (London) **379**, 49 (1996).
- [14] D. Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
- [15] D. Dhar e S. N. Majumdar, *Abelian sandpile model on the Bethe lattice*, J. Phys. A **23**, 4333 (1990).
- [16] S. N. Majumdar e D. Dhar, *Equivalence between the abelian sandpile model and the $q=0$ limit of the Potts model*, Physica A **185**, 129 (1992).
- [17] S. A. Janowsky e C. A. Laberge, *Exact solution for the mean-field abelian sandpile*, J. Phys. A **26**, L973 (1993).
- [18] V. B. Priezzhev, *Structure of 2-dimensional sandpile 1. Height probabilities*, J. Stat. Phys. **74**, 955 (1994).
- [19] E. V. Ivashkevich, *Boundary height correlations in a 2-dimensional abelian sandpile*, J. Phys. A **27**, 3643 (1994); E. V. Ivashkevich, D. V. Kvitarev e V. B. Priezzhev, *Waves of topplings in an abelian sandpile*, Physica A **209**, 347 (1994).
- [20] Z. Olami, H. J. S. Feder e K. Christensen, *Self-organized criticality in a continuous non conservative cellular automaton modelling earthquakes*, Phys. Rev Lett. **68**, 1244

- (1992); K. Christensen e Z. Olami, *Scaling, phase transitions and nonuniversality in a self-organized critical cellular automaton model*, Phys. Rev. A **46**, 1829 (1992); Z. Olami and K. Christensen, *Temporal correlations, universality and multifractality in a spring-block model of earthquakes*, Phys. Rev. A **46**, R1720 (1992).
- [21] H. J. S. Feder e J. Feder, *Self-organized criticality in a slip-stick process*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2669 (1991).
- [22] J. E. S. Socolar, G. Grinstein e C. Jayaprakash, *On self-organized criticality in non-conserving systems*, Phys. Rev. E **47**, 2366 (1993).
- [23] P. Grassberger, *Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system*, Phys. Rev. E **49**, 2436 (1994).
- [24] A. A. Middleton e C. Tang, *Self-organized criticality in nonconserved systems*, Phys. Rev. Lett. **74**, 742 (1995).
- [25] P. Bak, K. Chen e C. Tang, *A forest-Fire model and some thoughts on turbulence* Phys. Lett. A **147**, 297 (1990); o modelo foi originalmente proposto nessa referência. Seguiram-se muitos outros trabalhos.
- [26] A. Johansen, *Spatio-temporal self-organization in a model of disease spreading*, Physica D **78**, 186 (1994).
- [27] P. Bak e K. Sneppen, *Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution*, Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993).
- [28] N-N Pang, *The Bak-Sneppen model: a self-organized critical model of biological evolution*, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 1411 (1997).
- [29] D. Sornette, *Critical phase transitions made self-organized: a dynamical system feedback mechanism for self-organized criticality*, J. Phys. I **2**, 2065 (1992).

- [30] L. Gil and D. Sornette, *Landau-Ginzburg theory of self-organized criticality*, Phys. Rev. Lett. **76**, 3991 (1996).
- [31] G. Grinstein, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, vol 344 da NATO Advanced Study Institute, serie B: Physics, editada por A. McKane et al. (plenum New York, 1995).
- [32] D. Sornette, A. Johansen and I. Dornic, *Mapping self-organized criticality onto criticality*, J. Phys. I **5**, 325 (1995).
- [33] A. Vespignani, S. Zapperi e V. Loreto, *Renormalization of non equilibrium systems with critical stationary state*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4560 (1996); J. Stat. Phys. **88**, 47 (1997).
- [34] A. Vespignani e S. Zapperi, *Order parameter and scaling fields in self-organized-criticality*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4793 (1997).
- [35] G. Grinstein, D-H. Lee, e S. Sachdev, *Conservation laws, anisotropy and self-organized criticality in noisy nonequilibrium systems*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1927 (1990).
- [36] R. Dickman, A. Vespignani e S. Zapperi, *Self-organized criticality as an absorbing-state phase transition*, Phys. Rev. E **57**, 5095 (1998).
- [37] C. P. C. Prado e Z. Olami, *Inertia and break of self-organized criticality in cellular automata sandpile models*, Phys. Rev. A **45**, 665 (1992).
- [38] Os modelos mais estudados sob esse ponto de vista são os modelos do tipo 'pilha de areia'. Para uma revisão recente de ver, por exemplo, A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani e S. Zapperi, *Universality in sandpiles*, Phys. Rev. E **59**, R12 (1999).
- [39] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado e S. R. Salinas, *Complex behavior in one-dimensional sandpile models*, Phys. Rev. E **55**, 2159 (1997).

- [40] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado e O. Kinouchi, *Absence of self-organized criticality in a random-neighbor version of the OFC stick-slip model*, *Physica A* **257**, 488 (1998).
- [41] Josué X. de Carvalho e Carmen P. C. Prado, *Self-organized criticality in the Olami-Feder-Christensen model*, cond-mat/9908264, (1999).
- [42] S. T. R. Pinho, *Modelos de Ising em redes aperiódicas e criticalidade auto-organizada*, capítulo 6, *Revisitação dos sítios críticos do modelo OFC*, tese de doutoramento apresentada junto ao Instituto de Física da USP (1998).
- [43] O. Kinouchi, S. T. R. Pinho e C. P. C. Prado, *Random-neighbor Olami-Feder-Christensen stick-slip model*, *Phys. Rev. E* **58**, 3997 (1998).
- [44] O. Kinouchi e C. P. C. Prado *Robustness of scale invariance in models with self-organized criticality*, *Phys. Rev. E* **59**, 4964 (1999).
- [45] M. N. Barber, *Finite-size scaling*, editado por C. Domb e J. L. Lebowitz, *Phase transitions and critical phenomena*, volume 8, Academic Press, London, 146 (1983).
- [46] S. Lise e H. J. Jensen, *Transitions in nonconserving models of self-organized criticality*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2326 (1996).
- [47] M. L. Chabanol e V. Hakin, *Analysis of a dissipative model of self-organized criticality with random neighbors*, *Phys. Rev. E* **56**, R2343 (1997); H-M. Bröker e P. Grassberger, *Random-neighbor theory of the Olami-Feder-Christensen earthquake model*, *Phys. Rev. E* **56**, 3944 (1997).
- [48] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu e S-M. Zhou, *Scaling and universality in avalanches*, *Phys. Rev. A* **39**, 6524 (1989).
- [49] A. B. Chhabra, M. J. Feigenbaum, A. J. Kolan e I. Procaccia, *Sandpiles, avalanches and statistical mechanics of nonequilibrium stationary states*, *Phys. Rev. E* **47**, 3099 (1993).

- [50] J. M. Carlson, J. T. Chayes, E. R. Grannan e G. H. Swindle, *Self-organized criticality in sandpiles: Nature of the critical phenomena*, Phys. Rev. A **42**, 2467 (1990).
- [51] J. Krug, *Landslides on sandpiles: some moment relations in one dimension*, J. Stat. Phys. **66**, 1635 (1992); J. Krug, J. E. Socolar e G. Grinstein, *Surface fluctuations and criticality in a class of one-dimensional sandpile models*, Phys. Rev. A **46**, R4479 (1992); J. Krug, *Sandpiles and diffusion-limited reactions*, Phys. Rev. E **47**, 730 (1992).
- [52] A. Metha e G. C. Barker, *The dynamics of sand*, Rep. Prog. Phys. **57**, 383 (1994).
- [53] P. Bak, *How nature works*, Copernicus, New York, (1996);
- [54] Quando dizemos que uma avalanche se propaga ‘para trás’ (backwards), queremos dizer que a fronteira que define a avalanche pode avançar para trás. Os grãos de areia em si sempre se movem para a frente. Aqui ‘frente’ significa em direção à borda aberta, e ‘para trás’ em direção à borda fechada.
- [55] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn e G. Grinstein, *Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1120 (1990); H. M. Jaeger, C. H. Liu e S. R. Nagel, *Relaxation at the angle of repose*, Phys. Rev. Lett. **62**, 40 (1989).
- [56] Veja por exemplo T. Hwa e M. Kardar, *Dissipative transport in open systems - an investigation of self-organized criticality*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1813 (1989); P. L. Garrido, J. L. Lebowitz, C. Maes e H. Spohn, *Long-range correlations for conservative dynamics*, Phys. Rev. A **42**, 1954 (1990); G. Grinstein, *Generic scale invariance in classical nonequilibrium systems*, J. Appl. Phys. **69**, 5441 (1991).
- [57] R. Burridge e L. Knopoff, *Model and theoretical seismicity*, Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341 (1967).

- [58] S. Lise e A. L. Stella, *Boundary effects in a random neighbor model of earthquakes*, Phys. Rev. E. **57**, 3633 (1998).
- [59] S. Zapperi, K. B. Lauritsen e H. E. Stanley, *Self-organized branching processes: mean-field theory for avalanches*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4071 (1995).
- [60] E. V. Ivashkevich, *Critical behavior of the sandpile model as a self-organized branching process*, Phys. Rev. Lett. **76**, 3368 (1996).
- [61] L. Pietronero, A. Vespignani e S. Zapperi, *Renormalization scheme for self-organized criticality in sandpile models*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1690 (1994).

Anexos

Artigos nos quais esta resenha está baseada

Inertia and break of self-organized criticality in sandpile cellular-automata models

Carmen P. C. Prado

Instituto de Fisica, Universidade de Sao Paulo, CP 20516, CEP 014918, Sao Paulo, Brazil

Zeev Olami

Physics Department, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York 11973

(Received 14 June 1991)

We present a sandpile cellular-automata model that includes the effects of inertia. The model is studied in both one and two dimensions. We find that the model changes the normal self-organized critical behavior, creating a dominance of big events in the system and leading to very large fluctuations in the mass of the system. We show that those changes of behavior can only be noticed in large sandpiles, which is in accord with previous experimental results.

PACS number(s): 05.40.+j, 64.60.Ht

I. INTRODUCTION

In a series of papers Bak, Tang, and Wiesenfeld [1] introduced the concept of self-organized criticality (SOC). Some extended dynamical systems can evolve into a statistically stationary state where events, i.e., avalanches of all sizes are observed with no spatial and temporal correlations between them. The distribution functions of those events display a power-law behavior. This so-called critical state is an attractor of the dynamics of the system. This discovery suggests a rather general dynamical mechanism for the emergence of scaling and fractal behavior in nature.

The prototypic example of SOC has been the sandpile cellular-automata model [1]. Consider a sandpile, in which grains of sand are added one by one. Topplings will happen when the local slope reaches a critical value. If we begin with a flat surface, initially the grains of sand will simply accumulate on the surface. However, after some time, the sandpile will evolve to a steady state in which its slope fluctuates around an average value. In this statistically stationary state the amount of sand added to the system is balanced, on average, by the amount of sand that falls out of the edge, and the fluctuations observed in the total mass of the sandpile are extremely small relative to its total mass. Once the sandpile is in this state, the addition of a single grain of sand can trigger an avalanche of any size. The distribution functions of the size and duration of those avalanches obey a power law.

In the real world this theory has been successful in explaining the behavior of earthquakes [2]. It provides a simple explanation for the observed Gutenberg-Richter power-law distribution of earthquake sizes. However, in experiments on real sandpiles this behavior was not fully observed [3,4]. At least one experiment tried to reproduce the features of the sandpile model in detail [4]. Single grains of sand were dropped in the center of the pile only after a full relaxation of previous avalanches. The drop-number distribution function was measured. For small sandpiles the drop-distribution functions obeyed

the scaling laws observed in the cellular-automata sandpile model. However, as the size of the system grew larger, there was a transition in the behavior of the pile. Big events became dominant and the relaxation of the system was done through those big events, leading to a fluctuation pattern of the total mass which was quite similar to the time histograms observed by Jaeger, Liu, and Nagel [3]. They also observed that the profile of the sandpile, after those big avalanches, became concave.

We argue that the reason for this is probably the effect of inertia and energy dissipation present in real sandpiles. Real sandpiles are driven by gravitational forces. Because of inertia, large avalanches cannot be stopped. If they become large enough, they can only be stopped at the boundary. This would lead to avalanches that include a significant fraction of the size of the sandpiles and would lead to the introduction of a system-size-independent length scale which is the minimal size of those large avalanches.

In this paper we make an attempt to introduce a model to simulate this behavior. We developed a sandpile cellular-automata model in which those effects are taken into account. We observe that when modeling small sandpile models those effects can hardly be seen, leading to the expected-scaling SOC behavior. However, as the size of the systems grows larger, the behavior changes drastically. The global features of our model as well as its drop-number distribution functions present features that are similar to the observed experimental results.

This paper is organized as follows: in Sec. II we present our model in both one and two dimensions; in Sec. III we organize the results of our simulations and compare them with previous experimental observations. In Sec. IV we summarize the conclusions.

II. THE INERTIA VERSION OF THE SANDPILE MODEL

When we look at a stone rolling down a mountain, it becomes obvious that there is a strong effect of inertia. We can argue that in a sequence of topplings of sand

grains something similar also happens. As an avalanche evolves, potential energy is transformed into kinetic energy, the avalanching grains of sand gain momentum, and the whole mass of sand is accelerated. If the process lasts long enough it eventually can only be stopped at the boundary of the system. We introduce this "snowball effect" by making the critical slope Z_c (the threshold value to trigger a single event) a decreasing function of the energy or the momentum, accumulated by a grain of sand during a sequence of topples.

Models in both one and two dimensions driven randomly or deterministically were studied. In one dimension we considered the simplest model that does not present a trivial dynamics. This model was first suggested by Kadanoff *et al.* [5]. In each site of a one-dimensional lattice of size n the height of the pile of sand is given by h_i . We define the slope at site i as

$$z_i = h_i - h_{i-1} .$$

The system is perturbed by adding one grain of sand at a randomly chosen site i . Whenever the slope of the sandpile at this site exceeds a threshold value Z_c , an avalanche is triggered. Two grains of sand would topple from site i into its two forward nearest neighbors, more precisely, if

$$z_i \geq Z_c$$

then

$$h_i \rightarrow h_i - 2 ,$$

$$h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1 ,$$

$$h_{i+2} \rightarrow h_{i+2} + 1 .$$

The grains of sand that reach the sites $i + 1$ and $i + 2$ have already toppled once, therefore, it will be a little harder to stop them. We make the critical slope at those sites a little smaller than Z_c , that is

$$Z_{c,i} = Z_c - \alpha n_i$$

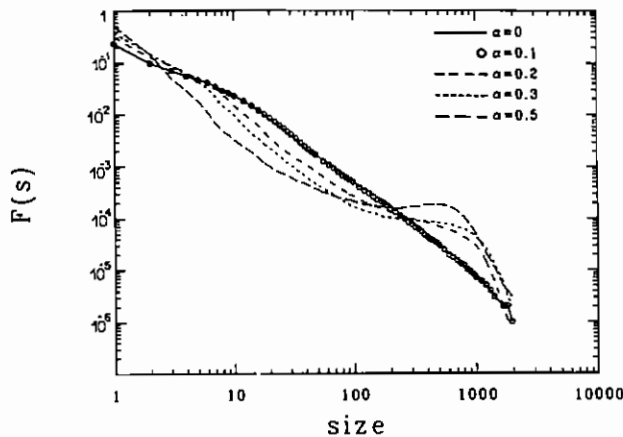


FIG. 1. The size distribution function for different values of α . The size of the system was held constant ($L = 100$). All distribution functions were smoothed according to the procedure described in Ref. [6]. The values were averaged over intervals of 10%.

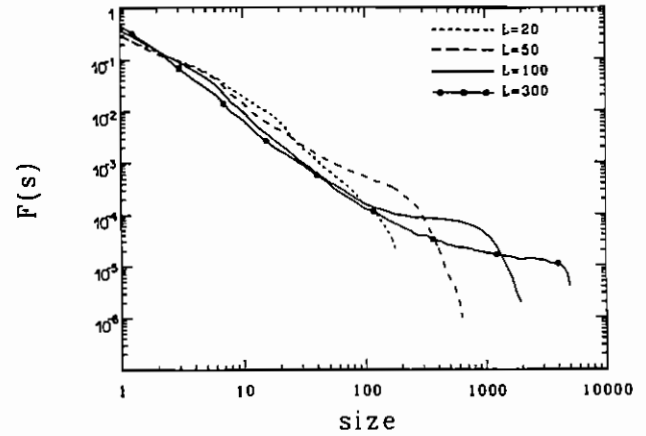


FIG. 2. The size distribution function for different lattice sizes. The value of α was held constant ($\alpha = 0.3$). The distribution functions were smoothed as described in Fig. 1.

where n_i is the number of toppings a given grain of sand has done before reaching the site i and $Z_{c,i}$ is the critical value at this site. If new backward falls start we would begin to count the number of topples for those particles again. In any real process the velocity of the falling sand cannot grow forever. So a minimum value Z_0 for Z_c was introduced.

In two dimensions we used the original model of Bak, Tang, and Wiesenfeld [1], with directional flow of the energy. At any toppling the energy is transmitted in equal parts to the fall positions and so on. The critical slope will depend on the energy which is accumulated at a site. We transfer the energy only in the forward direction since that is the direction of the flow in this system.

The energy is conserved; however, if there is no avalanche in a given site all the energy in this position is dissipated. We define an energy matrix $e_{i,j}$ which is updated together with a matrix Z_{ij} that defines the sandpile slopes at each step of the avalanching process. Those rules can be summarized as follows: if

$$Z_{ij} < Z_{c,ij}(e_{ij}) ,$$

then $e_{ij} = 0$; if

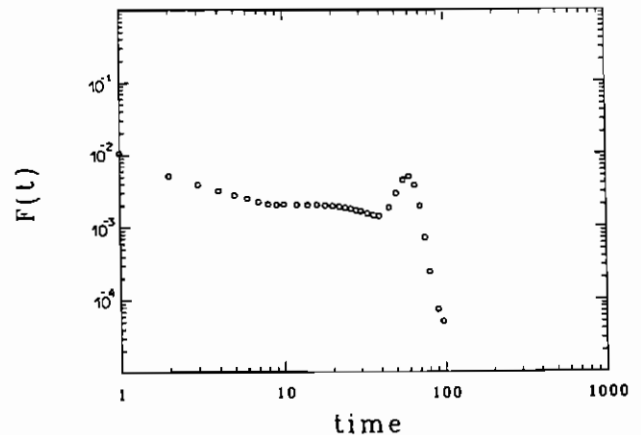


FIG. 3. The number of events as a function of time for the one-dimensional system, $L = 50$ and $\alpha = 0.5$.

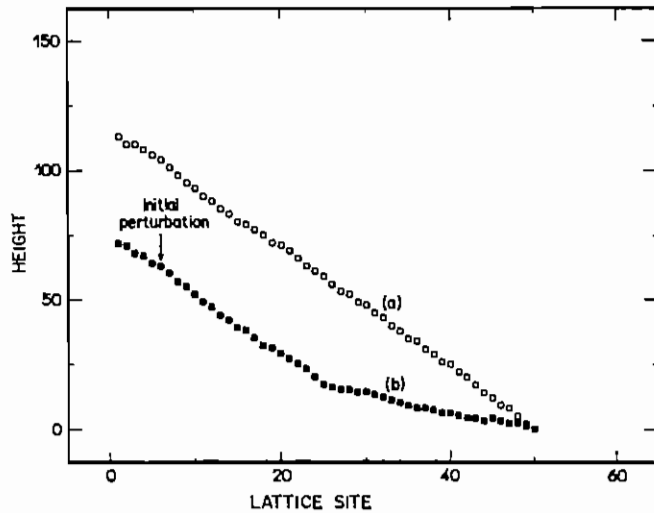


FIG. 4. The profile of the one-dimensional pile with $L=50$ with $\alpha=0.5$ (a) before and (b) after a big avalanche. Notice that after the big avalanche the system is concave.

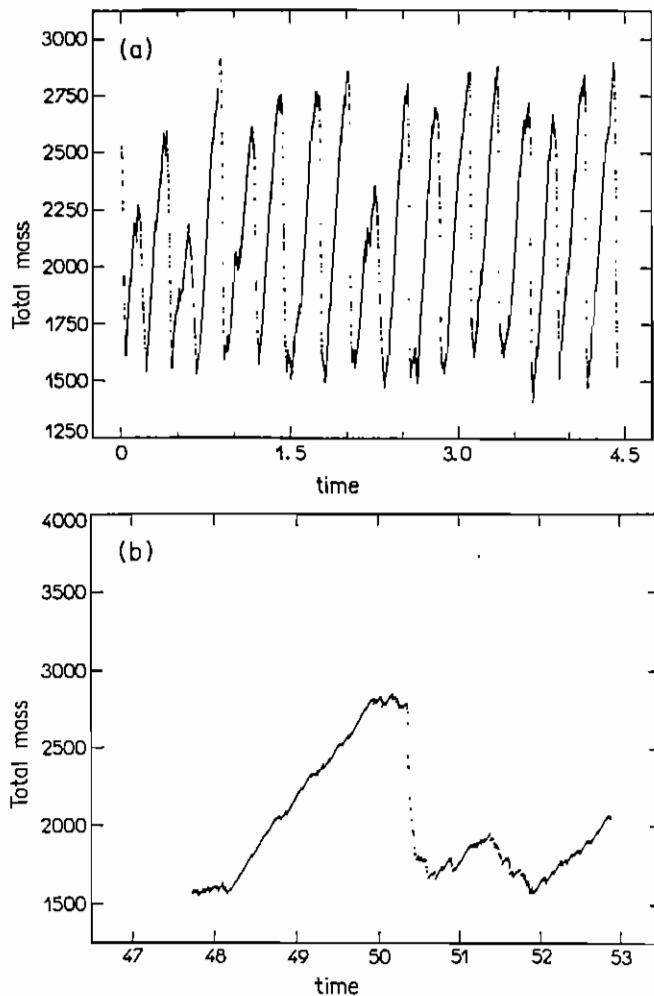


FIG. 5. The fluctuations of the mass of a one-dimensional system as a function of time. Notice the separation between the buildup and the devastation cycles. (b) shows an enlargement of (a). The time is measured according to the number of avalanches. The time parameter in (a) is the number of avalanches, divided by 10^4 in (a) and by 10^3 in (b).

$$Z_{ij} \geq Z_{c,ij}(e_{ij}),$$

then

$$Z_{ij} = Z_{ij} - 4,$$

$$Z_{i\pm 1j} = Z_{i\pm 1j} + 1,$$

$$Z_{ij\pm 1} = Z_{ij\pm 1} + 1,$$

$$e_{ij} = 0,$$

$$e_{i+1j} = e_{ij}/2 + 1,$$

$$e_{ij+1} = e_{ij}/2 + 1.$$

To produce the conus morphology of sandpiles, we connected the left boundary of the system to the upper boundary and left the other two sides of the system open. To reproduce the experimental situation we perturbed the system only at the upper left corner. We perturbed the system randomly every 200 steps so that we would not get any periodic trajectories in phase space.

We define

$$Z_{c,ij}(e_{ij}) = Z_c - \alpha e_{ij}.$$

Notice that in the two-dimensional case we do not have to choose a limiting value for Z_c . There will always be a limiting value for it. Suppose that during the toppling process a particle gains an energy E each time it topples and that this energy is transferred in equal parts to c neighboring positions. Assuming an infinite sequence of topplings, we see that the accumulated energy will be

$$m_0 = E / (c - 1)$$

where E is the energy added in each toppling and c is the connectivity of the lattice. The minimum value of the critical slope will be

$$Z_0 = z_c - \alpha m_0.$$

III. RESULTS

We probed the behavior of the system in both one and two dimensions for different lattice sizes and values of the parameters. The main results can be seen in Figs. 1, 2, and 6–8.

In the one-dimensional case we let the system reach a stationary state using the original Kadanoff rules with no inertia. We then analyze the distribution function of avalanche sizes, $F(s)$, for the next 300 000 events. Figure 1 shows $F(s)$ for different values of α . Figure 2 shows how $F(s)$ is affected by changes in the size of the lattice. We see that for small values of α there is no change in the distribution function. $F(s)$ has a clear power-law behavior that lasts for almost two decades. However, as we increase the value of α , we observe an increasing number of large avalanches, and a corresponding decrease in the number of intermediate events. Notice, however, that in all cases we still can see a region of linear behavior with the same scaling exponent. In all cases there is still a (decreasing) region of linear behavior, and a slight decrease in the number of avalanches of intermediate sizes. It is

also clear from Fig. 2 that no significant change in behavior can be seen in small lattices. If we hold α constant and vary the size of the lattice there will be a critical size L_c below which there is a power-law behavior. After that point, however, we see a continuous change in $F(s)$, as observed experimentally by Held *et al.* [4] and in exactly the same way we have already described. The critical size L_c depends on α according to the simple law $L_c = A/\alpha$. Notice that this size does not scale with the size of the system as is the usual case in the simple SOC cases. The inertia creates a size-independent scale above which it is very hard to stop an avalanche. This behavior is even clearer if we look at the graph of $F(t)$, the distribution function of the duration of the avalanches (see Fig. 3). Those results are in agreement with experimental results found in Ref. [3], where the absence of short-duration avalanches is probably due to the fact that they were able to register only avalanches that were big enough to cause some particles to fall off the edge of the system.

The interpretation is simple: In small avalanches there is not enough accumulation of inertia (i.e., energy) and there is no visible effect of the inertia. But eventually, if

the system is big enough, there will be a big avalanche with the long sequence of topplings. This avalanche can only be stopped at the boundary. It will take more sand out of the system than it otherwise would, causing, as is observed experimentally, a flow of sand in deeper layers of the sandpile. After a set of such big avalanches, the profile of the sandpile looks quite concave, as shown in Fig. 4, where in most of the sandpile the slope is well below the critical value. The system then starts to rebuild. Most of the sand added to it will not cause an avalanche. The mass of the system grown almost constantly in a linear manner. Once rebuilt, it will experience again a sequence of a few big devastating avalanches.

The separation between the buildup and devastation of the pile has profound effects on the global statistics of avalanches. The average slope fluctuates in a very strong manner unlike the average slope in simple SOC systems which is almost uniform. This has a very profound effect on the correlations between events. In such a model the big avalanches are quite correlated. Those effects can be clearly seen in Fig. 5, which describes the mass of the system as a function of time.

For the two-dimensional models, we analyzed the distribution functions for the drop number $F(d)$ and the size of avalanches for 50 000 events. The results are presented in Figs. 6–8.

As α is increased there is a dramatic change in $F(d)$. Even when there is no visible change in the size distribution function (see Fig. 5), $F(d)$ develops a large tail of large drops (see Fig. 7). As α increases further the larger drops become more and more dominant as can also be seen in Fig. 6. At a value $\alpha = 0.8$ a continuous change in $F(s)$ begins. The bigger avalanches become more dominant. However, as in the one-dimensional case one can see that the initial power law is still present and corresponds to the buildup process as we have already stated.

As can be seen in Fig. 8, when the system becomes larger a transition occurs in the form of $F(d)$. As we enlarge the system, $F(d)$ develops a peaked structure at a

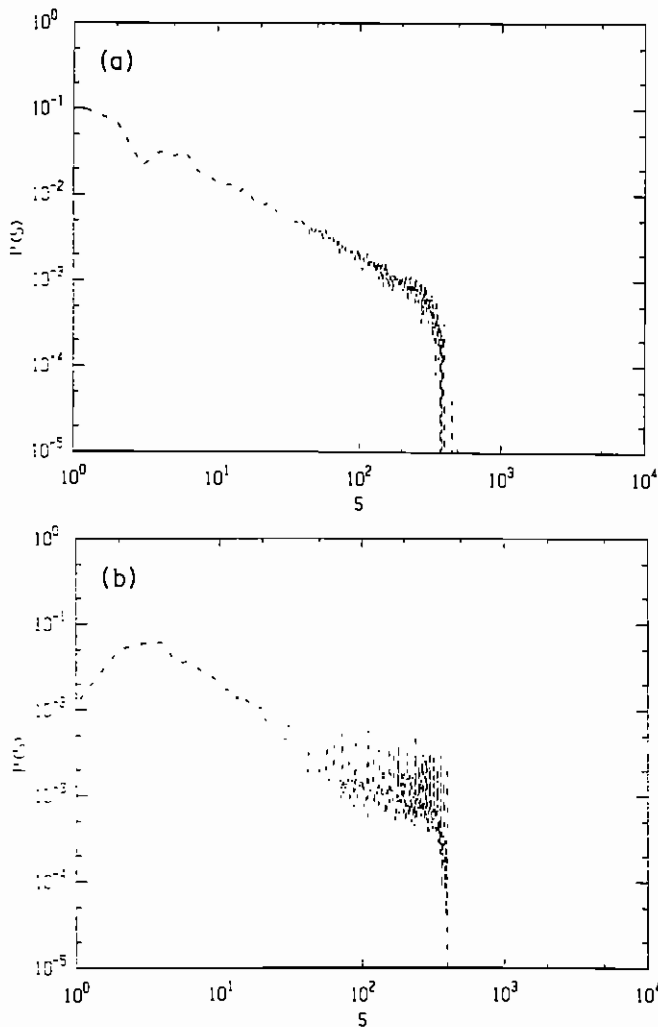


FIG. 6. The size distribution function for the two-dimensional model for a size $L=20$ and for (a) $\alpha=0.5$ and (b) 1.0. Notice that for $\alpha=0.5$ the original power law is still seen.

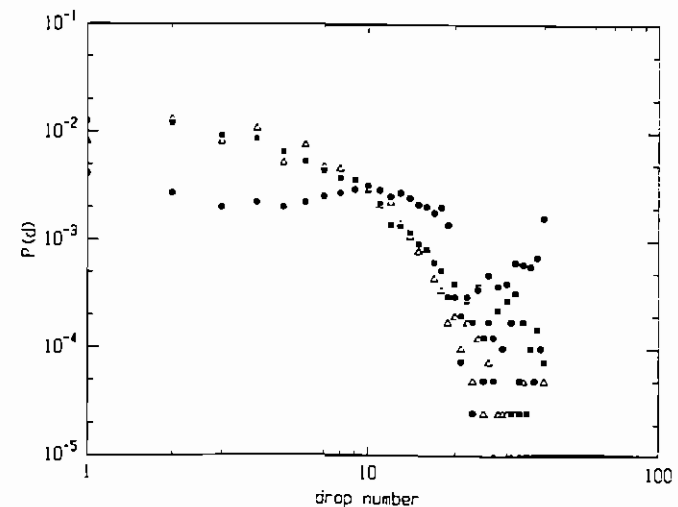


FIG. 7. The drop-distribution function for $\alpha=0.0$ (open triangles), $\alpha=0.5$ (closed squares), and $\alpha=1.0$ (closed circles), where $L=20$ in all cases.

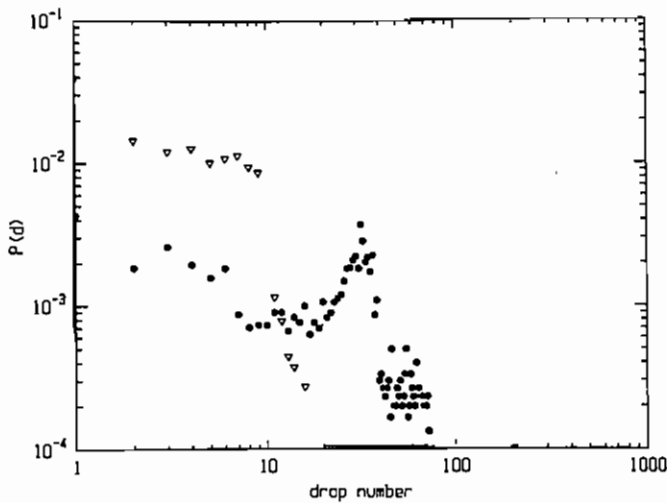


FIG. 8. The drop-distribution functions for different system sizes $L=10$ (open triangles) and 40 (closed triangles). The parameter α was held constant: $\alpha=0.5$.

high drop number (Fig. 8). Notice that a size of about 20 seems to be a critical size for this case ($\alpha=0.5$).

Above this size the effect is well seen in the size distribution function. Actually it is well seen in the drop-distribution function even before it. Our algorithm affects the drop-distribution function even before it destroys the criticality in $F(s)$. Notice that, like in the one-dimensional case, there is a separation between the build-up and the collapse of the system.

All those basic features were experimentally observed in Ref. [4]. When the system becomes larger, events with big drop numbers become dominant. For intermediate sizes a tail of large events is seen. However, we notice that the maximal drop number is the size of the boundary as it is in a simple SOC model, unlike what was observed in the experiments.

IV. CONCLUSIONS

We have shown that most of the features of experiments dealing with sandpiles are reproduced by our mod-

el. The size-dependent behavior observed in [4] can be understood as an effect of the accumulation of energy (or momentum) in big avalanches, which results in the introduction of a system-size-independent scale length. In our model the system's mass fluctuates very strongly unlike what will happen in a SOC model, but like what is seen in experiments. This has a very strong effect on the statistics of such systems and on the size of the avalanches. Such models might be proper in describing the behavior of snow, earth, or rock avalanches where after some critical stage the avalanches will go on until the boundary is reached.

The results of our simulations should be seen in a more general context. The scaling results observed for the SOC models are a result of the precise balance between branching and killing probabilities inherent in the cellular-automata model. If this balance is destroyed either by introducing inertia or by some kind of nonconservation, the power-law behavior will be destroyed above some scale which is associated with the relevant laws.

In other words, the power-law behavior observed in the SOC systems is a result of the constant branching probabilities that are present in those models. Our laws change dramatically the probabilities associated with this process. In our model the average number of topplings increases with the size of the avalanche. As the event grows larger its probability to continue will grow larger. So, if the system is big enough, the avalanching process will finally explode and big avalanches will become dominant. Since the system is finite, this process will destroy the system at least partially and this description will not be valid any longer.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank P. Bak for useful discussions. C.P. thanks the Brookhaven National Laboratory for their hospitality where the work was done. Z.O. thanks the binational Fulbright foundation and the Weizmann foundation for their support during this work.

- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987); *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
- [2] P. Bak and C. Tang, *J. Geophys. Res.* **94**, 15 365 (1989); K. Chen, P. Bak, and S. Obukhov, *Phys. Rev. A* **43**, 625 (1991), and references included therein.
- [3] H. M. Jaeger, C. H. Liu, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 40 (1989).

- [4] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn, and G. Grinstein, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1120 (1990).
- [5] L. P. Kadanoff, S. R. Naegel, L. Wu, and S. M. Zhou, *Phys. Rev. A* **39**, 6524 (1989).
- [6] B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **41**, 1867 (1990).

Complex behavior in one-dimensional sandpile models

S. T. R. Pinho,^{1,2} C. P. C. Prado,¹ and S. R. Salinas¹

¹*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, CEP 05315-970, São Paulo, SP, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, CEP 40210-340, Salvador, Bahia, Brazil*

(Received 12 July 1996)

We give some examples to illustrate that scale invariance may not be a manifestation of complex behavior in one-dimensional sandpile models. The multiscaling statistical properties and the existence of intrinsic length scales observed in the local limited one-dimensional model reflects a certain level of complexity. The local, limited, and limited to no traps model presents scale invariance due to the inhomogeneous way of perturbing the lattice. It behaves, however, as the trivial one-dimensional version of the Bak, Tang, and Wiesenfeld [Phys. Rev. Lett. 59, 381 (1987); Phys. Rev. A 38, 364 (1988)] model. A nonlocal limited model presents scaling statistical properties and displays the same level of complexity as the nontrivial two-dimensional models. [S1063-651X(97)02102-8]

PACS number(s): 05.40.+j, 02.50.-r, 64.60.-i

I. INTRODUCTION

Sandpile models have been used by Bak, Tang, and Wiesenfeld [1] to introduce the concept of self-organized criticality (SOC). Many systems out of equilibrium do not require the tuning of an external parameter to be driven to a (self-organized) scale-invariant stationary state. It is generally accepted [2-4] that SOC is produced by the interplay between a very slow driving dynamics (sand is added to a sandpile at a constant slow rate) and a short relaxation beyond a certain threshold parameter (eventually, avalanches of sand will begin). In many investigations of extended dissipative dynamical systems, there is an identification between SOC and the occurrence of some sort of scaling invariance.

In the sandpile models "complexity" usually means the existence of avalanches of all sizes [5,6], regardless of the way of implementing the rules of the dynamics. There are several studies of sandpile models characterized by a "complex behavior" associated with power laws and scaling invariance (SI). An extended system has a "complex behavior" if it presents nontrivial dynamics out of simple dynamical rules (the "degree of complexity" may be related to the ability of understanding these global dynamical properties). In this paper, we revisit some of the one-dimensional sandpile models with the purpose of investigating the connections between SI and "complexity." We show that in some cases the power laws observed in the statistical analysis of these one-dimensional models are produced by avalanches of sizes which do depend on the way the system is perturbed. In particular, we consider the mechanisms of the avalanches in a class of "limited" sandpile models introduced by Kadanoff *et al.* [7].

To be more specific, we present a comparative analysis of four one-dimensional limited sandpile models: (i) The simple one-dimensional version of the original model proposed by Bak, Tang, and Wiesenfeld [1] (which we call the BTW1 model); (ii) The local, limited (LL) model proposed by Kadanoff and collaborators [7]; (iii) The nonlocal limited (NLL) model [7]; (iv) The local limited and limited to no traps (LLL) model proposed by Chhabra *et al.* [8]. We propose a kind of "complexity hierarchy" in the context of

these models. The BTW1 model displays just a trivial behavior. In the LL model, the presence of SI corresponds to a "complex behavior," but there are intrinsic length scales in addition to the size of the system. The LLL model presents SI but, unlike the original two-dimensional BTW model, it does not exhibit any "complex behavior." The NLL model is closer to the two-dimensional models. It does present complex behavior, which is not associated with any intrinsic length scales.

This paper is organized as follows. In Sec. II, we review the dynamical rules that are used to define the limited one-dimensional models, and describe the basic ideas of the statistical analysis. In Sec. III, we consider the behavior of these models, and describe the mechanisms that are responsible for SI. In Sec. IV, we present some conclusions and raise a few questions about SOC, SI, and "complexity."

II. ONE-DIMENSIONAL LIMITED MODELS

Sandpile models on a lattice are continuously perturbed by the local addition of a certain number of "grains of sand." An integer variable (for instance, the height of the sandpile) is associated with each site of the lattice. At a time t , the site to be perturbed may be chosen randomly or may be determined beforehand. If the height of any site (or else the slope, that is, the difference between the heights of two adjacent sites) exceeds an integer threshold value, a stability criterion is violated and an avalanche begins. Sand is then redistributed to other sites, according to a variety of dynamical rules, obeying a local law of conservation. The grains of sand that are moved to other sites may turn them unstable and give rise to additional falls of sand. At the moment all heights (or slopes) are below or equal the critical threshold values, this relaxation process stops, and the continuous addition of sand is resumed. In those systems there are two well separated time scales, which are an essential characteristic of SOC [3]. At the driven time scale, the system is perturbed; at the relaxation time scale, the avalanches occur. With at least one open boundary, sand will eventually fall off the system. A statistically stationary state is reached when, on the average, the same number of grains is flowing into

and out of the system, so that there is a global conservation of sand.

We now describe the rules of the limited models. As in the work of Kadanoff and collaborators [7], the analysis is based on the distribution function of the number of drops (d), that is, the number of grains that drop off the open edge of the lattice, and the distribution function of the number of flips (f), that is, the total number of flipping events (which gauges the avalanche size). We call them drop and flip distributions, respectively, and use a statistical procedure to smooth all data [9].

Consider a one-dimensional lattice of L sites, and an integer height variable h_k representing the number of grains at site $k=1, \dots, L$. At a time t , suppose that n_p grains are added to a randomly chosen site i ,

$$h_i \rightarrow h_i + n_p. \quad (1)$$

In the one-dimensional models discussed in this paper, the stability criterion is based on the slope, $S_i = h_i - h_{i-1}$. If $S_i > S_c$, where S_c is a critical threshold, stability is violated and $n_f(i)$ grains of sand topple from site i ,

$$h_i \rightarrow h_i - n_f(i). \quad (2)$$

In the limited models [7], $n_f(i)$ is a constant integer value, $n_f(i) = n$. All the limited models that we consider have one open and one closed boundary. So, $h_0 = 0$, for the open boundary, and $h_{L+1} = h_L$, for the closed ending.

In the local limited (LL) model, if site i becomes unstable, n grains of sand topple from site i to the nearest neighbor site $i-1$. We have

$$h_i \rightarrow h_i - n, \quad (3)$$

and

$$h_{i-1} \rightarrow h_{i-1} + n, \quad (4)$$

where n is an integer. Once a site is perturbed, the criterion of stability is tested along the whole lattice. If it is violated at a site k , n grains topple from k to the nearest neighbor $k-1$.

The BTW1 model is a particular case of the LL model for $n_p = n$ (the number of grains added to a given site during the process of perturbation is the same as the number of grains that topple from a site that becomes unstable). This simple rule is responsible for the well known trivial behavior of this model. In the original LL model introduced by Kadanoff and collaborators [7], we take $n_p = 1$ and $n = 2$. For $n_p < n$, avalanches propagating towards the closed edge (which we call backward avalanches) are the source of a nontrivial behavior. On the other hand, for $n_p = kn$, where k is an integer, computer simulations indicate just a trivial behavior.

In the nonlocal limited model (NLL), if the stability criterion is violated, n grains of sand fall from site i to sites $i-j$, with $j = 1, 2, \dots, n$. The dynamical rules are given by

$$h_i \rightarrow h_i - n, \quad (5)$$

and

$$h_{i-1} \rightarrow h_{i-1} + 1, \dots, h_{i-n} \rightarrow h_{i-n} + 1, \quad (6)$$

TABLE I. The dynamical rules of the LLL model ($n_p = 1$, $n = 2$, and $S_c = 2$).

| ϵ_{i+1} | ϵ_i | Perturbation | Drops | Flips | ϵ_{i+1} | ϵ_i |
|------------------|--------------|--------------|------------|------------------|------------------|--------------|
| 0 | 0 | forbidden | - | - | 0 | 0 |
| 1 | 0 | permitted | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | permitted | 2 | i | 1 | 0 |
| 1 | 1 | permitted | $2(L-i+1)$ | $\sum_{j=i}^L j$ | 0 | 0 |

where n is an integer. This model was used by one of us to introduce the effects of inertia that should be relevant in sandpiles [10].

It is convenient to express the relaxation rules in terms of a new variable, $\epsilon_k = S_k - 1$. Suppose, for example, that $n_p = 1$, $n = 2$, and $S_c = 2$. In this example, $\epsilon_k \leq 1$, $\forall k$, for both the LL and the NLL models. When the site i is perturbed, there are two possibilities: if $\epsilon_i < 1$, there is a simple addition of a grain of sand in this site ($f = 0$). However, if $\epsilon_i = 1$, an avalanche is triggered ($f \neq 0$). The boundary conditions are written as $\epsilon_1 = h_1 - 1$ and $\epsilon_{L+1} = -1$.

In the LL model there are special sites on the lattice which stop an avalanche process. They were named traps [8] or troughs [11] in the literature. They are defined as the sites where $\epsilon_i < S_c - n$. In the previous example, the traps are sites for which $\epsilon_i < 0$.

The local, limited, and limited to no traps (LLL) model [8] is a variation of the LL model where the perturbations at the sites which might give rise to a trap are forbidden. It is thus forbidden to perturb a site k where $\epsilon_k = \epsilon_{k+1} = S_c - n$. The result is a model with no traps. When an avalanche is triggered, it propagates until the open edge. If it eventually propagates backwards, it goes towards the closed edge, reflects there, and finally ends at the open edge, with grains of sand falling off the pile. In the previous example ($n_p = 1$, $n = 2$, and $S_c = 2$), the forbidden sites are associated with $\epsilon_k = \epsilon_{k+1} = 0$, the possible values of ϵ_k are 0 or 1, and we redefine the closed boundary conditions, $\epsilon_{L+1} = 1$. Now, suppose that a site i is perturbed. If the stability criterion is violated, the dynamical rules are given in Table I (with an exception, at the closed boundary, as shown in Table II). From Table I, we can also see that the LLL model corresponds to a diffusion-limited annihilation reaction, $A + A \rightarrow 0$, as pointed out by Krug [12]. The variable ϵ_i represents the presence ($\epsilon_i = 1$) or absence ($\epsilon_i = 0$) of a particle A at site i . The situations described at the second [($\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$) = (0,1) (1,0)] and the third lines [($\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$) = (1,0) (0,1)] of Table I correspond to the diffusive motion of particles, while the pairwise annihilation is described by the fourth line [($\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$) = (1,1) (0,0)].

TABLE II. The dynamical rules of the site L of the LLL model ($n_p = 1$, $n = 2$, and $S_c = 2$).

| ϵ_{L+1} | ϵ_L | Perturbation | Drops | Flips | ϵ_{L+1} | ϵ_L |
|------------------|--------------|-----------------|-------|-------|------------------|--------------|
| 1 | 0 | never forbidden | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | never forbidden | 2 | L | 1 | 0 |

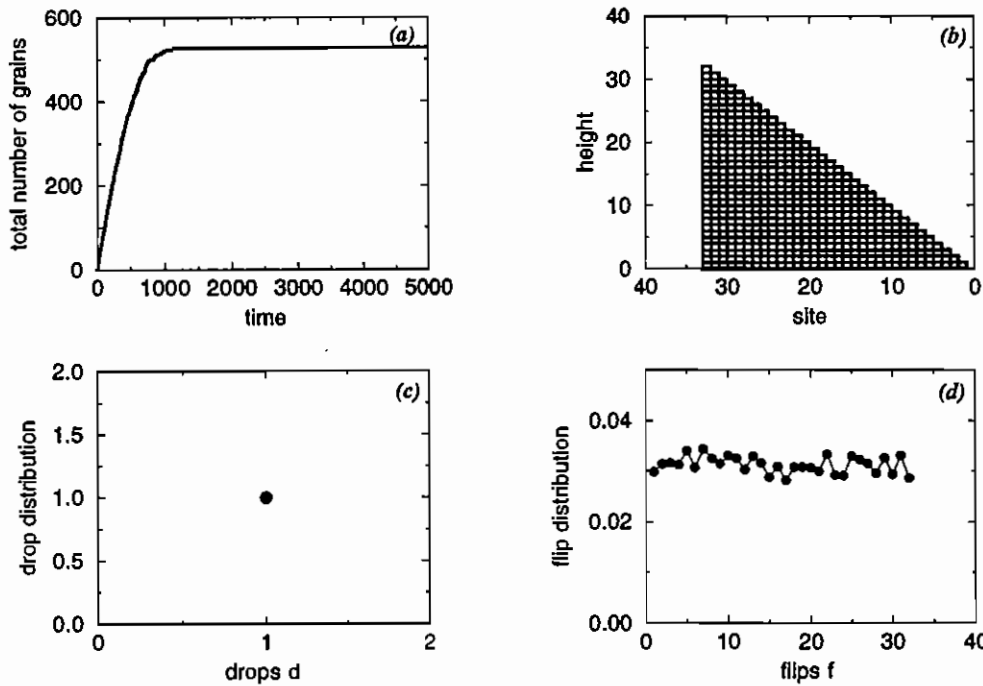


FIG. 1. Statistical analysis of the one-dimensional version of the BTW model with $n_p=n=1$, $L=32$, and $S_c=1$. (a) Total number of grains on the lattice vs time; (b) Configuration of the stationary state; (c) Drop distribution (ratio between the number of events with d drops and the number of events with avalanches) in the stationary state; (d) Flip distribution (ratio between the number of events with f flips and the number of events with avalanches) in the stationary state.

III. AVALANCHE DYNAMICS OF THE LIMITED MODELS

A. The LL model

As we mentioned before, the BTW1 model is a particular case of the LL model for $n_p=n$. In terms of the variables $\{\epsilon_k\}$, the stationary state [see Fig. 1(a)] is a sequence of zeros [see Fig. 1(b)]. Every time a site is perturbed, an avalanche is triggered, and the associated number of drops is always $d=n$ [see Fig. 1(c)]. The flip distribution reveals the homogeneous character of the random perturbations [see Fig. 1(d)]. If site i is perturbed, there is only a corresponding number $f=i$ of flips. As $n_p=n$, the behavior of the BTW1 model is trivial.

For $n > n_p$, the LL model exhibits a complex behavior that has been investigated by many authors [8,11,13,14]. It has some important features: (i) The existence of backward avalanches, that is, avalanches that propagate forwards and also backwards along the lattice. In the BTW1 model, there are only forward avalanches; (ii) The presence of traps, that is, the existence of sites that work as boundaries to limit the regions where the avalanches occur (even after the stationary state is reached). In the BTW1 model, as the traps exist only in the transient regime, an avalanche in the stationary state stops in the boundary only.

In the LL model, a backward avalanche is triggered for $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = 1$ [see Fig. 2(a)]. For $\epsilon_i = 1$ and $\epsilon_{i+1} < 1$, only

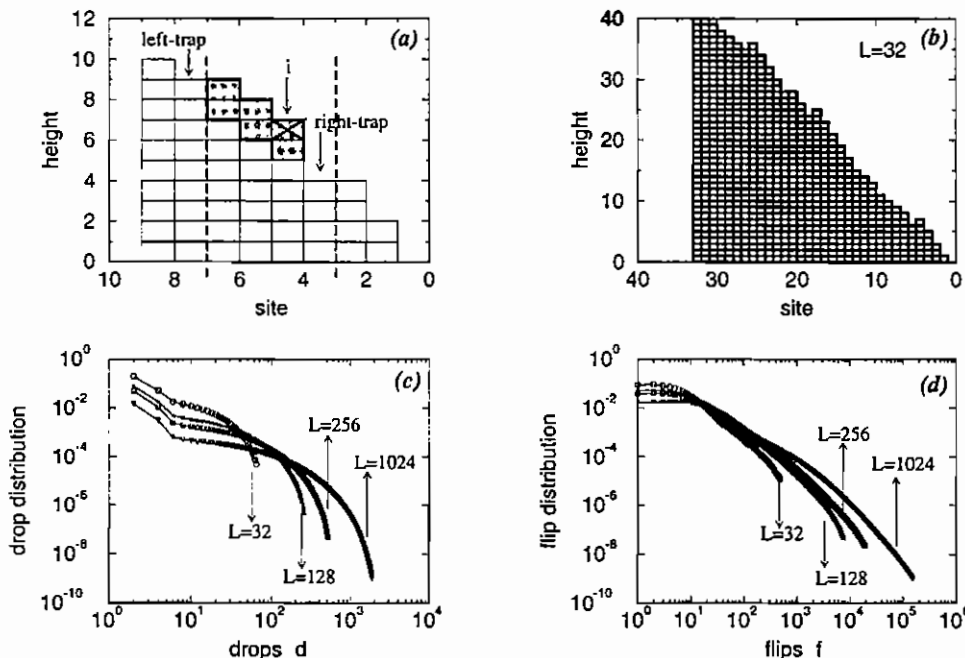


FIG. 2. Statistical analysis of the LL model with $n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$. (a) An example of configuration in which a backward avalanche is triggered and stops at the traps; (b) Configuration of one of the possible stationary states; (c) Drop distribution for different lattice sizes; (d) Flip distribution for different lattice sizes.

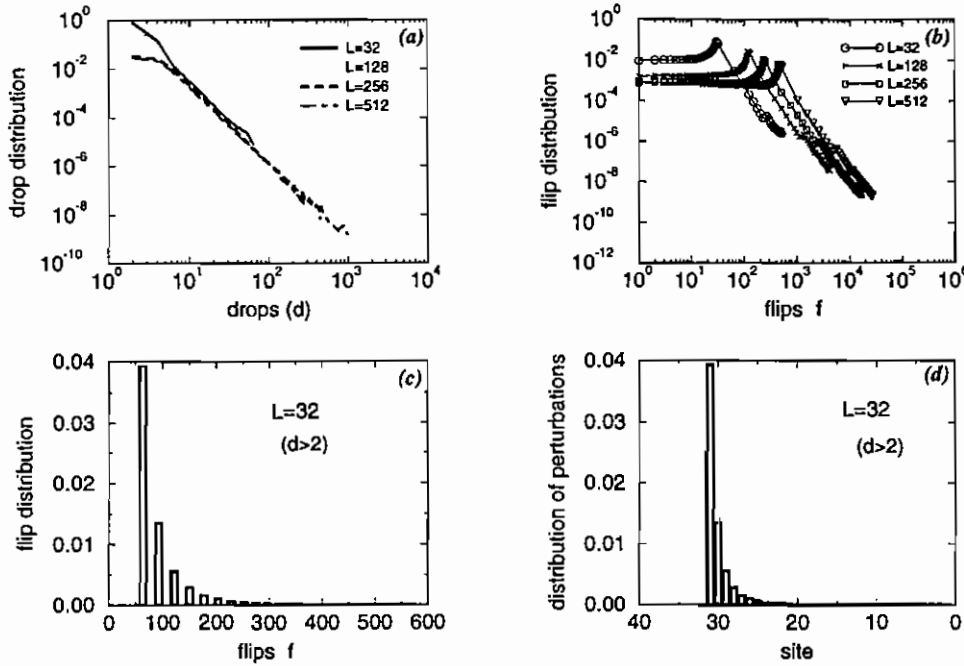


FIG. 3. Statistical analysis of the LLL model with $n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$. (a) Drop distribution for different lattice sizes; (b) Flip distribution for different lattice sizes; (c) Histogram of the flip distribution for $L=32$; (d) Histogram of the distribution of perturbations by site for $L=32$.

forward avalanches are triggered. The possibility of backward avalanches comes from the difference between the number of grains that perturb a site i and the number of grains that topple from site k to site $k-1$. For this reason, there are many possibilities of configurations that correspond to statistically stationary states [for example, the configuration shown in Fig. 2(b)]. As the avalanches are limited by the traps, on a finite lattice it is possible to know beforehand which is the cluster of grains involved in that particular avalanche [see Fig. 2(a)]. In this sense, we say that the traps define the size of the avalanches.

A very simple model, called the “trough” or 01 model, where a site i is either occupied by a trap ($\tau=1$) or empty ($\tau=0$) has been proposed by Carlson *et al.* [11] to study the relevance of traps in the behavior of one-dimensional sandpile models. In this trough model, the configurations are reduced to the birth, death, and coalescence of traps. Depending on the death and birth rates, the density of traps behave as a power law with the lattice size. In the LL model, Krug [13] identified three intrinsic length scales which depend on the size of the lattice: (i) the average distance between traps

(λ), (ii) the average size of edge events ($d \neq 0$), and (iii) the average size of bulk events ($d=0$). With periodic boundary conditions, Chhabra and collaborators [8] obtained the power laws of two intrinsic length scales, $\lambda \approx L^{1/3}$, and $\xi \approx L^{2/3}$, where ξ is a coherence length.

The backward avalanches and the traps are responsible for the nontrivial behavior of the LL model. The traps explain the existence of intrinsic length scales other than the system size, and the backward avalanches give rise to flip numbers bigger than the lattice size. The analysis of the data, for both drop and flip distributions [see Figs. 2(c) and 2(d)], indicates that a multiscaling fitting seems to give better results than a simple finite-size scaling analysis [7]. Krug [13] has suggested that this multiscaling behavior is related to the existence of two different moments of the distribution of λ , which scale differently with the lattice size.

In the LL model there is a complex behavior which cannot be observed in the BTW1 model. However, we will see that other one-dimensional models are associated with an even higher “degree of complexity.”

TABLE III. Statistics of perturbations by site and flip distribution ($L=32$ and $d>2$). Note that the distribution of perturbations at site i is the same as the flip distribution of the number of flips $\sum_{j=i}^L$.

| Site | Distribution of perturbations | Number of flips | Flip distribution |
|------|-------------------------------|-------------------------|-------------------|
| 1 | 0.000 002 3 | 63 = 32 + 31 | 0.039 295 3 |
| 2 | 0.000 006 8 | 93 = 32 + 31 + 30 | 0.013 404 4 |
| 3 | 0.000 006 8 | 122 = 32 + 31 + 30 + 29 | 0.005 545 3 |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |
| 29 | 0.005 545 3 | 525 = 32 + ... + 3 | 0.000 006 8 |
| 30 | 0.013 404 4 | 527 = 32 + ... + 2 | 0.000 006 8 |
| 31 | 0.039 295 3 | 528 = 32 + ... + 1 | 0.000 002 3 |

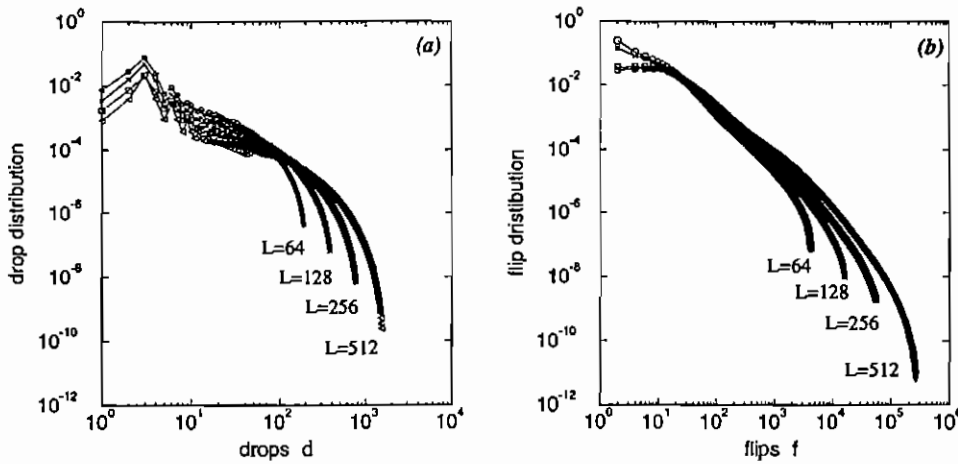


FIG. 4. Statistical analysis of the NLL model with $n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$. (a) Drop distribution for different lattice sizes; (b) Flip distribution for different lattice sizes.

B. The LLL model

Chhabra and collaborators [8] detected a power law in the drop distribution of the LLL model. Besides simulating again this drop distribution [see Fig. 3(a)], we performed some simulations for the flip distribution, which is supposed to gauge the avalanche size more precisely. We have found the superposition of two distinct situations [see Fig. 3(b)]: (i) For $f < L$ ($d=2$), we reproduce the trivial behavior of the BTW1 model, except for $f \approx L$, in which case the distribution of flips increases because the site L is never forbidden; (ii) For $f > L$ ($d > 2$), we observe a power law. However, instead of being associated with SOC, as claimed by some authors [15], this power law is a manifestation of the asymmetry of the perturbation rule. It just reveals the inhomogeneity in the way the system is perturbed, and cannot be associated with a complex behavior. We remark that the perturbation is forced to be inhomogeneous because the density of allowed perturbation sites decays as $1/d$ with the distance d from the closed boundary.

As shown in Figs. 3(c) and 3(d), and in Table III, there is an identification between the statistics of perturbations for $d > 2$ and the distribution of flips. For each site k , the ratio between the number of perturbations and the number of avalanches is exactly the same as the flip distribution associated with the number of flips $f = L + (L-1) + \dots + k$. These results indicate that the closed boundary, together with the restriction imposed in the way the system is perturbed, produces an inhomogeneous distribution of perturbations which is entirely responsible for the power law in the flip distribution. This mechanism is rather simple: for $d > 2$, as we can observe in Tables I and II, there is an annihilation reaction, except at $i=L$. In a stationary state, the probability of a backward avalanche is bigger near the closed edge than in the bulk of the lattice. As suggested by different investigations [8,12], the boundary conditions play an essential role in this case. Also, to a certain extent, the behavior is similar to the case of the trivial BTW1 model, as the distribution of flips is directly related to the statistics of the perturbations,

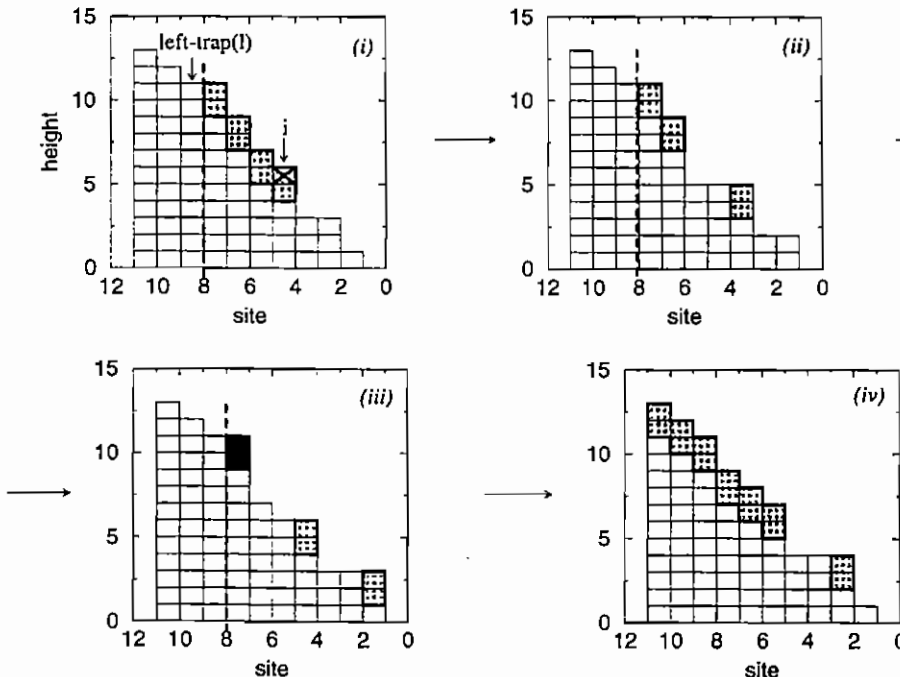


FIG. 5. Example of configuration of the NLL model with $n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$, where new branchings are formed and the avalanche circumvents the "left trap." The left trap, for the first branching, is the site $l > i$, with $\epsilon_l < 0$, where i is the perturbed site. The stages ii, iii, and iv are intermediate steps of the evolution. At stage (iii), the new branching at site $l-1$ is responsible for avoiding the presumed left trap. The intermediate steps are generated to allow the simultaneous updating of all sites k , such that $S_k > S_c$.

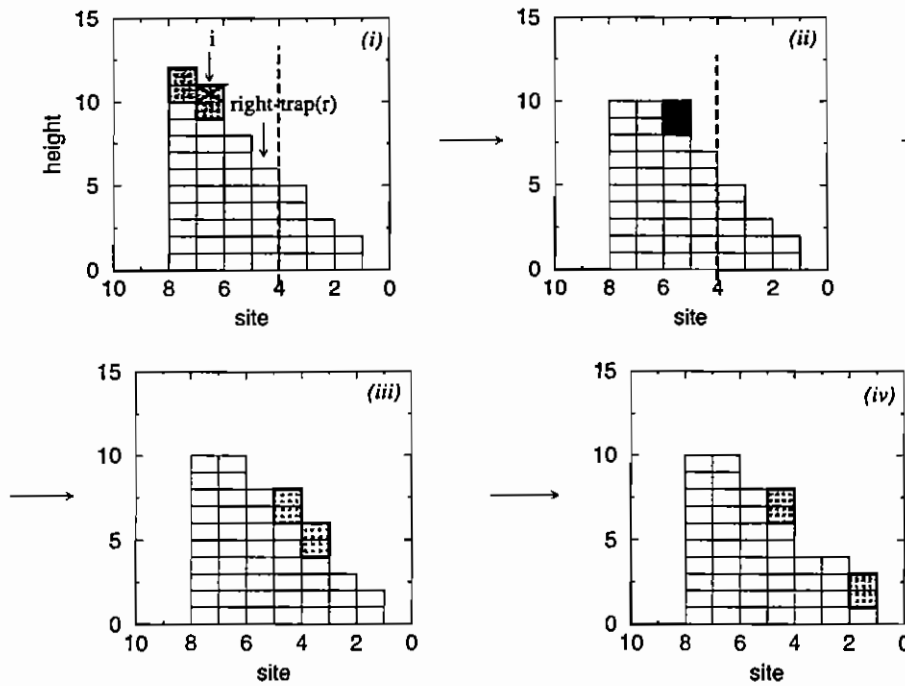


FIG. 6. Example of configuration of the NLL model with $n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$, where new branchings are formed and the avalanche circumvents the "right trap." The right trap, for the first branching, is the site $r=i-p$, where p is an even number, with $\epsilon_r < 1$. At stage (ii), the new branching originated at site $r+1$ is responsible for avoiding the presumed right trap. The intermediate steps are generated to allow the simultaneous updating of all sites k , such that $S_k > S_c$.

and the avalanches do not stop before reaching the open edge.

Due to the absence of traps, and the possibility of backward avalanches, for each perturbed site of the LLL model, there are only two possibilities for the distributions of drops and flips. As shown in Table I, one possibility is associated with forward avalanches ($d=2$), while the other is related to backward avalanches ($d>2$). The avalanche size can thus be determined univocally from the knowledge of the values of ϵ_i and ϵ_{i+1} , where i is the location of the perturbed site. For each perturbed site, the numbers of drops and flips are determined, as in the trivial BTW1 model. We then conclude that the scale invariance of the LLL model is produced *a priori* by the way the model is defined. It is not reasonable to consider this behavior as complex, at least in the same sense as we refer to a complex behavior in the original two-dimensional model introduced by Bak, Tang, and Wiesenfeld [1]. This is an example of a situation in which a power law is not a manifestation of a complex behavior.

C. The NLL model

The nonlocal limited (NLL) model seems to be the first one-dimensional system to exhibit a complex behavior similar to the two-dimensional models. The simulations for the NLL model show scale invariance in both the drop [see Fig.4(a)] and the flip [see Fig.4(b)] distributions. The number of drops assumes odd and even values due to the dynamical rules of the cellular automaton. As in the nontrivial two-dimensional models, we observed simple scaling in the analysis of the flips, $\rho(f,L) \sim f^{-\delta}$, for small f .

In our simple example ($n_p=1$, $n=2$, and $S_c=2$), with $\epsilon_i=1$, an avalanche is triggered. Now it is not so easy to know *a priori* where the avalanche stops and what clusters of grains move along the lattice [see Fig. 5(a) and Fig. 5(b)]. The simple motion of grains can produce new branchings (defined by the cluster of grains that move along the lattice) which enhance the avalanche sizes. A presumed trap to the

avalanche of the first branching can be transposed by another branching originated after the avalanche has been triggered as we can see in stages (iii) and (iv) of Fig. 5, and stages (ii) and (iii) of Fig. 6). Unlike in the case of the LL model, the dynamics of this model presents avalanches generated by many branchings which are able to circumvent the "apparent" traps. It is thus impossible to define the trapping sites, in the sense used before (sites which stop the avalanche), in terms of the values of the variables $\{\epsilon_k\}$ when the system is perturbed. The consequence of this mechanism is the enhancement of the bigger avalanches and the absence of intrinsic length scales in addition to the lattice size. For a finite lattice, it is not possible to define an average distance of traps since, in general, we do not even characterize a trap. In other words, the analysis of configurations of the lattice is not sufficient to explain the complex behavior.

If we consider only one branching for each avalanche, for example the first, it is possible to define a trapping site. The left trap (see Fig. 5) is a site $l>i$, with $\epsilon_l < 0$, and the right trap (see Fig. 6) is at site $r=i-p$, where p is an even number, with $\epsilon_r < 1$. Using this idea, we simulated a model forbidding the configurations which circumvent these traps. The results reveal that this restriction is not sufficient to recover the LL model. There is a certain number of bigger avalanches that do not even exist in the LL model. This indicates that the configuration of the lattice does not play an important role in the case of this model.

We have also simulated this model forbidding the configurations originated from the new branchings described above. The system evolves to a configuration where $\epsilon_k=1$, for all sites, if any perturbation is forbidden (this is the statistically stationary state of the trivial BTW1 model with $n_p=n=2$). We have another evidence that the branching mechanisms are responsible for the nontrivial behavior of the NLL model.

The NLL model is thus more similar (than the LL model) to the nontrivial two-dimensional models. At each motion of

grains, at least two sites are independently perturbed as in the two-dimensional models. Also, the simple scaling observed in the flip distribution is a manifestation of this similarity. This kind of behavior certainly corresponds to a higher "degree of complexity" than in the case of the LL model.

IV. CONCLUSIONS

The presence of scale invariance in one-dimensional sandpile models does not necessarily imply a complex behavior. To exhibit SOC, at least in the sense originally proposed by Bak, Tang, and Wiesenfeld, it is required that the existence of branching mechanisms that provide the possibility of an occurrence of avalanches of all sizes, as in the NLL model. It is even possible to distinguish two levels of complexity, for the LL and NLL models. Considering a finite lattice, the LL model presents intrinsic length scales related to the density of traps on the lattice. In the NLL model, there are no extra length scales, even on a finite lattice, due to the appearance of new branchings during the relaxation process (which leads to the recovery of the simple scaling behavior observed in the two-dimensional models).

In conclusion, we have raised some questions about the connections between SOC, SI, and complexity. The presence of power laws in the statistical analysis of the systems that we have considered should not be taken as a synonymous of complex behavior. Also, it should be pointed that scaling invariance can be a manifestation of different types of behavior, including some rather trivial situations, as in the LLL model, where the boundary conditions play a determinant role.

Finally, we wish to emphasize the coincidence between a more complex behavior, as in the NLL and the two-dimensional BTW models, and the existence of a simple scaling law. Although we have not investigated this point in detail, we suggest that the character of the scaling could be used to distinguish the degrees of complexity of systems as the LL and the NLL models.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank M. J. Oliveira and J. Krug for useful conversations. S. P. acknowledges the financial support of the Brazilian agency CAPES/PICD.

-
- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett* **59**, 381 (1987); *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
 - [2] J. M. Carlson, E. R. Grannan, and G. H. Swindle, *Phys. Rev. E* **47**, 93 (1993).
 - [3] G. Grinstein, in *Scale Invariance, Interfaces and Nonequilibrium Dynamics*, edited by A. McKane *et al.* (Plenum, New York, 1995).
 - [4] C. J. Pérez, A. Corral, A. Díaz-Guilera, K. Christensen, and A. Arenas, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 1111 (1996).
 - [5] L. P. Kadanoff, *Phys. Today* **44** (3), 9 (1991).
 - [6] P. Bak and M. Paczuski, *Phys. World* **6**, 39 (1993).
 - [7] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu, and S.-m. Zhou, *Phys. Rev. A* **39**, 6524 (1989).
 - [8] A. B. Chhabra, M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, A. J. Kolan, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **47**, 3099 (1993).
 - [9] B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **41**, 1867 (1990).
 - [10] C. P. C. Prado and Z. Olami, *Phys. Rev. A* **45**, 665 (1992).
 - [11] J. M. Carlson, J. T. Chayes, E. R. Grannan, and G. H. Swindle, *Phys. Rev. A* **42**, 2467 (1990).
 - [12] J. Krug, *Phys. Rev. E* **47**, 730 (1993).
 - [13] J. Krug, *J. Stat. Phys.* **66**, 1635 (1992).
 - [14] J. Krug, J. E. Socolar, and G. Grinstein, *Phys. Rev. A* **46**, R4479 (1992).
 - [15] A. Mehta and G. C. Baker, *Rep. Prog. Phys.* **57**, 3838 (1994).

Absence of self-organized criticality in a random-neighbor version of the OFC stick-slip model

S.T.R. Pinho^a, C.P.C. Prado^{a, *}, O. Kinouchi^b

^a Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

^b Departamento de Física e Informática de São Carlos, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 369, 05315-970 São Carlos, SP, Brazil

Abstract

We report some numerical simulations to investigate the existence of a self-organized critical (SOC) state in a random-neighbor version of the OFC model for a range of parameters corresponding to a non-conservative case. In contrast to a recent work, we do not find any evidence of SOC. We use a more realistic distribution of energy among sites to perform some analytical calculations that agree with our numerical conclusions. © 1998 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 64.60.L; 05.40; 05.70.L

Keywords: SOC; Random processes; Nonequilibrium thermodynamics

The first cellular automaton to display SOC (self-organized criticality), the sandpile model [1,2], required both a bulk conservation law and a lattice structure with open boundary conditions, that were thought to be the main ingredients to allow the building of the spatial correlations [3,4]. There are some attempts to construct much simpler and more tractable mean-field versions of these systems [5–7]. Olami et al. [8] introduced a non-conservative continuous cellular automaton as a realization of the two-dimensional Burridge–Knopoff stick-slip model (known as the earthquake model, the details being specified below) that displays self-organized critical behavior for a certain range of a parameter α related to the breaking of a conservation law. A detailed analysis of this model [9–11] seems to show that the spatial inhomogeneities created by the lattice, the particular boundary conditions, and the global driving mechanism, are the essential ingredients for the existence of SOC. In a recent publication, Lise and Jensen [12] considered a random-neighbor mean-field version of the OFC model with coordination

* Corresponding author. E-mail: prado@if.usp.br.

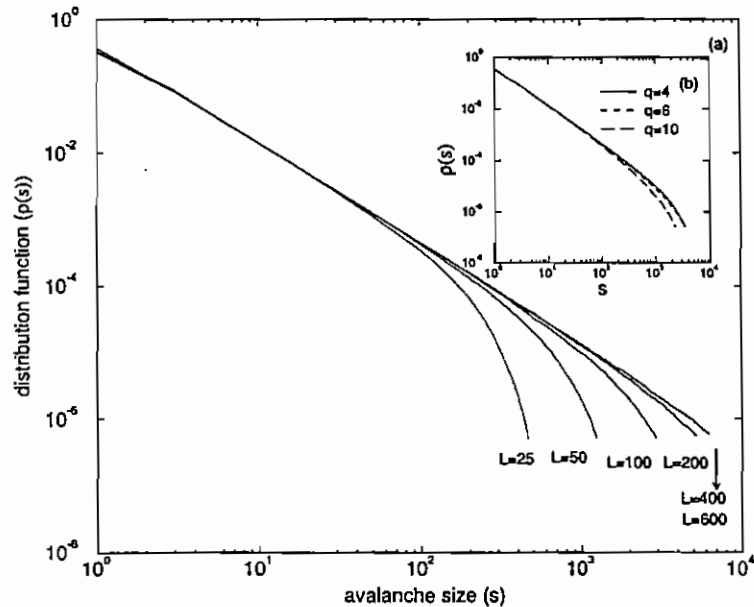


Fig. 1. (a) Distribution of the avalanche sizes (number of topples) for $q = 4$, $\alpha = 0.23$, and different lattice sizes, L . The number of iterations is $n = 2 \times 10^6$. For $L \geq 400$, the curves collapse to the same form, which indicates that there is no self-organized critical state. (b) Using $L = 100$, $\alpha = 0.23$, and $n = 4 \times 10^6$, the statistics is similar for different coordinations, $q = 4, 6$, and 10 . However, for large q , and α not too large, the redistribution of energy is not sufficient to generate larger avalanches.

$q = 4$. According to these calculations, it is remarkable that SOC can still be observed in non-conservative cases, for $\frac{2}{9} = \alpha^c < \alpha < \alpha_c = \frac{1}{4}$.

In this work we revisit the random-neighbor version of the OFC model, with an arbitrary coordination q (that should be of interest in the context of the investigations of SOC in artificial neural networks [13,14], in which case the existence of a regular lattice is not a realistic assumption). Unlike the conclusions of Lise and Jensen, we do not find any evidence of SOC, except in the conservative case. We show (see Fig. 1) that the use of lattices that are not big enough to allow the occurrence of the largest avalanches can lead to the wrong impression that the system does display SOC. Of course, this is an important word of caution about all numerical evidences of SOC. Within the mean-field approach, we show that the use of a simple and slightly more realistic assumption about the form of the stationary probability distribution $p(E)$ of the energies of the sites is enough to completely change the conclusions of Lise and Jensen. Using this simplified form of $p(E)$, there is just a very small range of parameters where SOC might occur in the non-conservative context.

The random-neighbor version of the OFC model consists of N sites with an energy $E_i < E_c$, for $i = 1, \dots, N$, where E_c is a threshold value (the energies of the stable sites will be labelled by a superscript $-$). During a long time scale, there is a continuous build up of all energies until the energy of a certain site i reaches the value E_c . Then, site i becomes unstable (its energy being labelled by a superscript $+$), and the

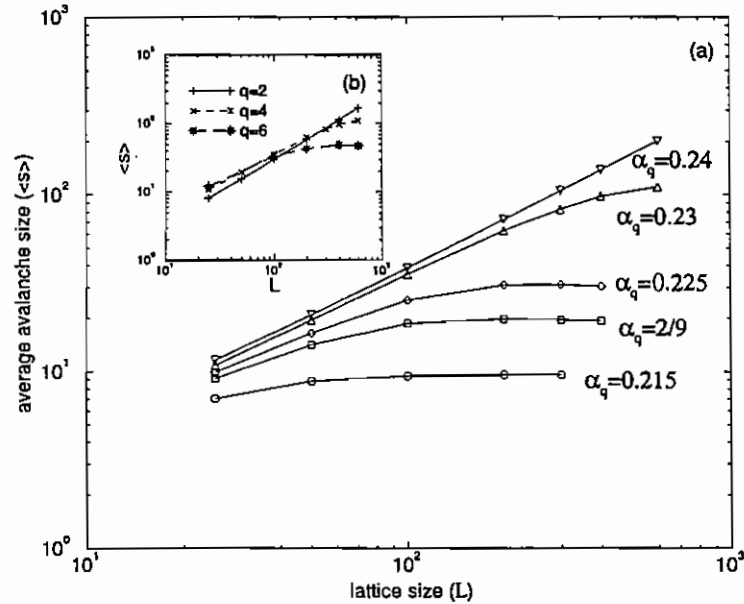


Fig. 2. (a) Average avalanche size $\langle s \rangle$ versus lattice size L , for $q=4$, and different values of α_q (smaller and larger than Lise and Jensen's value, $\alpha_q^* = 2/9$). For $\alpha_q^* = 0.23$, for example, using bigger lattice sizes ($L=600$), we can see the exponential behavior of $\langle s \rangle$ (in contrast to Lise and Jensen's simulations). For $\alpha_q \geq 0.24$, it is necessary to use much bigger lattice sizes to see this type of behavior. (b) Average avalanche sizes versus lattice size for $\alpha_q = 0.23$, and different coordination numbers, $q=2, 4$, and 6 . For larger values of q , it is sufficient to use a small lattice size to see the exponential behavior of $\langle s \rangle$.

system relaxes in a very short time scale. The unstable site i transfers an energy αE^+ ($\alpha \leq 1/q$) to q random neighbors, which may also become unstable and may generate an avalanche that only stops when the energies of all sites are again below E_c . The equality $\alpha = \alpha_c = 1/q$ corresponds to the conservative limit.

To make contact with the work of Lise and Jensen [12], we define a "re-scaled" dissipation constant, $\alpha_q = q\alpha/4$. According to the same approximate calculations of Lise and Jensen, the critical value α_q^c below which the avalanches have a typical size is given by $\alpha_q = q/(4q+2)$. If $q=4$, we have $\alpha_q^c = \frac{2}{9} = 0.222$, as obtained by Lise and Jensen.

Our own simulations, however, indicate that the density distribution of the avalanche sizes $\rho(s)$ converges to a fixed curve that does not depend on the size of the lattice, even for values of α_q far beyond α_q^c , given by our mean-field calculations (see Figs. 1 and 2 for $\rho(s)$ and the average avalanche size, $\langle s \rangle$, respectively). Because of practical limitations, it is not feasible to simulate systems closer to the conservative limit, but we strongly believe that the collapse of $\rho(s)$ to a universal curve, and the convergence of $\langle s \rangle$ to a typical value, regardless of the size of the lattice, for all values of α_q that we were able to use in the simulations, do indicate that the system is not in a critical state.

The results of numerical simulations for $p(E)$, with $q=4$, are shown in Fig. 3 (for simplicity, we assume from now on that $\alpha_4 = \alpha$). These results clearly show that $p(E)$

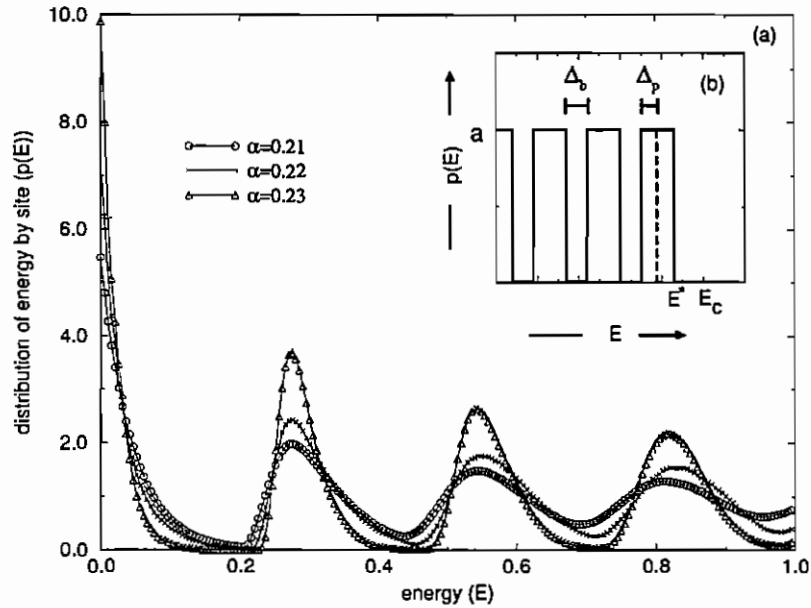


Fig. 3. (a) Distribution of energy per site $p(E)$ versus energy E , for $q=4$, and $\alpha_q = 0.21, 0.22$, and 0.23 . The width of the peaks decreases as α_q increases. (b) Special form of $p(E)$ as used in the calculations, where Δ_p is the half-width of the peaks, Δ_b is the width of the gaps, a is the value at the peak, and $E_c \geq E^* = 7\Delta_p + 3\Delta_b$.

is not a simple constant. We then decided to use the same approach of Lise and Jensen [12], but supposing that the distribution $p(E)$ has the (more realistic) form shown in the detail of Fig. 3, where Δ_p is half the width of each peak, Δ_b is the width of the gaps between two peaks, and $E^* = 3\Delta_b + 7\Delta_p$ is the maximum value of E for which $p(E) \neq 0$. We then have

$$P_+(E^+) = \frac{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E^+} p(E) dE}{\int_0^\infty p(E) dE} = \frac{1}{7a\Delta_p} \int_{E_c - \alpha E^+}^{E^+} p(E) dE. \tag{1}$$

The lower limit of the integral in the numerator, $E_c - \alpha E^+$, can belong to any of the intervals that define the four peaks of the distribution, to which we assign the indices $i = 1, 2, 3, 4$. Now we have to consider each one of these possibilities (to simplify the notation, we use the superscript i to refer to the value of $E_c - \alpha E^+$). The integrals $P_+^i(E^+)$ have the generic form

$$P_+^i(E^+) = 1 + \frac{(i-1)\Delta_b}{7\Delta_p} \frac{E_c}{7\Delta_p} + \frac{\alpha E^+}{7\Delta_p}. \tag{2}$$

Therefore, the branching rate σ is given by

$$\sigma = 4 P_+^i = 4 \left[1 + \frac{(i-1)\Delta_b}{7\Delta_p} \frac{E_c}{7\Delta_p} + \frac{\alpha(E^+)}{7\Delta_p} \right]. \tag{3}$$

Now, we write the mean-value of the energy of an unstable site,

$$E^+ = \frac{\langle E \rangle^i}{(1 - \alpha)}, \quad (4)$$

where

$$E = \frac{\int_{E_c - \alpha(E^+)}^{E_c} E p(E) dE}{\int_{E_c - \alpha(E^+)}^{E_c} p(E) dE}. \quad (5)$$

Therefore,

$$E^+ = \frac{E_c}{\alpha(2 - \alpha)} \frac{[7\Delta_p + (i - 1)\Delta_b](1 - \alpha)}{\alpha(2 - \alpha)} \left[\frac{\sqrt{y_i}}{2\alpha(2 - \alpha)} \right], \quad (6)$$

where

$$y_i = 4\{E_c(1 - \alpha) - [7\Delta_p + (i - 1)\Delta_b]\}^2 + 4\alpha(2 - \alpha)[x_i - 14(i - 1)]\Delta_p\Delta_b, \quad (7)$$

with $x_i = 24, 26, 32,$ and $42,$ for $i = 1, 2, 3,$ and $4,$ respectively.

To reach a critical state, we have to impose $\sigma \geq 1$. Taking $\sigma = 1$, and using Eq. (6), instead of Lise and Jenson's approximate result, we have

$$7\Delta_p(2 + \alpha) + 4(i - 1)\Delta_b - 4E_c(1 - \alpha) + 7\alpha E_c \pm 2\sqrt{y_i} = 0. \quad (8)$$

For instance, if we take $\Delta_p = 0.08$ and $\Delta_b = 0.1$, the critical branching condition leads to values of α^- outside of the physical range (that is, $\alpha^- > \frac{1}{4}$). Therefore, in this particular case, it is physically forbidden to assume that $\sigma = 1$, so there is no self-organized critical state.

In the conservative limit (for $\Delta_p \rightarrow 0, \Delta_b \rightarrow \alpha E_c$), the four peaks of $p(E)$ tend to four delta functions at $(i - 1)\alpha E_c$. In this case, it is easy to see that $\sigma = 1$ leads to the only possibility $\alpha^- = \alpha_c = \frac{1}{4}$ (we obtain $\alpha^- > \frac{1}{4}$ for $i = 1, 2,$ and 3). It can also be shown that, if we consider the limit $\Delta_b \rightarrow 0$ and $\Delta_p \rightarrow E_c/7$, which corresponds to the approximation of Lise and Jenson, then $\alpha^- = \frac{2}{5}$.

In general, from Eq. (8), for all values of i , the regions of parameters associated with $\alpha \leq \frac{1}{4}$ are determined by

$$E_c - \frac{175}{24}\Delta_p - \frac{2x_i}{21}\Delta_b \leq 0. \quad (9)$$

From this inequality, and the relation $E_c \geq 7\Delta_p + 3\Delta_b$ (see Fig. 3), we see that only in a very small region of the parameters Δ_p and Δ_b (see Fig. 4) there are values of α^- in the physical range (that is, such that $0 < \alpha^- \leq \frac{1}{4}$). In all of those cases, Δ_b is very small, and the shape of $p(E)$ is very close to the constant form used by Lise and Jenson.

In conclusion, on the basis of a mean-field argument, supplemented by a more realistic approximation for the distribution of energies $p(E)$, we give some analytical indications to support our own numerical findings that the random-neighbor version of

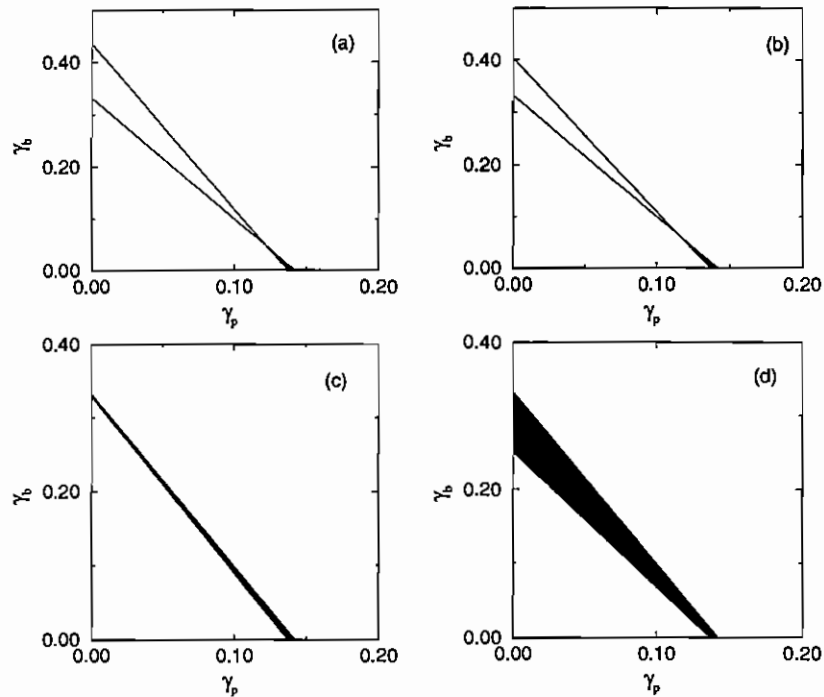


Fig. 4. Space of parameters of $p(E)$ in terms of $\gamma_p = \Delta_p/E_c$ and $\gamma_b = \Delta_b/E_c$. The shaded regions correspond to the intersection between $\alpha \leq 1/4$ and $(7\Delta_p + 3\Delta_b)/E_c = 7\gamma_p + 3\gamma_b \leq 1$. Depending on the value of $E_c = \alpha E^+$, we have (a) $E_c = \alpha E^+ \in [0, \Delta_p]$; (b) $E_c = \alpha E^+ \in [\Delta_p + \Delta_b, 3\Delta_p + \Delta_b]$; (c) $E_c = \alpha E^+ \in [3\Delta_p + 2\Delta_b, 5\Delta_p + 2\Delta_b]$; and (d) $E_c = \alpha E^+ \in [5\Delta_p + 3\Delta_b, 7\Delta_p + 3\Delta_b]$.

the OFC stick-slip model cannot display SOC outside of the conservative limit. At the time we were writing this paper, we came to know about two other works [15,16] that lead essentially to the same conclusions.

Acknowledgements

We thank S.R. Salinas for helpful discussions. We acknowledge the financial help of the Brazilian organizations CAPES and FAPESP. One of us (STRP) is on leave of absence from Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brazil.

References

- [1] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 381.
- [2] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A 38 (1988) 64.
- [3] K. Christensen, Z. Olami, Phys. Rev. E 48 (1993) 3361.
- [4] T. Hwa, M. Kardar, Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 1813.

- [5] C. Tang, P. Bak, *J. Stat. Phys.* 51 (1988) 797.
- [6] D. Dhar, S.N. Majumdar, *J. Phys. A* 23 (1990) 4333.
- [7] S.A. Janowsky, C.A. Lberge, *J. Phys. A* 26 (1993) L973.
- [8] Z. Olami, H.J.S. Feder, K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 1244.
- [9] K. Christensen, *Self-organization in models of sandpiles, earthquakes and flashing fireflies*, Ph.D. Thesis, University of Aarhus, Denmark, 1992.
- [10] J.E.S. Socolar, G. Grinstein, C. Jayaprakash, *Phys. Rev. E* 47 (1993) 2366.
- [11] P. Grassberger, *Phys. Rev. E* 49 (1994) 2436.
- [12] S. Lise, H.J. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 2326.
- [13] A.V.H. Herz, J.J. Hopfield, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 1222.
- [14] D. Chen, S. Wu, A. Guo, R.Z. Yang, *J. Phys. A* 28 (1995) 5177.
- [15] M. Chabanol, V. Hakim, *Phys. Rev. E* 56 (1997) R2343.
- [16] H.-M. Bröker, P. Grassberger, *Phys. Rev. E* 56 (1997) 3944.

Random-neighbor Olami-Feder-Christensen slip-stick model

Osame Kinouchi,* Suani T. R. Pinho,[†] and Carmem P. C. Prado[‡]

Departamento de Física Geral, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, CEP 05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil

(Received 24 March 1998)

We reconsider the treatment of Lise and Jensen [Phys. Rev. Lett. **76**, 2326 (1996)] on the random neighbor Olami-Feder-Christensen stik-slip model [Phys. Rev. Lett. **68**, 1244 (1992)] and examine the strong dependence of the results on the approximations used for the distribution of states $p(E)$. [S1063-651X(98)09308-8]

PACS number(s): 05.40.+j, 05.70.Jk, 05.70.Ln

The work of Olami, Feder, and Christensen [1] on a slip-stick earthquake model indicated, some time ago, that self-organized criticality (SOC) may occur without a local conservation law. Recently, it has been claimed by Lise and Jensen [2] that the random-neighbor version of the Olami-Feder-Christensen (OFC) model also presents critical behavior above some critical dissipation level $\alpha_c < \alpha_0$, where $\alpha_0 = 1/q$ is associated with local conservation for q neighbors. These authors based their claims on some theoretical mean-field arguments and on numerical simulations with systems with up to $N=400^2$ sites. In order to perform the mean-field calculation they had to make many different assumptions about the behavior of the model.

More recently, Chabanol and Hakin [3] and Bröker and Grassberger [4] performed a more detailed analysis of the same model, showing that what has been interpreted as a critical behavior in [2] indeed corresponds to a subcritical region with very large (but finite) mean avalanche sizes. Although Bröker and Grassberger [4] give a comprehensive treatment of the random-neighbor version of the OFC model (which we will designate ROFC), it may be of interest to detect exactly where the theoretical arguments given in [2] fail, since that point is not transparent in their paper and similar problems may occur or be of interest in the future. This is the aim of our paper. We will show that the problem is not in the method used in [2] (which eventually can give useful information about the mechanism behind SOC) but in the strong dependence of the output of the calculations on the exact form of the distribution of states $p(E)$ of the system.

To reinforce the strong dependence of the results on the specific form of $p(E)$, we revisit the ROFC model, but this time introducing a simple and small modification on the $p(E)$ distribution, which consists in replacing the interval $[0, E_c]$ where the uniform distribution used by Lise and Jensen was defined by the interval $[0, E^*]$, with $E^* < E_c$ (E_c is the threshold value above which the sites become unstable and relax), that is,

$$p(E) = \frac{1}{E^*} \Theta(E) \Theta(E^* - E), \quad (1)$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside function [see Fig. 1(a)].

The random version of the OFC model (ROFC) consists of N sites initially with an energy $E_i < E_c$, for $i = 1, \dots, N$. The sites with energy E below E_c are stable sites (inactive) and will be labeled by a minus superscript; the sites with energy E above E_c are unstable (active) and will be labeled by a plus superscript. The energies of all sites are increased slowly until the instant t when the energy of a certain site i reaches the value E_c . This site then becomes unstable and the system relaxes in a very short time scale according to the rules

$$E_i(t+1) = 0, \quad E_{rn}(t+1) = E_{rn}(t) + \alpha E^+, \quad (2)$$

where E_{rn} stands for the energy of q other sites chosen at random and $\alpha \leq 1/q$. Eventually some of these q sites may become unstable and also relax and so may generate an avalanching process that stops only when the energies of all sites are again below E_c . If we have $\alpha = \alpha_c = 1/q$ we say that the system is conservative.

Following [2], the probability of an inactive site to be activated by receiving a contribution αE^+ of an active site is

$$P_+(E^+) = \frac{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE}{\int_0^\infty p(E) dE} = \frac{E^* - E_c + \alpha E^+}{E^*}. \quad (3)$$

The branching ratio σ is the average number of new unstable sites created by an unstable site that relaxes. Clearly, in order to have a critical branching process, we must have $\sigma = 1$. For q random neighbors we have

$$\sigma = q \frac{\int_{E_c}^\infty dE^+ P_+(E^+) p(E^+)}{\int_{E_c}^\infty dE^+ p(E^+)}, \quad (4)$$

where $p(E^+)$ is the distribution of states for unstable sites, that is, sites with energy above E^* . Adopting the notation $\langle \dots \rangle \equiv \int (\dots) p(E) dE / \int p(E) dE$ for averages, we find

$$\sigma = q \left[\frac{E^* - E_c}{E^*} + \frac{\alpha}{E^*} \langle E^+ \rangle \right]. \quad (5)$$

*Electronic address: osame@ultra3000.ifqsc.usp.br

[†]On leave from the Instituto de Física, Universidade Federal de Bahia. Electronic address: spinho@gibbs.if.usp.br

[‡]Electronic address: prado@if.usp.br

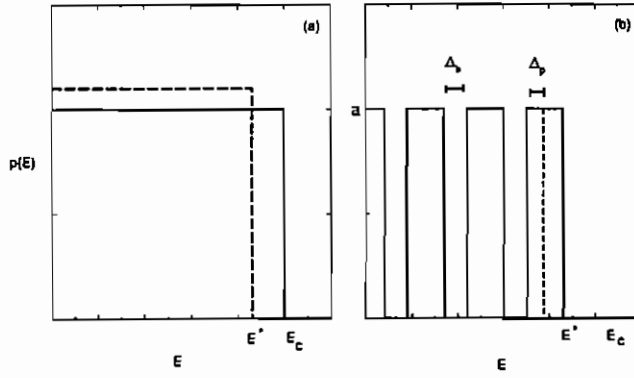


FIG. 1. (a) Uniform approximation for the energy distribution $p(E)$ of the ROFC model. The solid line corresponds to the interval of E used by Lise and Jensen, $[0, E_c]$; the dashed line corresponds to a smaller interval of E , $[0, E^*]$, used in our calculations. (b) A more realistic approximation (non-uniform) of the energy distribution of the ROFC model, for $q=4$ (with four peaks). The parameters Δ_p and Δ_b are, respectively, the half-width of the peaks and the width of the gaps. The value of $p(E)$ at the peaks is a and $E_c \geq E^* = 7\Delta_p + 3\Delta_b$.

The critical branching ratio $\sigma=1$ defines a value α_c above which infinite avalanches may occur. The quantity $\langle E^+ \rangle$ is estimated [2] as

$$\langle E^+ \rangle = \frac{\langle E^- \rangle}{1 - \alpha}. \quad (6)$$

The average on E^- is calculated as

$$\begin{aligned} \langle E^- \rangle &= \frac{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE}{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE} \\ &= \frac{1}{E^* - E_c + \alpha \langle E^+ \rangle} \int_{E_c - \alpha \langle E^+ \rangle}^{E^*} E^- dE \\ &= \frac{1}{2} \frac{(E^*)^2 - E_c^2 + (2E_c - \alpha \langle E^+ \rangle) \alpha \langle E^+ \rangle}{E^* - E_c + \alpha \langle E^+ \rangle}. \end{aligned} \quad (7)$$

With this result and Eq. (6) we get

$$(2\alpha - \alpha^2)x^2 + [2E^*(1 - \alpha) - 2E_c]x + E_c^2 - (E^*)^2 = 0, \quad (8)$$

where $x = \langle E^- \rangle$. This leads to the simple solution

$$\langle E^+ \rangle = \frac{E_c + E^*}{2 - \alpha}. \quad (9)$$

Finally, we get for the branching ratio

$$\sigma = q \left[\frac{E^* - E_c}{E^*} + \frac{\alpha(E_c + E^*)}{E^*(2 - \alpha)} \right]. \quad (10)$$

The critical condition $\sigma=1$ leads to

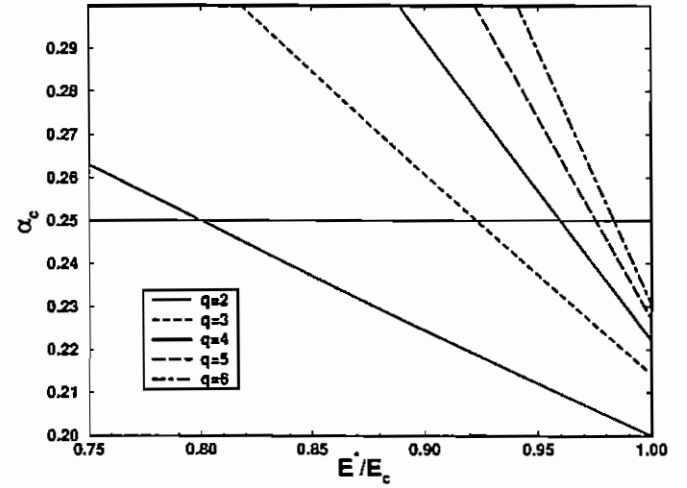


FIG. 2. Normalized "critical" dissipation level $\tilde{\alpha}_c = k\alpha/4$ as a function of E^* . Values for $\tilde{\alpha}_c$ above 0.25 are not physically admissible.

$$\alpha_c = \frac{E_c - E^*(q-1)/q}{E_c + E^*/2q}. \quad (11)$$

For example, if $q=4$ (the case studied in [2]), we have

$$\alpha_c = \frac{E_c - 3E^*/4}{E_c + E^*/8}. \quad (12)$$

If we consider $E^* = E_c$ we recover Lise and Jensen's value $\alpha_c = 2/9$. However, the value of α_c has a strong dependence on the value of E^* . We see that, already for the value $E^*/E_c = 24/25 = 0.96$, α_c achieves the physical limit 0.25.

In Fig. 2 we show the behavior of the normalized coupling $\tilde{\alpha}_c = q\alpha_c/4$ as a function of E^* . With this normalization, the conservative case always corresponds to $\tilde{\alpha}_c = 0.25$ (as for $q=4$). We see that the allowed region of values for E^* so that $\tilde{\alpha}_c < 0.25$ is very narrow for any q and that the value of α_c varies strongly in this region. We have already shown in another work (see [5]) that already with lattices with $N=600^2$ sites it is possible to see a finite mean size avalanche for $\alpha=0.23$, in contrast to the results of [2] based on simulations in lattices with $N=400^2$.

Besides showing that Lise and Jensen's approach is not robust with respect to $p(E)$, we may ask what kind of model produces the uniform distribution

$$p(E) = \Theta(E)\Theta(1-E) \quad (13)$$

used by those authors. We found that an extremal version of the Feder-Feder model, hereforth called the EFF model, indeed produces this distribution. Extremal here is used in the same sense it was used in the Bak-Snappen coevolution model [6]. In the dynamics of extremal models there is no driving step. We locate the site i with the largest value of $E_i = \max\{E_j\}$ at the initial instant t . This site relaxes following the original Feder-Feder rules

$$E_i^m(t+1) = \eta, \quad E_{nn}(t+1) = E_{nn}(t) + \alpha, \quad (14)$$

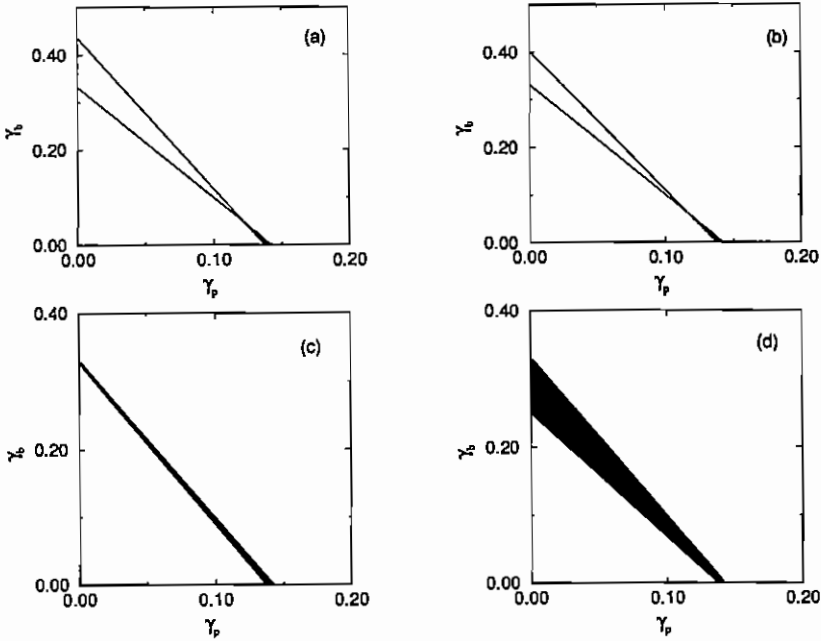


FIG. 3. Space of parameters for $p(E)$ in terms of $\gamma_p = \Delta_p/E_c$ and $\gamma_b = \Delta_b/E_c$. The shaded regions correspond to the intersection between $\alpha \leq 1/4$ and $(7\Delta_p + 3\Delta_b)/E_c = 7\gamma_p + 3\gamma_b \leq 1$. Depending on the value of $E_c - \alpha E^+$, we have (a) $E_c - \alpha E^+ \in [0, \Delta_p]$; (b) $E_c - \alpha E^+ \in [\Delta_p + \Delta_b, 3\Delta_p + \Delta_b]$; (c) $E_c - \alpha E^+ \in [3\Delta_p + 2\Delta_b, 5\Delta_p + 2\Delta_b]$; and (d) $E_c - \alpha E^+ \in [5\Delta_p + 3\Delta_b, 7\Delta_p + 3\Delta_b]$.

where η is a noise, $\eta \in [0, \epsilon]$. If we consider $\epsilon = \alpha = 1/4$ we will have Eq. (13). In this model the size of an avalanche is defined as the number of sites with energy $E_i^m > 1$ that relax in a row. Now, if we repeat Lise and Jensen's calculation using these EFF rules instead of the OFC rules, we get the self-consistent result $\alpha_c = E_c/q$.

It is also possible to show that a more realistic assumption about $p(E)$ leads essentially to the same results obtained by [3,4]. If we simulate the ROFC model with $q=4$ we will get an energy distribution $p(E)$ with four peaks [2]. They show clearly that $p(E)$ is not a simple constant. We then decided to repeat the same calculations but supposing this time that $p(E)$ had the (more realistic) form shown in Fig. 1(b), where Δ_p is half the width of each peak and Δ_b is the width of the gaps between two peaks. This means that

$$p(E) = \begin{cases} a & \text{for } E \in I_1, I_2, I_3, \text{ or } I_4 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (15)$$

where $I_1 = [0, \Delta_p]$, $I_2 = [\Delta_p + \Delta_b, 3\Delta_p + \Delta_b]$, $I_3 = [3\Delta_p + 2\Delta_b, 5\Delta_p + 2\Delta_b]$, and $I_4 = [5\Delta_p + 3\Delta_b, 7\Delta_p + 3\Delta_b]$.

We also have that $E^* = 3\Delta_b + 7\Delta_p$ is the maximum value for which $p(E) \neq 0$. Then we have

$$P_+(E^+) = \frac{\int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} p(E) dE}{\int_0^\infty p(E) dE} = \frac{1}{7a\Delta_p}. \quad (16)$$

The lower limit of the integral in the numerator $E_c - \alpha E^+$ can now belong to any of the four intervals that define the peaks of the distribution, to which we will assign the indices $i=1,2,3,4$. Considering each one of the possibilities, the integrals $P_+^i(E^+)$ assume the generic form

$$P_+^i(E^+) = 1 + \frac{(i-1)\Delta_b}{7\Delta_p} - \frac{E_c}{7\Delta_p} + \frac{\alpha E^+}{7\Delta_p}. \quad (17)$$

The branching rate is given by

$$\sigma = 4P_+^i = 4 \left[1 + \frac{(i-1)\Delta_b}{7\Delta_p} - \frac{E_c}{7\Delta_p} + \frac{\alpha(E^+)}{7\Delta_p} \right]. \quad (18)$$

In a similar way used to obtain Eq. (7), we calculate an expression for $\langle E^- \rangle$, which is associated with Eq. (6), which leads

$$\langle E^+ \rangle^i = \frac{E_c}{\alpha(2-\alpha)} - \frac{[7\Delta_p + (i-1)\Delta_b](1-\alpha)}{\alpha(2-\alpha)} \pm \frac{\sqrt{y_i}}{2\alpha(2-\alpha)}, \quad (19)$$

where

$$y_i = 4\{E_c(1-\alpha) - [7\Delta_p + (i-1)\Delta_b]\}^2 + 4\alpha(2-\alpha)[x_i - 14(i-1)]\Delta_p\Delta_b, \quad (20)$$

with $x_i = 24, 26, 32,$ and 42 , for $i=1, 2, 3,$ and 4 , respectively. Imposing the branching condition $\sigma=1$ and using Eq. (19) we get

$$7\Delta_p(2+\alpha) + 4(i-1)\Delta_b - 4E_c(1-\alpha) + 7\alpha E_c \pm \sqrt{y_i} = 0. \quad (21)$$

For instance, if we take $\Delta_p=0.08$ and $\Delta_b=0.1$ [which corresponds to Fig. 1(b)], the critical branching condition leads to values of α^* outside the physical range (that is, $\alpha^* > 1/4$). Therefore, in this particular example, it is physically forbidden to assume that $\sigma=1$, so there is no self-organized critical state.

If we take the limit for the conservative case (that is, $\Delta_p=0$ and $\Delta_b = \alpha E_c$), the four peaks tend to four δ functions at $(i-1)\alpha E_c$ and it is easy to see that the condition $\sigma=1$ leads to the only possibility $\alpha^* = \alpha_c = 1/4$ (we obtain $\alpha^* > 1/4$ for $i=1,2,3$). It can also be shown that if we consider

the limit $\Delta_b \rightarrow 0$ and $\Delta_p \rightarrow E_c/7$ (that is, $p(E)$ is constant in the interval $[0, E_c]$, which corresponds to the approximation of Ref. [2]), then $\alpha^* = 2/9$.

In general, for all values of i , the regions of the parameter space associated with $\alpha \leq 1/4$ are determined by

$$E_c - \frac{175}{24} \Delta_p - \frac{2x_i}{21} \Delta_b \leq 0. \quad (22)$$

From this inequality plus the relation $E_c \geq 7\Delta_p + 3\Delta_b$ (see Fig. 3) we see that only for a very small range of the parameters Δ_p and Δ_b are there values of α_c in the physical range ($0 < \alpha_c \leq 1/4$). In all of those cases, Δ_b is very small and the shape of $p(E)$ is very close to the constant form used by Lise and Jensen. Moreover, α varies strongly in these allowed ranges.

In conclusion, we showed that, besides not having considered lattices big enough, the problem with the approach used

by Lise and Jensen in [2] is not in the method itself, but in the strong dependence of the output of the calculations on the compatibility between the distribution $p(E)$ and the assumed dynamical rules that presumably lead to it. We also showed that the $p(E)$ approximation used by Lise and Jensen does not correspond to the model they intend to analyze, namely ROFC, but to another nonconservative model, the extremal Feder-Feder model. If we adopt the EFF dynamical rules, Lise and Jensen's method will lead to the right conclusions. In the end, we followed the same approach but now consider a more realistic approach for $p(E)$ and get essentially the same results that had already been obtained through the use of other arguments in [3,4], that is, in the ROFC model there is SOC only in the conservative limit.

We are thankful to S. R. Salinas for useful discussions about the analytical results of the R-OFC model. S. T. R. P. acknowledges the support by the Brazilian agency CAPES-PICD.

-
- [1] Z. Olami, H. J. F. Feder, and K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992).
 [2] S. Lise and H. J. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2326 (1996).
 [3] M-L. Chabanol and V. Hakim, *Phys. Rev. E* **56**, R2343 (1997).

- [4] H.-M. Bröker and P. Grassberger, *Phys. Rev. E* **56**, 3944 (1997).
 [5] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado, and O. Kinouchi, *Physica A* (to be published).
 [6] P. Bak and K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4083 (1993).

Robustness of scale invariance in models with self-organized criticality

Osame Kinouchi*

Departamento de Física e Matemática, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Avenida Bandeirantes 3900, CEP 14040-901, Ribeirão Preto, SP, Brazil

Carmen P. C. Prado†

Departamento de Física Geral, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, CEP 05315-970, São Paulo, SP, Brazil

(Received 5 October 1998)

A random-neighbor extremal stick-slip model is introduced. In the thermodynamic limit, the distribution of states has a simple analytical form and the mean avalanche size, as a function of the coupling parameter, is exactly calculable. The system is critical only at a special point J_c in coupling parameter space. However, the critical region around this point, where approximate scale invariance holds, is very large, suggesting a mechanism for explaining the ubiquity of power laws in nature. [S1063-651X(99)06105-X]

PACS number(s): 05.40.-a, 05.70.Ln, 05.65.+b, 91.30.Bi

I. INTRODUCTION

Self-organized criticality (SOC) is an intriguing concept which started a large “avalanche” of research on mechanisms leading to scale invariance in extended dynamical systems [1]. However, there is no general agreement about ingredients necessary to create the self-organized critical state. This fact is reflected in the doubts about whether locally dissipative systems really present SOC or have only a very strong divergence of the mean avalanche size \bar{s} when approaching the conservative limit. The recent results by Chabanel and Hakim [2], Bröker and Grassberger [3], and Kinouchi *et al.* [4] stating that the random-neighbor Olami, Feder, and Christensen (OFC) model is not critical in the dissipative regime and contradicting previous claims [5] is a clear example of the difficulty of making such a distinction solely on the basis of simulations. It is also worth remembering that the prototypical sandpile (BTW) model is not critical in the presence of local dissipation [1,6,7].

The distinction between conservative and dissipative local dynamics, however, is not what is relevant for predicting critical behavior. The decisive ingredient seems to be the value of the coupling parameter J [or the nature of the distribution $p(J)$ in nonhomogeneous systems]. For example, the Feder and Feder model with k neighbors is nonconservative but is critical when the coupling constant is equal to $J_c = 1/k$ [3,8].

In this paper, a model is proposed which is similar to, but simpler than, the random-neighbor stick-slip models studied in [2,3]. For this model, the stationary distribution of states $p_x(E)$ and the mean avalanche size \bar{s} , as functions of the coupling parameter J , have simple analytical forms (in the limit of infinite system size). The analysis in terms of branching processes is transparent and gives a clear mecha-

nism for the emergence of very large but finite \bar{s} in a non-negligible region of the parameter space. In other words, although true criticality occurs only at a special point J_c , there exists a large region where power laws over several decades appear. In this region the behavior of the system can be considered almost critical.

This occurs because the original parameter which controls the critical behavior (the branching rate σ in a branching process) is now, in SOC models, a slow dynamical variable $\sigma_r(J)$ that depends on the coupling parameter J . In our model, the stationary value $\sigma_\infty(J)$ shows a plateau near the critical value $\sigma_c = 1$, thus enlarging the region in J space where the system displays a critical behavior. We will say that the system is critical for $J = J_c$ when $\sigma = 1$ and is “quasritical” or “almost critical” for values of J where $\sigma \sim 1$. This fact may be relevant as an explanation for the ubiquity of approximate scale invariance in nature [9].

The remainder of the paper is organized as follows: In Sec. II, the model is introduced and the main results obtained. The issue of robustness in SOC models is discussed in Sec. III. Section IV contains concluding remarks and suggestions for future work.

II. EXTREMAL FEDER AND FEDER MODEL (EFF MODEL)

A. The model

The EFF model is a random-neighbor version of the Feder and Feder model [3,8] using an extremal dynamics similar to the Bak-Sneppen model [10]. The extremal dynamics, which in this case substitutes for (and plays the same role as) the slow driving of the original Feder and Feder model, is here an essential ingredient for the observation of self-organized criticality.

All sites $j = 1, \dots, N$ have a continuous state variable $E_j \in \mathcal{R}$. At each time step the site with maximal value “fires,” resetting its value to zero plus a noise term η . Then, k random “neighbors” (r_n) of the firing site have their

*Electronic address: osame@dfm.ffclrp.usp.br

†Electronic address: prado@if.usp.br

states incremented by a constant J plus a noise term. The choice of neighbors is done at the firing instant: the randomness is *annealed*. So, denoting the extremal value at instant t as $E_i^* \equiv \max\{E_j\}$, the update rules are

$$\begin{aligned} E_i^*(t+1) &= \eta(t), \\ E_{RN}(t+1) &= E_{RN}(t) + J + \eta_{RN}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

with η and η_{RN} being random variables uniformly distributed in the interval $[0, \epsilon]$ (the range of ϵ will be discussed later). Note that each random neighbor receives a different quantity η_{RN} .

Consider the instantaneous density of states $p_t(E)$. It is clear that for any E outside the intervals $I_n \equiv [(n-1)J, (n-1)J + n\epsilon]$, $n = 1, 2, \dots$, this density decays to zero for long times. These intervals effectively discretize the phase space, so it is useful to define the following quantities:

$$P_n = \int_{(n-1)J}^{(n-1)J+n\epsilon} p(E) dE, \tag{2}$$

with $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$, and $\epsilon < J/n_{\max}$ so that the intervals do not overlap (the integer n_{\max} will be obtained later). The process can be thought of as a transference of sites between the intervals I_n . At each time step, one site is transferred to the interval I_1 and, with probability kP_1 , one site is removed from this interval. The average flux to the intervals I_n with $n > 1$ corresponds to the probability kP_{n-1} that a neighbor is chosen in the previous I_{n-1} interval minus the probability kP_n that a neighbor is chosen in the interval I_n . The average number of sites in each interval is $N_n(t) = NP_n(t)$. For long times, that is, when the density of states outside the I_n intervals goes to zero, one can write

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= P_1(t) + \frac{1}{N} [1 - kP_1(t)], \\ P_n(t+1) &= P_n(t) + \frac{1}{N} [kP_{n-1}(t) - kP_n(t)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Here, each time step is equal to the update of the maximal site and k random neighbors.

The condition for steady states, $P_n(t+1) = P_n(t) = P_n^*$, gives

$$\begin{aligned} P_1^* &= 1/k, \\ P_n^* &= P_{n-1}^*, \end{aligned} \tag{4}$$

that is, $P_n^* = 1/k$ for all n . But since $p(E)$ is normalized, only n_{\max} intervals with P_n of $O(1)$ can exist. That is,

$$\sum_{n=1}^{n_{\max}} P_n^* = n_{\max} \times \frac{1}{k} = 1, \tag{5}$$

giving that $n_{\max} = k$. This means that $p_\infty(E)$ is composed of k bumps ($n = 1, \dots, n_{\max} = k$) and the previous condition for producing nonoverlapping intervals I_n reads $\epsilon < J/k$. There is also a bump of $O(\ln N/N)$ (by analogy with the results from

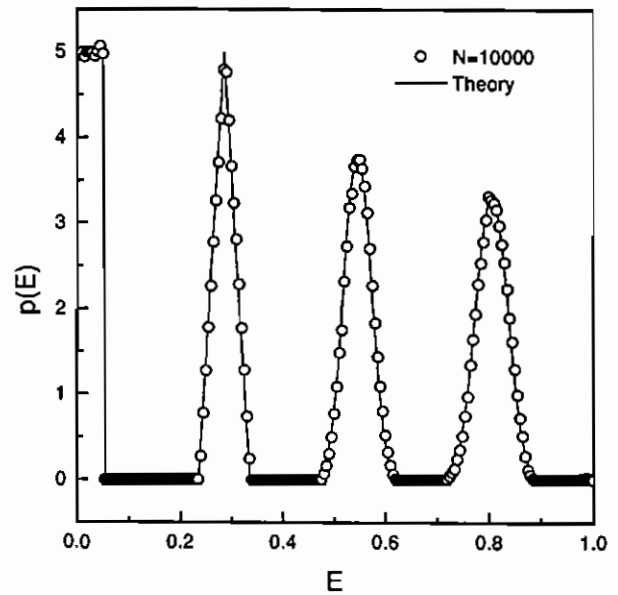


FIG. 1. Distribution of states $p_\infty(E)$ for $k=4$, $J=0.235$, and $\epsilon = 0.05$: theoretical (solid) and simulation (circles) with $N=10^4$ sites.

[11]) situated at the interval $I_{k+1} = [kJ, kJ + (k+1)\epsilon]$. The other intervals $n > k+1$ have P_n of yet smaller order (see Fig. 1).

B. Avalanches

An avalanche will be defined as the number of firing sites until an extremal site value falls below the threshold $E_{th} = 1$ [13]. Note that the first site of an avalanche (the “seed”) always has $E < 1$ but it counts as a firing site. So, if a seed produces no suprathreshold sites (“descendants”), this counts as an avalanche of size one. This definition of avalanches agrees with that used in the studies of relaxation oscillator models.

In these random-neighbor models, an avalanche can be identified as a branching process where an active site produces k new sites, each one having a probability p of being active (a “branch”) and a probability $1 - p$ of being inactive (a “leaf”). The branching rate $\sigma = kp$ measures the probability that a firing site produces another firing site.

A known result for a process with a constant branching rate σ is the distribution of avalanche sizes [3],

$$P(s) = \frac{1}{s} \binom{ks}{s-1} \left(1 - \frac{\sigma}{k}\right)^{ks - (s-1)} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{s-1}, \tag{6}$$

which, for large s and small $\delta = 1 - \sigma$, has the form

$$P(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-1/k)}} s^{-3/2} \exp(-s/s_\xi), \tag{7}$$

$$s_\xi \approx \frac{2(k-1)}{k} (1-\sigma)^{-2}. \tag{8}$$

We will see that Eq. (6) can be applied to the EFF model with the stationary value $\sigma_\infty(J)$.

Now, consider an avalanche which has terminated after s sites have fired. This avalanche is composed of one seed and $s - 1$ descendants. But the average number of descendants produced by s firing sites is σs . Thus, on average, the relation

$$\bar{s} - 1 = \sigma \bar{s} \tag{9}$$

must hold, which leads to

$$\bar{s} = \frac{1}{1 - \sigma}. \tag{10}$$

Of course, this result can be obtained directly from Eq. (6) after some work. Note that $\sigma_\infty \equiv \sigma(t \rightarrow \infty)$ refers to the stationary value of the branching rate: during the transient, σ_t changes with the avalanche time t . Although questioned by some authors [6], we retain the name *self-organization* for this evolution of σ_t toward σ_∞ mainly as a label to distinguish these systems from standard branching processes where σ is fixed *a priori*.

C. The $J = 1/k$ case

In the case $J = 1/k$, the calculation of σ_∞ is trivial. The k th bump ($n = n_{\max}$), which starts at $(k - 1)J$, must lie below the threshold $E_{\text{th}} = 1$ (if not, the system is supercritical). Then, ϵ must satisfy the condition $(k - 1)/k + k\epsilon < 1$, that is,

$$\epsilon < 1/k^2. \tag{11}$$

For the standard $k = 4$ neighbor case this reads $\epsilon < 0.0625$. This condition also implies that neighbors pertaining to the other bumps do not contribute to σ_∞ , that is, cannot fire when receiving a maximal contribution $J + \epsilon$. Now, since all the neighbors pertaining to the k th bump receive at least the quantity $J = 1/k$, they are always transformed into active sites. Thus, the average number of descendants of a firing site is

$$\sigma_\infty = kP_k^* = k \times \frac{1}{k} = 1, \tag{12}$$

which corresponds to a critical branching process. It is known that in this case the system presents an infinite \bar{s} [see Eq. (10)] and, for large s , a pure power law

$$P(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - 1/k)}} s^{-3/2} \tag{13}$$

for the distribution of avalanche sizes [3].

D. Results for general J

For the case $J < 1/k$, in order to obtain an expression for $\sigma_\infty(J)$, the knowledge of the distribution of states $p_\infty(E)$ is required. But it is clear that if $kJ = 1 - \delta$ then inevitably $\sigma_\infty < 1$ (even for very small $\delta > 0$), since some sites pertaining to the k th bump may not receive a sufficient contribution to make them active [see Eq. (17) below]. Thus, any value $J < J_c = 1/k$ is subcritical. This is a common feature of many models with SOC [3,6,14].

In our model, the calculation of $p_\infty(E)$ is very simple. In the stationary state, a site pertaining to the n th bump has energy $E = (n - 1)J + z_n$, where z_n is the sum of n random variables uniformly distributed in the interval $[0, \epsilon]$. The distribution $p(z_n)$ may be calculated from

$$p(z_1) = \epsilon^{-1} \Theta(z_1) \Theta(\epsilon - z_1),$$

$$p(z_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_n dz_1 p(z_n) p(z_1) \delta(z_n + z_1 - z_{n+1}).$$

For the $k = 4$ case,

$$p(z_2) = \epsilon^{-2} z_2 \Theta(z_2) \Theta(\epsilon - z_2) + (2\epsilon - z_2) \Theta(z_2 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_2), \tag{14}$$

$$p(z_3) = \epsilon^{-3} \frac{z_3^2}{2} \Theta(z_3) \Theta(\epsilon - z_3) + \left(-z_3^2 + 3\epsilon z_3 - \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \Theta(z_3 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_3) + \left(\frac{z_3^2}{2} - 3\epsilon z_3 + \frac{9\epsilon^2}{2} \right) \Theta(z_3 - 2\epsilon) \Theta(3\epsilon - z_3),$$

$$p(z_4) = \epsilon^{-4} \frac{z_4^3}{6} \Theta(z_4) \Theta(\epsilon - z_4) + \left(-\frac{z_4^3}{2} + 2\epsilon z_4^2 - 2\epsilon^2 z_4 + \frac{2\epsilon^3}{3} \right) \times \Theta(z_4 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_4) + \left(-\frac{x^3}{3} + 2\epsilon x^2 - 2\epsilon^2 x + \frac{2\epsilon^3}{3} \right) \times \Theta(z_4 - 2\epsilon) \Theta(3\epsilon - z_4) + \frac{x^3}{6} \Theta(z_4 - 3\epsilon) \Theta(4\epsilon - z_4), \tag{15}$$

with the shorthand $x \equiv (4\epsilon - z_4)$. The distribution $p_\infty(E)$ has k bumps. Each bump (labeled by n) starts at $E_n = (n - 1)J$, being proportional to $p(z_n)$ (the constant of proportionality is just $1/k$). In Fig. 1, the distribution $p_\infty(E)$ is compared with simulation results for a system with 10^4 sites, $J = 0.235$, $\epsilon = 0.05$, and a sufficient number of avalanches.

For such large systems, we must be careful about using reliable random-neighbor generators. In order to speed up the search for the extremal site, we used the binary rooted tree algorithm described by Grassberger [12]. For example, if the system has 2^m sites, a binary tree with $m + 1$ levels is created such that, in each node at level l , is stored the largest value of E of the two branch nodes of the $(l + 1)$ th level. So, the 0th (root) level contains the value of the extremal site. Ascending the tree, we locate the position of this site in the upper level. After the extremal site firing, the tree must be updated. The same occurs when the random neighbors are updated. These operations have a complexity $O(\ln N)$ instead of the $O(N)$ complexity of the naive search mechanism.

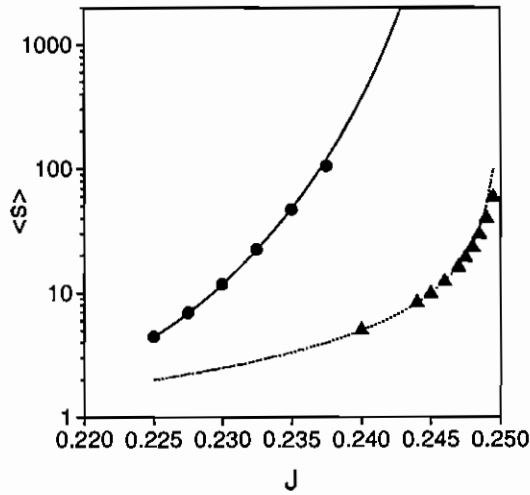


FIG. 2. Mean avalanche size \bar{s} as a function of parameter J . Theoretical (solid) and simulations with N up to $2^{18}=262\,144$ sites for noisy EFF model (circles) with $\epsilon=0.05$ and noiseless EFF model (triangles) with $\epsilon=0.2$. These ϵ values are chosen such that the last interval (I_4) has the same length in both models.

The stationary branching rate σ_∞ is calculated as follows. All the sites that can be activated pertain to the k th bump. When hit, sites with $E > 1 - J$ are always activated. In terms of the rescaled variable $z_k = E - (k - 1)J$, this condition refers to sites with $z_k > \delta \equiv 1 - kJ$. They contribute to the branching rate with the quantity σ' ,

$$\sigma' \equiv k \int_{1-J}^1 p(E) dE = \int_{\delta}^{\delta+J} p(z) dz, \quad (16)$$

where $z \equiv z_k$.

Sites with $E < 1 - J - \epsilon$ cannot be activated and do not contribute to σ . Sites with $1 - J - \epsilon < E < 1 - J$ can be activated if they receive a quantity $J + \eta > 1 - E$, that is, $\eta > \delta - z$. This occurs with probability $P(\eta > \delta - z) = 1 - (\delta - z)/\epsilon$. Thus, these sites contribute to the branching rate with the quantity

$$\begin{aligned} \sigma'' &\equiv k \int_{1-kJ-\epsilon}^{1-kJ} P(E) P(\eta > 1 - E - J) dE \\ &= \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z) \left(1 - \frac{\delta-z}{\epsilon} \right) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

The total branching rate is then

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= \sigma' + \sigma'' \\ &= 1 - \int_0^{\delta-\epsilon} p(z) dz - \frac{\delta}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z) dz + \frac{1}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} z p(z) dz, \end{aligned} \quad (18)$$

where we used the fact that $\int_0^{\delta+J} p(z) dz = 1$. Since $p(z)$ has a simple piecewise polynomial form [see Eq. (14)] the calculation of \bar{s} is straightforward and the result is presented in Fig. 2 along with simulation results for the $k=4$, $\epsilon=0.05$, for systems with up to $N=2^{18}=262\,144$ sites. In Fig. 3, we plot simulation results for the $P(s)$ distribution which agree

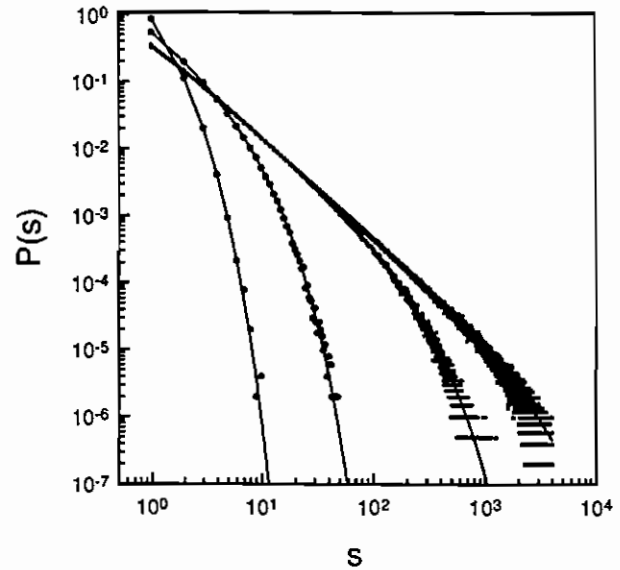


FIG. 3. Simulation results ($N=2^{13}=8192$ sites, $k=4, \epsilon=0.05$) for the distribution $P(s)$ with $J=0.21, 0.22, 0.23, 0.235$ (from left to right), compared with theoretical curves (solid).

very well with Eq. (6) if $\sigma = \sigma_\infty(J)$ is used in that expression. Strong finite size effects, however, are present when $J > 0.235$.

For $\delta < \epsilon$, that is, $J_c - J < \epsilon/k$, the form assumed by σ_∞ is particularly simple, since $p(z) = C \epsilon^{-k} z^{k-1}$ in that interval (C is a numerical constant). Then,

$$\sigma_\infty = 1 - \frac{C}{\epsilon^{k+1}} \int_0^{\delta} z^{k-1} (\delta - z) dz = 1 - \frac{C}{k(k+1)} \left(\frac{\delta}{\epsilon} \right)^{k+1}, \quad (19)$$

the avalanche cutoff length.

Since $\delta \equiv 1 - kJ = k(J_c - J)$, we obtain, from Eqs. (8) and (10), the avalanche cutoff size and the average avalanche size

$$\begin{aligned} s_\epsilon &= \frac{2(k-1)(k+1)^2 \epsilon^{2(k+1)}}{C^2 k^{2k+1}} (J_c - J)^{-\nu}, \\ \bar{s} &= \frac{(k+1) \epsilon^{k+1}}{C k^k} (J_c - J)^{-\nu/2}, \end{aligned} \quad (20)$$

with the critical exponent

$$\nu = 2(k+1). \quad (21)$$

For example, with $k=4$ [which means $C=1/6$, see Eq. (14)] and $\epsilon=0.05$, the mean avalanche size is $\bar{s}=120$ already for $J=0.2375$. Curiously, this behavior is similar to the $\bar{s} \propto (J_c - J)^{-k}$ divergence found in the standard random-neighbor FF model [3].

E. The EFF model with noiseless couplings

It is instructive to compare the above behavior with that of a simpler EFF model [4] where the firing rule is the same, $E_i^*(t+1) = \eta$ [$0, \epsilon$], but the coupling between sites is

noiseless, $E_{rn}(t+1) = E_{rn}(t) + J$. Thus, $p_\infty(E)$ assumes the form of k rectangular bumps with $p(z_n) = \epsilon^{-1} \Theta(z_n) \Theta(\epsilon - z_n)$. In this *noiseless* EFF model, the branching rate, the cutoff size, and the average avalanche size are

$$\sigma_\infty = \begin{cases} 0 & \text{for } \delta > \epsilon \\ 1 - \delta/\epsilon & \text{for } 0 < \delta < \epsilon, \end{cases}$$

$$s_\xi = 2(k-1) \frac{\epsilon^2}{k^3} (J_c - J)^{-2}, \quad (22)$$

$$\bar{s} = \frac{\epsilon}{k} (J_c - J)^{-1}.$$

In contrast with the noisy model, large avalanches only occur when J is very close to J_c (see Fig. 2). Thus, the EFF model with noiseless couplings does not present an enlargement of the region where the system displays a critical behavior as observed in the noisy EFF model.

III. ON SOC DEFINITIONS

The idea of self-organized criticality present in the literature embodies two distinct properties. The term *critical* refers to the existence of power laws and to the absence of a characteristic scale in the response of the system to the driving mechanism of the dynamics; the term *self-organized* refers to the fact that there exists a parameter (σ_t), which controls the avalanching process, whose value is not fixed *a priori* as, for example, in standard percolation and branching processes. This parameter evolves in time, during a transient phase, toward a stationary value σ_∞ . Indeed, this time dependence should be written as $\sigma_t = \sigma(p_t(E))$, that is, σ_t is a functional of the distribution of states $p_t(E)$, that, in turn, evolves toward a statistically stationary distribution $p_\infty(E)$. So, $\sigma_\infty \equiv \sigma(p_\infty(E))$. If $\sigma_\infty = \sigma_c = 1$, the system is critical.

The evolution of $p_t(E)$ toward the steady state $p_\infty(E)$ is akin to the transient relaxation in equilibrium systems: any initial condition leads to the same stationary state, thus to the same value of σ_∞ . However, this robustness to initial conditions and external perturbations on $p(E)$ ("dynamical stability") should not be mistaken as parameter robustness ("structural stability"). This is a distinct characteristic claimed to be present on some SOC models (see, for instance, [1,15,16,18]). For a system to have "structural stable criticality," there would be a finite parameter range for which, after the transient, the system is critical. In this case, $\sigma_\infty(J) = \sigma_c$ for J belonging to some interval $[J_c, 1/k]$. We will call that kind of behavior *generic SOC*.

"Structural stability" is a relative concept which depends on the parameter space physically available for the system. For example, it is well known that the sandpile model is not critical in the presence of dissipation. The sandpile dissipation parameter corresponds to the quantity $\delta = 1 - kJ$ in our model [6,7]. The standard BTW model is by definition "tuned" into a critical state through the "imposition" of a conservation law. Although it could be argued that dissipation is not a natural feature of sandpiles, since sand does not disappear, the appearance of SOC in nature would sound much more natural if criticality could be observed over a

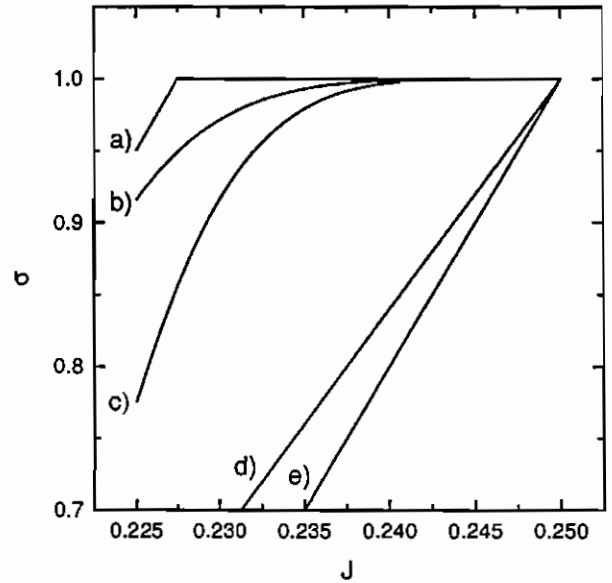


FIG. 4. (a) Generic self-organized criticality: the value of parameter σ_∞ is critical on a finite range of the system parameter J ; (b) $\epsilon = 0.0625$ and (c) $\epsilon = 0.05$, enlargement of the critical region (EFF model with noisy couplings, $k=4$): σ_∞ is almost constant near J_c ; (d) $\epsilon = 0.25 = 4 \times 0.0625$ and (e) $\epsilon = 0.2 = 4 \times 0.05$, standard critical behavior (EFF model with noiseless couplings): the coupling parameter J must be very close to 0.25 for obtaining $\sigma_\infty \approx \sigma_c$ due to the linear behavior of $\sigma_\infty(J)$. Note that, in the noiseless couplings case, ϵ refers to the amplitude of the noise received by the extremal site after discharge.

region of the parameter space, not only in a special point.

Generic self-organized criticality is depicted in curve (a) of Fig. 4. In this case, there is a finite range of J values for which σ_∞ assumes the critical value $\sigma_c = 1$. In this figure, curves (d) and (e) represent the behavior observed in the BTW model and also in the noiseless EFF model examined above, for which the system is critical only for a special value of the parameter J . However, there is a third possibility. Curves (b) and (c) represent the behavior of $\sigma(J)$ given by Eq. (18) for the EFF model with noisy couplings: although the system is critical only at $J = J_c$, the system is "almost critical" over a large parameter region. This behavior has also been observed in the standard random-neighbor versions of FF and OFC models [3]. The importance of this characterization is that several models in the SOC literature, previously seen as having true generic criticality, are now recognized as having only an almost critical behavior as discussed above.

A model which apparently presents generic SOC behavior in coupling space is the two-dimensional (2D) OFC model [16,17,19]. Also the standard Feder and Feder model [8] is claimed to be critical for $J < J_c$ [18,19]. Looking at the behavior of the models studied so far, we make the following conjecture: a necessary condition for a lattice model to present a generic SOC behavior is that its corresponding random-neighbor version already presents an enlarged critical region in the sense discussed above. This could be tested by comparing the 2D versions of the EFF and noiseless EFF models studied above.

In conclusion, we found that some systems that display SOC, although being critical only for a single value for J , are

almost critical in a large region of the parameter space. This almost critical behavior is difficult to distinguish, in practice, from true generic SOC behavior: both in numerical simulations (huge lattices would have to be used) and in nature (due to limitations in the data) power laws can only be measured over some scale decades [9]. So, in order to explain the ubiquity of scale invariance in nature, having a true generic SOC or only presenting an enlarged region where the system is almost critical are, as far as one can measure, identical.

IV. CONCLUSIONS

A class of extremal stick-slip models has been introduced and studied in the $N \rightarrow \infty$ limit. We showed that noise in the couplings of the EFF model changes the exponent that controls the amplitude of the critical region from $\nu=2$ to $\nu = 2(k+1)$. This enlargement of the region where the system displays a critical behavior is similar to that found in the standard random-neighbor OFC and FF models [2–4]. As in other models, the true critical state occurs only for one point in parameter space [2,3,6,7,14], but in practice that fact can

hardly be noticed, and the model displays the typical features of generic SOC.

In future work we hope to determine the minimal ingredients for producing the enlargement of the critical region in the models examined in the SOC literature. We will also present results for the two-dimensional case and compare with the standard OFC and FF models. The simple mechanism devised in this work suggests that, if true generic criticality is not easy to obtain in the space of possible models, this quasicritical behavior certainly is. Thus, for explaining the robustness of approximate scale invariance in nature, this mechanism seems to be more “generic” than generic criticality.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank P. Bak, S. R. A. Salinas, and Suani T. R. Pinho for helpful discussions, N. Dhar for remarks about the SOC concept, and K. Christensen, R. Dickman, J. F. Fontanari, Nestor Caticha, D. Alves, and R. Vicente for commenting on the manuscript. O.K. thanks FAPESP for financial support.

-
- [1] P. Bak, *How Nature Works* (Copernicus, New York, 1996).
 - [2] M-L. Chabanol and V. Hakim, *Phys. Rev. E* **56**, R2343 (1997).
 - [3] H-M. Bröker and P. Grassberger, *Phys. Rev. E* **56**, 3944 (1997).
 - [4] O. Kinouchi, S. T. R. Pinho, and C. P. C. Prado, *Phys. Rev. E* **58**, 3997 (1998).
 - [5] S. Lise and H. J. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2326 (1996).
 - [6] A. Vespignani and S. Zapperi, *Phys. Rev. E* **57**, 6345 (1998).
 - [7] R. Dickman, A. Vespignani, and S. Zapperi, *Phys. Rev. E* **57**, 5095 (1998).
 - [8] H. Feder and J. Feder, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2669 (1991).
 - [9] D. Avnir, O. Biham, D. Lidar, and O. Malcai, *Science* **279**, 39 (1998).
 - [10] P. Bak and K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4083 (1993).
 - [11] H. Flyvbjerg, K. Sneppen, and P. Bak, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4087 (1993).
 - [12] P. Grassberger, *Phys. Lett. A* **200**, 277 (1995).
 - [13] This special choice for the threshold has no influence on the results, since E_{th} only defines the scale of the E axis.
 - [14] K. Dahmen, D. Ertas, and Y. Ben-Zion, *Phys. Rev. E* **58**, 1494 (1998).
 - [15] G. Grinstein, in *Scale Invariance, Interfaces and Criticality*, Vol. 344 of *NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics*, edited by A. McKane *et al.* (Plenum Press, New York, 1995).
 - [16] Z. Olami, H. J. F. Feder, and K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992).
 - [17] P. Grassberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994).
 - [18] S. Bottani and B. Delamotte, e-print cond-mat/9607069.
 - [19] C. J. Pérez, A. Corral, A. Díaz-Guilera, K. Christensen, and A. Arenas, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 1111 (1996).

Self-Organized Criticality in the Olami-Feder-Christensen model

Josué X. de Carvalho* and Carmen P. C. Prado[†]

Instituto de Física
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 66318
05315-970, São Paulo, SP, Brazil

August 18, 1999

Abstract

A system is in a self-organized critical state if the distribution of some measured events (avalanche sizes, for instance) obeys a power law for as many decades as it is possible to calculate or measure. The finite-size scaling of this distribution function with the lattice size is usually enough to assume that any cut off will disappear as the lattice size goes to infinity. This approach, however, can lead to misleading conclusions. In this work we analyze the behavior of the branching rate σ of the events to establish whether a system is in a critical state. We apply this method to the Olami-Feder-Christensen model to obtain evidences that, in contrast to previous results, the model is critical in the conservative regime only.

PACs number(s): 64.60.L, 05.40, 05.70.L

Keywords: SOC, Random Processes, and Non-equilibrium Thermodynamics.

*E-mail:josue@if.usp.br

[†]E-mail:prado@if.usp.br

In spite of many efforts and more than a decade of studies, the presence of self-organized critical behavior in nature (and in some computer models) is a matter of controversy. The concept of self-organized criticality (SOC) was originally proposed by Bak, Tang and Wiesenfeld to describe the appearance of scale invariance in nature. The idea was presented through the study of the behavior of avalanches in a sandpile ‘toy’ model [1]. This simple model displayed the fundamental properties associated with self-organized criticality. Under a slow driven perturbation the system evolves to a critical state, with no characteristic time and length scales. Once in this state, the response of the system to the slow perturbation has no typical length, and even a small perturbation (as the addition of a single grain of sand) can start a big avalanche.

Avalanching behavior as well as scale invariance have been experimentally observed in a variety of situations in nature, ranging from such different phenomena as earthquakes[2] or magnetic systems (the Barkhausen effect)[3], to biological problems such as evolution of species[4] or lung inflation[5], just to give some examples. Although by now the initial attempt to explain the appearance of all linear scaling in nature through the concept of SOC may seem a little naive, the ubiquity of its presence is still a strong suggestion that some kind of ‘robust’ and general mechanism may be behind many of these phenomena. The concept of SOC has become polemic, and, up to now, there is no general agreement about the ingredients necessary to create the self-organized critical state. Particularly, there are discussions about the need of some kind of local conservation as an essential ingredient of the system to display SOC. The existence of SOC in non-conservative models would be highly desirable in this context, since, in practice, some kind of dissipation is always present in nature.

One of the best successful applications of the ideas of SOC for non-conservative systems are the investigations of the Olami-Feder-Christensen on a model for the dynamic of earthquakes (hereafter called OFC model[6]). In this model there is a parameter α that controls the level of conservation. Based on strong numerical evidences [7] it has been taken as an example of a system that has self-organized criticality in the non-conservative regime, that is, for $\alpha < 0.25$.

In this paper we revisited the OFC model, but with a different technique. Instead of looking for power laws in distribution functions of avalanche sizes versus lattice sizes, we looked at the behavior of the average branching rate,

both in the conservative and in the non-conservative regime. In contrast to previous evidences, we concluded that the OFC model is critical only for $\alpha \approx 0.25$ (that is, in the conservative regime). For values of α close to but smaller than 0.25, this model could be classified as ‘almost critical’. That means that, although being critical only for $\alpha = 0.25$, for all practical purposes the system behaves as if it were critical for a wide range of values of α , with well-defined power laws over many decades.

In a recent paper, Kinouchi and Prado[8] showed that some models that exhibit numerical evidences of self-organized criticality in a wide range of the coupling parameters were indeed what they called ‘almost critical’. Through the analysis of the branching rate σ as a function of the dissipation parameter α , they have shown that, although those systems are critical only for $\alpha = \alpha_c$, there are a rather large region around this point where approximate scale invariance holds. They called this behavior ‘almost critical’ since, in practice, it can hardly be distinguished from ‘true’ criticality based on the usual numerical evidences only. By usual numerical evidences we mean power-law behavior and scale invariance in distribution functions (the avalanche size distribution function, for instance). They also suggested that the analysis of the branching rate σ (where $0 \leq \sigma \leq 1$) as a function of the coupling constant α could be a more efficient way to determine whether a model is critical or not. To look for power-laws in lattices of increasing sizes is not a very efficient way to determine if a system is in fact critical, and this approach has already lead to mistakes[9]. If the analyzed lattices are not big enough, the distribution functions of avalanche sizes $F(s)$ are power laws, even if the model does not display SOC. Because the computational cost of simulating the OFC model (and many others) in big lattices is prohibitive and there is no way to know, beforehand, if the considered lattices are big enough to show the real characteristics of the dynamical behavior of the system, such approach is hardly conclusive.

It has been shown that some SOC models, with no spatial correlations and in the thermodynamic limit, can be mapped into a branching process[11]. A branching process is a Markovian process and can be characterized by a sequence of random variables $\{P(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $n \in N$, where $P(n)$ represents the total number of individuals of the n^{th} generation. Consider a group of individuals (ancestors) that can replicate, giving birth to some descendants, and let p_i ($i = 0, 1, \dots, \infty$) be the probability of an ancestor to give birth to i descendants. Each of its descendant in turn can give birth to other descendants

with the same probability p_i so that p_i does not depend on the previous generations and on the number of descendants of other individuals in the same generation. The branching rate, $\sigma = \sum_{i=0} i p_i$, is then defined as the average number of descendants per ancestor. It is a well known result that, in order to have a critical branching process, one must have $\sigma = 1$. Then the total number of descendants $P(n)$ in each generation (the size of the ‘colony’) behaves as a power law $P(n) \propto n^{-3/2}$ [10]. On the basis of these considerations about the branching rate, and using different approaches, several authors [14] were able to show that the random version of the OFC model was critical in the conservative regime only.

Therefore, we decided to use this same approach to revisit the original Olami-Feder-Christensen model[6]. This coupled-map lattice model is inspired on the spring block model developed by Burridge and Knopoff [12]. Each site (i, j) of a square lattice is associated with a continuous ‘energy’ F_{ij} , initially set to a random value in the interval $(0, F_c)$. The system is driven by a global perturbation that increases the energy of all sites uniformly and simultaneously. This process goes on until eventually one site becomes supercritical, that is, $F_{ij} \geq F_c$. This site becomes unstable and the system then relaxes according to the rules

$$F_{ij} \rightarrow 0,$$

and

$$F_{nn} \rightarrow F_{nn} + \alpha F_{ij},$$

where F_{nn} are the four nearest neighbors of site (i, j) . The parameter α controls the level of conservation of the model. If $\alpha = 0.25$, the system is said to be ‘conservative’, that is, all the energy (or strength) lost by the site (i, j) is distributed to its neighbors. This relaxation rule can possibly produce a chain reaction that only ends when all sites are stable again ($F_{ij} < F_c, \forall i, j$). As in the original work, we assume open boundaries. Also, as shown in reference[6], one must have $\alpha < 0.25$ to mimic the dynamic of a real earthquake (some ‘energy’ or ‘strength’ is always lost to the upper moving tectonic plate). This model is believed to display self-organized criticality even when the dynamic is non-conservative ($0 < \alpha < 0.25$). This is a result not yet fully understood, and it has been a matter of controversy the value of the lower bound for α (if it exists), under which the system has a localized

behavior (note that we know that $\alpha = 0 \Rightarrow \sigma = 0$, and, for $\alpha = 0.25$, we should have $\sigma = 1$). Because it is a model defined on a lattice, analytical approaches are difficult and most of the results have been obtained from computer simulations.

As the existence of a lattice introduces spatial correlations, it is not possible to define the probability p_i analytically. We estimate the branching rate σ numerically ($\sigma = \langle n_d \rangle$, where $\langle n_d \rangle$ is the average number of supercritical sites (descendants) originated by an unstable site). Just for comparison, we also study the random neighbor version of the OFC model (R-OFC)[13], for which there are some analytical results[14] showing that the model is critical for $\alpha = 0.25$ only.

Our results are presented in Tables 1 and 2 and in Figures 1 to 3. We checked the dependence of σ with the lattice size (see Figures 2 and 3), and a special care has been taken to guarantee that the long transients were eliminated. We also checked the effects of the boundaries. We considered open boundaries to calculate σ , taking into account that the average number of descendants for a boundary site is the number of unstable sites it gives birth divided by the real number of neighbors of the ‘ancestor’ site (3 for a border site and 2 for a corner site). In most of the cases, we first generated different stationary configurations from different random initial configurations. The errors were estimated by averaging results obtained for different initial configurations of the lattice (the errors so obtained are usually bigger than the ones obtained by averaging σ during many generations, except when the system is conservative). The number of iterations needed to reach the stationary state is very big, and grows with the lattice size. In the OFC model the transient is bigger for smaller values of α , while in the R-OFC the transient grows as α grows, making it impossible to simulate the case $\alpha = 0.25$ (the point in the graph in this case was obtained from theoretical results).

Once we were sure to have a stationary configuration, we analyzed the statistics of 100 000 to 5 000 000 avalanches in the stationary state, to obtain (a) the average avalanche size $\langle s \rangle$, (b) the branching rate σ (weighting border sites), (c) the branching rate in the bulk σ_b (taking into account only sites in the bulk), and (d) the average number of generations in an avalanching process $\langle n \rangle$. Table 1 shows the results for the OFC model and Table 2 shows the results for the R-OFC model.

There are no relevant differences between the behaviors of the OFC and the R-OFC models. For both of them, $\sigma(\alpha) \rightarrow 1$ smoothly from below as

| α | σ | σ_b | $\langle s \rangle$ | L_{max} |
|----------|--------------------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0.15 | 0.7052 ± 0.0002 | 0.7151 ± 0.0002 | 3.40 ± 0.02 | 100 |
| 0.18 | 0.8318 ± 0.0002 | 0.8421 ± 0.0002 | 5.87 ± 0.05 | 100 |
| 0.21 | 0.9125 ± 0.0002 | 0.9205 ± 0.0002 | 11.0 ± 0.6 | 100 |
| 0.22 | 0.9546 ± 0.0009 | 0.9581 ± 0.0009 | 21.4 ± 0.4 | 200 |
| 0.23 | 0.982 ± 0.001 | 0.983 ± 0.001 | 53 ± 3 | 400 |
| 0.24 | 0.9938 ± 0.0004 | 0.9946 ± 0.0004 | 148 ± 9 | 400 |
| 0.25 | 1.0000003 ± 0.000009 | 1.000068 ± 0.000009 | 39839 ± 68 | 400 |

Table 1:

| α | σ | σ_b | $\langle s \rangle$ | L_{max} |
|----------|-------------------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0.15 | 0.6002 ± 0.0002 | 0.6002 ± 0.0003 | 2.474 ± 0.003 | 100 |
| 0.18 | 0.7145 ± 0.0002 | 0.7145 ± 0.0003 | 3.438 ± 0.003 | 100 |
| 0.21 | 0.8648 ± 0.0002 | 0.8648 ± 0.0002 | 7.050 ± 0.08 | 100 |
| 0.22 | 0.9312 ± 0.0002 | 0.9313 ± 0.0003 | 14.51 ± 0.05 | 800 |
| 0.23 | 0.99184 ± 0.00001 | 0.99184 ± 0.00001 | 99.7 ± 0.1 | 400 |
| 0.24 | 0.9935 ± 0.0002 | 0.9935 ± 0.0002 | 97 ± 2 | 200 |
| 0.25 | 0.982572 ± 0.000005 | 0.98255 ± 0.000003 | 30.348 ± 0.008 | 50 |

Table 2:

$\alpha \rightarrow 0.25$, with no sign of any kind of discontinuity in its behavior. Also, as can be seen in Figure 1, $\sigma_{OFC} < \sigma_{R-OFC}$, for $0.22 \leq \alpha < 0.25$. From theoretical considerations[14], we know that $\sigma_{R-OFC} < 1$ for $\alpha < 0.25$.

In Figures 2 and 3 we present the dependence of σ with the lattice size for the OFC and the R-OFC models. These figures show that σ grows almost linearly with L with no suggestion that $\sigma \rightarrow 1$ as $1/L \rightarrow 0$. The behavior of the system seems to be qualitatively different only if $\alpha = 0.25$ (conservative case).

We also checked the dependence of σ with the generation n within an avalanching process. We see that $\sigma(n)$ grows as $n \rightarrow \infty$, and converges relatively fast to an asymptotic value. None of our conclusions were affected if we considered these asymptotic values of $\sigma(n)$ instead of the average value.

The existence of SOC in the non-conservative regime of the OFC model has been accepted based mainly on numerical results of a work done by Middleton and Tang [7] in 1995. In this paper, the authors showed how the natural tendency of this model to synchronize is destroyed by inhomogeneities introduced by the asymmetries of the boundaries, creating long-range correlations and leading to a power-law behavior in the distribution of avalanche sizes. The apparent contradiction between this result and ours can be understood from the conclusions of Kinouchi and Prado [8]. In this paper, the study of two different models with an analytical solution (the extremal Feder and Feder model, EFF, with and without noise), shows that the effect of noise is to enlarge the region where the system displays an apparent critical behavior, leading to what was called ‘almost criticality’. The EFF model with noise displays a power law behavior (although it is not critical). In contrast, in the noiseless model, large avalanches occur in the conservative limit only. This also seems to be the case of the OFC model. The randomness introduced by the asymmetries of the boundaries creates correlations that enlarge the critical region leading to an ‘almost critical’ behavior, although it is not enough to ensure true criticality.

In conclusion, we showed that the analysis of $\sigma(\alpha)$ is a complementary approach to define if a model is or is not critical. This new method revealed that the behavior of the OFC model is qualitatively identical to the behavior of the R-OFC. In contrast to previous results, the Olami-Feder-Christensen model seems to be critical only in the conservative regime, that is for $\alpha = 0.25$. Both models are ‘almost’ critical in the sense defined in reference [8]: $\sigma \approx 1$ when $\alpha \approx 0.25$, leading to a power law behavior of the avalanche

sizes for many decades, and making it (almost) impossible to distinguish this behavior from 'true' self-organized criticality based on the observation of power-laws and finite-size scaling fits.

The authors acknowledge Dr. Osame Kinouchi for helpful discussions and suggestions. J. X. Carvalho acknowledges the Brazilian agency CAPES for financial support.

References

- [1] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59** 381 (1987); *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988).
- [2] G. Gutenberg and C. F. Richter, *Ann. Geophys. (C.N.R.S.)* **9**, 1 (1956); A. Sornette and D. Sornette, *Europhys. Lett.* **9**, 197 (1989); P. Bak and C. Tang, *J. Geophys. Res.* **94**, 15635 (1989); K. Ito and M. Matsuzaki, *J. Geophys. Res.* **95**, 6853 (1990).
- [3] G. Durin, G. Bertotti, and A. Magni, *Fractals* **3**, 351 (1995); D. Spasojević, S. Bukvić, S. Milosević, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **54**, 2531 (1996), and references therein.
- [4] P. Bak and K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4083 (1993).
- [5] B. Suki, A.-L. Barabasi, Z. Hantos, F. Petak, and H. E. Stanley, *Nature (London)* **368**, 615 (1994).
- [6] Z. Olami, H. J. S. Feder, and K. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992); K. Christensen and Z. Olami, *Phys. Rev. A* **46**, 1829 (1992).
- [7] J. E. S. Socolar, G. Grinstein and C. Jayaprakash, *Phys. Rev. E* **47**, 2366 (1993); P. Grassberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994); A. A. Middleton and C. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 742 (1995).
- [8] O. Kinouchi and C. P. C. Prado, *Phys. Rev. E* **59**, 4964 (1999).
- [9] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado and O. Kinouchi, *Physica A* **257**, 488 (1998).

- [10] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes* (Dover, New York, 1989).
- [11] S. Zapperi, K. B. Lauritsen and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **75**, 4071 (1995).
- [12] R. Burridge and L. Knopoff, Bull. Seismol. Soc. Am. **57**, 341 (1967).
- [13] The R-OFC model follows the same dynamical rules of the OFC model, except for the way energy is distributed among the sites. When a site (i, j) becomes supercritical, instead of spreading its energy to the (four) nearest neighbors ($F_{nn} \rightarrow F_{nn} + \alpha F_{ij}$), it spreads energy to sites chosen at random. Each time a site relaxes, new 'random neighbors' are chosen, in a process that has been called annealed randomness in literature. Such random versions have been constructed and studied because they can be thought as numerical simulations of mean-field approaches of lattice models. For more details about the R-OFC model, see, for instance, the articles of reference[14] below.
- [14] H.-M. Boker e P. Grassberger, Phys. Rev. E **56**, 3944 (1997); M. L. Chabanol and V. Hakim, Phys. Rev. E **56**, R2343 (1997); O. Kinouchi, S. T. R. Pinho and C. P. C. Prado, Phys. Rev. E **58**, 3997 (1998).

FIGURE CAPTIONS

Table 1: Values of σ , σ_b and $\langle s \rangle$ for different values of the conservative parameter α in the Olami-Feder-Christensen (OFC) model. Results presented are those obtained with the biggest lattice (L_{max}) we were able to simulate. They represent the average of results obtained for different initial configurations and the errors are the errors associated with those averages.

Table 2: Values of σ , σ_b and $\langle s \rangle$ for different values of the conservative parameter α in the random version of the Olami-Feder-Christensen (R-OFC) model. Results presented are those obtained with the biggest lattice (L_{max}) we were able to simulate. They represent the average of results obtained for different initial configurations and the errors are the errors associated with those averages.

Figure 1: Branching rate as a function of the conservation parameter α . Squares refer to the Olami-Feder-Christensen model (OFC) and circles to the Random version of the OFC model (R-OFC). In all cases the lattice size is $L = 100$.

Figure 2: Branching rate as a function of the inverse of lattice size ($1/L$) for the Random version of Olami-Feder-Christensen model. Different curves refer to different levels of conservation ($\alpha = 0.22, 0.23$ and 0.24). We can see that even for $\alpha = 0.24$, if we let $L \rightarrow \infty$, the branching rate σ tends to a value smaller than 1. The system shows a qualitatively different behavior only if $\alpha = 0.25$.

Figure 3: Branching rate as a function of the inverse of lattice size ($1/L$) for the Olami-Feder-Christensen model. Different curves refer to different levels of conservation ($\alpha = 0.23, 0.24$ and 0.25). We can see that even for $\alpha = 0.24$, if we let $L \rightarrow \infty$, the branching rate σ tends to a value smaller than 1. Note that in the conservative case ($\alpha = 0.25$) σ is almost 1.00 even to very small lattices.

Fig. 1 - Carvalho and Prado

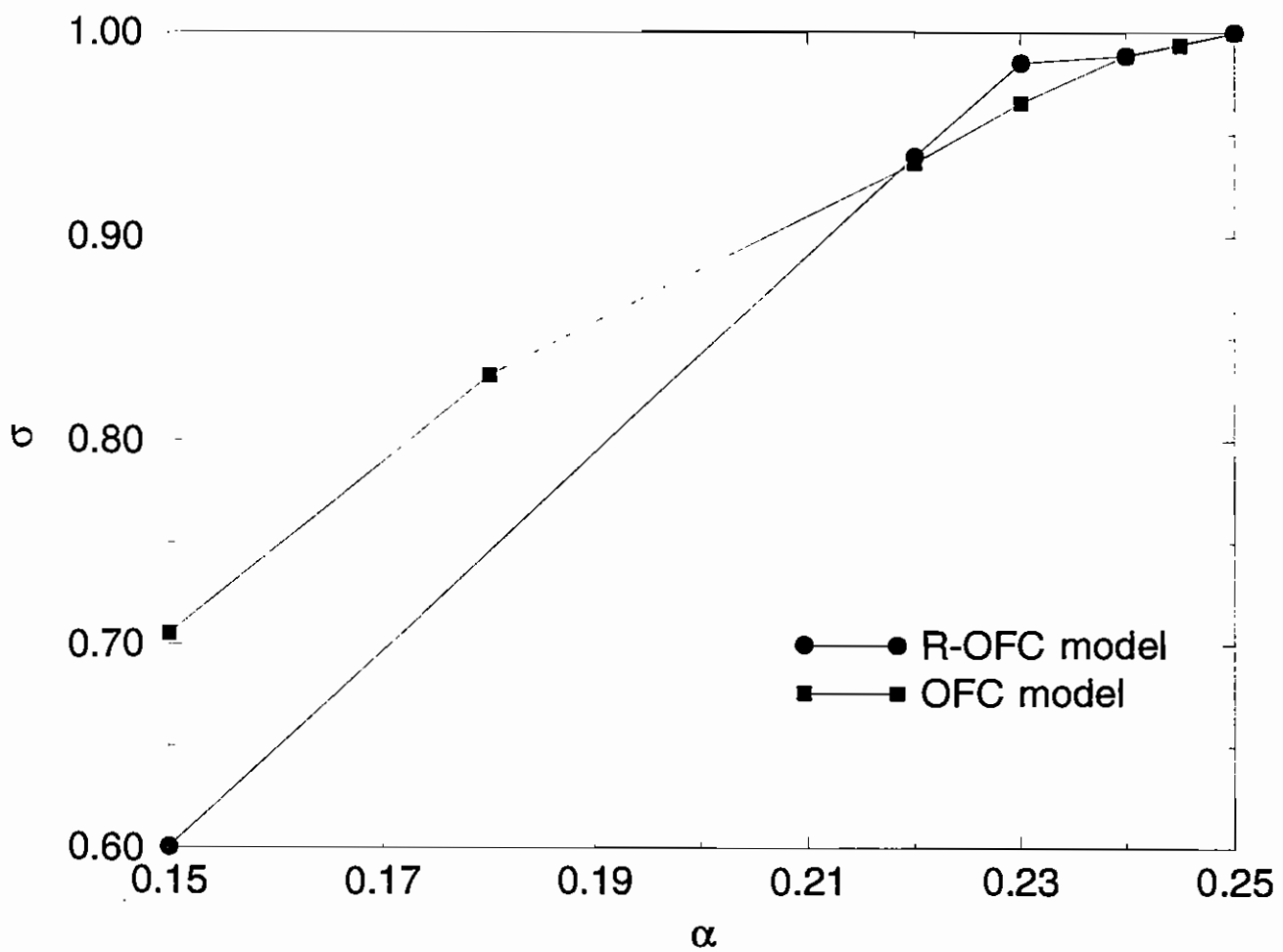


Fig. 2 - Carvalho and Prado

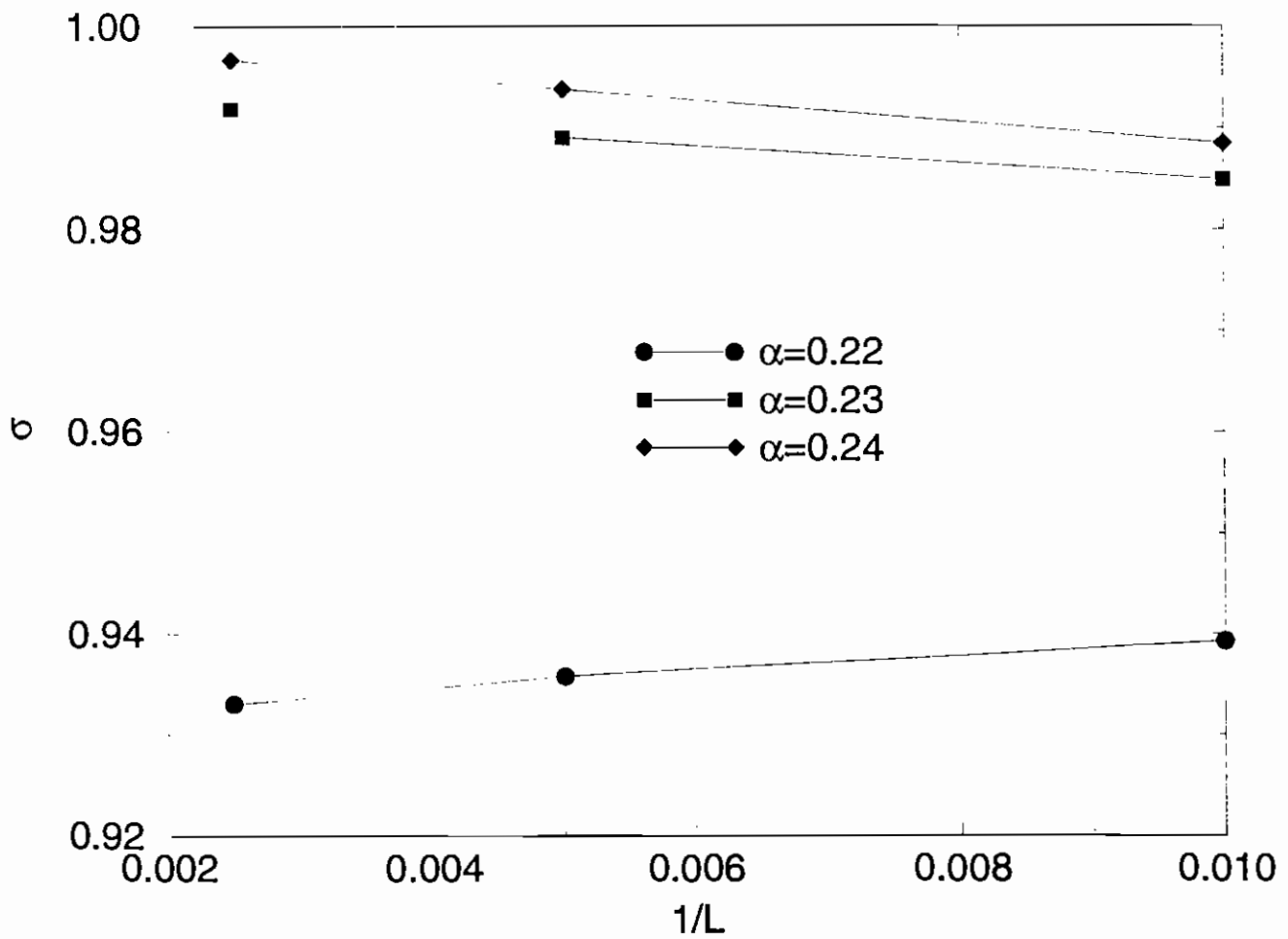


Fig. 3 - Carvalho and Prado

