

JOSÉ JAIME DA CRUZ

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE OLEODUTOS EM EQUILÍBRIO
ESTÁTICO UTILIZANDO CONTROLE ÓTIMO**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Professor Livre Docente junto
ao Departamento de Engenharia de Tele-
comunicações e Controle.



Faint blue stamp or text, possibly a library or institutional mark.

Faint blue stamp or text, possibly a library or institutional mark.

São Paulo
2000

*Ao Zeca, tio, irmão e,
agora,
também um pouco pai.*

AGRADECIMENTOS

O apoio do CNPq (Proc. No. 304071/85-4) e da Fapesp (Proc. No. 97/04668-1) foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Sou grato aos meus queridos amigos Jairson de Lima e José Augusto Penteado Aranha que, além de me darem o imenso privilégio de suas amizades, foram responsáveis pela minha compreensão dos problemas aqui tratados. Sem a ajuda e o apoio deles, eu jamais teria me atrevido por estes caminhos.

Agradeço à Escola Politécnica da USP e, em especial, aos muitos amigos que ela me deu.

Agradeço também ao IPT e à Petrobrás pelas oportunidades de pesquisa que geraram, nos anos 80, as bases para este trabalho.

Sou grato, sempre, à Da. Josefina e ao S. Antonio que, além da vida, me deram todo o resto.

Por fim, registro minha gratidão à Mima e à Juju pelo carinho, incentivo e paciência (com ressalvas, no caso da Juju). Sem elas, acho que eu não teria mais gás para aventuras como esta.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Introdução	1
1.2	Revisão Bibliográfica	6
1.3	Contribuições	9
1.4	Notação e Base de Adimensionalização	9
1.5	Estrutura do Texto	10
2	Modelo Matemático Básico do Oleoduto	12
2.1	Hipóteses Básicas	13
2.2	Modelagem da Força Hidrostática	14
2.3	Equações de Equilíbrio do Oleoduto Submerso	16
2.4	Um Problema Com Mesma Geometria	19
3	O Problema do Oleoduto no Fundo do Oceano	22
3.1	Definição do Problema	23
3.2	Equações de Equilíbrio	24
3.3	Um Problema de Controle Ótimo	29
3.4	Discretização do Problema de Controle Ótimo	31
4	O Problema do Abandono e Resgate Laterais	38

4.1	Definição do Problema	38
4.2	Equações de Equilíbrio	40
4.3	Um Problema de Controle Ótimo	44
4.4	Cálculo das Derivadas Parciais	47
4.4.1	Um Problema Geral	47
4.4.2	Particularizações Para os Casos de Interesse	49
5	Resultados Numéricos	55
5.1	Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano	55
5.2	Abandono e Resgate Laterais	58
6	Conclusões	67

Lista de Figuras

1.1	Esquema do oleoduto apoiado no fundo do oceano.	3
1.2	Esquema das operações de abandono e resgate laterais.	4
2.1	Elemento Δs para cálculo da força hidrostática.	14
2.2	Elemento Δs do oleoduto em equilíbrio.	17
3.1	Esquema do oleoduto apoiado no fundo do oceano.	23
3.2	Convenções adotadas para as forças cortante e normal.	25
4.1	Definição do ângulo φ_i	41
5.1	Solo regular - Linha elástica (linha contínua) e perfil do solo (linha pontilhada).	60
5.2	Solo regular - Reação do solo.	60
5.3	Solo regular - Força cortante.	61
5.4	Solo regular - Momento fletor.	61
5.5	Solo regular - Ângulo de inclinação da linha elástica.	62
5.6	Solo irregular - Linha elástica (linha contínua) e perfil do solo (linha pontilhada).	62
5.7	Solo irregular - Reação do solo.	63
5.8	Solo irregular - Força cortante.	63
5.9	Solo irregular - Momento fletor.	64
5.10	Solo irregular - Ângulo de inclinação da linha elástica.	64

5.11	Abandono/resgate lateral - Linha elástica.	65
5.12	Abandono/resgate lateral - Ângulo de inclinação da linha elástica.	65
5.13	Abandono/resgate lateral - Forças internas F'_x (linha contínua) e F'_y (linha tracejada).	66
5.14	Abandono/resgate lateral - Momento fletor.	66

Lista de Tabelas

5.1	POAFO - Valores numéricos dos dados do problema.	55
5.2	PARL - Valores numéricos dos dados do problema.	58
5.3	PARL - Solução obtida.	59

Lista de Símbolos

- A área da seção transversal do oleoduto
 matriz do modelo de estados em tempo contínuo
- A matriz de restrições de igualdade do PPQ
- b vetor do modelo de estados em tempo contínuo
- c vetor do modelo de estados em tempo discreto
- C curvatura da linha elástica
- D_M profundidade do mar
- EJ rigidez flexional do oleoduto
- f integrando do funcional \mathcal{J}
 modelo de estados do PARL
- \mathcal{F} modelo de estados do problema geral
- \vec{F}' força interna para o problema equivalente no ar
- \vec{F}_H força hidrostática
- F_x componente horizontal da força interna
- F_y componente vertical da força interna
- F'_x componente horizontal da força interna para o problema equivalente no ar
- F'_y componente vertical da força interna para o problema equivalente no ar
- g parcela do funcional \mathcal{J} associada à condição terminal
- h profundidade de um ponto da linha elástica
- H função degrau de Heaviside
- \mathcal{H} hamiltoniana do problema geral
- \vec{H} força hidrostática numa seção transversal do oleoduto

J	funcional a minimizar
\mathcal{J}	funcional do problema geral
J^*	valor mínimo do funcional
L	comprimento do oleoduto (POAFO) comprimento suspenso do oleoduto (PARL)
\hat{L}_0	comprimento característico do oleoduto
l_i	distância do ponto de amarração do cabo ao guindaste i
\bar{l}_i	distância de um ponto genérico do oleoduto ao guindaste i
l_{di}	comprimento do cabo i
M	momento fletor
n	número de elementos da discretização
\vec{n}	vetor normal à linha elástica
n_c	número de cabos
P	matriz da parcela quadrática do funcional J
POAFO	problema do oleoduto apoiado no fundo do oceano
PPQ	problema de programação quadrática
PARL	problema do abandono e resgate laterais
q	vetor da parcela linear do funcional J
Q'	força cortante para o problema equivalente no ar
R	reação do solo
R_j	valor discreto da reação do solo
s	coordenada de comprimento ao longo do oleoduto
s_j	valor discreto da coordenada de comprimento ao longo do oleoduto
\vec{t}	vetor tangente à linha elástica
\mathcal{T}	matriz de transformação de ξ em Y
T'	força normal para o problema equivalente no ar
T_i	tensão no cabo i
T_u	partição de T associada a u
T_0	partição de T associada a $\theta(0)$ e $y(0)$

u	variável de controle
u_j	valor discreto da variável de controle
\hat{V}_0	comprimento característico dos deslocamentos na vertical
\vec{w}_0	força hidrostática por unidade de comprimento do oleoduto
x	abscissa da linha elástica
X	vetor de estados
x_{di}	abscissa do guindaste i
X_0	estado inicial do problema geral
y	ordenada da linha elástica
Y	vetor de ordenadas da linha elástica
y_{di}	ordenada do guindaste i
y_s	ordenada do perfil do solo
Y_s	vetor de ordenadas do perfil do solo
β	constante adimensional
γ_a	peso específico da água
γ_{eq}	peso por unidade de comprimento do oleoduto submerso
γ_t	peso por unidade de comprimento do oleoduto
Γ	matriz do modelo de estados em tempo discreto
δ	delta de Dirac
$\Delta \vec{E}$	empuxo resultante sobre o elemento Δs
Δs	elemento de comprimento do oleoduto
θ	ângulo de inclinação da linha elástica
λ	vetor de multiplicadores de Lagrange do problema geral
ν	dimensão do vetor de estados do problema geral
ξ	vetor de incógnitas
σ_i	ponto de amarração do cabo i ao oleoduto
φ_i	ângulo entre a direção do cabo i e a horizontal
Φ	matriz de transição de estados em tempo discreto

Nota: Convencionase que as variáveis acompanhadas de acento circunflexo são expressas em forma dimensional. A ausência do acento denota a forma adimensionalizada com relação a uma base definida por valores característicos introduzidos ao longo do texto.

RESUMO

Tomando por base uma visão de controle ótimo, apresenta-se uma nova abordagem para a determinação da configuração de equilíbrio estático de oleodutos apoiados no fundo do oceano e durante as operações de abandono e resgate laterais. O caráter unilateral dos vínculos representados pelo solo e pelos cabos, respectivamente, é o aspecto comum a ambos os problemas que permite que a eles seja dado um tratamento unificado. O ponto-chave do trabalho consiste em reescrever tais vínculos, originalmente expressos por meio de desigualdades, na forma de funcionais a minimizar. A representação da configuração de equilíbrio estático do oleoduto na forma de equações de estado com condições no contorno χ permite encarar os problemas como sendo de controle ótimo. No caso do oleoduto apoiado no fundo do oceano, as equações de estado podem ser linearizadas e, como o funcional a minimizar é quadrático, a discretização do modelo conduz a um problema de programação quadrática. A solução numérica deste problema pode então ser obtida com facilidade. No caso do abandono e resgate laterais, em razão da possibilidade de ocorrência de grandes deslocamentos, as equações de estado são não lineares. Neste caso, o problema se exprime diretamente na forma de um problema de programação não linear em que as equações de estado representam efetivamente restrições sobre as variáveis ao longo de todo o comprimento suspenso do oleoduto. A simplicidade de formulação e de resolução dos problemas tratados sob a ótica de controle ótimo deve ser enfatizada.

ABSTRACT

An optimal control point of view is taken to compute the static equilibrium configuration of pipelines laying on the sea floor and during the lateral abandon/recovery operation. The unilateral character of the constraints imposed by the sea floor and by the cables, respectively, is the common feature to both problems which permits an unified treatment. These constraints, originally expressed as inequalities, are rewritten in the form of functionals to be minimized. This is the key point of the work. The use of state equations subject to a set of boundary conditions in order to represent the static equilibrium configuration of the structure allows the problem to be viewed as an optimal control one. In the case of the pipeline laying on the sea floor, the vertical displacements are assumed small and the state equations can be linearized. Since the functional is quadratic, the discretization of the model leads to a quadratic programming problem whose numerical solution can be easily obtained. In the case of the pipeline lateral abandon/recovery, as a consequence of the possible occurrence of large vertical displacements, the state equations are nonlinear. The problem is expressed directly in the form of a nonlinear programming problem where the state equations represent constraints on the variables along the free span of the pipeline. The simplicity of both the formulation and the solution of the problems under the proposed optimal control approach must be emphasized.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Nos tempos atuais, grande parte do petróleo consumido no mundo provém de poços situados no oceano. A operação desses poços envolve a utilização de intrincadas redes de oleodutos localizadas no fundo do mar. Dentre os inúmeros problemas associados aos oleodutos marítimos, dois serão considerados neste trabalho. O primeiro deles se refere à determinação da configuração de equilíbrio estático de oleodutos apoiados sobre o fundo do mar. O segundo problema a ser tratado aqui diz respeito à obtenção da configuração de equilíbrio de oleodutos durante as operações de abandono e resgate laterais.

A solução desses problemas não é trivial utilizando-se as ferramentas clássicas de análise de estruturas. Em ambos há restrições geométricas sobre a estrutura e o carregamento é desconhecido, ao contrário do que ocorre em outros problemas, nos quais a carga sobre a estrutura é conhecida e se deseja determinar a sua geometria. O objetivo principal deste trabalho é mostrar que um enfoque baseado na teoria de controle ótimo pode ser útil para a resolução de ambos os problemas.

Para um oleoduto apoiado no fundo do oceano, conforme as condições locais relativas à corrente marítima e ao relevo do fundo do mar, podem ser induzidas vibrações no plano vertical [17]. Dependendo de sua magnitude e frequência, essas vibrações podem provocar a ruptura do oleoduto por fadiga, acarretando muitas vezes consideráveis prejuízos econômicos e ambientais. O desenvolvimento de modelos matemáticos para a análise do problema se justifica, portanto. Um das maneiras de se estudá-lo consiste em construir primeiramente um modelo do problema estático, isto é, considerando o oleoduto em repouso, apoiado sobre o fundo do oceano; em seguida, estuda-se o comportamento dinâmico do oleoduto sujeito à ação da corrente considerando-o como uma perturbação em relação à solução estática [17].

Um dos objetivos deste trabalho é determinar a configuração de equilíbrio estático de oleodutos apoiados no fundo do mar. A grosso modo, suponha-se que o problema seja plano e admita-se conhecido o relevo do terreno. Considerando dadas as características físicas do oleoduto, o problema se resume em determinar os esforços internos, a reação do solo e a geometria de equilíbrio estático da estrutura (veja figura 1.1). Note-se que, supondo o solo rígido, este representa um vínculo unilateral sobre a estrutura, uma vez que permite seu deslocamento livremente no sentido do afastamento do solo, mas impede completamente o deslocamento em sentido contrário.

As operações de abandono e resgate laterais aqui consideradas têm lugar em águas rasas e ocorrem no final do lançamento da linha. Nessa ocasião, primeiramente a extremidade do oleoduto é fechada com uma tampa e o oleoduto, lentamente baixado até ser depositado no fundo do mar, numa operação que é denominada de abandono. Em seguida, na operação de resgate, o oleoduto é içado até que sua extremidade suba até acima da superfície do mar,

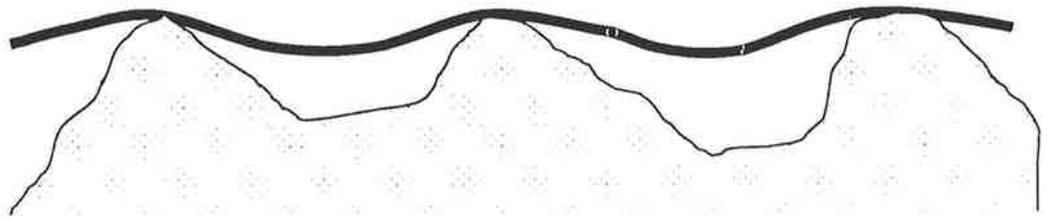


Figura 1.1: Esquema do oleoduto apoiado no fundo do oceano.

quando então se procede à fixação do *riser*¹. Em ambas as operações, amarram-se cabos ao corpo do oleoduto e utilizam-se *davits*² situados ao longo do costado de uma barcaça ancorada [9] (veja figura 1.2). Neste trabalho, supõe-se que os *davits* operem de forma que os comprimentos dos cabos são dados³. Os cabos, supostos inextensíveis aos esforços de tração e perfeitamente flexíveis à compressão, representam vínculos unilaterais que agem em pontos pré-determinados da estrutura. Uma vez que o objetivo deste trabalho é estudar a configuração de equilíbrio estático do oleoduto, as operações de abandono e resgate laterais são, em realidade, indistinguíveis.

A segurança das operações de abandono e resgate é indispensável, tendo em vista que eventuais plastificações ou rupturas da estrutura podem provocar atrasos no início da operação da linha e, com isso, prejuízos elevados. Cabe mencionar também as dificuldades, e os conseqüentes altos custos, de reparos em ambientes submarinos. Sendo assim, justifica-se o desenvolvimento de modelos matemáticos que permitam planejar a operação por meio da comparação de alternativas de políticas de içamento [2].

¹O *riser* é um tubo vertical, instalado na extremidade do oleoduto, que é utilizado para trazer o petróleo extraído do solo até as instalações situadas acima da superfície do mar.

²*Davits* são pequenos guindastes localizados no convés da barcaça.

³O problema em que as tensões nos cabos são dadas é muito mais simples de tratar [2], [9]. Este caso enquadra-se no esquema tradicional em que o carregamento (ou, mais exatamente, parte dele) é conhecido e deseja-se determinar tanto a geometria como os esforços internos da estrutura.

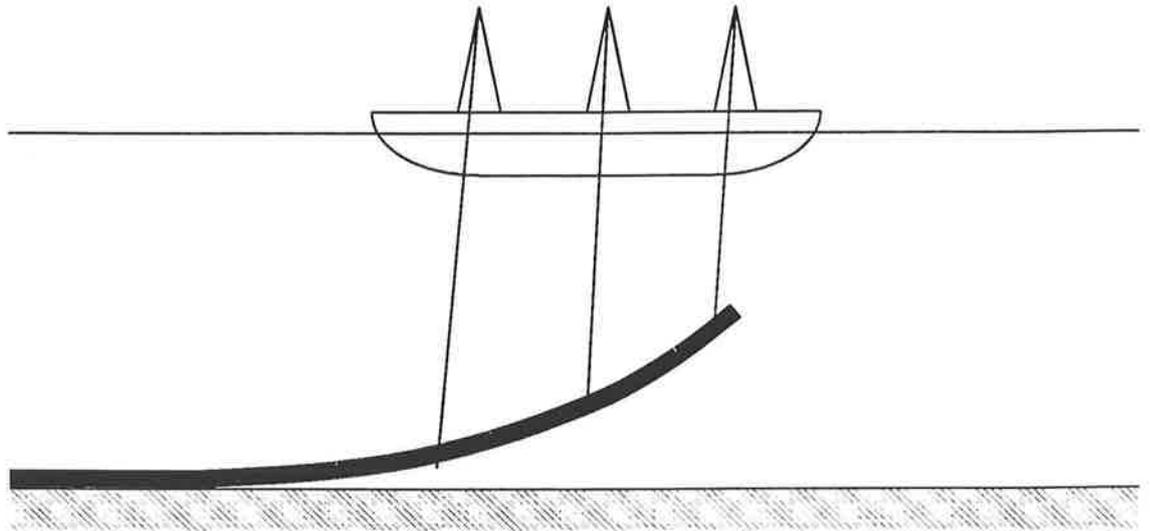


Figura 1.2: Esquema das operações de abandono e resgate laterais.

O estudo do problema de equilíbrio estático representa obviamente uma simplificação significativa da realidade. Um modelo mais abrangente deve levar em conta os movimentos da barcaça e a interação dinâmica entre o oleoduto e a água do mar. Este modelo pode, contudo, ser construído considerando-se perturbações dinâmicas em torno da configuração de equilíbrio estático [21]. Dessa maneira, a modelagem estática é um passo fundamental para o estudo do problema dinâmico.

Neste trabalho, tanto para o problema do oleoduto apoiado no fundo do oceano (POAFO), como para o problema do abandono e resgate laterais (PARL), a configuração de equilíbrio do oleoduto é descrita na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias, em que a variável independente é a posição medida ao longo do eixo do oleoduto. Para cada um dos problemas são estabelecidas condições de contorno específicas e o objetivo é determinar o carregamento sobre a estrutura. O ponto central da abordagem proposta se baseia no fato de que, nos dois problemas mencionados, os oleodutos estão sujeitos a restrições na forma

de vínculos unilaterais. Tais restrições podem ser escritas como funcionais a minimizar, caracterizando-se assim problemas de controle ótimo. Em forma discreta, estes são, de fato, problemas de programação matemática (otimização em espaços de dimensão finita), cuja solução numérica pode ser obtida com o auxílio de software de uso comum [17].

Como conseqüência da abordagem aqui adotada, deve-se mencionar o fato de que problemas não planos⁴ podem ser tratados exatamente da mesma forma que o problema plano aqui considerado - não há qualquer dificuldade conceitual adicional. A escolha do problema plano para objeto do estudo deu-se apenas pela maior simplicidade das equações diferenciais que constituem o modelo matemático da estrutura e por sua ordem reduzida (6 no caso plano contra 12, no tridimensional) [10].

Historicamente, o primeiro contato do autor com problemas envolvendo oleodutos se deu na década de 80, quando teve o privilégio de atuar como pesquisador do IPT, trabalhando num ambiente muito estimulante e de grande camaradagem, na antiga Divisão de Engenharia Naval e Oceânica. Naquela época, a Petrobrás contratou uma seqüência de projetos com o objetivo de estudar o comportamento de oleodutos marítimos em diversas condições operacionais [3], [9], [10], [11], [12], [19], [20], [23]. Em um desses projetos, os problemas aqui discutidos foram resolvidos. No entanto, o foram utilizando abordagens distintas daquelas que serão aqui apresentadas. O POAFO foi formulado como um problema de minimização da energia potencial da estrutura sujeito a restrições. A solução do problema foi obtida para sua versão discretizada em Elementos Finitos [19], [20]. O PARL de oleodutos foi reduzido à busca da solução de um sistema de equações não lineares [3], [10].

Uma extensão do trabalho acima consistiu no estudo dinâmico das operações de abandono

⁴Problemas tridimensionais surgem, por exemplo, quando os *davits* não se localizam no plano vertical que contém o oleoduto ou quando a velocidade da corrente marítima local não está contida nesse plano.

e resgate laterais, considerando a ação de ondas sobre o oleoduto, assim como o movimento da barcaça [21].

Um outro projeto desenvolvido naquela ocasião teve por objetivo a análise estrutural do problema de transporte de oleodutos. Nesse caso, os oleodutos são suportados por bóias distribuídas ao longo de toda sua extensão e deslocados com o auxílio de rebocadores [8], [10].

1.2 Revisão Bibliográfica

O equilíbrio de oleodutos apoiados no fundo do oceano tem sido um problema importante em engenharia oceânica [7], [20], [26], [27]. As condições de apoio do solo caracterizam o modelo como sendo inerentemente não linear, uma vez que impedem o deslocamento em um sentido, mas não impõem qualquer restrição no sentido oposto. A teoria matemática de problemas de contato no contexto elástico linear tem sido extensivamente estudada desde os anos 30 [24]. Muitas pesquisas têm sido realizadas envolvendo técnicas analíticas, numéricas e experimentais.

A abordagem tradicional de solução deste problema baseia-se na minimização da energia potencial da estrutura discretizada, sujeita a um conjunto de restrições que representam a condição de não penetração do oleoduto no solo. O oleoduto é representado por uma cadeia de elementos conectados por juntas elásticas. A reação do terreno sobre o oleoduto é suposta na forma de forças concentradas aplicadas sobre as juntas. Após a discretização em Elementos Finitos, obtém-se um Problema de Programação Quadrática (PPQ) que pode ser resolvido por meio de um algoritmo apropriado de otimização. Os deslocamentos resultantes são contínuos, mas são necessárias técnicas de discretização mais refinadas para

se obter continuidade de curvaturas [20].

Supondo a ocorrência de pequenos deslocamentos e comportamento elástico linear do oleoduto, a referência [7] apresenta duas formas de solução analítica para o problema.

Na mesma linha de [20], a referência [27] considera a inclusão de atrito de Coulomb no modelo. É proposto um método baseado na solução iterativa de dois PPQs, a saber, os assim chamados Problema de Contato Unilateral e Problema de Atrito.

A instalação de oleodutos em solos irregulares na presença de atrito de Coulomb é considerada em [19] como um processo de duas etapas: lançamento e abandono. O modelo matemático é escrito na forma de uma desigualdade variacional equivalente. Com base em resultados de análise funcional, a existência e a unicidade das soluções são rigorosamente provadas. Uma representação em elementos finitos é utilizada para a geração de resultados numéricos.

Problemas envolvendo oleodutos durante a operação de lançamento têm sido estudados também há muito tempo [12], [13], [22], [23], [25]. As técnicas mais utilizadas para a solução dos problemas são o método dos elementos finitos, cálculo de equações de diferenças e métodos baseados em modelos de catenárias enrijecidas. No entanto, considera-se quase sempre a utilização de *stingers*⁵.

Dareing e Neathery [12] estudam o problema de equilíbrio estático de oleodutos na operação de lançamento por meio de barcaças. O problema é escrito na forma de um sistema de

⁵ *Stingers* são estruturas de forma curva, acopladas às barcaças lançadoras de oleodutos, utilizadas para servir de suporte ao oleoduto durante o lançamento. O seu objetivo é suavizar a linha elástica e reduzir as tensões ao longo do oleoduto.

equações diferenciais com condições no contorno. As condições referentes à extremidade superior do oleoduto são específicas para representar a ação da barça, considerada como um engaste. O método de Newton, que é uma técnica de linearização de equações baseada na série de Taylor, é utilizado para gerar uma forma linearizada do sistema de equações. Em seguida, este sistema é discretizado em termos de diferenças finitas.

Pedersen [25] analisa as operações de abandono e resgate laterais, considerando, porém, uma situação bastante mais simples do que a aqui estudada. Nesse trabalho, o oleoduto é suspenso por meio de um único cabo, localizado na extremidade do oleoduto. Note-se que, por se tratar de um único cabo, evita-se a ocorrência de afrouxamento. Além disso, em lugar de fixar o comprimento do cabo, o que corresponde a um caso mais próximo da realidade operacional de abandono, em [25] fixa-se a cota da extremidade do oleoduto. A solução numérica é obtida com base em integrações sucessivas de um sistema de equações diferenciais não lineares com valores no contorno.

Ansari [2] analisa as tensões ao longo do oleoduto durante a operação de resgate lateral. Um conjunto de equações diferenciais com condições no contorno é escrito para descrever o equilíbrio do oleoduto, supondo dadas as tensões nos cabos. Esse modelo é discretizado em elementos finitos e as equações resultantes são resolvidas iterativamente, usando uma abordagem do tipo valor inicial. O objetivo central do trabalho é apresentar uma metodologia útil para o planejamento da operação de resgate lateral.

No caso do PARL, não foi encontrada na literatura qualquer referência ao problema em que são dados os comprimentos dos cabos dos *davits*. Este problema foi formulado e resolvido em [9] na forma de um sistema de equações transcendentais. Uma maneira bastante artificiosa de representar as restrições impostas pelos cabos sobre o oleoduto então pro-

posta foi essencial para a solução do problema. Essa representação introduziu, contudo, singularidades na solução que tiveram que ser removidas empiricamente.

1.3 Contribuições

A abordagem de problemas não triviais de engenharia de estruturas utilizando uma visão de engenharia de controle talvez seja o aspecto mais relevante deste trabalho. A simplicidade das formulações obtidas, assim como a facilidade de obtenção de suas soluções, devem ser destacadas. A representação dos vínculos unilaterais associados ao solo (no POAFO) e aos cabos (no PARL) por meio de um funcional a minimizar é o ponto-chave do trabalho.

No caso do oleoduto no fundo do oceano, trabalhando com as equações de equilíbrio linearizadas, a forma do funcional adotado permite que, após sua discretização, o problema seja reduzido a um PPQ, cuja solução numérica pode ser obtida de forma eficiente. Além disso, deve-se observar que, diferentemente do que ocorre nas formulações usuais utilizando elementos finitos: i) não apenas os deslocamentos, como também as curvaturas, resultam naturalmente contínuas ao longo da estrutura; ii) a reação do solo é modelada como uma força distribuída, e não concentrada nos nós como em [20].

A solução do PARL aqui formulado, em que são fixados os comprimentos dos cabos dos *davits*, é uma contribuição deste trabalho.

1.4 Notação e Base de Adimensionalização

Ao longo de todo o texto convencionou-se que as variáveis acompanhadas de acento circunflexo estão expressas em forma dimensional. As variáveis sem esse acento são expressas em forma adimensional com relação à base definida a seguir.

Seja $\hat{\gamma}_{eq}$ o peso por unidade de comprimento do oleoduto submerso, dado pela diferença entre o peso de uma unidade de comprimento do oleoduto no ar e o peso de água por ela deslocado. Seja ainda \hat{L}_0 o comprimento característico do oleoduto - no POAFO, este tem o valor do comprimento típico dos vãos livres; no PARL, seu valor deve ser escolhido da mesma ordem de grandeza do comprimento suspenso do oleoduto. Essas duas variáveis definem a base de adimensionalização adotada.

Com isso,

- $\hat{L}_0 \hat{\gamma}_{eq}$ é o valor de base para forças;
- $\hat{L}_0^2 \hat{\gamma}_{eq}$ é o valor de base para momentos.

Além disso, no POAFO, os deslocamentos na vertical são frequentemente bem menores que os vãos livres. Por essa razão, é conveniente nestes casos adotar um outro valor de base \hat{V}_0 como característico dos deslocamentos na vertical.

1.5 Estrutura do Texto

O Capítulo 2 contém o modelo matemático básico do oleoduto em equilíbrio. O modelo é chamado de *básico* porque não considera as interações entre o oleoduto e o solo (no caso do POAFO) e entre o oleoduto e os cabos (no caso do PARL). As hipóteses básicas feitas para a construção do modelo são apresentadas neste capítulo. Em seguida, é realizada a modelagem da força hidrostática que age sobre o oleoduto. As equações de equilíbrio do

oleoduto submerso são então obtidas. O capítulo termina com a demonstração de que a geometria da linha elástica pode ser determinada resolvendo-se um problema no qual se considera o oleoduto imerso no ar, com peso específico por unidade de comprimento igual àquele do oleoduto submerso. Este é o modelo utilizado nos capítulos seguintes do texto para o estudo dos dois problemas de interesse.

O POAFO é tratado no Capítulo 3. Inicialmente define-se o problema. Em seguida, o efeito da reação do solo sobre o oleoduto é incorporado às equações do modelo básico. São apresentadas as condições de contorno do problema, além de um modelo para representar o contato unilateral entre o oleoduto e o solo. Define-se então um problema de controle ótimo cuja solução também resolve o problema de equilíbrio do oleoduto no fundo do oceano. Por fim, o problema de controle ótimo é discretizado e colocado na forma de um PPQ.

O Capítulo 4 discute o PARL. Em seu início, o problema é definido. Em seguida, as equações do modelo básico são modificadas para levar em conta a ação das forças dos cabos sobre o oleoduto. As condições de contorno são apresentadas, assim como um modelo para representar a interação entre os cabos e o oleoduto. Um problema de controle ótimo é então definido de maneira tal que sua solução também o é para o PARL. No final, um método de cálculo das derivadas parciais do funcional e das restrições do problema é apresentado. O método provém de um problema de controle ótimo em forma clássica.

Com o propósito de ilustrar a aplicação das idéias aqui expostas, no Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos de resultados numéricos obtidos.

Por fim, o Capítulo 6 contém as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Modelo Matemático Básico do Oleoduto

Neste capítulo apresenta-se o modelo matemático do oleoduto em equilíbrio na forma de um sistema de equações de estado. A variável independente é o comprimento medido ao longo do seu eixo. As equações diferenciais representam o equilíbrio de forças e de momentos ao longo da estrutura, as suas equações geométricas e uma relação constitutiva. Mostra-se também que a geometria da linha elástica pode ser determinada considerando-se o oleoduto imerso no ar, porém com peso específico por unidade de comprimento igual àquele do oleoduto submerso na água.

As extensões do modelo para levar em conta as interações com o solo (no caso do POAFO) e com os cabos dos *davits* (no caso do PARL), assim como as condições de contorno em cada caso, serão apresentadas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente. Por esta razão, dá-se o nome de *básico* ao modelo desenvolvido neste capítulo, o qual se baseia, quase integralmente, na referência [9].

2.1 Hipóteses Básicas

A hipótese fundamental em que se assenta todo este trabalho é que o material que constitui o oleoduto apresenta comportamento elástico e linear [1], [4], [5], [9]. Esta hipótese reflete o requisito prático de ser indamiável a ocorrência de deformações plásticas na estrutura. Adota-se também a hipótese usual de que as deformações por força axial e de cisalhamento são desprezíveis em face daquelas causadas pela flexão. Com isso, a equação constitutiva que relaciona características físicas do oleoduto com variáveis do problema resulta:

$$\hat{C} = \frac{\hat{M}}{\hat{E}\hat{J}}, \quad (2.1)$$

em que \hat{C} é a curvatura¹ num ponto da linha elástica, \hat{M} é o momento fletor no mesmo ponto e $\hat{E}\hat{J}$ é a rigidez flexional do oleoduto.

Portanto, admite-se que a curvatura da linha elástica num dado ponto depende apenas do momento fletor, sendo desprezível o efeito da força cortante.

Para fins geométricos, desprezam-se as dimensões da seção transversal do oleoduto, podendo o mesmo ser confundido com seu eixo de simetria.

Adota-se a hipótese de pequenas deformações. No POAFO, supõe-se que também os deslocamentos sejam pequenos. No PARL, os deslocamentos podem ser grandes²; além disso, para todos os efeitos, o comprimento do oleoduto após o ponto de contato com o solo é suposto como infinito, enquanto que os cabos dos *davits* são admitidos inextensíveis

¹A curvatura é, por definição, o inverso do raio de curvatura.

²Note-se que "pequeno" ou "grande" aqui é relativo ao valor característico utilizado para adimensionalizar deslocamentos (\hat{V}_0 ou \hat{L}_0 , conforme o caso).

e com rigidez flexional desprezível. O solo é admitido infinitamente rígido em ambos os problemas.

2.2 Modelagem da Força Hidrostática

Considere-se um elemento do oleoduto de comprimento Δs conforme ilustrado na figura 2.1

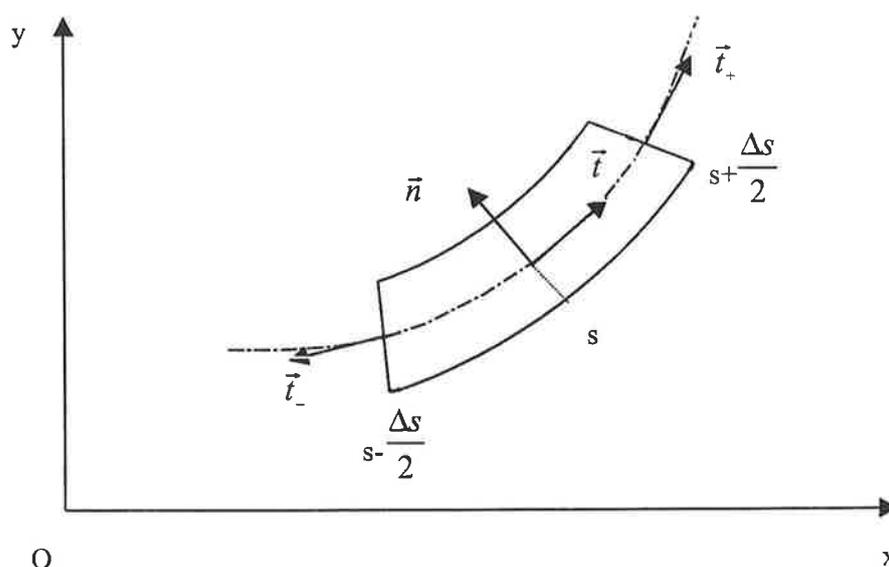


Figura 2.1: Elemento Δs para cálculo da força hidrostática.

Sejam s a posição do ponto médio do elemento, $h(s)$ a profundidade da linha elástica no ponto, $\vec{t}(s)$ e $\vec{n}(s)$, respectivamente, os vetores tangente e normal à linha elástica nesse ponto, A a área da seção transversal do oleoduto, γ_a o peso específico da água, $\Delta \vec{E}$ o empuxo resultante sobre o elemento e \vec{w}_0 a força hidrostática por unidade de comprimento que age sobre as paredes do oleoduto. Designando ainda por \vec{H}_- e \vec{H}_+ as forças hidrostáticas nas seções localizadas em $s - \Delta s/2$ e $s + \Delta s/2$, respectivamente, tem-se

$$\vec{H}_- = -\gamma_a A h_- \vec{t}_-$$

$$\vec{H}_+ = -\gamma_a A h_+ \vec{t}_+$$

onde

$$h_- = h(s - \Delta s/2)$$

$$h_+ = h(s + \Delta s/2)$$

$$\vec{t}_- = -\vec{t}(s - \Delta s/2) = -\cos(\theta - \Delta\theta/2)\vec{i} - \sin(\theta - \Delta\theta/2)\vec{j}$$

$$\vec{t}_+ = \vec{t}(s + \Delta s/2) = \cos(\theta + \Delta\theta/2)\vec{i} + \sin(\theta + \Delta\theta/2)\vec{j}.$$

Considerando que o empuxo resultante sobre o elemento é, em realidade, a soma de três parcelas de força hidrostática,

$$\Delta\vec{E} = \vec{w}_0\Delta s + \vec{H}_- + \vec{H}_+$$

e que, pelo Princípio de Arquimedes, o mesmo empuxo é vertical, tem sentido ascendente e magnitude igual ao peso de líquido deslocado,

$$\Delta\vec{E} = \gamma_a A \Delta s \vec{j},$$

o limite para $\Delta s \rightarrow 0$ fornece

$$\vec{w}_0 = \gamma_a A \left[\vec{j} - \sin\theta \vec{t} + (D_M - y) \frac{d\theta}{ds} \vec{n} \right]. \quad (2.2)$$

após substituir h por $D_M - y$, onde D_M é a profundidade do mar.

É simples verificar que \vec{w}_0 é perpendicular à linha elástica, pois o produto escalar

$$\langle \vec{w}_0, \vec{t} \rangle = 0,$$

uma vez que $\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0$ e $\vec{t} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. Como consequência imediata deste fato e do sentido escolhido para \vec{n} , o módulo w_0 do vetor \vec{w}_0 é dado por

$$w_0 = \langle \vec{w}_0, \vec{n} \rangle,$$

ou seja,

$$w_0 = \gamma_a A [\cos \theta + (D_M - y) \frac{d\theta}{ds}]. \quad (2.3)$$

Esta expressão é a mesma que consta em [25].

2.3 Equações de Equilíbrio do Oleoduto Submerso

Para o equacionamento que se segue, admita-se um elemento Δs do oleoduto em equilíbrio sob a ação das forças peso e hidrostática³, além dos esforços internos (forças e momentos)(fig. 2.2).

Designando por γ_t a força peso por unidade de comprimento do oleoduto, e por $F_x = F_x(s)$ e $F_y = F_y(s)$, respectivamente, as componentes horizontal e vertical da força interna atuante na seção localizada em s , o equilíbrio de forças é descrito por

$$F_x + \Delta F_x - w_0 \Delta s \sin \theta - F_x = 0$$

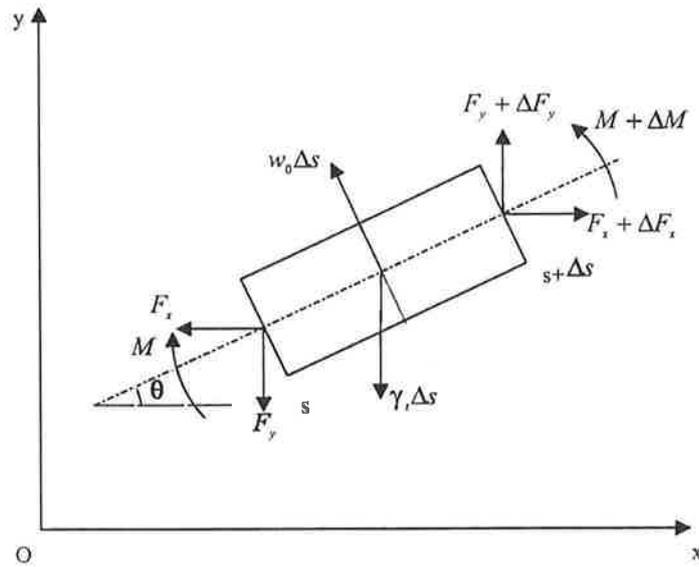
e

$$F_y + \Delta F_y + w_0 \Delta s \cos \theta - \gamma_t \Delta s - F_y = 0,$$

enquanto que, considerando apenas os termos de 1a. ordem, o equilíbrio de momentos impõe que

³Em [9] consideram-se também as forças decorrentes da ação de correntes marítimas sobre o oleoduto.

Isso não foi feito aqui apenas para simplificar o modelo. Sua inclusão não traria maiores dificuldades.

Figura 2.2: Elemento Δs do oleoduto em equilíbrio.

$$M + \Delta M + F_y \Delta s \cos \theta - F_x \Delta s \sin \theta - M = 0.$$

em que $M = M(s)$ é o momento fletor na seção s .

Passando ao limite para $\Delta s \rightarrow 0$ as equações acima fornecem:

Equilíbrio de Forças

$$\frac{dF_x}{ds} = w_0 \sin \theta \quad (2.4)$$

$$\frac{dF_y}{ds} = -w_0 \cos \theta + \gamma_t \quad (2.5)$$

Equilíbrio de Momentos

$$\frac{dM}{ds} = F_x \sin \theta - F_y \cos \theta \quad (2.6)$$

Considerando que a curvatura da linha elástica é dada por

$$C = d\theta/ds,$$

a equação constitutiva 2.1 pode ser reescrita na forma adimensional como:

Equação Constitutiva

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EJ}, \quad (2.7)$$

em que EJ é a rigidez flexional adimensional do oleoduto, sendo dada por

$$EJ = \frac{\hat{E}\hat{J}}{\hat{\gamma}_{eq}\hat{L}_0^3}. \quad (2.8)$$

Quanto à geometria da linha elástica, é imediato verificar que as suas coordenadas x e y no ponto s devem ser tais que:

Equações Geométricas

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta. \quad (2.10)$$

Nota-se que as equações 2.4-2.10 constituem um sistema de equações de estado em que s é a variável independente e

$$X(s) = [F_x(s) F_y(s) M(s) \theta(s) x(s) y(s)]^T$$

é o vetor de estados.

É oportuno mencionar que, no caso tridimensional, as equações de equilíbrio resultantes são em número de 12, assim distribuídas: três para o equilíbrio de forças, três para o equilíbrio de momentos, três equações constitutivas e três geométricas [9]. Exceto pela maior dimensão do problema, não há diferença formal alguma em relação ao caso plano acima apresentado.

2.4 Um Problema Com Mesma Geometria

A demonstração de que a linha elástica pode ser determinada considerando-se o oleoduto imerso no ar, porém com peso específico por unidade de comprimento igual àquele do oleoduto submerso na água, será apresentada nesta seção. Esta propriedade é demonstrada em [12] de forma ligeiramente diferente daquela aqui apresentada, embora os argumentos lá utilizados sejam os mesmos daqui.

O primeiro passo para isso consiste em demonstrar que a resultante da força hidrostática $\vec{F}_H(s)$ que age sobre o oleoduto desde sua extremidade $s = 0$ até a seção s pode ser calculada por meio de uma integral exata.

Por definição, $\vec{F}_H(s)$ deve ser tal que

$$\frac{d\vec{F}_H}{ds} = \vec{w}_0,$$

a qual, tendo em vista as equações 2.2 e 2.10, e notando que

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\vec{n},$$

pode ser reescrita como

$$\frac{d\vec{F}_H}{ds} = \gamma_a A \left\{ \vec{j} + \frac{d}{ds} [(D_M - y)\vec{t}] \right\}.$$

Integrando esta equação desde 0 até s e considerando que a força hidrostática na extremidade $s = 0$ do oleoduto é dada por

$$\vec{F}_H(0) = \gamma_a A [D_M - y(0)]\vec{t}(0),$$

resulta

$$\vec{F}_H = \gamma_a A [s\vec{j} + (D_M - y)\vec{t}]. \quad (2.11)$$

Observa-se assim que \vec{F}_H tem uma componente paralela à linha elástica no ponto s a qual, portanto, não contribui para o momento fletor nesse ponto. Ora, como a geometria da linha elástica fica definida por meio das equações 2.7-2.10, conclui-se de imediato que tal componente da força hidrostática pode ser deixada de lado quando o objetivo é apenas determinar a linha elástica. A parcela restante de \vec{F}_H tem direção vertical, sentido ascendente e magnitude igual à do peso de água deslocado pelo oleoduto desde 0 até s . Ou seja, para a determinação da linha elástica, pode-se considerar o oleoduto imerso no ar, com peso específico por unidade de comprimento γ_{eq} ,

$$\gamma_{eq} = \gamma_t - \gamma_a A.$$

Assim, definindo-se a força interna $\vec{F}' = \vec{F}'(s)$ na seção s como

$$\vec{F}' = \vec{F} - \gamma_a A (D_M - y)\vec{t}, \quad (2.12)$$

e denotando-se

$$\vec{F}' = F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j},$$

as equações de equilíbrio de forças e momentos do oleoduto 2.4-2.6 podem ser reescritas para o problema geometricamente equivalente como:

Equilíbrio de Forças

$$\frac{dF'_x}{ds} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{dF'_y}{ds} = \gamma_{eq}, \quad (2.14)$$

Equilíbrio de Momentos

$$\frac{dM}{ds} = F'_x \sin \theta - F'_y \cos \theta. \quad (2.15)$$

As equações constitutiva e geométricas mantêm suas formas inalteradas (eqs. 2.7, 2.9 e 2.10).

O vetor de estados do novo problema passa, pois, a ser

$$X(s) = [F'_x(s) \ F'_y(s) \ M(s) \ \theta(s) \ x(s) \ y(s)]^T.$$

É claro que, uma vez resolvido o problema geometricamente equivalente no ar e determinada a linha elástica, a avaliação das forças e tensões internas ao longo do oleoduto requer que se considere tal parcela, calculando-se

$$\vec{F} = \vec{F}' + \gamma_a A(D_M - y)\vec{t}.$$

Capítulo 3

O Problema do Oleoduto no Fundo do Oceano

Neste capítulo, inicialmente é definido o problema de equilíbrio do oleoduto apoiado no fundo do oceano.

Em seguida, após uma mudança de variáveis em relação ao modelo básico e a introdução da reação do solo nas equações, obtém-se um modelo de estados que representa o oleoduto em equilíbrio. Adotando como hipótese a ocorrência de pequenos deslocamentos, as equações são então linearizadas. A construção do modelo se completa com a definição das condições de contorno e com a modelagem do fenômeno de contato unilateral para representar a interação entre o oleoduto e o solo.

Por fim, define-se um problema de controle ótimo linear com funcional a minimizar quadrático, cuja solução também resolve o problema de valores no contorno mencionado acima. Esse problema de controle ótimo é então discretizado e reescrito na forma de um

PPQ, cuja solução numérica pode ser obtida de forma simples utilizando software de uso comum.

Este capítulo é uma versão expandida do artigo [11].

3.1 Definição do Problema

Considera-se que o fundo do oceano, no caso geral, tenha um perfil irregular conhecido, dado por uma função $y_s(s)$, e, sobre ele, esteja apoiado o oleoduto (fig. 3.1).

Admite-se que o problema seja plano e que o contato entre o oleoduto e o solo seja isento de atrito. A presença de atrito acarreta que o POAFO não resulta bem definido, não tendo solução única, já que esta depende da história do lançamento [18].

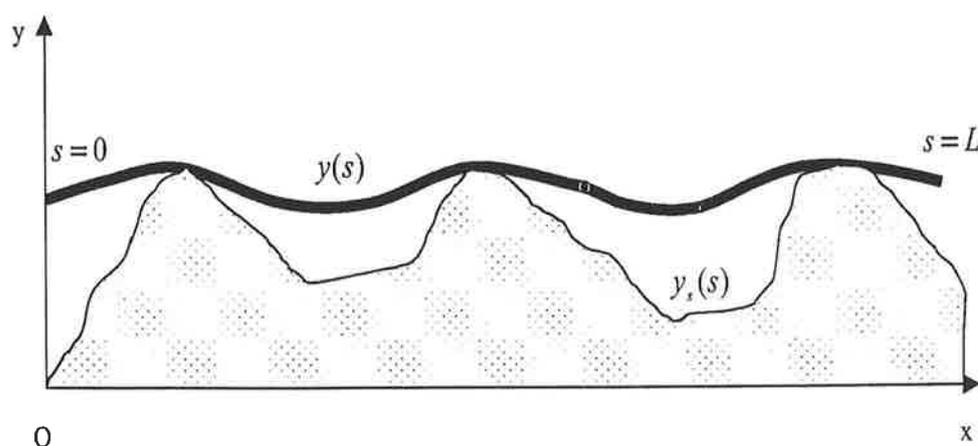


Figura 3.1: Esquema do oleoduto apoiado no fundo do oceano.

Por simplicidade, admite-se que a força cortante e o momento fletor são nulos nas extremidades do oleoduto.

O problema que será resolvido aqui consiste em determinar a configuração de equilíbrio do oleoduto. Em outras palavras, o objetivo é obter a geometria da linha elástica da estrutura, assim como a reação do solo. Uma vez resolvido esse problema, o cálculo dos esforços internos será trivial, conforme já dito anteriormente.

Deve-se notar que a hipótese de que o solo é rígido estabelece um vínculo unilateral sobre a estrutura, permitindo seu deslocamento livremente no sentido do afastamento do solo e impedindo-o completamente no sentido oposto.

3.2 Equações de Equilíbrio

Em vista da hipótese feita de que o contato entre o oleoduto e o fundo do mar se dá sem atrito, a direção da reação do solo em cada ponto de contato é perpendicular ao oleoduto. Por esta razão, em lugar de trabalhar com as componentes horizontal e vertical das forças internas, é conveniente proceder a uma mudança de variáveis e considerar as componentes cortante e normal de tais forças.

Na figura 3.2 está representada a convenção de sinais adotada para as forças cortante e normal.

Comparando-a com a figura 2.2 e considerando o problema equivalente do oleoduto imerso no ar, resultam as seguintes relações:

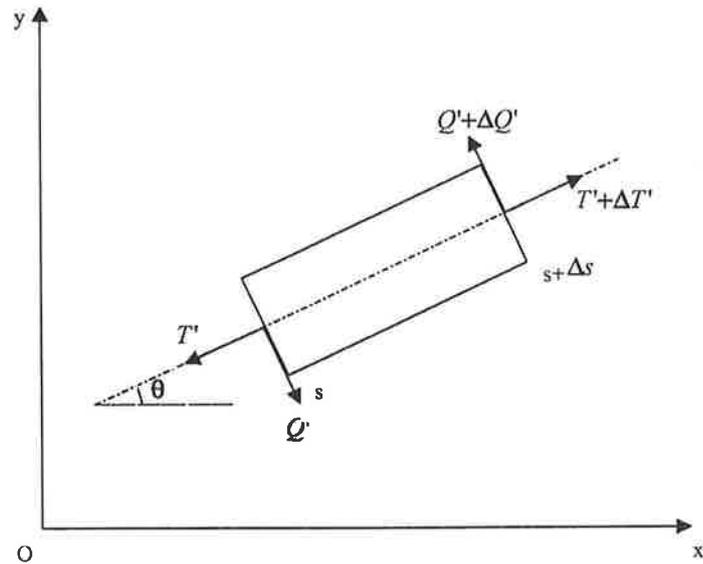


Figura 3.2: Convenções adotadas para as forças cortante e normal.

$$Q' = -F'_x \sin \theta + F'_y \cos \theta$$

$$T' = F'_x \cos \theta + F'_y \sin \theta,$$

que, tendo em vista as equações 2.13-2.15, permitem escrever que

$$\frac{dQ'}{ds} = \gamma_{eq} \cos \theta \quad (3.1)$$

$$\frac{dT'}{ds} = \gamma_{eq} \sin \theta \quad (3.2)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q'. \quad (3.3)$$

A inclusão da reação do solo no modelo matemático básico do oleoduto é imediata. Considerando que sua direção é perpendicular ao oleoduto, conforme dito acima, representando por $R(s)$ sua magnitude e convencionando como positivo o sentido que aponta para fora do solo, a equação 3.1 se modifica para

$$\frac{dQ'}{ds} = \gamma_{eq} \cos \theta - R \quad (3.4)$$

As equações 3.2-3.4, juntamente com 2.7-2.10, representam assim o equilíbrio do oleoduto em contato com o fundo do oceano. É evidente que, para resolver o problema definido na seção 3.1, a equação 3.2 não necessita ser considerada. Ela serve unicamente para calcular a força normal $T(s)$ e pode ser levada em conta apenas a posteriori, após a obtenção da solução do problema. Por esta razão, ela será deixada de lado no modelo.

Uma hipótese adicional, que se justifica na prática, é que os deslocamentos na vertical são pequenos quando comparados aos comprimentos dos vãos livres do oleoduto e, portanto $|\theta| \ll 1$. Esta hipótese tem duas conseqüências imediatas. Em primeiro lugar, em vez de \hat{L}_0 , é conveniente utilizar um outro valor de base \hat{V}_0 , característico dos deslocamentos na vertical, para adimensionalizá-los. Em segundo lugar, as equações acima podem ser linearizadas, reduzindo-se a

$$\frac{dQ'}{ds} = \gamma_{eq} - R \quad (3.5)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q' \quad (3.6)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EJ} \quad (3.7)$$

$$\frac{dy}{ds} = \beta\theta, \quad (3.8)$$

em que

$$\beta = \frac{\hat{L}_0}{\hat{V}_0}.$$

Deve-se notar que a equação geométrica 2.9 se reduz a

$$\frac{dx}{ds} = 1$$

e simplesmente traduz o fato de que $x = s$.

Condições de contorno Por simplicidade, será adotada a hipótese de que a força cortante e o momento fletor nas extremidades do oleoduto são nulos¹, isto é,

$$Q'(0) = 0 \quad (3.9)$$

$$M(0) = 0 \quad (3.10)$$

$$Q'(L) = 0 \quad (3.11)$$

$$M(L) = 0. \quad (3.12)$$

Nota-se, pois, que se trata de um problema com valores no contorno (*Two-Point Boundary Value Problem*, em inglês).

É interessante notar que, para $|\theta| \ll 1$, a equação 3.2 fornece

$$T'(L) - T'(0) = \gamma_{eq} \int_0^L \theta(\sigma) d\sigma,$$

onde L representa o comprimento do oleoduto. Tendo em vista a equação 3.8, a igualdade acima pode ser reescrita como

$$T'(L) - T'(0) = \frac{\gamma_{eq}}{\beta} [y(L) - y(0)].$$

Como esperado, esta equação mostra que, para que o oleoduto esteja em equilíbrio, as forças normais nas suas extremidades não podem ser arbitrárias.

¹Condições de contorno distintas, em que esses esforços são dados ou envolvendo alguma restrição geométrica, poderiam ser igualmente consideradas neste ponto.

Restrição geométrica A condição de não penetração do oleoduto no solo impõe que

$$y(s) \geq y_s(s) \quad (0 \leq s \leq L). \quad (3.13)$$

Condição de contato unilateral A interação entre o solo e o oleoduto é descrita da seguinte forma:

- a reação do solo aponta sempre em sentido oposto ao solo;
- se num dado ponto não há contato entre o oleoduto e o solo, então a reação do solo é nula;
- se a reação do solo é não nula, então o oleoduto está em contato com o solo.

Estas condições podem ser expressas, respectivamente, como:

$$R(s) \geq 0 \quad (0 \leq s \leq L) \quad (3.14)$$

$$y(s) > y_s(s) \Rightarrow R(s) = 0 \quad (3.15)$$

$$R(s) > 0 \Rightarrow y(s) = y_s(s). \quad (3.16)$$

É interessante comparar o modelo acima com a lei de Signorini-Fichera [27]. Esta última se exprime da seguinte forma:

$$y(s) > y_s(s) \Rightarrow R(s) = 0 \quad (3.17)$$

$$y(s) = y_s(s) \Rightarrow R(s) \geq 0. \quad (3.18)$$

$$J = \int_0^L [y(s) - y_s(s)]R(s) ds \quad (3.19)$$

sujeito às restrições dadas pelas equações 3.5-3.14. Este problema tem a forma típica de um problema de controle ótimo [6] e será aqui denominado de **P1'**.

Seja J^* o valor mínimo do funcional acima definido e admita-se que tanto $y_s(s)$ como $R(s)$ sejam funções contínuas.

Proposição Se $R(s)$ é uma solução do problema **P1'** tal que

$$J^* = 0,$$

então $R(s)$ é também uma solução de **P1**.

A demonstração desta proposição é imediata a partir das condições 3.13-3.14 e da definição de J (eq. 3.19). Note-se que a hipótese acerca das continuidades de $y_s(s)$ e de $R(s)$ e o fato de que $y(s)$ resulta contínua (veja seção 3.4) são necessários para garantir que $J^* = 0$ implica em

$$[y(s) - y_s(s)]R(s) = 0$$

para todo $s \in [0, L]$.

Embora menos importante sob o ponto de vista prático, é também imediato notar que se a função $R(s)$ é uma solução de **P1**, então ela também resolve **P1'** e $J^* = 0$.

A proposição acima é o ponto-chave da abordagem aqui proposta para resolver o POAFO. É claro que, uma vez que uma tal função $R(s)$ tenha sido encontrada, a geometria e

Obviamente, as condições 3.15 e 3.17 são idênticas. No entanto, o modelo aqui proposto apresenta uma certa "simetria" entre as condições 3.15 e 3.16, a qual é apropriada para a demonstração da Proposição da seção 3.3. Por esta razão, ele será aqui preferido ao modelo de Signorini-Fichera.

Os modelos acima podem, contudo, ser considerados equivalentes, no sentido de que todo par de funções $(y(s), R(s))$ que satisfaz as condições 3.13-3.16, também satisfaz as condições 3.13, 3.17 e 3.18 e vice-versa.

Para concluir, é interessante observar que, neste ponto, o problema se resume em determinar uma função $R(s)$, $0 \leq s \leq L$, tal que a solução do sistema 3.5-3.8 satisfaz as condições de contorno 3.9-3.12 e as restrições 3.13-3.16. Este problema será aqui chamado de **P1**.

3.3 Um Problema de Controle Ótimo

É oportuno notar que o problema **P1** enunciado acima tem muita similaridade com outros que aparecem no campo de engenharia de controle. Em primeiro lugar, a variável independente s desempenha aqui o mesmo papel que o tempo em problemas de controle de sistemas dinâmicos. O sistema de equações diferenciais 3.5-3.8 representa um conjunto de equações de estado que descrevem a "dinâmica" do sistema. A função desconhecida $R(s)$ pode ser encarada como uma variável de controle que deve ser manipulada de maneira que a solução do problema satisfaça as restrições 3.9-3.16. Deve-se notar, entretanto, que as condições 3.15-3.16 não são usuais neste contexto. Apesar disso, mostra-se a seguir que a solução do problema **P1** pode ser obtida resolvendo-se um problema de controle ótimo a ele associado.

Considere-se o problema de minimizar o funcional

os esforços internos podem ser obtidos facilmente, bastando pois integrar o conjunto de equações diferenciais 3.5-3.8. É importante notar, contudo, que para isso é necessário dispor dos valores de $\theta(0)$ e $y(0)$. Este ponto será considerado na próxima seção.

3.4 Discretização do Problema de Controle Ótimo

Em princípio, o problema **P1'** pode ser resolvido usando-se um método numérico apropriado para a solução de problemas de controle ótimo. A referência [16], por exemplo, contém uma descrição de diversos métodos clássicos. Considerando, porém, tanto o estágio de desenvolvimento dos recursos computacionais disponíveis no momento, como a eficiência das rotinas de otimização atuais [15], uma alternativa interessante consiste em discretizar o problema de controle ótimo e transformá-lo num problema de programação matemática. Deve-se observar que, no caso presente, este problema terá a forma de um PPQ, já que tanto as equações que governam a geometria da estrutura como todas as restrições são lineares, enquanto que o funcional a minimizar é quadrático. Esta forma é bastante atraente pois, conforme dito por Avriel [3], "(...) ela é talvez a forma de problema não linear mais próxima da programação linear, tanto do ponto de vista analítico, quanto do computacional".

Sistema de Equações Diferenciais. Redefinindo o vetor de estados

$$X(s) = [Q'(s) \ M(s) \ \theta(s) \ y(s)]^T \quad (3.20)$$

e a função incógnita

$$u(s) = \gamma_{eq} - R(s), \quad (3.21)$$

o sistema de equações diferenciais 3.5-3.8 pode ser reescrito em forma matricial como

$$\dot{X}(s) = AX(s) + bu(s), \quad (3.22)$$

onde o ponto indica a operação de diferenciação em relação a s e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/EJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Denota-se o passo de discretização por Δs e supõe-se que ele seja tal que a função $u(s)$ possa ser aproximada por uma função constante por trechos u_j :

$$u(s) = u_j \quad (s_{j-1} \leq s < s_j), \quad (3.23)$$

onde

$$s_j = j\Delta s \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

e

$$n = L/\Delta s.$$

Alternativamente, u_j pode ser visto como o valor médio de $u(s)$ no intervalo $[s_{j-1}, s_j]$.

Para uma dada condição inicial $X(0)$, a solução do sistema de equações 3.22 é contínua.

Para $s = s_j$, seu valor é dado por [14]:

$$X(s_j) = \Phi^j X(0) + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi^{j-i-1} \Gamma u_{i+1} \quad (3.24)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$, onde

$$\Phi = e^{A\Delta s}$$

e

$$\Gamma = \int_0^{\Delta s} e^{A(\Delta s-s)} b \, ds.$$

Considerando que os dois últimos elementos de $X(0)$, a saber, $\theta(0)$ e $y(0)$, são desconhecidos, define-se o vetor de incógnitas ξ como

$$\xi = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ \theta(0) \ y(0)]^T. \quad (3.25)$$

Condições de Contorno. Das equações 3.5, 3.21 e 3.23 é imediato que

$$Q'(L) = \sum_{j=1}^n u_j \Delta s$$

e, portanto, a equação 3.11 pode ser reescrita como

$$\sum_{j=1}^n u_j = 0.$$

Ou seja,

$$a_1 \xi = 0 \quad (3.26)$$

onde a_1 é o vetor linha de dimensão $(n+2)$ dado por

$$a_1 = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0].$$

Da mesma forma, das equações 3.5, 3.6 e 3.21 e considerando as condições iniciais 3.9 e 3.10, segue que

$$M(s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [(s - s_j)^2 H(s - s_j) - (s - s_{j-1})^2 H(s - s_{j-1})] u_j,$$

onde $H(\cdot)$ é a função degrau de Heaviside:

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s < 0 \\ 1 & \text{se } s \geq 0. \end{cases}$$

Com isso,

$$M(L) = \sum_{j=1}^n \left(L - \frac{s_{j-1} + s_j}{2} \right) u_j$$

e, portanto, a equação 3.12 pode ser reescrita como

$$a_2 \xi = 0 \tag{3.27}$$

onde a_2 é o vetor linha de dimensão $(n + 2)$ dado por

$$a_2 = [a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots \ a_{2,n} \ 0 \ 0],$$

sendo

$$a_{2,j} = L - \frac{(s_{j-1} + s_j)}{2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

As condições de contorno 3.26 e 3.27 podem ser agrupadas e escritas em forma matricial como

$$\mathcal{A} \xi = 0 \tag{3.28}$$

onde \mathcal{A} é a matriz $(2 \times n + 2)$ dada por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Restrição geométrica. Definindo o vetor linha c

$$c = [0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

da equação 3.20 é óbvio que

$$y(s_j) = cX(s_j).$$

Definindo Y como o vetor coluna de dimensão n

$$Y = [y(s_1) \ y(s_2) \ \dots \ y(s_n)]^T,$$

após algumas manipulações algébricas simples, a equação 3.24 fornece

$$Y = \mathcal{T}\xi, \tag{3.29}$$

onde \mathcal{T} é a matriz $(n \times n + 2)$

$$\mathcal{T} = [\mathcal{T}_u \ | \ \mathcal{T}_0],$$

\mathcal{T}_u é a matriz $(n \times n)$ associada aos u_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\mathcal{T}_u = \begin{bmatrix} c\Gamma & 0 & \dots & 0 \\ c\Phi\Gamma & c\Gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c\Phi^{n-1}\Gamma & c\Phi^{n-2}\Gamma & \dots & c\Gamma \end{bmatrix}$$

e \mathcal{T}_0 é a matriz $(n \times 2)$ associada às condições iniciais $\theta(0)$ e $y(0)$:

$$\mathcal{T}_0 = \begin{bmatrix} c\Phi \\ c\Phi^2 \\ \vdots \\ c\Phi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste ponto pode-se escrever a versão discreta da desigualdade 3.13 em forma matricial como

$$-\mathcal{T}\xi \leq -Y_s \quad (3.30)$$

onde Y_s é o vetor coluna de dimensão n

$$Y_s = [y_s(s_1) \ y_s(s_2) \ \dots \ y_s(s_n)]^T \quad (3.31)$$

e a desigualdade se aplica elemento a elemento.

Além disso, é necessário incluir a restrição correspondente à extremidade $s = 0$ do oleoduto:

$$-y(0) \leq -y_s(0). \quad (3.32)$$

Contato unilateral. Em vista da equação 3.21, a condição 3.14 pode ser escrita em forma discreta como

$$\xi_i \leq \gamma_{eq} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.33)$$

O funcional J definido na equação 3.19 é aproximado por

$$J = \sum_{j=1}^n [y(s_j) - y_s(s_j)] R_j$$

onde, de acordo com a equação 3.21, R_j é definido como

$$R_j = \gamma_{eq} - u_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.34)$$

Das equações 3.25, 3.29, 3.31 e 3.34 não é difícil ver, após algumas manipulações algébricas, que J pode ser escrito na forma

$$J = \frac{1}{2} \xi^T P \xi + q^T \xi, \quad (3.35)$$

onde P é a matriz $(n + 2 \times n + 2)$ dada por

$$P = -2 \begin{bmatrix} \mathcal{T} \\ 0_{(2,n+2)} \end{bmatrix},$$

em que $0_{(2,n+2)}$ é a matriz nula $(2 \times n + 2)$ e q é o vetor coluna de dimensão $(n + 2)$ dado por

$$q = \gamma_{eq} \mathcal{T}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obeve-se, portanto, uma função quadrática (eq. 3.35) que deve ser minimizada com relação a ξ , sujeita às restrições lineares dadas pelas equações 3.28, 3.30, 3.32 e 3.33. Este é o PPQ procurado.

Capítulo 4

O Problema do Abandono e Resgate Laterais

Neste capítulo, de início define-se o PARL. Em seguida, são apresentadas as equações de equilíbrio do oleoduto, incluindo-se no modelo a ação dos cabos. As condições de contorno do problema são também introduzidas. Define-se então um problema de controle ótimo cuja solução resolve o PARL. Por fim, apresenta-se um método, baseado em fatos da teoria de controle ótimo, para o cálculo das derivadas parciais da função objetivo e das restrições do problema.

4.1 Definição do Problema

As operações de abandono e resgate laterais são realizadas para oleodutos situados em águas rasas, ocorrendo no final do lançamento da linha. Nessa ocasião, inicialmente a extremidade do oleoduto é selada com uma tampa e o oleoduto, abandonado lentamente sobre o fundo do mar. Em seguida, o mesmo é içado até que sua extremidade se localize acima da superfície do mar, quando então é efetuada a soldagem do *riser*. Ambas as operações são realizadas com o uso de *davits* situados ao longo do costado de uma barça

ancorada [9] (veja figura 1.2).

Admite-se que a extremidade suspensa do oleoduto esteja livre, isto é, não são aplicados esforços externos sobre ela.

O solo é suposto plano, horizontal e infinitamente rígido e o oleoduto, com comprimento infinito após o ponto de contato com o solo.

Neste trabalho, admite-se que os *davits* operem de forma que os comprimentos dos seus cabos são dados. Supondo que estes sejam inextensíveis aos esforços de tração e perfeitamente flexíveis à compressão, a estrutura fica sujeita a vínculos unilaterais nos pontos em que os cabos são amarrados a ela.

O modelo matemático da estrutura em equilíbrio estático tem a forma de um sistema de equações de estado. As tensões nos cabos, que são incógnitas do problema, podem ser encaradas como variáveis de controle, através das quais se deseja obter uma "resposta" do sistema que satisfaça um conjunto pré-especificado de condições no contorno e em pontos intermediários dados do domínio de integração. Deve ser ressaltada a dificuldade adicional que representa o fato de se desconhecer o comprimento suspenso do oleoduto, isto é, o domínio de integração é, ele próprio, também uma incógnita do problema.

Em resumo, dados os comprimentos dos cabos, o que se busca aqui é determinar a configuração de equilíbrio do oleoduto e as tensões nos cabos (nulas para os cabos eventualmente frouxos).

4.2 Equações de Equilíbrio

Considere-se o modelo de estados construído no Capítulo 2, e, em particular, as equações de equilíbrio de forças 2.13 e 2.14 do problema equivalente no ar, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{dF'_x}{ds} &= 0 \\ \frac{dF'_y}{ds} &= \gamma_{eq}.\end{aligned}$$

Sejam n_c o número de cabos e T_i e $s = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n_c$, respectivamente, a tensão e a posição do ponto de amarração do i -ésimo cabo ao oleoduto. Convencionou-se que $T_i > 0$ para força de tração. Seja ainda φ_i o ângulo associado à direção do segmento definido pela extremidade da lança do *davit* i e pelo ponto $(x(\sigma_i), y(\sigma_i))$ do oleoduto (veja fig. 4.1).

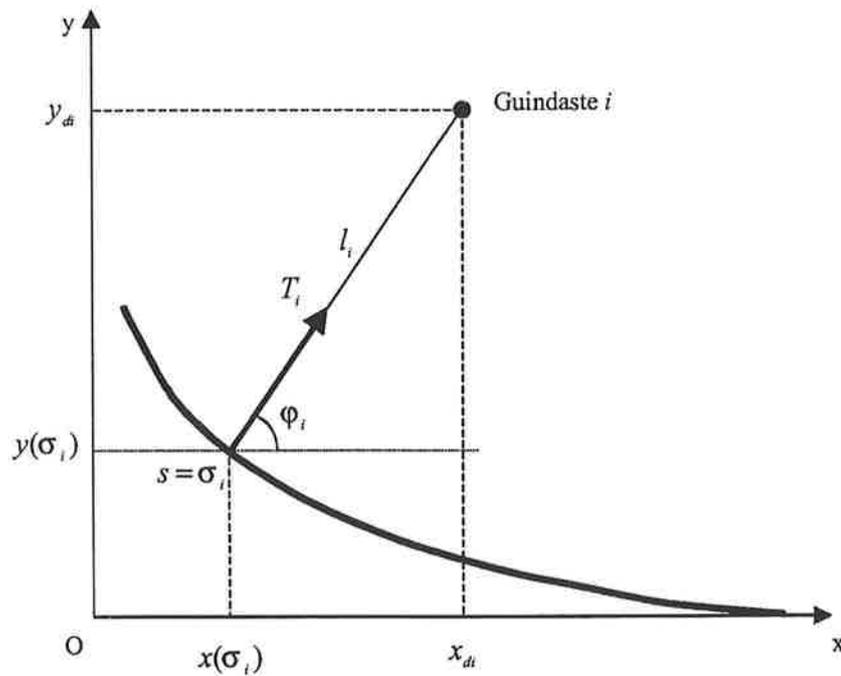
Supondo que as forças aplicadas pelos cabos sobre o oleoduto sejam concentradas nos pontos $s = \sigma_i$, elas introduzem descontinuidades em F'_x e F'_y . Este efeito pode ser incluído no modelo por meio de seqüências de impulsos da seguinte forma:

$$\frac{dF'_x}{ds} = - \sum_{i=1}^{n_c} T_i \cos \varphi_i \delta(s - \sigma_i) \quad (4.1)$$

$$\frac{dF'_y}{ds} = \gamma_{eq} - \sum_{i=1}^{n_c} T_i \sin \varphi_i \delta(s - \sigma_i), \quad (4.2)$$

onde $\delta(\cdot)$ é o delta de Dirac.

Tendo em vista o procedimento de cálculo de derivadas parciais a ser introduzido na seção 4.4, é conveniente definir uma variável de controle $u(s)$ da forma que se segue. Para isso, considera-se uma partição disjunta s_0, s_1, \dots, s_{n_c} do intervalo $[0, L]$, de maneira que $\sigma_i \in [s_{i-1}, s_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_c$, e define-se a função constante por trechos

Figura 4.1: Definição do ângulo φ_i .

$$u(s) = T_i \quad (s \in [s_{i-1}, s_i]). \quad (4.3)$$

Com isso, as equações 4.1 e 4.2 podem ser reescritas como

$$\frac{dF'_x}{ds} = -u(s) \sum_{i=1}^{n_c} \cos \varphi_i \delta(s - \sigma_i) \quad (4.4)$$

$$\frac{dF'_y}{ds} = \gamma_{eq} - u(s) \sum_{i=1}^{n_c} \sin \varphi_i \delta(s - \sigma_i), \quad (4.5)$$

É óbvio que, em razão da presença das seqüências de impulsos nas equações acima, de fato só importa o valor de $u(s)$ para $s = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n_c$. No entanto, esta maneira de definir $u(s)$ será útil adiante, na seção 4.4.

As demais equações do modelo (2.15 e 2.7-2.10),

$$\frac{dM}{ds} = F'_x \sin \theta - F'_y \cos \theta \quad (4.6)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{\alpha} \quad (4.7)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (4.8)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad (4.9)$$

assim como o vetor de estados

$$X(s) = [F'_x(s) \ F'_y(s) \ M(s) \ \theta(s) \ x(s) \ y(s)]^T, \quad (4.10)$$

são aqui reproduzidos apenas para facilitar a referência.

As equações 4.4-4.9 representam o modelo de estados do oleoduto na forma geral

$$\dot{X}(s) = F[X(s), u(s), s]. \quad (4.11)$$

Condições de contorno A hipótese citada acima de que a extremidade suspensa do oleoduto é livre e, portanto, isenta da presença de esforços, pode ser descrita por meio das seguintes condições:

$$F'_x(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$F'_y(0) = 0 \quad (4.13)$$

$$M(0) = 0. \quad (4.14)$$

Conforme demonstrado em [9] como decorrência da hipótese de que o solo é rígido, no ponto em que o oleoduto entra em contato com o fundo do mar, tanto o momento fletor como o ângulo de inclinação da linha elástica devem ser nulos, isto é,

$$M(L) = 0 \quad (4.15)$$

$$\theta(L) = 0. \quad (4.16)$$

Por fim, há duas condições geométricas óbvias que devem ser satisfeitas no ponto de contato, a saber,

$$x(L) - L = 0 \quad (4.17)$$

$$y(L) = 0. \quad (4.18)$$

Naturalmente, o comprimento suspenso L deve ser tal que

$$L \geq 0. \quad (4.19)$$

Restrição geométrica Denotando-se por l_{di} o comprimento dado do i -ésimo cabo e por l_i a distância do seu ponto de amarração sobre o oleoduto $(x(\sigma_i), y(\sigma_i))$ à extremidade da lança do *davit* (x_{di}, y_{di}) (veja fig. 4.1), isto é,

$$l_i = \sqrt{[x(\sigma_i) - x_{di}]^2 + [y(\sigma_i) - y_{di}]^2}, \quad (4.20)$$

tem-se a seguinte restrição geométrica:

$$l_i - l_{di} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_c). \quad (4.21)$$

Esta condição decorre do fato de o cabo ter sido suposto inextensível, impedindo assim o deslocamento do ponto de amarração a uma distância do *davit* maior do que seu comprimento.

Condição de vínculo unilateral Os cabos definem restrições do tipo vínculo unilateral, semelhantes àsquelas impostas pelo solo no POAFO (veja seção 3.2), a saber,

- o cabo não resiste a esforços de compressão;
- se o cabo está frouxo então a tensão no cabo é nula;
- se a tensão no cabo é não nula, então a distância do ponto de amarração ao *davit* é igual ao comprimento do cabo.

Para o i -ésimo cabo ($i = 1, 2, \dots, n_c$), estas condições podem ser expressas, respectivamente, como:

$$T_i \geq 0 \quad (4.22)$$

$$l_{di} > l_i \Rightarrow T_i = 0 \quad (4.23)$$

$$T_i > 0 \Rightarrow l_{di} = l_i. \quad (4.24)$$

Para concluir esta seção, é interessante observar que, neste ponto, o problema consiste em determinar as tensões nos cabos T_i , $i = 1, 2, \dots, n_c$, tais que a solução do sistema 4.1-4.9 satisfaz as condições de contorno 4.12-4.18 e as restrições 4.19-4.24. Este problema será aqui chamado de **P2**.

4.3 Um Problema de Controle Ótimo

Da mesma maneira que para o problema do oleoduto apoiado no fundo do oceano, também aqui há alguma semelhança entre o problema **P2** formulado e outros que surgem em engenharia de controle. O papel do tempo nestes últimos é aqui desempenhado pela

variável s . O sistema de equações de estado 4.4-4.9 representa a "dinâmica" do sistema. A função de controle, do tipo constante por trechos, deve ser determinada de maneira que a solução do problema satisfaça as restrições 4.12-4.24. As condições de vínculo unilateral 4.23-4.24, contudo, não são usuais. Apesar disso, mostra-se a seguir que a solução do problema **P2** pode ser obtida resolvendo-se um problema de controle ótimo a ele associado.

Considere-se o problema de minimizar o funcional

$$J = \sum_{i=1}^{n_c} (l_{di} - l_i) T_i \quad (4.25)$$

sujeito às restrições 4.3-4.9 e 4.12-4.22.

Observa-se, em primeiro lugar, que parte das condições iniciais é conhecida (eqs. 4.12-4.14), mas que $\theta(0)$, $x(0)$, $y(0)$ e o próprio comprimento suspenso L são desconhecidos. Além disso, conforme já mencionado na seção 4.2, só importam os valores de $u(s)$ para $s = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n_c$,

$$u(\sigma_i) = T_i.$$

Sendo assim, define-se o vetor de incógnitas ξ ,

$$\xi = [\theta(0) \ x(0) \ y(0) \ L \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_{n_c}]^T, \quad (4.26)$$

e verifica-se que o problema de controle ótimo se reduz, na verdade, a um problema de programação matemática [3]. Este problema será aqui denominado de **P2'**.

As equações de estado 4.4-4.9 são, de fato, restrições que devem ser obedecidas pela solução do problema. No entanto, sob um ponto de vista mais pragmático, elas podem ser encaradas como parte do processo de cálculo das funções que associam a um dado vetor ξ , os valores de $M(L)$, $\theta(L)$, $x(L) - L$, $y(L)$ e l_i , $i = 1, 2, \dots, n_c$.

Seja J^* o valor mínimo do funcional acima.

Proposição Se ξ é uma solução do problema **P2'** tal que

$$J^* = 0,$$

então ξ é também uma solução de **P2**.

A demonstração desta proposição é imediata a partir das condições 4.21-4.22 e da definição de J (eq. 4.25).

Embora de menor importância prática, é também imediato observar que, se o vetor ξ é uma solução de **P2**, então ele também o é de **P2'** e $J^* = 0$.

Da mesma forma que no caso do oleoduto apoiado no fundo do oceano, a proposição acima é o ponto central da abordagem aqui proposta para resolver o problema do abandono e resgate laterais. É evidente que, uma vez que ξ tenha sido obtido, a geometria e os esforços internos podem ser calculados, bastando para isso integrar o conjunto de equações diferenciais 4.1-4.9.

Para resolver **P2'** optou-se, por comodidade, por utilizar a rotina *constr* do Matlab [15]. Esta se baseia num método de Programação Quadrática Seqüencial [15], o qual requer o cálculo das derivadas parciais do funcional (eq. 4.25) e das restrições (eqs. 4.15-4.18 e 4.21) em relação às componentes do vetor de incógnitas ξ . A necessidade de se calcular as derivadas parciais não é, na verdade, exclusiva da rotina *constr*, mas sim um requisito de um número considerável de métodos de otimização [3].

4.4 Cálculo das Derivadas Parciais

Nesta seção, considera-se inicialmente um problema geral de controle ótimo e apresenta-se um procedimento de cálculo de derivadas parciais. Em seguida, mostra-se como esse procedimento deve ser particularizado para a obtenção das derivadas parciais de interesse, mencionadas na seção 4.3 [10].

4.4.1 Um Problema Geral

Seja o sistema descrito na forma de estados

$$\dot{X}(s) = \mathcal{F}[X(s), u(s), s] \quad (4.27)$$

onde o ponto denota derivada em relação à variável independente s , $X(s) \in \mathfrak{R}^{\nu}$ é o vetor de estados e $u(s)$ é a variável de controle, suposta escalar¹. Denotando

$$X_0 = X(0),$$

admita-se definido um funcional

$$\mathcal{J}(X_0, u, L) = g[X(L), L] + \int_0^L f[X(s), u(s), s] ds \quad (4.28)$$

onde $g[X(s), s]$ e $f[X(s), u(s), s]$ são funções reais dadas.

Seja

$$\mathcal{H}(X, u, s, \lambda) = f(X, u, s) + \lambda^T \mathcal{F}(X, u, s),$$

onde $\lambda = \lambda(s) \in \mathfrak{R}^{\nu}$ é o vetor solução da equação

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} \quad (4.29)$$

¹Esta hipótese não é essencial.

com a condição terminal

$$\lambda^T(L) = \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{s=L}. \quad (4.30)$$

Pode-se mostrar (veja [6], [9]) que a variação de \mathcal{J} é dada por

$$\delta\mathcal{J} = \lambda^T(0) \delta X_0 + \left. \left(\frac{\partial g}{\partial s} + \mathcal{H} \right) \right|_{s=L} \delta L + \int_0^L \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \delta u \, ds. \quad (4.31)$$

Desta igualdade resultam de imediato as derivadas parciais de \mathcal{J} em relação a $X(0)$ e a L :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial X_0} = \lambda(0) \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial L} = \left. \left(\frac{\partial g}{\partial s} + \mathcal{H} \right) \right|_{s=L}. \quad (4.33)$$

Considere-se agora que a função de controle $u(s)$ seja do tipo constante por trechos da forma

$$u(s) = u_j \quad (s_{j-1} \leq s < s_j),$$

onde $j = 1, 2, \dots, \mu$ e s_0, s_1, \dots, s_μ é uma partição disjunta dada do intervalo $[0, L]$.

Admita-se que $u(s)$ sofra uma variação δu_j somente no intervalo $s_{j-1} \leq s < s_j$. Nestas condições, a equação 4.31 permite escrever que

$$\delta\mathcal{J} = \left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} \, ds \right) \delta u_j$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u_j} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j} \, ds. \quad (4.34)$$

Na literatura, $\lambda(s)$ e $\mathcal{H}(X, u, s, \lambda)$ são denominados, respectivamente, vetor de multiplicadores de Lagrange e hamiltoniana do sistema [6].

4.4.2 Particularizações Para os Casos de Interesse

Sejam

$$\nu = n_c$$

e a função de controle $u(s)$ constante por trechos definida na equação 4.3.

Primeiramente serão consideradas as quatro restrições de igualdade 4.15-4.18; em seguida, as restrições de desigualdade 4.21 e, por fim, o funcional da equação 4.25.

Restrição 4.15: $M(L) = 0$

Neste caso, basta considerar o funcional \mathcal{J} da equação 4.28 particularizado para

$$g[X(L), L] = M(L) = x_3(L)$$

e

$$f[X(s), u(s), s] = 0.$$

A função $\mathcal{F}(X, u, s)$ é dada pelos 2os. membros das equações 4.1-4.9 e $X(s)$, pela equação 4.10.

Integra-se então a equação 4.29 desde $s = L$ até $s = 0$, com a condição terminal dada pela equação 4.30, isto é,

$$\lambda(L) = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

obtendo-se, conforme as equações 4.32 e 4.33,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta(0)} = \lambda_4(0) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x(0)} = \lambda_5(0) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y(0)} = \lambda_6(0) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \left(\lambda^T F \right) \Big|_{s=L} . \quad (4.38)$$

Além disso, da equação 4.34 resulta

$$\frac{\partial g}{\partial T_j} = \lambda_1(\sigma_j) \cos \varphi_j + \lambda_2(\sigma_j) \sin \varphi_j \quad (4.39)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_c$.

Restrição 4.16: $\theta(L) = 0$

Neste caso, definem-se

$$g[X(L), L] = \theta(L) = x_4(L)$$

e

$$\lambda(L) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T,$$

obtendo-se as derivadas parciais por meio das equações 4.35-4.39.

Restrição 4.17: $x(L) - L = 0$

Aqui, escolhem-se

$$g[X(L), L] = x(L) - L = x_5(L) - L$$

e

$$\lambda(L) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T,$$

resultando as derivadas parciais da aplicação das equações 4.35-4.37, 4.39 e

$$\frac{\partial g}{\partial L} = -1 + (\lambda^T F) \Big|_{s=L}. \quad (4.40)$$

Restrição 4.18: $y(L) = 0$

Por fim, tomam-se

$$g[X(L), L] = y(L) = x_6(L)$$

e

$$\lambda(L) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

obtendo-se as derivadas parciais com o uso das equações 4.35-4.39.

Restrições 4.21: $l_i - l_{di} \leq 0$, ($i = 1, 2, \dots, n_c$)

Como os comprimentos dos cabos l_{di} , $i = 1, 2, \dots, n_c$, são constantes dadas, trata-se a seguir do cálculo das derivadas parciais dos l_i em relação às incógnitas do problema (ξ).

Neste caso, basta considerar o funcional \mathcal{J} da equação 4.28 particularizado para

$$g[X(L), L] = 0$$

e

$$f[X(s), u(s), s] = \int_0^L \bar{l}_i[x(s), y(s)] \delta(s - \sigma_i) ds, \quad (4.41)$$

onde a função $\bar{l}_i[x(s), y(s)]$ é definida por²

$$\bar{l}_i[x(s), y(s)] = \sqrt{[x(s) - x_{di}]^2 + [y(s) - y_{di}]^2}.$$

Deve-se então integrar a equação 4.29 desde $s = L$ até $s = 0$, com a condição terminal dada pela equação 4.30, que, neste caso, se reduz a

$$\lambda(L) = 0,$$

obtendo-se, conforme as equações 4.32 e 4.33,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial \theta(0)} &= \lambda_4(0) \\ \frac{\partial l_i}{\partial x(0)} &= \lambda_5(0) \\ \frac{\partial l_i}{\partial y(0)} &= \lambda_6(0) \\ \frac{\partial l_i}{\partial L} &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, da equação 4.34 resulta

$$\frac{\partial l_i}{\partial T_j} = \lambda_1(\sigma_j) \cos \varphi_j + \lambda_2(\sigma_j) \sin \varphi_j \quad (4.42)$$

para $j = 1, 2, \dots, n_c$.

Neste ponto, cabem duas observações importantes. Em primeiro lugar, das equações 4.29 e 4.41, tem-se

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial \bar{l}_i}{\partial X} \delta(s - \sigma_i) - \lambda^T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X} \quad (4.43)$$

que, para $\sigma_i^+ \leq s \leq L$, se reduz ao sistema linear

²Note-se que $\bar{l}_i[x(\sigma_i), y(\sigma_i)] = l_i$, conforme a equação 4.20.

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X}.$$

E, como $\lambda(L) = 0$, tem-se que

$$\lambda(s) = 0 \quad (\sigma_i^+ \leq s \leq L), \quad (4.44)$$

o que significa que basta integrar a equação 4.29 apenas desde $s = \sigma_i^+$ até $s = 0$. Além disso, a equação 4.42 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial T_j} &= \lambda_1(\sigma_j) \cos \varphi_j + \lambda_2(\sigma_j) \sin \varphi_j & (1 \leq j \leq i) \\ \frac{\partial l_i}{\partial T_j} &= 0 & (i+1 \leq j \leq n_c) \end{aligned}$$

Em segundo lugar, a integração da equação 4.29 no intervalo $\sigma_i^+ \leq s \leq \sigma_i^-$, produz descontinuidades em λ_5 e λ_6 dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_5(\sigma_i^+) - \lambda_5(\sigma_i^-) &= -\frac{\partial \bar{l}_i}{\partial x} \Big|_{s=\sigma_i} \\ \lambda_6(\sigma_i^+) - \lambda_6(\sigma_i^-) &= -\frac{\partial \bar{l}_i}{\partial y} \Big|_{s=\sigma_i} \end{aligned}$$

conforme a equação 4.43. Portanto, tendo em vista a equação 4.44, resulta que

$$\begin{aligned} \lambda_5(\sigma_i^-) &= \frac{\partial \bar{l}_i}{\partial x} \Big|_{s=\sigma_i} \\ \lambda_6(\sigma_i^-) &= \frac{\partial \bar{l}_i}{\partial y} \Big|_{s=\sigma_i} \end{aligned}$$

Funcional 4.25: J

Por fim, deve-se notar que, obtidas as derivadas parciais dos l_i , $i = 1, 2, \dots, n_c$, em relação às componentes do vetor ξ , o cálculo das derivadas parciais do funcional J (eq. 4.25) é imediato.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Este capítulo contém alguns resultados numéricos obtidos com o objetivo de ilustrar a aplicação da metodologia proposta. Em primeiro lugar são apresentados resultados referentes ao POAFO. Em seguida, apresentam-se resultados obtidos para o PARL.

5.1 Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano

Para a obtenção dos resultados numéricos relativos ao POAFO, foram utilizados os dados que constam na Tabela 5.1. Nos dois exemplos foi utilizado o vetor nulo como aproximação inicial para o vetor de incógnitas ξ .

Parâmetro	Valor	Unidade
$\hat{E}\hat{J}$	4985359	kgf.m ²
\hat{L}_0	100	m
\hat{V}_0	1	m
$\hat{\gamma}_{eq}$	187,24	kgf/m
n	100	—

Tabela 5.1: POAFO - Valores numéricos dos dados do problema.

- **Solo Regular.** Neste caso considera-se o solo contendo uma depressão abrupta em forma de U, conforme ilustra a figura 5.1 (linha pontilhada). O oleoduto tem comprimento $\hat{L} = 100\text{m}$. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 5.1-5.5.

Todos os gráficos mostram claramente a simetria da solução em relação ao ponto médio do oleoduto ($s = 50\text{m}$).

Observa-se na figura 5.1 que o oleoduto está praticamente apoiado em cinco pontos: nas duas extremidades, nos cantos que delimitam a depressão e no centro do vale. Este fato também pode ser notado no gráfico da distribuição da reação do solo (fig. 5.2).

A figura 5.3 mostra a variação brusca da força cortante nos pontos de contato do oleoduto com o solo. Nota-se também que a força cortante se anula nas extremidades do oleoduto, conforme as condições de contorno das equações 3.9 e 3.11.

Na figura 5.4 observam-se variações bruscas na derivada primeira do momento fletor nos pontos de contato com as quinas da depressão, onde a força cortante se concentra. Pode-se notar também que o momento fletor se anula nas extremidades do oleoduto, conforme as condições de contorno das equações 3.10 e 3.12.

A figura 5.5 mostra que os ângulos de inclinação da linha elástica ao longo do oleoduto resultaram suficientemente pequenos para a validade da linearização das equações de estado. Este fato está, aliás, em conformidade com o perfil do solo considerado neste exemplo (fig. 5.1).

- **Solo Irregular.** Neste caso, o solo tem perfil irregular e o comprimento do oleoduto é $\hat{L} = 1000\text{m}$. Os resultados obtidos são apresentados nas figuras 5.6-5.10.

Na figura 5.8 observa-se que a força cortante se anula nas extremidades do oleoduto, estando, portanto, respeitadas as condições de contorno das equações 3.9 e 3.11.

A figura 5.9 mostra que o momento fletor é nulo em ambas as extremidades do oleoduto, conforme requerido pelas condições de contorno das equações 3.10 e 3.12.

5.2 Abandono e Resgate Laterais

Os dados utilizados neste caso são apresentados na Tabela 5.2. A aproximação inicial utilizada para o vetor de incógnitas foi $\hat{\xi}_0 = [10^\circ \ 0m \ 30m \ 100m \ 5000kgf \ 1000kgf \ 5000kgf]^T$.

Parâmetro	Valor	Unidade
$\hat{E}\hat{J}$	22×10^6	kgf.m ²
\hat{L}_0	100	m
$\hat{\gamma}_0$	68,27	kgf/m
n_c	3	-
\hat{l}_{d1}	40	m
\hat{l}_{d2}	70	m
\hat{l}_{d3}	68	m
$\hat{\sigma}_1$	0,1	m
$\hat{\sigma}_2$	30,0	m
$\hat{\sigma}_3$	60,0	m
\hat{x}_{d1}	0	m
\hat{y}_{d1}	110	m
\hat{x}_{d2}	30	m
\hat{y}_{d2}	110	m
\hat{x}_{d3}	60	m
\hat{y}_{d3}	110	m
n	100	-

Tabela 5.2: PARL - Valores numéricos dos dados do problema.

A solução ξ obtida é apresentada na Tabela 5.3. Como se pode notar, os cabos 1 e 3 resultaram tensos, ao passo que o cabo 2 afrouxou.

Variável	Valor	Unidade	Obs.
$\hat{\theta}(0)$	-33,0	graus	
$\hat{x}(0)$	18,6	m	
$\hat{y}(0)$	74,7	m	
\hat{L}	208,4	m	
\hat{l}_1	40,0	m	tenso
\hat{T}_1	2728,7	kgf	
\hat{l}_2	53,3	m	frouxo
\hat{T}_2	0	kgf	
\hat{l}_3	68,0	m	tenso
\hat{T}_3	7888,2	kgf	

Tabela 5.3: PARL - Solução obtida.

A figura 5.11 mostra que, no ponto de contato entre o oleoduto e o solo, a ordenada $y(L)$ é nula, conforme a equação 4.18.

Observa-se na figura 5.12 que o ângulo de inclinação é nulo no ponto de contato do oleoduto com o solo (eq. 4.16).

Na figura 5.13 notam-se as descontinuidades nas forças internas que ocorrem nos pontos de amarração dos cabos 1 e 3 ao oleoduto.

Na figura 5.14 observa-se a descontinuidade na derivada primeira do momento fletor (força cortante) no ponto onde o 3o. cabo está preso ao oleoduto. Pode-se notar também que o momento fletor é nulo nas extremidades do oleoduto, conforme as equações 4.14 e 4.15.

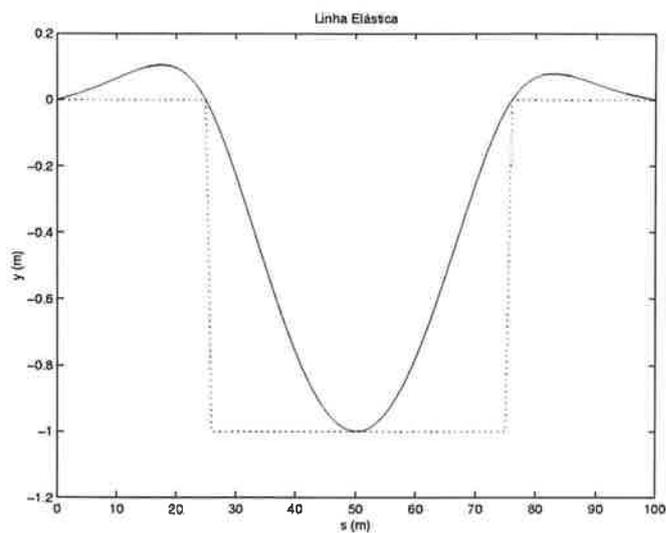


Figura 5.1: Solo regular - Linha elástica (linha contínua) e perfil do solo (linha pontilhada).

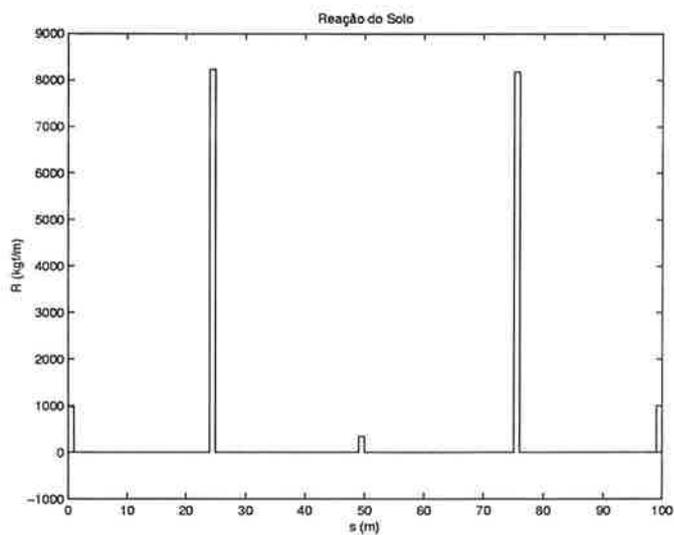


Figura 5.2: Solo regular - Reação do solo.

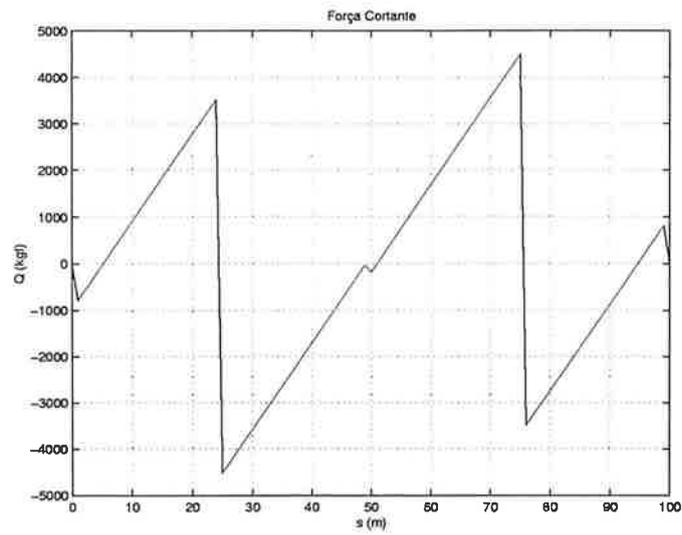


Figura 5.3: Solo regular - Força cortante.

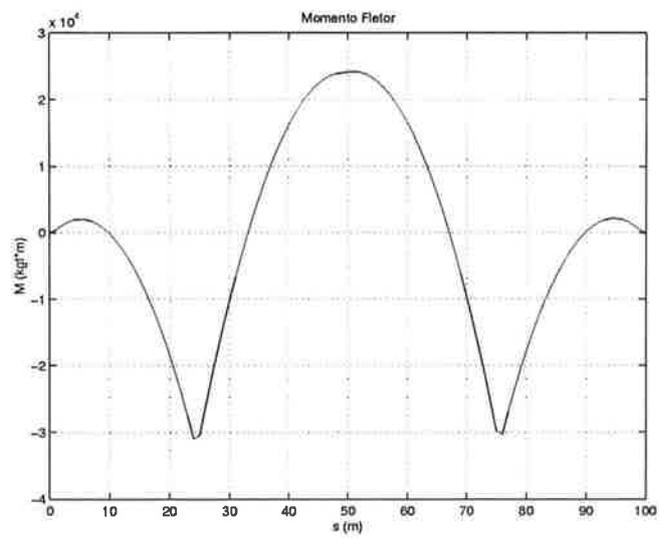


Figura 5.4: Solo regular - Momento fletor.

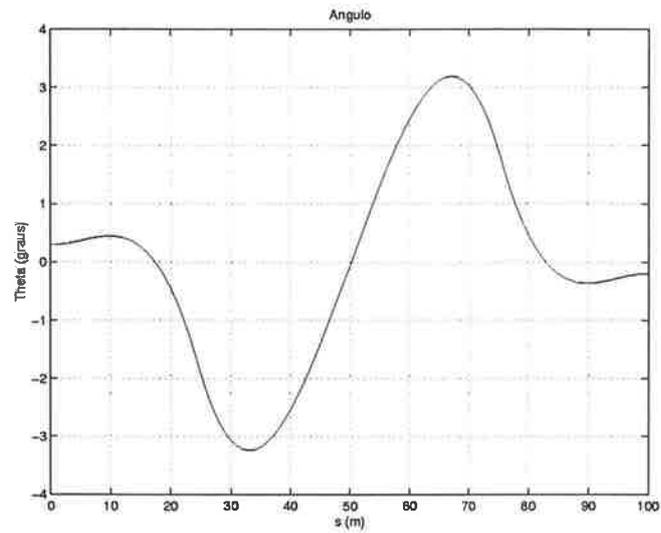


Figura 5.5: Solo regular - Ângulo de inclinação da linha elástica.

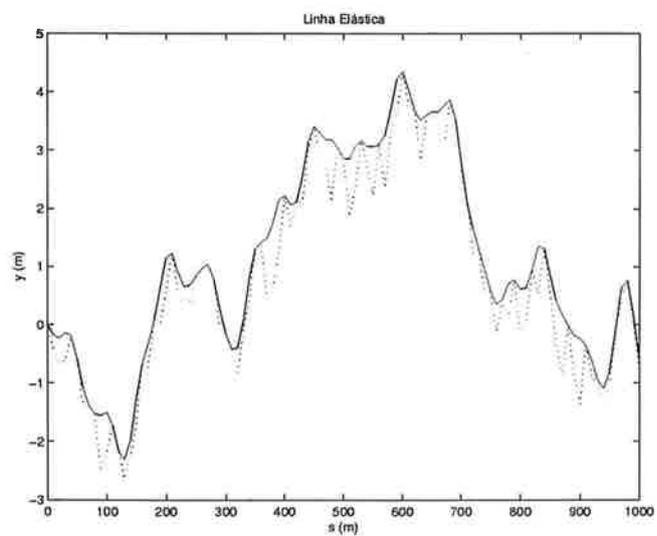


Figura 5.6: Solo irregular - Linha elástica (linha contínua) e perfil do solo (linha pontilhada).

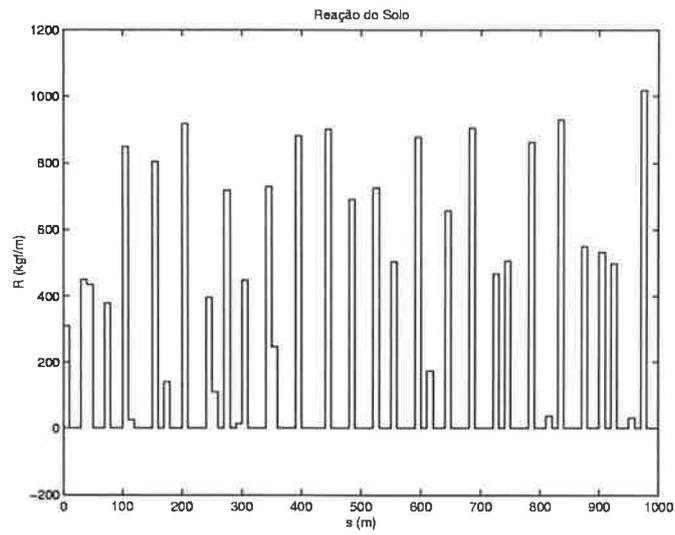


Figura 5.7: Solo irregular - Reação do solo.

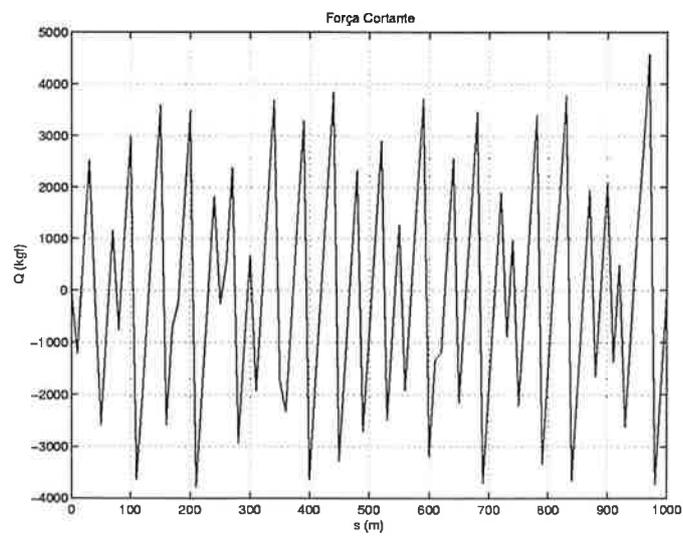


Figura 5.8: Solo irregular - Força cortante.

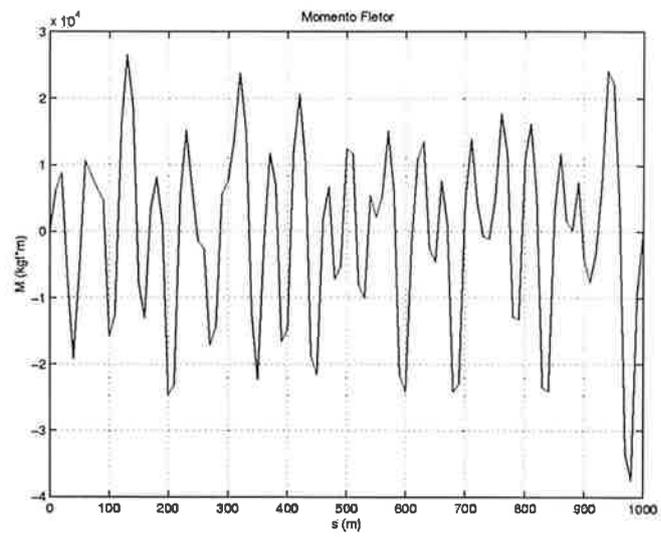


Figura 5.9: Solo irregular - Momento fletor.

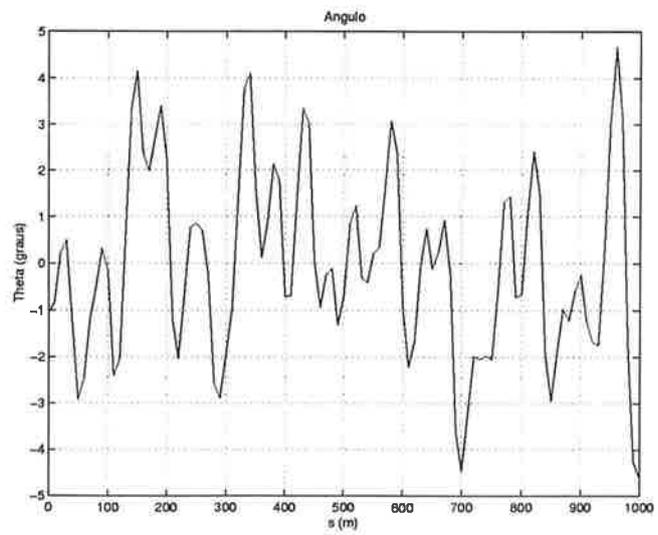


Figura 5.10: Solo irregular - Ângulo de inclinação da linha elástica.

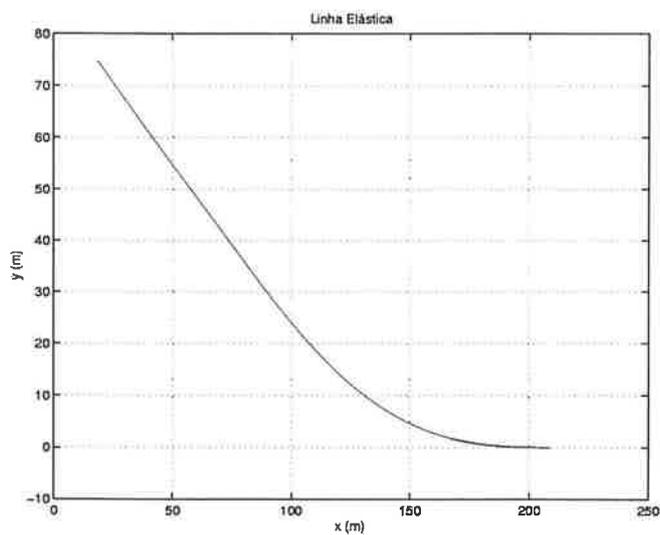


Figura 5.11: Abandono/resgate lateral - Linha elástica.

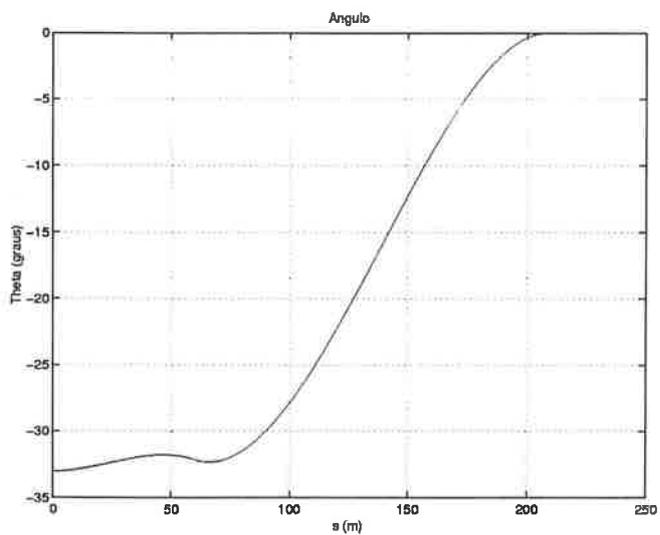


Figura 5.12: Abandono/resgate lateral - Ângulo de inclinação da linha elástica.

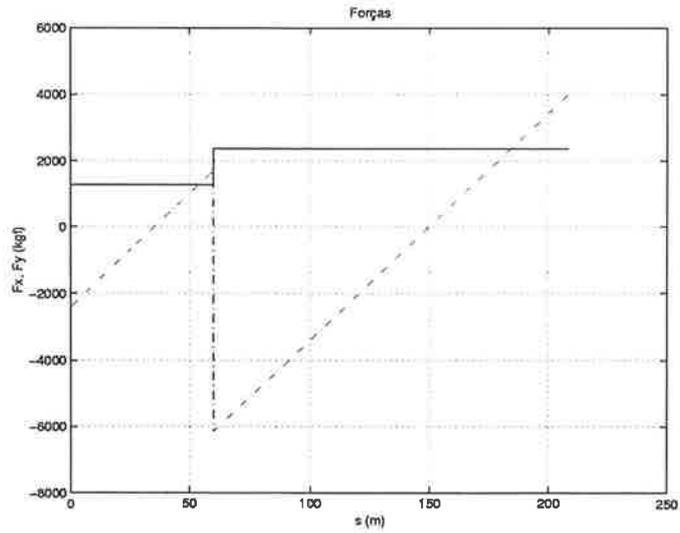


Figura 5.13: Abandono/resgate lateral - Forças internas F'_x (linha contínua) e F'_y (linha tracejada).

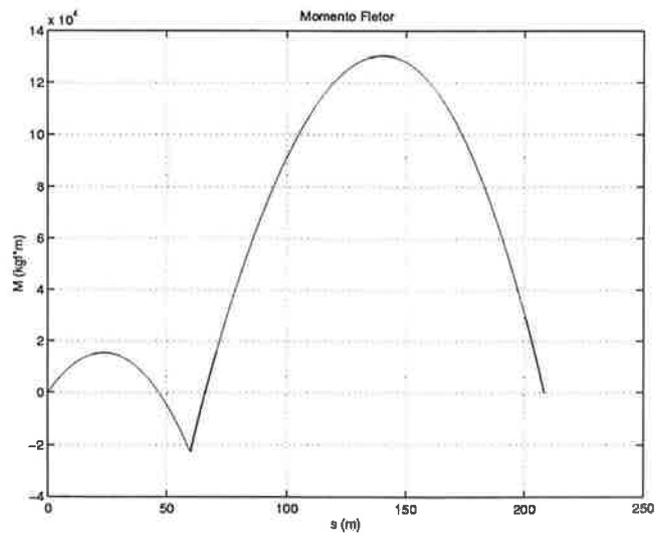


Figura 5.14: Abandono/resgate lateral - Momento fletor.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho apresentou uma nova abordagem para a determinação da configuração de equilíbrio estático de oleodutos apoiados no fundo do oceano e durante as operações de abandono e resgate laterais. A característica comum a ambos os problemas, a qual permitiu que a eles fosse dado um tratamento unificado, foi a natureza unilateral dos vínculos representados, respectivamente, pelo solo e pelos cabos. Os modelos utilizados para representar esses vínculos, baseados inicialmente em desigualdades, foram reescritos na forma de funcionais a serem minimizados. Este foi, em realidade, o ponto-chave do trabalho.

A representação da situação de equilíbrio estático do oleoduto por meio de um conjunto de equações de estado sujeito a condições de contorno permitiu encarar os problemas como típicos de controle ótimo.

- **Oleoduto apoiado no fundo do oceano**

No caso do oleoduto apoiado no fundo do oceano, o fato de as irregularidades do solo terem sido admitidas pequenas em relação às extensões dos vãos livres do oleoduto conduziu a um modelo de estados linearizado. Tendo em vista a forma quadrática do funcional

a minimizar, a discretização do problema produziu naturalmente um PPQ. A solução numérica foi então obtida utilizando-se software de uso comum para este tipo de problema.

Diferentemente dos trabalhos anteriores, em que o funcional minimizado representava a energia potencial da estrutura, aqui o funcional é associado ao modelo de contato unilateral. Outras características que distinguem a solução aqui obtida daquelas anteriores são as continuidades dos deslocamentos e das curvaturas, assim como a natureza distribuída da reação do solo.

O caso em que o solo é elástico poderia ser tratado considerando-se uma seqüência de problemas com solo rígido [18]. Num primeiro passo, o solo seria suposto rígido e a reação calculada pelo método aqui apresentado. Essa reação do solo obtida seria então utilizada para determinar uma primeira aproximação do perfil deformado do solo. Em seguida, o processo seria repetido a partir deste perfil calculado até que duas aproximações sucessivas do perfil do solo resultassem próximas entre si dentro de uma precisão pré-especificada.

- **Abandono e resgate laterais**

Não foi encontrada na literatura qualquer referência à solução do PARL aqui tratado. Neste caso, o problema de otimização tomou a forma de um problema de programação não linear diretamente, uma vez que as incógnitas do problema se resumiram a um vetor $\xi \in \mathfrak{R}^n$. As equações de estado, não lineares em razão da ocorrência de grandes deslocamentos na linha elástica, representaram restrições sobre as variáveis de estado ao longo de todo o domínio de integração.

A inclusão do efeito de correntes marítimas no modelo do oleoduto é simples, não tendo sido feita aqui para maior simplicidade das equações de equilíbrio. Da mesma forma, o

problema tridimensional, decorrente da ação de correntes ou posicionamento dos *davits* fora do plano vertical do oleoduto, poderia ter sido tratado exatamente da mesma forma aqui apresentada para o caso plano. Não haveria dificuldade conceitual adicional alguma - apenas a ordem do sistema de equações de estado aumentaria e mudaria a forma das condições de contorno. A presença de *risers* instalados na extremidade do oleoduto também poderia ter sido incluída no modelo sem dificuldades. Para isso, bastaria apenas introduzir uma descontinuidade em θ no ponto de fixação do *riser* ao oleoduto [9].

Problemas envolvendo cabos extensíveis poderiam ser considerados por meio de uma seqüência de problemas com cabos inextensíveis, da mesma forma sugerida para o problema do oleoduto apoiado no fundo do oceano com solo não rígido.

O modelo matemático utilizado para representar o equilíbrio dos oleodutos é apropriado para problemas em águas rasas, nos quais a rigidez flexional da estrutura é significativa. Mais especificamente, o modelo é adequado para problemas em que a rigidez flexional adimensional (eq. 2.8) EJ tem ordem de grandeza superior a 10^{-2} . Quando não é este o caso, seja em razão da grande profundidade do mar ou porque a rigidez flexional é baixa, é necessário utilizar o modelo da catenária enrijecida. Este se baseia na hipótese de que o oleoduto toma a forma de uma catenária ao longo da maior parte do seu comprimento. A influência das condições de contorno fica restrita a pequenas regiões do tipo camada limite, localizadas nas proximidades do ponto de contato com o solo e da extremidade do oleoduto [25].

Tanto no POAFO, como no PARL, oleodutos com características físicas variáveis ao longo

de seu comprimento podem ser tratados sem dificuldades. Um exemplo prático deste caso são os oleodutos com lastro de concreto variável.

Devem ser citadas duas extensões importantes deste trabalho, além daquelas já mencionadas acima. A primeira delas é o estudo de problemas de equilíbrio estático de oleodutos parcialmente apoiados em *stingers*. Outra extensão é o estudo do PARL como um processo quase estático, constituído por uma seqüência de problemas do tipo aqui tratado, em que os cabos dos *davits* seriam progressivamente recolhidos em cada passo. O objetivo neste caso seria planejar a realização da operação com segurança, minimizando, por exemplo, a tensão máxima ao longo do oleoduto durante o processo.

A solução de problemas não triviais de engenharia de estruturas utilizando uma visão de engenharia de controle talvez seja a característica mais importante deste trabalho. A simplicidade de formulação e de obtenção da solução numérica dos problemas tratados merecem ser destacadas. Estas observações se fundamentam na experiência do autor como participante dos projetos desenvolvidos no IPT para a solução dos problemas aqui considerados e de outros tantos. É mais do que certo que o amadurecimento proporcionado por tais projetos foi essencial para a realização deste trabalho. Mas é igualmente certo que a simplicidade da abordagem aqui proposta foi determinante para tornar possível a passagem das idéias iniciais aos resultados numéricos finais em poucos meses de trabalho, com dedicação rarefeita pelo caos da vida acadêmica.

Referências Bibliográficas

- [1] Abhary, K.; Luong, L.H.S.; Chan, F.T.S. An upper-bound approach to static stress analysis of pipelines. *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, **63**, 71-74, 1995.
- [2] Ansari, K.A. Nonlinear stress analysis of offshore pipelines during pickup operations. *Computers & Structures*, **18**(2), 357-363, 1984.
- [3] Aranha, J.A.P.; Lima, J.; Cruz, J.J., A method to solve the problem of abandon/recovery operation of a pipeline. *Brasil Offshore - International Symposium on Offshore Engineering*, Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- [4] Avriel, M., *Nonlinear Programming*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [5] Baniotopoulos, C.C. Saddle-supported pipelines: influence of unilateral support and thickness on the stress state. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **67**, 55-64, 1996.
- [6] Baniotopoulos, C.C.; Panagiotopoulos, P.D. Stress distribution along above-ground pipelines on a frictional supporting system. *Computers & Structures*, **61** (1-4), 783-789, 1997.
- [7] Bryson Jr., A.E. and Ho, Y.C., *Applied Optimal Control*. John Wiley, New York, 1975.

- [8] Chuang, P.-H. and Smith, D.L., Elastic analysis of submarine pipelines. *Journal of Structural Engineering*, **118**(1), 90-107, 1992.
- [9] Cruz, J.J.; Aranha, J.A.P. *Modelo Matemático para Análise Linear Estática das Operações de Transporte e Instalação de Oleodutos*. Rel. Téc. IPT No. 17.217, São Paulo, SP, 93p., 1982.
- [10] Cruz, J.J.; Lima, J.; Aranha, J.A.P. *Modelo Matemático Estático das Operações de Abandono e Resgate Lateral de Oleodutos*. Rel. Téc. IPT No. 18.520, São Paulo, SP, 178p., 1983.
- [11] Cruz, J.J.; Aranha, J.A.P.; Lima, J. *Análise Linear Estática e de Choque nas Operações de Transporte e Instalação de Oleodutos*. Rel. Téc. IPT-Mapcom No. 0001/85, São Paulo, SP, 93p., 1985.
- [12] Cruz, J.J.; Lima, J.; Aranha, J.A.P., Análise Linear Estática de Oleodutos Marítimos na Operação de Transporte por Rebocamento. *XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, São Paulo, SP, 617-625, 1993.
- [13] Cruz, J.J., An optimal control approach to the equilibrium of submarine pipelines. *Computers & Structures* (submetido).
- [14] Dareing, D.W. and Neathery, R.F., Marine pipeline analysis based on Newton's method with an Arctic application. *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, **92**, 827-833, 1970.
- [15] Dixon, D.A., Rutledge, D.R., Stiffened catenary calculations in pipeline laying problems. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, **90** (1), 153-160, 1968.

- [16] Franklin, G.F.; Powell, J.D. and Workman, M.L., *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.
- [17] Grace, A. *Optimization Toolbox for Use with Matlab*. Natick: The MathWorks, Inc., 1990.
- [18] Kirk, D.E., *Optimal Control Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [19] Lima, J.; Aranha, J.A.P.; Cruz, J.J. *Modelagem Matemática Estática e Dinâmica de um Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano*. Rel. Téc. IPT No. 18.858, São Paulo, SP, 97p., 1983.
- [20] Lima, J.; Cruz, J.J.; Aranha, J.A.P. *Modelagem Matemática de um Oleoduto Apoiado no Fundo do Oceano sob Ação de Forças Estáticas*. Rel. Téc. IPT No. 24.745, São Paulo, SP, 92p., 1986.
- [21] Lima, J. *Inequações Variacionais Aplicadas ao Problema de Assentamento de Oleodutos*. Tese de Doutorado, EPUSP, S. Paulo, SP, 1998.
- [22] Maier, G. and Andreuzzi, F., Elastic and elasto-plastic analysis of submarine pipelines as unilateral contact problems. *Computers & Structures*, **8**, 421-431, 1978.
- [23] Martins, C.A.; Aranha, J.A.P.; Lima, J.; Cruz, J.J. *Modelo Matemático do Comportamento Dinâmico de um Oleoduto Durante as Operações de Abandono e Resgate Lateral*. Rel. Téc. IPT No. 20.351, São Paulo, SP, 149p., 1984.
- [24] Ovunc, B., Mallareddy, U., Stress analysis of offshore pipelines. *Proc. Offshore Technology Conference*, Dallas, TX, Paper No. OTC 1222, 1970.
- [25] Palmer, A.C., Hutchinson, G., Ellis, J.W., Configuration of submarine pipelines during laying operations. *Proc. Offshore Technology Conference*, Houston, TX, Paper No. OTC 1071, 1969.

- [26] Panagiotopoulos, P.D., *Inequality Problems in Mechanics and Applications - Convex and Nonconvex Energy Functions*. Birkhauser, Basel, 1985.
- [27] Pedersen, P.T., Equilibrium of offshore cables and pipelines during laying. *International Shipbuilding Progress*, **22** (256), 399-408, 1975.
- [28] Ronold, K.O., A probabilistic approach to the lengths of free pipeline spans. *Applied Ocean Research*, **17**, 225-232, 1995.
- [29] Stavroulakis, G.E.; Baniotopoulos, C.C. and Panagiotopoulos, P.D., Sea-bed structure interaction in the presence of frictional effects for submarine pipelines. *Computers & Structures*, **24** (5), 767-775, 1986.