UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

ALFREDO GAY NETO

Engenheiro Mecânico, EPUSP, 2006

Doutor em Ciências, EPUSP, 2012

**Modelagem computacional do contato pontual entre corpos: uma visão
integrada**

São Paulo

2018

ALFREDO GAY NETO

Engenheiro Mecânico, EPUSP, 2006

Doutor em Ciências, EPUSP, 2012

**Modelagem computacional do contato pontual entre corpos: uma visão
integrada**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia
de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo como parte dos
requisitos para obtenção do título de Professor
Livre Docente

São Paulo
2018

Catálogo-na-publicação

Gay Neto, Alfredo

Modelagem computacional do contato pontual entre corpos: uma visão integrada / A. Gay Neto -- São Paulo, 2018.
310 p.

Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Mecânica do contato 2.Método dos elementos finitos 3.Mecânica computacional I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

*Este trabalho é dedicado à Juliana Siqueira Gay,
minha esposa e companheira.*

Agradecimentos

Expresso em primeiro lugar meu agradecimento a Deus. As oportunidades que Ele propiciou em minha vida me permitem escrever que sou agraciado de trabalhar nas áreas de docência e pesquisa. Sem essas graças, esse trabalho não existiria.

Gostaria de agradecer também aos meus pais, Alfredo Gay Junior e Mara Regina Garcia Gay, que sempre me amaram e me incentivaram a estudar e a seguir os passos de uma carreira acadêmica.

Em especial, agradeço à minha esposa Juliana Siqueira Gay. Seu incentivo diário por meio de conversas e interesse pelo meu trabalho, companheirismo em diversos períodos de trabalho na Alemanha e apoio constante e incondicional foram de suma importância nas principais reflexões e ideias que resultaram nesse trabalho.

Gostaria de expressar agradecimentos ao Prof. Paulo de Mattos Pimenta, ao Prof. Peter Wriggers, ao Prof. Clóvis de Arruda Martins, ao Prof. Celso Pupo Pesce e ao Prof. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli pelos incentivos, oportunidades e ensinamentos.

Agradeço a todos os colegas professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica pela convivência diária e apoio em atividades de ensino e pesquisa.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Vale S.A. pelo apoio financeiro em diversas oportunidades por meio de bolsas, auxílios e projetos de pesquisa em temas diretamente ligados aos desenvolvimentos desta tese.

Resumo

Problemas de mecânica dos sólidos que envolvem contato entre corpos são encontrados em uma vasta gama de aplicações. Na modelagem, a possibilidade de ocorrência de contato pode ser vista como um vínculo mecânico que é traduzido matematicamente em uma inequação. Fisicamente, impõe-se uma restrição para que os corpos envolvidos não possam ocupar o mesmo local no espaço, isto é, não deverá ocorrer penetração entre eles.

A mecânica computacional do contato estabelece estratégias e formulações matemáticas para a imposição de vínculos mecânicos de contato em um contexto de modelagem computacional de mecânica dos sólidos. Assim, as técnicas são empregadas em conjunto com métodos numéricos para a solução de campos cinemáticos envolvidos, como o Método dos Elementos Finitos. Esta tese é uma contribuição nessa temática, em particular explorando situações em que se pode modelar o contato por meio de ações pontuais.

São apresentadas as seguintes formulações matemáticas para solução de contato pontual entre sólidos: *master-master* entre duas superfícies no espaço, *master-slave* entre esferas e superfícies no espaço e *master-master* entre duas curvas no espaço. É feita a implementação computacional e são explorados cenários de simulação de contato envolvendo modelos estruturais de barras e cascas. Por fim, apresenta-se uma discussão comparativa entre as diferentes formulações, elencando as vantagens e desvantagens de cada uma. É feita uma proposta para a construção de uma família de modelos de contato pontual de forma unificada. Para isso, é introduzido o conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre duas superfícies.

Palavras-chave: Mecânica do Contato, Método dos Elementos Finitos, Mecânica Computacional

Abstract

Problems of solid mechanics involving contact between bodies are found in a broad field of applications. In their modeling, the possibility of contact occurrence can be viewed as a mechanical constraint, which is mathematically translated as an inequality. Physically, the constraint may be stated as: the involved bodies cannot occupy the same spatial location, that is, penetration is not allowed.

Computational contact mechanics establishes strategies and mathematical formulations to impose the contact mechanical constraints in the context of solid mechanics computational modeling. Thus, the techniques are employed together with numerical methods for solving kinematics, such as the Finite Element Method. This thesis is a contribution on this field, particularly exploring situations where contact may be modeled by pointwise actions.

The following mathematical formulations are presented for solving pointwise contact between solids: master-master between two spatial surfaces, master-slave between spheres and spatial surfaces and master-master between two spatial curves. The computational implementation is done. Scenarios of contact simulation involving rods and shells are explored. At the end, a comparative discussion between the distinct formulations is done, aiming at presenting the advantages and disadvantages of each. A proposal for the construction of a family of pointwise contact models within a single framework is done. For that, the concept of degeneration of master-master contact formulation between two surfaces is introduced.

Keywords: Contact Mechanics, Finite Element Method, Computational Mechanics

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Exemplo de modelo de um <i>riser</i> para prospecção de petróleo assentado em catenária.....	25
Figura 1.2 – Exemplo de modelo de um oleoduto assentado sobre o solo não plano.....	26
Figura 1.3 – Exemplo de modelo da interação de um rodeiro ferroviário com dois trilhos idealizados	27
Figura 1.4 – Exemplo de modelo de um tecido	28
Figura 1.5 – Exemplo de simulação de um sistema com corpos rígidos e flexíveis em contato	29
Figura 2.1 – Definições para um sólido B_w	32
Figura 2.2 – Problema da projeção ortogonal na escolha de pontos materiais para compor um par de contato.....	38
Figura 2.3 – Algumas abordagens para elaboração de formulações para mecânica computacional do contato no contexto do Método dos Elementos Finitos (a) nó-nó (b) nó-superfície (c) superfície-superfície	47
Figura 3.1 – Exemplo de malha de elementos finitos de um modelo estrutural de um ventilador de teto, composto de elementos de barra (haste central), corpo rígido (motor elétrico e estrutura central) e cascas (pás).....	57
Figura 3.2 – Visualização da malha de um modelo de barras (a) visualização na forma renderizada (como um sólido 3D) (b) visualização do eixo da barra e sua forma renderizada esmaecida.....	62
Figura 3.3 – Descrição Lagrangiana atualizada	63
Figura 3.4 – Descrição cinemática para a formulação da teoria estrutural de barras.....	72
Figura 3.5 – Descrição do elemento de barra da plataforma GIRAFFE	74
Figura 3.6 – Descrição cinemática para a formulação da teoria estrutural de cascas	76
Figura 3.7 – Descrição do elemento de casca da plataforma GIRAFFE.....	79
Figura 3.8 – Algoritmo de busca global por candidatos a contato (<i>pinball</i>)	84
Figura 4.1 – Corpos BA e BB candidatos a apresentar interação por contato e a parametrização de seus contornos Γ_A e Γ_B	87
Figura 4.2 – Superfícies de contato (a) conformes (b) não conformes	90
Figura 4.3 – Interação de contato entre superfícies. Áreas de contato Γ_{Ac} e Γ_{Bc}	91

Figura 4.4 – Detalhamento das áreas de contato Γ_{Ac} e Γ_{Bc} ilustrando o ponto de interação pontual.....	91
Figura 4.5 – O problema de ortogonalidade (a) convexidade (b) superfícies não lisas (c) não convexidade (finitas soluções) (d) infinitas soluções.....	92
Figura 4.6 – Solução desejada para o problema de otimização	95
Figura 4.7 – Formulação clássica de contato do tipo <i>master-slave</i> (a) definição de pontos <i>slave</i> (b) problema de mínima distância para um ponto <i>slave</i>	104
Figura 4.8 – (a) superfícies candidatas a contato na configuração “i”. (b) direção normal....	106
Figura 4.9 – (a) superfícies candidatas a contato na configuração “i+1”. (b) direção normal	107
Figura 4.10 – (a) Configuração inicial “i” (b) Configuração deformada “i+1” – deslizamento puro.....	109
Figura 4.11 – Exemplos de interpolação para elementos de barras (a) Barra de dois nós (b) Barra de três nós	124
Figura 4.12 – Seção transversal genérica e definição da coordenada convectiva θ	125
Figura 4.13 – Parametrização do eixo da barra e grandezas cinemáticas associadas à posição do eixo	125
Figura 4.14 – Exemplos de seção transversal super elíptica com $a = 2b$ e (a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 15$	128
Figura 4.15 – Exemplo de $\phi(\theta)$ e derivadas para $n = 8$. (a) $\phi\theta$ (b) $d\phi\theta/d\theta$ (c) $d^2\phi\theta/d\theta^2$ (d) seção transversal parametrizada com $a = b$	129
Figura 4.16 – Exemplo de parametrizações de superfícies de contorno de barras vizinhas...	130
Figura 4.17 – Superfícies do contorno de barras candidatas a apresentarem contato	131
Figura 4.18 – Vigas em balanço em contato – caso 1 (a) configuração inicial (instante 0.0) (b) configuração no instante 2.0	138
Figura 4.19 – Deslocamentos dos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 1	139
Figura 4.20 – Deslocamentos nos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 2	140
Figura 4.21 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 2	140
Figura 4.22 – Vigas em balanço – caso 3 (a) instante 1.00 (b) instante 1.05 (c) instante 1.10 (d) instante 1.15 (e) instante 1.20 (f) instante 1.25 (g) instante 2.00.....	142
Figura 4.23 – Deslocamento dos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 3	142

Figura 4.24 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 3	143
Figura 4.25 – Vigas em balanço – caso 4 (a) instante 1.00 (b) instante 1.20 (c) instante 1.40 (d) instante 1.60 (e) instante 1.80 (f) instante 2.00.....	144
Figura 4.26 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: “vigas em balanço – caso 4”	144
Figura 4.27 – Trama (<i>wefi</i>) e urdume (<i>warp</i>) e deslocamentos prescritos para formar o tecido	147
Figura 4.28 – Contato entre fibras envolvendo torção (a) instante 0.00 (b) instante 1.00 (c) instante 2.00 (d) instante 2.25 (e) instante 2.50 (f) instante 2.75 (g) instante 3.00	148
Figura 4.29 – Contato entre fibras envolvendo torção: detalhes da configuração associada ao instante 3.0.....	149
Figura 4.30 – Força (a) e momento (b) no ponto C. Exemplo numérico: contato entre fibras envolvendo torção	149
Figura 4.31 – Exemplo numérico 4.7.2.1 (a) vista lateral (b) vista isométrica.....	150
Figura 4.32 – Exemplo numérico 4.7.2.1: carregamento impulsivo	151
Figura 4.33 – Exemplo numérico 4.7.2.1: resultados para a barra alinhada na direção x (a) coordenada y do eixo da barra (b) rotação da barra na direção x	152
Figura 4.34 – Exemplo numérico 4.7.2.1: resultados para a barra alinhada na direção x (a) velocidade na direção y do eixo da barra (b) velocidade angular na direção x	152
Figura 4.35 – Exemplo numérico 4.7.2.2 (a) vista lateral (b) vista isométrica.....	154
Figura 4.36 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para a barra alinhada na direção x (a) coordenada y do eixo da barra (b) rotação da barra na direção x	154
Figura 4.37 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para a barra alinhada na direção x (a) velocidade na direção y do eixo da barra (b) velocidade angular na direção x	154
Figura 4.38 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para $\mu = 0.25$. (a) Força de atrito (em cada região de contato) (b) Estudo energético.....	155
Figura 4.39 – Exemplo numérico 4.7.2.2: (a) Estudo energético para $\mu = 0.10$ (b) Estudo energético para $\mu = 0.01$	155
Figura 4.40 – Exemplo numérico 4.7.2.3 (a) vista isométrica da configuração inicial (b) vista do plano yz (instante 1.0) (c) vista do plano xz (instante 1.0).....	156
Figura 4.41 – Exemplo numérico 4.7.2.3 (a) rotação na direção y do ponto B (b) coordenada y do ponto C.....	158

Figura 4.42 – Exemplo numérico 4.7.2.4: configuração inicial.....	158
Figura 4.43 – Exemplo numérico 4.7.2.4: evolução temporal da configuração do sistema ...	160
Figura 4.44 – Exemplo numérico 4.7.2.4: (a) coordenadas do ponto C (b) rotação do ponto C na direção y.....	161
Figura 4.45 – Exemplo numérico 4.7.2.5: descrição geométrica (a) vista de topo (b) vista lateral	163
Figura 4.46 – Exemplo numérico 4.7.2.5: configuração inicial.....	164
Figura 4.47 – Exemplo numérico 4.7.2.5: (a) coordenada z do projétil ao longo do tempo (b) tração total aplicada a cada lateral da cama elástica ao longo do tempo.....	164
Figura 4.48 – Exemplo numérico 4.7.2.5: Quadros temporais ilustrando a evolução do modelo (coluna da esquerda possui os casos de contato sem atrito, coluna da direita possui os casos com atrito). A escala de cores representa o esforço de tração em cada fibra.	166
Figura 5.1 – Descrição geométrica do modelo de contato na configuração “i”.....	168
Figura 5.2 – Atribuição de um conjunto de esferas para representação aproximada do contorno de uma barra com seção transversal circular	168
Figura 5.3 – Exemplo do movimento de um cilindro rígido sobre uma superfície plana (a) deslizamento puro (b) deslizamento e rolamento	175
Figura 5.4 – Descrição geométrica utilizada para definir a função <i>gap</i> tangencial	176
Figura 5.5 – Procedimento lógico para implementação do algoritmo de contato.....	187
Figura 5.6 – Superfície triangular rígida (a) plano paramétrico (b) exemplo de parametrização considerando $\mathbf{x}_A = 0,0,0$, $\mathbf{x}_B = (10,10,0)$ e $\mathbf{x}_C = (0,10,10)$	190
Figura 5.7 – Descrição vetorial dos vértices de uma região triangular	191
Figura 5.8 – Superfície oscilatória rígida (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície gerada com os parâmetros: $A_\zeta = 0.2$, $A_\theta = 0.1$, $A_{\zeta\theta} = 0$, $\lambda_\zeta = 2$, $\lambda_\theta = 1$, $\phi_\zeta = 0$ e $\phi_\theta = 0$	194
Figura 5.9 – Superfície triangular flexível (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície utilizando-se de $\mathbf{x}_A = 0,0,0$, $\mathbf{x}_B = 10,0,0$, $\mathbf{x}_C = 0,10,0$, $\mathbf{x}_D = (5,0,-1)$, $\mathbf{x}_E = (5,5,1)$ e $\mathbf{x}_F = (-1,5,0)$	196
Figura 5.10 – Superfície super elíptica flexível (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície para $a = 0.1$, $b = 0.2$, $n = 5$, $\mathbf{x}_A = 0,0,0$, $\mathbf{x}_B = 0,0,1$, $\mathbf{Q}_A = 100010001$, $\mathbf{Q}_B = \cos(\theta_B)\sin(\theta_B)0 - \sin(\theta_B)\cos(\theta_B)0001$, $\theta_B = -\pi/4$	197

Figura 5.11 – Não convexidade no problema de mínima distância entre o centro de uma esfera e uma superfície Γ (a) três soluções (b) duas ações pontuais de contato (sem atrito)	198
Figura 5.12 – Exemplo numérico 5.7.1: (a) visualização da bola e da superfície plana do solo (b) Carregamento impulsivo aplicado no centro da bola	201
Figura 5.13 – Exemplo numérico 5.7.1: força de contato ao longo do tempo: (a) impactos sucessivos (b) evolução das componentes normal e atrito	201
Figura 5.14 – Exemplo numérico 5.7.1: (a) evolução temporal da medida de rotação da bola (b) evolução temporal da magnitude da velocidade angular da bola	203
Figura 5.15 – Exemplo numérico 5.7.2: configuração inicial (a) vista isométrica (b) vista superior (c) vista lateral	205
Figura 5.16 – Exemplo numérico 5.7.2: trajetória do centro da bola para cada caso simulado (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$	207
Figura 5.17 – Exemplo numérico 5.7.2: estudo energético (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$	208
Figura 5.18 – Exemplo numérico 5.7.2: forças de contato (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$	209
Figura 5.19 – Exemplo numérico 5.7.3: configuração inicial e configurações deformadas em vista renderizada do modelo mostrando o tubo e a barra tracionada. Forças de contato aplicadas na barra tracionada são mostradas com setas com escala de cores relacionada à magnitude do esforço	211
Figura 5.20 – Exemplo numérico 5.7.3: componentes x e y de deslocamento do ponto B da barra tracionada	212
Figura 5.21 – Exemplo numérico 5.7.4: (a) seção transversal do canal (b) força variável ao longo do tempo aplicada no centro da bola	213
Figura 5.22 – Exemplo numérico 5.7.4: algumas configurações deformadas do sistema associadas à evolução da integração ao longo do tempo	215
Figura 5.23 – Exemplo numérico 5.7.4: (a) deslocamento da ponta do canal ao longo do tempo (b) componentes da força de contato atuante na bola ao longo do tempo	216
Figura 6.1 – Corpos esbeltos BA e BB candidatos a apresentar interação por contato e a parametrização de seus eixos Γ_A e Γ_B	218
Figura 6.2 – Parametrizações propostas para os eixos das barras	226

Figura 6.3 – (a) Região de negação para a curva número 3 com base na configuração de referência (b) Esferas <i>pinball</i> para detecção de contato em uma configuração deformada	231
Figura 6.4 – Modelo físico de uma barra de nitinol sob compressão e torção	233
Figura 6.5 – Deslocamento prescrito no ponto B ao longo do terceiro passo da simulação ..	235
Figura 6.6 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “ 4π ” (dados experimentais de [84]).....	237
Figura 6.7 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “ 4π ” (dados experimentais de [84]).....	237
Figura 6.8 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “ 5π ” (dados experimentais de [84]).....	238
Figura 6.9 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “ 5π ” (dados experimentais de [84]).....	238
Figura 6.10 – Configuração final obtida para o caso “ 4π ” considerando coeficiente de atrito 0.1	239
Figura 6.11 – Configuração final obtida para o caso “ 5π ” considerando coeficiente de atrito 0.1	239
Figura 6.12 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “ 10π ” ..	240
Figura 6.13 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “ 10π ”	241
Figura 6.14 – Configuração final renderizada obtida para o caso “ 10π ” considerando coeficiente de atrito 0.0 (a) vista lateral (b) vista isométrica (c) detalhe da vista isométrica ..	241
Figura 7.1 – (a) Contato master-master entre duas superfícies (b) Degeneração do tipo <i>master-slave</i> (c) Degeneração do tipo <i>master-master</i> entre duas curvas	246
Figura 7.2 – Estudo paramétrico em “dA” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em c para o problema envolvendo quádricas – caso de contato não plausível.....	260
Figura 7.3 – Estudo paramétrico em “dA” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em c para o problema envolvendo quádricas	261
Figura 7.4 – Estudo paramétrico em “dA” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em c para o problema envolvendo uma curva quadrática e uma quádrica.....	264

Figura 7.5 – Estudo paramétrico em “dA” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\mathbf{c}$ para o problema envolvendo um curva quadrática e uma quádrica.....	265
Figura 7.6 – Estudo paramétrico em “dA” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\mathbf{c}$ para o problema envolvendo um ponto e uma quádrica	266
Figura 7.7 – Exemplo de interação entre superfícies com penetração para estudo da função objetivo	270
Figura 7.8 – Curvas de nível da função f_1 analisadas segundo variação em (a) $\mathbf{c} = c_1c_{200}T$ (b) $\mathbf{c} = 00c_3c_4T$. O ponto azul ilustra $\mathbf{c}$	271
Figura 7.9 – Curvas de nível da função Gap analisadas segundo variação em (a) $\mathbf{c} = c_1c_{200}T$ (b) $\mathbf{c} = 00c_3c_4T$. O ponto azul ilustra $\mathbf{c}$	272
Figura 7.10 – Pontos materiais em Γ_A e Γ_B provenientes de variações segundo direções $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta) em torno $\mathbf{c}$	272
Figura 7.11 – Curvas de nível da função f_1 analisadas segundo variação em (a) $\mathbf{c} = c_1c_{200.103014}T$ (b) $\mathbf{c} = 00.568086c_3c_4T$. O ponto vermelho ilustra $\mathbf{c}_i$	274
Figura 7.12 – Pontos materiais em Γ_A e Γ_B provenientes de variações segundo direções $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta) em torno $\mathbf{c}_i$	275
Figura 7.13 – Curvas de nível da função Gap analisadas segundo variação em (a) $\mathbf{c} = c_1c_{200.103014}T$ (b) $\mathbf{c} = 00.568086c_3c_4T$. O ponto vermelho ilustra $\mathbf{c}_i$	276
Figura 7.14 – Algoritmo de busca para solução $\mathbf{c}$	279
Figura 7.15 – Singularidade existente em uma superfície Γ_A candidata a contato com Γ_B ...	281
Figura 7.16 – Exemplo de situação de contato conforme (a) linhas paralelas (b) superfícies paralelas (c) pontos materiais associados à direção principal de um autovalor nulo (d) pontos materiais associados às direções principais de autovalores nulos.....	285
Figura 7.17 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Configuração inicial	288
Figura 7.18 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Reação vincular no ponto B	289
Figura 7.19 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.....	289
Figura 7.20 – Contato <i>master-slave</i> a partir de superfícies. Configuração inicial.....	290
Figura 7.21 – Contato <i>master-slave</i> a partir de superfícies. Reação vincular no ponto E.....	291

Figura 7.22 – Contato <i>master-slave</i> a partir de superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ações mecânicas pontuais de contato.	292
Figura 7.23 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Configuração inicial.	293
Figura 7.24 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.	294
Figura 7.25 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Reação vincular no ponto B.	295
Figura 7.26 – Contato envolvendo singularidade. Configuração inicial.	295
Figura 7.27 – Contato envolvendo singularidade – Configurações inicial e final da simulação estática.	296
Figura 7.28 – Contato envolvendo singularidade – simulação não considerando contato suplementar degenerado. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.	297
Figura 7.29 – Contato envolvendo singularidade – simulação considerando contato suplementar degenerado. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.	298
Figura 7.30 – Contato envolvendo singularidade – detalhamento da ação normal de contato no instante 0.70 s.	298

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Recomendação de valores de constantes no Método de Newmark.....	68
Tabela 4.1 – Dados do modelo: vigas em balanço – casos 1 e 2	138
Tabela 4.2 – Dados numéricos do exemplo: contato entre fibras envolvendo torção.....	147
Tabela 4.3 – Exemplo numérico 4.7.2.1: dados do modelo.....	151
Tabela 4.4 – Exemplo numérico 4.7.2.3: dados do modelo.....	157
Tabela 4.5 – Exemplo numérico 4.7.2.4: dados do modelo.....	159
Tabela 4.6 – Exemplo numérico 4.7.2.5: dados do modelo.....	165
Tabela 5.1 – Exemplo numérico 5.7.1: comparação dos resultados de duração de colisões sucessivas. Numéricos, do presente modelo e analíticos, utilizando equação (5.76)	204
Tabela 5.2 – Exemplo numérico 5.7.1: dados do modelo	204
Tabela 5.3 – Exemplo numérico 5.7.2: dados das superfícies que compõem o solo	206
Tabela 5.4 – Exemplo numérico 5.7.3: dados do modelo	211
Tabela 6.1 – Exemplo numérico: dados da barra de nitinol	235
Tabela 7.1 – Resultados da análise espectral da caracterização da solução $\mathbf{c}$ de interesse em torno da interação de contato pontual de superfícies não conformes.....	268
Tabela 7.2 – Dados do modelo: Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies....	288
Tabela 7.3 – Dados do modelo: Contato <i>master-slave</i> a partir de superfícies.....	291
Tabela 7.4 – Dados do modelo: Contato entre curvas super elípticas e superfícies.	293
Tabela 7.5 – Dados do modelo: Contato envolvendo singularidade.....	296

Sumário

1	Introdução	22
1.1	<i>Origem do trabalho</i>	23
1.2	<i>Objetivo.....</i>	24
1.3	<i>Modelos envolvendo contato em aplicações de engenharia.....</i>	24
1.3.1	<i>Risers para prospecção de petróleo assentados em catenária</i>	24
1.3.2	<i>Dutos assentados no solo não plano.....</i>	25
1.3.3	<i>Aplicações ferroviárias: interação roda-trilho</i>	26
1.3.4	<i>Simulações de tecidos</i>	27
1.3.5	<i>Contato envolvendo corpos rígidos e flexíveis.....</i>	28
1.4	<i>Organização do texto.....</i>	29
1.5	<i>Notação empregada.....</i>	30
2	Modelagem computacional do contato entre sólidos deformáveis.....	31
2.1	<i>Definições para um sólido</i>	31
2.2	<i>Mecânica de um sólido deformável.....</i>	32
2.3	<i>Sistemas com dois sólidos e interação por contato.....</i>	35
2.3.1	<i>Vínculo mecânico.....</i>	36
2.3.2	<i>Procedimento master-slave.....</i>	37
2.3.3	<i>Contato sem atrito</i>	39
2.3.4	<i>Contato com atrito e sem deslizamento.....</i>	41
2.3.5	<i>Contato com atrito e com deslizamento</i>	42
2.4	<i>Sistema com vários sólidos e vários pares de contato</i>	43
2.5	<i>Formulações para mecânica computacional do contato.....</i>	44
2.5.1	<i>Formulações de contato nó-nó (node-to-node).....</i>	45
2.5.2	<i>Formulações de contato nó-superfície (node-to-surface).....</i>	47
2.5.3	<i>Formulações de contato superfície-superfície (surface-to-surface).....</i>	48
2.5.4	<i>Contato pontual entre sólidos e procedimento master-master.....</i>	48
2.5.5	<i>Formulações de contato envolvendo elementos finitos de barra</i>	49
2.5.6	<i>Contextualização da tese em meio ao estado da arte</i>	51
3	Ferramenta computacional: a plataforma GIRAFFE	53
3.1	<i>Histórico da plataforma GIRAFFE.....</i>	53

3.2	<i>Estrutura básica da plataforma GIRAFFE</i>	54
3.2.1	Nós	55
3.2.2	Elementos	56
3.2.3	Partículas	57
3.2.4	Carregamentos e dados ambientais	58
3.2.5	Contatos	58
3.2.6	Restrições especiais.....	59
3.2.7	Superfícies	59
3.2.8	Tipos de análise.....	60
3.2.9	Processamento paralelo e alguns detalhes de implementação	61
3.2.10	Pós-processamento: integração com o programa Paraview™	61
3.3	<i>Algumas formulações matemáticas da plataforma GIRAFFE</i>	62
3.3.1	Descrição Lagrangiana Atualizada	62
3.3.2	Integração ao longo do tempo em modelos de dinâmica estrutural.....	66
3.3.3	Modelo estrutural de barra.....	70
3.3.4	Modelo estrutural de casca	75
3.3.5	Partícula esférica rígida	79
3.3.6	Modelos de contato	81
3.3.6.1	Busca global	82
3.3.6.2	Busca local.....	84
4	Formulação de contato <i>master-master</i> entre duas superfícies no espaço	86
4.1	<i>Parametrização de superfícies de contato</i>	86
4.2	<i>Determinação dos pontos materiais para representação da ação de contato nas superfícies</i>	89
4.2.1	Método de Newton-Raphson para solução de (4.8).....	93
4.2.2	Ferramental de otimização para solução de (4.8)	94
4.3	<i>Contribuições de contato devido à ação normal</i>	96
4.3.1	Potencial de contato	97
4.3.2	Contribuição à forma fraca	97
4.3.3	Contribuição à linearização consistente da forma fraca.....	100
4.4	<i>Contribuições de contato devido à ação tangencial (atrito)</i>	103
4.4.1	Gap tangencial incremental	106
4.4.2	Erros na descrição do deslizamento	110

4.4.3	<i>Gap tangencial acumulado e objetividade</i>	111
4.4.4	Lei constitutiva de atrito.....	113
4.4.5	Comentários críticos.....	115
4.4.6	Potencial para a direção tangencial em não deslizamento.....	116
4.4.7	Contribuição à forma fraca.....	119
4.4.8	Contribuição à linearização consistente da forma fraca.....	119
4.5	<i>Modelagem de contato entre estruturas de barras</i>	123
4.5.1	Superfície de contorno da barra.....	123
4.5.2	Formulação de contato entre barras.....	130
4.6	<i>Implementação computacional do modelo de contato</i>	135
4.7	<i>Exemplos numéricos</i>	137
4.7.1	Contato sem atrito.....	137
4.7.1.1	Vigas em balanço – caso 1.....	137
4.7.1.2	Vigas em balanço – caso 2.....	139
4.7.1.3	Vigas em balanço – caso 3.....	140
4.7.1.4	Vigas em balanço – caso 4.....	143
4.7.1.5	Contato entre fibras envolvendo torção.....	144
4.7.2	Contato com atrito.....	150
4.7.2.1	Transição entre deslizamento e rolamento para uma barra com seção transversal circular.....	150
4.7.2.2	Deslizamento e rolamento de uma barra com seção transversal elíptica.....	152
4.7.2.3	Vigas em balanço em contato com atrito induzindo deslizamento e rolamento.....	155
4.7.2.4	Viga bastante flexível interagindo com deslizamento e rolamento com dois trilhos rígidos.....	158
4.7.2.5	Cama elástica.....	161
5	Formulação de contato <i>master-slave</i> entre esferas e superfícies no espaço	167
5.1	<i>Descrição geométrica do modelo</i>	167
5.1.1	Problema de mínima distância.....	169
5.2	<i>Contribuições de contato devido à ação normal</i>	171
5.3	<i>Contribuições de contato devido à ação tangencial</i>	174
5.3.1	Gênese das ideias da formulação.....	175
5.3.2	<i>Gap tangencial incremental</i>	176

5.3.3	Acúmulo do <i>gap</i> tangencial	179
5.3.4	Lei constitutiva de contato	182
5.3.5	Contribuição à forma fraca	183
5.3.6	Contribuição à linearização consistente da forma fraca	184
5.4	<i>Esforços dissipativos no contato</i>	185
5.5	<i>Parametrizações de superfícies de contato</i>	189
5.5.1	Superfície triangular rígida	190
5.5.2	Superfície rígida gerada por uma função de duas variáveis	193
5.5.3	Superfície triangular flexível de segunda ordem	195
5.5.4	Superfície super elíptica flexível	196
5.6	<i>Não convexidade e estratégias para o problema de mínima distância</i>	197
5.7	<i>Exemplos Numéricos</i>	200
5.7.1	Interação de uma bola com o solo rígido	200
5.7.2	Interação de uma bola com o solo rígido não plano	204
5.7.3	Flambagem de um tubo em contato com uma barra tracionada	210
5.7.4	Bola rolando em um canal flexível modelado com cascas	213
6	Formulação de contato <i>master-master</i> entre duas curvas no espaço	217
6.1	<i>Descrição geométrica</i>	217
6.2	<i>Determinação dos pontos materiais para representação da ação de contato nas curvas</i> 219	
6.3	<i>Contribuições normais</i>	221
6.4	<i>Discussão sobre as contribuições tangenciais</i>	223
6.5	<i>Barras de eixo retilíneo</i>	225
6.5.1	Parametrização dos eixos das barras	225
6.5.2	Atrito	227
6.6	<i>Exemplo numérico</i>	230
6.6.1	Auto-contato	230
6.6.2	Formação de laços em estruturas de barras (<i>loops</i>)	232
6.6.3	Simulações e comparação com experimentos disponíveis na literatura	232
7	Degeneração da formulação de contato <i>master-master</i> entre superfícies	242
7.1	<i>Procedimento master-master entre duas superfícies</i>	242
7.2	<i>Procedimento master-slave entre duas superfícies</i>	243
7.3	<i>Procedimento master-master entre duas curvas</i>	244

7.4	<i>Degeneração da formulação de contato master-master entre duas superfícies</i>	246
7.4.1	Problema de otimização associado a $\mathbf{c}$ e transformação de coordenadas convectivas	247
7.4.2	Decomposição espectral da matriz Hessiana.....	248
7.4.3	Operador degenerativo	249
7.4.4	Linearização envolvendo coordenadas degeneradas.....	251
7.4.5	Exemplos de degeneração	252
7.4.5.1	<i>Master-slave</i>	252
7.4.5.2	<i>Master-master</i> entre curvas	253
7.4.6	Problema de otimização degenerado.....	253
7.4.7	Implicações da degeneração na formulação <i>master-master</i> entre duas superfícies	255
7.4.7.1	Localização da ação de contato e linearizações.....	255
7.4.7.2	Atrito	256
7.5	<i>Caracterização da solução de $\mathbf{c}$ no problema de otimização degenerado</i>	257
7.5.1	Caracterização do contato entre quádricas	259
7.5.2	Caracterização do contato entre uma quádrica e uma curva quadrática.....	262
7.5.3	Caracterização do contato entre uma quádrica e um ponto	265
7.5.4	Discussão	267
7.6	<i>Busca pela solução $\mathbf{c}$</i>	269
7.6.1	Estudo do ponto de sela $\mathbf{c}$	271
7.6.2	Estudo do ponto de intersecção $\mathbf{ci}$	273
7.6.3	Algoritmo de busca para a solução $\mathbf{c}$	276
7.6.4	A utilização de métodos do tipo <i>trust-region</i> (TR).....	277
7.6.5	Casos que envolvem degeneração.....	280
7.7	<i>Algumas possíveis aplicações para a degeneração do contato</i>	280
7.7.1	Singularidades.....	281
7.7.2	Superfícies conformes	282
7.7.2.1	Caracterização de $\mathbf{c}$ entre superfícies conformes.....	284
7.7.2.2	Utilizando a degeneração em cenários de superfícies conformes	285
7.8	<i>Exemplos numéricos</i>	287
7.8.1	Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies.....	287
7.8.2	Contato <i>master-slave</i> a partir de superfícies.....	290
7.8.3	Contato entre curvas super elípticas e superfícies	292

7.8.4	Contato envolvendo singularidade.....	295
8	Conclusões	299
8.1	<i>Trabalhos futuros</i>	301
	Referências.....	303

1 Introdução

O contato entre corpos é um fenômeno evidente no dia-a-dia em fatos como: a simples ação de caminhar, segurar um objeto com as mãos, esfregar as mãos para aquecê-las em dias frios, acelerar ou frear um veículo promovendo rolamento ou deslizamento dos pneus no asfalto, fixar um objeto com um parafuso, lavar um prato com uma esponja e por meio da esfregação retirar restos de alimentos, patinar no gelo, esquiar, pressionar teclas de um controle remoto ou acionar uma tela sensível ao toque em um telefone. Quando se fala em aplicações de engenharia, o contato também se manifesta em diversos exemplos como: processos de fabricação que envolvem estampagem (por exemplo para produção de painéis), processos de usinagem e retífica em que a utilização de uma ferramenta de corte ou rebolo remove material, transporte de minério em esteiras, contato entre roda e trilho de um trem, assentamento de estacas ou sapatas na fundação de um prédio, contato de um par engrenado no câmbio de um veículo ou o contato entre esferas e a pista de um rolamento no mancal de uma máquina rotativa.

Nos inúmeros eventos de contato há diversos fenômenos físicos envolvidos. Pode-se mencionar o mais óbvio que é a interação mecânica de contato, por meio da ação-reação que ocorre entre os corpos quando o contato se manifesta. Mas essa interação depende do comportamento detalhado das superfícies de contato, que pode ser observado em diversas escalas. A observação em escalas microscópicas permite perceber que as superfícies de contato são muito complexas, havendo a presença de relevos superficiais com asperezas e possivelmente diversas escalas de padrões de ondulação, levando muitas vezes a áreas reais de contato que diferem das áreas aparentes. Além disso, ao se solicitar um esforço cisalhante (atrito) no contato, pode haver deslizamento relativo ou não. Tudo isso é concomitante à possibilidade de desgaste nas superfícies envolvidas e potencial remoção de material. Obviamente todos esses fenômenos não devem ser estudados somente sob a óptica de esforços. Efeitos de temperatura, por exemplo, afetam localmente o contato. Podem ocorrer reações químicas e/ou dilatação/contração térmica. Além disso a presença de um fluido na interface pode alterar consideravelmente o comportamento quando ocorre solicitação de atrito, que pode ser muito desejável (lubrificação). A complexidade envolvida é evidente e, de fato, o estudo completo da interação de contato entre corpos é um tópico multidisciplinar de pesquisa atual.

Esta tese está imersa na temática da modelagem computacional de contato entre corpos. Tipicamente esse tipo de modelo é utilizado em aplicações de engenharia em que o objetivo é analisar o comportamento de sistemas multicorpos. O presente trabalho busca o estudo do

contato somente sob a óptica mecânica de esforços. Nessa abordagem, as superfícies de contato são idealizadas e a análise é feita em escala macroscópica, sendo que o detalhe de comportamento das escalas inferiores é traduzido em leis constitutivas de contato.

Uma vertente de análise de sistemas multicorpos se baseia na dinâmica de corpos rígidos. Considerações sobre flexibilidade, quando importantes, são consideradas em algum ou alguns dos corpos envolvidos. Nessa vertente, as equações de Newton-Euler podem ser tomadas como base para equacionar o movimento de cada corpo. Além disso, é necessário estabelecer as restrições mecânicas ao movimento (em particular o contato). As bases desse tipo de abordagem podem ser encontradas por exemplo em [1] e [2].

Outra possibilidade é considerar que os corpos a princípio são flexíveis, e que a modelagem de um corpo como rígido é tratada separadamente. Nesse contexto, em geral é utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais para obtenção das equações de movimento em sua forma fraca. É utilizado algum método de aproximação, como o Método dos Elementos Finitos, a fim de compor os campos de deslocamentos de cada corpo envolvido, considerando naturalmente sua flexibilidade. O corpo rígido é tratado como um caso particular. As bases desse tipo de abordagem podem ser vistas por exemplo em [1] e [3]. O presente trabalho se enquadra nessa vertente de análise.

1.1 Origem do trabalho

Esta tese representa uma visão integrada de modelos de mecânica computacional do contato desenvolvidos pelo autor ao longo dos últimos cinco anos. Desde 2013 o autor vem trabalhando no tema, o que se iniciou com um estágio de pós-doutoramento na Leibniz-Universität-Hannover. Ao longo desse período diversos aprimoramentos foram incorporados aos modelos, ampliando seu espectro de aplicação. Esta tese pode ser vista como um compêndio de todos esses trabalhos somado a uma visão crítica sobre suas relações e limitações, bem como suas possibilidades de expansão por meio da apresentação de um ferramental matemático unificado que abrange diversos modelos.

A implementação de todos os modelos foi feita na plataforma computacional GIRAFFE, idealizada e iniciada pelo autor em 2014 e, em particular, motivada para implementação dos modelos de contato. Atualmente o GIRAFFE está sendo utilizado pelo autor, seus alunos e colegas para solução de modelos multicorpos rígidos-flexíveis. É um veículo de disseminação de pesquisa dentro da Escola Politécnica (USP) e também vem sendo utilizado em outras

parcerias de pesquisa conjunta, como com a própria Leibniz-Universität-Hannover, onde a formação no tema se iniciou.

1.2 Objetivo

O objetivo desta tese é propor um conjunto de modelos matemáticos para a solução de contato pontual entre corpos (sólidos), bem como realizar sua implementação computacional em um contexto em que os sólidos são modelados utilizando-se elementos finitos sob não linearidade geométrica. Faz-se uso da abordagem *master-master* e *master-slave* para determinação do par de pontos materiais nos quais há ação de contato, de acordo com a conveniência de cada formulação. Busca-se uma apresentação integrada e crítica para que o leitor possa compreender a relação entre as diferentes abordagens, bem como suas limitações. É introduzido, adicionalmente, o conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre superfícies, que leva a uma proposta de um ferramental matemático unificado para uma família de modelos de contato.

1.3 Modelos envolvendo contato em aplicações de engenharia

Há diversas aplicações de engenharia que podem ser estudadas por meio de modelos computacionais. Em particular, aqui são exploradas algumas situações em que a presença de contato entre corpos é importante e deve ser modelada. Todos os exemplos aqui mostrados são oriundos de trabalhos que se utilizaram dos modelos apresentados nesta tese e seus desdobramentos. São aqui apresentados para que o leitor possa visualizar algumas aplicações práticas possíveis com modelos de contato.

1.3.1 *Risers* para prospecção de petróleo assentados em catenária

Na engenharia oceânica, *risers* são estruturas utilizadas para transporte de óleo e gás do fundo do mar até a unidade flutuante, localizada na superfície. Algumas dessas estruturas são tubos de aço (denominados *risers* rígidos) e outras são estruturas tubulares compostas de várias camadas, provendo grande flexibilidade (denominados tubos flexíveis).

Há diversos tipos de configuração de *risers*. Em particular, no Brasil, o assentamento em catenária é muito comum. Trata-se de uma estrutura que fica com parte apoiada no fundo do mar e parte suspensa entre o fundo do mar e a superfície, onde é fixada em uma unidade flutuante. A Figura 1.1 mostra um exemplo de concepção de um modelo computacional para esse tipo de estudo. Com o foco na análise do ponto de vista global, pode-se representar a estrutura do *riser* por um modelo estrutural de barras, uma vez que se trata de uma estrutura bastante esbelta.

Note que há uma região da estrutura do *riser* que possui contato com o solo. Durante a ação de carregamentos, como as ondas do mar, a unidade flutuante se move e induz movimentos em toda a extensão do *riser*, inclusive provendo alternância da região de contato ao longo do tempo, isto é, há regiões que ora estão em contato, e ora deixam de estar. Trata-se de uma fonte importante de esforços alternados que deve ser considerada no projeto de engenharia desse tipo de estrutura. De fato, o ponto de alternância de contato *riser*-solo é passível de sofrer fadiga. A fim de determinar os esforços ao longo do tempo nesse tipo de estrutura pode-se utilizar modelos de contato entre a estrutura de barra e uma superfície que represente o solo marinho, como é desenvolvido em [4] e [5].

Figura 1.1 – Exemplo de modelo de um *riser* para prospecção de petróleo assentado em catenária

Fonte: [4]

1.3.2 Dutos assentados no solo não plano

Dutos para transporte de óleo e gás podem sofrer flambagem por efeitos de alta temperatura e pressão interna. Tipicamente há dois tipos principais de flambagem que se manifestam nesse tipo de estrutura, do ponto de vista global: lateral ou vertical.

O estudo da flambagem de dutos pode ser feito analiticamente ou numericamente. A abordagem numérica propicia a modelagem considerando diversas naturezas de imperfeição na superfície do solo de assentamento. A Figura 1.2 mostra um modelo utilizado para o estudo da flambagem vertical de um duto assentado sobre uma imperfeição concentrada. Em [6] há maiores detalhes desse tipo de modelo, que contém considerações de contato duto-solo.

Figura 1.2 – Exemplo de modelo de um oleoduto assentado sobre o solo não plano

Fonte: [6]

1.3.3 Aplicações ferroviárias: interação roda-trilho

No contexto de engenharia ferroviária existe a demanda pelo estudo da interação entre roda e trilho de trem. Trata-se de um cenário de grande complexidade cinemática e, em geral, há substancial esforço mecânico envolvido em áreas de contato muito pequenas.

Grande parte dos trens se utiliza de rodeiros ferroviários, que se constituem de um par de rodas e um eixo que montam um corpo único. As rodas possuem perfil cônico que promove características únicas de dirigibilidade e capacidade de fazer curvas.

O estudo do movimento de um trem completo considerando os diversos vagões, rodeiros, suspensões e toda a geometria da via se constitui em um problema muito complexo de engenharia. Há vários simuladores comerciais para realizar esse tipo de trabalho. Um ponto importante sempre presente é a modelagem do contato roda-trilho.

A Figura 1.3 mostra um estudo simplificado sobre o assunto, em que se considera um único rodeiro. Esse é composto por rodas de perfil cônico, sem a presença de um flange lateral, como existente em rodeiros realistas. Pode-se estudar nesse tipo de modelo um tipo de

instabilidade denominada *hunting*, que se constitui por oscilações laterais crescentes durante o movimento longitudinal do rodeiro. Em [7] há maiores detalhes desse tipo de estudo, em que as características do contato roda-trilho são fundamentais.

Figura 1.3 – Exemplo de modelo da interação de um rodeiro ferroviário com dois trilhos idealizados

Fonte: [7]

1.3.4 Simulações de tecidos

Tecidos são muito comuns em aplicações no dia-a-dia. São utilizados como matéria prima para fabricação de roupas, revestimentos, aplicações industriais, dentre outras inúmeras possibilidades. Há diversos processos para composição de um tecido. No campo da tecelagem uma forma típica é um padrão de entrelaçamento como o mostrado na Figura 1.4.

Quando é desejado o estudo de propriedades mecânicas de certa proposta de tecido, geralmente se recorre a ensaios físicos. A proposta de modelagem computacional de tecidos é algo muito interessante, pois pode promover a possibilidade de diminuição de ensaios físicos, substituídos por simulações de ensaios computacionais. No entanto, existe um grande desafio na concepção de um modelo estrutural de um tecido, uma vez que ocorrem muitas interações de contato entre as fibras. Em [8] é mostrado um tipo de simulação computacional de ensaio de tração de fibras de um tecido, utilizando-se modelos de barras para compor as fibras e considerando-se o contato entre elas.

Figura 1.4 – Exemplo de modelo de um tecido

Fonte: [8]

1.3.5 Contato envolvendo corpos rígidos e flexíveis

Sistemas que envolvem múltiplos corpos são muito comuns em aplicações de engenharia, como máquinas ou mecanismos. Sua modelagem geralmente se interessa por estudar deformações e tensões somente em alguns corpos. Os outros envolvidos são importantes apenas para compor o sistema mecânico desejado, e podem ser modelados como rígidos.

Nesse tipo de situação a interação entre corpos rígidos e flexíveis envolvendo contato é comum e deve ser prevista. A Figura 1.5 mostra um modelo estrutural para a viga de uma ponte rolante, contendo um transportador com uma massa suspensa. Considera-se, nesse caso, a viga como corpo flexível, enquanto que os outros corpos do modelo são considerados rígidos.

A modelagem de contato entre as rodas do transportador e a base da viga é fundamental para o comportamento do sistema. Em [9] é proposto um modelo de corpo rígido em conjunto com uma aplicação da formulação de contato *master-master* entre superfícies, mostrada nesta tese, que permite o estudo desse tipo de interação.

Figura 1.5 – Exemplo de simulação de um sistema com corpos rígidos e flexíveis em contato

Fonte: [9]

1.4 Organização do texto

Este texto está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: é feita a motivação do trabalho, é apresentado o objetivo e são mostrados exemplos de aplicações de modelos de contato;
- Capítulo 2: são apresentados alguns conceitos associados ao problema de mecânica dos sólidos deformáveis e à ocorrência de contato entre sólidos. As implicações da possibilidade de ocorrência de contato entre sólidos são discutidas do ponto de vista de modelagem matemática. São apresentadas as principais formulações da mecânica computacional do contato, em meio às quais esta tese é contextualizada;
- Capítulo 3: é apresentada a plataforma GIRAFFE, utilizada na implementação computacional dos modelos de contato. São apresentadas suas principais características e modelos de elementos finitos já incorporados e que são utilizados amplamente em todos os exemplos numéricos do presente trabalho;

- Capítulo 4: é apresentada a formulação de contato *master-master* entre duas superfícies no espaço;
- Capítulo 5: é apresentada a formulação de contato *master-slave* entre esferas e superfícies no espaço;
- Capítulo 6: é apresentada a formulação de contato *master-master* entre duas curvas no espaço;
- Capítulo 7: é feita uma discussão comparativa entre os modelos apresentados e é apresentado o conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre superfícies;
- Capítulo 8: são apresentadas as conclusões do trabalho e possíveis desdobramentos para trabalhos futuros.

1.5 Notação empregada

Nessa tese é empregada a seguinte notação: em um espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$, letras minúsculas em negrito representam vetores (ex.: $\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}$); letras maiúsculas em negrito representam tensores de segunda ordem (ex.: $\mathbf{Q}, \boldsymbol{\Xi}$) e letras cursivas em negrito representam tensores de terceira ordem (ex.: $\boldsymbol{\mathcal{A}}$). A representação de vetores nulos se dá pelo símbolo “ $\mathbf{0}$ ”. O tensor identidade é descrito por “ $\mathbf{I}$ ”.

Matrizes-coluna são comumente referenciadas pelo nome “vetores” e também são representadas por letras minúsculas em negrito (ex.: $\mathbf{d}$). Matrizes com mais de uma coluna são representadas por letras maiúsculas em negrito (ex.: $\mathbf{D}$). Matrizes-coluna nulas são representadas por “ $\mathbf{0}_n$ ”, em que “ n ” representa o número de linhas envolvido. Matrizes quadradas nulas são representadas por “ $\mathbf{O}_n$ ”, em que “ n ” representa o número de linhas/colunas envolvido. A matriz identidade de ordem “ n ” é representada por “ $\mathbf{I}_n$ ”.

Outras notações específicas para cada parte do texto são explicadas localmente, no ponto de sua utilização.

O separador decimal adotado nos valores numéricos ao longo de toda a apresentação desse texto, bem como nos resultados gráficos é o ponto “.”.

2 Modelagem computacional do contato entre sólidos deformáveis

Este Capítulo traz uma descrição geral da modelagem matemática e computacional do contato entre sólidos deformáveis. O objetivo aqui não é o de cobrir o conteúdo encontrado em livros-texto no assunto de mecânica dos sólidos e mecânica do contato. O que se procura é apresentar de forma direta e compacta algumas definições e conceitos fundamentais para o entendimento desta tese. Para tal, utilizou-se em toda a apresentação da mesma notação que é encontrada nos Capítulos subsequentes. Além disso, durante a apresentação dos conceitos são tecidos comentários que procuram conectar os assuntos desta tese em meio ao estado da arte, bem como é apresentada uma revisão bibliográfica.

O presente trabalho está imerso no contexto da mecânica dos sólidos deformáveis. Os desenvolvimentos aqui presentes são pensados em um contexto de deformações finitas e, portanto, de não linearidade geométrica. Assume-se que o leitor tenha familiaridade com o tema. A base conceitual necessária para adentrar o conteúdo dessa tese pode ser encontrada em diversas referências. Em particular, para o leitor que sinta necessidade em revisar algum aspecto, recomenda-se [10], [11] [12] e [13] em que há descrições com notações e preocupações similares às do presente texto, uma vez que são relacionadas à temática de implementações computacionais em um contexto de elementos finitos não linear.

2.1 Definições para um sólido

A Figura 2.1 mostra um sólido B_w , definido por um conjunto de pontos materiais X em um espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$. Uma configuração do sólido é definida pela localização de cada ponto material X_w em certa posição em $\mathbb{E}^3$. É matematicamente escrita por um mapeamento injetor dado por $\varphi: B_w \rightarrow \mathbb{E}^3$. Com isso, é possível localizar um ponto material X_w , tal que sua posição, em certo instante t , seja dada por $\mathbf{x}_w = \varphi_t(X_w)$. Por isso, φ pode ser compreendido como um operador de evolução, pois mapeia a evolução temporal do conjunto de pontos materiais, definindo o movimento do sólido.

A configuração de referência é definida por $\mathbf{X}_w = \varphi_o(X_w)$. Assim, $\mathbf{X}_w$ é a posição do ponto material X_w na configuração de referência. Em configurações subsequentes, o mesmo ponto material irá se localizar em $\mathbf{x}_w$. Descrevendo cada ponto material pelo mapeamento inverso $X_w = \varphi_o^{-1}(\mathbf{X}_w)$, pode-se denotar:

$$\mathbf{x}_w = \varphi_t(X_w) = \varphi_t(\varphi_0^{-1}(\mathbf{X}_w)), \quad (2.1)$$

e por isso é comum em algumas referências a forma de apresentação:

$$\mathbf{x}_w = \varphi_t(\mathbf{X}_w), \quad (2.2)$$

que já associa diretamente cada ponto material X_w com sua posição na configuração de referência $\mathbf{X}_w$. O campo de deslocamentos associado a cada ponto material X_w , localizado na configuração de referência em $\mathbf{X}_w$, é dado por $\mathbf{u}_w$.

Figura 2.1 – Definições para um sólido B_w

Fonte: do autor

2.2 Mecânica de um sólido deformável

O sólido pode sofrer modificações em sua configuração de referência $\mathbf{X}_w$ por conta de carregamentos atuantes, levando à configuração atual ou deformada, dada por $\mathbf{x}_w$. Em uma abordagem espacial, isto é, escrita com base na configuração deformada $\mathbf{x}_w$, o campo de tensões é descrito pelo tensor das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_w$. Supõe-se que atuam carregamentos

conhecidos distribuídos no volume, descritos pelo campo vetorial $\mathbf{b}_w$, que retrata o carregamento por unidade de volume na configuração $\mathbf{x}_w$.

O princípio fundamental da dinâmica permite a escrita da equação de equilíbrio local, que deve ser válida para cada ponto material do sólido, escrita com base na configuração deformada:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}_w) + \mathbf{b}_w = \rho \ddot{\mathbf{u}}_w, \quad (2.3)$$

em que ρ é a massa específica de cada ponto material na configuração deformada. A derivada temporal é descrita por $\frac{d(\dots)}{dt} = (\dots)$. Portanto, $\ddot{\mathbf{u}}_w$ é a aceleração do ponto material X_w . Além disso, o tensor $\boldsymbol{\sigma}_w$ é simétrico, pelo equilíbrio de momentos.

O contorno do sólido na configuração de referência é descrito pela superfície ∂B_w , que é dividida em duas superfícies ∂B_{wu} e ∂B_{wt} . Note que na configuração deformada o contorno se modifica e é dado por $\Gamma_w = \varphi_t(\partial B_w)$. Por sua vez, ∂B_{wu} se deforma em $\Gamma_{wu} = \varphi_t(\partial B_{wu})$ e ∂B_{wt} se deforma em $\Gamma_{wt} = \varphi_t(\partial B_{wt})$. O contorno Γ_{wu} representa a superfície em que são conhecidos e prescritos os deslocamentos do sólido, dados por $\mathbf{u}_w = \bar{\mathbf{u}}_w$ (condição de contorno de Dirichlet). O contorno Γ_{wt} é a superfície em que são conhecidos carregamentos distribuídos, dados por $\mathbf{t}_w$, escritos por unidade de área da configuração deformada (condição de contorno de Neumann). Tem-se que $\mathbf{t}_w = \boldsymbol{\sigma}_w \mathbf{n}_{wt}$ em Γ_{wt} , sendo $\mathbf{n}_{wt}$ a direção normal exterior ao sólido deformado em Γ_{wt} .

A solução do problema de mecânica de um sólido deformável B_w corresponde à determinação da configuração deformada $\mathbf{x}_w$, dados os carregamentos e condições de contorno. Também deseja-se avaliar os campos $\mathbf{u}_w$ e $\boldsymbol{\sigma}_w$, para todos os pontos materiais. Para tal, dispõe-se da equação diferencial de equilíbrio (2.3), equação de compatibilidade e equação constitutiva. Matematicamente, trata-se de um problema de valor inicial e de contorno para os campos envolvidos, uma vez que a configuração é função das condições de contorno e carregamentos aplicados, que podem se alterar ao longo do tempo. O domínio espacial de solução é associado ao conjunto de pontos materiais $X_w \in B_w$, localizado na configuração de referência (em uma descrição material) ou na configuração deformada (em uma descrição espacial). Portanto, em $\mathbb{E}^3$, é possível definir o domínio de formas distintas, de acordo com a conveniência (ver [10]). O domínio temporal é associado a instantes reais positivos.

A solução do problema matemático proposto, tipicamente em um cenário de aproximação por elementos finitos, necessita da escrita de (2.3) na forma fraca. Isso pode ser

feito por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Para tal, define-se um campo arbitrário denominado por deslocamentos virtuais: $\delta \mathbf{u}_w = \{\delta \mathbf{u}_w | \delta \mathbf{u}_w = \mathbf{0} \text{ em } \partial B_{wu}\}^1$. Pode-se manipular a equação (2.3) e escrever a seguinte forma integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_t(B_w)} \boldsymbol{\sigma}_w \cdot \text{grad}(\delta \mathbf{u}_w) dV_w - \int_{\Gamma_w} \mathbf{t}_w \cdot \delta \mathbf{u}_w dS_w - \int_{\varphi_t(B_w)} \mathbf{b}_w \cdot \\ & \delta \mathbf{u}_w dV_w + \int_{\varphi_t(B_w)} \rho \ddot{\mathbf{u}}_w \cdot \delta \mathbf{u}_w dV_w = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $\text{grad}(\delta \mathbf{u}_w)$ é o gradiente do campo de deslocamentos virtuais atribuído. Pela simetria do tensor $\boldsymbol{\sigma}_w$ é possível simplificar o primeiro termo, considerando-se somente a parte simétrica de $\text{grad}(\delta \mathbf{u}_w)$. Isso leva a forma apresentada na equação (2.4) a ser idêntica à estabelecida na mecânica dos sólidos com linearidade geométrica. A diferença crucial é que os domínios de integração se referem à configuração deformada, o que caracteriza a não linearidade geométrica. Pode-se nomear alguns termos por:

$$\begin{aligned} \delta W_{iw} &= \int_{\varphi_t(B_w)} \boldsymbol{\sigma}_w \cdot \text{grad}(\delta \mathbf{u}_w) dV_w, \\ \delta W_{ew} &= \int_{\Gamma_w} \mathbf{t}_w \cdot \delta \mathbf{u}_w dS_w + \int_{\varphi_t(B_w)} \mathbf{b}_w \cdot \delta \mathbf{u}_w dV_w, \\ \delta T_w &= \int_{\varphi_t(B_w)} \rho \ddot{\mathbf{u}}_w \cdot \delta \mathbf{u}_w dV_w, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que δW_{iw} denota o trabalho virtual dos esforços internos, δW_{ew} denota o trabalho virtual dos esforços externos (carregamentos) e δT_w é o trabalho virtual dos esforços inerciais. Assim, de forma compacta, pode-se escrever a forma fraca que descreve a dinâmica de um sólido deformável:

$$\delta W_{iw} - \delta W_{ew} + \delta T_w = 0. \quad (2.6)$$

¹ Por vezes alguns autores preferem a nomenclatura de campo de velocidades virtuais em vez de deslocamentos virtuais. Também existe a nomenclatura “função teste” para descrever o mesmo campo. Excluída a discussão relacionada à nomenclatura, o importante é que o campo em questão é arbitrário e escrito de forma compatível em torno da configuração deformada $\mathbf{x}_w$.

2.3 Sistemas com dois sólidos e interação por contato

Sistemas reais frequentemente possuem diversos sólidos envolvidos. Aqui se fará o estudo particular de um sistema com dois sólidos, nomeados B_A e B_B . Se não houver interação física entre eles, pode-se afirmar que as soluções de seus campos são independentes. Nesse caso, pode-se utilizar o equacionamento da seção anterior para cada corpo separadamente com o objetivo de obter $\mathbf{x}_A$ e $\mathbf{x}_B$ (o índice w apresentado em todos os campos e definições da seção anterior referem-se ao sólido B_w . No presente item substitui-se tal índice por A e B para representar os campos e definições de cada um dos sólidos). Alternativamente, pode-se escrever uma única equação associada ao PTV do sistema de corpos, somando-se as contribuições de ambos no mesmo sistema de equações descrito por:

$$(\delta W_{iA} - \delta W_{eA} + \delta T_A) + (\delta W_{iB} - \delta W_{eB} + \delta T_B) = 0. \quad (2.7)$$

Note que nesse caso o que ocorre é o total desacoplamento das soluções dos campos envolvidos.

O tipo de interação física que é de interesse para a presente tese é o contato físico entre os corpos. Isso é caracterizado geometricamente pela existência de um contorno comum entre eles na configuração deformada, descrito pela superfície de contato $\Gamma_c = \Gamma_{cA} = \Gamma_{cB}$, que é a priori desconhecida, uma vez que o campo de deslocamentos de ambos os corpos é que permite identificar a região de contato, que faz parte das incógnitas do problema. Assim, o problema de um sistema com dois sólidos deformáveis não possui todas as condições de contorno definidas a priori, pois as mesmas dependem das ações mecânicas e dos deslocamentos dos sólidos. As interações mecânicas entre os corpos promovem contribuições adicionais à forma fraca (2.7), que pode ser reescrita por:

$$(\delta W_{iA} - \delta W_{eA} + \delta T_A) + (\delta W_{iB} - \delta W_{eB} + \delta T_B) + \delta W_c = 0. \quad (2.8)$$

Supondo-se que a superfície de contato Γ_c seja conhecida a priori, seria possível simplesmente compor termos adicionais de trabalhos virtuais de carregamentos distribuídos em Γ_c , complementares aos termos gerados pelo carregamento externo distribuído nas superfícies de cada corpo, remetendo a δW_c a forma:

$$\delta W_c = - \int_{\Gamma_{cA}} \mathbf{t}_{cA} \cdot \delta \mathbf{u}_A dS_A - \int_{\Gamma_{cB}} \mathbf{t}_{cB} \cdot \delta \mathbf{u}_B dS_B. \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{t}_{cA}$ e $\mathbf{t}_{cB}$ representam os carregamentos distribuídos na superfície de contato, atuantes nos sólidos B_A e B_B . Em (2.9) as integrais são feitas nas superfícies Γ_{cA} e Γ_{cB} , em ambos os corpos. O princípio da ação e reação permite escrever, localmente: $\mathbf{t}_{cA} dS_A = -\mathbf{t}_{cB} dS_B$. Assim, pode-se reescrever (2.9) escolhendo-se apenas uma das superfícies para realizar a integração. Por exemplo, escolhendo Γ_{cB} :

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_{cB}} \mathbf{t}_{cB} \cdot (\delta \mathbf{u}_A - \delta \mathbf{u}_B) dS_B = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c \cdot (\delta \mathbf{u}_A - \delta \mathbf{u}_B) dS, \quad (2.10)$$

em que já se considerou a integração na superfície de contato Γ_c e denominou-se por $\mathbf{t}_c$ a ação mecânica de contato, arbitrada como atuante em Γ_{cB} . Em Γ_{cA} atuará seu valor oposto, pelo princípio da ação e reação. Note que $\mathbf{t}_c$ pode conter componentes normais e tangenciais às superfícies de contato. Até então nenhum tipo de distinção dessa natureza foi discutido.

2.3.1 Vínculo mecânico

O termo $(\delta \mathbf{u}_A - \delta \mathbf{u}_B)$ em (2.10) deve ser melhor interpretado. De fato, os deslocamentos virtuais na região de contato Γ_c não são arbitrários, uma vez que lá se estabelece um vínculo mecânico que remete ao campo de deslocamentos relativo entre os corpos. A condição que descreve esse vínculo é dada em palavras simplesmente por: “nenhuma parte da configuração deformada do sólido B_A pode ocupar a mesma região do espaço da configuração deformada do sólido B_B , isto é, não pode haver penetração entre os sólidos deformados”.

Dado um par de pontos materiais em contato na configuração deformada, é óbvio que estes possuem a mesma posição no espaço. A dificuldade é que não se conhece a priori quem são os pares de pontos materiais que apresentarão contato, a fim de impor essa condição diretamente. Tampouco se conhece a região completa Γ_c em que o contato irá se manifestar. Por isso é necessário elencar em ambos os corpos regiões do contorno elegíveis a apresentarem contato e posteriormente impor a condição de não penetração para todo esse contorno. Aqui

elegem-se, a priori, os próprios contornos deformados dos corpos B_A e B_B , ou seja, Γ_A e Γ_B em sua totalidade ².

Na discussão anterior para a escrita de (2.10) admitiu-se, por hipótese, que Γ_c era conhecida, a fim de limitar a discussão ao papel do contato, do ponto de vista de carregamentos adicionais aplicados nos sólidos. No entanto, como Γ_c não é conhecida, a forma descrita em (2.10) para δW_c é incompleta e não suficiente para a solução do problema de dois sólidos que envolve a possibilidade de contato. É necessário introduzir um termo adicional referente à imposição do vínculo mecânico de não penetração entre os corpos, alvo da próxima seção, e que introduz uma relação vincular entre os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}_A$ e $\delta \mathbf{u}_B$.

Na sequência, é proposto um procedimento para a determinação dos pontos materiais em Γ_A e Γ_B que constituem um possível par de contato, bem como o vínculo mecânico aqui discutido em palavras, é traduzido em uma inequação.

2.3.2 Procedimento *master-slave*

Essa técnica é amplamente discutida em diversos textos como em [13], [14] e [15]. É base fundamental de diversas formulações computacionais de contato. Consiste, basicamente, nos passos descritos na sequência:

1. Arbitra-se em Γ_A certo ponto material denotado por $\mathbf{x}_{As}$ e denominado ponto *slave*.
2. Em Γ_B é determinado o ponto material candidato a apresentar contato com $\mathbf{x}_{As}$. Para tal, em geral é utilizado um critério de mínima distância, por meio da solução de um problema de projeção ortogonal. Para isso, é necessário realizar uma parametrização da superfície Γ_B , denominada *master*, escrita utilizando-se coordenadas convectivas ζ e θ . O problema é formulado por:

² Não é necessário elencar o contorno completo de um sólido como região candidata a apresentar contato. Do ponto de vista prático, sempre que houver algum tipo de informação que permita reduzir o contorno de possível contato, essa deverá ser utilizada. Isso implicará mais à frente em benefícios para algoritmos de busca global e local de contato.

$$\begin{cases} \Gamma_{B,\zeta} \cdot (\mathbf{x}_{As} - \Gamma_B) = 0 \\ \Gamma_{B,\theta} \cdot (\mathbf{x}_{As} - \Gamma_B) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

cuja solução é dada por $\bar{\zeta}$ e $\bar{\theta}$. A Figura 2.2 ilustra geometricamente o problema em questão.

Figura 2.2 – Problema da projeção ortogonal na escolha de pontos materiais para compor um par de contato

Fonte: do autor

3. De posse das coordenadas $\bar{\zeta}$ e $\bar{\theta}$ pode-se avaliar o ponto material correspondente na superfície Γ_B . Esse ponto é descrito por $\bar{\mathbf{x}}_B$.
4. Com isso, é testada a condição:

$$(\mathbf{x}_{As} - \bar{\mathbf{x}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B \geq 0, \quad (2.12)$$

em que $\bar{\mathbf{n}}_B$ representa a direção normal exterior ao sólido B_B em sua configuração deformada, avaliada utilizando-se de $\bar{\zeta}$ e $\bar{\theta}$. Os pontos que apresentarem contato, obedecerão (2.12) pela igualdade $\mathbf{x}_{As} = \bar{\mathbf{x}}_B$. Já aqueles que não apresentarem contato, obedecerão (2.12) se o produto escalar dado por $(\mathbf{x}_{As} - \bar{\mathbf{x}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B$ for um

número real positivo. Caso contrário, penetração entre os sólidos é detectada pela desobediência à inequação (2.12).

Note que é conveniente a definição de uma função escalar associada à penetração ou intervalo entre pares de pontos materiais candidatos a contato. Trata-se da função *gap* normal que, nesse contexto é definida por:

$$g_n = (\mathbf{x}_{As} - \bar{\mathbf{x}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B. \quad (2.13)$$

A inequação (2.12) deve ser obedecida por todos os pares de pontos materiais candidatos a contato, que devem ser testados pela escolha de candidatos $\mathbf{x}_{As}$ em Γ_A ³. Pode-se entender a inequação (2.12) como a tradução matemática do vínculo mecânico a ser estabelecido para um par de pontos materiais, conforme discutido na seção anterior.

2.3.3 Contato sem atrito

A ausência de atrito indica que há presente somente carregamento normal às superfícies na interação de contato. Isso permite simplificar a equação (2.10) de modo que os carregamentos $\mathbf{t}_{cA} = p_n \mathbf{n}_A$ e $\mathbf{t}_{cB} = p_n \mathbf{n}_B$, em que p_n é a tensão normal nas superfícies Γ_{cA} e

³ Note que essa metodologia é baseada em uma escolha assimétrica de uma das superfícies para ser local de escolha de pontos *slave*, e de outra, para a parametrização como *master*. Em casos de superfícies sem a existência de singularidades (bicos, por exemplo), a escolha entre *master-slave* é arbitrária, desde que um número suficiente de pontos *slave* seja utilizado para descrever Γ_A . Em casos em que alguma das superfícies possua uma singularidade, é conveniente que essa seja a detentora dos pontos *slave* e que, em particular, no ponto ou região de singularidade haja um ou alguns pontos *slave* definidos, a fim de detectar um possível contato envolvendo essa singularidade. Maiores discussões sobre questões de singularidade e técnicas para superá-las podem ser encontradas em [13] e no item 7.7.1 desta tese.

Γ_{cB} , que é sempre negativa para cenários em que ocorre contato ⁴. As condições de contorno na região de contato sem atrito são do tipo Kuhn-Karush-Tucker (KKT), dadas por:

$$\begin{aligned} g_n &\geq 0, \\ p_n &\leq 0, \\ p_n g_n &= 0 \text{ em } \Gamma_c \end{aligned} \tag{2.14}$$

Note que é necessário impor a restrição mecânica do contato, já discutida e apresentada na forma de uma inequação em (2.12). Para tal, pode-se avaliar para cada ponto *slave* escolhido essa inequação. Nos casos em que $g_n > 0$, naturalmente se está obedecendo o vínculo e não há nenhum tipo de interação por contato. Quando for identificada a violação de (2.12) deve-se impor a condição de ocorrência de contato dada por $g_n = 0$, de modo a acatar (2.12) em sua condição-limite.

Existem diversas técnicas disponíveis para imposição de restrições em um sistema não linear de equações. A título de exemplificação, nesse Capítulo será apresentado o equacionamento com o método dos multiplicadores de Lagrange. O leitor irá encontrar opções alternativas como o Método das Penalidades dentre diversas outras em [13].

O vínculo $g_n = 0$ pode ser imposto por meio da inclusão na forma fraca do sistema de um termo proveniente da primeira variação de um potencial de contato escrito por meio de multiplicadores de Lagrange λ . Adotando a estratégia *master-slave*, pode-se definir o potencial dado por

$$W_c = \int_{\Gamma_c} \lambda g_n \, dS. \tag{2.15}$$

A primeira variação de (2.15) leva a:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g_n + \lambda \delta g_n) \, dS. \tag{2.16}$$

⁴ Assume-se que não há adesão na interação de contato. A presença de efeitos adesivos promoveria a possibilidade de tensões normais positivas nas superfícies de contato.

Note que δg_n representa a primeira variação de (2.13), que é dada por:

$$\delta g_n = (\delta \mathbf{x}_{As} - \delta \bar{\mathbf{x}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B + (\mathbf{x}_{As} - \bar{\mathbf{x}}_B) \cdot \delta \bar{\mathbf{n}}_B = (\delta \mathbf{u}_{As} - \delta \bar{\mathbf{u}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.16) leva a:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g_n + \lambda (\delta \mathbf{u}_{As} - \delta \bar{\mathbf{u}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B) dS. \quad (2.18)$$

A comparação das equações (2.10) e (2.18) possibilita uma interpretação importante. Note que o termo $\int_{\Gamma_c} \delta \lambda g_n dS$ não existe em (2.10), pois naquele contexto não foi imposta a restrição de contato. Sua presença em (2.18) é fundamental, uma vez que a arbitrariedade do campo virtual $\delta \lambda$ introduzido implica na imposição do vínculo mecânico desejado ($g_n = 0$). No entanto, o segundo termo em (2.18) dado por $\int_{\Gamma_c} \lambda (\delta \mathbf{u}_{As} - \delta \bar{\mathbf{u}}_B) \cdot \bar{\mathbf{n}}_B dS$ representa o trabalho virtual da ação mecânica atuante nos sólidos, decorrente da interação de contato. Esse termo é exatamente o da equação proposta em (2.10). Nesse caso, o multiplicador de Lagrange é interpretado como $\lambda = p_n$, uma vez que se assumiu que $\mathbf{t}_c = p_n \bar{\mathbf{n}}_B$.

2.3.4 Contato com atrito e sem deslizamento

Nesse caso pode-se impor uma condição vincular mais ampla do que a anterior. De fato, pode-se definir uma função *gap* vetorial sem distinguir direção normal e tangencial por:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{x}_{As} - \bar{\mathbf{x}}_B). \quad (2.19)$$

A fim de impor a restrição associada ao contato sem deslizamento, pode-se prescrever a condição dada por $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, seguindo-se um procedimento similar ao discutido na seção anterior. Inicialmente, deve-se verificar se o par de pontos materiais candidato a contato obedece (2.12). Em casos em que $g_n > 0$, não é necessário introduzir vínculos. Caso haja violação de (2.12), assumindo que não há deslizamento na interface de contato, é possível realizar a imposição do vínculo $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ por meio de uma função vetorial de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ e escrever o potencial:

$$W_c = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g} dS. \quad (2.20)$$

A primeira variação de (2.20) leva a:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{g}) dS, \quad (2.21)$$

em que $\delta \mathbf{g} = (\delta \mathbf{u}_{As} - \delta \bar{\mathbf{u}}_B)$. Com isso, pode-se escrever:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\delta \mathbf{u}_{As} - \delta \bar{\mathbf{u}}_B)) dS. \quad (2.22)$$

A fim de melhor interpretar a equação (2.22), pode-se compará-la à (2.10). Note que em (2.22) há um primeiro termo $\int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g} dS$ que se utiliza da arbitrariedade do campo virtual $\delta \boldsymbol{\lambda}$ para impor a restrição requerida ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$). O outro termo é o que considera ações mecânicas no sistema provenientes dessa imposição de vínculo. A equivalência do segundo termo de (2.22) com (2.10) exige que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{t}_B$, ou seja, engloba-se em $\boldsymbol{\lambda}$ não somente o carregamento na direção normal de contato ao longo de Γ_c , mas também carregamentos cisalhantes e que promovam a condição de não deslizamento. É possível fazer a decomposição de $\mathbf{g}$ em um vetor normal à superfície *master* Γ_B e outro tangencial à mesma, tal que: $\mathbf{g} = g_n \bar{\mathbf{n}}_B + \mathbf{g}_t$. O mesmo pode ser feito para o vetor $\boldsymbol{\lambda}$, levando a: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \bar{\mathbf{n}}_B + \boldsymbol{\lambda}_t$. Pode-se escrever a equação (2.22) utilizando-se essa decomposição:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g_n + \delta \boldsymbol{\lambda}_t \cdot \mathbf{g}_t) dS + \int_{\Gamma_c} (\lambda \delta g_n + \boldsymbol{\lambda}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) dS. \quad (2.23)$$

Note que $\boldsymbol{\lambda}_t$ corresponde à tensão de cisalhamento na interface de contato que surge para não permitir o deslizamento dos sólidos, para cada par de pontos materiais que estão interagindo.

2.3.5 Contato com atrito e com deslizamento

Como último cenário de discussão, aborda-se o contato com atrito e com deslizamento. Esse caso possui grande complexidade física no cálculo da tensão tangencial que ocorre e depende do comportamento de uma lei constitutiva de atrito para a direção tangencial (ver por

exemplo [13]). Do ponto de vista de modelagem matemática, no entanto, sua forma é semelhante à do item anterior. Analogamente à equação (2.23), pode-se apenas nesse caso substituir λ_t pela tensão cisalhante $\mathbf{t}_t$ a ser determinada pela lei constitutiva tangencial. Note que nesse caso não há mais imposição de vínculo de não deslizamento, mas somente da não penetração entre os sólidos. Dessa forma, tem-se:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} \delta \lambda g_n dS + \int_{\Gamma_c} (\lambda \delta g_n + \mathbf{t}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t) dS. \quad (2.24)$$

2.4 Sistema com vários sólidos e vários pares de contato

Com base na discussão da seção 2.3, observa-se na equação (2.7) que a forma fraca para um sistema composto por dois corpos corresponde à composição das contribuições dos trabalhos virtuais dos esforços internos, externos e inerciais, bem como de um termo referente a um par de contato.

Quando há mais sólidos envolvidos e se deseja montar uma única forma fraca que contenha influência de todos eles, basta somar suas contribuições, analogamente ao que foi feito para o caso anterior que envolve dois sólidos. Além disso, quando houver mais pares de contato, analogamente, é possível simplesmente acrescentar novas contribuições inerentes aos novos pares, compondo mais termos no sistema.

Essa versatilidade em montar a forma fraca compondo-a com contribuições diversas tem particular influência na modularização de um método numérico como o Método dos Elementos Finitos. Obviamente ao se introduzir mais elementos, corpos, restrições, são criadas novas funções-incógnitas (que na forma discreta implicarão em mais graus de liberdade). Por outro lado, são geradas mais equações e restrições a serem cumpridas. Assim, para um sistema com N corpos, C interações de contato, e ainda quaisquer outras contribuições que se deseje incorporar, como outros vínculos mecânicos, pode-se escrever a forma fraca geral por:

$$r = \delta W_i + \delta T - \delta W_e + \delta W_c + \delta W_o = 0, \quad (2.25)$$

em que:

$$\delta W_i = \sum_{w=1}^N \delta W_{iw}, \quad (2.26)$$

$$\delta W_e = \sum_{w=1}^N \delta W_{ew}, \quad (2.27)$$

$$\delta T = \sum_{w=1}^N \delta T_w, \quad (2.28)$$

$$\delta W_c = \sum_{j=1}^C \delta W_{cj}, \quad (2.29)$$

em que δW_i representa o trabalho virtual dos esforços internos (tensões), δT o trabalho virtual dos esforços inerciais, δW_e o trabalho virtual dos esforços externos, δW_c o trabalho virtual dos esforços de contato e δW_o o trabalho virtual de qualquer outra influência no sistema. A forma fraca completa apresentada pode ser denominada r , com alusão à “resíduo”. Isso pois a solução desejada corresponde à condição em que $r = 0$.

A solução de (2.25) em geral requer o emprego de aproximações, por exemplo por meio do Método dos Elementos Finitos. Após a discretização, pela arbitrariedade de todos os campos virtuais dos graus de liberdade envolvidos, é possível escrever um sistema não linear de equações. Sua solução exige, em geral, a utilização de um método numérico, como o Método de Newton-Raphson. Para tal, é necessário o cálculo da linearização consistente de (2.25), representada de forma geral por:

$$\Delta(r) = \Delta(\delta W_i) + \Delta(\delta T) - \Delta(\delta W_e) + \Delta(\delta W_c) + \Delta(\delta W_o). \quad (2.30)$$

Após a discretização, $\Delta(r)$ permitirá o cálculo da matriz de rigidez tangente do sistema. Por isso, ao longo desse trabalho, em todas as formulações apresentadas, sempre é apresentado o cálculo da contribuição à forma fraca e também sua linearização consistente.

2.5 Formulações para mecânica computacional do contato

Ao procurar solucionar um modelo de mecânica dos sólidos sob não linearidade geométrica decorre, em geral, um problema de valor de contorno com equações não lineares (ou problema de valor de contorno e inicial – no caso de dinâmica estrutural). Raramente é possível, na prática, a obtenção de soluções analíticas. Dessa forma, a busca por métodos numéricos para solução aproximada desse tipo de modelo envolve consideráveis desafios e é alvo de investigação em diversos centros de pesquisa no mundo. Dentre as diversas técnicas já

desenvolvidas, certamente aquela que mais se popularizou é o Método dos Elementos Finitos. No entanto, há também diversas outras técnicas disponíveis. Em particular, no contexto em que há muitos sólidos envolvidos e com muitas interações de contato, tipicamente para problemas de simulação de grãos, pó, partículas, pode-se adotar o Método dos Elementos Discretos (ver, por exemplo [16]). Para listar alguns outros, pode-se mencionar os Métodos sem Malha, o Método dos Elementos de Contorno, a Análise Isogeométrica e o Método dos Elementos Virtuais.

Quando se deseja utilizar algum desses métodos em problemas que envolvem a interação de contato entre sólidos é necessário estabelecer estratégias computacionais para inclusão das contribuições de contato ao modelo, ou seja, do termo δW_c . Essa seção explora algumas abordagens que vêm sendo empregadas nesse tipo de modelagem.

O presente trabalho se encontra no âmbito do Método dos Elementos Finitos. Por esse motivo o foco da presente discussão é em métodos e estratégias voltadas para tal contexto. Em primeiro lugar, o leitor irá perceber que não há uma única estratégia disponível para a introdução de contato entre corpos nos pacotes comerciais de elementos finitos. Modelos de contato são alvo de pesquisa atual em diversos grupos no mundo. Dessa forma, não se pode afirmar que exista hoje um “melhor método” para resolver contato. O que há é um grande investimento da comunidade em desenvolver novos métodos e estratégias, além de aprimorar os existentes. O desempenho dos modelos varia de acordo com o tipo de aplicação, seja em relação ao seu custo computacional, seja considerando sua capacidade de previsão. Há naturalmente uma evolução temporal na qualidade dos modelos e estratégias considerando os crescentes avanços da capacidade computacional de processamento e memória.

Pode-se elencar algumas técnicas principais para a solução de modelos de contato em conjunto com o Método dos Elementos Finitos:

2.5.1 Formulações de contato nó-nó (*node-to-node*)

Uma das etapas necessárias para impor a restrição de contato em um modelo de elementos finitos é a determinação de pares de pontos materiais nas superfícies candidatas a contato, para cálculo do *gap* normal. Explorou-se a abordagem *master-slave* para tal, no item 2.3.2. As primeiras formulações de contato não faziam uso desse procedimento. De maneira mais simples, admitia-se a priori um par de nós que representasse diretamente o par de pontos materiais, candidatos a contato. A função *gap* normal, nesse caso, pode ser definida pela medida

de distância entre os nós. Em caso de penetração, é feita a imposição da restrição de contato, de maneira semelhante à apresentada e discutida no item 2.3.

A maior limitação dessa técnica reside na eleição a priori dos pontos materiais candidatos a contato, sem a modificação desses por meio de buscas espaciais ao longo da solução do modelo. Por isso, frequentemente essa técnica é aplicável somente para problemas com linearidade geométrica. Além disso há uma forte dependência em relação à malha dos sólidos que apresentarão contato. Dependendo da complexidade geométrica de cada sólido envolvido em um modelo, o tipo de malha e refinamentos empregados podem diferir bastante. A formulação nó-nó exige a existência de pares de nós convenientemente posicionados nas superfícies de contato (*matching meshes*), o que nem sempre é possível ou conveniente.

As primeiras formulações de contato nó-nó podem ser encontradas, por exemplo, em [17] e [18]. Em [13] há bastante informação sobre o método, inclusive com o desenvolvimento de formulações. A Figura 2.3(a) ilustra duas superfícies de contato Γ_A e Γ_B , bem como a representação dos nós utilizados para o cálculo do contato.

Tomando como base o exemplo do contato sem atrito desenvolvido na seção 2.3.3, pode-se compreender esse método pela seguinte aproximação:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g_n + \lambda \delta g_n) dS \approx \sum_i^{n_c} (\delta \lambda_i g_{ni} + \lambda_i \delta g_{ni}) S_i, \quad (2.31)$$

em que se está considerando S_i como uma área de influência de cada par de nós (dependente da malha considerada). O esforço distribuído no contato, que foi escrito em (2.10) como um campo $\mathbf{t}_c$ definido na área de contato Γ_c , está sendo aproximado por um número n_c de pares ação-reação pontuais, atuantes nos nós superficiais da malha de elementos finitos que apresenta contato. Note que ao realizar a aproximação da equação (2.31) se está admitindo que, na região de influência de cada nó *slave*, ambos os campos g_n e λ são constantes, dados por g_{ni} e λ_i .

Figura 2.3 – Algumas abordagens para elaboração de formulações para mecânica computacional do contato no contexto do Método dos Elementos Finitos (a) nó-nó (b) nó-superfície (c) superfície-superfície

Fonte: do autor

2.5.2 Formulações de contato nó-superfície (*node-to-surface*)

Outra forma de abordar a possibilidade de interação de contato é escolher uma das superfícies envolvidas como *master*, conforme discutido em 2.3.2 no procedimento *master-slave*. A questão relacionada à escolha nos pontos materiais na outra superfície, que serão denominados *slave*, pode ser solucionada ao se utilizar a informação da malha de elementos finitos. De fato, se os nós superficiais forem eleitos como pontos *slave*, tem-se uma nova técnica em relação à apresentada anteriormente. Os nós *slave* são utilizados para calcular, como no método anterior, diversas ações pontuais de maneira a aproximar o campo $\mathbf{t}_c$ em Γ_c . O mesmo tipo de aproximação explicado em (2.31) para o cálculo da integral também ocorre aqui. No entanto, há grande evolução nessa técnica em relação à abordagem nó-nó. A principal diferença reside em que na abordagem nó-superfície não se faz a priori a escolha dos pares de pontos materiais candidatos a contato. Esse é resultado do procedimento *master-slave*, que é realizado ao longo da evolução da solução de um modelo não linear. Dessa forma, é possível lidar com não linearidade geométrica e grandes mudanças em regiões de contato e grandes deslizamentos.

A necessidade da solução do problema (2.11) para cada iteração de um método numérico, como Newton-Raphson, torna o custo computacional desse método superior ao nó-nó. A Figura 2.3(b) ilustra o procedimento *master-slave*, em que os nós são escolhidos em Γ_A e projetados em Γ_B a fim de determinar os pares de pontos materiais candidatos a contato.

Algumas referências que ilustram esse método podem ser vistas em [19], [20], [21] e [22].

2.5.3 Formulações de contato superfície-superfície (*surface-to-surface*)

Nessa abordagem o contato é incorporado no modelo utilizando-se diretamente das formas integrais, como apresentadas em (2.18), (2.23) e (2.24), de acordo com o cenário desejado, sem a realização da aproximação (2.31). A restrição de contato é feita admitindo-se uma forma para o campo de multiplicadores de Lagrange. Nesse contexto, pode-se mencionar o método *mortar* (ver por exemplo [23] e [24]). Em [25] é desenvolvida uma formulação 2D, em que se estabelecem as superfícies *mortar* e não-*mortar*. A superfície *mortar* é definida de forma similar à superfície *master*. A superfície não-*mortar* é a oposta, em que são alocados pontos de integração para resolver as contribuições à forma fraca. Para cada ponto de integração, o procedimento *master-slave* da seção 2.3.2 é realizado, a fim de determinar se ocorre penetração na superfície *mortar*. A Figura 2.3(c) ilustra esse procedimento.

Um ponto crucial nesse método está relacionado à forma adotada na discretização para o campo de multiplicadores de Lagrange, que tem implicações matemáticas pautadas pela condição de Babuska-Brezzi (BB), uma vez que se trata de um problema misto. Tal assunto é base do método *mortar*, que corresponde a uma forma de compor aproximações para sistemas discretos que, em particular no contexto de elementos finitos, se torna particularmente útil para malhas distintas em ambos os corpos que interagem por contato.

Essa técnica se demonstrou com desempenho numérico superior à abordagem nó-superfície (ver [13]). De fato, a principal vantagem que aqui reside é que não é feita a aproximação da forma integral descrita na equação (2.31). Ao contrário, se procura aproximar de forma mais elaborada os campos envolvidos na região de contato (g_n e λ , e também os multiplicadores de Lagrange relacionados ao *gap* tangencial, no caso de haver atrito).

2.5.4 Contato pontual entre sólidos e procedimento *master-master*

O termo δW_c é uma forma integral, sendo composto por contribuições inerentes à imposição de vínculos mecânicos associados ao contato (não penetração e não deslizamento, se for o caso) e pelo trabalho virtual dos esforços desenvolvidos na interação de contato entre dois sólidos, que se dá por ações distribuídas e denotadas por $\mathbf{t}_c$.

Há um caso particular de interação de contato que permite uma grande simplificação: quando a área de interação de contato é pequena frente às dimensões dos sólidos envolvidos e se torna aceitável e conveniente a modelagem da interação de contato por meio de uma

homogeneização dos esforços distribuídos em Γ_c , transformando-os em um único par ação-reação de esforços concentrados. Assim, tomando-se como exemplo o caso sem atrito, é feita a seguinte aproximação:

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g_n + \lambda \delta g_n) dS \approx (\delta \lambda_i g_{ni} + \lambda_i \delta g_{ni}) S_i, \quad (2.32)$$

em que a área S_i corresponde a uma área de influência do contato pontual. Note que a integral deixa de existir e o contato se torna pontual, regido por um único valor de *gap* normal e multiplicador de Lagrange. Um procedimento análogo é feito para as contribuições tangenciais (atrito).

Note que existe a necessidade da escolha do par de pontos materiais para atuação do esforço pontual de contato em Γ_A e Γ_B . Para casos de linearidade geométrica, poderia se fazer uso diretamente da abordagem nó-nó ou nó-superfície, pela criação de um único par de contato. Nos casos de não linearidade geométrica a dificuldade é maior. Admite-se que a ação de contato se mantém sempre pontual. No entanto, o par de pontos materiais envolvidos no contato em Γ_A e Γ_B pode se modificar. Assim, é necessária uma estratégia diferente para determinação dos pontos materiais envolvidos no contato em ambas as superfícies. Uma possível abordagem para tal é a técnica *master-master*, objeto central desta tese e desenvolvido nos Capítulos 4 e 6.

Um cenário em que esse tipo de interação é típico é o contato entre elementos finitos de barra. A seguir é apresentado um breve histórico de desenvolvimentos nesse assunto.

2.5.5 Formulações de contato envolvendo elementos finitos de barra

Pelo conhecimento do autor, a primeira aplicação da técnica *master-master* no contexto de elementos finitos de barras ocorreu em [26], em que é apresentada uma formulação de contato pontual envolvendo curvas no espaço, que representam eixos de barras de seção transversal circular. O problema de mínima distância entre as curvas permite a definição da função *gap* normal. A inclusão de atrito na formulação se deu em [27], assumindo-se eixos retilíneos para as barras. Tal formulação foi modificada e aplicada em [28] no contexto de auto contato em barras. Tal conteúdo é desenvolvido nesta tese no Capítulo 6.

Posteriormente foram propostas aplicações para seções transversais não circulares (retangulares) em [29]. Em [30] foi aprimorada a questão da descrição do eixo das barras, pela utilização de polinômios Hermitianos. Em [31] o contato entre barras é tratado com um

ferramental de geometria diferencial, em que a cinemática é descrita por um sistema de Frenet. É incluso um termo relacionado à torção relativa entre curvas, até então ignorado por outras formulações. Os mesmos autores em [15] apresentam uma coleção de diversas formulações de contato, com o mesmo ferramental matemático. A inclusão de graus de liberdade de rotação e momentos induzidos pelo atrito em formulações de contato envolvendo barras foi feita em [32], compondo a gênese do Capítulo 5 desta tese. A limitação para seções circulares, no entanto, ainda persistia.

A utilização da técnica *master-master* envolvendo barras com seção transversal super elíptica se deu em [33] e [34], correspondendo ao Capítulo 4 desta tese.

A dificuldade em lidar com cenários de vigas paralelas sempre esteve presente nesse tipo de formulação. De fato, nessa situação específica o contato deixaria de ser pontual, mas seria distribuído ao longo de uma linha. Isso acaba por se traduzir matematicamente em um cenário de não convexidade no problema de mínima distância entre curvas espaciais. A fim de enfrentar tal situação, em [35] é proposta a distribuição de esforços de contato pontuais adicionais para cenários de vigas muito próximas ao cenário de paralelismo bem como a inclusão de atrito nessa formulação em [36].

Outra abordagem para lidar com o contato entre barras foi apresentada em [37] e [38], em que é detectada uma zona de proximidade entre barras, na qual é definida uma geometria intermediária. Nessa, os pontos materiais das barras que são candidatos a contato são determinados. Assume-se seção transversal circular para as barras. Essa abordagem é capaz de distribuir os esforços de contato de forma a lidar com situações de paralelismo, naturalmente.

Em [39] e [40] o contato entre barras é tratado com a abordagem *master-slave*, sendo considerado sem atrito e assumindo-se seções transversais circulares. A integração das contribuições de contato é feita na forma fraca utilizando-se os pontos de Gauss como *slave*. São mostrados exemplos de contato pontual e não pontual. Em [41] também é abordada a possibilidade de contato entre barras, com orientações arbitrárias, por meio de uma abordagem não pontual que considera a detecção entre pontos de Gauss e segmentos. Além disso, são apresentadas expressões convenientes para avaliar situações de unicidade no problema de projeção ortogonal associado à mínima distância entre curvas espaciais. Nesse contexto, se destaca também o trabalho [42].

Recentemente, em [43] é apresentada uma abordagem unificada para a solução de contato entre barras com orientações diversas, por meio de uma transição suave entre uma formulação pontual e não pontual, dependente da orientação entre as barras consideradas. Em

[44] é apresentada uma sequência hierárquica de possibilidades geométricas para a descrição de contato que também acrescenta conhecimento ao âmbito de interação entre barras.

Pelo conhecimento do autor, a inclusão do atrito no contato pontual entre barras foi introduzida em [27]. No contexto, foram utilizadas as direções das barras em contato como base para estabelecer dois coeficientes de atrito distintos, com avaliações independentes. Em geral tal hipótese pode se tornar não prática, uma vez que fisicamente se está falando de uma única interação de contato pontual e, portanto, é mais natural a utilização de um único coeficiente de atrito. Em [30] essa unificação foi feita, bem como em [28] no contexto de auto contato. Em [31] a força de atrito foi considerada na interação entre barras, bem como os momentos gerados por elas, o que representou um avanço importante. Foi introduzida uma lei de atrito específica para ações provenientes da rotação das barras, o que pode não ser prático do ponto de vista de engenharia, pois seria necessária avaliação de mais um coeficiente. Nessa lei é necessário estabelecer também um máximo momento rotacional, representando um valor limite para alternar entre cenários de não deslizamento e deslizamento. Em [34] foi feita uma redefinição do *gap* tangencial no contexto de uma formulação *master-master* entre barras baseada em uma interação de superfícies. Isso permitiu a unificação da ação do atrito por meio de uma única lei constitutiva, acoplando os efeitos de rotação e translação da barra, bem como os esforços de atrito induzidos nesses movimentos. Com isso, é possível a modelagem de cenários de deslizamento, rolamento ou sua alternância. Tal apresentação é feita em detalhes no Capítulo 4 desta tese.

2.5.6 Contextualização da tese em meio ao estado da arte

Com base na apresentação do presente Capítulo, é possível classificar duas amplas categorias de métodos: aqueles que avaliam a contribuição de contato δW_c sem aproximações acerca da possibilidade de interação pontual de contato e carregam a integração na área de contato Γ_c em sua formulação (ex: *mortar*) ou aqueles que avaliam δW_c assumindo a priori que a interação de contato se dá por ações pontuais, simplificando a questão da integral em Γ_c e homogeneizando a interação de contato por meio de forças concentradas. Nesse contexto, a metodologia para avaliar os pontos materiais de aplicação dessas forças nos corpos que interagem varia conforme o método empregado. Na abordagem nó-superfície, os pontos materiais são escolhidos em apenas uma das superfícies (pontos *slave*), decorrendo o ponto de

sua projeção na superfície *master*. No clássico contato nó-nó, são escolhidos a priori pontos materiais em ambas as superfícies.

Quando a interação de contato pode ser descrita por um único par ação-reação, como descrito na equação (2.32), surge a possibilidade de utilização da abordagem *master-master*. Em particular, no contexto de contato entre barras, há muitas aplicações possíveis em desenvolvimentos comentados no item anterior.

O presente trabalho representa avanços ao estado da arte no contexto de contatos pontuais e da abordagem *master-master*. A tese apresenta a formulação de contato *master-master* entre superfícies gerais e aplicações para interação entre barras (Capítulo 4). Uma generalização da formulação *master-slave* é apresentada no Capítulo 5, no contexto de contato pontual entre esferas e superfícies. No Capítulo 6, são exploradas situações de auto contato em uma formulação *master-master* entre curvas. Uma discussão crítica e comparativa sobre os modelos apresentados é feita no Capítulo 7, bem como é feita uma proposta de unificação de modelos de contato por meio da introdução do conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre superfícies.

O conteúdo das formulações matemáticas de contato aqui apresentadas deu origem a um conjunto de artigos: [33], [34], [32], [45] e [28]. O assunto do Capítulo 7 ainda não foi publicado até a publicação desta tese e representa uma contribuição mais recente do autor.

3 Ferramenta computacional: a plataforma GIRAFFE

Esse Capítulo apresenta uma breve descrição sobre a plataforma GIRAFFE, utilizada para implementação dos modelos computacionais de contato descritos nesta tese. São apresentadas as características dos principais modelos e implementações de elementos finitos dessa plataforma. Esses são amplamente utilizados nos exemplos numéricos dos Capítulos subsequentes para compor a modelagem de sólidos e estruturas que interagem por contato.

3.1 Histórico da plataforma GIRAFFE

GIRAFFE é o acrônimo de “*Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements*”. Trata-se de uma plataforma computacional desenvolvida utilizando-se da linguagem de programação C++. A premissa de projeto do código da plataforma GIRAFFE é a busca pela modulação, a fim de procurar construir uma estrutura de *software* de fácil expansibilidade. O objetivo é ter uma plataforma de implementação para modelos (ex.: novos elementos, novos modelos de contato) em um contexto de elementos finitos não linear. O acúmulo de diversos modelos implementados ao longo do desenvolvimento contínuo do código propicia aplicações cada vez mais rebuscadas. Esse tipo de plataforma se mostra extremamente útil para um grupo de pesquisa em que se desenvolvem novos modelos de elementos finitos não lineares. Além disso o GIRAFFE vem sendo utilizado também por outros pesquisadores não desenvolvedores de código, mas interessados em se utilizar dos recursos para aplicação em modelos de engenharia.

O início do desenvolvimento da plataforma GIRAFFE se deu em 2014 pelo autor dessa tese. O seu precursor, o código FEMCable, já havia sido desenvolvido também pelo autor. Esse possuía rotinas computacionais em C++ para solução de modelos de elementos finitos com não linearidade geométrica para estruturas esbeltas. Foi utilizado, sobretudo, na área de engenharia oceânica (elementos de prospecção de petróleo: *risers*). Existia, no entanto, uma grande limitação para uso, uma vez que só eram permitidas malhas de elementos finitos com conectividade particular. Além disso, havia um único tipo de elemento disponível (barra). A natural expansão desse código exigiu uma completa reestruturação e um novo projeto de *software*, que foi marcado pela filosofia da previsão da expansibilidade. Assim, o código da plataforma GIRAFFE foi iniciado. Sua estrutura é toda desenvolvida com a técnica de orientação a objeto e criação de classes puramente virtuais. Com isso, é possível um grande

reaproveitamento e modulação de código. Por exemplo, é possível que a criação de um novo de tipo de elemento finito possa se limitar praticamente ao desenvolvimento de uma nova classe, com suas próprias funções de leitura e gravação, montagem de contribuições ao resíduo e ao operador tangente, carregamentos particulares, pós-processamento e outras funcionalidades desejadas.

3.2 Estrutura básica da plataforma GIRAFFE

A plataforma GIRAFFE funciona de forma muito simples. A execução do programa se dá pela leitura de um arquivo de entrada. Em seguida o *software*, de acordo com a leitura realizada, realiza a simulação desejada e escreve os resultados requisitados. Possui uma sintaxe própria para entrada e saída de dados. Os recursos disponíveis, do ponto de vista de modelagem, podem ser entendidos como diferentes contribuições para a forma fraca e sua linearização consistente, mostradas em (2.25) e (2.30). A estrutura da equação (2.25) é composta de diversos termos (contribuições) que somadas compõem o modelo matemático completo. O código se aproveita dessa forma particular e permite a inserção modular de recursos que comporão os diferentes termos de (2.25). Todos os comandos e sintaxes podem ser consultados, inclusive com exemplos e explicações detalhadas em [46].

A leitura e gravação de dados se dá por meio de arquivos de texto. O primeiro passo durante a execução é a leitura do arquivo de entrada. Nessa etapa, todas as informações de entrada são salvas em uma estrutura de dados interna e que permanece até a finalização do programa. Essa estrutura também é atualizada ao longo da execução, quando necessário, mas sempre preservando os dados originais.

Na sequência, a execução do programa se dá de acordo com a opção do tipo de análise escolhida (ex.: análise estática, análise dinâmica, análise modal).

Durante a execução podem ser salvos, se requisitados pelo usuário, resultados parciais. Esses podem ser armazenados em arquivos de resultados para leitura no programa Paraview™ ou por meio de monitores de nós, elementos, contatos e conjuntos de nós. Cada tipo de monitor permite avaliar resultados de interesse para entidades específicas. Por exemplo, um monitor nodal permite plotar resultados de posição, velocidade e aceleração para o nó em questão. Já um monitor de elemento permite avaliar diferentes resultados. Para um elemento de barra, permite avaliar os esforços solicitantes. Já para um elemento de corpo rígido, possibilita visualizar a energia cinética, momento linear e momento angular.

A base de dados é estruturada de forma a prever a expansibilidade futura do código. Além de propiciar novos tipos de elementos, novos modelos de contato e novos tipos de carregamentos, nada impede o desenvolvimento futuro de outros dados de entrada hoje não previstos, mas que poderão compor o modelo matemático desejado.

A seguir estão descritos de forma sucinta os principais recursos de funcionamento e que podem ser utilizados pela plataforma GIRAFFE para a solução e análise de um modelo matemático discreto, tendo como base o Método dos Elementos Finitos não linear.

3.2.1 Nós

O nó é a entidade básica associada à definição dos graus de liberdade em um modelo de elementos finitos. A estrutura da plataforma GIRAFFE está preparada para trabalhar com um número variável de graus de liberdade por nó, de acordo com o tipo de elemento utilizado para compor a malha. Além disso está prevista expansão futura para inserção de novas naturezas de graus de liberdade, hoje ainda não contempladas⁵.

⁵ Os elementos atualmente implementados possuem somente graus de liberdade de translação e rotação. Está prevista e é desejável a inserção de graus de liberdade de temperatura a fim de contemplar efeitos termomecânicos. Além disso, dependendo do tipo de formulação estrutural com que se trabalha, pode ser necessária inserção de graus de liberdade com conotação distinta, como empenamento. Isso também está previsto na estrutura do código. Além disso, não é necessário que todos os nós possuam os mesmos graus de liberdade. Por exemplo, ao utilizar elementos finitos triangulares de casca na plataforma GIRAFFE, os nós dos vértices possuem apenas graus de liberdade de translação, enquanto que os nós dos pontos médios dos lados contemplam translação e rotação.

3.2.2 Elementos

A determinação da malha de elementos finitos se dá pela inserção de elementos de diversos tipos. Cada qual possui uma conectividade com os nós definidos no modelo em questão. O código da plataforma GIRAFFE possui elementos de barra, tubo, casca, mola e amortecedor, massa pontual e corpo rígido. Combinados, permitem a versatilidade da montagem de um sistema complexo com corpos rígidos e flexíveis. A Figura 3.1 ilustra alguns elementos empregados para compor um modelo. As principais características dos elementos são descritas a seguir:

- **Barra:** representa bem um sólido quando esse possui uma das dimensões substancialmente superior às outras duas (comprimento). Deve-se estabelecer uma malha que descreva o eixo da barra. Além disso, as propriedades da seção transversal assumida devem ser fornecidas. A formulação do elemento está mais detalhada no item 3.3.3.
- **Tubo:** representa um caso particular de barra com seção transversal na forma tubular. Esse elemento contém algumas formulações especiais para carregamento de pressão hidrostática (ver [47]) e esforços hidrodinâmicos (ver [4]), preparados para contemplar a ação de escoamentos externos.
- **Casca:** representa bem um sólido quando esse possui uma das dimensões substancialmente inferior às outras duas (espessura). Deve-se estabelecer uma malha que descreva a superfície média desse sólido. Além disso, deve-se entrar com a informação da espessura de cada elemento. A formulação do elemento está mais detalhada no item 3.3.4.
- **Mola e amortecedor:** elemento versátil que permite conectar nós inserindo rigidez e amortecimentos concentrados. Na formulação particular implementada na plataforma GIRAFFE, o elemento de mola e amortecedor somente contempla rigidez e amortecimento translacionais. A formulação é detalhada em [48] e leva em conta a não linearidade geométrica para os casos em que os nós se movimentam substancialmente ao longo da evolução do modelo, contemplando o realinhamento da mola e amortecedor na direção que une os nós.
- **Massa pontual:** elemento versátil que permite a inserção de massa pontual em um nó, com 3 graus de liberdade. Com isso é introduzido, além do efeito inercial, uma fonte de peso próprio no caso de se estabelecer um campo gravitacional no modelo. Contempla

apenas efeitos de translação. No caso em que se deseja incluir efeitos de momentos/produtos de inércia, deve-se recorrer ao elemento de corpo rígido descrito na sequência.

- **Corpo rígido:** elemento vinculado a um único nó, com 6 graus de liberdade. Inclui no modelo informações inerciais de translação e rotação, por meio de uma massa pontual e uma matriz de inércia. É um recurso bastante útil para a modelagem de peças que apresentam rigidez muito maior do que outras partes do sistema e cujo estudo detalhado de tensões não seja objeto da modelagem. Pode ser utilizado para a simulação de mecanismos com partes rígidas. O corpo rígido é totalmente detalhado em [9].

Figura 3.1 – Exemplo de malha de elementos finitos de um modelo estrutural de um ventilador de teto, composto de elementos de barra (haste central), corpo rígido (motor elétrico e estrutura central) e cascas (pás)

Fonte: adaptado de [9]

3.2.3 Partículas

A estrutura do *software* prevê a inserção de partículas, como corpos rígidos e que podem interagir e participar do modelo discreto. Esse tipo de inserção é extremamente útil para a simulação de interação entre partículas (elementos discretos) e estruturas flexíveis, compostas pelos elementos aqui brevemente descritos. O trabalho [49] representa uma interação realizada entre a plataforma GIRAFFE e o código PSY, para esse tipo de aplicação. Em particular, para esse tipo de recurso, é prevista a interação entre diferentes códigos computacionais, em que a troca de informações se dá por acoplamento fraco (*staggered*).

3.2.4 Carregamentos e dados ambientais

A inserção de carregamentos é fundamental para a composição do modelo de elementos finitos. Nesse contexto, é possível trabalhar com carregamentos estáticos e dinâmicos (definidos por séries temporais). A plataforma GIRAFFE prevê carregamentos nodais e também o cálculo de cargas nodais equivalentes no caso de carregamentos distribuídos. Por exemplo, o carregamento de pressão aplicado a uma superfície de casca é automaticamente transformado em cargas nodais equivalentes.

Além disso, é possível definir dados ambientais que afetam todo o modelo em termos de carregamentos. Por exemplo, a existência de um campo gravitacional, ou a inserção de um modelo de barras de seção transversal tubular nas águas, gerando esforços de arrasto aerodinâmico que possuem grande relevância em algumas aplicações oceânicas (ver ex.: [5] e [4]).

3.2.5 Contatos

A definição de modelos de contato, objeto central dessa tese, pode ser feita na plataforma GIRAFFE de diferentes formas. Em particular, sendo objeto central dessa tese estão os modelos do tipo “SSSS” (*surface set to surface set*), “NSSS” (*node set to surface set*) e “LRLR” (*line region to line region*).

A criação desses pares de contato exige a prévia definição das regiões candidatas a apresentarem interação. Isso deve ser feito em cada modelo, de forma particular. É possível definir um conjunto de superfícies de contato (*surface set*) e um conjunto de nós para compor detectores de contato (*node set*). Para o caso de contato entre linhas, pode-se atribuir regiões de linhas (*line regions*). De acordo com o tipo de formulação escolhida, habilita-se a possibilidade de contato entre conjuntos de superfícies (*master-master*), entre um conjunto de nós e um conjunto de superfícies (*master-slave*) ou entre linhas (*master-master*).

Por se tratar do tema central dessa tese, cada um desses modelos está detalhado em seu Capítulo devido. Além disso, o item 3.3.6 traz um maior detalhamento das estratégias computacionais para estabelecer modelos de contato.

3.2.6 Restrições especiais

Dependendo do tipo de simulação que se deseja realizar, em particular para casos que envolvem mecanismos e possíveis movimentos relativos e particulares entre diferentes peças de um modelo, pode ser necessária a atribuição de algumas restrições cinemáticas do tipo juntas (*joints*). Essas são denominadas na plataforma GIRAFFE por “restrições especiais”.

O trabalho [48] apresenta a introdução dessas restrições no contexto dos modelos estruturais implementados na plataforma GIRAFFE. Atualmente podem ser definidas restrições especiais do tipo: mesmo deslocamento, mesma rotação, região rígida, junta de revolução e junta universal.

3.2.7 Superfícies

A definição de superfícies parametrizadas é essencial para a criação de modelos de elementos finitos que envolvam contato. Na plataforma GIRAFFE a filosofia de criação de pares de contato é completamente independente do modelo estrutural adotado. De fato, na equação (2.25) é possível notar que a contribuição dos esforços internos está contemplada no termo δW_i e a contribuição dos esforços de contato no termo δW_c . Com isso, não há nenhum tipo de restrição do ponto de vista de modelagem matemática para se atrelar algum tipo de modelo estrutural a outro modelo de contato. Obviamente, do ponto de vista prático, existe sempre algum tipo de relação geométrica entre o modelo do sólido/estrutura e a caracterização da superfície onde o contato se estabelece ⁶.

⁶ Em alguns programas de elementos finitos comerciais é comum a utilização de malhas especiais para a modelagem do contato, por meio de “elementos de contato”. Esses, podem ser vistos como um recobrimento sobre a malha que representa a estrutura de um sólido ou de um modelo estrutural de cascas ou barras. A interação de contato acaba, portanto, sendo atrelada aos mesmos graus de liberdade do modelo que representa a estrutura, no entanto com uma contribuição completamente distinta à forma fraca (2.25).

Com base nesse raciocínio, na plataforma GIRAFFE a modelagem do contato é feita por meio da definição de superfícies no modelo, atreladas ao movimento da malha do sólido/estrutura atrelada. Dessa forma, consegue-se utilizar os mesmos graus de liberdade do modelo estrutural na composição de superfícies de contato deformáveis. Por isso, quando se deseja definir os já mencionados conjuntos de superfícies para compor os pares de contato, é necessário antes definir as superfícies propriamente ditas. Exemplos de parametrizações de superfícies podem ser encontradas em [45], [33] e [9].

Note que algumas superfícies não envolvem diretamente graus de liberdade associados ao movimento de um corpo flexível, mas sim o movimento de um nó e que rege uma extensão rígida (nó piloto). Esse tipo de abordagem é particularmente útil quando se deseja modelar o contato envolvendo um corpo modelado como sendo flexível e outro corpo como sendo rígido⁷.

3.2.8 Tipos de análise

Na plataforma GIRAFFE estão disponíveis análises estática e dinâmica. Basicamente a única diferença entre elas é a inserção ou não das contribuições inerciais δT na equação (2.25). Ambas permitem avaliar o comportamento de um modelo multicorpos com não linearidade geométrica e possibilidade de contato e restrições especiais entre os corpos, de acordo com os recursos aqui descritos.

Além disso existe o recurso de análise modal linear. Esse pode ser executado de forma independente para uma certa malha proposta. Ainda é possível requisitar a análise modal durante análises estáticas ou dinâmicas, com o objetivo de avaliar a evolução das frequências naturais e modos de vibrar de um sistema. Tal tipo de análise é particularmente útil no estudo de estabilidade (ver por exemplo [50] e [6] em que a evolução das frequências naturais é monitorada ao longo da aplicação de carregamentos que tentem a instabilizar o sistema).

⁷ A hipótese de corpo rígido deve ser compreendida como uma aproximação válida quando as deformações de tal corpo são desprezíveis para o modelo em questão. O comportamento de todo e qualquer corpo é, de fato, de um corpo flexível.

3.2.9 Processamento paralelo e alguns detalhes de implementação

A plataforma GIRAFFE possui implementações de processamento paralelo, utilizando-se para tal da biblioteca OpenMPTM. Existem diversas etapas de cálculo dentro de um código de elementos finitos que são altamente paralelizáveis. Por exemplo, a montagem de contribuições para resíduos e rigidez tangente de cada elemento, pares de contato e restrições especiais podem, em geral, ser executadas em paralelo.

A solução do sistema linear de equações a cada iteração do Método de Newton Raphson também é paralelizável. Em particular, o GIRAFFE faz uso da biblioteca MKLTM, e dentro desta utiliza-se da rotina PARDISOTM para a solução de sistemas lineares de equações. Essa biblioteca já possui implementações com processamento paralelo, também se utilizando do OpenMPTM.

Quanto ao gerenciamento de memória RAM, o código da plataforma GIRAFFE realiza toda a alocação e liberação de memória de forma manual, de acordo com os dados de entrada do modelo requerido. Embora trabalhoso do ponto de vista de codificação, isso torna o controle muito eficiente, pois o programador tem total liberdade sobre o que alocar e quando alocar, e ainda se a alocação deve ou não ser feita (de acordo com algum tipo de lógica relacionada à estratégia de solução do modelo em questão). Esse tipo de recurso é bastante importante quando se deseja trabalhar com modelos com muitos graus de liberdade, em que o desperdício de memória RAM pode se tornar proibitivo.

3.2.10 Pós-processamento: integração com o programa ParaviewTM

Em modelos de elementos finitos a visualização de resultados é essencial para a correta interpretação física, bem como o julgamento acerca da qualidade da modelagem. Para tal, existem diversos pós-processadores disponíveis, inclusive alguns deles sendo códigos abertos e gratuitos.

A plataforma GIRAFFE está projetada para escrever arquivos de saída para pós-processamento no *software* aberto e gratuito para usos acadêmicos PARAVIEWTM. É possível visualizar desde a malha utilizada, sua representação renderizada, animações de carregamentos, esforços de contato e diversos outros recursos.

Por exemplo, seções transversais de barras podem ser plotadas de maneira a visualizar seu aspecto como um sólido, facilitando a interpretação sobre o movimento de uma estrutura

de barras, ainda que gozando da versatilidade e baixo custo computacional de apenas seis graus de liberdade por nó ao longo do eixo, que representa a malha em questão (ver Figura 3.2).

Figura 3.2 – Visualização da malha de um modelo de barras (a) visualização na forma renderizada (como um sólido 3D) (b) visualização do eixo da barra e sua forma renderizada esmaecida

Fonte: do autor

3.3 Algumas formulações matemáticas da plataforma GIRAFFE

Esse item tem o objetivo de apresentar de forma bastante introdutória algumas formulações matemáticas da plataforma GIRAFFE que são utilizadas diretamente na elaboração de exemplos numéricos em conjunto com os modelos de contato aqui propostos.

A base de todos as formulações de elementos é uma descrição cinemática do tipo Lagrangiana atualizada, primeiramente apresentada. Posteriormente, é explorada a questão da integração temporal para os casos de modelos de dinâmica transiente. Posteriormente, são introduzidos os modelos estruturais de barra e casca, que dão origem aos principais tipos de elementos do programa. Também é mostrada a formulação base para a dinâmica de uma partícula esférica, utilizada em alguns exemplos numéricos desta tese. Por fim, também é apresentada a base de implementação de busca de contato, procurando enfatizar ao leitor como fazer um código de elementos finitos que envolva interação por contato, em seus aspectos mais gerais. Os aspectos particulares são descritos para cada formulação de contato nos Capítulos 4, 5 e 6.

3.3.1 Descrição Lagrangiana Atualizada

Seja um ponto material k genérico em um sólido deformável ilustrado na Figura 3.3, em que é possível visualizar a configuração de referência “ r ”, configuração atual “ i ” ou próxima

configuração “i+1”. O ponto k sofre transformações por conta do movimento ocorrido no sólido como um todo. O sistema de coordenadas global está ilustrado na Figura 3.3, e utiliza-se da base $(\mathbf{e}_1^g, \mathbf{e}_2^g, \mathbf{e}_3^g)$.

Figura 3.3 –Descrição Lagrangiana atualizada

Fonte: do autor

Nesse trabalho, a notação utilizada para associar certa grandeza com alguma configuração é o emprego do índice superior à direita. Dessa forma, $(...)^r$ refere-se à configuração “r”, $(...)^i$ à configuração “i” e $(...)^{i+1}$ à configuração “i+1”. Grandezas que relacionam a configuração “i” com “i+1” são denotadas por $(...)^{\Delta}$.

A posição do ponto material k é dada por $\mathbf{x}_k$, tal que:

$$\mathbf{x}_k^{i+1} = \mathbf{x}_k^i + \mathbf{u}_k^{\Delta}, \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{u}_k^{\Delta}$ representa o deslocamento do ponto material k entre as configurações “i” e “i+1”.

É importante também descrever a rotação sofrida por certo ponto material k. Essa, é caracterizada pelo tensor rotação $\mathbf{Q}_k$, de modo que para um vetor genérico associado ao ponto k, descrito por $\mathbf{a}_k$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k^{i+1} &= \mathbf{Q}_k^{i+1} \mathbf{a}_k^r, \\ \mathbf{a}_k^i &= \mathbf{Q}_k^i \mathbf{a}_k^r \text{ e} \\ \mathbf{a}_k^{i+1} &= \mathbf{Q}_k^{\Delta} \mathbf{a}_k^i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo que $\mathbf{a}_k^i$ e $\mathbf{a}_k^{i+1}$ possuem a mesma norma de $\mathbf{a}_k^f$, mas orientações distintas (devido à rotação). Com isso, também pode-se escrever a decomposição multiplicativa do tensor rotação dada por

$$\mathbf{Q}_k^{i+1} = \mathbf{Q}_k^\Delta \mathbf{Q}_k^i. \quad (3.3)$$

Em meio a diversas escolhas possíveis de parâmetros para a elaboração do tensor rotação, existem as parametrizações vetoriais ⁸. Em particular, é notável nesse contexto o vetor rotação de Euler, dado por $\boldsymbol{\theta}_k = \theta_k \mathbf{e}$, em que θ_k é a magnitude da rotação e $\mathbf{e}$ é a direção do eixo de rotação. Pode-se interpretar a rotação simplesmente como uma transformação linear entre dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, tal que $\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v}$. O tensor rotação associado com o ponto k é dado por $\mathbf{Q}_k$ e pode ser calculado por meio do vetor rotação de Euler $\boldsymbol{\theta}_k$, como conhecido pela fórmula de Euler-Rodrigues:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta_k}{\theta_k} \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\theta_k}{2}}{\frac{\theta_k}{2}} \right)^2 \boldsymbol{\theta}_k^2, \quad (3.4)$$

sendo $\boldsymbol{\theta}_k = \text{skew}(\boldsymbol{\theta}_k)$ e $\mathbf{I}$ o tensor identidade de ordem 3. Por outro lado, é possível calcular o tensor rotação de forma alternativa, por meio da utilização do vetor rotação de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}_k$, que possui magnitude $\alpha_k = 2 \tan(\theta_k/2)$. A direção de $\boldsymbol{\alpha}_k$ é a mesma do vetor rotação de Euler. Com isso, $\boldsymbol{\alpha}_k = \alpha_k \mathbf{e}$. Pode-se obter a seguinte fórmula para avaliar o tensor rotação, em função de $\boldsymbol{\alpha}_k$ (ver ex.: [51]):

⁸ Para uma descrição de diversas possíveis escolhas de parâmetros de rotação, o leitor pode consultar por exemplo [93], em que são relacionados os ângulos de Euler, ângulos de Cardan, cossenos diretores e as parametrizações vetoriais. Em particular, também é recomendado no contexto de modelos de cascas o artigo [94], que apresenta a rotação no contexto da teoria geometricamente exata. O artigo compara diferentes abordagens para o acúmulo de rotações. Para uma descrição com maior aprofundamento matemático sobre as rotações, recomenda-se o livro [95].

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{I} + g \left(\mathbf{A}_k + \frac{1}{2} \mathbf{A}_k^2 \right), \quad (3.5)$$

em que $\mathbf{A}_k = \text{skew}(\boldsymbol{\alpha}_k)$ e $g = \frac{4}{4 + \alpha_k^2}$. A expressão (3.5) é bastante conveniente, uma vez que é mais simples do que a apresentada em (3.4), além do que não possui funções trigonométricas. A principal vantagem da parametrização de Rodrigues em relação à de Euler está associada à existência de uma expressão para o cálculo de sua acumulação, quando avaliada entre diferentes configurações (ver [51]) ⁹:

$$\boldsymbol{\alpha}_k^{i+1} = \frac{4}{4 - \boldsymbol{\alpha}_k^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}_k^i} \left(\boldsymbol{\alpha}_k^\Delta + \boldsymbol{\alpha}_k^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_k^\Delta \times \boldsymbol{\alpha}_k^i \right). \quad (3.6)$$

A utilização de (3.6) permite o cálculo do novo parâmetro de rotação $\boldsymbol{\alpha}_k^{i+1}$ somente de posse do anterior $\boldsymbol{\alpha}_k^i$ acumulado e da rotação atual $\boldsymbol{\alpha}_k^\Delta$, tal que valha a expressão (3.3).

Com isso, a descrição Lagrangiana atualizada faz uso das variáveis cinemáticas incrementais dadas por $\mathbf{u}_k^\Delta$ (deslocamentos) e $\boldsymbol{\alpha}_k^\Delta$ (rotações). Provê um ferramental capaz de lidar com rotações finitas e que, acumuladas, remetem a ilimitado número de voltas. Com isso, se mostra adequada à utilização no contexto de mecanismos ou aplicações que envolvam grandes magnitudes de rotação, conforme o desenvolvimento apresentado em [48].

Nota: é importante enfatizar o porquê da escolha da descrição Lagrangiana atualizada frente à possível escolha mais simples de utilizar uma descrição Lagrangiana total. A questão é diretamente relacionada às rotações. Ocorre que a utilização de parametrizações vetoriais para rotações leva a singularidades no tensor rotação. De fato, a elaboração do tensor rotação com o uso dos parâmetros de Rodrigues apresenta singularidades para valores de rotação de Euler associados a $\theta_k = \pm n\pi$, sendo n um número inteiro. Dessa forma, no caso de ocorrência de rotações elevadas (maiores do que meia volta) é esperado que se passe por singularidades.

⁹ A não existência dessa expressão demandaria a necessidade do acúmulo da rotação $\mathbf{Q}_k^{i+1}$ por meio da elaboração dos tensores rotação $\mathbf{Q}_k^i$ e $\mathbf{Q}_k^\Delta$ e utilização da expressão (3.3). A seguir, o processo de extração do vetor rotação a partir do seu tensor poderia ser empregado.

Assim, a escolha da descrição Lagrangiana atualizada e consequente adoção de variáveis cinemáticas incrementais é uma busca por evitar as possíveis singularidades no tensor rotação. Leva à possibilidade de se trabalhar com rotações ilimitadas em seu acúmulo, mas sendo possível garantir incrementos que envolvam rotações limitadas a π radianos (meia volta), entre configurações sucessivas. O leitor interessado em se aprofundar em descrições de rotações de Rodrigues pode recorrer ao trabalho [52].

3.3.2 Integração ao longo do tempo em modelos de dinâmica estrutural

No caso da solução de modelos de dinâmica estrutural é necessário realizar a integração ao longo do tempo das variáveis cinemáticas incrementais para cada ponto material k , ou seja, os deslocamentos $\mathbf{u}_k^\Delta$ e rotações $\boldsymbol{\alpha}_k^\Delta$. Após a discretização de elementos finitos, acaba-se integrando diretamente os valores nodais dessas grandezas, que se constituem nos graus de liberdade do modelo discreto. Para realizar a integração temporal existem muitos métodos disponíveis (o leitor pode recorrer a [11] para uma visão geral de diversas classes de métodos).

Para obter a evolução ao longo do tempo dos graus de liberdade do modelo é necessário avaliar suas derivadas temporais (no caso de deslocamentos lineares, trata-se da velocidade e da aceleração). A massiva maioria dos métodos, pelo conhecimento do autor, utiliza-se de uma descrição de diferenças finitas para obter expressões de aproximação para as derivadas temporais dos graus de liberdade. Conforme apresentado em [11], no contexto da integração temporal em que são definidas diferentes configurações associadas a instantes sucessivos $t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots$ pode-se avaliar a velocidade $\mathbf{v}_k(t)$ de um ponto material por:

$$\mathbf{v}_k(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_k(t) \approx \frac{1}{\Delta t} [\alpha \mathbf{x}_k(t_{i-1}) + \beta \mathbf{x}_k(t_i) + \gamma \mathbf{x}_k(t_{i+1})] . \quad (3.7)$$

em que Δt é um intervalo de tempo entre as diferentes configurações (passo temporal) e α, β e γ representam constantes que ponderam os valores das posições nos diferentes instantes¹⁰. A

¹⁰ Note que nem sempre se deseja trabalhar com passos temporais constantes. Em particular, no âmbito de modelos não lineares, é bastante comum a necessidade de se alterar os passos

expressão (3.7) representa uma forma geral para descrever diferentes métodos para realizar um cálculo aproximado da velocidade, e constituem a base do Método das Diferenças Finitas ¹¹. De acordo com a forma utilizada para escrever essa expressão e do ponto em torno do qual são escritas as aproximações de diferenças para as derivadas temporais, o método terá diferentes níveis de precisão de aproximação, bem como também terá diferentes comportamentos do ponto de vista de dinâmica e aproximações associadas (estabilidade numérica).

Ao resolver a forma fraca (2.25) em sua configuração mais geral, incluindo efeitos inerciais δT , amortecimentos (dependentes das velocidades) e outros esforços que dependam do tempo, é necessário escrever expressões de aproximação para a velocidade e aceleração e que dependam somente dos graus de liberdade utilizados na discretização espacial (no contexto, deslocamentos e rotações). Para tal, existe uma classificação bastante ampla entre diferentes formas de realizar essa integração: métodos explícitos e implícitos.

Métodos explícitos são aqueles em que a solução desconhecida no instante posterior t_{i+1} depende somente de variáveis conhecidas e avaliadas no instante atual t_i . Em geral são limitados ao uso somente com valores de passo temporal muito pequeno, que pode ser determinado por meio de um critério de estabilização numérica. Note que nesse contexto há dependência entre o valor do passo temporal máximo que pode ser utilizado com a malha espacial adotada. A celeridade de ondas mecânicas no meio é a chave dessa possível instabilidade numérica.

Métodos implícitos são aqueles em que a solução no instante posterior t_{i+1} depende de variáveis conhecidas e avaliadas no instante atual t_i e também em algum instante intermediário,

temporais de acordo com o nível de não linearidade encontrado ao longo de uma análise. Em particular, em problemas de contato, objeto principal dessa tese, isso é bastante presente. Problemas de impacto, por exemplo, são caracterizados por uma mudança abrupta de rigidez, o que leva a dificuldades numéricas e necessidade de adaptação do passo de integração de acordo com a evolução da análise. Nesse caso, em particular, não basta garantir a convergência, mas deve-se tomar o cuidado de utilizar um passo temporal que possa capturar corretamente a física inerente ao contato-impacto em questão.

¹¹ Para uma visão introdutória sobre o Método das Diferenças finitas e sua base conceitual na série de Taylor o leitor pode recorrer a [96].

dito $t_{i+\alpha}$. Em geral, no caso de modelos não lineares, é necessária a solução de um sistema não linear de equações algébricas a cada passo de tempo de integração. Em geral cada passo temporal para avaliar a resposta de um sistema dinâmico por métodos implícitos possui maior custo computacional quando comparado aos métodos explícitos. No entanto sua principal vantagem reside no fato de que métodos implícitos podem ser construídos de maneira a apresentar comportamento incondicionalmente estável, não sendo necessário estabelecer critérios de estabilidade numérica para a escolha do passo de integração temporal.

No código da plataforma GIRAFFE e em todos os exemplos dessa tese que envolvem dinâmica estrutural adotou-se o Método de Newmark, em sua versão implícita. A base desse método é a escrita das seguintes aproximações para a posição $\mathbf{x}_k$ e velocidade $\mathbf{v}_k$ do ponto material k em uma configuração associada ao instante t_{i+1} :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k(t_{i+1}) &\approx \mathbf{x}_k(t_i) + \Delta t \mathbf{v}_k(t_i) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_k(t_i) + 2\beta\mathbf{a}_k(t_{i+1})] \text{ e} \\ \mathbf{v}_k(t_{i+1}) &\approx \mathbf{v}_k(t_i) + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_k(t_i) + \gamma\mathbf{a}_k(t_{i+1})].\end{aligned}\tag{3.8}$$

em que β e γ são constantes que determinam o comportamento do método de integração numérica e $\mathbf{a}_k$ é a aceleração do ponto material k . É possível escolher tais constantes de forma conveniente. Após análise matemática do Método de Newmark para sistemas lineares de equação de movimento, de acordo com [11], é possível trabalhar nas seguintes faixas: $0 \leq \beta \leq 0.5$ e $0 \leq \gamma \leq 1$. Em particular, também há uma recomendação de valores das constantes para garantir a estabilidade numérica do método, para os casos implícitos de sistemas lineares [11]:

Tabela 3.1 – Recomendação de valores de constantes no Método de Newmark

Parâmetro	Erro em amplitude sem amortecimento	Erro em amplitude com amortecimento	Garantia de estabilidade numérica
$\gamma = 0.5$	0	$O(\Delta t^2)$	$\beta \geq 0.25$
$\gamma \neq 0.5$	$O(\Delta t)$	$O(\Delta t)$	$2\beta \geq \gamma \geq 0.5$

Fonte: adaptado de [11]

Note que a escolha do parâmetro $\gamma = 0.5$, para sistemas lineares, garante erro nulo na amplitude da resposta, o que está atrelado à conservação de energia mecânica. Quando há amortecimento, o erro da amplitude de resposta é ordem Δt^2 . Já quando se trabalha com $\gamma \neq 0.5$, o erro de amplitude com ou sem amortecimento cai para ordem de Δt .

Note que a escolha de $\gamma \neq 0.5$ é bastante comum em problemas práticos de engenharia, uma vez que em geral favorece o amortecimento numérico de frequência elevadas. A aproximação de elementos finitos acaba reduzindo os infinitos modos de vibrar e frequências naturais de um sistema contínuo a um número finito, dado pelo número de graus de liberdade do modelo discreto. No entanto, o erro cometido pela aproximação de elementos finitos na avaliação de modos com frequência elevada é relevante e, em geral essas frequências não são objeto de estudo (elas necessitariam de malhas ou modelos mais rebuscados). Dessa forma, em geral frequências elevadas são presentes, mas não desejáveis na integração de sistemas dinâmicos discretos, o que torna desejáveis as fontes de amortecimento numérico para tais frequências, o que motiva a utilização de $\gamma \neq 0.5$ ¹².

A reescrita de (3.8) leva a expressões para avaliar velocidades e acelerações como função somente dos deslocamentos atuais (incrementais) e velocidades e acelerações do instante anterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(t_{i+1}) &\approx \alpha_1 \mathbf{u}_k^\Delta - \alpha_2 \mathbf{v}_k(t_i) - \alpha_3 \mathbf{a}_k(t_i) \text{ e} \\ \mathbf{v}_k(t_{i+1}) &\approx \alpha_4 \mathbf{u}_k^\Delta + \alpha_5 \mathbf{v}_k(t_i) + \alpha_6 \mathbf{a}_k(t_i). \end{aligned} \quad (3.9)$$

com:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}, \alpha_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, \alpha_3 = \frac{1-2\beta}{2\beta}, \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, \alpha_5 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right), \alpha_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que as mesmas ideias podem ser feitas para a integração dos graus de liberdade associados a grandezas angulares (parâmetros vetoriais de rotação de Rodrigues). Nesse caso,

¹² A questão da ordem de grandeza do erro, no entanto, permanece um ponto negativo do Método de Newmark quando se trabalha com $\gamma \neq 0.5$. Isso motivou o desenvolvimento de outra classe de métodos que possam manter a precisão de Δt^2 mas mantendo o amortecimento numérico. Nesse contexto, o leitor pode recorrer ao método HHT ou suas variações (ver, por exemplo [12]).

utiliza-se da velocidade angular ω_k e aceleração angular $\dot{\omega}_k$. Para tal, utiliza-se da proposta de [53] e [54], em que se modifica o Método de Newmark para o contexto de parâmetros de Euler, por meio de uma discussão aprofundada sobre a natureza das rotações e sua forma de integração. No presente trabalho, a mesma estratégia é utilizada para o vetor rotação de Rodrigues, pelas expressões:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_k(t_{i+1}) &\approx Q_k^\Delta [\alpha_1 \alpha_k^\Delta - \alpha_2 \omega_k(t_i) - \alpha_3 \dot{\omega}_k(t_i)] \text{ e} \\ \omega_k(t_{i+1}) &\approx Q_k^\Delta [\alpha_4 \alpha_k^\Delta + \alpha_5 \omega_k(t_i) + \alpha_6 \dot{\omega}_k(t_i)],\end{aligned}\tag{3.11}$$

Ainda que se tente extrapolar para o âmbito de modelos com não linearidade as recomendações de uso de coeficientes de Newmark da Tabela 3.1, são conhecidos problemas de não conservação de certas grandezas físicas, como momento linear, angular e energia mecânica. Em particular, no contexto de rotações finitas, conforme discutido em [11], o momento angular não é preservado. Investigações acerca desse tópico bem como a proposta de outras naturezas de métodos de integração que garantam conservação de grandezas físicas têm sido objeto de estudo por vários anos, sendo que na literatura há uma vasta gama de trabalhos. Aqui não se objetiva fazer uma revisão completa sobre o assunto. O leitor interessado, no entanto, pode recorrer a [55], em que se propõe uma forma de conservação/dissipação de energia para o contexto de barras, bem como [56] e [57] em que são propostas técnicas para integração de parâmetros de rotação de Rodrigues que garantem a conservação de energia e momento angular, tanto para o âmbito de barras como de cascas.

3.3.3 Modelo estrutural de barra

O modelo estrutural que é utilizado como base para a formulação do elemento finito de barra da plataforma GIRAFFE tem origem nos trabalhos de Simo e Pimenta (ver [58], [59], [60] e [61]). Trata-se da formulação geometricamente exata (ou cinematicamente exata).

A essência dessa formulação é a descrição cinemática do movimento de seções transversais da barra considerando-se equações que descrevem o movimento geral de um corpo rígido e, portanto, sem nenhum tipo de aproximação quanto à magnitude dos deslocamentos e rotações sofridas. Assim, consegue-se uma descrição plenamente apta a lidar com grandes deslocamentos e rotações finitas.

Ao assumir um movimento geral de corpo rígido para cada seção transversal se está fazendo uma hipótese semelhante às das barras de Timoshenko, ou seja, as seções não se deformam, no entanto pode ocorrer cisalhamento (essa hipótese também é denominada como teoria de cisalhamento de primeira ordem). A cinemática de cada seção transversal é descrita por meio de um vetor deslocamento incremental $\mathbf{u}^\Delta$ e um vetor rotação incremental de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$. A formulação é mostrada de forma sucinta a seguir, de acordo com o conteúdo apresentado em [5] e [62] (estática) e [4] e [28] (dinâmica). Maiores detalhes se encontram nessas referências.

Para a formulação de barras emprega-se a descrição utilizando-se da base $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. A barra possui configuração de referência retilínea, alinhada na direção $\mathbf{e}_3^r$. A Figura 3.4 mostra detalhes da descrição cinemática empregada. A posição de cada seção transversal, na configuração de referência, é dada por:

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta \mathbf{e}_3^r, \quad (3.12)$$

em que ζ representa a coordenada para descrição da posição de cada seção transversal na configuração de referência.

Um ponto material genérico na seção transversal pode ser localizado pelo vetor $\mathbf{a}^r = x_1 \mathbf{e}_1^r + x_2 \mathbf{e}_2^r$, que é mapeado por rotações levando a $\mathbf{a}^i$ e $\mathbf{a}^{i+1}$. A direção normal à seção transversal na configuração de referência é dada por $\mathbf{e}_3^r$, que é mapeada levando a $\mathbf{e}_3^i$ e $\mathbf{e}_3^{i+1}$. O operador que descreve esse mapeamento (rotação) é descrito de acordo com o já comentado no item 3.3.1, detalhado nas equações (3.2) e (3.3).

A descrição cinemática para movimento geral de um ponto material genérico da seção transversal pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} + \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{a}^r. \quad (3.13)$$

sendo $\mathbf{Q}^{i+1}$ o tensor rotação, que é definido para cada seção transversal. O ponto material $\mathbf{C}^r$ representa a intersecção do eixo adotado para a barra e cada seção transversal na configuração de referência, o qual é mapeado para a posição $\mathbf{z}^i$ e $\mathbf{z}^{i+1}$ nas configurações subsequentes, tal que:

$$\mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + \mathbf{u}^\Delta. \quad (3.14)$$

Como já foi mencionado, o tensor rotação pode ser calculado por meio da parametrização vetorial de Rodrigues. Assim, é possível agrupar os deslocamentos e rotações incrementais em um único vetor de deslocamentos incrementais generalizados que constituem uma única variável de deslocamentos para o modelo:

$$\mathbf{d}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}^\Delta \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Figura 3.4 – Descrição cinemática para a formulação da teoria estrutural de barras

Fonte: [4]

A fim de capturar deformações devido às translações das seções transversais, pode-se definir:

$$\boldsymbol{\eta}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1'} - \mathbf{e}_3^{i+1}, \quad (3.16)$$

onde o símbolo “(...)’” representa a derivada em relação à coordenada ζ da grandeza “(...)”.

A fim de quantificar deformações devido às rotações relativas entre as sucessivas seções transversais pode-se definir o vetor rotação específica por:

$$\boldsymbol{\kappa}^{i+1} = \boldsymbol{\Xi}^\Delta \boldsymbol{\alpha}^{\Delta'} + \mathbf{Q}^\Delta \boldsymbol{\kappa}^i, \quad (3.17)$$

em que o operador $\boldsymbol{\Xi}^\Delta$ é dado por

$$\mathbf{\Xi}^\Delta = \frac{4}{4+\alpha^2} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \right), \quad (3.18)$$

calculado utilizando-se da rotação incremental α^Δ . Pode-se agrupar as deformações generalizadas em único vetor, dado por:

$$\mathbf{\epsilon}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\eta}^{i+1} \\ \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{k}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{i+1r} \\ \mathbf{k}^{i+1r} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

As tensões envolvidas no modelo estrutural de barras são somente aquelas ocorridas na face cuja normal de referência é $\mathbf{e}_3^r$, tal que, na configuração “i+1”:

$$\boldsymbol{\tau}^{i+1} = \tau_{31}^{i+1} \mathbf{e}_1^{i+1} + \tau_{32}^{i+1} \mathbf{e}_2^{i+1} + \tau_{33}^{i+1} \mathbf{e}_3^{i+1}. \quad (3.20)$$

Com isso, pode-se definir os esforços reduzidos à posição do eixo da barra, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{i+1} &= \int_A \boldsymbol{\tau}^{i+1} dA \\ \mathbf{m}^{i+1} &= \int_A (\mathbf{a}^{i+1} \times \boldsymbol{\tau}^{i+1}) dA \end{aligned} \quad (3.21)$$

A retro rotação dessas grandezas permite a definição do vetor de tensões generalizadas dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{n}^{i+1} \\ \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{m}^{i+1} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

A utilização da deformação generalizada (3.19) e tensão generalizada (3.22) permite deduzir e escrever uma expressão para o trabalho virtual dos esforços internos e que permite incluir uma contribuição à forma fraca do modelo (2.25). Além disso, deve ser adotada uma relação constitutiva, genericamente escrita por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}, \quad (3.23)$$

sendo $\mathbf{D}$ a matriz constitutiva¹³. Para o caso particular de seções homogêneas sem empenamento em [4] é mostrada a matriz $\mathbf{D}$ de forma explícita.

Assume-se que ambos os campos de deslocamentos e rotações sejam descritos por polinômios quadráticos. Isso é feito por meio da criação de um elemento finito de 3 nós, localizados nas extremidades da barra e em seu ponto médio, ao longo do comprimento. Atribui-se como aproximação:

$$\mathbf{d}^\Delta = \mathbf{N}\mathbf{p}^\Delta, \quad (3.24)$$

onde $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{p}^\Delta$ é o vetor de graus de liberdade do elemento, que possui 18 posições, sendo organizado da forma:

$$\mathbf{p}^{\Delta T} = [\mathbf{p}_1^{\Delta T} \quad \mathbf{p}_2^{\Delta T} \quad \mathbf{p}_3^{\Delta T}]. \quad (3.25)$$

O elemento possui 18 graus de liberdade, associados aos deslocamentos e rotações incrementais dos nós 1, 2 e 3 (ver Figura 3.5), dadas por:

Figura 3.5 – Descrição do elemento de barra da plataforma GIRAFFE

Fonte: [46]

¹³ Maiores detalhes sobre obtenção da matriz constitutiva podem ser encontrados em diversas referências como [98], em que é proposta formulação para incorporar empenamento da seção transversal, em [99] é apresentada a dedução completa da equação constitutiva a partir dos esforços solicitantes integrados na seção transversal, assumindo-se material linear elástico. Ainda em [97] é apresentado um procedimento para obtenção da matriz constitutiva para aplicações de seções transversais de parede fina, multicelulares.

$$\mathbf{p}_k^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}_k^\Delta \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.26)$$

Em [4] são detalhadas as contribuições inerciais do elemento de barra, bem como a forma de incorporar carregamentos distribuídos de diversas naturezas, como peso próprio e arrasto hidrodinâmico (ver também [62] para maiores detalhes da formulação estática).

3.3.4 Modelo estrutural de casca

O elemento finito de casca implementado na plataforma GIRAFFE é baseado na formulação geometricamente exata, assim como a barra, apresentada anteriormente.

As bases da teoria estrutural são detalhadas em [63], considerando-se uma descrição Lagrangiana total e contribuições de esforços internos e externos, para aplicações quase estáticas. Em [52] é apresentado o desenvolvimento considerando-se a descrição Lagrangiana atualizada. O mesmo é também contemplado em [57], em um contexto de dinâmica estrutural pelo teorema de potências, em que é apresentado um algoritmo de conservação de energia para integração no domínio do tempo. Em [64] é apresentada a teoria estrutural contemplando esforços internos, externos e inerciais, equacionados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais e utilizando-se da descrição Lagrangiana atualizada. Essa é a versão implementada na plataforma GIRAFFE.

A Figura 3.6 ilustra a configuração de referência e sua evolução. É empregada a descrição se utilizando da base $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$. A configuração de referência se encontra no plano formado por $\mathbf{e}_1^r$ e $\mathbf{e}_2^r$.

A posição de um ponto material genérico na casca é dada por $\boldsymbol{\xi}$, que pode ser escrito da forma:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}^r \quad (3.27)$$

em que $\boldsymbol{\zeta} = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r$ ($\alpha = 1, 2$) descreve a posição de pontos materiais na superfície média de referência da casca e $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$ é o denominado vetor diretor da casca, com $\zeta \in H = [-h^b, h^t]$, tal que $h = h^b + h^t$ represente a espessura da casca na configuração de referência.

Figura 3.6 – Descrição cinemática para a formulação da teoria estrutural de cascas

Fonte: [52] e [64]

A base ortogonal $(\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ se modifica por meio do tensor rotação $\mathbf{Q}^{i+1}$, tal que $\mathbf{e}_j^{i+1} = \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{e}_j^r$ ($j = 1, 2, 3$). Note que o diretor não se mantém necessariamente ortogonal à superfície média da casca na configuração deformada. Isso está alinhado com a hipótese de Mindlin-Reissner, em que se assume a possibilidade de cisalhamento de primeira ordem. A posição de um ponto material genérico na configuração “i+1” é dada por:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} + \mathbf{a}^{i+1}, \quad (3.28)$$

com $\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{Q}^{i+1} \mathbf{a}^r = \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{a}^i$. Além disso, a atualização da superfície média é dada por:

$$\mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + \mathbf{u}^\Delta, \quad (3.29)$$

O tensor rotação pode ser escrito em função da parametrização vetorial de Rodrigues, da forma que já foi descrita na equação (3.5). Com isso, pode-se estabelecer campos cinemáticos para compor o movimento proposto para a casca: $\mathbf{u}^\Delta$ e $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$. Pode-se agrupar ambos em uma única grandeza:

$$\mathbf{d}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}^\Delta \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

As deformações da casca são definidas a seguir. É utilizada a notação $(\dots)_{,\alpha}$ para representar a derivada parcial da grandeza $(\dots)$ em relação à variável ξ_α . A deformação por efeitos de translação da superfície média pode ser quantificada por

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} = \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^{i+1}. \quad (3.31)$$

Por outro lado, também é necessário estabelecer uma grandeza para quantificar a rotação específica, isto é, a rotação por unidade de comprimento de referência em relação às variáveis ξ_α ($\alpha = 1, 2$), de maneira análoga ao desenvolvido para a teoria de barras em (3.17):

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} = \boldsymbol{\Xi}^\Delta \boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha^i, \quad (3.32)$$

com $\boldsymbol{\Xi}^\Delta$ dado em (3.18). Com isso, de forma análoga à teoria de barras, pode-se definir as deformações generalizadas retro rotacionadas:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1^{i+1r} \\ \boldsymbol{\epsilon}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

com

$$\boldsymbol{\epsilon}_\alpha^{i+1r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} \\ \mathbf{Q}^{i+1T} \boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.34)$$

As tensões consideradas no modelo estrutural de cascas são somente aquelas ocorridas nas faces cujas normais de referência são $\mathbf{e}_\alpha^r$ ($\alpha = 1, 2$), tal que, na configuração “i+1”:

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1} = \tau_{\alpha 1}^{i+1} \mathbf{e}_1^{i+1} + \tau_{\alpha 2}^{i+1} \mathbf{e}_2^{i+1} + \tau_{\alpha 3}^{i+1} \mathbf{e}_3^{i+1}. \quad (3.35)$$

Com isso, pode-se definir os esforços reduzidos à superfície média da casca, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\alpha^{i+1} &= \int_\Omega \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1} d\Omega \\ \mathbf{m}_\alpha^{i+1} &= \int_\Omega (\mathbf{a}^{i+1} \times \boldsymbol{\tau}_\alpha^{i+1}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.36)$$

A retro rotação dessas grandezas permite a definição do vetor de tensões generalizadas dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^{i+1r} \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^{i+1r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{n}_\alpha^{i+1} \\ \mathbf{Q}^{i+1T} \mathbf{m}_\alpha^{i+1} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.38)$$

A utilização da deformação generalizada (3.33) e da tensão generalizada (3.37) permite desenvolver e escrever uma expressão para o trabalho virtual dos esforços internos e que permite incluir uma contribuição à forma fraca do modelo (2.25). Além disso, deve ser adotada uma relação constitutiva, genericamente escrita por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^{i+1r}. \quad (3.39)$$

A obtenção de $\mathbf{D}$ pode ser feita assumindo-se um potencial que descreva as deformações em um contexto de hiperelasticidade. Em particular, na plataforma GIRAFFE, seguindo [63], é assumido um potencial de Simo-Ciarlet, que recupera para pequenas deformações o mesmo comportamento de um material elástico linear.

É assumido que o campo de deslocamentos seja descrito por uma função de forma polinomial quadrática e que o campo de rotações seja descrito por uma interpolação linear. A fim de compor as aproximações de elementos finitos, são considerados subdomínios de forma triangular para compor uma configuração de referência da casca, como mostrado na Figura 3.7. Essa é a forma de cada elemento. São atribuídos graus de liberdade de translação nos pontos médios dos lados do triângulo e nos vértices para compor $\mathbf{u}^\Delta$. Já para compor a rotação $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$ são atribuídos graus de liberdade somente nos pontos médios dos lados do triângulo. O campo de deslocamentos generalizados é escrito da forma:

$$\mathbf{d}^\Delta = \mathbf{N} \mathbf{p}^\Delta, \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{p}^\Delta$ é o vetor de graus de liberdade do elemento, que possui 27 posições, sendo organizado da forma:

$$\mathbf{p}^{\Delta T} = [\mathbf{u}_1^{\Delta T} \quad \mathbf{u}_2^{\Delta T} \quad \mathbf{u}_3^{\Delta T} \quad \mathbf{u}_4^{\Delta T} \quad \mathbf{u}_5^{\Delta T} \quad \mathbf{u}_6^{\Delta T} \quad \boldsymbol{\alpha}_4^{\Delta T} \quad \boldsymbol{\alpha}_5^{\Delta T} \quad \boldsymbol{\alpha}_6^{\Delta T}], \quad (3.41)$$

em que $\mathbf{u}_j^\Delta$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) são os deslocamentos nodais e $\boldsymbol{\alpha}_j^\Delta$ ($j = 4, 5, 6$) são as rotações nodais, de acordo com a Figura 3.7.

Figura 3.7 – Descrição do elemento de casca da plataforma GIRAFFE

Fonte: [46]

O elemento possui 27 graus de liberdade, associados aos deslocamentos e rotações incrementais dos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e rotações dos nós 4, 5 e 6.

3.3.5 Partícula esférica rígida

Essa seção apresenta uma forma para introduzir em um modelo de elementos finitos não linear a dinâmica de uma partícula esférica rígida. A mesma será tratada como um elemento finito com um único nó e seis graus de liberdade, que descrevem o movimento espacial dessa partícula.

Seja uma esfera com massa m e momento de inércia j_s , calculado em relação ao seu centróide. Esse é posicionado em $\mathbf{x}_s$, e possui velocidade dada por $\dot{\mathbf{u}}_s$. A velocidade angular da esfera é $\boldsymbol{\omega}_s$. Pode-se escrever, utilizando-se dos parâmetros de rotação de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}_s$, a seguinte expressão para o cálculo da velocidade angular: $\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s$, onde

$$\mathbf{\Xi} = \frac{4}{4 + \boldsymbol{\alpha}_s \cdot \boldsymbol{\alpha}_s} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_s \right), \quad (3.42)$$

com $\mathbf{A}_s = \text{skew}(\boldsymbol{\alpha}_s)$. A energia cinética da esfera pode ser escrita da forma:

$$T_S = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}}_S \cdot \dot{\mathbf{u}}_S + \frac{1}{2} j_S \boldsymbol{\omega}_S \cdot \boldsymbol{\omega}_S. \quad (3.43)$$

A contribuição à forma fraca do modelo (2.25) proveniente dos esforços inerciais da partícula esférica pode ser escrita pela primeira variação de (3.43), dada por:

$$\begin{aligned} \delta T_S &= m \ddot{\mathbf{u}}_S \cdot \delta \mathbf{u}_S + j_S \boldsymbol{\Xi}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \cdot \delta \boldsymbol{\alpha}_S = \\ &= [\delta \mathbf{u}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\alpha}_S^T] \begin{bmatrix} m \ddot{\mathbf{u}}_S \\ j_S \boldsymbol{\Xi}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \end{bmatrix} = [\delta \mathbf{u}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\alpha}_S^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Essa equação pode ser avaliada em qualquer instante, com as correspondentes variáveis cinemáticas $\ddot{\mathbf{u}}_S$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}_S$. Dependendo do método de integração temporal empregado na solução do modelo, a forma de aproximar tais variáveis é diferente. Em particular, utilizando-se do Método de Newmark, conforme já discutido na seção 3.3.2, a forma fraca é avaliada no instante final de cada incremento. Assim, as expressões para cálculo de aceleração linear e angular são baseadas em (3.9) e (3.11) e dadas por:

$$\ddot{\mathbf{u}}_S^{i+1} = \alpha_1 \mathbf{u}_S^\Delta - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_S^i - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_S^i, \quad (3.45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_S^{i+1} = \mathbf{Q}_S^\Delta (\alpha_1 \boldsymbol{\alpha}_S^\Delta - \alpha_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_S^i - \alpha_3 \ddot{\boldsymbol{\omega}}_S^i). \quad (3.46)$$

com α_1 , α_2 e α_3 já definidos na seção 3.3.2.

A contribuição à linearização consistente da forma fraca a ser incorporada em (2.30) é dada por:

$$\Delta(\delta T_S) = [\delta \mathbf{u}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\alpha}_S^T] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}_u \\ \Delta \mathbf{f}_\alpha \end{bmatrix} = [\delta \mathbf{u}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\alpha}_S^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u,u} & \mathbf{f}_{u,\alpha} \\ \mathbf{f}_{\alpha,u} & \mathbf{f}_{\alpha,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_S \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}_S \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

As derivadas $\mathbf{f}_{u,\alpha}$ e $\mathbf{f}_{\alpha,u}$ são nulas, uma vez que não há acoplamento entre graus de liberdade de rotação e translação na forma fraca considerada. A derivada $\mathbf{f}_{u,u}$ é imediata e depende do esquema de integração temporal adotado, que fornece a relação entre $\ddot{\mathbf{u}}_S$ e $\mathbf{u}_S^\Delta$, em que o último representa o deslocamento incremental do centro da esfera para uma descrição Lagrangiana atualizada. A derivada $\mathbf{f}_{\alpha,\alpha}$ não é imediata, uma vez que ambos $\boldsymbol{\Xi}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}_S$ dependem

do vetor rotação de Rodrigues incremental atual α_S^A . É possível obter essa forma por meio de técnicas de diferenciação automática utilizando-se do software MathematicaTM e AceGenTM (ver [65]).

3.3.6 Modelos de contato

A possibilidade de ocorrência de contato entre entidades (superfícies, linhas, pontos) em um modelo matemático envolve:

- (i) **Busca pela ocorrência de contato (detecção).** A busca pela ocorrência de contato entre entidades é um procedimento puramente geométrico. O objetivo é descobrir se as entidades-candidatas a contato violam ou não o vínculo mecânico da penetração entre elas, que deve ser nula. Assim, ao se prever a possibilidade de contato entre duas entidades é necessário, em primeiro lugar, verificar se há ou não penetração;
- (ii) **Tratamento do contato.** Uma vez que seja detectado o contato, deve-se incluir no modelo um vínculo para o estabelecimento da penetração nula. A forma de incorporar esse tratamento é diferente, de acordo com os tipos de entidade envolvidas no contato.

A busca pela detecção de contato é amplamente estudada não somente no âmbito de modelagem computacional de problemas de engenharia, mas também no contexto de computação gráfica (ver por exemplo [66] para uma visão geral de alguns métodos e aplicações). É objeto fundamental quando se trata de métodos de partículas, em que a possibilidade de muitos pares de contato deve ser investigada.

De modo geral, quando se trabalha com modelos de contato como os descritos nesta tese, o custo computacional envolvido é elevado, em detrimento da solução detalhada das equações geométricas para descrição local do contato. A solução dos modelos nesse nível, no entanto, só deverá ser feita caso o par de entidades em questão seja, de fato, um candidato forte para contato. Antes disso, é possível excluir a possibilidade de contato entre superfícies por meio de algoritmos mais simples. Com isso, pode-se categorizar a busca da ocorrência ou não da penetração entre entidades em duas escalas:

- **Global:** envolve algoritmos simples, de baixo custo computacional e são realizadas muitas buscas. O objetivo é a exclusão de pares de entidades que possuem baixa possibilidade de contato.

- **Local:** envolve algoritmos mais complexos, de médio/alto custo computacional. Em geral são realizadas poucas buscas. O objetivo é determinar com precisão o ponto de ocorrência da ação mecânica de contato (em casos de ações pontuais), para cada par de entidades estudado.

Aqui dividiu-se a busca pela detecção de contato em apenas duas escalas geométricas. No entanto, é possível elaborar muito mais essa estratégia, por meio da divisão do espaço em setores de busca, definição de escalas intermediárias de busca, dentre outras estratégias, por exemplo apresentadas em [13].

Na plataforma GIRAFFE, ao se criar um contato, se está atribuindo ao programa a tarefa de realizar a busca por possíveis pares de contato. Seja qual for o tipo de contato criado, sempre haverá uma busca global, a fim de eliminar pares de contato improváveis. Em seguida, parte-se para busca local somente para os candidatos pré-selecionados. Nesse contexto, para cada tipo de modelo de contato há procedimentos distintos, uma vez que são utilizadas informações detalhadas da geometria local.

3.3.6.1 Busca global

A busca global por contatos é um procedimento realizado com base na configuração “i”, no início de cada busca por uma nova configuração “i+1”. Isso é feito a cada passo de solução de um modelo não linear, sempre se partindo da hipótese de que grandes transformações são esperadas em um modelo geometricamente não linear, o que pode levar a mudanças significativas de candidatos a contato ao longo da evolução da solução de um modelo¹⁴.

A busca global é realizada sem se preocupar com a natureza da entidade candidata à interação por contato. Não importa se é um contato entre linhas, superfícies ou partículas. Seja qual for a entidade-candidata a interagir com a outra, sempre é possível estimar, ainda que grosseiramente, uma posição no espaço que esteja associada a essa entidade. Para uma partícula, o centroide da mesma pode ser tomado. Para uma superfície no espaço, pode-se tomar um ponto

¹⁴ Em um contexto de linearidade geométrica e não linearidade por contato essa busca poderia ser realizada uma única vez no início da solução, assumindo-se que não haveria alterações significativas ao longo da evolução do modelo.

representativo em seu interior. Para um segmento de reta no espaço, seu centroide é uma possibilidade. Para um nó de uma malha de elementos finitos, a própria posição do nó pode ser tomada. De modo geral, indica-se essa posição, na configuração “i”, para qualquer entidade “j” por $\mathbf{x}_j^i$.

A seguir, emprega-se a ideia básica desenvolvida em [67] (algoritmo *pinball*). Pode-se imaginar uma esfera de raio r_j com centro no ponto $\mathbf{x}_j^i$, que represente a entidade “j”. O mesmo pode ser feito para outra entidade “k”, dessa vez com raio r_k e centrada em $\mathbf{x}_k^i$. Atribuindo-se valores para os raios compatíveis com o nível de distâncias/deslocamentos esperados ao longo da evolução do passo de solução em questão, a intersecção entre essas esferas pode ser tomada como indicativa de proximidade entre as entidades. Assim, as mesmas compõem um par que pode ser eleito como forte ou elegível a contato, sendo objeto de maior investigação em uma fase de busca local posterior. No caso em que as esferas não apresentam intersecção, esse possível par de contato é ignorado. A Figura 3.8 ilustra a ideia apresentada.

Por sua grande simplicidade, esse algoritmo é extremamente eficiente. No entanto, os valores dos raios das esferas são fundamentais para seu sucesso. Valores muito elevados de raios levam à pré-seleção de excessivos pares de contato, antevendo um número elevado de buscas locais, tornando o modelo menos eficiente. Valores muito pequenos de raios, por sua vez, podem levar à negligência de importantes regiões de contato, que seriam erroneamente excluídas.

Em um contexto de elementos finitos, o tamanho dos elementos (ou superfícies de contato atreladas a esses) é um indicativo do raio da esfera a ser atribuída. Em particular, em modelos estruturais de viga e casca, informações da seção transversal e da espessura também são indicativas da ordem de grandeza do raio. Assim, em geral o que se faz é um cálculo grosseiro envolvendo esse tipo de informação e, em seguida, toma-se um valor um pouco maior do que o estimado, a fim de evitar perdas de contato pela escolha de valores muito pequenos de raios (a título de exemplo, uma discussão sobre a escolha dos raios das esferas para o contexto de auto contato de vigas pode ser visto em [28]).

Figura 3.8 – Algoritmo de busca global por candidatos a contato (*pinball*)

Fonte: [28]

Na plataforma GIRAFFE a busca global está implementada para todos os tipos de pares de contato de uma forma semelhante à apresentada anteriormente. Em um dado contato, há sempre dois grupos de entidades-candidatas para formar possíveis pares de contato. As entidades do primeiro grupo são indexadas com “j”, e as do segundo grupo com “k”. São calculados seus pontos representativos $\mathbf{x}_j^i$ e $\mathbf{x}_k^i$. Com isso, calcula-se a distância entre esses pontos representativos por: $\bar{d}_{jk} = \|\mathbf{x}_j^i - \mathbf{x}_k^i\|$. O valor dessa distância é comparado com um valor de distância máxima, denominada $\bar{p}$. O par de contato entre as entidades-candidatas por “j” e “k” é considerado como forte se $\bar{d}_{jk} \leq \bar{p}$. Nesse caso, ele é pré-selecionado para realização de um estudo de contato local, que envolve maior custo, sendo dito forte ou elegível a contato. Caso contrário ele é ignorado. Note que nesse algoritmo o valor de $\bar{p} = r_j + r_k$. O valor de $\bar{p}$ é um dado de entrada.

3.3.6.2 Busca local

Uma vez que um par de entidades é classificado na busca global como forte ou elegível a contato, deverá ser realizada uma busca local, a fim de identificar se, de fato, ocorre contato e, em caso afirmativo, elaborar as contribuições à forma fraca e sua linearização consistente devido à introdução do vínculo mecânico para não permitir a penetração.

O detalhamento da busca local e seu tratamento são objetos centrais da contribuição desta tese. São apresentados os detalhes de três tipos de busca e tratamento local, que diferem entre si em função das entidades consideradas na interação de contato:

- Formulação de contato *master-master* entre duas superfícies no espaço (Capítulo 4): é feita a descrição do contato do tipo “SSSS” (*surface set to surface set*) empregada na plataforma GIRAFFE;

- Formulação de contato *master-slave* entre esferas e superfícies no espaço (Capítulo 5): é feita a descrição do contato do tipo “NSSS” (*node set to surface set*) empregada na plataforma GIRAFFE;
- Formulação de contato *master-master* entre duas curvas no espaço (Capítulo 6): é feita a descrição do contato do tipo “LRLR” (*line region to line region*) empregada na plataforma GIRAFFE.

4 Formulação de contato *master-master* entre duas superfícies no espaço

Este Capítulo apresenta o desenvolvimento matemático para estabelecimento das contribuições da forma fraca e operador tangente para a formulação de contato *master-master*, entre duas superfícies no espaço. O conteúdo aqui apresentado deu origem às publicações [33] e [34].

O Capítulo apresenta inicialmente uma descrição das superfícies de contato, da métrica utilizada para quantificar uma eventual penetração entre essas superfícies, bem como o tratamento empregado quando ocorre tal penetração. Na sequência, é apresentada a formulação *master-master* para modelagem de contato entre superfícies genéricas. Por fim, é feita a aplicação para superfícies que representam o contorno de barras com seção transversal super elíptica e são mostrados exemplos numéricos.

4.1 Parametrização de superfícies de contato

A Figura 4.1 ilustra dois sólidos deformáveis B_A e B_B , candidatos a apresentar interação por contato. Alternativamente, em vez de dois sólidos existem situações em que poderia ocorrer auto-contato em um único sólido, entre regiões distintas de seu contorno. Esse tipo de situação também está no escopo desse trabalho¹⁵. Sejam as superfícies dos corpos, representando o local onde pode se dar a interação por contato, descritas por Γ_A e Γ_B , mostradas na Figura 4.1. É proposto o uso de coordenadas convectivas para a descrição dos pontos materiais presentes nas superfícies Γ_A e Γ_B . Pode-se definir os vetores $\mathbf{c}_A = [\zeta_A \quad \theta_A]^T$ e $\mathbf{c}_B = [\zeta_B \quad \theta_B]^T$, contendo as coordenadas convectivas respectivamente para as superfícies Γ_A e Γ_B . Pode-se definir um único vetor de coordenadas convectivas para ambas as superfícies, de forma conveniente e compacta, dado por $\mathbf{c}$, descrito na equação (4.1).

¹⁵ Nesse caso existe uma dificuldade adicional relacionada à busca prévia global por regiões de auto-contato. A descrição local das superfícies de contato, no entanto, se mantém exatamente igual para o auto-contato ou para o contato envolvendo dois sólidos.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_A \\ \mathbf{c}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_A \\ \theta_A \\ \zeta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

As superfícies Γ_A e Γ_B são deformáveis. São dependentes da deformação dos sólidos ao longo de eventuais movimentos decorrentes de ações mecânicas. Enfatiza-se que nesse contexto a palavra “deformação” está sendo empregada para compor tanto movimentos de corpo rígido como deformações longitudinais e cisalhantes ocorridas nas superfícies.

Admitindo que se faça uso de certa discretização para compor os campos que descrevem a cinemática dos corpos (deslocamentos, rotações), os graus de liberdade utilizados para tal serão denotados por $\mathbf{d}_A$ e $\mathbf{d}_B$, respectivamente para os sólidos B_A e B_B . Tais vetores também descrevem a evolução das superfícies Γ_A e Γ_B , respectivamente, uma vez que essas também dependem desses graus de liberdade. É possível agrupar os graus de liberdade que regem a evolução de ambas as superfícies em um único vetor $\mathbf{d}$, tal que

Figura 4.1 – Corpos B_A e B_B candidatos a apresentar interação por contato e a parametrização de seus contornos Γ_A e Γ_B

Fonte: [33]

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Com o objetivo de descrever pontos materiais genéricos em ambas as superfícies, é possível descrever parametrizações dependentes das coordenadas convectivas $\mathbf{c}$ e dos graus de liberdade $\mathbf{d}$, tal que

$$\begin{aligned}\Gamma_A &= \hat{\Gamma}_A(\mathbf{c}_A, \mathbf{d}_A) \\ \Gamma_B &= \hat{\Gamma}_B(\mathbf{c}_B, \mathbf{d}_B).\end{aligned}\tag{4.3}$$

A normal exterior à superfície Γ_B de contorno do sólido B_B é dada por:

$$\mathbf{n}_B = \frac{\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}}{\|\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}\|}.\tag{4.4}$$

Note que os vetores Γ_{B,θ_B} e Γ_{B,ζ_B} representam direções tangentes à superfície Γ_B e de modo geral não são ortogonais, tampouco de norma unitária. Analogamente, pode-se determinar a normal exterior a Γ_A , dada por $\mathbf{n}_A$.

A formulação de contato aqui desenvolvida propõe uma métrica para avaliar a distância entre superfícies no espaço. Essa é baseada em uma função *gap* vetorial $\mathbf{g}$, definida por

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\Gamma_A - \Gamma_B).\tag{4.5}$$

Também é possível definir uma medida escalar de *gap*, a fim de diretamente quantificar a distância entre as superfícies. Para tal, define-se:

$$g_n = \hat{g}_n(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{g}\| = \|\Gamma_A - \Gamma_B\|,\tag{4.6}$$

e a direção normal de contato, que é dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{(\Gamma_A - \Gamma_B)}{g_n}.\tag{4.7}$$

Note que a função *gap* pode ser avaliada para certa configuração de sólidos associada a certo $\bar{\mathbf{d}}$, e para um conjunto de coordenadas convectivas $\bar{\mathbf{c}}$. Dada uma configuração descrita por $\bar{\mathbf{d}}$, é necessário estabelecer uma metodologia para determinar o valor das coordenadas $\bar{\mathbf{c}}$ de

forma conveniente e representativa para quesitos de medição de penetração/distância entre as superfícies. Esse é o objeto da discussão da próxima seção.

4.2 Determinação dos pontos materiais para representação da ação de contato nas superfícies

A formulação *master-master* está imersa em uma classe de métodos que representam a ação mecânica do contato por meio de um esforço pontual. Fisicamente, no entanto, sempre o contato entre sólidos deformáveis se dá em uma área. O esforço pontual, portanto, representa o resultado da integral da pressão de contato e do carregamento tangencial distribuído na área de contato. Trata-se, portanto, de uma homogeneização. Nesse contexto, é conveniente classificar pares de contato entre conformes e não conformes, conforme discutido em [68].

O contato conforme pode ser compreendido como aquele em que, antes da interação de contato, as superfícies dos dois corpos-candidatos apresentam localmente a mesma curvatura. Com isso, na iminência do contato e antes de qualquer deformação nos corpos envolvidos decorrente da ação do contato, a interação irá se iniciar em uma área. Já a interação de contato não conforme não apresenta essas características, e o contato se inicia a partir de um ponto (ou uma linha, no caso de uma descrição bidimensional – por exemplo para estado plano de deformação). Obviamente a interação em um único ponto material representa uma idealização que, após a deformação dos corpos decorrente do próprio contato, acaba por promover o desenvolvimento da ação em uma área em torno do ponto de seu início¹⁶. Exemplos de superfícies que descrevem ambos os casos, conforme e não conforme podem ser vistos na Figura 4.2, em que se imagina o cenário em que as superfícies se movimentem na direção vertical (z) e posteriormente ocorre a interação por contato.

¹⁶ Nesse contexto a obtenção da forma geométrica da área de contato e a solução da deformação dos corpos envolvidos é um problema que pode ser atacado em um contexto de mecânica dos sólidos deformáveis (ver por exemplo [68]). A solução de Hertz, por exemplo, representa para certas condições idealizadas de contato não conforme a área de contato como uma elipse.

Figura 4.2 – Superfícies de contato (a) conformes (b) não conformes

Fonte: do autor

Na formulação *master-master* assume-se que a representação do contato possa ser reduzida a um par de pontos materiais, um em cada superfície, em que são estabelecidos os pares ação e reação provenientes do contato. Para os casos de contato não conforme, essa obtenção é mais imediata. A própria descrição do contato não conforme e o desenvolvimento de área de contato após a deformação dos corpos, em geral pequena, acaba por induzir a representação da ação de contato por meio de um único esforço pontual. É necessário estabelecer pontos materiais representativos para aplicação de tal esforço. Propõe-se a hipótese de que tal ação mecânica se dá em um par de pontos materiais em ambos os sólidos, para certa configuração de superfícies dada por $\bar{\mathbf{d}}$. Os pontos podem ser determinados, por hipótese, por meio da solução de um problema geométrico regido por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ \Gamma_{A,\theta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g} \\ \Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_4, \quad (4.8)$$

em que $\mathbf{r}$ é uma função resíduo, cujo valor nulo é desejado. Note que o sistema de quatro equações mostrado em (4.8) tem a interpretação geométrica de imposição de ortogonalidade entre o vetor $\mathbf{g}$ e as direções tangentes às superfícies, em ambos os corpos envolvidos. A Figura

4.1 mostra a ortogonalidade aqui apresentada. O detalhamento das áreas de contato após a deformação dos corpos envolvidos pode ser visto na Figura 4.4. A solução de interesse para representar a ação mecânica de contato, solução das relações de ortogonalidade (4.8), é dada por $\bar{\mathbf{c}}^T = [\bar{\mathbf{c}}_A^T \quad \bar{\mathbf{c}}_B^T] = [\bar{\zeta}_A \quad \bar{\theta}_A \quad \bar{\zeta}_B \quad \bar{\theta}_B]^T$.

Figura 4.3 – Interação de contato entre superfícies. Áreas de contato Γ_{Ac} e Γ_{Bc}

Fonte: [33]

Figura 4.4 – Detalhamento das áreas de contato Γ_{Ac} e Γ_{Bc} ilustrando o ponto de interação pontual

Fonte: [33]

A Figura 4.5(a) ilustra a situação ideal de convexidade para a solução de (4.8), que se torna mais simples se existe continuidade $\mathbb{C}^1$ das parametrizações das superfícies, para evitar a existência de singularidades, como mostrado na Figura 4.5(b). Além disso, pode haver situações de não convexidade como o mostrado na Figura 4.5(c), em que é necessário definir sub regiões do espaço paramétrico em que há convexidade, mas que olhando de forma mais ampla pode haver dificuldade na escolha ou determinação da solução de interesse, ou mesmo infinitas soluções, para situações de superfícies conformes, o que é exemplificado na Figura 4.5(d). Dessa forma, pode-se inferir que cenários de superfícies não conformes são mais diretamente representáveis por ações mecânicas pontuais de contato em pontos materiais localizados nos sólidos, dados pela solução de (4.8), para cenários convexos.

Figura 4.5 – O problema de ortogonalidade (a) convexidade (b) superfícies não lisas (c) não convexidade

Fonte: [34]

A representação de cenários de contato não conforme por meio de ações pontuais é possível, mas exige um desenvolvimento mais amplo para obtenção da solução de (4.8). As dificuldades existentes estão relacionadas às infinitas soluções de (4.8) e à necessidade da escolha de uma única solução para representar a ação de contato de forma a alocar de forma concentrada uma ação mecânica que é fisicamente distribuída. Esse assunto é retomado no Capítulo 7, particularmente no item 7.7.2, de forma introdutória.

As representações geométricas exibidas até então procuram, para facilitar a visualização, exibir as superfícies de contato separadamente, por exemplo a Figura 4.3(b-c). No entanto, a existência do contato implica necessariamente em sua justaposição. Justamente esse é o alvo da formulação de contato aqui apresentada: a identificação da penetração e seu posterior tratamento, para impor a justaposição ou separação das superfícies, por meio de ações pontuais. Dessa forma, a solução do sistema de equações (4.8) deve contemplar cenários em que as superfícies não apresentam pontos de intersecção, identificando a ausência de contato; cenários localmente convexos de intersecção pontual, indicando contato e cenários de penetração entre as superfícies, indicando a necessidade de impor o vínculo mecânico de contato. Nesse último, é possível em certas condições idealizar que a solução de interesse $\bar{c}$ esteja associada a um ponto no interior de uma curva de intersecção entre as superfícies, como está mostrado na Figura 4.4. No entanto, o leitor deve notar que todos os pontos de intersecção apresentam o vetor *gap* nulo e, portanto, também são solução de (4.8). Isso torna a obtenção de $\bar{c}$ uma tarefa não tão simples como pode parecer à primeira instância. Essa discussão é bastante ampliada no Capítulo 7.

4.2.1 Método de Newton-Raphson para solução de (4.8)

A abordagem mais imediata para solução de (4.8) é a utilização do Método de Newton-Raphson, que pode ser descrita no contexto por:

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_c)_k \Delta \bar{\mathbf{c}}_k = -\mathbf{r}_k \\ \bar{\mathbf{c}}_{k+1} = \bar{\mathbf{c}}_k + \Delta \bar{\mathbf{c}}_k \end{cases} \quad (4.9)$$

em que k é o número da iteração, $\Delta \bar{\mathbf{c}}_k$ é o incremento para a solução de coordenadas convectivas, calculada a cada iteração. O processo é repetido até que haja convergência, com certa precisão pré-fixada, para a variável $\bar{\mathbf{c}}_k$. A matriz $\mathbf{A} = \mathbf{r}_c$ é o Jacobiano de (4.8), dado por

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g})_{,c} \\ (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g})_{,c} \\ -(\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g})_{,c} \\ -(\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g})_{,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_c)_{11} & (\mathbf{r}_c)_{12} & (\mathbf{r}_c)_{13} & (\mathbf{r}_c)_{14} \\ (\mathbf{r}_c)_{21} & (\mathbf{r}_c)_{22} & (\mathbf{r}_c)_{23} & (\mathbf{r}_c)_{24} \\ (\mathbf{r}_c)_{31} & (\mathbf{r}_c)_{32} & (\mathbf{r}_c)_{33} & (\mathbf{r}_c)_{34} \\ (\mathbf{r}_c)_{41} & (\mathbf{r}_c)_{42} & (\mathbf{r}_c)_{43} & (\mathbf{r}_c)_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Existem dificuldades inerentes ao chute inicial do método, que em geral pode ser guiado por parâmetros geométricos dependentes do tipo de parametrização com que se deseja trabalhar. Em casos de parametrizações simples e com certo investimento na utilização de chutes iniciais adequados, é possível utilizar o Método de Newton-Raphson com sucesso. Além disso, frequentemente o método acaba por convergir para pontos de intersecção entre as superfícies, que também obedecem a equação (4.8) mas não representam a solução de interesse. Tal problema é também apontado em [69], em que os autores apresentam uma formulação matemática semelhante à aqui abordada e, no contexto iterativo do Método de Newton-Raphson, afirmam que em casos de penetração elevada não é difícil encontrar um bom chute inicial que converge para a solução desejada. No entanto, em casos em que a penetração entre as superfícies é pequena o processo se torna mais difícil e frequentemente ocorre convergência para a solução de intersecção.

A verificação de uma solução obtida por meio do Método de Newton-Raphson pode ser feita por meio do teste de ortogonalidade da solução obtida. Uma condição necessária para a solução ser de interesse é que:

$$(\mathbf{n}_A \times \mathbf{n}_B)_{\bar{\mathbf{c}}} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Ou seja, deve-se impor o paralelismo entre as normais exteriores avaliadas na solução $\bar{\mathbf{c}}$ (normal comum). Em [70] é desenvolvida uma técnica para a detecção de contato entre super elipsoides em que, por artifícios algébricos, consegue impor diretamente a condição de normal comum às superfícies para determinação da solução de (4.8), o que é muito desejável, mas não geral para qualquer conjunto de parametrizações escolhidas. Por isso aqui não se adotou tal técnica.

Enfatiza-se que o teste proposto em (4.11) representa uma forma de negar uma solução obtida, a fim de evitar a utilização de soluções não desejadas. No entanto, em caso de negação, seria necessário reiniciar o Método de Newton-Raphson com um chute inicial diferente, a fim de tentar convergir à solução que atenda (4.11). Esse procedimento se mostra limitado e pouco robusto. É necessário, portanto, investir em técnicas mais elaboradas para determinação de $\bar{\mathbf{c}}$, como a descrita na próxima seção.

4.2.2 Ferramental de otimização para solução de (4.8)

No sistema de equações (4.8) são propostas relações de ortogonalidade, que devem ser interpretadas como condições necessárias para a solução desejada de mínima distância entre superfícies (no caso de não haver penetração).

Com o objetivo de estabelecer a solução desse problema, pode-se definir uma função distância d_{AB} entre dois pontos materiais genéricos em Γ_A e Γ_B . Note que, como descrito anteriormente, está-se fixando $\bar{\mathbf{d}}$. Portanto, somente as coordenadas convectivas são consideradas variáveis nessa função distância. Logo,

$$d_{AB} = \hat{d}_{AB}(\mathbf{c}) = \|\Gamma_A - \Gamma_B\|. \quad (4.12)$$

Com base no exposto, propõe-se como função objetivo:

$$f_1 = \frac{1}{2} d_{AB}^2 = \frac{1}{2} (\Gamma_A - \Gamma_B) \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B). \quad (4.13)$$

A imposição do gradiente nulo para f_1 leva às relações de ortogonalidade (4.8). A Hessiana de f_1 será a derivada $\mathbf{H} = \mathbf{r}_{,\mathbf{c}}$. Pode-se representar o gradiente e a Hessiana por:

$$\begin{aligned}\nabla f_1 &= \mathbf{r} \\ \nabla^2 f_1 &= \mathbf{H} = \mathbf{r}_{,c}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

A obtenção do ponto crítico de f_1 poderá ser única em casos de não penetração e de convexidade local, como mostrado na Figura 4.5(a). No caso de haver a intersecção pontual entre superfícies, essa será a solução para a minimização de f_1 (distância nula). Já no caso de penetração entre as superfícies, a intersecção caracterizada pela condição em que $\Gamma_A = \Gamma_B$ representa uma região de distância nula, associada com infinitas soluções de mínimo para f_1 .

Figura 4.6 – Solução desejada para o problema de otimização

Fonte: [34]

Note que, dessa forma, a minimização da função objetivo f_1 por si só não é suficiente para obtenção da solução desejada ilustrada na Figura 4.6. É possível estabelecer um conjunto de restrições geométricas a fim de procurar forçar a obtenção da solução que garanta a normal comum entre as superfícies (4.11). A própria equação (4.11) pode ser compreendida como uma restrição. Alternativamente, é possível escrever:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}) \cdot \Gamma_{A,\zeta_A} = 0 \\ \mathbf{r}_2 = (\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}) \cdot \Gamma_{A,\theta_A} = 0 \end{cases}\tag{4.15}$$

de modo que é possível modificar a função objetivo original e definir uma segunda função f_2 , restrita por r_1 e r_2 por meio da inserção de dois multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 :

$$f_2 = \frac{1}{2} d_{AB}^2 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2.\tag{4.16}$$

É possível obter o gradiente e a Hessiana de f_2 e se utilizar do Método de Newton-Raphson, dessa vez para um sistema de seis variáveis: o vetor original $\mathbf{c}$ e os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , a fim de determinar a solução $\bar{\mathbf{c}}$ que obedece a condição $\nabla f_2 = \mathbf{0}_6$. A utilização desse ferramental acaba por impor a solução de $\nabla f_1 = \mathbf{0}_4$, mas restrita à

ortogonalidade desejada entre $\mathbf{g}$ e as superfícies. Isso naturalmente exclui os pontos de intersecção da solução.

Note que é necessário um teste adicional para evitar a obtenção de soluções de máxima distância, possíveis quando não se utiliza, de fato, um método de otimização, mas simplesmente a solução do sistema de seis equações não lineares obtido impondo-se $\nabla f_2 = \mathbf{0}_6$ por meio do Método de Newton-Raphson.

Maiores discussões sobre a obtenção de $\bar{\mathbf{c}}$ são encontradas no item 7.5, no contexto de degeneração de contato, apresentado naquele Capítulo.

4.3 Contribuições de contato devido à ação normal

Essa seção apresenta o desenvolvimento da contribuição dos esforços normais de contato à forma fraca do modelo matemático, apresentada na equação (2.25). Trata-se especificamente de contribuições ao termo nomeado δW_c . No presente contexto, admite-se que a solução $\bar{\mathbf{c}}$ já seja conhecida, ou seja, para um conjunto fixo de graus de liberdade que definem a parametrização das superfícies candidatas a contato, já foram determinados os pontos materiais, candidatos a contato, em ambas as superfícies.

A função *gap* $\mathbf{g}$ pode ser avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$ para escrever uma inequação que descreva o vínculo mecânico do contato:

$$(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_B)_{\bar{\mathbf{c}}} \geq 0. \quad (4.17)$$

Nos casos em que a inequação (4.17) for obedecida, pode-se afirmar que ao menos localmente, em torno de $\bar{\mathbf{c}}$ não há violação da condição de contato. Caso contrário, penetração entre as superfícies terá sido identificada. Nesse caso, é necessário tomar uma ação para impedir a penetração, pois o vínculo mecânico proposto em (4.17) deve sempre ser obedecido.

No caso de não haver penetração, nenhum tipo de contribuição deve ser inserido na forma fraca do modelo para o termo δW_c . Para os casos em que (4.17) for violada, deve-se introduzir uma contribuição à forma fraca, devido à violação da restrição mecânica do contato. Ou seja, um primeiro passo ao implementar um algoritmo de contato é uma tomada de decisão de incluir ou não a restrição mecânica, de acordo com um estudo local dado pela obtenção de $\bar{\mathbf{c}}$ e posterior avaliação da condição (4.17). A seguir é desenvolvida a contribuição ao termo δW_c .

4.3.1 Potencial de contato

Inicia-se o desenvolvimento a partir da definição de um potencial de contato W_c (que possui apenas contribuições de esforços normais de contato). É necessário, a seguir, estabelecer uma técnica para a imposição da restrição do contato. Nesse texto serão apresentados potenciais para imposição da restrição por meio de dois métodos:

- (i) Método dos Multiplicadores de Lagrange (W_{c_L})
- (ii) Método das Penalidades (W_{c_P})

Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} W_{c_L} &= \lambda \|\Gamma_A - \Gamma_B\| = \lambda g_n = \lambda (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{1/2} \text{ e} \\ W_{c_P} &= \frac{1}{2} \epsilon_n \|\Gamma_A - \Gamma_B\|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_n g_n^2 = \frac{1}{2} \epsilon_n \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange e ϵ_n é um fator de penalidade para a restrição.

4.3.2 Contribuição à forma fraca

A variação do potencial, escrito de ambas as formas apresentadas, é dada por:

$$\begin{aligned} \delta W_{c_L} &= \delta \lambda g_n + \lambda \delta g_n \text{ e} \\ \delta W_{c_P} &= \epsilon_n g_n \delta g_n. \end{aligned} \quad (4.19)$$

É necessário desenvolver uma expressão para o cálculo de δg_n . Pode-se escrever:

$$\delta(\|\Gamma_A - \Gamma_B\|) = \delta g_n = \delta[(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{1/2}] = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{-1/2} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{g} = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{g}. \quad (4.20)$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta W_{c_L} &= \delta \lambda g_n + \lambda \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{g} \text{ e} \\ \delta W_{c_P} &= \epsilon_n g_n \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{g} = \epsilon_n \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A obtenção de $\delta \mathbf{g}$ deve ser feita por meio da variação total de $\mathbf{g}$, ou seja, considerando-se variações das coordenadas convectivas $\delta \mathbf{c}$ e das coordenadas generalizadas $\delta \mathbf{d}$. Pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \delta \mathbf{d}. \quad (4.22)$$

A derivada parcial $\mathbf{g}_{,c}$ será uma matriz dada por:

$$\mathbf{g}_{,c} = [\mathbf{g}_{,\zeta_A} \quad \mathbf{g}_{,\theta_A} \quad \mathbf{g}_{,\zeta_B} \quad \mathbf{g}_{,\theta_B}]. \quad (4.23)$$

A partir desse ponto, nomeia-se por “m” o número de graus de liberdade utilizados para a descrição de ambas as parametrizações de superfícies Γ_A e Γ_B , ou seja, a dimensão do vetor $\mathbf{d}$. Logo,

$$\mathbf{g}_{,d} = [\mathbf{g}_{,d1} \quad \mathbf{g}_{,d2} \quad \dots \quad \mathbf{g}_{,dm}]. \quad (4.24)$$

Note o importante fato de que as variações $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$ não são independentes, mas devem ser relacionadas por meio do vínculo à solução de $\bar{\mathbf{c}}$, descrita pelas relações de ortogonalidade (4.8). A variação de tal relação leva a:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{r}_{,d} \delta \mathbf{d} = \mathbf{0}_4. \quad (4.25)$$

Então, pode-se escrever:

$$\mathbf{r}_{,c} \delta \mathbf{c} = -\mathbf{r}_{,d} \delta \mathbf{d} \Rightarrow \delta \mathbf{c} = -(\mathbf{r}_{,c})^{-1} \mathbf{r}_{,d} \delta \mathbf{d} \Rightarrow \delta \mathbf{c} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}, \quad (4.26)$$

o que define o operador $\mathbf{D}$ por:

$$\mathbf{D} = -(\mathbf{r}_{,c})^{-1} \mathbf{r}_{,d} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.27)$$

com

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}_{,d} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g})_{,d} \\ (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g})_{,d} \\ (-\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g})_{,d} \\ (-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g})_{,d} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad (4.28)$$

tal que

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A}^T \mathbf{g}_{,d} \\ \Gamma_{A,\theta_A}^T \mathbf{g}_{,d} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B}^T \mathbf{g}_{,d} \\ -\Gamma_{B,\theta_B}^T \mathbf{g}_{,d} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

e

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(\Gamma_{A,\zeta_A})_{,d} \\ \mathbf{g}^T(\Gamma_{A,\theta_A})_{,d} \\ -\mathbf{g}^T(\Gamma_{B,\zeta_B})_{,d} \\ -\mathbf{g}^T(\Gamma_{B,\theta_B})_{,d} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Com isso, é possível reescrever a equação (4.22) por:

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} \delta \mathbf{d} + \mathbf{g}_{,d} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}. \quad (4.31)$$

Finalmente, com (4.31) as equações (4.21) podem ser escritas somente como funções dos graus de liberdade envolvidos nas parametrizações das superfícies por:

$$\begin{aligned} \delta W_{c_L} &= \delta \lambda g_n + \lambda \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}] \text{ e} \\ \delta W_{c_P} &= \epsilon_n g_n \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}] = \epsilon_n \mathbf{g} \cdot [(\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

De forma mais clara, pode-se reescrever essas relações de forma imediata à implementação para um modelo não linear discreto:

$$\delta W_{c_L} = \delta \lambda g_n + \lambda \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T] \mathbf{n} \text{ e} \quad (4.33)$$

$$\delta W_{c_p} = \epsilon_n g_n \delta \mathbf{d} \cdot \left[\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_c)^T + (\mathbf{g}_d)^T \right] \mathbf{n} = \epsilon_n \delta \mathbf{d} \cdot \left[\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_c)^T + (\mathbf{g}_d)^T \right] \mathbf{g}.$$

Por fim, é possível simplificar (4.33) por conta das relações de ortogonalidade (4.8), levando a:

$$\begin{aligned} \delta W_{c_L} &= \delta \lambda g_n + \lambda \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_d)^T \mathbf{n} \text{ e} \\ \delta W_{c_p} &= \epsilon_n g_n \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_d)^T \mathbf{n} = \epsilon_n \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_d)^T \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3.3 Contribuição à linearização consistente da forma fraca

A contribuição à linearização consistente da forma fraca referente aos esforços normais de contato pode ser vista como parte do termo $\Delta(\delta W_c)$ na equação (2.30). É fundamental sua obtenção no contexto da implementação de métodos numéricos, como o Método do Newton-Raphson, quando é feita a busca pela solução de um modelo discreto não linear. A forma aqui desenvolvida é geral e independe do tipo de parametrização adotada para as superfícies Γ_A e Γ_B , seguindo a mesma linha de desenvolvimento do item anterior. Após a adoção de parametrizações adequadas e, de acordo com o modelo e discretização adotados, a linearização consistente da forma fraca fará o papel da matriz de rigidez tangente, ou operador tangente.

Inicia-se o desenvolvimento com a linearização das contribuições à forma fraca dos esforços normais de contato, descritos na equação (4.21) por meio de multiplicadores de Lagrange e penalidade:

$$\Delta(\delta W_{c_L}) = \delta \lambda \Delta g_n + \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \Delta \lambda + \delta \mathbf{g} \cdot \lambda \Delta \mathbf{n} + \lambda \Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}. \text{ e} \quad (4.35)$$

$$\Delta(\delta W_{c_p}) = \delta \mathbf{g} \cdot \epsilon_n \Delta \mathbf{g} + \epsilon_n \Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}. \quad (4.36)$$

A seguir é necessário obter expressões para o cálculo dos termos $\Delta \mathbf{g}$, $\Delta \mathbf{n}$ e $\Delta(\delta \mathbf{g})$. Utilizando a analogia entre o processo algébrico de variação de um funcional e sua linearização consistente, é possível escrever que

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c} \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \Delta \mathbf{d} = (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d}. \quad (4.37)$$

Com algum trabalho algébrico, é possível obter:

$$\Delta \mathbf{n} = \Delta \left(\frac{\mathbf{g}}{g_n} \right) = \frac{1}{g_n} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \Delta \mathbf{g} = \frac{1}{g_n} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} \quad (4.38)$$

e

$$\Delta(\delta \mathbf{g}) = \Delta(\mathbf{g}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \delta \mathbf{d}) = \Delta(\mathbf{g}_{,c}) \delta \mathbf{c} + \Delta(\mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}. \quad (4.39)$$

O termo $\Delta(\delta \mathbf{g})$ presente nas equações (4.35) e (4.36) aparece multiplicado escalarmente por outro vetor ($\mathbf{n}$ ou $\mathbf{g}$). Por isso, a seguir é desenvolvida uma expressão para o cálculo de $\Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v}$ um vetor genérico representando $\mathbf{n}$ ou $\mathbf{g}$, para utilização em conjunto com (4.35) e (4.36). Tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} &= \Delta(\mathbf{g}_{,c}) \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} + \Delta(\mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} = \Delta \left[(\mathbf{g}_{,c})^T \right] \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{c} + \\ &\Delta \left[(\mathbf{g}_{,d})^T \right] \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \left[(\mathbf{g}_{,c})^T \right] \mathbf{v} &= \left[(\mathbf{g}_{,c})^T \mathbf{v} \right]_{,c} (\mathbf{v} \text{ constante}) \Delta \mathbf{c} + \left[(\mathbf{g}_{,c})^T \mathbf{v} \right]_{,d} (\mathbf{v} \text{ constante}) \Delta \mathbf{d} \text{ e} \\ \Delta \left[(\mathbf{g}_{,d})^T \right] \mathbf{v} &= \left[(\mathbf{g}_{,d})^T \mathbf{v} \right]_{,c} (\mathbf{v} \text{ constante}) \Delta \mathbf{c} + \left[(\mathbf{g}_{,d})^T \mathbf{v} \right]_{,d} (\mathbf{v} \text{ constante}) \Delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Os termos em (4.41) apresentam a derivada de $(\mathbf{g}_{,a})^T \mathbf{v}$ em relação a um vetor genérico $\mathbf{b}$, mas considerando-se o vetor $\mathbf{v}$ constante. Essa operação pode ser interpretada como a obtenção de um tensor de terceira ordem, dado por $(\mathbf{g}_{,a})^T \Big|_{,\mathbf{b}}$ seguida de uma contração com o vetor $\mathbf{v}$. Assim, é possível representar alternativamente esses termos por: $\left[(\mathbf{g}_{,a})^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{b}} (\mathbf{v} \text{ constante}) = \langle (\mathbf{g}_{,a})^T \Big|_{,\mathbf{b}} : \mathbf{v} \rangle$, em que o operador $\langle \mathcal{A} : \mathbf{v} \rangle$ representa a contração de um tensor de terceira ordem $\mathcal{A}$ e um vector $\mathbf{v}$. Utilizando-se de notação indicial, seria possível escrever $\langle \mathcal{A} : \mathbf{v} \rangle = \mathcal{A}_{ijk} v_j$. Por conveniência de notação, define-se o operador

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{v}) = \left[(\mathbf{g}_{,a})^T \mathbf{v} \right]_{,b} (\mathbf{v} \text{ constante}). \quad (4.42)$$

Com isso, é possível escrever:

$$\Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} = \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})] \Delta \mathbf{d}. \quad (4.43)$$

Note que é possível detalhar um pouco mais a forma dos termos presentes em (4.43), de modo que:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\zeta_A \zeta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_A \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_A \zeta_B} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_A \theta_B} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_A \zeta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A \zeta_B} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_B} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\zeta_B \zeta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_B \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_B \zeta_B} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_B \theta_B} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B \zeta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B \zeta_B} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_B} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\zeta_A d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_A d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,\zeta_A d_m} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_A d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,\theta_A d_m} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\zeta_B d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\zeta_B d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,\zeta_B d_m} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,\theta_B d_m} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,d_1 d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,d_1 d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,d_1 d_m} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,d_2 d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,d_2 d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,d_2 d_m} \cdot \mathbf{v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{,d_m d_1} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,d_m d_2} \cdot \mathbf{v} & \cdots & \mathbf{g}_{,d_m d_m} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Assumindo-se a comutatividade entre índices mistos de derivadas parciais de segunda ordem pode-se estabelecer que $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{v})^T$. Finalmente, pode-se desenvolver a linearização consistente quando se utiliza o Método dos Multiplicadores de Lagrange por:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{c_L}) &= \delta \lambda \mathbf{n} \cdot (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \\ &+ \delta \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T \right) \mathbf{n} \Delta \lambda + \\ &+ \delta \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T \right) \lambda \frac{1}{g_n} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$+\delta \mathbf{d} \cdot \lambda \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \right. \\ \left. \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) \right) \Delta \mathbf{d}.$$

De maneira análoga, para o Método das Penalidades, obtém-se:

$$\Delta(\delta W_{cp}) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T \right) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \\ + \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) \mathbf{D} + \right. \\ \left. \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) \right) \Delta \mathbf{d}. \quad (4.48)$$

Em particular, a equação (4.47) pode ser ainda mais simplificada pelo uso das relações de ortogonalidade (4.8), levando a:

$$\Delta(\delta W_{cL}) = \delta \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{,d} \Delta \mathbf{d} + \\ + \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_{,d})^T \mathbf{n} \Delta \lambda + \\ + \delta \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T \right) \lambda \frac{1}{g_n} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \\ + \delta \mathbf{d} \cdot \lambda \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \right. \\ \left. \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) \right) \Delta \mathbf{d}. \quad (4.49)$$

O leitor pode notar que as equações (4.48) e (4.49) possuem estrutura simétrica, desde que ocorra a comutatividade entre os índices mistos de derivadas parciais de segunda ordem, o que ocorrerá quando se garantir a continuidade das derivadas parciais de segunda ordem no domínio (Teorema de Schwarz).

4.4 Contribuições de contato devido à ação tangencial (atrito)

A seção anterior mostrou a forma de calcular as contribuições que o presente modelo de contato impõe à forma fraca, bem como foi desenvolvida sua linearização consistente. Para tal, foi utilizada como base uma medida baseada na função *gap* $\mathbf{g}$ aqui definida. A descrição do comportamento na direção tangencial requer nova definição cinemática, de forma que seja

capaz de descrever o deslizamento ou sua tendência. Nesse contexto, é comum a nomenclatura de *gap* tangencial para essa medida (ver, por exemplo [13]).

A Figura 4.7(a) ilustra a ideia básica na definição da função *gap* empregada no contexto da formulação *master-slave*, quando se elegem pontos para detecção e monitoramento de contato em uma das superfícies, sendo essa Γ_A na Figura 4.7(a). Nesse contexto, pode-se monitorar o comportamento de cada um desses pontos em relação à outra superfície Γ_B , sendo possível avaliar seu nível de penetração.

Figura 4.7 – Formulação clássica de contato do tipo *master-slave* (a) definição de pontos *slave* (b) problema de mínima distância para um ponto *slave*

Fonte: [34]

A Figura 4.7(b) ilustra o problema de projeção ortogonal do ponto *slave* na superfície Γ_B , dita *master*. A solução desse problema é semelhante, mas muito mais simples do que a apresentada no item 4.2 e também se baseia na imposição das relações de ortogonalidade. A diferença é que nesse caso há apenas duas variáveis convectivas envolvidas, referentes à parametrização da superfície Γ_B . Tal problema é amplamente discutido do ponto de vista matemático em [42] e será retomado no item 5.1.1, no contexto da formulação de contato *master-slave* ¹⁷. Após a determinação das variáveis convectivas relacionadas ao problema de

¹⁷ A técnica de projeção ortogonal de pontos em superfícies para mensurar a penetração ou distância para utilização em modelos de contato é alvo de utilização não somente em métodos que assumem interação pontual. O tratamento de contato conforme, feito de forma integral, em que a contribuição de contato para a forma fraca (2.25) é o resultado da integral na superfície de contato dos trabalhos virtuais da pressão de contato e esforços tangenciais de interface. No contexto da integração numérica, podem-se eleger pontos de integração, em que é utilizada também a projeção ortogonal dos pontos de integração, de maneira a avaliar a função *gap*. Tal

projeção ortogonal, sua evolução ao longo da solução de um modelo computacional pode ser tomada como indicativo do deslizamento ou sua tendência, de cada ponto slave na superfície master. Essa medida é denominada *gap* tangencial.

No contexto da formulação *master-master*, no entanto, a definição de *gap* tangencial deve ser repensada. O motivo é que não se elege, a priori, pontos materiais em uma das superfícies para detecção de contato. Assim, o monitoramento da evolução das coordenadas convectivas associadas à solução do problema de projeção ortogonal não é suficiente para quantificar o *gap* tangencial. É necessário, adicionalmente, avaliar a evolução relativa entre as coordenadas convectivas que se dão em ambas as superfícies e, por meio de sua comparação, procurar inferir o quanto houve de deslizamento tangencial. Essa é a ideia base que será desenvolvida na sequência e que propicia a utilização da formulação *master-master* em modelos com atrito. A origem dessa ideia, pelo conhecimento do autor, se dá em [32], no contexto do contato entre barras e superfícies planas. É proposta uma técnica para mapear o ponto material instantâneo de contato de nós de barras (modelados como esferas) e que permite avaliar a tendência de deslizamento. Esse tipo de formulação permite capturar tanto cenários de deslizamento como rolamento entre superfícies. Ideias semelhantes podem ser encontradas no contexto de contato entre partículas em [71], mas utilizando a ideia de velocidade relativa nas superfícies de contato para inferir sobre o *gap* tangencial. O mesmo é desenvolvido no contexto de contato envolvendo corpos rígidos, também com abordagem de velocidade relativa entre superfícies, o que é visto em [2] e, em particular para aplicações de dinâmica ferroviária em [72]¹⁸.

procedimento é base de implementação do Método da Argamassa (*mortar*), por exemplo em [23].

¹⁸ Note que a ideia de aproveitar a informação da velocidade relativa de contato entre superfícies é intimamente ligada com o conceito de *creep*, bastante comum na área de dinâmica ferroviária, em que é comum modelar a roda e o trilho de trem como corpos rígidos, mas se utilizam modelos de contato que procuram em seu comportamento constitutivo descrever o que ocorre entre corpos flexíveis. Se destacam aqui os modelos de Kalker e seus desdobramentos. O leitor interessado na vasta bibliografia do assunto encontra em [68] uma referência clássica.

4.4.1 Gap tangencial incremental

A generalização da ideia apresentada em [32] é a base da apresentação do artigo [34], detalhada a seguir. A Figura 4.8(a) mostra duas superfícies candidatas a contato na configuração “i”, denotadas Γ_A^i e Γ_B^i . O índice superior à direita refere-se à configuração associada à escrita da parametrização de cada superfície. Nessa configuração é obtida a solução $\bar{\mathbf{c}}^i$ por meio da solução da equação (4.8). Isso leva à obtenção do ponto material em Γ_A^i associado às coordenadas convectivas $(\bar{\zeta}_A, \bar{\theta}_A)^i$, e ao ponto material em Γ_B^i associado às coordenadas convectivas $(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)^i$. Esses são os pontos materiais candidatos à interação de contato. Na sequência, o *gap* normal deve ser avaliado. Sendo esse *gap* também avaliado na configuração “i”, será denotado por $\mathbf{g}^i = (\Gamma_A^i - \Gamma_B^i)$. A direção normal exterior à superfície Γ_B^i é dada por $\mathbf{n}_B^i$ (ver Figura 4.8(b)):

$$\mathbf{n}_B^i = \frac{\Gamma_{B,\theta_B}^i \times \Gamma_{B,\zeta_B}^i}{\|\Gamma_{B,\theta_B}^i \times \Gamma_{B,\zeta_B}^i\|}. \quad (4.50)$$

Figura 4.8 – (a) superfícies candidatas a contato na configuração “i”. (b) direção normal

Fonte: [34]

Imaginando um cenário de solução de um modelo não linear de elementos finitos com contato, é necessário, como já mencionado, avaliar a existência ou não de penetração entre as superfícies-candidatas. Em caso afirmativo, é necessário avaliar ainda se é a primeira ocorrência

de contato ou se o mesmo já havia ocorrido anteriormente. Supõe-se que o contato acaba de se iniciar na configuração “i”. Dessa forma, as coordenadas convectivas em ambas as superfícies associadas ao início do contato são conhecidas e dadas por $\bar{\mathbf{c}}^i$. Supondo a evolução do sistema, e a obtenção de uma próxima configuração “i+1”, em que ocorre um movimento geral nas superfícies, que pode incluir mudanças de forma, dilatação ou contração e ainda movimentos de corpo rígido de translação e rotação. Nessa nova configuração, realiza-se novamente a solução da equação (4.8), levando a $\bar{\mathbf{c}}^{i+1}$, ilustrada na Figura 4.9(a), em que se podem visualizar as novas coordenadas convectivas em que a ação pontual de contato se dá, denotadas por $(\bar{\zeta}_A, \bar{\theta}_A)^{i+1}$ e $(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)^{i+1}$, respectivamente associadas às superfícies Γ_A^{i+1} e Γ_B^{i+1} .

Os pontos materiais em que ocorria contato na configuração anterior “i” agora podem ser mapeados na configuração “i+1”. Com isso, é possível definir dois vetores $\mathbf{d}_A^\Delta$ e $\mathbf{d}_B^\Delta$, representados na Figura 4.9(a). Suas magnitudes são, para cada superfície, a distância entre os pontos materiais anterior e atual em que a ação de contato pontual ocorre. Pode-se obter:

$$\mathbf{d}_A^\Delta = \Gamma_A(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_A(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}) \quad (4.51)$$

e

$$\mathbf{d}_B^\Delta = \Gamma_B(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_B(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}). \quad (4.52)$$

Figura 4.9 – (a) superfícies candidatas a contato na configuração “i+1”. (b) direção normal

Fonte: [34]

Note que, como mostrado na Figura 4.9(b), a direção normal de contato também em geral se modifica, sendo na nova configuração dada por:

$$\mathbf{n}_B^{i+1} = \frac{\Gamma_B^{i+1}, \theta_B \times \Gamma_B^{i+1}, \zeta_B}{\|\Gamma_B^{i+1}, \theta_B \times \Gamma_B^{i+1}, \zeta_B\|}. \quad (4.53)$$

Utilizando-se das grandezas previamente definidas, agora pode-se definir o *gap* tangencial incremental $\mathbf{g}_T^\Delta$, geometricamente interpretado como a projeção da diferença entre os vetores $\mathbf{d}_A^\Delta$ e $\mathbf{d}_B^\Delta$ no plano tangente às superfícies na configuração “i+1”:

$$\mathbf{g}_T^\Delta = (\mathbf{d}_A^\Delta - \mathbf{d}_B^\Delta) - [(\mathbf{d}_A^\Delta - \mathbf{d}_B^\Delta) \cdot \mathbf{n}_B^{i+1}] \mathbf{n}_B^{i+1}. \quad (4.54)$$

A expressão anterior pode ser simplificada utilizando-se das relações de ortogonalidade (4.8) e a definição da direção normal exterior à superfície Γ_B^{i+1} , levando a:

$$\mathbf{g}_T^\Delta = \left(\Gamma_A(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_B(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) \right) - \left(\Gamma_A(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_B(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) \right) \cdot \mathbf{n}_B^{i+1} \mathbf{n}_B^{i+1}. \quad (4.55)$$

A grandeza $\mathbf{g}_T^\Delta$ captura a tendência de deslizamento relativo entre as superfícies Γ_A e Γ_B . A Figura 4.10 ilustra diversos casos possíveis de movimentos que permitem uma melhor interpretação acerca da grandeza $\mathbf{g}_T^\Delta$.

A Figura 4.10(a) mostra a configuração inicial “i”. Quatro diferentes cenários de transformações são explorados na sequência. A Figura 4.10(b) mostra o caso de deslizamento relativo puro entre as superfícies. Note que não ocorre movimento de corpo rígido. O vetor $\mathbf{d}_B^\Delta$ registra o deslizamento relativo ocorrido, uma vez que nesse caso $\mathbf{d}_A^\Delta = \mathbf{0}$. A Figura 4.10(c) mostra o cenário de rotação de corpo rígido de ambos os corpos A e B, tal que os pontos materiais onde ocorre a interação pontual de contato não se altera. Nesse caso, ambos $\mathbf{d}_A^\Delta = \mathbf{0}$ e $\mathbf{d}_B^\Delta = \mathbf{0}$ e não ocorre deslizamento relativo. A Figura 4.10(d) mostra o caso de rolamento puro entre as superfícies. Note que são modificados ambos os pontos materiais onde o contato ocorre, em ambas as superfícies. Nesse caso, tem-se que $\mathbf{d}_A^\Delta$ e $\mathbf{d}_B^\Delta$ são não nulos. A obtenção de $\mathbf{g}_T^\Delta$ leva a um vetor praticamente nulo. Para pequenos passos temporais que conectem ambas as configurações, o rolamento puro é caracterizado por $\mathbf{d}_A^\Delta = \mathbf{d}_B^\Delta$, isto é, não há deslizamento

relativo. Esse conjunto de exemplos ajuda a compreender como a grandeza $\mathbf{g}_T^\Delta$ lida com a possibilidade de rolamento, com um erro dependente do passo temporal considerado entre as diferentes configurações e que surge devido às aproximações geométricas da projeção de $\mathbf{d}_A^\Delta$ e $\mathbf{d}_B^\Delta$ no atual plano tangente, cuja direção normal é dada por $\mathbf{n}_B^{i+1}$. Por último, o leitor pode notar o cenário da Figura 4.10(e), que não representa um deslizamento puro, tampouco o rolamento puro, mas uma combinação de ambos. Nesse caso, ambos $\mathbf{d}_A^\Delta$ e $\mathbf{d}_B^\Delta$ são não nulos e a obtenção de $\mathbf{g}_T^\Delta$ é capaz de registrar o quanto de deslizamento relativo entre as superfícies, de fato, ocorre entre ambas as configurações.

Figura 4.10 – (a) Configuração inicial “i” (b) Configuração deformada “i+1” – deslizamento puro (c) Configuração deformada “i+1” – rotação de corpo rígido sem deslizamento relativo (d) Configuração deformada “i+1” – rolamento puro (e) Configuração deformada “i+1” – deslizamento relativo

Fonte: [34]

4.4.2 Erros na descrição do deslizamento

O leitor é convidado a observar que para o correto emprego da grandeza $\mathbf{g}_T^A$ deve-se garantir um passo pequeno o suficiente entre as configurações “i” e “i+1”. O passo temporal requerido para garantir boa precisão depende da complexidade das formas locais das superfícies e das velocidades relativas envolvidas entre os corpos em contato. Para tal análise, é possível definir na superfície Γ_A a curva C_A que contém a coleção dos pontos materiais onde ocorre contato nessa superfície, ocorridos entre as configurações “i” e “i+1”. É possível fazer o mesmo para a superfície Γ_B , de forma análoga, e definir a curva C_B . Adicionalmente, é possível adotar o tempo como um parâmetro global para ambas as curvas. Nesse caso, os comprimentos dessas curvas são dados respectivamente por L_A e L_B . Na presente definição de *gap* tangencial, entre as configurações “i” e “i+1” haverá boa aproximação se:

$$\begin{aligned} L_A &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|C_{A,t}\| dt \approx \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} C_{A,t} dt \right\| \\ L_B &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|C_{B,t}\| dt \approx \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} C_{B,t} dt \right\| \end{aligned} \quad (4.56)$$

Tomar passos temporais arbitrariamente grandes pode levar a formas complexas em C_A e C_B tal que (4.109) pode não ser obedecida, levando à não precisão da descrição cinemática do contato. O passo temporal desejável para evitar tais problemas depende da história de movimento entre as superfícies, entre as configurações “i” e “i+1”. A aproximação básica contida na definição de $\mathbf{g}_T^A$ equivale a quantificar o deslizamento relativo entre as superfícies, aproximando suas histórias reais de movimento (não conhecidas) por linhas retas projetadas no plano tangente de contato da configuração “i+1”. Nesse caso, a adoção de $\mathbf{g}_T^A$ permite capturar não somente uma aproximação para o deslizamento relativo, mas também a informação da direção desse deslizamento, o que seria uma tarefa difícil de ser executada no caso de abordar o problema endereçando o movimento relativo exato, pelas integrais de linha exploradas anteriormente. Sendo as curvas C_A e C_B desconhecidas a priori, a escolha de aproximação aqui feita para $\mathbf{g}_T^A$ parece uma opção simples e interessante. Uma vez que o passo temporal diminui, a união de linhas retas sucessivas leva às trajetórias exatas dos pontos materiais de contato C_A e C_B , como equacionado em (4.56).

4.4.3 *Gap* tangencial acumulado e objetividade

Em um cenário em que se estuda a sucessão de configurações de superfícies que apresentem contato, é muito importante estabelecer uma forma para o acúmulo da informação da medida de tendência de deslizamento. Para tal, é necessário não somente prever uma forma de atualizar essa medida, mas também procurar prever se a mesma é adequada para situações, por exemplo, em que ocorrem movimentos arbitrários de corpo rígido. Essa questão é bastante alinhada com as preocupações de descrição de equações constitutivas e medidas de tensão e deformação de sólidos sob não linearidade geométrica, em que o Princípio da Objetividade deve ser acatado, isto é, as medidas de tensão e deformação utilizadas devem suportar invariância a movimentos arbitrários de corpo rígido ¹⁹. No presente contexto, a quantificação do fenômeno de deslizamento relativo entre superfícies ou sua tendência também deve ser insensível aos movimentos de corpo rígido do par de contato.

É necessário estabelecer uma forma para acumular e atualizar o vetor $\mathbf{g}_T^\Delta$, até então apresentado somente para o contexto de um único passo, envolvendo duas configurações sucessivas. Os quesitos que devem ser acatados nesse processo são os seguintes:

- Atualização por conta de novos deslizamentos relativos ou sua tendência em configurações subsequentes (acúmulo);
- Rotação da informação prévia e já ocorrida de deslizamento relativo ou sua tendência, a fim de contemplar movimentos arbitrários de corpo rígido do par de contato.

A fim de procurar acatar essas questões, propõe-se a grandeza *gap* tangencial acumulado, dada por:

$$\mathbf{g}_T^{i+1} = \mathbf{g}_T^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i, \quad (4.57)$$

onde $\mathbf{g}_T^i$ representa o *gap* tangencial acumulado anterior (inicia-se com um valor nulo na primeira ocorrência de contato) e $\mathbf{Q}^\Delta$ é um tensor rotação que relaciona as direções $\mathbf{n}_B^i$ e $\mathbf{n}_B^{i+1}$ tal que:

¹⁹ Mais detalhes sobre objetividade podem ser encontrados em [10], por exemplo.

$$\mathbf{Q}^\Delta = \mathbf{Q}_B \mathbf{Q}_B^\Delta \mathbf{Q}_B^T. \quad (4.58)$$

Os tensores $\mathbf{Q}_B$ e $\mathbf{Q}_B^\Delta$ dependem da base móvel atrelada à superfície Γ_B , definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^i &= \frac{\Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\theta}_B}{\|\Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\theta}_B\|}, \\ \mathbf{n}_B^i &= \frac{\Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\theta}_B \times \Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\zeta}_B}{\|\Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\theta}_B \times \Gamma_B^i \cdot \boldsymbol{\zeta}_B\|} \mathbf{e} \\ \mathbf{t}_2^i &= \mathbf{n}_B^i \times \mathbf{t}_1^i. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Seja a base do sistema de coordenadas global dada por $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. O tensor rotação $\mathbf{Q}_B$ é dado por:

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{n}_B^i \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{n}_B^i \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{n}_B^i \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

O tensor $\mathbf{Q}_B^\Delta$ contempla a rotação ocorrida devido às mudanças da direção da normal de contato $\mathbf{n}_B^i \rightarrow \mathbf{n}_B^{i+1}$ e também das direções tangenciais da superfície Γ_B ($\mathbf{t}_1^i$ e $\mathbf{t}_2^i$). Ou seja, também contempla a rotação em torno da direção normal instantânea de contato considerando somente a superfície Γ_B . O tensor $\mathbf{Q}_B^\Delta$ é dado por:

$$\mathbf{Q}_B^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i & \mathbf{n}_B^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i \\ \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i & \mathbf{n}_B^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i \\ \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{n}_B^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{n}_B^i & \mathbf{n}_B^{i+1} \cdot \mathbf{n}_B^i \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^{i+1} &= \frac{\Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_B}{\|\Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_B\|}, \\ \mathbf{n}_B^{i+1} &= \frac{\Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_B \times \Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\zeta}_B}{\|\Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_B \times \Gamma_B^{i+1} \cdot \boldsymbol{\zeta}_B\|} \mathbf{e} \\ \mathbf{t}_2^{i+1} &= \mathbf{n}_B^{i+1} \times \mathbf{t}_1^{i+1}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.4.4 Lei constitutiva de atrito

Uma vez calculado o *gap* tangencial acumulado para uma configuração “i+1” pela equação (4.57), é necessário avaliar, com base nessa grandeza cinemática, se ocorre ou não deslizamento relativo, de fato, para o par de contato em questão e, no caso de haver deslizamento relativo, deve-se quantificá-lo. Para tal, é necessário estabelecer uma lei constitutiva de atrito, como a Lei de Coulomb, que é aqui adotada²⁰. A decisão entre ocorrência de deslizamento (*slip*) e não ocorrência (*stick*) pode ser feita por meio da quantificação da imposição da restrição de não deslizamento pelo Método da Penalidade, aplicado à direção tangencial de contato, considerando como fator de penalidade ϵ_t . É possível, dessa forma, avaliar a força de atrito-tentativa, dada por:

$$F^{\text{try}} = \epsilon_t \|\mathbf{g}_T^{i+1}\|. \quad (4.63)$$

Pela Lei de Coulomb, a magnitude máxima da força de atrito F^{max} é dada por

$$F^{\text{max}} = \mu N, \quad (4.64)$$

onde μ é o coeficiente de atrito e N é a magnitude da força normal de contato. Para o caso de utilizar também o Método da Penalidade na direção normal, é possível avaliar essa força na configuração “i+1” por $N = \epsilon_n g_n^{i+1}$. De forma alternativa, ao utilizar multiplicador de Lagrange para imposição da restrição de contato na direção normal, seu módulo representará diretamente a magnitude da força normal de contato N .

A magnitude do deslizamento $\overline{\Delta\lambda}$, aqui estabelecida por meio da analogia entre escoamento em modelos constitutivos de plasticidade e o deslizamento na direção tangencial de contato (ver por exemplo [13] e [73]), pode ser avaliado por:

²⁰ Nesse contexto o leitor interessado em observar diferentes leis constitutivas de contato, não apenas para a direção tangencial (atrito), mas também para o comportamento na direção normal, pode recorrer a [13].

$$\begin{cases} \overline{\Delta\lambda} = \frac{F^{\text{try}} - F^{\text{max}}}{\epsilon_t} & \text{if } F^{\text{try}} > F^{\text{max}} \\ \overline{\Delta\lambda} = 0 & \text{if } F^{\text{try}} \leq F^{\text{max}} \end{cases}. \quad (4.65)$$

No caso de ocorrência de deslizamento relativo entre as configurações “i” e “i+1”, seu valor vetorial pode ser calculado por:

$$\mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{\Delta} = \overline{\Delta\lambda} \mathbf{t}^{i+1}, \quad (4.66)$$

em que $\mathbf{t}^{i+1}$ representa a direção de deslizamento atual “i+1”, tal que

$$\mathbf{t}^{i+1} = \frac{\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}}{\|\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}\|}. \quad (4.67)$$

Observe que o vetor $\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}$ deve ser atualizado ao final de cada configuração convergida, como uma última operação a ser realizada ao final do atual passo que busca a solução da configuração “i+1”. A atualização deve contemplar o deslizamento ocorrido no passo de solução atual, recém calculado, tal que $\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}_{\text{updated}} = \mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1} - \mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{\Delta}$. Com isso, no próximo passo, a grandeza $\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}_{\text{updated}}$ que será referida como $\mathbf{g}_{\text{T}}^i$ na equação (4.57) irá conter toda a informação física acerca da tendência de deslizamento acumulada nos passos anteriores (denominado *gap* tangencial elástico). O leitor deve observar que a definição aqui empregada para o acúmulo do *gap* tangencial não armazena o deslizamento relativo acumulado, mas somente sua parte elástica. Isso também justifica a representação da direção de deslizamento atual dada na equação (4.67), uma vez que $\mathbf{g}_{\text{T}}^{i+1}$ não contém informação da história de acúmulo de deslizamento, mas somente da tendência de deslizamento associada ao último passo de cálculo (entre configurações “i” e “i+1”), e por isso pode ser tomado de forma razoável como base para aproximação para o cálculo da direção de deslizamento ocorrido ao longo desse mesmo passo. No caso em que se deseja avaliar o acúmulo de deslizamento, é possível incrementar seu valor ao final de cada passo convergido. Nomeando essa grandeza acumulada por $\mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{i+1}$, pode-se atualizar o valor anterior acumulado $\mathbf{g}_{\text{Tslide}}^i$ utilizando-se do recém obtido $\mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{\Delta}$ tal que $\mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{i+1} = \mathbf{g}_{\text{Tslide}}^i + \mathbf{g}_{\text{Tslide}}^{\Delta}$. Uma medida escalar também poderia ser facilmente estabelecida, acumulando as magnitudes de deslizamentos. Isso pode ser conveniente para avaliar a dissipação de energia pelo atrito ao longo da evolução da modelagem de um sistema dinâmico.

4.4.5 Comentários críticos

É desejável e necessário, para uma formulação de contato, que seja capaz de lidar com rotações arbitrárias de corpo rígido em um par de superfícies, uma vez estabelecido o contato. Nesse caso, a grandeza vetorial que descreve o deslizamento relativo ou sua tendência, obtido como solução do passo anterior, é dado por $\mathbf{g}_T^i$. Esse deve ser atualizado de acordo com mudanças ocorridas pela normal de contato (rotação que mapeia $\mathbf{n}_B^i \rightarrow \mathbf{n}_B^{i+1}$). Aqui surge uma dificuldade, uma vez que existem infinitas rotações que levam ao mapeamento $\mathbf{n}_B^i \rightarrow \mathbf{n}_B^{i+1}$, quando se consideram diferentes magnitudes de rotação relativa em torno da direção normal (*spin*) entre as superfícies. Dependendo da magnitude considerada para o *spin* relativo, a rotação aplicada a $\mathbf{g}_T^i$ levará a resultados distintos, uma vez que $\mathbf{g}_T^i$ e $\mathbf{n}_B^i$ são ortogonais. A questão que surge é: qual a magnitude de rotação de *spin* que deve ser utilizada? Uma possível escolha seria simplesmente adotar a rotação *spin* sofrida por uma das superfícies de contato, arbitrariamente escolhida (o que parece ser a escolha mais simples). O ponto negativo é que, de acordo com a escolha feita entre as duas superfícies, distintas rotações poderiam ser aplicadas para casos gerais em que ocorre *spin* relativo entre as superfícies. Uma segunda escolha possível (mais elaborada) seria adotar uma medida de *spin* relativo entre as superfícies usando informações das rotações de ambas as superfícies ao longo da evolução das configurações. Isso aumentaria a complexidade do processo de atualização do *gap* tangencial, mas a vantagem seria a total invariância de resultados em caso de ocorrência de *spin* relativo (levando a uma formulação de contato objetiva). Observando novamente a física do contato, o grande objetivo da presente formulação é representar uma única ação mecânica pontual, de maneira a homogeneizar os esforços transmitidos na interface de contato. O *spin* relativo entre as superfícies induziria um momento de *spin*, alinhado com a direção normal de contato, correspondente ao momento induzido pelos esforços da área de contato, tomando como polo o ponto de aplicação da força pontual. Esse momento está sendo desprezado desde o início dessa formulação. Devido a esse fato, a escolha de atualizar a grandeza $\mathbf{g}_T^i$ desse trabalho é a mais simples possível, ainda que não estritamente objetiva por conta das discussões aqui feitas em relação ao *spin*. No entanto, rotações arbitrárias de corpo rígido evidenciadas por variações arbitrárias da direção normal de contato são perfeitamente capturadas pela formulação e pela equação de atualização (4.57), e essa a principal preocupação dessa formulação. Com o objetivo de melhor entender os efeitos da escolha arbitrária de referências para o cálculo do *spin* e sua influência em resultados, exemplos numéricos foram estudados. Cenários de grandes *spins* relativos foram criados, e

induzidos em um cenário de não deslizamento (atrito elástico em uma imposição por penalidades tangenciais). Ao mudar a referência para o cálculo da medida de *spin*, diferenças nos resultados podem ocorrer nos valores de deslocamentos tangenciais. Nesse caso, o fator de penalidade tangencial se evidenciou como o parâmetro que governa essa diferença, uma vez que afeta as sucessivas configurações e as coordenadas convectivas associadas à ocorrência da interação de contato, para um dado cenário de estudo. Os testes realizados mostram que o aumento do fator de penalidade tangencial torna desprezível a diferença entre os resultados, mesmo em casos de *spin* relativo substancial. A mesma tendência é observada na avaliação das forças de atrito, que tendem aos mesmos resultados à medida que as coordenadas convectivas onde atuam são as mesmas em ambos os casos. Em um trabalho futuro será considerado na modelagem o *spin* relativo e sua influência ao gerar um momento de *spin* alinhado à direção normal. Nesse caso, no entanto, será necessário também avaliar o modelo de atrito empregado, pois deverá prever a ação simultânea da força de atrito e do momento de *spin*, gerado pela rotação de *spin* relativa entre as superfícies. Aqui coloca-se essa discussão pois representa um interessante ponto de conexão entre a formulação aqui desenvolvida, explorada em seus limites, e os modelos constitutivos de contato que consideram deformação dos corpos envolvidos para quantificar aparentes velocidades relativas (*creepage*) (ex.: Kalker – ver [68]).

4.4.6 Potencial para a direção tangencial em não deslizamento

Afim de estabelecer a contribuição à forma fraca dos esforços tangenciais no contato (forças de atrito), pode-se iniciar com a definição do potencial do atrito para situação de não deslizamento (*sticking*): W_f . Note que nesse caso, quando há contato estabelecido, a restrição do não deslizamento a ser estabelecida é dada por: $\mathbf{g}_T^{i+1} = \mathbf{0}$ (deslizamento relativo nulo).

De acordo com a abordagem escolhida para a imposição da restrição, pode-se estabelecer diferentes expressões para o potencial W_f . Aqui mostram-se expressões para o Método dos Multiplicadores de Lagrange ($W_{f_{Lstick}}$) e para o Método da Penalidade ($W_{f_{Pstick}}$):

$$W_{f_{Pstick}} = \frac{1}{2} \epsilon_t (\mathbf{g}_T^{i+1} \cdot \mathbf{g}_T^{i+1}) \quad (4.68)$$

e

$$W_{f_{Lstick}} = \lambda_T^{i+1} \cdot \mathbf{g}_T^{i+1}, \quad (4.69)$$

onde λ_T^{i+1} é o vetor multiplicador de Lagrange e ϵ_t é o fator de penalidade para a restrição. A primeira variação do potencial leva à contribuição para a forma fraca por conta do efeito da restrição tangencial devida ao atrito:

$$\delta W_{f_{Lstick}} = \lambda_T^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \delta \lambda_T^{i+1} \cdot \mathbf{g}_T^{i+1} \quad (4.70)$$

e

$$\delta W_{f_{Pstick}} = \epsilon_t \mathbf{g}_T^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1}. \quad (4.71)$$

Com o objetivo de expandir a contribuição à forma fraca não somente para a situação particular de não deslizamento (*stick*), mas também para a situação em que ocorre deslizamento e a força de atrito realiza trabalho dissipativo, pode-se efetuar conforme feito em [13]. Para o caso de não deslizamento em que são válidas as expressões (4.70) e (4.71), pode-se interpretar λ_T^{i+1} como sendo a reação tangencial para garantir a condição de não deslizamento. Adicionalmente, o produto $\epsilon_t \mathbf{g}_T^{i+1}$ possui a mesma interpretação.

Quando há deslizamento relativo, a restrição $\mathbf{g}_T^{i+1} = \mathbf{0}$ deixa de ser válida. Nesse caso, não será mais possível escrever a contribuição dos esforços de atrito a partir da primeira variação de um potencial, mas será necessário escrever diretamente a contribuição à forma fraca a partir da expressão do trabalho virtual da força de atrito. Nesse caso, pode-se escrever:

$$\delta W_{f_{Lslide}} = \mathbf{f}_L^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} \quad (4.72)$$

e

$$\delta W_{f_{Pslide}} = \mathbf{f}_P^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1}. \quad (4.73)$$

Os vetores $\mathbf{f}_L^{i+1}$ e $\mathbf{f}_P^{i+1}$ representam as forças de atrito para o caso de deslizamento. Podem ser obtidos a partir de uma lei constitutiva de atrito, como função dos deslocamentos, velocidade relativa, temperatura, etc. Aqui, para efeito de simplificação do modelo, adota-se

simplesmente a Lei de Coulomb. Com isso, pode-se escrever para a situação de deslizamento relativo:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_L^{i+1} &= \mu \lambda^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} \\ \mathbf{f}_P^{i+1} &= \mu \epsilon_n \mathbf{g}_n^{i+1} \mathbf{t}^{i+1}\end{aligned}\tag{4.74}$$

onde λ^{i+1} é o multiplicador de Lagrange utilizado para a restrição normal, interpretado como o esforço normal de contato na interface e ϵ_n é o fator de penalidade atribuído para a restrição da direção normal, tal que $\epsilon_n \mathbf{g}_n^{i+1}$ possui a mesma conotação de λ^{i+1} .

O desenvolvimento do termo $\delta \mathbf{g}_T^{i+1}$ é dado por:

$$\delta \mathbf{g}_T^{i+1} = \delta \mathbf{g}_T^\Delta + \delta(\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)\tag{4.75}$$

com

$$\delta \mathbf{g}_T^\Delta = \mathbf{g}_{T,c}^\Delta \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{T,d}^\Delta \delta \mathbf{d}\tag{4.76}$$

e

$$\delta(\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i) = (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,c} \delta \mathbf{c} + (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,d} \delta \mathbf{d}.\tag{4.77}$$

Com isso, utilizando-se (4.76) e (4.77) em (4.75) leva a:

$$\delta \mathbf{g}_T^{i+1} = \mathbf{g}_{T,c}^\Delta \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{T,d}^\Delta \delta \mathbf{d} + (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,c} \delta \mathbf{c} + (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,d} \delta \mathbf{d}.\tag{4.78}$$

Utilizando-se da relação entre $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$ dada na equação (4.26) leva a

$$\delta \mathbf{g}_T^{i+1} = [\mathbf{g}_{T,c}^\Delta \mathbf{D} + \mathbf{g}_{T,d}^\Delta + (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,c} \mathbf{D} + (\mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i)_{,d}] \delta \mathbf{d},\tag{4.79}$$

a qual está escrita de forma conveniente em função da variação das coordenadas generalizadas utilizadas para parametrizar as superfícies de contato. É possível escrever, ainda, de forma mais compacta:

$$\delta \mathbf{g}_T^{i+1} = [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d}. \quad (4.80)$$

4.4.7 Contribuição à forma fraca

Utilizando-se da equação (4.104) em (4.70), (4.71), (4.72) e (4.73) pode-se obter as diversas possibilidades de contribuição à forma fraca devida aos efeitos de esforços tangenciais (atrito), dadas por:

$$\delta W_{f_{Lstick}} = \lambda_T^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} + \delta \lambda_T^{i+1} \cdot \mathbf{g}_T^{i+1} \quad (4.81)$$

$$\delta W_{f_{Pstick}} = \epsilon_t \mathbf{g}_T^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} \quad (4.82)$$

$$\delta W_{f_{Lslide}} = \mu \lambda^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} \quad (4.83)$$

$$\delta W_{f_{Pslide}} = \mu \epsilon_n \mathbf{g}_n^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} \quad (4.84)$$

4.4.8 Contribuição à linearização consistente da forma fraca

A obtenção das contribuições à linearização consistente do modelo devido aos efeitos de esforços de atrito na forma fraca deve ser feita de forma diferente para os casos de ocorrência ou não de deslizamento relativo entre as superfícies de contato, bem como de acordo com a técnica utilizada para imposição da restrição tangencial, se pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange ou da Penalidade.

Iniciando-se pela situação em que não ocorre deslizamento relativo, pode-se escrever:

$$\Delta(\delta W_{f_{Lstick}}) = \Delta \lambda_T^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \delta \lambda_T^{i+1} \cdot \Delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \lambda_T^{i+1} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}) \quad (4.85)$$

$$\Delta(\delta W_{f_{Pstick}}) = \epsilon_t \Delta \mathbf{g}_T^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \epsilon_t \mathbf{g}_T^{i+1} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}). \quad (4.86)$$

Para quando ocorre deslizamento relativo, pode-se escrever:

$$\Delta(\delta W_{f_{L\text{slide}}}) = \Delta \mathbf{f}_L^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \mathbf{f}_L^{i+1} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}) \text{ e} \quad (4.87)$$

$$\Delta(\delta W_{f_{P\text{slide}}}) = \Delta \mathbf{f}_P^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_T^{i+1} + \mathbf{f}_P^{i+1} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}) . \quad (4.88)$$

A linearização das forças de atrito para o cenário de deslizamento relativo é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}_L^{i+1} &= \mu \Delta \lambda^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} + \mu \lambda^{i+1} \Delta \mathbf{t}^{i+1} \\ \Delta \mathbf{f}_P^{i+1} &= \mu \epsilon_n \Delta \mathbf{g}_n^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} + \mu \epsilon_n \mathbf{g}_n^{i+1} \Delta \mathbf{t}^{i+1} . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Com isso, será necessário obter os valores de linearizações $\Delta \mathbf{g}_T^{i+1}$, $\Delta \mathbf{g}_n^{i+1}$, $\Delta \mathbf{t}^{i+1}$ e $\Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1})$. O termo $\Delta \mathbf{g}_T^{i+1}$ possui a mesma estrutura matemática do termo $\delta \mathbf{g}_T^{i+1}$, dado na equação (4.80), apenas substituindo $\delta \mathbf{d}$ por $\Delta \mathbf{d}$. O termo $\Delta \mathbf{g}_n^{i+1}$ é análogo ao obtido na equação (4.20), apenas substituindo-se $\delta \mathbf{d}$ por $\Delta \mathbf{d}$ que complementado pelo desenvolvimento de (4.31) leva a:

$$\Delta \mathbf{g}_n^{i+1} = \mathbf{n}^{i+1} \cdot \Delta \mathbf{g}^{i+1} = \mathbf{n}^{i+1} \cdot (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d}. \quad (4.90)$$

O termo $\Delta \mathbf{t}^{i+1}$ é relacionado às variações da direção da força de atrito. É possível, após trabalho algébrico, linearizar a equação (4.67):

$$\Delta \mathbf{t}^{i+1} = \Delta \left(\frac{\mathbf{g}_T^{i+1}}{\|\mathbf{g}_T^{i+1}\|} \right) = \frac{1}{\|\mathbf{g}_T^{i+1}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{t}^{i+1} \otimes \mathbf{t}^{i+1}) \Delta \mathbf{g}_T^{i+1}. \quad (4.91)$$

A última linearização necessária está relacionada ao termo $\Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1})$. A fim de procurar escrevê-la utilizando-se de uma notação amigável, aqui faz-se o mesmo tipo de raciocínio utilizado anteriormente para o desenvolvimento do termo $\Delta(\delta \mathbf{g})$. Note que nas equações (4.85), (4.86), (4.87) e (4.88) tal termo sempre se mostra escalarmente multiplicado por outro vetor. Esse vetor depende do tipo de cenário encontrado (deslizamento ou não deslizamento) e do método utilizado para impor a restrição de contato. É possível escrever, a partir da equação (4.80):

$$\delta \mathbf{g}_T^{i+1} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} = \delta \mathbf{d} \cdot \left[\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_T^{i+1},c)^T + (\mathbf{g}_T^{i+1},d)^T \right] \mathbf{v} \quad (4.92)$$

Com isso, realizando a linearização de (4.92) mas considerando-se o vetor $\mathbf{v}$ constante, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}) \cdot \mathbf{v} &= \delta \mathbf{d} \cdot \Delta \left(\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T + \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \right) \mathbf{v} = \\ &= \delta \mathbf{d} \cdot \Delta \left[\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T \right] \mathbf{v} + \delta \mathbf{d} \cdot \Delta \left[\left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \right] \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \left[\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T \right] \mathbf{v} &= \left[\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{c} \text{ (v constante)}} \Delta \mathbf{c} + \\ &+ \left[\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{d} \text{ (v constante)}} \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.94)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \left[\left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \right] \mathbf{v} &= \left[\left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{c} \text{ (v constante)}} \Delta \mathbf{c} + \\ &+ \left[\left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{d} \text{ (v constante)}} \Delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

A fim de estabelecer uma notação mais clara e compacta, a seguir são definidos dois operadores diferenciais $\mathbf{Y}_c$ e $\mathbf{Y}_d$, considerando um vetor genérico $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{a}; \mathbf{v}) = \left[\mathbf{D}^T \left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{a} \text{ (v constante)}} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{a}; \mathbf{v}) = \left[\left(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d} \right)^T \mathbf{v} \right]_{,\mathbf{a} \text{ (v constante)}} \quad (4.97)$$

Finalmente, fazendo-se uso dos operadores recém definidos na equação (4.93) e utilizando-se da relação (4.26) leva à escrita de:

$$\Delta(\delta \mathbf{g}_T^{i+1}) \cdot \mathbf{v} = \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{v})] \Delta \mathbf{d}. \quad (4.98)$$

Por fim, pode-se escrever expressões finais para a obtenção da contribuição à linearização consistente do modelo tanto para condição de deslizamento e não deslizamento, como para uso dos Método dos Multiplicadores de Lagrange e da Penalidade:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_L})_{\text{stick}} &= \Delta \lambda_T^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} + \\ &\delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \lambda_T^{i+1}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \lambda_T^{i+1}) + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \lambda_T^{i+1}) \mathbf{D} + \\ &\mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \lambda_T^{i+1})] \Delta \mathbf{d} + \delta \lambda_T^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_P})_{\text{stick}} &= \epsilon_t [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \Delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} + \\ &\epsilon_t \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_T^{i+1}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{g}_T^{i+1}) + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{g}_T^{i+1}) \mathbf{D} + \\ &\mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{g}_T^{i+1})] \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_L})_{\text{slide}} &= \\ &\left(\mu \Delta \lambda^{i+1} \mathbf{t}^{i+1} + \mu \lambda^{i+1} \frac{1}{\|\mathbf{g}_T^{i+1}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{t}^{i+1} \otimes \mathbf{t}^{i+1}) [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \Delta \mathbf{d} \right) \\ &\cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} + \\ &\mu \lambda^{i+1} \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{t}^{i+1}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{t}^{i+1}) + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{t}^{i+1}) \mathbf{D} + \\ &\mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{t}^{i+1})] \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_P})_{\text{slide}} &= \left(\mu \epsilon_n \mathbf{t}^{i+1} \otimes \mathbf{n}^{i+1} (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \mu \epsilon_n g_n^{i+1} \frac{1}{\|\mathbf{g}_T^{i+1}\|} (\mathbf{I} - \right. \\ &\left. \mathbf{t}^{i+1} \otimes \mathbf{t}^{i+1}) [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \Delta \mathbf{d} \right) \cdot [\mathbf{g}_T^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_T^{i+1},d] \delta \mathbf{d} + \mu \epsilon_n g_n^{i+1} \delta \mathbf{d} \cdot \\ &[\mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{t}^{i+1}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}_c(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{t}^{i+1}) + \mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{c}; \mathbf{t}^{i+1}) \mathbf{D} + \\ &\mathbf{Y}_d(\mathbf{g}_T^{i+1}, \mathbf{d}; \mathbf{t}^{i+1})] \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.102)$$

4.5 Modelagem de contato entre estruturas de barras

Essa seção ilustra a aplicação da modelagem de contato *master-master*, desenvolvida anteriormente, para casos particulares de parametrizações de superfícies que representam estruturas de barras. O ambiente de análise de implementação é o do Método dos Elementos Finitos com não linearidade geométrica, utilizando-se dos modelos estruturais já elencados no item 3.3.

4.5.1 Superfície de contorno da barra

É necessário estabelecer a parametrização da superfície externa de barras. A malha do modelo estrutural pura e simplesmente, no entanto, não possui toda a informação necessária, uma vez que representa em geral somente o eixo da barra, que de modo geral pode ser representado por uma curva espacial. A informação suplementar está associada à seção transversal a ser considerada. Nesse contexto, não somente a forma da seção é importante, mas também sua orientação ao longo do eixo da barra.

Emprega-se uma parametrização consistente com a descrição do modelo estrutural de barras e a descrição Lagrangiana atualizada, conforme descrito nos itens 3.3.1 e 3.3.3. Ao desenvolver um modelo estrutural de barras em elementos finitos há muitas opções de discretização e interpolação usuais, a fim de eleger os graus de liberdade do modelo. Nesse contexto, é bastante comum assumir interpolação linear tanto para os deslocamentos como para as rotações, definindo um modelo de barras de dois nós – ver Figura 4.11(a). Os nós A e B representam seções transversais extremas da barra, cujos deslocamentos são regidos pelos vetores $\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{u}_B$ e as rotações pelos vetores $\boldsymbol{\alpha}_A$ e $\boldsymbol{\alpha}_B$. Em casos de utilização de modelos estruturais de barras com três nós (como adotado nesse trabalho), é possível utilizar-se da nomenclatura similar à apresentada no contexto da Figura 4.11(a), mas reinterpretando os pontos A e B como os nós extremos da barra de três nós, conforme mostrado na Figura 4.11(b).

Figura 4.11 – Exemplos de interpolação para elementos de barras (a) Barra de dois nós (b) Barra de três nós

Fonte: [33]

A fim de estabelecer a parametrização da superfície externa da barra, serão utilizados somente os graus de liberdade dos nós extremos dados por $\mathbf{u}_A$, $\mathbf{u}_B$, α_A e α_B . Essa escolha implica na distribuição dos esforços provenientes do contato entre barras somente nos nós extremos do modelo estrutural. Em particular, para aplicações em conjunto com elementos estruturais de barras com três nós, é recomendável:

- (i) uma discretização suficiente a fim de que a não utilização do nó central em tal esforço não implique em erros importantes, ou
- (ii) o estabelecimento de duas parametrizações de superfícies de contato por elemento de barra, considerando-se uma delas entre o nó extremo A e o nó central, e a outra entre o nó central e o nó extremo B.

É proposta a seguinte forma geral para a parametrização $\Gamma(\zeta, \theta)$ de uma barra genérica:

$$\Gamma(\zeta, \theta) = \mathbf{x}(\zeta) + \mathbf{a}(\zeta, \theta), \quad (4.103)$$

em que a coordenada convectiva ζ descreve pontos materiais ao longo do comprimento da barra e θ descreve o posicionamento de pontos materiais ao longo do perímetro da seção transversal, dada certa cota ao longo do comprimento.

Figura 4.12 – Seção transversal genérica e definição da coordenada convectiva θ

Fonte: [33]

O vetor $\mathbf{x}(\zeta)$ descreve o eixo da barra, conforme ilustrado na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Parametrização do eixo da barra e grandezas cinemáticas associadas à posição do eixo

Fonte: [34]

Uma vez que é assumida a interpolação linear para as coordenadas do eixo, ao longo de seu comprimento, pode-se escrever

$$\mathbf{x}(\zeta) = N_A \mathbf{x}_A + N_B \mathbf{x}_B, \quad (4.104)$$

onde as funções de forma lineares assumidas para os nós A e B são os polinômios de Lagrange:

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{(1-\zeta)}{2} \\ N_B &= \frac{(1+\zeta)}{2}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

As posições nodais $\mathbf{x}_A$ e $\mathbf{x}_B$ podem ser avaliadas em qualquer configuração de interesse. Em particular, na configuração atual “i+1” os vetores $\mathbf{x}_A^{i+1}$ e $\mathbf{x}_B^{i+1}$ descrevem a posição dos nós A e B, respectivamente. Eles podem ser calculados como funções das últimas posições convergidas $\mathbf{x}_A^i$ e $\mathbf{x}_B^i$ e acrescidos dos deslocamentos atuais, ainda não conhecidos $\mathbf{u}_A^\Delta$ e $\mathbf{u}_B^\Delta$ (em uma descrição Lagrangiana atualizada):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_A^{i+1} &= \mathbf{x}_A^i + \mathbf{u}_A^\Delta \\ \mathbf{x}_B^{i+1} &= \mathbf{x}_B^i + \mathbf{u}_B^\Delta.\end{aligned}\tag{4.106}$$

O vetor $\mathbf{a}(\zeta, \theta)$ descreve as posições de pontos materiais ao longo da superfície da barra, para um dado ζ . Contém não somente a informação acerca da forma da seção transversal atribuída, mas também a sua orientação especial, que pode ser alterada ao longo de uma simulação, por conta das rotações sofridas nos nós A e B. Pode-se escrever:

$$\mathbf{a}(\zeta, \theta) = \mathbf{Q}(\zeta) \mathbf{a}^r(\theta).\tag{4.107}$$

Nessa forma é proposta uma decomposição multiplicativa para avaliação de $\mathbf{a}(\zeta, \theta)$, em que o vetor $\mathbf{a}^r(\theta)$ carrega toda a informação da forma da seção transversal (por exemplo, ilustrada na Figura 4.12 e o tensor $\mathbf{Q}(\zeta)$ é incumbido de orientar de forma adequada cada seção transversal ao longo do comprimento da barra. Pode-se calcular $\mathbf{Q}(\zeta)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}(\zeta) = N_A \mathbf{Q}_A + N_B \mathbf{Q}_B.\tag{4.108}$$

Note que em (4.108) propõe-se a interpolação do tensor rotação, e não do vetor rotação. Alternativamente, poderia ser proposta a interpolação dada por $\boldsymbol{\alpha}(\zeta) = N_A \boldsymbol{\alpha}_A + N_B \boldsymbol{\alpha}_B$. Depois de avaliar $\boldsymbol{\alpha}(\zeta)$, poderia ser construído o tensor $\mathbf{Q}(\zeta)$. A escolha proposta em (4.108), no entanto, parece ser uma alternativa mais simples e independente do tipo de parâmetro de rotação adotado. Por isso, foi escolhida nesse trabalho.

Finalmente, o vetor $\mathbf{a}^r(\theta)$ é dado pela parametrização 2D de uma curva que descreve o contorno da seção transversal. A princípio não há hipóteses *a priori* necessárias acerca da forma da seção transversal a ser adotada. Poderia ser inclusive uma seção não rígida, cujo contorno fosse dependente de parâmetros de deformação da barra, por exemplo seguindo o trabalho [74]. Por simplicidade, no entanto, adotou-se no presente contexto que a seção é rígida.

Note que é conveniente definir $\mathbf{a}^r(\theta)$ no plano 2D (x, y). Nesse caso, é necessário tomar cuidado para não haver enganos quanto à orientação do eixo das barras no espaço. Para tal, é possível estabelecer uma transformação de coordenadas, tal que o eixo da barra em sua configuração de referência, no espaço, seja sempre o z, em um sistema de coordenadas local. Essa transformação pode ser feita por meio da inclusão de um operador multiplicativo aplicado antes da rotação $\mathbf{Q}(\zeta)$ ao vetor $\mathbf{a}^r(\theta)$, para um nó “v” que pode representar os nós A e B:

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_v^{i+1} \mathbf{Q}_v^t = \mathbf{Q}_v^A \mathbf{Q}_v^i \mathbf{Q}_v^t, \quad (4.109)$$

em que $\mathbf{Q}_v$ é decomposto em três partes dadas por:

- $\mathbf{Q}_v^t$: transformação de coordenadas para $\mathbf{a}^r(\theta)$, escrito originalmente sempre em relação ao plano (x, y) e que deve ser transformado para a orientação do plano da seção transversal na configuração de referência do elemento de barra em questão, que pode estar alinhado em qualquer direção do espaço;
- $\mathbf{Q}_v^i$: tensor rotação que transforma um vetor da configuração de referência à última configuração convergida (em uma descrição Lagrangiana atualizada);
- $\mathbf{Q}_v^A$: tensor rotação que transforma um vetor da última configuração convergida à configuração atual e ainda não convergida.

Após as considerações feitas, utilizando-se de (4.104), (4.107) e (4.108) em (4.103) obtém-se:

$$\Gamma(\zeta, \theta) = N_A(\zeta)[\mathbf{x}_A + \mathbf{Q}_A \mathbf{a}^r(\theta)] + N_B(\zeta)[\mathbf{x}_B + \mathbf{Q}_B \mathbf{a}^r(\theta)]. \quad (4.110)$$

Agora é necessário fazer uma escolha para a forma do contorno de cada seção transversal da barra. Nesse trabalho fez-se a escolha de uma super elipse. Trata-se de uma curva descrita por:

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad (4.111)$$

em que há versatilidade nas formas obtidas quando se varia os semieixos a e b, bem como o expoente n. É possível recuperar formas circulares, elípticas, e até mesmo tendências a formas retangulares por meio do aumento de n. Exemplos de contornos de seção transversal estão mostrados na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Exemplos de seção transversal super elíptica com $a = 2b$ e (a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 15$

Fonte: [33]

Dentre as diversas formas possíveis para parametrizar a super elipse, no presente contexto é proposta uma forma alternativa dada por:

$$\begin{cases} x = a\phi(\theta)\cos \theta \\ y = b\phi(\theta)\sin \theta \end{cases} \quad (4.112)$$

onde $\phi(\theta)$ é definida como uma função positiva a ser determinada, atuante como uma modificadora da parametrização da elipse, que é recuperada se $\phi(\theta) = 1$. Propõe-se a forma de $\phi(\theta)$ dada por:

$$\phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt[n]{|\sin \theta|^n + |\cos \theta|^n}}. \quad (4.113)$$

Utilizando-se dessa proposta, pode-se escrever a parametrização para o contorno da seção transversal da barra:

$$\mathbf{a}^r(\theta) = (a\phi(\theta)\cos \theta, b\phi(\theta)\sin \theta). \quad (4.114)$$

A forma proposta é conveniente pois, uma vez que quando se trabalha com expoentes usuais (tipicamente $n \geq 2$) para representar seções transversais, não surgem singularidades. Além disso, as derivadas $\frac{d\phi}{d\theta}$ e $\frac{d^2\phi}{d\theta^2}$ apresentam comportamento oscilante, mas estão sempre definidas ao longo de θ . Como exemplo, pode-se visualizar o comportamento de $\phi(\theta)$ e suas derivadas para um exemplo na Figura 4.15.

A utilização da proposta de $\mathbf{a}^r(\theta)$ da equação (4.114) em (4.110) leva à possibilidade de representar a superfície de contorno de barras com seção transversal super elíptica. Enfatiza-se que se forem adotadas na configuração de referência orientações iguais e mesma seção

transversal para elementos consecutivos, atinge-se continuidade $\mathbb{C}^0$. Para atingir continuidade $\mathbb{C}^1$ seria necessário garantir que ambas as derivadas $\frac{\partial \Gamma(\zeta, \theta)}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial \Gamma(\zeta, \theta)}{\partial \zeta}$ fossem contínuas na interface entre as superfícies. Para o caso em questão, seria possível calcular $\frac{\partial \Gamma(\zeta, \theta)}{\partial \theta} = \mathbf{Q}(\zeta) \frac{\partial \mathbf{a}^r(\theta)}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial \Gamma(\zeta, \theta)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{x}(\zeta)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{Q}(\zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{a}^r(\theta)$. Assim, seria necessário ter $\frac{\partial \mathbf{a}^r(\theta)}{\partial \theta}$ contínua – o que é satisfeito para a super elipse. Já as derivadas $\frac{\partial \mathbf{x}(\zeta)}{\partial \zeta}$ e $\frac{\partial \mathbf{Q}(\zeta)}{\partial \zeta}$ também deveriam ser contínuas. No entanto, com a forma proposta para interpolar $\mathbf{x}(\zeta)$ e $\mathbf{Q}(\zeta)$, a conexão entre elementos vizinhos não se apresenta com as mesmas derivadas, de modo geral. A fim de atingir esse nível de continuidade seria necessário propor outra forma de interpolar $\mathbf{x}(\zeta)$ e $\mathbf{Q}(\zeta)$.

A Figura 3.1 ilustra um exemplo de duas superfícies de contorno de barras vizinhas. Note a continuidade na $\mathbb{C}^0$ na conexão entre as superfícies de cores diferentes, representando parametrizações para duas barras consecutivas.

Figura 4.15 – Exemplo de $\phi(\theta)$ e derivadas para $n = 8$. (a) $\phi(\theta)$ (b) $\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}$ (c) $\frac{d^2\phi(\theta)}{d\theta^2}$ (d) seção transversal parametrizada com $a = b$

Fonte: [33]

Figura 4.16 – Exemplo de parametrizações de superfícies de contorno de barras vizinhas

Fonte: [33]

4.5.2 Formulação de contato entre barras

A fim de estabelecer a formulação de contato para superfícies que representem o contorno de barras, a forma proposta em (4.110) é adotada para duas barras, mostradas na Figura 4.17, tal que:

$$\begin{aligned}\Gamma_A &= N_A(\zeta_A)[\mathbf{x}_{AA}^{i+1} + \mathbf{Q}_{AA}\mathbf{a}_A^r(\theta_A)] + N_B(\zeta_A)[\mathbf{x}_{BA}^{i+1} + \mathbf{Q}_{BA}\mathbf{a}_A^r(\theta_A)] \text{ e} \\ \Gamma_B &= N_A(\zeta_B)[\mathbf{x}_{AB}^{i+1} + \mathbf{Q}_{AB}\mathbf{a}_B^r(\theta_B)] + N_B(\zeta_B)[\mathbf{x}_{BB}^{i+1} + \mathbf{Q}_{BB}\mathbf{a}_B^r(\theta_B)].\end{aligned}\quad (4.115)$$

A nomenclatura adotada em (4.115) é a seguinte: $\mathbf{x}_{vw}^{i+1}$ é a posição atual do nó “v” da barra “w” e $\mathbf{Q}_{vw}$ é o tensor rotação atual, dado em (4.109), associado ao nó “v” da barra “w”. Os índices “v” e “w” podem assumir “A” e “B”. Os contornos das seções transversais de cada uma das barras podem ser distintos, sendo descritos por $\mathbf{a}_A^r(\theta_A)$ e $\mathbf{a}_B^r(\theta_B)$, respectivamente para as barras “A” e “B”. É possível computar as posições atuais e tensores rotação atuais por:

$$\mathbf{x}_{vw}^{i+1} = \mathbf{x}_{vw}^i + \mathbf{u}_{vw}^\Delta \text{ e} \quad (4.116)$$

$$\mathbf{Q}_{vw}^{i+1} = \mathbf{Q}_{vw}^\Delta \mathbf{Q}_{vw}^i \mathbf{Q}_{vw}^t. \quad (4.117)$$

Sendo $\mathbf{Q}_{vw}^\Delta$ função do parâmetro de rotação α_{vw} (vetor rotação de Rodrigues do nó “v” da barra “w”), é nítido que as parametrizações propostas em (4.115) são funções das coordenadas convectivas $\mathbf{c}_w = [\zeta_w \ \theta_w]^T$ e das coordenadas generalizadas para cada barra “w” dadas por:

$$\mathbf{d}_w = [\mathbf{u}_{Aw}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{Aw}^T \quad \mathbf{u}_{Bw}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{Bw}^T]^T. \quad (4.118)$$

Utilizando-se da notação desenvolvida na definição da função *gap* vetorial $\mathbf{g}$, se faz conveniente a escrita de um vetor com todas as coordenadas generalizadas envolvidas nas parametrizações de ambas as superfícies Γ_A e Γ_B . Com isso, se estabelece o vetor de 24 dimensões dado por:

$$\mathbf{d} = [\mathbf{u}_{AA}^T \quad \mathbf{u}_{BA}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{AA}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{BA}^T \quad \mathbf{u}_{AB}^T \quad \mathbf{u}_{BB}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{AB}^T \quad \boldsymbol{\alpha}_{BB}^T]^T. \quad (4.119)$$

Figura 4.17 – Superfícies do contorno de barras candidatas a apresentarem contato

Fonte: [33]

A formulação de contato requer a obtenção de muitas derivadas para o cálculo das relações de ortogonalidade (4.8). Essas devem ser utilizadas durante a busca da solução do problema da determinação dos pontos materiais de ação pontual de contato entre superfícies, já descrito no item 4.2. A fim de obter a matriz $\mathbf{A}$, é necessário calcular as derivadas: Γ_{A,ζ_A} , Γ_{A,θ_A} , Γ_{B,ζ_B} , Γ_{B,θ_B} , $\Gamma_{A,\zeta_A\zeta_A}$, $\Gamma_{A,\zeta_A\theta_A}$, $\Gamma_{A,\theta_A\zeta_A}$, $\Gamma_{A,\theta_A\theta_A}$, $\Gamma_{B,\zeta_B\zeta_B}$, $\Gamma_{B,\zeta_B\theta_B}$, $\Gamma_{B,\theta_B\zeta_B}$ e $\Gamma_{B,\theta_B\theta_B}$. Algumas simplificações podem ser feitas, como $\Gamma_{A,\zeta_A\theta_A} = \Gamma_{A,\theta_A\zeta_A}$ e $\Gamma_{B,\zeta_B\theta_B} = \Gamma_{B,\theta_B\zeta_B}$. Todas essas derivadas são tomadas considerando-se um vetor fixo $\bar{\mathbf{d}}$. É possível determinar todas as

derivadas necessárias para a formulação matemática de contato por meio de derivação automática, em particular utilizando-se do programa MathematicaTM e do AceGenTM (ver [65], [75] e [76]).

Assume-se para o desenvolvimento que se seque que seja conhecida a solução de (4.8), ou seja, são conhecidos $\bar{\zeta}_A$, $\bar{\theta}_A$, $\bar{\zeta}_B$ e $\bar{\theta}_B$. Todas as contribuições para a forma fraca e linearização consistente são calculadas avaliando-as para essas coordenadas convectivas particulares.

Também é necessário avaliar algumas derivadas da função *gap* em relação a **c** e **d**. Alguns desenvolvimentos importante estão feitos a seguir:

$$\mathbf{g}_{,c} = [\Gamma_{A,\zeta_A} \quad \Gamma_{A,\theta_A} \quad -\Gamma_{B,\zeta_B} \quad -\Gamma_{B,\theta_B}] \mathbf{e} \quad (4.120)$$

$$\mathbf{g}_{,d} = [\Gamma_{A,u_{AA}} \quad \Gamma_{A,u_{BA}} \quad \Gamma_{A,\alpha_{AA}} \quad \Gamma_{A,\alpha_{BA}} \quad -\Gamma_{B,u_{AB}} \quad -\Gamma_{B,u_{BB}} \quad -\Gamma_{B,\alpha_{AB}} \quad -\Gamma_{B,\alpha_{BB}}]. \quad (4.121)$$

Além disso, das parametrizações (4.115) pode-se escrever:

$$\Gamma_{w,u_{vw}} = N_v(\bar{\zeta}_w) \mathbf{I}_3. \quad (4.122)$$

Com algum trabalho algébrico é possível obter a seguinte derivada envolvendo os parâmetros de rotação de Rodrigues:

$$\Gamma_{w,\alpha_{vw}} = -N_v(\bar{\zeta}_w) \text{skew}(\mathbf{Q}_{vw} \mathbf{a}_w^r(\bar{\theta}_w)) \mathbf{\Xi}_{vw}, \quad (4.123)$$

em que

$$\mathbf{\Xi}_{vw} = g(\alpha_{vw}) \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_{vw} \right), \quad (4.124)$$

onde $\alpha_{vw} = \|\alpha_{vw}\|$ e $\mathbf{A}_{vw} = \text{skew}(\alpha_{vw})$.

A determinação do operador **B**₂ pode ser feita utilizando-se das derivadas descritas a seguir:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{A,\zeta_A})_{,d} = \\ & [\Gamma_{A,\zeta_A} u_{AA} \quad \Gamma_{A,\zeta_A} u_{BA} \quad \Gamma_{A,\zeta_A} \alpha_{AA} \quad \Gamma_{A,\zeta_A} \alpha_{BA} \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3], \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{A,\theta_A})_{,d} = \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\theta_A} u_{AA} & \Gamma_{A,\theta_A} u_{BA} & \Gamma_{A,\theta_A} \alpha_{AA} & \Gamma_{A,\theta_A} \alpha_{BA} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{B,\zeta_B})_{,d} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \Gamma_{B,\zeta_B} u_{AB} & \Gamma_{B,\zeta_B} u_{BB} & \Gamma_{B,\zeta_B} \alpha_{AB} & \Gamma_{B,\zeta_B} \alpha_{BB} \end{bmatrix} e \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{B,\theta_B})_{,d} = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \Gamma_{B,\theta_B} u_{AB} & \Gamma_{B,\theta_B} u_{BB} & \Gamma_{B,\theta_B} \alpha_{AB} & \Gamma_{B,\theta_B} \alpha_{BB} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.128)$$

onde a matriz nula de dimensão n é representada por $\mathbf{0}_n$. Além disso, é possível obter:

$$\begin{aligned} \Gamma_{w,\zeta_w} u_{vw} &= N_{v,\zeta}(\bar{\zeta}_w) \mathbf{I}_3 \\ \Gamma_{w,\zeta_w} \alpha_{vw} &= -N_{v,\zeta}(\bar{\zeta}_w) \text{skew} \left(\mathbf{Q}_{vw} \mathbf{a}_w^r(\bar{\theta}_w) \right) \mathbf{\Xi}_{vw} \\ \Gamma_{w,\theta_w} u_{vw} &= \mathbf{0}_3 \\ \Gamma_{w,\theta_w} \alpha_{vw} &= -N_v(\bar{\zeta}_w) \text{skew} \left(\mathbf{Q}_{vw} \mathbf{a}_{w,\theta_w}^r(\bar{\theta}_w) \right) \mathbf{\Xi}_{vw}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

sendo $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade de ordem n. Os termos adicionais necessários para a obtenção da linearização consistente estão descritos a seguir:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \zeta_A \cdot \mathbf{v} & \Gamma_{A,\zeta_A} \theta_A \cdot \mathbf{v} & 0 & 0 \\ \Gamma_{A,\theta_A} \zeta_A \cdot \mathbf{v} & \Gamma_{A,\theta_A} \theta_A \cdot \mathbf{v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma_{B,\zeta_B} \zeta_B \cdot \mathbf{v} & -\Gamma_{B,\zeta_B} \theta_B \cdot \mathbf{v} \\ 0 & 0 & -\Gamma_{B,\theta_B} \zeta_B \cdot \mathbf{v} & -\Gamma_{B,\theta_B} \theta_B \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = [\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_A \quad \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_B] \quad (4.131)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) = \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})^T \quad (4.132)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \zeta_A} \mathbf{u}_{AA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \zeta_A} \mathbf{u}_{BA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \zeta_A} \boldsymbol{\alpha}_{AA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \zeta_A} \boldsymbol{\alpha}_{BA} \\ \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \theta_A} \mathbf{u}_{AA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \theta_A} \mathbf{u}_{BA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \theta_A} \boldsymbol{\alpha}_{AA} & \mathbf{v}^T \Gamma_{A, \theta_A} \boldsymbol{\alpha}_{BA} \\ \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T \\ \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T \\ \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T & \mathbf{o}_3^T \\ -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \zeta_B} \mathbf{u}_{AB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \zeta_B} \mathbf{u}_{BB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \zeta_B} \boldsymbol{\alpha}_{AB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \zeta_B} \boldsymbol{\alpha}_{BB} \\ -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \theta_B} \mathbf{u}_{AB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \theta_B} \mathbf{u}_{BB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \theta_B} \boldsymbol{\alpha}_{AB} & -\mathbf{v}^T \Gamma_{B, \theta_B} \boldsymbol{\alpha}_{BB} \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_A & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{O}_6 & \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_B \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_A = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(\Gamma_A, \boldsymbol{\alpha}_{AA}, \boldsymbol{\alpha}_{AA}; \mathbf{v}) & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{Y}(\Gamma_A, \boldsymbol{\alpha}_{BA}, \boldsymbol{\alpha}_{BA}; \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})_B = \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}(\Gamma_B, \boldsymbol{\alpha}_{AB}, \boldsymbol{\alpha}_{AB}; \mathbf{v}) & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & -\mathbf{Y}(\Gamma_B, \boldsymbol{\alpha}_{BB}, \boldsymbol{\alpha}_{BB}; \mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Por fim, ainda é necessário determinar o termo de mais alta complexidade algébrica $\mathbf{Y}(\Gamma_w, \boldsymbol{\alpha}_{vw}, \boldsymbol{\alpha}_{vw}; \mathbf{v})$. Após um intenso trabalho algébrico é possível obter:

$$\mathbf{Y}(\Gamma_w, \boldsymbol{\alpha}_{vw}, \boldsymbol{\alpha}_{vw}; \mathbf{v}) = N_v(\bar{\zeta}_w) [\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{A}_{vw} \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Xi}_{vw}^T \mathbf{V} \mathbf{A}_{vw} \boldsymbol{\Xi}_{vw}] \quad (4.138)$$

com $\mathbf{V} = \text{skew}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{A}_{vw} = \text{skew}(\mathbf{Q}_{vw} \mathbf{a}_w^r(\bar{\theta}_w))$. O operador $\hat{\mathbf{F}}$, aplicado a um vetor genérico $\mathbf{v}_{vw}$, é dado por:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{v}_{vw}) = -\frac{1}{2} g(\alpha_{vw}) (\boldsymbol{\Xi}_{vw}^T \mathbf{v}_{vw} \boldsymbol{\alpha}_{vw}^T - \mathbf{V}_{vw}). \quad (4.139)$$

4.6 Implementação computacional do modelo de contato

Aqui são explicadas de forma sucinta as etapas para implementação computacional do modelo de contato. O leitor deve sempre ter em mente que tudo o que aqui é desenvolvido deve ser encarado como parte de um modelo não linear, cuja forma fraca e sua linearização consistente estão descritas nas equações (2.25) e (2.30), respectivamente.

Para um dado par de superfícies parametrizadas, candidatas a contato, é possível escrever sua contribuição à forma fraca já na forma discretizada em função dos graus de liberdade $\mathbf{d}$ por $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$. Geralmente esse termo é denominado contribuição ao resíduo do modelo. Aqui, para a implementação de modelo de contato entre barras, será composto pelas contribuições das equações (4.34), referente à restrição normal de contato, e (4.81), (4.82), (4.83) ou (4.84), referente à direção tangencial, de acordo com o tipo de método escolhido para imposição da restrição de contato e da avaliação de ocorrência de deslizamento ou não deslizamento.

Para o exemplo do contato entre barras, o vetor $\mathbf{d}$ é dado na equação (4.119) e refere-se aos graus de liberdade utilizados para escrever as expressões de parametrização das superfícies de contato. A linearização consistente do vetor $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$ será denotada por $\Delta(\mathbf{r}_c(\mathbf{d}))$ e é baseada nas equações (4.48) ou (4.49), referentes à restrição normal de contato, e (4.99), (4.100), (4.101) ou (4.102) referentes à direção tangencial, novamente de acordo com o tipo de método escolhido para imposição da restrição de contato e da avaliação de ocorrência de deslizamento ou não deslizamento. Trata-se da contribuição à matriz de rigidez tangente do modelo, pelos efeitos do contato.

Para cada passo de evolução entre duas configurações sucessivas “i” e “i+1”, é necessário determinar um valor nulo de resíduo da forma fraca completa (2.25). Isso geralmente é feito utilizando-se do Método de Newton-Raphson (NR). Para cada iteração do mesmo, deve-se recalculer os valores de $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$ e $\Delta(\mathbf{r}_c(\mathbf{d}))$. Para tal, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Calcular as expressões que descrevem as parametrizações Γ_A e Γ_B , utilizando-se para tal das coordenadas generalizadas $\mathbf{d}$ (ainda não convergidas para a iteração atual do método NR);
2. Resolver o problema dado pelas relações de ortogonalidade (4.8), conforme abordado no item 4.2.1. Com isso, determina-se $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta}_A \quad \bar{\theta}_A \quad \bar{\zeta}_B \quad \bar{\theta}_B]^T$. Esse vetor representa coordenadas convectivas capazes de localizar os pontos materiais nas superfícies A e B, para representação da ação pontual de contato.

3. Avaliar, utilizando-se de $\bar{\mathbf{c}}$, o *gap* $\mathbf{g}$, utilizando-se da equação (4.5). Utilizando-se da equação (4.4), avaliar $\mathbf{n}_B$ utilizando-se de $\bar{\zeta}_B$ e $\bar{\theta}_B$. Calcular o produto escalar $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_B$. O sinal negativo indicará ocorrência de penetração entre as superfícies. Nesse caso, o próximo passo deve ser feito. Caso contrário, identifica-se que não ocorre contato e $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$ e $\Delta(\mathbf{r}_c(\mathbf{d}))$ serão nulos.
4. Supondo-se que na última configuração convergida, ao final do passo anterior, o par de contato que está sendo analisado estivesse aberto, isto é, não ativo, sem penetração entre as superfícies. Nesse caso, assume-se que no passo atual não há ocorrência de atrito, pois trata-se do primeiro contato, e ainda não houve desenvolvimento de tendência de deslizamento que permita quantificar atrito. Assim, a única contribuição para $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$ e $\Delta(\mathbf{r}_c(\mathbf{d}))$ será de esforços normais. Caso já tenha havido contato no passo anterior, será necessário também avaliar as contribuições por contato do atrito. Nesse caso, as contribuições devido ao atrito serão dependentes da ocorrência ou não de deslizamento relativo entre as superfícies. Utilizando-se o Modelo de Coulomb essa condição pode ser avaliada por meio do cálculo e comparação entre F^{try} e F^{max} . Para tal, recomenda-se a seguinte sequência de cálculos:
 - a. Calcular $\mathbf{g}_T^A$;
 - b. Calcular $\mathbf{g}_T^{i+1}$;
 - c. Calcular F^{try} e F^{max} ;
 - d. Se $F^{\text{try}} \leq F^{\text{max}}$, as contribuições de atrito serão para a condição de não deslizamento (*sticking*). Caso contrário, serão de deslizamento (*slipping*).
5. Após a convergência do NR empregado para todo o modelo, é necessário atualizar $\mathbf{g}_T^{i+1}$ de acordo com o nível de deslizamento relativo ocorrido.

Nesse trabalho o leitor nota que é necessário a obtenção de diversas grandezas como $\mathbf{r}_c(\mathbf{d})$ e $\Delta(\mathbf{r}_c(\mathbf{d}))$ que requerem um extenso trabalho algébrico de derivações da função *gap* e *gap* tangencial. Utilizou-se, para tal, o programa MathematicaTM em conjunto com o AceGenTM (ver [65], [75] e [76]). As funções geradas foram exportadas na linguagem “C” e utilizadas com algumas adaptações no código da plataforma GIRAFFE. Uma vez que se produza parametrizações de superfícies Γ_A e Γ_B em função de $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$, é imediato o uso de ferramentas de diferenciação automática que em muito auxiliam esse tipo de modelagem computacional.

4.7 Exemplos numéricos

A seguir são mostrados exemplos numéricos com aplicações do modelo de contato apresentado nesse Capítulo. Os exemplos estão divididos em dois grupos: contato sem atrito e com atrito. Todos estão mostrados em [33] e [34]. Os exemplos foram simulados utilizando-se dos recursos da plataforma GIRAFFE, conforme já abordado no Capítulo 3. Enfatiza-se que em todos os exemplos foi utilizado somente o Método da Penalidade, tanto para a direção normal como para a tangencial.

Todas as figuras que ilustram as configurações dos modelos contêm apenas elementos finitos de barras, cuja malha de elementos finitos é geralmente representada somente ilustrando o eixo adotado. Como a formulação de contato aqui apresentada emprega a parametrização da superfície de contorno considerando a barra como um sólido 3D, optou-se por representar as barras em todas as figuras de forma renderizada, como sólidos 3D, ainda que modelados com elementos de barra.

4.7.1 Contato sem atrito

4.7.1.1 Vigas em balanço – caso 1

Duas barras em balanço AC e BD são consideradas. A Figura 4.18(a) mostra a configuração inicial bem como as posições dos pontos materiais A, B, C e D, que estão localizados nos centroides das seções transversais das barras. Algumas informações relevantes sobre o modelo estão mostradas na Tabela 4.1.

Figura 4.18 – Vigas em balanço em contato – caso 1 (a) configuração inicial (instante 0.0) (b) configuração no instante 2.0

Fonte: [33]

Tabela 4.1 – Dados do modelo: vigas em balanço – casos 1 e 2

Posições dos pontos materiais [m]	A (0.0,2.5,0.0) B (2.5,0.0,0.3) C (3.0,2.5,0.0) D (2.5,3.0,0.3)
Comprimentos dos elementos de viga	0.2 m (corresponde a 15 elementos ao longo de AC e BD)
Dados da seção super elíptica	a = 0.2 m; b = 0.1 m; n = 2
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 1e9$
Módulo de Young	E = 200e9 Pa

Fonte: [33]

Dois passos de carregamento quase-estáticos são considerados, dados por:

- Intervalo 0-1: O ponto A é fixo e o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de (0.0,0.0,-0.3) [m]. Isso induz a interação de contato entre as vigas. O intervalo espacial que as separa inicialmente é fechado, de tal modo que elas se tocam e sofrem flexão. Esse passo é subdividido em 20 incrementos uniformes.
- Intervalo 1-2: O ponto A é submetido a um deslocamento prescrito de (1.5,0.0,0.0) [m]. O ponto B é submetido ao deslocamento (0.0,1.5,0.0) [m]. O efeito causado é a mudança sucessiva dos pontos materiais de contato entre as vigas, uma vez que é induzido deslizamento entre elas. O final do passo é mostrado na Figura 4.18(b). Esse passo é subdividido em 40 incrementos uniformes.

Dois gráficos são mostrados na Figura 4.19. Eles relacionam a evolução do deslocamento dos pontos C e D. Nesse exemplo a máxima penetração ocorrida na região de

contato (no instante final da simulação) é da ordem de 0.01 m, o que é um valor elevado devido às magnitudes elevadas de forças de contato que ocorrem durante a flexão das vigas.

Figura 4.19 – Deslocamentos dos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 1

Fonte: [33]

4.7.1.2 Vigas em balanço – caso 2

Esse exemplo considera a mesma configuração inicial de vigas do caso anterior, bem como as mesmas propriedades já detalhadas. A única diferença são os passos de carregamento quase-estáticos considerados, que dessa vez são os seguintes:

- Intervalo 0-1: O ponto A é fixo e o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de $(0.0, 0.0, -0.05)$ [m]. Esse deslocamento diminui a distância entre as vigas, mas não induz contato entre elas, como no caso anterior. O único movimento observado é uma translação de corpo rígido da viga BD. Esse passo de carregamento é aplicado em um único incremento.
- Intervalo 1-2: O ponto A se mantém fixo. O ponto B é rotacionado de uma magnitude 4π rad na direção y. Essa rotação prescrita cria um cenário de alternância de abertura e fechamento do par de contato. Pode-se observar um efeito de flexão alternada na interação entre as duas vigas, por conta do efeito do contato. A Figura 4.20 mostra a evolução dos deslocamentos dos pontos C e D e a Figura 4.21 mostra os momentos e forças reativas no ponto B, ao longo da evolução da simulação. Esse passo de carregamento foi subdividido em 400 incrementos uniformes para sua aplicação. A necessidade de mais passos em relação ao exemplo anterior decorre da grande rotação imposta no nó B, que leva a dificuldades de convergência. Além disso, a Figura 4.20 e

Figura 4.21 são resultados da interpolação de pontos que representam resultados parciais da simulação, ao fim de cada incremento. Dessa forma, para plotar gráficos com boa precisão é desejável uma amostragem maior de resultados ao longo da simulação. Nesse exemplo, a máxima penetração ocorrida no contato foi em torno de 0.00025 m.

Figura 4.20 – Deslocamentos nos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 2

Fonte: [33]

Figura 4.21 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 2

Fonte: [33]

4.7.1.3 Vigas em balanço – caso 3

Esse exemplo considera a mesma configuração inicial dos exemplos anteriores, descrito na Figura 4.18(a). A única diferença é que agora foi considerado um expoente diferente para a seção transversal super elíptica das vigas ($n=2.5$). Quanto à sequência de passos de carregamento quase-estáticos, foi considerado dessa vez da seguinte forma:

- Intervalo 0-1: o ponto A é mantido fixo, enquanto o ponto B é submetido ao deslocamento prescrito (0.0,0.0,-0.05) [m]. Com isso, o intervalo inicial entre as vigas

é diminuído, mas não é totalmente fechado. Observa-se somente a translação de corpo rígido da viga BD. O passo é resolvido em apenas um incremento.

- Intervalo 1-2: o ponto A é submetido a uma rotação de magnitude 8π rad na direção x, bem como um deslocamento prescrito (1.5,0.0,0.0) [m]. O ponto B é submetido a uma rotação de magnitude 8π rad na direção y bem como um deslocamento prescrito (0.0,1.5,0.0) [m]. Como no caso anterior, é observado um cenário de alternância de abertura e fechamento do par de contato. No entanto, dessa vez se observam mudanças muito mais acentuadas nas posições de contato ao longo da simulação por conta das grandes rotações prescritas. Algumas configurações sucessivas ocorridas ao longo da simulação estão mostradas na Figura 4.22. A Figura 4.23 mostra a evolução do deslocamento dos pontos C e D, durante o intervalo 1-2. A Figura 4.24 mostra a força e momento reativo no ponto B durante o intervalo 1-2. Nesse passo de carregamento foram utilizados 200 incrementos. No entanto, devido às grandes mudanças de rigidez ocorridas ao longo da simulação, ativou-se a rotina de passo auto adaptativo do GIRAFFE, de acordo com as dificuldades encontradas ao longo da simulação. Nesse exemplo, a máxima penetração ocorrida é da ordem de 0.02 m, que é um valor elevado, devido à grande magnitude das forças de contato envolvidas no modelo.

Figura 4.22 – Vigas em balanço – caso 3 (a) instante 1.00 (b) instante 1.05 (c) instante 1.10 (d) instante 1.15 (e) instante 1.20 (f) instante 1.25 (g) instante 2.00

Fonte: [33]

Figura 4.23 – Deslocamento dos pontos C e D para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 3

Fonte: [33]

Figura 4.24 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: vigas em balanço – caso 3

Fonte: [33]

4.7.1.4 Vigas em balanço – caso 4

Esse caso considera a mesma configuração inicial dos casos anteriores para as vigas. No entanto, as seções transversais consideradas são bastante distintas. Agora foi considerada a seção super elíptica com $a = 0.1$, $b = 0.1$; $n = 3.0$. Os passos de carregamento quase-estáticos também diferem dos casos anteriores, e estão descritos a seguir:

- Intervalo 0-1: O ponto A é mantido fixo e o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de $(0.0, 0.0, -0.3)$ [m]. Com isso, é induzido o contato entre as vigas, uma vez que a distância existente entre elas é fechada. Ocorre flexão induzida pelos esforços de contato. O passo é estipulado para ser solucionado em 20 incrementos, mas permitindo ao algoritmo de passo auto adaptativo do GIRAFFE para automaticamente realizar incrementos ou decrementos de passo, de acordo com as facilidades ou dificuldades encontradas ao longo da solução do modelo (ver [46]).
- Intervalo 1-2: o ponto A é mantido fixo e o ponto B é submetido a uma rotação de magnitude 4π rad na direção y bem como um deslocamento prescrito de $(0.0, 1.5, 0.0)$ [m]. O que difere esse caso dos demais é o comportamento ocorrido ao longo desse passo, pois nos anteriores havia alternância entre o contato estar ativo ou não ativo. Nesse caso, o contato permanece ativo ao longo de toda a simulação. Alguns exemplos de configurações intermediárias da simulação estão mostrados na Figura 4.25. A força e momento reativos no ponto B estão ilustrados na Figura 4.26. Esse passo de carregamento foi feito em 200 incrementos, mas permitindo novamente ação do passo auto adaptativo. Nesse exemplo a máxima penetração ocorrida no contato é em torno de 0.0008 m.

Figura 4.25 – Vigas em balanço – caso 4 (a) instante 1.00 (b) instante 1.20 (c) instante 1.40 (d) instante 1.60 (e) instante 1.80 (f) instante 2.00

Fonte: [33]

Figura 4.26 – Força (a) e momento (b) no ponto B para o exemplo numérico: “vigas em balanço – caso 4”

Fonte: [33]

4.7.1.5 Contato entre fibras envolvendo torção

Esse exemplo ilustra uma possibilidade bastante interessante que pode ser simulada com esse tipo de modelo de contato: interação entre fibras de um tecido. Cada fibra é modelada

utilizando-se de elementos finitos de barra. O potencial desse tipo de aplicação é imenso, uma vez que é possível estimar propriedades mecânicas para diversos padrões de tecidos, por meio de experimentos numéricos. Aqui nos limitaremos a um exemplo simplista, apenas para ilustrar a ideia básica da metodologia proposta: a simulação da “montagem” de um tecido, seguida da torção de uma fibra para ilustrar como as mesmas podem interagir.

Assumem-se as fibras com o padrão ilustrado na Figura 4.28(a). As propriedades utilizadas para a montagem de todo o modelo numérico estão descritas na Tabela 4.2, incluindo a parte geométrica e malha. A solução numérica dessa vez foi estabelecida em três passos de carregamento quase-estáticos, descritos a seguir:

- Intervalo 0-1: a configuração inicial é descrita de modo que todas as fibras estejam com intersecção, em um padrão planar, em que a malha tanto da trama como urdume se encontram no plano xy . Durante o primeiro passo de carregamento é prescrito um padrão de deslocamentos na direção z em todos os nós do urdume, conforme ilustrado na Figura 4.27. O objetivo desse padrão é estabelecer as futuras regiões de interação entre as fibras do tecido. O padrão estabelecido de ondas pode induzir a formação de diversos tipos de tecido. No caso atual limitou-se ao mais simples possível, tal que as fibras do urdume se entrelaçam com a trama, sempre passando de cima a baixo, a cada fibra de trama. O final desse passo de carregamento pode ser visto na Figura 4.28(b). Note que existe um intervalo aberto, sem a existência de contato entre as fibras (por construção, pela magnitude de amplitude do padrão senoidal (A) imposta). Esse passo foi solucionado por um único incremento. Uma função senoidal é utilizada para estabelecer a forma do campo de deslocamentos prescritos, conforme ilustrado na Figura 4.27. Além disso, é considerada uma diferença de fase de meio comprimento de onda entre fibras sucessivas do urdume.
- Intervalo 1-2: liberam-se todos os deslocamentos prescritos no primeiro passo, a fim de que possam se estabelecer os devidos pares de contato. Os mesmos ocorrem por conta do padrão pré-estabelecido do tecido desejado, de forma que as fibras se acomodem, apresentando flexão e tração e diversos pontos de contato entre trama e urdume. Durante esse passo os pontos das extremidades das fibras são fixos, mas as rotações na direção x são consideradas livre no urdume. Isso previne a flexão excessiva em torno das pontas das fibras, o que em geral dificulta a convergência, uma vez que se modificaria o padrão

estabelecido durante o intervalo 0-1 para o tecido desejado. Esse passo é resolvido em um único incremento²¹. O resultado desse passo pode ser visto na Figura 4.28(c).

- Intervalo 2-3: É prescrita a rotação de magnitude 2π rad na direção x no ponto material C, ilustrado na Figura 4.28. Com isso, pode-se observar uma sequência de configurações intermediárias que mostram a interação entre as fibras, por conta da torção acumulada em uma única fibra. Todos os contatos são sensibilizados alterando seu comportamento (forças envolvidas e direção das mesmas), a fim de acomodar as rotações prescritas. Isso pode ser visto em detalhes na Figura 4.28(c-g). Durante esse passo são monitoradas as reações vinculares em C (forças e momentos), que estão ilustradas na Figura 4.30. Esse passo foi solucionado requisitando-se subdivisões em 100 incrementos (de início) mas permitindo auto-adaptatividade por facilidade ou dificuldade de convergência ao longo da evolução da simulação.

É interessante notar que a forma elíptica adotada para as fibras leva a forças de contato que induzem momentos não nulos durante a torção induzida. Isso, pois a linha de ação dessas forças promove momento em relação ao centroide da elipse, a cada passo. Com isso, mesmo não sendo considerado o atrito, as forças de contato induzem momento em relação ao centroide, o que não ocorreria para seções circulares. Nesse exemplo a máxima penetração envolvida é de um valor em torno de 0.0005 m, o que é relativamente elevado quando comparado às medidas dos semieixos da elipse (aproximadamente 10% desse valor). Isso ocorre devido aos valores elevados de forças de contato.

²¹ O leitor deve observar que durante esse passo não são inseridos carregamentos, mas somente são liberados deslocamentos que haviam sido prescritos no passo anterior, e que estabeleceram esforços internos em toda a estrutura. Com isso, a aplicação de incrementos não faz sentido. Se há dificuldades na solução desse passo deve-se revisitar o passo anterior, uma vez que possivelmente fora estabelecido um padrão de deslocamentos prescritos muito distante da solução esperada no instante 2.0.

Tabela 4.2 – Dados numéricos do exemplo: contato entre fibras envolvendo torção

Propriedades da trama (<i>weft</i>)	
Número de fibras	3
Dados da seção super elíptica	$a = 0.03 \text{ m}$; $b = 0.01 \text{ m}$; $n = 2$
Módulo de Young	$E = 3.3\text{e}8 \text{ Pa}$
Distância entre as fibras	0.3333 m
Comprimento das fibras (L_{weft})	1.0 m
Refinamento de malha ao longo do comprimento	15 elementos
Amplitude do deslocamento prescrito (A)	0.03 m
Comprimento de onda do deslocamento prescrito (λ)	0.667 m
Propriedades do urdume (<i>warp</i>)	
Número de fibras	5
Dados da seção super elíptica	$a = 0.02 \text{ m}$; $b = 0.005 \text{ m}$; $n = 2$
Módulo de Young	$E = 3.3\text{e}8 \text{ Pa}$
Distância entre as fibras	0.2 m
Comprimento das fibras	1.0 m
Refinamento de malha ao longo do comprimento	15 elementos
Propriedade do par de contato	
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 5\text{e}5$

Fonte: [33]

Figura 4.27 – Trama (*weft*) e urdume (*warp*) e deslocamentos prescritos para formar o tecido

Fonte: [33]

Figura 4.28 – Contato entre fibras envolvendo torção (a) instante 0.00 (b) instante 1.00 (c) instante 2.00 (d) instante 2.25 (e) instante 2.50 (f) instante 2.75 (g) instante 3.00

Fonte: [33]

Figura 4.29 – Contato entre fibras envolvendo torção: detalhes da configuração associada ao instante 3.0

Fonte: [33]

Figura 4.30 – Força (a) e momento (b) no ponto C. Exemplo numérico: contato entre fibras envolvendo torção

Fonte: [33]

4.7.2 Contato com atrito

4.7.2.1 Transição entre deslizamento e rolamento para uma barra com seção transversal circular

Esse exemplo retrata um problema de mecânica clássica que possui solução analítica. O mesmo já foi utilizado como base de comparação em [32] para um caso bastante similar ao aqui apresentado. O modelo proposto está ilustrado na Figura 4.31, que mostra uma barra com seção circular (alinhada com a direção x), com 1.2 m de comprimento e se encontra inicialmente em contato com um conjunto de três barras, alinhadas com a direção y , cujos eixos distam 0.4 m. O conjunto de três barras encontra-se fixo ao longo de toda a sua extensão, que é considerada muito longa.

Figura 4.31 – Exemplo numérico 4.7.2.1 (a) vista lateral (b) vista isométrica

Fonte: [34]

As propriedades de todas as barras estão contidas na Tabela 4.3, bem como outros dados relevantes do modelo. É considerada a ação do campo gravitacional. A barra alinhada na direção x é modelada utilizando-se de três elementos finitos de barra, cada um com três nós. Cada barra alinhada na direção y é modelada utilizando-se de um único elemento finito de barra.

O objetivo desse exemplo é ilustrar como o modelo se comporta em uma transição de contato com deslizamento para o contato com rolamento. Para tal, foi realizada uma simulação de dinâmica transiente. Foi considerada a série temporal de carregamento impulsivo mostrada na Figura 4.32, aplicada em cada um dos três nós centrais dos elementos de barra alinhados com a direção x . O que se observa é que tal barra inicia um movimento de translação na direção y , apresentando deslizamento na região de contato com as outras barras. A presença de atrito

induz movimento rotacional na direção x . No instante 0.2 s a força se anula. Obtiveram-se, nesse instante, os valores de velocidade angular e linear da barra. Os mesmos foram utilizados como condições iniciais para um modelo analítico desenvolvido com as equações de Newton-Euler da mecânica clássica, que considera a barra como um corpo rígido. Tal modelo foi utilizado para comparação com os resultados numéricos no intervalo 0.2 s até 2.0 s.

Figura 4.32 – Exemplo numérico 4.7.2.1: carregamento impulsivo

Fonte: [34]

Tabela 4.3 – Exemplo numérico 4.7.2.1: dados do modelo

Seção transversal das barras (circular)	0.1 m
Módulo de Young (E)	100 GPa
Coeficiente de Poisson (ν)	0.3
Massa específica (ρ)	5,000 kg/m ³
Campo gravitacional	-9.81 k [m/s ²]
Fatores de penalidade normal e tangencial (ϵ_n e ϵ_t)	1E8 N/m
Coeficiente de atrito (μ)	0.25
Passo temporal	0.001 s

Fonte: [34]

A Figura 4.33 e a Figura 4.34 ilustram que o modelo numérico pode capturar de forma absolutamente alinhada com o modelo analítico a transição entre o regime de deslizamento e o regime de rolamento.

Figura 4.33 – Exemplo numérico 4.7.2.1: resultados para a barra alinhada na direção x (a) coordenada y do eixo da barra (b) rotação da barra na direção x

Fonte: [34]

Figura 4.34 – Exemplo numérico 4.7.2.1: resultados para a barra alinhada na direção x (a) velocidade na direção y do eixo da barra (b) velocidade angular na direção x

Fonte: [34]

4.7.2.2 Deslizamento e rolamento de uma barra com seção transversal elíptica

Esse exemplo possui descrição bastante similar ao anterior. A única diferença é que a barra alinhada com a direção x, dessa vez, é considerada com uma seção transversal elíptica, com semieixos $a = 0.1$ m e $b = 0.075$ m, conforme ilustrado na Figura 4.35. A condição inicial do modelo é de equilíbrio instável, uma vez que a barra se encontra com o maior semieixo elíptico na direção vertical. A fim de induzir movimento, é aplicado um carregamento de perturbação muito pequeno na direção y positiva nos nós centrais da barra. Isso induz deslizamento e rolamento lateral em busca de uma configuração estável. Os parâmetros de malha, contato e propriedades das barras são os mesmos do exemplo anterior.

Foi realizada uma simulação de dinâmica transiente, a fim de obter a evolução das configurações ao longo do tempo. O foco é sempre na barra alinhada na direção x, que se comporta como um corpo rígido. Três diferentes valores de coeficiente de atrito foram

considerados para a condição de contato: $\mu = 0.25$, $\mu = 0.1$ e $\mu = 0.01$. A coordenada y do eixo da barra é mostrada na Figura 4.36(a) e a rotação da barra em torno da direção x na Figura 4.36(b). Note que com $\mu = 0.25$ a barra nunca apresenta movimentos alternados, mas simplesmente translada para a direção positiva de y , apresentando velocidade variável. O ângulo de rotação também sempre aumenta. Para valores menores de coeficiente de atrito ocorre deslizamento, induzindo padrão de oscilação no sistema. Esse comportamento também é observado nas velocidades linear e angular da barra, como mostrado na Figura 4.37.

Para esse exemplo também é feito um estudo energético, que busca mostrar a dissipação de energia por conta do atrito de deslizamento. Para o caso de coeficiente de atrito mais elevado foi monitorada a força de atrito (que é a mesma em todas as três regiões de contato). Isso está ilustrado na Figura 4.38(a), na qual é possível visualizar também o limite máximo disponível de atrito, de acordo com a Lei de Coulomb. Observe que o atrito que é solicitado está dentro do envelope de atrito disponível, sem a indução de deslizamento relativo nas regiões de contato. Assim, não ocorre dissipação de energia. Isso pode ser claramente visualizado na Figura 4.38(b), em que foi avaliada também a energia potencial, considerando somente o efeito potencial gravitacional. Para o cálculo da energia cinética, há contribuições de efeitos de translação e de rotação, como um corpo rígido. A energia mecânica é a soma da energia potencial e cinética, de acordo com a definição de mecânica clássica.

Também foi avaliada a dissipação de energia, conforme foi apontado nesse Capítulo, utilizando-se da informação do deslizamento ocorrido em cada região de contato (trabalho dissipativo). Nesse procedimento, para cada configuração convergida (após cada passo temporal) o valor de $\mathbf{g}_{T\text{slide}}^A$ é calculado e multiplicado escalarmente pela força de atrito calculada, para cada par de contato. Esse valor vai sendo acumulado como uma medida de energia dissipada. Para o valor de $\mu = 0.25$, por não haver deslizamento relativo, não se acumula energia dissipada. Por outro lado, para os outros coeficientes de atrito foi feito também o estudo energético e o cálculo de energia dissipada da forma aqui descrita. Os resultados estão ilustrados na Figura 4.39. Note que a perda de energia mecânica ocorrida ao longo do tempo é balanceada pela dissipação de energia, calculada por meio do trabalho de dissipação do atrito. Se for feita a plotagem para cada instante da energia mecânica do sistema e esse valor for comparado com a energia mecânica inicial, obtém-se o mesmo resultado da dissipação calculada utilizando-se de $\mathbf{g}_{T\text{slide}}^A$, a menos de pequenos erros numéricos.

Figura 4.35 – Exemplo numérico 4.7.2.2 (a) vista lateral (b) vista isométrica

Fonte: [34]

Figura 4.36 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para a barra alinhada na direção x (a) coordenada y do eixo da barra (b) rotação da barra na direção x

Fonte: [34]

Figura 4.37 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para a barra alinhada na direção x (a) velocidade na direção y do eixo da barra (b) velocidade angular na direção x

Fonte: [34]

Figura 4.38 – Exemplo numérico 4.7.2.2: resultados para $\mu = 0.25$. (a) Força de atrito (em cada região de contato) (b) Estudo energético

Fonte: [34]

Figura 4.39 – Exemplo numérico 4.7.2.2: (a) Estudo energético para $\mu = 0.10$ (b) Estudo energético para $\mu = 0.01$

Fonte: [34]

4.7.2.3 Vigas em balanço em contato com atrito induzindo deslizamento e rolamento

Esse exemplo envolve a interação de contato entre duas vigas em balanço que estão ilustradas, em sua configuração de referência, na Figura 4.40(a). O objetivo particular do exemplo é mostrar como o modelo se comporta quando ocorrem sucessivas mudanças nos pontos materiais onde a interação de contato atua. Em particular, aqui é explorado um cenário que induz uma cinemática mais complexa que os exemplos anteriores.

As vigas inicialmente retilíneas AB e CD são ortogonais. As seções transversais são super elipses e o material de ambas é o mesmo. Os dados que detalham e permitem a reprodução desse exemplo estão na Tabela 4.4. Considera-se, de início, a viga AB engastada no ponto B e a viga CD, engastada no ponto D. Todo o restante do domínio encontra-se livre. Note que

inicialmente as vigas não apresentam interação de contato. A fim de induzir a interação por contato, são executados sequencialmente dois passos de carregamento, quase estáticos:

- Intervalo 0-1: o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de $-0.3 \mathbf{k}$ [m], induzindo o início da interação por contato, assim como ilustrado na Figura 4.40(b-c). O ponto D se mantém em sua posição original.
- Intervalo 1-2: o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de $-1.5 \mathbf{i}$ [m] e sua rotação na direção y é tornada livre, com o objetivo de procurar induzir rotação em torno do eixo y na viga AB em função da força de atrito que se desenvolve ao longo da evolução do modelo. O ponto D é submetido a um deslocamento prescrito de $-1.5 \mathbf{j}$ [m]. Tais movimentos acabam por induzir a ocorrência de atrito com deslizamento. Foram comparados os comportamentos do sistema para diferentes valores de coeficiente de atrito: $\mu = 0.15, \mu = 0.25, \mu = 0.5$ e $\mu = 1.0$.

Figura 4.40 – Exemplo numérico 4.7.2.3 (a) vista isométrica da configuração inicial (b) vista do plano yz (instante 1.0) (c) vista do plano xz (instante 1.0)

Fonte: [34]

A Figura 4.41(a) mostra a evolução da rotação do ponto B na direção y. Note que para o valor de $\mu = 0.15$ essa rotação é praticamente nula, uma vez que o atrito que ocorre acaba não sendo suficiente para induzir o rolamento sucessivo da viga AB sobre a viga CD. Entretanto, para valores de coeficiente de atrito mais elevados ocorre tal rolamento, como mostrado na Figura 4.41(a). Quanto maior o valor do coeficiente de atrito, menor é o deslizamento relativo evidenciado na direção x. No entanto, uma vez que o ponto D também se move de forma prescrita, ele também contribui para o deslizamento entre as vigas na direção y. Uma vez que o presente modelo de contato considera uma única lei de atrito vetorial para todas

as componentes envolvidas nessa interação de contato, o deslizamento na direção y influencia na possibilidade de rolamento da viga AB na viga CD²².

Por fim a Figura 4.41(b) mostra a evolução da coordenada y do ponto C. Para valores de atrito pequenos, não há praticamente influência da interação de contato nesse resultado. No entanto, para valores de atrito mais elevados, surgem dois efeitos físicos interessantes: alternância dos padrões de rolamento de AB em CD e uma deflexão mais acentuada da viga CD, devido à grande componente de atrito que surge na direção y .

Tabela 4.4 – Exemplo numérico 4.7.2.3: dados do modelo

Coordenadas dos pontos extremos das barras [m]	A = (2.5, 3.0, 0.3), B = (2.5, 0.0, 0.3) C = (3.0, 2.5, 0.0), D = (0.0, 2.5, 0.0)
Seção transversal da barra AB	a = 0.1 [m], b = 0.1 [m], n = 2.5
Seção transversal da barra CD	a = 0.06 [m], b = 0.06 [m], n = 2.0
Módulo de Young (E)	200 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3
Malha ao longo de AB	15 elementos
Malha ao longo de CD	15 elementos
Fatores de penalidade normal e tangencial (ϵ_n e ϵ_t)	1E9 N/m
Passos temporais no intervalo 0-1	20 passos (adaptativo)
Passos temporais no intervalo 1-2	200 passos (adaptativo)

Fonte: [34]

²² Esse tratamento vetorial para o atrito entre vigas nem sempre é empregado em modelos de interação de contato. Por exemplo, o leitor pode observar que na referência [27] é considerada total independência para avaliar deslizamento ou não deslizamento para diferentes direções, associadas com orientações dos eixos das barras. Pode-se, inclusive, adotar diferentes coeficientes de atrito para as direções distintas. Tal tratamento foi melhorado em trabalhos posteriores, como em [30], em que é feita a composição vetorial para decisão de deslizamento ou não deslizamento de forma mais realista, mas que acabou criando termos adicionais no modelo. O presente modelo de contato sempre trata a questão de decisão de deslizamento ou não deslizamento independente de qualquer direção particular e de forma vetorial.

Figura 4.41 – Exemplo numérico 4.7.2.3 (a) rotação na direção y do ponto B (b) coordenada y do ponto C

Fonte: [34]

4.7.2.4 Viga bastante flexível interagindo com deslizamento e rolamento com dois trilhos rígidos

O objetivo desse exemplo é ilustrar o comportamento do modelo de contato quando utilizado em conjunto com estruturas bastante flexíveis. Em particular, aqui é explorada a questão de sucessivas ocorrências e perdas de contato ao longo da evolução da simulação. Foi considerada a geometria inicial ilustrada na Figura 4.42. Uma viga inicialmente retilínea ACB é posicionada transversalmente aos trilhos DEF e GHI. Esses possuem uma parte inclinada (DE e GH) e uma parte horizontal (EF e HI). Todas os dados geométricos, bem como outras informações que permitem a reprodução desse exemplo estão ilustrados na Tabela 4.5.

Figura 4.42 – Exemplo numérico 4.7.2.4: configuração inicial

Fonte: [34]

Ambos os trilhos estão completamente fixos e se comportam como corpos rígidos. Sua superfície exterior, para efeitos de interação de contato, é modelada utilizando-se da mesma parametrização aqui apresentada para utilização de elementos finitos de barra super elípticas, como detalhado na Tabela 4.5. A viga ACB é feita de um material bastante flexível, representando uma barra de silicone. No início não há contato envolvido. Na simulação realizada foi considerado comportamento de dinâmica transiente, em que o único carregamento externo empregado é o peso próprio da viga ACB, que de início sofre queda livre e depois inicia sua interação com os trilhos. A simulação envolveu um intervalo total de 10 s.

O que é observado e pode ser visto na Figura 4.43 é que inicialmente ocorre alternância de rolamento e deslizamento, e sucessivos impactos. A viga ACB desce interagindo com os trilhos, sempre oscilando até o final da simulação, devido à sua grande flexibilidade. O sistema acaba dissipando energia ao longo do tempo, pelos deslizamentos envolvidos. Parte da energia potencial inicial acaba sendo armazenada como deformação da viga ACB, que ao final possui grande flexão. Foi monitorada a evolução temporal do ponto central da viga ACB, ilustrado na Figura 4.44.

Tabela 4.5 – Exemplo numérico 4.7.2.4: dados do modelo

Coordenadas de pontos relevantes do modelo [m]	A = (0.3, -1.5, 0.2), B = (0.3, 1.5, 0.2), C = (0.3, 0.0, 0.2) D = (0.0, -1.0, 0.0), E = (2.0, -1.0, -0.2), F = (4.0, -1.0, -0.2) G = (0.0, 1.0, 0.0), H = (2.0, 1.0, -0.2), I = (4.0, 1.0, -0.2)
Seção transversal da viga ACB	a = 0.08 [m], b = 0.1 [m], n = 2.4
Seção transversal dos trilhos DEF e GHI	a = 0.1 [m], b = 0.1 [m], n = 2.4
Módulo de Young (E)	10 MPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.49
Massa específica (ρ)	2,000 kg/m ³
Campo gravitacional	-9.81 k [m/s ²]
Malha considerada em ACB	15 elementos de vigas com 3 nós cada
Fatores normal e tangencial de contato (ϵ_n e ϵ_t)	1E6 N/m
Coefficiente de atrito (μ)	0.4
Passo de tempo	0.001 s (constante)

Fonte: [34]

Figura 4.43 – Exemplo numérico 4.7.2.4: evolução temporal da configuração do sistema

Fonte: [34]

Figura 4.44 – Exemplo numérico 4.7.2.4: (a) coordenadas do ponto C (b) rotação do ponto C na direção y

Fonte: [34]

4.7.2.5 Cama elástica

Esse exemplo ilustra uma aplicação mais complexa para os modelos aqui desenvolvidos: a simulação da interação de um projétil com uma cama elástica. A ideia é modelar a cama elástica como um conjunto de fibras entrelaçadas, o que já categoriza um problema que envolve múltiplas regiões de contato simultâneo. Para compor a cama elástica desejada, adotou-se o padrão geométrico da região quadrada ABCD, ilustrada na Figura 4.45(a). As linhas ilustradas representam os eixos de barras que representam as fibras da cama elástica. Um projétil estruturado com barras, da forma EFGH, é posicionado de acordo com o ilustrado na Figura 4.45. Tanto as fibras que compõem a cama elástica como o projétil são modelados como barras. As propriedades geométricas e outras informações para reprodução do modelo estão na Tabela 4.6. A altura h do projétil em relação à cama elástica é medida considerando-se as posições dos eixos no plano base das barras, de acordo com a Figura 4.45(b).

A solução do modelo é feita em duas etapas distintas: montagem da cama elástica e interação entre o projétil e a cama elástica.

Montagem da cama elástica

Durante essa fase o projétil é considerado fixo no espaço. A cama elástica é inteira estabelecida considerando-se uma modelagem quase estática. O procedimento utilizado para estabelecer o padrão de entrelaçamento entre as fibras é semelhante ao que foi ilustrado no exemplo 4.7.1.5. As fibras da cama elástica foram consideradas como um material bastante

flexível (representando propriedades compatíveis com um elastômero). Elas possuem malha na configuração de referência (livre de tensões) como barras retilíneas, apresentando interferências geométricas. As fibras longitudinais e transversais são consideradas todas fixas nas extremidades e alinhadas no mesmo plano. As regiões de interferência não possuem nós comuns para fixar as fibras entre si, uma vez que sua montagem é feita na sequência, considerando interação de contato entre as fibras.

- Passo 1: as fibras alinhadas na direção y sofrem um campo de deslocamentos prescritos seguindo um padrão oscilatório de comprimento de onda compatível com o desejado e esperado na formação da cama elástica. As fibras alinhadas na direção x não se movem durante esse passo.
- Passo 2: o contato entre as fibras é ativado e um campo reverso de deslocamentos prescritos é estabelecido às fibras alinhadas na direção y , no entanto com metade da amplitude prescrita no primeiro passo. Isso induz a interação de contato entre todas as fibras em uma posição muito próxima da esperada após a montagem da cama elástica.
- Passo 3: todos os deslocamentos prescritos nos passos anteriores são liberados, isto é, agora se tornam graus de liberdade para o modelo. Isso leva o sistema a escolher sua posição natural para as fibras, apresentando o nível de deformação necessário para estabelecer a montagem entrelaçada, envolvendo múltiplas regiões de contato. Os pontos das extremidades das fibras são todos mantidos fixos durante essa etapa, mas livres para rotacionar no plano de flexão de cada fibra, em que ocorre a ondulação.
- Passo 4: todas as extremidades das fibras são engastadas. Além disso, o carregamento do peso próprio é ativado e as fibras apresentam leve grau de deflexão por esse efeito. Ao fim desse passo todas as fibras apresentam certo nível de pré-tensão, por conta do padrão estabelecido de ondulações, induzido pelos contatos. Além disso, o efeito do peso próprio também introduz uma contribuição de pré-tensão nas fibras.

Interação entre o projétil e a cama elástica

Essa etapa considera a modelagem da queda livre do projétil, seguida da interação de contato entre ele e a cama elástica. É realizada por meio de uma análise dinâmica transiente. O impacto entre o projétil e as fibras que compõem a cama elástica é seguido de restauração elástica das fibras, que lançam o projétil de volta para cima. São considerados dois cenários distintos comparando-se dois diferentes valores de coeficiente de atrito em todos os contatos:

$\mu = 0.2$ e $\mu = 0.0$. A Figura 4.48 ilustra alguns quadros temporais mostrando a evolução das sucessivas configurações do sistema. É mostrado em escala de cores o nível do esforço de tração em cada fibra.

É possível realizar um estudo comparativo entre o cenário que envolve atrito e o que não envolve. Note na Figura 4.48 que o atrito entre as fibras colabora evitando o deslizamento relativo entre elas, que é bastante pronunciado em algumas regiões próximas à interação do projétil com a cama elástica, por exemplo no instante 0.4 s. A Figura 4.47(a) ilustra a coordenada z do projétil ao longo do tempo. São mostrados resultados comparativos para cenários com e sem atrito nos contatos. Eles se mostram muito similares. A Figura 4.47(b) mostra a força de tração total que ocorre em cada uma das laterais da cama elástica, onde as fibras são fixas. Note que essa solicitação varia ao longo do tempo, muito em função da ação do projétil na cama elástica. É possível observar o nível de esforço máximo, associado à situação de máximo deslocamento do projétil na vertical, quando ocorre deflexão máxima das fibras.

Uma vez que o projétil é lançado de volta para cima, as fibras apresentam algum movimento residual na vertical. Ainda é possível observar movimentos residuais de deslizamento relativo entre as fibras para o caso sem atrito. Uma última observação de resultados deve ser feita: note que no caso sem atrito uma pequena rotação na direção z é induzida no projétil, o que não ocorre no caso com atrito. Isso pode ser visto nos quadros finais da Figura 4.48.

Figura 4.45 – Exemplo numérico 4.7.2.5: descrição geométrica (a) vista de topo (b) vista lateral

Fonte: [34]

Figura 4.46 – Exemplo numérico 4.7.2.5: configuração inicial

Fonte: [34]

Figura 4.47 – Exemplo numérico 4.7.2.5: (a) coordenada z do projétil ao longo do tempo (b) tração total aplicada a cada lateral da cama elástica ao longo do tempo

(a)

(b)

Fonte: [34]

Tabela 4.6 – Exemplo numérico 4.7.2.5: dados do modelo

Número de fibras (longitudinais e transversais)	20
Dados da seção transversal das fibras	$a = 0.0025 \text{ [m]}$, $b = 0.0025 \text{ [m]}$, $n = 2$
Dados da seção transversal do projétil	$a = 0.025 \text{ [m]}$, $b = 0.025 \text{ [m]}$, $n = 2$
Módulo de Young	$E = 10 \text{ MPa}$
Massa específica (ρ)	$1,500 \text{ kg/m}^3$
Campo gravitacional	$-9.81 \text{ k [m/s}^2\text{]}$
Fatores de penalidade normal e tangencial (ϵ_n e ϵ_t)	$3.5\text{E}3 \text{ N/m}$
Passo temporal	0.001 s (adaptativo de acordo com dificuldades numéricas)
Comprimento da lateral da cama elástica (L)	1.0 m
Comprimento da lateral do projétil (b)	$0.1\sqrt{2} \text{ m}$
Altura do projétil em relação ao plano base da cama elástica (h)	0.1275 m
Refinamento de malha ao longo de cada fibra	100 elementos
Obs: nesse modelo foi considerada a ação de empuxo de um fluido que envolve todo o modelo (água), o que acaba ocasionando em um campo gravitacional efetivo de intensidade inferior.	

Fonte: [34]

Figura 4.48 – Exemplo numérico 4.7.2.5: Quadros temporais ilustrando a evolução do modelo (coluna da esquerda possui os casos de contato sem atrito, coluna da direita possui os casos com atrito). A escala de cores representa o esforço de tração em cada fibra.

Fonte: [34]

5 Formulação de contato *master-slave* entre esferas e superfícies no espaço

Aqui é apresentado o desenvolvimento matemático para estabelecimento das contribuições da forma fraca e operador tangente para a formulação de contato *master-slave*, entre esferas e superfícies no espaço. O conteúdo aqui apresentado deu origem às publicações [32] e [45].

O Capítulo apresenta inicialmente uma descrição do par de contato e da métrica utilizada para quantificar uma eventual penetração de uma esfera em uma superfície, bem como o tratamento empregado quando ocorre tal penetração. Na sequência, é apresentada a formulação *master-slave* para modelagem de contato entre esferas e superfícies. São apresentadas diversas parametrizações para compor pares de contato, incluindo superfícies rígidas e flexíveis. Por fim, é feita a aplicação do modelo, e são apresentados alguns exemplos numéricos.

5.1 Descrição geométrica do modelo

A descrição geométrica do presente modelo parte da descrição de duas superfícies no espaço, assim como no caso da formulação apresentada no Capítulo 4. No entanto, no atual modelo, assume-se que uma das superfícies seja esférica, aqui denominada simplesmente “esfera”, enquanto que a segunda superfície é mantida de forma genérica, representada por Γ e nomeada “*master*”, como mostrado na Figura 5.1.

A superfície esférica pode ser utilizada para representar o contorno de uma partícula esférica em um ambiente de Método dos Elementos Discretos. Analogamente, pode representar o contorno de uma esfera rígida em um ambiente de dinâmica de multicorpos. Além disso, em um contexto de aplicação em conjunto com o Método dos Elementos Finitos, pode representar uma superfície rígida em torno de um nó (é comum nesse contexto a denominação *offset*). Se atribuídas aos nós de um elemento de casca, um conjunto de superfícies esféricas pode representar a espessura da casca de forma aproximada. Se atribuída ao nó de um elemento de barra, pode representar também de forma aproximada o contorno de uma seção transversal circular. Isso foi a base de desenvolvimento de [32], o que está ilustrado na Figura 5.2.

Figura 5.1 – Descrição geométrica do modelo de contato na configuração “i”

Fonte: [45]

Figura 5.2 – Atribuição de um conjunto de esferas para representação aproximada do contorno de uma barra com seção transversal circular

Fonte: [32]

Note que um caso limite para aplicação em Método dos Elementos Finitos é o raio da esfera ser nulo. Nesse caso, se recai na clássica formulação de contato *master-slave*, em que o ponto central S da esfera representa o ponto *slave*. Assim, a formulação aqui apresentada pode ser interpretada como uma melhoria à *master-slave*, pois permite acomodar uma superfície rígida em torno do ponto S . Enfatiza-se que é levada em consideração a cinemática dessa superfície esférica de acordo com o movimento do ponto S , considerando-se translações e rotações de corpo rígido como graus de liberdade associados a S e que influenciam no movimento da esfera.

Por conta da discussão anterior, a partir desse ponto a superfície esférica também será denominada *slave*. O raio da esfera é r . A superfície é rigidamente conectada ao ponto S , cuja posição é dada por $\mathbf{x}_S$. O movimento de $\mathbf{x}_S$ é descrito pela descrição Lagrangiana atualizada,

de acordo com o que foi mostrado no item 3.3.1. Note que a descrição completa da superfície esférica em uma dada configuração demanda não somente a posição $\mathbf{x}_S$, mas também a orientação da superfície, a qual pode ser dada pelo tensor rotação $\mathbf{Q}_S$, calculado com o vetor rotação de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}_S$, associado ao centro da esfera S – ver equação (3.1) e (3.2). Com isso, a descrição da evolução da superfície *slave* requer seis graus de liberdade (movimento de uma superfície rígida). Para uma dada configuração “i”, os graus de liberdade incrementais para essa descrição cinemática podem ser utilizados para compor o vetor de seis dimensões $\mathbf{d}_S^\Delta$ dado por:

$$\mathbf{d}_S^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}_S^\Delta \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Seja o vetor de coordenadas convectivas $\mathbf{c} = [\zeta \quad \theta]^T$, em que ζ e θ são utilizados para parametrizar a superfície *master* Γ , candidata a interagir com a esfera. Essa superfície é genérica e sua parametrização é dependente de um vetor N-dimensional $\mathbf{d}_M$, o qual contém N valores de coordenadas generalizadas que representam os graus de liberdade que descrevem o movimento da superfície Γ no espaço. Com isso, pode-se escrever que $\Gamma = \hat{\Gamma}(\mathbf{c}, \mathbf{d}_M)$. A fim de tornar a notação da formulação desse texto mais compacta, define-se a seguir um vetor com (N+6) dimensões, dado por: $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_S^T \quad \mathbf{d}_M^T]^T$. Esse contém toda a informação relevante de graus de liberdade que afetam o par de contato, não sendo mais feita a distinção entre os graus de liberdade que provêm do movimento da esfera e aqueles que governam o movimento da superfície Γ .

5.1.1 Problema de mínima distância

Arbitrando-se um conjunto de valores para compor o vetor das coordenadas generalizadas $\mathbf{d}$, obtém-se o vetor $\bar{\mathbf{d}}$. Isso determina a posição do centro da esfera $\mathbf{x}_S$ bem como define a superfície Γ . Procura-se, a seguir, determinar um conjunto de coordenadas convectivas $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta} \quad \bar{\theta}]^T$, associadas à mínima distância entre o centro da esfera $\mathbf{x}_S$ e a superfície Γ . Assume-se que Γ seja uma parametrização que represente uma superfície contínua e suave (com derivadas definidas em relação a ambas as coordenadas convectivas em todo o domínio de interesse). As direções tangentes à superfície são dadas por $\Gamma_{,\zeta}$ e $\Gamma_{,\theta}$. Com isso, é possível associar o problema de mínima distância proposto ao problema da determinação de $\bar{\mathbf{c}}$, tal que valham as relações de ortogonalidade $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \begin{cases} \Gamma_{,\zeta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) = 0 \\ \Gamma_{,\theta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

O conjunto de equações (5.2) pode ser resolvido para determinar $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta} \ \bar{\theta}]^T$. Para tal, pode-se utilizar por exemplo o Método de Newton-Raphson. Para tal, é necessário utilizar-se do Jacobiano dado por:

$$\mathbf{r}_{,c} = \begin{bmatrix} \Gamma_{,\zeta\zeta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) - \Gamma_{,\zeta} \cdot \Gamma_{,\zeta} & \Gamma_{,\zeta\theta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) - \Gamma_{,\zeta} \cdot \Gamma_{,\theta} \\ \Gamma_{,\theta\zeta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) - \Gamma_{,\theta} \cdot \Gamma_{,\zeta} & \Gamma_{,\theta\theta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) - \Gamma_{,\theta} \cdot \Gamma_{,\theta} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Com isso, é possível estabelecer um processo iterativo em que k representa o índice da iteração e $d\bar{\mathbf{c}}_k$ o incremento a ser dado ao vetor de coordenadas convectivas em certa iteração k . Para cada iteração vale:

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_{,c})_k d\bar{\mathbf{c}}_k = -\mathbf{r}_k \\ \bar{\mathbf{c}}_{k+1} = \bar{\mathbf{c}}_k + d\bar{\mathbf{c}}_k \end{cases} \quad (5.4)$$

A visualização geométrica da solução do problema de mínima distância pode ser vista na Figura 5.1. Uma vez obtida a solução $\bar{\mathbf{c}}$, é possível definir a direção normal de contato $\mathbf{n}$, assumindo-se que esta seja a mesma normal da superfície Γ avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}}{\|\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}\|_{\bar{\mathbf{c}}}}. \quad (5.5)$$

Para testar a condição de penetração é possível definir a função *gap* normal $\mathbf{g}_n$:

$$\mathbf{g}_n = (\mathbf{x}_S - \Gamma) - r\mathbf{n}. \quad (5.6)$$

É possível se utilizar da relação $\mathbf{g}_n = g_n \mathbf{n}$ e definir uma grandeza escalar g_n para medição do *gap*. O sinal dessa grandeza indica penetração da esfera na superfície *master* (sinal negativo) ou não penetração (sinal positivo). Tem-se:

$$g_n = (\mathbf{x}_S - \Gamma) \cdot \mathbf{n} - r. \quad (5.7)$$

Com isso, o sinal de g_n pode ser utilizado como um tomador de decisão (no contexto de programação, esse tipo de variável é chamado de *flag*) para detectar contato em uma rotina

computacional. No caso da ocorrência de penetração, as contribuições do modelo matemático aqui descritas devem ser incluídas na forma fraca do modelo (2.25) e sua linearização consistente (2.30). A seguir é desenvolvida, com base nas definições já feitas, a formulação de contato propriamente dita.

Note que a solução de (5.2) também pode ser feita utilizando-se um ferramental de otimização, assim como foi comentado no Capítulo anterior. Nesse caso, a busca de solução se dá por um problema de apenas duas variáveis, muito mais simples do que o da formulação *master-master* entre duas superfícies, em que há quatro variáveis. No entanto, mesmo com sua simplicidade há situações em que não é possível garantir convexidade²³.

5.2 Contribuições de contato devido à ação normal

Deseja-se estabelecer o vínculo mecânico que garanta a não penetração da esfera na superfície, o que pode ser representado por meio da seguinte inequação:

$$[g_n]_{\bar{c}} \geq 0. \quad (5.8)$$

Para impor (5.8) no modelo é necessário incluir termos referentes à restrição de contato como contribuições à forma fraca, bem como sua linearização consistente. Com relação à ação normal de contato é definido o potencial W_n . A imposição da restrição é feita por meio do Método da Penalidade, utilizando-se de um fator de penalidade ϵ_n tal que:

$$W_n = \frac{1}{2} \epsilon_n \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_n. \quad (5.9)$$

²³ Um exemplo muito simples de se imaginar é o caso em que a esfera *slave* se contra concêntrica com outra superfície esférica, que descreve Γ . Nesse caso, qualquer ponto da superfície de Γ é equidistante do centro $\mathbf{x}_S$. Portanto, todo ponto na superfície Γ é solução de (5.2) e não há convexidade.

A primeira variação de W_n leva à contribuição do modelo de contato à forma fraca (2.25), dada por:

$$\delta W_n = \epsilon_n \mathbf{g}_n \cdot \delta \mathbf{g}_n , \quad (5.10)$$

onde o símbolo $\delta(\dots)$ representa a variação da grandeza $(\dots)$. A variação $\delta \mathbf{g}_n$ é dada por:

$$\delta \mathbf{g}_n = (\delta \mathbf{x}_S - \delta \Gamma) - r \delta \mathbf{n} . \quad (5.11)$$

Objetiva-se escrever $\delta \mathbf{g}_n$ em função apenas das variáveis independentes, ou seja, dos graus de liberdade do modelo envolvidos na descrição da superfície *master* e da esfera S, ou seja, do vetor $\mathbf{d}$. No presente contexto a função gap $\mathbf{g}_n = \hat{\mathbf{g}}_n(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Portanto, a variação da função $\mathbf{g}_n$ deverá ser escrita em função de $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$. No entanto, deve-se atentar ao fato de que $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$ não são independentes, mas estão vinculados pelas próprias relações de ortogonalidade (5.2), que são impostas como parte da solução desejada para o vínculo de contato. Portanto, é necessário determinar uma relação entre $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$. Para tal, realiza-se a linearização total da equação (5.2), levando a

$$\mathbf{r}_{,c} \Delta \mathbf{c} + \mathbf{r}_{,d} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{o}_2 , \quad (5.12)$$

em que o símbolo $\Delta(\dots)$ representa a linearização da grandeza $(\dots)$. Com isso, pode-se obter:

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{d} , \quad (5.13)$$

em que

$$\mathbf{D} = -(\mathbf{r}_{,c})^{-1} \mathbf{r}_{,d} . \quad (5.14)$$

Com $\mathbf{r}_{,c}$ conhecida na equação (5.3) e

$$\mathbf{r}_{,d} = \begin{bmatrix} \Gamma_{,\zeta d} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) + \Gamma_{,\zeta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma)_{,d} \\ \Gamma_{,\theta d} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma) + \Gamma_{,\theta} \cdot (\mathbf{x}_S - \Gamma)_{,d} \end{bmatrix} . \quad (5.15)$$

Utilizando-se da similaridade entre as operações de variação e linearização, é possível escrever: $\delta \mathbf{c} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}$. Finalmente, pode-se escrever $\delta \mathbf{g}_n$ pela expressão:

$$\delta \mathbf{g}_n = \mathbf{g}_{n,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{n,d} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{g}_{n,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{n,d}) \delta \mathbf{d}, \quad (5.16)$$

que pode ser mais detalhada utilizando-se da equação (5.11), o que leva a:

$$\delta \mathbf{x}_S - \delta \Gamma = \mathbf{x}_{S,d} \delta \mathbf{d} - \Gamma_{,c} \delta \mathbf{c} - \Gamma_{,d} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{x}_{S,d} - \Gamma_{,c} \mathbf{D} - \Gamma_{,d}) \delta \mathbf{d} \quad \text{e} \quad (5.17)$$

$$\delta \mathbf{n} = \mathbf{n}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{n}_{,d} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{n}_{,c} \mathbf{D} - \mathbf{n}_{,d}) \delta \mathbf{d}. \quad (5.18)$$

Na contribuição à forma fraca, descrita em (5.10), é possível escrever de forma compacta:

$$\begin{aligned} \delta W_n &= \epsilon_n \mathbf{g}_n \cdot (\mathbf{g}_{n,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{n,d}) \delta \mathbf{d} = \\ &= \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n [\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T + \mathbf{g}_{n,d}^T] \mathbf{g}_n = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Note que a equação anterior foi simplificada, pois o termo $\mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n$ é nulo devido à restrição (5.2). É necessário ser cuidadoso, uma vez que apesar de esse termo ser nulo, ele poderia possuir linearização não nula. A contribuição à linearização consistente da forma fraca devido à ação normal de contato é denotada por $\Delta(\delta W_n)$. Realizando essa operação, obtém-se:

$$\Delta(\delta W_n) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n [\Delta(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n) + \Delta(\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n)]. \quad (5.20)$$

Cada um dos termos é desenvolvido a seguir:

$$\Delta(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n) = \Delta(\mathbf{D}^T) \mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n + \mathbf{D}^T \Delta(\mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n); \quad (5.21)$$

$$\Delta(\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n) = (\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n)_{,c} \mathbf{D} \Delta \mathbf{d} + (\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n)_{,d} \Delta \mathbf{d}. \quad (5.22)$$

Focando na equação (5.21), seu primeiro termo será nulo diretamente devido às relações de ortogonalidade (5.2). O segundo termo, por sua vez, envolve a linearização $\Delta(\mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n)$, a qual também é nula, devido à restrição dada em (5.12), a qual impõe uma relação entre $\Delta \mathbf{c}$ e $\Delta \mathbf{d}$. Com isso, é possível concluir que a contribuição total à linearização consistente proveniente do termo $\delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \Delta(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \mathbf{g}_n) = 0$, o que simplifica substancialmente o equacionamento. Finalmente, pode-se escrever a expressão completa para a linearização consistente da contribuição à forma fraca do termo de contato normal:

$$\Delta(\delta W_n) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left[\left(\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n \right)_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \mathbf{g}_n \right)_{,d} \right] \Delta \mathbf{d}. \quad (5.23)$$

As expressões (5.19) e (5.23) estão escritas exatamente da forma que foram implementadas computacionalmente. Para os exemplos ilustrados aqui, todas as programações das funções da plataforma GIRAFFE para cálculo de contribuição ao resíduo e matriz de rigidez tangente foram escritas com códigos gerados com diferenciação automática, com as plataformas MathematicaTM e AceGenTM (ver por exemplo [65] e [76]). Enfatiza-se que esse tipo de ferramenta torna possível a utilização de parametrizações complexas para estabelecer as superfícies de contato, o que seria inviável para um desenvolvimento algébrico sem esse tipo de recurso.

5.3 Contribuições de contato devido à ação tangencial

Da mesma forma que no Capítulo 4 foi necessário redefinir a função *gap* tangencial em relação ao que é classicamente definido (ver item 4.4), novamente aqui tal tarefa deverá ser feita. Tal necessidade é alinhada aos objetivos desse modelo, que contemplam a descrição da cinemática da superfície esférica em contato com uma superfície *master* genérica, mas considerando-se o movimento geral de um corpo rígido associado à esfera. Dessa forma, muito do que foi visto no Capítulo 4 será agora aproveitado, mas considerando-se o caso particular do movimento da esfera.

5.3.1 Gênese das ideias da formulação

As ideias que culminaram no trabalho [45] e que estão aqui apresentadas foram primeiramente desenvolvidas em [32], de forma menos geral, mas já contendo a mesma essência. É possível visualizar na Figura 5.3 um exemplo que permite entender a gênese do raciocínio envolvido no tratamento tangencial do modelo de contato. Trata-se da descrição cinemática do contato entre um cilindro rígido e uma superfície plana rígida, em uma análise de um corte do cilindro, isto é, assume-se um modelo bidimensional.

Figura 5.3 – Exemplo do movimento de um cilindro rígido sobre uma superfície plana (a) deslizamento puro (b) deslizamento e rolamento

Fonte: [32]

Denota-se por $C(i)$ e $C(i+1)$ as posições de ocorrência de contato entre o cilindro e a superfície plana, respectivamente nas configurações “i” e “i+1”. As posições $O(i)$ e $O(i+1)$ localizam o centro do cilindro nas configurações “i” e “i+1”. Além disso, a fim de observar a possível ocorrência de rolamento, é mapeado um ponto material A no cilindro. Denotam-se por $A(i)$ e $A(i+1)$ as posições do ponto material A , respectivamente nas configurações “i” e “i+1”.

Quando ocorre deslizamento puro, conforme mostrado na Figura 5.3(a), a distância entre $C(i)$ e $C(i+1)$ corresponde diretamente à medida de deslizamento, que também é dada pela distância entre $O(i)$ e $O(i+1)$.

Já na Figura 5.3(b), ilustra-se um cenário em que há movimento de translação e rotação do cilindro. A translação pode ser medida pela distância entre os centros $O(i)$ e $O(i+1)$, dada por Δs . Já a rotação, em particular um ângulo $\Delta\phi$, é caracterizada pelo movimento do ponto material A que é ilustrado na Figura 5.3(b). Observe que o ponto material do cilindro que apresentava contato com a superfície plana na configuração “i” não é o mesmo na configuração “i+1”. O valor do deslizamento ocorrido, nesse caso, é dado pela diferença $\Delta s - r\Delta\phi$.

Note que no caso em que $\Delta\phi = 0$ seria recuperado o valor do cenário de deslizamento puro. Já o caso em que $\Delta s = r\Delta\phi$ estaria associado ao caso de rolamento puro, em que não

ocorre deslizamento. Em casos intermediários, seria possível calcular o quanto houve de deslizamento.

5.3.2 Gap tangencial incremental

Nessa seção se generaliza para um modelo tridimensional o raciocínio ilustrado anteriormente. Em vez de descrever o movimento de um plano de corte de um cilindro, passa-se a descrever o movimento geral de uma esfera. O objetivo é definir uma grandeza cinemática capaz de descrever o movimento geral de uma esfera no espaço, estando essa esfera em contato com uma superfície qualquer. Deseja-se mapear os pontos de contato em duas configurações distintas “i” e “i+1”. Sua evolução permite quantificar o deslizamento relativo ocorrido, assim como foi feito de forma simplista no exemplo anterior.

O movimento geral da esfera no espaço é função de seis graus de liberdade, dados pelo vetor $\mathbf{d}_S$. A superfície *master* também é considerada como móvel e deformável, sendo que é parametrizada, conforme já mencionado, pelos graus de liberdade $\mathbf{d}_M$. Assume-se que a esfera e a superfície apresentam interação pontual de contato. A Figura 5.4 mostra duas configurações sequenciais para um sistema composto por uma esfera de centro S em contato com uma superfície *master* Γ .

Figura 5.4 – Descrição geométrica utilizada para definir a função gap tangencial

Fonte: [45]

Na configuração à esquerda “i” é representado o cenário do início da interação de contato. Pode-se notar que a interação pontual, nessa configuração, se dá na superfície master

no ponto material localizado em $\Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^i)$, onde $\mathbf{c}^i$ representa os valores de coordenadas convectivas associadas ao ponto de contato na configuração “i” e $\mathbf{d}^i$ representa os graus de liberdade que descrevam essa configuração (contendo informações sobre a esfera e sobre a superfície). O ponto material na esfera que está envolvido na interação pontual de contato é localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}^i$, com origem local no centro da esfera S na configuração “i”, como mostrado na Figura 5.4. A direção normal associada ao contato nessa configuração é dada por $\mathbf{n}^i$. Trata-se da normal ao plano tangente de contato, isto é, o plano que tangencia a superfície Γ e a esfera na configuração “i”. Após uma mudança de configuração, pode-se descrever um novo cenário “i+1” na Figura 5.4 à direita.

Com o objetivo de mensurar o deslizamento ou sua tendência, pode-se comparar as configurações “i” e “i+1”. A grandeza cinemática responsável por registrar essa medida é o *gap* tangencial. Quando não ocorre deslizamento relativo, o *gap* tangencial é nulo. Já quando ocorre deslizamento, a simples comparação da configuração “i+1” e “i” não traz toda a informação necessária para quantificar a magnitude de deslizamento. De fato, é necessário realizar uma integral no caminho percorrido pela interação pontual de contato, conhecendo-se a velocidade instantânea de seu ponto, a fim de recuperar sua trajetória (ver por exemplo [13]). Em uma integração numérica, não se conhece tal velocidade a cada instante, mas somente em instantes discretos. Com isso, no item 4.4.2 foi feita uma discussão semelhante no contexto da formulação *master-master* sobre esse tipo de aproximação, bem como se assumiu uma forma aproximada para o cálculo do *gap* tangencial, mesmo quando há deslizamentos, que se utiliza somente de informações das configurações “i” e “i+1”. O mesmo raciocínio será aqui empregado ²⁴.

²⁴ Com base nessas hipóteses e pensando-se somente no movimento de um ponto material sobre a superfície *master*, pode-se definir o *gap* tangencial em formulações do tipo *master-slave* como um vetor conectando os pontos materiais atual “i+1” e anterior “i”, associados à ocorrência de contato na superfície *master*. Tal vetor deve ser projetado no plano tangente de contato na configuração “i+1”. Note, no entanto, que essa definição somente considera informações da superfície *master*, assumindo o movimento de um ponto material sobre a mesma, e não carrega informações sobre um possível rolamento da esfera. Assim, é insuficiente para os propósitos aqui requeridos e, por isso, deverá ser generalizada.

A fim de definir o *gap* tangencial para interação da esfera com a superfície *master*, é necessário mapear o movimento dos pontos materiais em ambas as superfícies de contato entre as configurações “i” e “i+1”, como foi feito na formulação *master-master*. Para tal, observa-se novamente a Figura 5.4 à direita. A posição de contato na configuração “i+1” é dada por $\Gamma(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1})$ e o antigo ponto de contato na superfície *master* se encontra na posição $\Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1})$. O vetor $\mathbf{c}^{i+1}$ contém as coordenadas convectivas associadas à solução do problema de mínima distância na configuração “i+1” e o vetor $\mathbf{d}^{i+1}$ contém os graus de liberdade que permitem localizar a esfera e a superfície *master* na configuração “i+1”.

Observando agora a esfera na configuração “i+1”, note que o centro S moveu-se de $\mathbf{u}_S^\Delta$. Já o vetor $\mathbf{r}^i$ sofreu uma rotação caracterizada pelo tensor $\mathbf{Q}_S^\Delta$, que é função de α_S^Δ . Com isso, é possível definir dois vetores $\mathbf{t}_S^\Delta$ e $\mathbf{t}_M^\Delta$, os quais representam localmente as variações dos pontos materiais onde o contato ocorre em ambas as superfícies durante a transformação entre as configurações “i” e “i+1”. A Figura 5.4 ilustra graficamente essas grandezas. Com isso, pode-se escrever:

$$\mathbf{t}_S^\Delta = -\mathbf{r}^i + \mathbf{u}_S^\Delta + \mathbf{r}^{i+1} - [\Gamma(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^i)], \quad (5.24)$$

$$\mathbf{t}_M^\Delta = \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}), \quad (5.25)$$

e

$$\mathbf{t}_S^\Delta - \mathbf{t}_M^\Delta = \mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i + \mathbf{u}_S^\Delta + \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^i) - \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}). \quad (5.26)$$

O movimento de rotação da esfera pode ser utilizado para escrever a seguinte relação:

$$\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{Q}_S^\Delta \mathbf{r}^i, \quad (5.27)$$

que pode ser utilizado em conjunto com a relação $\mathbf{r}^i = -r\mathbf{n}^i$, como proposto em [32], levando a:

$$\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i = (\mathbf{Q}_S^\Delta - \mathbf{I})\mathbf{r}^i = r(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_S^\Delta)\mathbf{n}^i. \quad (5.28)$$

Utilizando-se de (5.28) em (5.26), obtém-se:

$$\mathbf{t}_S^\Delta - \mathbf{t}_M^\Delta = r(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_S^\Delta)\mathbf{n}^i + \mathbf{u}_S^\Delta + \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^i) - \Gamma(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}). \quad (5.29)$$

Finalmente, após esse desenvolvimento, é possível definir uma expressão final que permita calcular o incremento de *gap* tangencial entre as configurações “i” e “i+1”, que pode ser descrita em palavras por: “a diferença entre os incrementos de deslocamentos sofridos por pontos materiais de contato nas superfícies *slave* e *master*, projetadas no plano tangente atual de contato”.

$$\mathbf{g}_t^\Delta = (\mathbf{t}_S^\Delta - \mathbf{t}_M^\Delta) - (\mathbf{t}_S^\Delta - \mathbf{t}_M^\Delta) \cdot \mathbf{n}^{i+1} \mathbf{n}^{i+1}. \quad (5.30)$$

5.3.3 Acúmulo do *gap* tangencial

Seja $\mathbf{g}_t^i$ o *gap* tangencial acumulado e proveniente de tendências de deslizamento já ocorridas em transformações anteriores, e escritas no início da atual transformação de “i” para “i+1” (no caso da ocorrência de um contato previamente não existente, o valor de $\mathbf{g}_t^i$ inicia-se nulo). Um novo *gap* tangencial incremental pode ser calculado, conforme descrito no item anterior. No entanto, o acúmulo dessa grandeza não pode ser feito simplesmente somando $\mathbf{g}_t^i$ com $\mathbf{g}_t^\Delta$. Nesse contexto, segue-se novamente as discussões realizadas no contexto da formulação *master-master* no item 4.4.3. É desejável que haja objetividade nessa propagação de informação, isto é, que seja invariante a movimentos de corpo rígido arbitrários sofridos pelas superfícies de contato, uma vez que o contato já esteja estabelecido e com uma tendência de deslizamento quantificada.

Quando observado sob o ponto de vista de um referencial global fixo $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, é necessário estabelecer uma rotação $\mathbf{Q}^\Delta$ para ser aplicada ao valor acumulado de $\mathbf{g}_t^i$ antes de acumulá-lo com o atual $\mathbf{g}_t^\Delta$. Com isso, pode-se escrever a seguinte expressão para compor o *gap* tangencial acumulado na configuração “i+1”:

$$\mathbf{g}_t^{i+1} = \mathbf{g}_t^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_t^i, \quad (5.31)$$

onde são seguidas as mesmas ideias já discutidas no item 4.4.3 e que levam a:

$$\mathbf{Q}^\Delta = \mathbf{Q}_M \mathbf{Q}_M^\Delta \mathbf{Q}_M^T. \quad (5.32)$$

Essa expressão representa uma composição de rotações, responsáveis por operar no vetor $\mathbf{g}_t^i$ para levar em conta possíveis rotações de corpo rígido ocorridas pelo par de contato entre a configuração “i” e “i+1”. A fim de calcular $\mathbf{Q}^A$ pode-se calcular as seguintes grandezas associadas à configuração “i”:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^i &= \frac{\Gamma_{,\zeta}}{\|\Gamma_{,\zeta}\|} \Big|_{\mathbf{c}^i}, \\ \mathbf{n}^i &= \frac{\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}}{\|\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}\|} \Big|_{\mathbf{c}^i}, \\ \mathbf{t}_2^i &= \mathbf{n}^i \times \mathbf{t}_1^i. \end{aligned} \quad (5.33)$$

O conjunto $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{n}^i)$ pode ser interpretado como uma base ortogonal local, em que os vetores $\mathbf{t}_1^i$ e $\mathbf{t}_2^i$ geram direções tangentes ao plano tangente de contato na configuração “i” e $\mathbf{n}^i$ é a direção normal a esse plano. Definições similares podem ser feitas para a configuração “i+1”, levando a:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^{i+1} &= \frac{\Gamma_{,\zeta}}{\|\Gamma_{,\zeta}\|} \Big|_{\mathbf{c}^{i+1}}, \\ \mathbf{n}^{i+1} &= \frac{\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}}{\|\Gamma_{,\zeta} \times \Gamma_{,\theta}\|} \Big|_{\mathbf{c}^{i+1}}, \\ \mathbf{t}_2^{i+1} &= \mathbf{n}^{i+1} \times \mathbf{t}_1^{i+1}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

o que permite estabelecer uma base local associada à configuração “i+1” dada por: $(\mathbf{t}_1^{i+1}, \mathbf{t}_2^{i+1}, \mathbf{n}^{i+1})$. Com isso, é possível também escrever a transformação de coordenadas $\mathbf{Q}_M$ que relaciona vetores escritos utilizando-se da base global $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e a recém definida base local na configuração “i”. É possível escrever:

$$\mathbf{Q}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{t}_1^i \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{t}_2^i \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Adicionalmente, $\mathbf{Q}_M^A$ representa uma matriz de rotação devido às mudanças de orientação das bases locais entre as configurações “i” e “i+1”. Pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{Q}_M^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i & \mathbf{n}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_1^i \\ \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i & \mathbf{n}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_2^i \\ \mathbf{t}_1^{i+1} \cdot \mathbf{n}^i & \mathbf{t}_2^{i+1} \cdot \mathbf{n}^i & \mathbf{n}^{i+1} \cdot \mathbf{n}^i \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Com isso, pode-se compor o tensor rotação $\mathbf{Q}^\Delta$, necessário para atualização de $\mathbf{g}_t^i$. A composição de $\mathbf{Q}^\Delta$ descrita na equação (5.32) é interpretada da seguinte forma:

- Uma mudança de base em $\mathbf{g}_t^i$, de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ para $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{n}^i)$;
- Uma rotação de $\mathbf{g}_t^i$ para levar em consideração o movimento de corpo rígido sofrido pela superfície *master*;
- Uma mudança de base do vetor recém rotacionado, de volta de $(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \mathbf{n}^i)$ para $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Nota:

A definição da base local é baseada na direção tangente $\mathbf{t}_1$ e normal $\mathbf{n}$, como definido nas equações (5.33) e (5.34). Consequentemente, a rotação aplicada ao vetor $\mathbf{g}_t^i$ em (5.31) contém apenas informações dos movimentos de corpo rígido da superfície *master*, não carregando nenhuma informação acerca de possíveis movimentos da esfera. No entanto, como a direção $\mathbf{n}$ provém do resultado do problema de mínima distância entre a esfera e a superfície, informação indireta do posicionamento da esfera acaba estando embutida em $\mathbf{n}$ e consequentemente em $\mathbf{Q}^\Delta$. A informação que não é considerada e é ignorada na forma aqui proposta é relacionada às atualizações das direções tangenciais das superfícies *master* e *slave*, que estão relacionadas à rotação relativa ocorrida em torno da direção normal de contato (*spin*). O presente modelo considera ação pontual de contato, mas ignora eventuais momentos decorrentes da ação de atrito em relação ao ponto de aplicação da força de contato nos corpos. Esse ponto representa uma possível expansão para o atual modelo, a fim de elaborar um modelo de ação pontual que considera não somente a força pontual, mas também o momento de *spin*, na direção normal $\mathbf{n}$. Esse ponto está intimamente relacionado com a deformação local das superfícies de contato e pode ser conectado com os conceitos de micro deslizamento e sua homogeneização, apresentados em [68].

5.3.4 Lei constitutiva de contato

Com a obtenção da grandeza cinemática do *gap* tangencial, pode-se agora realizar a escolha de uma lei constitutiva para descrever o comportamento tangencial do contato. Aqui assume-se a Lei de Coulomb para decidir entre estados de deslizamento ou não deslizamento (ver [13]). Para tal, é necessário calcular a máxima força de atrito para o cenário de não deslizamento (*sticking*), dada por $F^{\max} = \mu N$, sendo μ o coeficiente de atrito (estático) e N a magnitude da ação normal de contato. Essa pode ser calculada por $N = |\epsilon_n g_n|$.

É necessário calcular a força de atrito ocorrida no par de contato, para cada configuração, a fim de checar se o estado do contato é de deslizamento ou não deslizamento. Para tal, é possível impor a restrição de não deslizamento e calcular qual a força de atrito que decorre, a fim de que possa ser decidida a condição do contato. A imposição dessa restrição pode ser feita por meio de multiplicadores de Lagrange, por exemplo. Alternativamente, é possível a utilização do Método da Penalidade. Adotando um fator de penalidade ϵ_t para a condição de não deslizamento, permite-se a ocorrência de um deslocamento relativo controlado por ϵ_t para a condição de não deslizamento. Utilizando-se dessa técnica, pode-se escrever:

$$F^{\text{try}} = \epsilon_t \|\mathbf{g}_t^{i+1}\|. \quad (5.37)$$

onde F^{try} representa uma força de atrito-tentativa, a ser checada pela comparação a força de atrito máxima dada pela Lei de Coulomb. Isso é necessário para checar a condição de deslizamento ou não deslizamento. Caso haja deslizamento, ainda será necessário calcular o quanto houve de deslizamento, de fato, bem como sua direção. Aqui faz-se novamente a analogia entre atrito e plasticidade. É possível estabelecer um escalar $\overline{\Delta\lambda}$ para quantificar a magnitude de deslizamento, levando a:

$$\begin{cases} \overline{\Delta\lambda} = \frac{F^{\text{try}} - F^{\max}}{\epsilon_t} & \text{if } F^{\text{try}} > F^{\max} \\ \overline{\Delta\lambda} = 0 & \text{if } F^{\text{try}} \leq F^{\max} \end{cases}. \quad (5.38)$$

Com isso, sendo a direção de deslizamento dada por $\mathbf{t}^{i+1}$, o vetor de deslizamento é dado por:

$$\mathbf{g}_{\text{t slide}}^{\Delta} = \overline{\Delta\lambda} \mathbf{t}^{i+1}. \quad (5.39)$$

A direção de deslizamento $\mathbf{t}^{i+1}$ pode ser aproximada pela direção atual do *gap* tangencial, o que mede a tendência local de deslizamento para o par de contato.

$$\mathbf{t}^{i+1} = \frac{\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}}{\|\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}\|}. \quad (5.40)$$

Note que a técnica empregada nessa formulação para o cálculo de $\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}$ ainda necessita de uma atualização para levar em consideração o deslizamento ocorrido entre as configurações “i” e “i+1”. De fato, uma vez que houve convergência ao final do passo de cálculo da configuração “i+1”, é necessário calcular $\mathbf{g}_{\text{t slide}}^{\Delta}$ e utilizá-lo para atualizar $\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}$ antes de seguir para o próximo passo de evolução de configuração. Isso é feito da forma: $\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}{}_{\text{updated}} = \mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1} - \mathbf{g}_{\text{t slide}}^{\Delta}$. Tal procedimento garante que o *gap* tangencial acumulado e propagado para o próximo passo contenha somente a atual tendência de deslizamento. A informação do histórico de deslizamento no par de contato é perdida. Por isso é que o próprio $\mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}$ pode ser utilizado em (5.40) para estimar a direção atual de deslizamento, pois não é uma grandeza associada a históricos, mas a valores instantâneos de tendências de deslizamento. Variáveis auxiliares podem ser construídas para armazenar a história de deslizamento, energia dissipada ou outras grandezas de interesse.

5.3.5 Contribuição à forma fraca

Finalmente, após os desenvolvimentos anteriores, pode-se estabelecer as contribuições à forma fraca devido à ação do atrito. Divide-se em duas possibilidades, para a situação de não deslizamento (*sticking*) δW_{fstick} e deslizamento (*sliding*) δW_{fslide} :

$$\delta W_{\text{fstick}} = \epsilon_{\text{t}} \mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}, \quad (5.41)$$

$$\delta W_{\text{fslide}} = (\mu \epsilon_{\text{n}} \|\mathbf{g}_{\text{n}}^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \cdot \delta \mathbf{g}_{\text{t}}^{i+1}. \quad (5.42)$$

A variação $\delta \mathbf{g}_t^{i+1}$, de maneira análoga ao desenvolvimento para o *gap* normal feito na equação (5.16), pode ser escrita por:

$$\delta \mathbf{g}_t^{i+1} = [\mathbf{g}_t^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_t^{i+1},d] \delta \mathbf{d}. \quad (5.43)$$

Utilizando-se (5.43) em (5.41) e (5.42) leva a:

$$\delta W_{f_{\text{stick}}} = \epsilon_t \mathbf{g}_t^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_t^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_t^{i+1},d] \delta \mathbf{d}, \quad (5.44)$$

$$\delta W_{f_{\text{slide}}} = (\mu \epsilon_n \|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \cdot [\mathbf{g}_t^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_t^{i+1},d] \delta \mathbf{d}. \quad (5.45)$$

5.3.6 Contribuição à linearização consistente da forma fraca

As contribuições à linearização consistente do modelo advindas dos termos $\delta W_{f_{\text{stick}}}$ e $\delta W_{f_{\text{slide}}}$ são desenvolvidos a seguir. Iniciando-se pela linearização consistente para a situação de não deslizamento, tem-se:

$$\Delta(\delta W_{f_{\text{stick}}}) = \epsilon_t \Delta(\mathbf{g}_t^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_t^{i+1}) = \epsilon_t \Delta(\mathbf{g}_t^{i+1} \cdot [\mathbf{g}_t^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_t^{i+1},d] \delta \mathbf{d}). \quad (5.46)$$

Rearranjando a expressão (5.46) obtém-se:

$$\Delta(\delta W_{f_{\text{stick}}}) = \epsilon_t \Delta(\mathbf{g}_t^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_t^{i+1}) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_t \Delta([\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1},c^T + \mathbf{g}_t^{i+1},d^T] \mathbf{g}_t^{i+1}), \quad (5.47)$$

a qual pode ser desenvolvida de forma similar à feita para as contribuições associadas aos esforços normais de contato na equação (5.23), levando a:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_{\text{stick}}}) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_t \left[\left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1},c^T \mathbf{g}_t^{i+1} \right),c \mathbf{D} + \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1},c^T \mathbf{g}_t^{i+1} \right),d + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{g}_t^{i+1},d^T \mathbf{g}_t^{i+1} \right),c \mathbf{D} + \left(\mathbf{g}_t^{i+1},d^T \mathbf{g}_t^{i+1} \right),d \right] \Delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Note que, diferente do que foi realizado na equação (5.20) em relação à direção normal, nesse caso a mesma simplificação não é possível, uma vez que em geral não há ortogonalidade

entre $\mathbf{g}_t^{i+1}$ e $\mathbf{g}_t^{i+1},c$. Isso cria termos adicionais de origem geométrica e que complicam de forma significativa os termos relacionados à linearização consistente. Novamente, a utilização de técnicas de diferenciação automática se torna essencial para o desenvolvimento de formulações de contato desse tipo, principalmente se forem adotadas parametrizações muito complexas para representação da superfície *master*.

Por último, é apresentado o termo $\Delta(\delta W_{f_{slide}})$:

$$\Delta(\delta W_{f_{slide}}) = \mu \epsilon_n \Delta[(\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \cdot \delta \mathbf{g}_t^{i+1}] = \mu \epsilon_n \Delta[(\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \cdot (\mathbf{g}_t^{i+1},c \mathbf{D} + \mathbf{g}_t^{i+1},d) \delta \mathbf{d}], \quad (5.49)$$

o qual pode ser escrito de forma compacta por:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{f_{slide}}) = \delta \mathbf{d} \cdot \mu \epsilon_n \left\{ \left[\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1},c^T (\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \right]_{,c} \mathbf{D} + \right. \\ \left[\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1},c^T (\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \right]_{,d} + \left[\mathbf{g}_t^{i+1},d^T (\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \right]_{,c} \mathbf{D} + \\ \left. \left[\mathbf{g}_t^{i+1},d^T (\|\mathbf{g}_n^{i+1}\| \mathbf{t}^{i+1}) \right]_{,d} \right\} \Delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Um procedimento lógico completo para implementação do algoritmo de contato pode ser visualizado na Figura 5.5.

5.4 Esforços dissipativos no contato

A interação de contato entre corpos pode gerar efeitos dissipativos importantes, não somente devido à ação de atrito de deslizamento e efeitos na direção tangencial, mas também de outros efeitos associados à direção normal. Trata-se de uma gama de efeitos de alta complexidade, relacionados às deformações locais dos corpos em contato, questões químicas, tribológicas e até relacionadas à microestrutura dos materiais dos corpos que interagem. Dessa forma, está fora do escopo desse trabalho adentrar de forma profunda em tal área. No entanto, aqui é apresentado um modelo matemático bastante simples para modelar a dissipação de energia em interações pontuais de contato.

Em particular, em problemas com ocorrência de impacto entre corpos esse tipo de modelo pode ser bastante útil. Em um contexto de dinâmica multicorpos existe uma infinidade de modelos de dissipação, por exemplo descritos em [77] e [78]. Como apresentado em [77], aqui é adotada a ideia básica do modelo de Kelvin-Voigt, que consiste na associação em paralelo de uma mola linear e de um amortecedor linear. Adaptando à presente notação, é possível escrever a força normal por:

$$\mathbf{f}_n^{i+1} = \epsilon_n \mathbf{g}_n^{i+1} + c_n \dot{\mathbf{g}}_n, \quad (5.51)$$

onde c_n representa um coeficiente de amortecimento para a direção normal e $\dot{\mathbf{g}}_n$ é a derivada temporal do vetor *gap* normal.

A expressão (5.51) representa uma composição do efeito de penalidade linear (força elástica) e do efeito dissipativo, proporcional à velocidade relativa dos pontos materiais que interagem, projetada na direção normal de contato (força de amortecimento). A maior limitação desse modelo reside no fato de que no início do contato, quando não há penetração e, portanto, não há força elástica, a dissipação é não nula e gera um esforço repulsivo entre os corpos, o que fisicamente não é plausível. Além disso, no final de uma interação de contato, após o completo afastamento entre os corpos, a ocorrência novamente de um *gap* normal nulo ocorre concomitante à velocidade de afastamento, que gera um esforço atrativo entre os corpos, que também não é realista. Apesar dessas limitações, esse modelo pode ser visto como uma primeira e mais simples referência dentre os modelos de dissipação existentes no contexto de dinâmica multicorpos, como visto em [77]. Adicionalmente no contexto do Método dos Elementos Discretos, em [79] são apresentados modelos muito semelhantes.

A fim de incorporar os efeitos de dissipação de energia como parte das contribuições à forma fraca no modelo de contato, a seguir são desenvolvidos tais termos:

$$\delta W_{dn} = c_n \dot{\mathbf{g}}_n \cdot \delta \mathbf{g}_n. \quad (5.52)$$

O valor de $\dot{\mathbf{g}}_n$ pode ser avaliado de forma semelhante ao termo $\delta \mathbf{g}_n$, levando a:

$$\dot{\mathbf{g}}_n = \mathbf{g}_{n,c} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{g}_{n,d} \dot{\mathbf{d}} = (\mathbf{g}_{n,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{n,d}) \dot{\mathbf{d}}. \quad (5.53)$$

Figura 5.5 – Procedimento lógico para implementação do algoritmo de contato

Fonte: adaptado de [45]

Com isso, a contribuição à forma fraca devido à ação de esforços normais dissipativos é dada por:

$$\delta W_{dn} = \delta \mathbf{d} \cdot c_n \left[\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T + \mathbf{g}_{n,d}^T \right] \dot{\mathbf{g}}_n. \quad (5.54)$$

A linearização consistente da equação (5.54) é dada por:

$$\Delta(\delta W_{dn}) = \delta \mathbf{d} \cdot c_n \left[\Delta \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right) + \Delta \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right) \right], \quad (5.55)$$

onde

$$\Delta \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right) = \left[\left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,d} \right] \Delta \mathbf{d} , \quad (5.56)$$

$$\Delta \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right) = \left[\left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,d} \right] \Delta \mathbf{d} . \quad (5.57)$$

Logo:

$$\Delta(\delta W_{dn}) = \delta \mathbf{d} \cdot c_n \left[\left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{n,c}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,d} + \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{g}_{n,d}^T \dot{\mathbf{g}}_n \right)_{,d} \right] \Delta \mathbf{d} . \quad (5.58)$$

A seguir é proposto um modelo de dissipação de energia também para a direção tangencial. A razão desse modelo é poder eliminar oscilações na direção tangencial, durante cenários de não deslizamento, como evidenciado no primeiro exemplo numérico da referência [32]. Para uma dada escolha de coeficiente de rigidez para a direção tangencial (fator de penalidade tangencial) dado por ϵ_t , um oscilador harmônico é introduzido no modelo. Esse atua sempre que há situação de não deslizamento, em particular para cenários de rolamento. Se houver algum tipo de armazenamento de energia nesse oscilador, uma vibração local de alta frequência pode ser introduzida no modelo de contato, representando um fenômeno espúrio e dependente do fator de penalidade tangencial atribuído. Assim, o papel da dissipação tangencial é a introdução de um amortecedor em paralelo com essa mola tangencial, a fim de dissipar energia, quando esse tipo de vibração for importante. Pode-se escrever o seguinte termo para a dissipação tangencial, para situações de não deslizamento:

$$\delta W_{dt} = c_t \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \delta \mathbf{g}_t, \quad (5.59)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = \mathbf{g}_{t,c}^{i+1} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{g}_{t,d}^{i+1} \dot{\mathbf{d}} = \left(\mathbf{g}_{t,c}^{i+1} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{t,d}^{i+1} \right) \dot{\mathbf{d}} . \quad (5.60)$$

$$\delta W_{dt} = \delta \mathbf{d} \cdot c_t \left[\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{t,c}^{i+1} + \mathbf{g}_{t,d}^{i+1} \right] \dot{\mathbf{g}}_t . \quad (5.61)$$

$$\Delta(\delta W_{dt}) = \delta \mathbf{d} \cdot c_t \left[\left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1T} \right)_{,c} \dot{\mathbf{g}}_t \right]_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_t^{i+1T} \right)_{,d} \dot{\mathbf{g}}_t \right]_{,d} + \left(\mathbf{g}_t^{i+1T} \right)_{,d} \dot{\mathbf{g}}_t \right]_{,c} \mathbf{D} + \left(\mathbf{g}_t^{i+1T} \right)_{,d} \dot{\mathbf{g}}_t \right]_{,d} \Delta \mathbf{d} \quad (5.62)$$

onde c_t é o parâmetro de dissipação tangencial (constante de amortecimento). Assume-se que durante interações de contato com deslizamento relativo entre as superfícies essa fonte de dissipação não ocorra, mas somente dissipação devido ao atrito seco.

No contexto do Método dos Elementos Discretos pode-se encontrar em [79] o mesmo tipo de modelo de dissipação, como os apresentados nas equações (5.52) e (5.59), respectivamente para as direções normal e tangencial. No entanto, nessa referência os modelos são apresentados de forma composta com molas lineares e amortecedores lineares, de forma similar ao modelo de Kelvin-Voigt, apresentado na equação (5.51) para a direção normal. A principal diferença em relação aos modelos aqui apresentados está no fato de que em [79] há avaliação combinada dos efeitos da mola e amortecedor para compor um único esforço normal, bem como analogamente para direção tangencial. Os esforços combinados são utilizados para a decisão de deslizamento ou não deslizamento para o modelo de atrito de Coulomb. Aqui considera-se que o efeito dissipativo é independente da Lei de Coulomb, não entrando na composição do esforço normal e tangencial, mas entrando como um termo completamente independente. Esse tipo de acoplamento pode ser incorporado em trabalhos futuros.

5.5 Parametrizações de superfícies de contato

A fim de utilizar a formulação de contato aqui proposta é necessário estabelecer a parametrização da superfície *master* Γ para o cenário desejado. Até então, o equacionamento apresentado é totalmente geral, na medida que nenhuma hipótese acerca da geometria de Γ foi feita. Assim, é possível trabalhar nesse modelo com superfícies rígidas e flexíveis. A única limitação é que a superfície deve ser escrita em função dos graus de liberdade $\mathbf{d}$ e de um conjunto de coordenadas convectivas $\mathbf{c}$ que é utilizado para mapear pontos materiais na superfície.

A seguir apresentam-se, como exemplos, quatro tipos de parametrizações para Γ , sendo que duas delas representam superfícies rígidas e as outras duas, flexíveis. As superfícies rígidas possuem seu movimento atrelado a um único nó, denominado nó piloto, com seis graus de liberdade, ou seja, capaz de representar o movimento de um corpo rígido no espaço. As

superfícies flexíveis são desenvolvidas para utilização conjunta com um modelo de elementos finitos, em particular de barras ou cascas. A utilização com sólidos não foi explorada no presente trabalho, mas é perfeitamente possível.

5.5.1 Superfície triangular rígida

Sejam os pontos A, B e C os vértices de um triângulo. Eles são localizados nas posições $\mathbf{x}_A^i$, $\mathbf{x}_B^i$ e $\mathbf{x}_C^i$, respectivamente, em certa configuração “i”. Uma superfície triangular na mesma configuração Γ_{tr}^i pode ser parametrizada da forma:

$$\Gamma_{tr}^i(\zeta, \theta) = [N_A^1(\zeta, \theta) \quad N_B^1(\zeta, \theta) \quad N_C^1(\zeta, \theta)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^i \\ \mathbf{x}_B^i \\ \mathbf{x}_C^i \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

onde $N_A^1(\zeta, \theta) = -\frac{1}{2}(\zeta + \theta)$, $N_B^1(\zeta, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$ e $N_C^1(\zeta, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta)$. A faixa de interesse para utilização dos parâmetros ζ e θ e que mapeia os pontos no interior de um triângulo pode ser localizada em uma superfície de referência, no plano paramétrico, ilustrado na Figura 5.6(a). Um exemplo de parametrização pode ser visto na Figura 5.6 (b).

Figura 5.6 – Superfície triangular rígida (a) plano paramétrico (b) exemplo de parametrização considerando $\mathbf{x}_A = (0,0,0)$, $\mathbf{x}_B = (10,10,0)$ e $\mathbf{x}_C = (0,10,10)$

Fonte: [45]

A parametrização Γ_{tr} pode ser escrita como fixa no espaço, considerando-se os vértices do triângulo imóveis. Se os vértices forem considerados livres e tiverem seus movimentos descritos com graus de liberdade de translação, é possível utilizar essa parametrização para compor uma malha de superfície de contato sobre sólidos tetraédricos de primeira ordem, cunhas de primeira ordem ou cascas de primeira ordem, utilizando-se dos mesmos graus de liberdade da malha que representa o sólido/estrutura.

Alternativamente, é proposta uma forma que permite que os vértices componham uma região não fixa e que possa apresentar um movimento de corpo rígido no espaço. Isso é feito pela construção de uma superfície triangular conectada a um ponto P, denominado ponto piloto, e que está rigidamente conectado aos vértices do triângulo, movendo-os de acordo com translações e rotações de corpo rígido. É possível escrever:

$$\mathbf{x}_K^i = \mathbf{x}_P^i + \mathbf{d}_K^i, \quad (5.64)$$

em que $K = A, B$ ou C , como mostrado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Descrição vetorial dos vértices de uma região triangular

Fonte: [45]

Cada vetor $\mathbf{d}_K^i$ conecta o ponto P com o vértice K. É considerado que a norma de cada $\mathbf{d}_K^i$ é constante, e que estão sujeitos à mesma rotação, que é sofrida pelo ponto P. Com isso, pode-se escrever para a configuração “i+1”:

$$\mathbf{d}_K^{i+1} = \mathbf{Q}_P^A \mathbf{d}_K^i. \quad (5.65)$$

onde $\mathbf{Q}_P^\Delta$ é o tensor rotação do ponto P entre as configurações “i” e “i+1”, avaliado por exemplo com o vetor rotação do ponto P e se utilizando do vetor rotação de Rodrigues, de acordo com o que foi apresentado na equação (3.5)²⁵. Utilizando-se dos dados da configuração de referência, pode-se escrever:

$$\mathbf{d}_K^{i+1} = \mathbf{Q}_P^{i+1} \mathbf{d}_K^r. \quad (5.66)$$

A posição atualizada do ponto P é dada por:

$$\mathbf{x}_P^{i+1} = \mathbf{x}_P^i + \mathbf{u}_P^\Delta, \quad (5.67)$$

onde $\mathbf{u}_P^\Delta$ é o deslocamento do ponto P entre as configurações “i” e “i+1”. Dessa forma, a posição de cada vértice na configuração “i+1” é dada por:

$$\mathbf{x}_K^{i+1} = \mathbf{x}_P^i + \mathbf{u}_P^\Delta + \mathbf{Q}_P^\Delta \mathbf{d}_K^i. \quad (5.68)$$

Utilizando-se (5.64) e (5.68) em (5.63) leva às parametrizações da superfície triangular rígida nas configurações “i” e “i+1”. Note que a escrita de Γ_{tr}^{i+1} depende dos deslocamentos e rotações do ponto P, compondo os graus de liberdade para descrição da superfície *master*.

Em um ambiente de elementos finitos é possível criar um nó P com graus de liberdade de translação e rotação e definir, na configuração de referência, cada um dos vetores $\mathbf{d}_K^r$. Em seguida, durante a solução do modelo não linear, a parametrização pode ser acessada para estabelecer um modelo de contato. O nó P rege o movimento da superfície triangular atrelada a ele. Pode-se prescrever deslocamentos e rotações a tal nó, bem como atrelá-lo a um nó de outra parte do modelo estrutural. A formulação aqui proposta provê tal generalidade.

Note ainda que é possível compor uma superfície complexa por vários triângulos, estando todos atrelados ao mesmo nó P. Isso provê a possibilidade de descrever o contorno de um corpo rígido para estabelecer modelos de contato utilizando-se da formulação aqui proposta.

²⁵ Note que não há nenhuma restrição ao uso exclusivamente dos parâmetros de Rodrigues. Pode-se aqui empregar qualquer tipo de parametrização para avaliar o tensor rotação, inclusive parametrizações não vetoriais.

5.5.2 Superfície rígida gerada por uma função de duas variáveis

Essa parametrização tem o objetivo de descrever a superfície rígida por meio de uma função Ψ de duas variáveis (ζ, θ) . O gráfico da função representa a superfície, que é plotada utilizando-se de um sistema de coordenadas local na configuração “i”, dado por $(P, \mathbf{e}_\zeta^i, \mathbf{e}_\theta^i, \mathbf{e}_\kappa^i)$, em que P é um ponto genérico no espaço e os versores $\mathbf{e}_\zeta^i, \mathbf{e}_\theta^i, \mathbf{e}_\kappa^i$ compõem uma base ortonormal. O ponto P pode sofrer translações ou rotações, introduzindo modificações nos versores que descrevem o sistema local de coordenadas, tal que:

$$\mathbf{e}_\zeta^{i+1} = \mathbf{Q}_P^A \mathbf{e}_\zeta^i \quad (5.69)$$

e analogamente aos outros versores. Devido às subseqüentes rotações que podem ocorrer no ponto P , é possível escrever o tensor rotação entre a configuração de referência e a configuração “i+1”, dado por $\mathbf{Q}_P^{i+1}$ tal que:

$$\mathbf{e}_\zeta^{i+1} = \mathbf{Q}_P^{i+1} \mathbf{e}_\zeta^r. \quad (5.70)$$

Note que de modo geral não há alinhamento entre o sistema de coordenadas local e o global na configuração de referência. Assim, é possível escrever uma transformação de coordenadas inicial $\mathbf{Q}_0$ tal que:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\zeta^r \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_\theta^r \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_\kappa^r \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_\zeta^r \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_\theta^r \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_\kappa^r \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\zeta^r \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_\theta^r \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_\kappa^r \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

É possível utilizar-se da transformação de coordenadas composta por $\mathbf{Q}_P^{i+1} \mathbf{Q}_0$. Com isso, pode-se diretamente operar em um vetor escrito no sistema local para o sistema global, diretamente na configuração “i+1”, já considerando a transformação de coordenadas inicial e também as subseqüentes mudanças de orientação, advindas do tensor $\mathbf{Q}_P^A$, descrito utilizando-se da descrição Lagrangiana atualizada conforme apresentado no item 3.3.1.

A função $\Psi(\zeta, \theta)$ é então plotada no sistema local de coordenadas, sendo que sua elevação ocorre na direção $\mathbf{e}_\kappa^r, \mathbf{e}_\kappa^i$ ou $\mathbf{e}_\kappa^{i+1}$, de acordo com a configuração. Utilizando-se da

transformação de coordenadas composta e incluindo uma possível translação da origem local, é possível escrever uma parametrização de superfície descrita pela função $\Psi(\zeta, \theta)$, na configuração “i”, utilizando-se do sistema de coordenadas global:

$$\Gamma_o^i(\zeta, \theta) = \mathbf{x}_P^i + \mathbf{Q}_P^i \mathbf{Q}_o \begin{bmatrix} \zeta \\ \theta \\ \Psi(\zeta, \theta) \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

A função $\Psi(\zeta, \theta)$ é arbitrária e pode descrever a forma desejada. Em particular, aqui se propõe a descrição de uma superfície oscilatória descrita por:

$$\Psi(\zeta, \theta) = A_\zeta \sin\left(\frac{2\pi\zeta}{\lambda_\zeta} + \phi_\zeta\right) + A_\theta \sin\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda_\theta} + \phi_\theta\right) + A_{\zeta\theta} \sin\left(\frac{2\pi\zeta}{\lambda_\zeta} + \phi_\zeta\right) \sin\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda_\theta} + \phi_\theta\right), \quad (5.73)$$

onde os parâmetros A_ζ , A_θ e $A_{\zeta\theta}$ são amplitudes, λ_ζ e λ_θ são comprimentos de onda, e ϕ_ζ e ϕ_θ são fases. A Figura 5.8(b) mostra um exemplo de superfície oscilatória rígida para um conjunto escolhido de parâmetros. Note que o domínio atribuído à função está associado a uma região no plano paramétrico. Em particular, pode ser atribuída uma região retangular, como a ilustrada na Figura 5.8 (a). Com isso, a faixa de validade da superfície está relacionada à região atribuída como domínio, no plano paramétrico. Nessa parametrização as variáveis da função dadas por ζ e θ já compõem um conjunto de coordenadas convectivas para descrição da superfície.

Figura 5.8 – Superfície oscilatória rígida (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície gerada com os parâmetros: $A_\zeta = 0.2$, $A_\theta = 0.1$, $A_{\zeta\theta} = 0$, $\lambda_\zeta = 2$, $\lambda_\theta = 1$, $\phi_\zeta = 0$ e $\phi_\theta = 0$.

Fonte: [45]

O procedimento aqui ilustrado permite total generalidade na escolha de diferentes funções $\Psi(\zeta, \theta)$. Os seis graus de liberdade associados com a translação e rotação do ponto P irão mover a superfície no espaço. Assim, pode-se atribuir, em um modelo de elementos finitos, um nó piloto associado ao ponto P, que rege o movimento da superfície inteira em todo o seu domínio de interesse, sendo essa rígida.

5.5.3 Superfície triangular flexível de segunda ordem

Sejam A, B e C os vértices de uma região triangular de referência, e D, E e F os pontos médios das arestas desse triângulo. É possível mapear cada um desses pontos, localizados em um plano paramétrico, relacionando-os com pontos no espaço 3D. A interpolação entre eles gera uma superfície espacial. Dessa forma, definem-se os pontos no espaço dados por $\mathbf{x}_K^i$, em certa configuração “i”, em que K assume cada um dos 6 pontos definidos. Pode-se definir uma superfície triangular de segunda ordem Γ_{tf}^i por:

$$\Gamma_{tf}^i(\zeta, \theta) = [N_A^2(\zeta, \theta) \quad N_B^2(\zeta, \theta) \quad N_C^2(\zeta, \theta) \quad N_D^2(\zeta, \theta) \quad N_E^2(\zeta, \theta) \quad N_F^2(\zeta, \theta)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^i \\ \mathbf{x}_B^i \\ \mathbf{x}_C^i \\ \mathbf{x}_D^i \\ \mathbf{x}_E^i \\ \mathbf{x}_F^i \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

onde $N_A^2(\zeta, \theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\zeta}{2} + \theta\zeta + \frac{\zeta^2}{2}$, $N_B^2(\zeta, \theta) = \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{2}$, $N_C^2(\zeta, \theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{2}$, $N_D^2(\zeta, \theta) = -\theta - \zeta - \theta\zeta - \zeta^2$, $N_E^2(\zeta, \theta) = 1 + \theta + \zeta + \theta\zeta$ e $N_F^2(\zeta, \theta) = -\theta - \theta^2 - \zeta - \theta\zeta$. A faixa de validade dos parâmetros ζ e θ mapeia uma região triangular no plano paramétrico, conforme ilustrado na Figura 5.9(a). Um exemplo de superfície no espaço gerada por meio da parametrização proposta está ilustrado na Figura 5.9(b).

Note que cada um dos pontos está submetido a deslocamentos, podendo ser atualizado por:

$$\mathbf{x}_K^{i+1} = \mathbf{x}_K^i + \mathbf{u}_K^A \quad (K = A, B, C, D, E, F). \quad (5.75)$$

Assim, a parametrização proposta fica naturalmente descrita em função dos graus de liberdade que, nesse caso, são os deslocamentos dos pontos utilizados para compor a superfície triangular de segunda ordem.

A utilização desse tipo de parametrização é possível e recomendada com elementos de casca de segunda ordem (por exemplo a formulação apresentada no item 3.3.4 e implementada na plataforma GIRAFFE). Além disso, é possível sua utilização como recobrimento para o contorno de malhas sólidas tetraédricas de segunda ordem ou outro padrão de malha triangular de segunda ordem.

Figura 5.9 – Superfície triangular flexível (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície utilizando-se de

$$\mathbf{x}_A = (0,0,0), \mathbf{x}_B = (10,0,0), \mathbf{x}_C = (0,10,0), \mathbf{x}_D = (5,0,-1), \mathbf{x}_E = (5,5,1) \text{ e } \mathbf{x}_F = (-1,5,0)$$

Fonte: [45]

5.5.4 Superfície super elíptica flexível

No Capítulo 4, em particular no item 4.5.1, foi desenvolvida uma parametrização para descrever o contorno super elíptico de uma estrutura de barra. No presente contexto a mesma parametrização pode ser utilizada, mas dessa vez para compor a superfície *master*, que poderá interagir com esferas.

A equação (4.110) possui uma proposta de parametrização que aqui é ilustrada com um exemplo na Figura 5.10(b). Note que a região no plano paramétrico associada aos pontos da superfície no espaço é retangular, estando ilustrada na Figura 5.10(a).

Figura 5.10 – Superfície super elíptica flexível (a) plano paramétrico (b) exemplo de superfície para $a =$

$$0.1, b = 0.2, n = 5, \mathbf{x}_A = (0,0,0), \mathbf{x}_B = (0,0,1), \mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta_B) & \sin(\theta_B) & 0 \\ -\sin(\theta_B) & \cos(\theta_B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \theta_B =$$

$$-\frac{\pi}{4}$$

Fonte: [45]

5.6 Não convexidade e estratégias para o problema de mínima distância

A solução do problema de mínima distância entre o centro da esfera S e a superfície *master* Γ representa um ponto crucial no modelo de contato aqui proposto. Trata-se de um pré-requisito para o cálculo da função *gap* normal, sem a qual não é possível nem ao menos detectar o contato. Dessa forma, a solução desse problema abordado no item 5.1.1 merece uma discussão mais ampla.

A modelagem da possibilidade de contato entre corpos (em particular se utilizando do presente modelo – entre uma esfera e uma superfície genérica) passa por duas etapas básicas já exploradas no item 3.3.6: detecção e tratamento. Após a fase da busca grosseira pela detecção do contato, uma vez que o par em questão é classificado com um forte candidato a apresentar contato, a solução do problema local de mínima distância é requerida (ver procedimento lógico na Figura 5.5). O resultado é o conjunto de coordenadas convectivas $\bar{\mathbf{c}}$ que associa um ponto material na superfície Γ como o local de ocorrência do contato, ou no caso de não haver contato, da projeção ortogonal do centro da esfera $\mathbf{x}_S$ na superfície Γ . Afim de tornar, de fato, o contato ativo, é necessário não somente que $g_n < 0$, mas também que $\bar{\mathbf{c}}$ esteja dentro do domínio de interesse no plano paramétrico, determinado a priori pela faixa de parâmetros que leva a pontos de interesse na geometria da superfície no espaço 3D.

Uma questão importante é que o problema 5.1.1 pode ser não convexo dependendo da parametrização considerada para a superfície Γ . A Figura 5.11(a) ilustra uma situação de não convexidade, na qual há ilustração de três soluções para o problema (podem existir mais soluções)²⁶.

Figura 5.11 – Não convexidade no problema de mínima distância entre o centro de uma esfera e uma superfície Γ (a) três soluções (b) duas ações pontuais de contato (sem atrito)

Fonte: [45]

Situações de não convexidade exigem atenção especial, uma vez podem se tornar responsáveis pela falha do algoritmo de contato. Por exemplo, ao assumir uma única interação mecânica pontual para um dado par esfera-superfície, no caso de um problema não convexo, um mal chute inicial para as coordenadas convectivas $\mathbf{c}$ do problema de mínima distância pode levar à solução $\bar{\mathbf{c}}$ não desejada e consequentemente à falha na identificação do contato.

A solução $\bar{\mathbf{c}}$ para o sistema de equações (5.2) pode estar relacionada não somente à mínima distância entre o centro da esfera e a superfície Γ , mas também a pontos de máxima distância, ou a pontos de sela (ver por exemplo Figura 5.11(a)). Nos casos de não convexidade, ao procurar a solução de (5.2) via Newton-Raphson, matematicamente é possível mapear regiões de convergência para cada raiz existente. No entanto, do ponto de vista prático isso nem sempre é possível ou conveniente. Assim, de modo geral a escolha do chute inicial pode seguir estratégias práticas que remetam à física ou geometria do problema, a fim de procurar induzir

²⁶ O leitor pode encontrar uma discussão ampla do ponto de vista matemático sobre esse tipo de situação em [42] e [15]. Condições de convexidade são discutidas, assim como aspectos da geometria diferencial. Discussões práticas sobre o assunto podem ser vistas em [41], no contexto de contato entre barras.

à identificação da raiz de interesse. Além disso, há cenários em que é desejável se tratar mais de uma interação pontual de contato, como a ilustrada na Figura 5.11(b), em que ocorrem duas ações pontuais de contato para o mesmo par considerado esfera-superfície. Esse tipo de situação remete à necessidade de uma previsão a priori acerca do número esperado (ou máximo) de interações pontuais de contato. Obviamente isso deve ser alinhado com uma estratégia de diferentes chutes iniciais do Método de Newton-Raphson, a fim de identificar as soluções desejadas. É muito difícil a priori prever todas essas características de solução de forma genérica, para qualquer tipo de superfície parametrizada. De fato, isso depende muito das características de cada superfície considerada. Assim, é desejável para cada caso a utilização de informações geométricas de cada tipo de superfície para os chutes iniciais em busca de cada solução $\bar{\mathbf{c}}$. Para verificar se cada solução encontrada $\bar{\mathbf{c}}$ será responsável por uma interação de contato ou não, é necessário calcular o *gap* normal. Isso naturalmente irá excluir as soluções de máxima distância, por vezes encontradas. Assim, o sinal de g_n se torna um importante indicador para o contato.

Uma possível maneira para lidar com esse tipo de não convexidade, do ponto de vista computacional, é discutido a seguir. Pode-se pensar que, a priori, o contato entre uma esfera e uma superfície Γ será não convexo, mas com um número finito de soluções para ações pontuais de contato (trata-se de uma hipótese forte pois naturalmente já exclui cenários de contato conforme). O número de interações pontuais pode ser tratado como uma entrada à rotina computacional. Na sequência, para a solução do problema (5.2) via Newton-Raphson, dependendo da superfície considerada estratégias distintas devem ser utilizadas para o chute inicial.

Por exemplo, para a superfície gerada a partir de uma função oscilatória mostrada no item 5.5.2, é possível projetar o centro da esfera no atual plano $\zeta\theta$ do sistema de coordenadas local $(P, \mathbf{e}_\zeta^i, \mathbf{e}_\theta^i, \mathbf{e}_\kappa^i)$, para uma dada configuração “i”. Pode-se resolver (5.2) utilizando-se esse ponto projetado como chute inicial-base. Ao procurar outras soluções, pode-se estabelecer novos chutes iniciais por meio de afastamentos em relação ao chute inicial-base. Para tal, pode-se utilizar as informações dos comprimentos de onda λ_ζ e λ_θ , que são características geométricas da superfície e que podem servir de guias para busca de novas soluções para (5.2). Finalmente, após a solução de diversas rotinas em busca das soluções de (5.2), é fundamental checar se as soluções encontradas são, de fato, distintas. Isso é fundamental, uma vez que se for considerada uma mesma solução mais de uma vez, ocorrerá uma ação pontual de contato múltipla em um mesmo ponto, o que fisicamente é incorreto e provavelmente causará

divergência do modelo. A fim de implementar esse tipo de verificação, é fundamental levar em consideração a precisão estabelecida como critério de parada do Método de Newton-Raphson. Após essa verificação, o algoritmo de contato continua normalmente, por meio das contribuições à forma fraca e sua linearização consistente, para cada par de interação pontual estabelecido.

Note que, de tudo o que aqui foi discutido, a parte mais delicada está relacionada à metodologia empregada para a elaboração dos chutes iniciais para a solução de (5.2). Enfatiza-se novamente que isso depende essencialmente das características geométricas de Γ e deve ser estudado caso a caso, procurando sempre a robustez para evitar a perda de soluções de mínima distância que são a base da formulação de contato aqui apresentada.

Por fim, destacam-se também os cenários em há um número infinito de soluções de (5.2). Por exemplo, quando o centro da esfera se encontra no centro de curvatura de uma superfície com curvatura localmente constante. Em tais situações o Método de Newton-Raphson não irá apresentar convergência. Em tais casos, ou até mesmo para ser capaz de detectar esse tipo de situação ao longo da solução, é possível pensar em ferramentais de otimização. Em alguns casos de geometrias particulares de partículas, tal técnica já foi empregada com sucesso, por exemplo em [70].

5.7 Exemplos Numéricos

Todos os exemplos mostrados nesse item representam simulações de dinâmica transiente. São utilizados os parâmetros de Newmark dados por $\beta = 0.25$ e $\gamma = 0.5$ (regra trapezoidal). Em caso de parâmetros distintos, esses são mostrados caso a caso.

5.7.1 Interação de uma bola com o solo rígido

Esse exemplo possui o objetivo de comparar a formulação de contato aqui proposta com uma solução de referência, analítica, a fim de testar as implementações numéricas. Não são utilizados elementos finitos, de fato, mas somente é considerado um elemento de partícula rígida e esférica (bola), como descrito no item 3.3.5. A interação de contato entre a bola e uma superfície rígida (composta por duas regiões triangulares) é considerada. Assim, são utilizados dois pares de contato. A Figura 5.12(a) mostra a geometria considerada como condição inicial. Todos os dados numéricos do modelo relacionados às propriedades da bola, do solo e do contato

estão detalhados na Tabela 5.2. O passo temporal de integração considerado é de 0.001 s (constante).

Figura 5.12 – Exemplo numérico 5.7.1: (a) visualização da bola e da superfície plana do solo (b) Carregamento impulsivo aplicado no centro da bola

Fonte: [45]

Inicialmente existe um intervalo aberto entre a bola e a superfície do solo. É definido um campo gravitacional no modelo, por $-9.81\mathbf{k}$ [m/s²]. Após o início da simulação, a bola se aproxima da superfície e interage com a mesma, por meio de uma sequência de impactos. A Figura 5.13(a) mostra a evolução temporal da componente normal da força de contato, mostrando o comportamento dos impactos. Note que a intensidade dos picos diminui por conta do valor adotado para o coeficiente normal de amortecimento (c_n).

Figura 5.13 – Exemplo numérico 5.7.1: força de contato ao longo do tempo: (a) impactos sucessivos (b) evolução das componentes normal e atrito

Fonte: [45]

A fim de checar esse resultado com uma referência, pode-se estimar o comportamento do impacto pela solução analítica de impacto sem atrito entre dois corpos elásticos esféricos, como apresentado em [68]. Assume-se que o plano do solo, rígido, representa um corpo com massa infinita, Módulo de Young infinito e raio de curvatura infinito. Dessa forma, as propriedades da bola é que definem os resultados da solução de impacto. O atrito não é importante nessa fase, uma vez que não há solicitação tangencial. A fim de quantificar as propriedades de contato mostradas na Tabela 5.2 assume-se para a bola um Módulo de Young de 15 MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$, levando à rigidez de contato Hertziano considerando 5% de deslocamento radial. Com isso, pode-se avaliar a duração da colisão (t_c) utilizando-se da seguinte equação [68]:

$$t_c = 2.87 \left(\frac{m^{*2}}{r^* E^{*2} v_{rel}} \right)^{0.2}. \quad (5.76)$$

onde m^* é a massa equivalente do par de contato (massa da bola), r^* é o raio de curvatura equivalente (raio da bola), E^* é o Módulo de Young equivalente $\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)$. O valor dado por v_{rel} corresponde à velocidade relativa entre a bola e a superfície rígida do solo imediatamente anterior à ocorrência do impacto.

A fim de avaliar comparativamente os resultados de duração de impacto analítico e numérico, a equação (5.76) foi utilizada considerando-se como v_{rel} o valor numérico obtido da velocidade da bola logo antes de cada impacto, levando aos resultados mostrados na Tabela 5.1. Os resultados numéricos provenientes da integração do modelo ao longo do tempo também são mostrados, para comparação. Pode-se notar uma boa correlação para os primeiros quatro impactos, mesmo com a diferença de modelagem existente, principalmente por conta do modelo de dissipação, existente no modelo numérico. Em particular, no último impacto não foi registrada separação entre os corpos na integração do modelo numérico, como mostrado graficamente na Figura 5.13(a).

No instante 1.0 s, um impulso triangular é aplicado no centro da bola, na direção y, conforme ilustrado na Figura 5.12(b). Isso induz deslizamento entre a bola e o solo. Ao final do impulso ($t = 1.2$ s) a bola ainda está deslizando, com valores calculados de velocidade linear e angular. Utilizando-se desses dados como condições iniciais, pode-se compor um modelo analítico utilizando-se das equações de Newton-Euler. Com isso, é possível descrever o movimento subsequente da bola. Tal modelo prevê a transição do regime de deslizamento para

rolamento puro no instante $t \approx 1.93$ s. Os resultados comparativos entre modelo analítico e o numérico estão ilustrados na Figura 5.14, que mostram uma ótima aderência. O modelo numérico é capaz de capturar a transição entre regime de deslizamento e rolamento puro.

Por último, deseja-se comentar sobre o efeito do coeficiente de amortecimento tangencial de contato c_t utilizado no modelo numérico. Pode-se ver na Figura 5.13(b) a evolução temporal da força de atrito. Note que por conta do carregamento impulsivo, que induz deslizamento, logo após o instante 1.0 s ocorre uma rápida solitação de atrito até seu valor máximo disponível, aproximadamente de 123.3 N. Quando a transição de deslizamento para rolamento puro ocorre em $t \approx 1.93$ s, fisicamente a força de atrito deve ceder para um valor nulo, caracterizando o rolamento puro de um corpo rígido. Numericamente, no entanto, a condição de não deslizamento é forçada por meio do fator de penalidade tangencial. Esse pode criar oscilações artificiais na força de atrito no regime de rolamento. A força de amortecimento tangencial faz o papel de mitigar essas oscilações, criando uma descrição mais realista do rolamento puro, como pode ser visto na Figura 5.13(b).

Figura 5.14 – Exemplo numérico 5.7.1: (a) evolução temporal da medida de rotação da bola (b) evolução temporal da magnitude da velocidade angular da bola

Fonte: [45]

Tabela 5.1 – Exemplo numérico 5.7.1: comparação dos resultados de duração de colisões sucessivas.

Numéricos, do presente modelo e analíticos, utilizando equação (5.76)

Colisão	Velocidade relativa (m/s)	Resultados numéricos para duração da colisão (s)	Resultados analíticos para duração da colisão (s)
1	1.98	0.024	0.021
2	1.10	0.025	0.024
3	0.59	0.026	0.027
4	0.29	0.029	0.031
5	0.11	infinito	0.038

Fonte: [45]

Tabela 5.2 – Exemplo numérico 5.7.1: dados do modelo

Dados da bola (esfera)		Dados da superfície plana (solo)		Dados do contato	
Centro	(0, -3, +0.4) [m]	Vértices	A: (-1, -4, 0) [m] B: (+1, -4, 0) [m] C: (+1, +10, 0) [m] D: (-1, +10, 0) [m]	Coeficiente de atrito (μ)	0.25
Raio	0.2 m	Regiões triangulares	ABD BCD	Fator de penalidade normal (ϵ_n)	1E6
Massa específica	1,500 kg/m ³	Coordenadas dos nós pilotos (fixos)	(0, 0, 0) [m]	Fator de penalidade tangencial (ϵ_t)	1E6
				Coeficiente de amortecimento normal (c_n)	2.5E3
				Coeficiente de amortecimento tangencial (c_t)	1E3

Fonte: [45]

5.7.2 Interação de uma bola com o solo rígido não plano

Esse exemplo procura mostrar o comportamento do modelo de contato para situações de conservação/dissipação de energia, por conta da ação do atrito. Para tal, foi considerado novamente um cenário de interação de uma bola com o solo rígido que, dessa vez, é considerado como não plano. A bola considerada é a mesma do exemplo anterior, bem como os parâmetros de contato mostrados na Tabela 5.2. As condições iniciais e carregamentos do modelo são distintos do exemplo anterior. A Tabela 5.3 mostra os detalhes da composição geométrica

considerada para o solo rígido. Trata-se de 16 triângulos e uma superfície oscilatória, denominada “buraco”. A Figura 5.15 mostra a configuração inicial considerada. A bola se encontra inicialmente na posição (3.5,5.5, 0.2) [m]. As condições iniciais são: velocidade linear (1.0, 1.0, 0.0) [m/s] e velocidade angular (-5.0, 5.0, 0.0) [rad/s]. Isso leva à condição de rolamento puro no início da simulação.

Figura 5.15 – Exemplo numérico 5.7.2: configuração inicial (a) vista isométrica (b) vista superior (c) vista lateral

Fonte: [45]

Tabela 5.3 – Exemplo numérico 5.7.2: dados das superfícies que compõem o solo

Dados das superfícies triangulares		Dados da superfície oscilatória
Vértices [m]	A: (0, 0, 0); B: (4, 0, 0); C: (8, 0, 0); D: (12,0, 0) E: (0, 4, 0); F: (4, 4, 0); G: (8, 4, 0); H: (12,4, 0) I: (0, 8, 0); J: (4, 8, 0); K: (8, 8, 0); L: (12,8, 0) M: (0, 12, 0); N: (4, 12, 0); O: (8, 12, 0); P: (12,12, 0)	$A_{\zeta} = +0.2$; $A_{\theta} = -0.2$ $A_{\zeta\theta} = +0.2$; $\lambda_{\zeta} = 4.0$ $\lambda_{\theta} = 4.0$; $\phi_{\zeta} = -\frac{\pi}{2}$; $\phi_{\theta} = +\frac{\pi}{2}$ $\mathbf{x}_p^i = (6.0, 6.0, -0.2)[m]$ $\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Trângulos	ABE; BCF; CDG; EBF; FCG; GDH; EFI; GHK; IFJ; KHL; IJM; JKN; KLO; MJN; NKO; OLP	
Coordenadas do nó piloto (fixo)	(6.0,6.0, -0.2)[m]	

Fonte: [45]

A ideia do exemplo é introduzir um movimento que leva a bola a cair no buraco do solo não plano, o que irá induzir solicitações tangenciais no contato (atrito). Nesse cenário é esperado que possa ocorrer transição de rolamento/deslizamento, dependendo do coeficiente de atrito considerado. Quatro casos distintos foram simulados, para diferentes coeficientes de atrito: (a) $\mu = 0.00$, (b) $\mu = 0.05$, (c) $\mu = 0.10$ e (d) $\mu = 0.30$. O modelo considera somente o campo gravitacional como fonte de carregamento externo, como no exemplo anterior, bem como a interação de contato entre a bola e as superfícies que compõem o solo. A simulação é feita considerando-se duração de 10 s e utilizando-se de um passo de integração temporal constante de 0.0005 s.

Figura 5.16 – Exemplo numérico 5.7.2: trajetória do centro da bola para cada caso simulado (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$

Fonte: [45]

A Figura 5.16 mostra a trajetória do centro da bola para os quatro casos considerados. Note que nos casos (a) e (d) a bola entra no buraco, mas consegue escapar para fora dele. Ao contrário, nos casos (b) e (c), fica aprisionada. Para melhor entender o comportamento encontrado foi realizada uma análise energética da bola, mostrada na Figura 5.17 em que são plotadas para os quatro casos a evolução temporal da energia cinética, potencial e mecânica da bola. Para compor os dados desse estudo foram considerados os resultados da simulação realizada: velocidade do centro da bola, velocidade angular da bola e posição do centro da bola. A energia mecânica é avaliada no instante inicial, a partir do qual é possível avaliar a dissipação ocorrida a cada instante de análise. Pode-se notar uma similaridade muito grande entre os casos (a) e (d), que em muito diferem dos casos (b) e (c), o que é alinhado com o comportamento registrado nas trajetórias plotadas na Figura 5.16.

Figura 5.17 – Exemplo numérico 5.7.2: estudo energético (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$

Fonte: [45]

Para melhor compreender a razão da dissipação de energia, são plotadas na Figura 5.18 a evolução temporal da força normal, atrito e máximo atrito disponível (pela Lei de Coulomb). Essa análise permite avaliar quando ocorre deslizamento. Note que no caso (a) deslizamento ocorre o tempo todo. No entanto, como o coeficiente de atrito é nulo, não ocorre dissipação de energia. Nesse caso, o momento angular da bola é mantido constante ao longo de todo o estudo, uma vez que não há atrito disponível para alterá-lo e a componente normal do contato tem linha de ação sempre passando pelo centro da esfera. Assim, ocorre desacoplamento do movimento angular e linear da bola. Por outro lado, no caso (d) o atrito disponível é tão elevado que a solicitação não atinge o seu limite de saturação de Coulomb, não induzindo deslizamento, levando à dissipação nula (nesse caso o atrito não realiza trabalho). O momento angular, no entanto, sofre mudanças nesse caso, tanto que após a bola escapar do buraco, a velocidade angular sofreu alterações em sua direção. Durante toda a simulação a bola se mantém na condição de rolamento, sem deslizamento. Os casos (c) e (d) representam valores de coeficiente

de atrito intermediários e apresentaram dissipação de energia, pois induziram deslizamento, suficiente para prender a bola no buraco.

A análise da Figura 5.18 mostra que o modelo pôde lidar corretamente com a saturação da força de atrito para os distintos valores de coeficiente de atrito adotados. Também é possível observar algumas oscilações iniciais obtidas nas componentes normais. Essas advêm da acomodação inicial da bola na superfície triangular, uma vez que apresenta uma pequena queda e penetração por conta da imposição de restrição normal que é feita pelo Método da Penalidade. A dissipação normal faz um papel de mitigação dessa oscilação.

Figura 5.18 – Exemplo numérico 5.7.2: forças de contato (a) $\mu = 0.00$ (b) $\mu = 0.05$ (c) $\mu = 0.10$ (d) $\mu = 0.30$

Fonte: [45]

5.7.3 Flambagem de um tubo em contato com uma barra tracionada

Esse exemplo explora o presente modelo de contato empregado em conjunto com elementos finitos. Pode-se interpretar a presente aplicação como algo similar ao que é classicamente feito na abordagem *master-slave*, ou seja, os nós da malha de uma das superfícies são considerados pontos *slave*, enquanto a outra superfície é parametrizada. Em particular, o exemplo é aplicado ao contato entre elementos finitos de barra. A estratégia utilizada, portanto, para estabelecer o contato, é que uma das barras é composta por uma série de esferas, localizadas nos nós de sua malha. Isso é particularmente útil para representar o contato envolvendo barras cuja seção transversal seja circular/tubular.

O cenário escolhido para ser simulado é um fenômeno de flambagem de uma estrutura bastante particular: um tubo contendo uma barra tracionada em seu interior. A Figura 5.19 (instante 0 s) mostra a configuração de referência proposta renderizada, a qual é composta de um arranjo simples de um tubo fixado na base A e livre na extremidade B. Dentro do tubo há uma barra. A seção transversal na extremidade B do tubo é articulada na extremidade da barra. O ponto oposto da barra é localizado na mesma cota z da seção transversal A do tubo, mas não é conectada nessa. Possui grau de liberdade apenas de translação na direção z . Com isso, o exemplo explora a aplicação de um carregamento de tração na barra por meio desse ponto, o que é feito com a aplicação de uma força na direção z negativa, induzindo tração na barra e compressão no tubo.

Note que há uma pequena excentricidade entre as seções transversais do tubo e da barra. Assim, espera-se que o tubo irá flambar com certo nível de tração da barra. Ambos, tubo e barra, foram modelados utilizando-se elementos finitos de barra.

O contato entre a barra e a superfície interna do tubo é modelado considerando-se que os nós da barra são os centros de superfícies esféricas, cujos raios são os mesmos da seção transversal atribuída à barra que é tracionada. A superfície interna do tubo é modelada utilizando-se da parametrização de superfície super elíptica flexível, tomando o caso particular de $n = 2$ e $a = b$, o que recupera uma seção transversal circular. O contato é considerado sem atrito. Todos os dados do modelo estão descritos na Tabela 5.4. Nesse exemplo não é considerada ação do campo gravitacional.

Tabela 5.4 – Exemplo numérico 5.7.3: dados do modelo

Comprimento do tubo e da barra	2.0 m
Seção transversal do tubo	Diâmetro externo 0.10 m Diâmetro interno 0.09 m
Seção transversal da barra (circular)	Diâmetro 0.04 m
Material do tubo	Módulo de Young 2 GPa; Coef. Poisson 0.3; Massa específica 2,000 kg/m ³
Material da barra	Módulo de Young 200 GPa; Coef. Poisson 0.3; Massa específica 8,000 kg/m ³
Excentricidade entre os centróides do tubo e da barra	0.0001 m
Refinamento de malha para o tubo (uniforme)	10 elementos (3 nós cada)
Refinamento de malha para a barra (uniforme)	20 elementos (3 nós cada)
Coeficiente de atrito (μ)	0
Fator de penalidade normal (ϵ_n)	1E7
Coeficiente de amortecimento normal (c_n)	0

Fonte: [45]

Figura 5.19 – Exemplo numérico 5.7.3: configuração inicial e configurações deformadas em vista renderizada do modelo mostrando o tubo e a barra tracionada. Forças de contato aplicadas na barra tracionada são mostradas com setas com escala de cores relacionada à magnitude do esforço

Fonte: [45]

Figura 5.20 – Exemplo numérico 5.7.3: componentes x e y de deslocamento do ponto B da barra tracionada

Fonte: [45]

O único carregamento externo considerado foi uma força na direção z negativa, variável no tempo, aplicada na base ($z = 0$) da barra, induzindo tração na mesma. Tal carregamento é aplicado como uma rampa linear de 0 a 100kN com duração de 5 s. Durante esse período foi realizada uma análise dinâmica transiente, considerando os coeficientes de Newmark $\beta = 0.3$ e $\gamma = 0.51$. Tais coeficientes procuram introduzir no modelo um pequeno grau de amortecimento numérico, com o objetivo de filtrar altas frequências de vibração que surgem no sistema quando da ocorrência de um impacto entre a superfície interna do tubo e a superfície externa da barra tracionada (esferas), logo após a ocorrência da flambagem do tubo. O passo de tempo de integração é de 0.001 s, com possibilidades de auto-adaptatividade, de acordo com dificuldades de convergência.

A Figura 5.19 mostra algumas imagens de configurações intermediárias, em alguns instantes específicos. Note que o tubo começa sendo comprimido e em seguida sofre flambagem, como esperado. Entretanto, a presença física da barra tracionada no interior do tubo não permite que esse assuma sua configuração desejada pós-flambagem, uma vez que ocorre contato. As forças de contato aplicadas à barra estão mostradas em escala de cores mostrando sua magnitude na Figura 5.19.

Após a flambagem, o tubo continua sendo comprimido, mas agora também é influenciado pelas forças de contato de interação com a barra. O que ocorre na sequência é um fenômeno interessante de busca por outra configuração de equilíbrio, o que acaba se dando por um padrão de hélice 3D, como observado na configuração em 5 s. Nessa situação a ação do contato já se encontra distribuída em diversas esferas que representam os pontos de aplicação das forças na barra. A fim de mostrar melhor o comportamento ocorrido é possível visualizar na Figura 5.20 a série temporal das componentes x e y do deslocamento do ponto B do tubo.

Note que a flambagem ocorre em aproximadamente $t \approx 0.8$ s, seguida de oscilações no plano xz devido ao contato (veja a configuração associada a 2 s na Figura 5.19). No instante $t \approx 2.7$ s a estrutura inicia sua busca por uma configuração 3D (hélice), o que pode ser observado por um deslocamento não nulo na direção y, levando à configuração ilustrada associada a 5 s na Figura 5.19. Observou-se que a segunda ocorrência de flambagem é dependente de pequenas imperfeições (por exemplo geradas por erros de arredondamento ou critérios de parada distintos).

Esse exemplo possui uma importância conceitual adicional associada ao problema local de mínima distância e sua não convexidade: se o tubo e barra forem considerados concêntricos na configuração de referência, a flambagem não ocorreria (pois não haveria fonte de imperfeição no modelo), mas também o algoritmo de contato falharia. Isso pois existiriam infinitas soluções para o problema local de mínima distância, mesmo sem a ocorrência de contato, mas a não convergência para uma solução impediria o algoritmo de avançar. A solução para tal questão nesse caso foi desenvolver malhas com pequena excentricidade (cujo valor está descrito na Tabela 5.4). Isso além de ajudar a evitar esse tipo de problema, também introduz uma imperfeição geométrica que induz a flambagem. Discussões adicionais sobre casos patológicos de problema de mínima distância são abordados no Capítulo 7.

5.7.4 Bola rolando em um canal flexível modelado com cascas

Esse exemplo explora a possibilidade de tratar o contato entre um corpo esférico (bola) e uma estrutura de um canal flexível, modelada utilizando-se de elementos finitos de casca. Foi considerada a seção transversal do canal de acordo com a Figura 5.21(a).

Figura 5.21 – Exemplo numérico 5.7.4: (a) seção transversal do canal (b) força variável ao longo do tempo aplicada no centro da bola

Fonte: [45]

O canal é extrudado com comprimento de 1.0 m ao longo da direção x. A superfície é representada com elementos de casca, sendo todos os elementos triangulares como mostrado

na Figura 5.22 (instante 0.0 s – configuração de referência). A malha possui 408 elementos e 959 nós. O modelo estrutural de casca considerado é explorado no item 3.3.4. A espessura das cascas é uniforme de 2 mm e o material representa uma liga de alumínio, com Módulo de Young 70 GPa, coeficiente de Poisson 0.3 e massa específica 2,700 kg/m³. A seção transversal do canal é engastada em $x = 0$, estabelecendo uma viga em balanço. Além disso, os nós da extremidade oposta (em $x = 1.0$ m), possuem o deslocamento na direção y restrito, a fim de evitar a ocorrência de flambagem lateral do canal.

Uma bola rígida com raio 0.025 m é inicialmente centrada na posição (0.001, 0, 0.00055) [m]. Utilizando-se como base a malha de cascas, 408 parametrizações triangulares de segunda ordem são criadas. Contato com atrito é estabelecido entre a bola e todas as superfícies triangulares, com os seguintes dados: coeficiente de atrito $\mu = 0.4$, fator de penalidade normal $\epsilon_n = 1E5$, fator de penalidade tangencial $\epsilon_t = 1E4$, coeficiente de amortecimento normal $c_n = 1E3$ e coeficiente de amortecimento tangencial $c_t = 1E2$.

Os carregamentos externos considerados são o peso próprio da bola, com campo gravitacional $-9.81 \text{ k [m/s}^2]$ (o peso próprio da estrutura de cascas não foi considerado), e uma força variável ao longo do tempo, de acordo com o plotado em Figura 5.21(b), aplicada ao centro da bola a fim de introduzir movimento da mesma ao longo do canal. O sistema é integrado considerando-se os coeficientes de Newmark: $\beta = 0.3$ e $\gamma = 0.51$ (a fim de introduzir amortecimento numérico para as altas frequências de vibração).

A Figura 5.22 mostra visualizações de configurações sucessivas, demonstrando o movimento ocorrido e a interação entre o canal e a bola. A bola, em primeiro lugar estabelece contato com o canal. Na sequência, inicia o rolamento, afastando-se do ponto de engastamento do canal, que começa a flexionar por conta da ação do contato. À medida que a bola avança, mais momento fletor é induzido, aumentando o nível de deslocamentos verticais do canal. Com isso, as forças de contato envolvidas acabam se reduzindo, uma vez o próprio movimento do canal (deflexão) tende a abrir o contato. A bola, no entanto, se mantém caindo, sempre tentando fechar o contato, mas as forças normais diminuem sua magnitude. Esse comportamento é observado até que a bola deixa o canal em aproximadamente $t \approx 0.65$ s. A Figura 5.23 mostra a série temporal dos deslocamentos da ponta do canal, bem como as componentes normal e atrito da interação de contato.

Figura 5.22 – Exemplo numérico 5.7.4: algumas configurações deformadas do sistema associadas à evolução da integração ao longo do tempo

Fonte: [45]

Figura 5.23 – Exemplo numérico 5.7.4: (a) deslocamento da ponta do canal ao longo do tempo (b) componentes da força de contato atuante na bola ao longo do tempo

(a)

(b)

Fonte: [45]

6 Formulação de contato *master-master* entre duas curvas no espaço

No Capítulo 4 foi apresentada a formulação *master-master* entre duas superfícies no espaço. O presente Capítulo procura ilustrar como se modifica tal formulação para o caso em que se consideram duas curvas espaciais, em vez de duas superfícies. Esse tipo de simplificação é bem-vinda para modelagem de contato entre estruturas de barras, em particular com seção transversal circular ou tubular.

O conteúdo do presente Capítulo é baseado nos trabalhos [27] e [26], onde as ideias seminais da formulação *master-master* entre duas curvas no espaço são propostas. A utilização e adaptação para o contexto da formação de laços (auto-contato) em barras deu origem ao trabalho [28]. Esse corresponde à referência básica do conteúdo aqui exposto, em particular no exemplo numérico.

6.1 Descrição geométrica

A Figura 6.1 ilustra dois sólidos deformáveis B_A e B_B , candidatos a apresentar interação por contato. Ambos os sólidos são corpos esbeltos, em que tipicamente é possível a utilização de modelos de barras para representação de seu comportamento estrutural global. Ainda é assumido que a seção transversal de ambos os corpos seja circular ou tubular, de modo que r_A e r_B seja respectivamente os raios externos das seções transversais de B_A e B_B . A Figura 6.1 também ilustra os eixos dessas barras, que são descritos por curvas espaciais genéricas, denotadas por $\Gamma_A = \hat{\Gamma}_A(\zeta_A)$ e $\Gamma_B = \hat{\Gamma}_B(\zeta_B)$, em que ζ_A e ζ_B são coordenadas convectivas para a descrição dos pontos materiais presentes nas curvas Γ_A e Γ_B , respectivamente. Pode-se definir um único vetor de coordenadas convectivas para ambas as curvas, de forma conveniente e compacta, dado por $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \zeta_A \\ \zeta_B \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

As curvas Γ_A e Γ_B são deformáveis, acompanhando as deformações dos sólidos esbeltos que as definem, tipicamente modelados estruturalmente por barras. Analogamente ao discutido

no Capítulo 4, admite-se o uso de alguma discretização para descrição dos campos que descrevem a cinemática dos corpos (deslocamentos, rotações). Os graus de liberdade utilizados para tal são denotados por $\mathbf{d}_A$ e $\mathbf{d}_B$, respectivamente para os sólidos B_A e B_B . Tais vetores também descrevem a evolução das curvas Γ_A e Γ_B , respectivamente. É possível agrupar os graus de liberdade que regem a evolução de ambas as curvas em um único vetor $\mathbf{d}$, tal que

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Figura 6.1 – Corpos esbeltos B_A e B_B candidatos a apresentar interação por contato e a parametrização de seus eixos Γ_A e Γ_B

Fonte: do autor

Com o objetivo de descrever pontos materiais genéricos em ambas as curvas, é possível descrever parametrizações dependentes das coordenadas convectivas ζ_A e ζ_B e dos graus de liberdade $\mathbf{d}$, tal que:

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \hat{\Gamma}_A(\zeta_A, \mathbf{d}_A) \\ \Gamma_B &= \hat{\Gamma}_B(\zeta_B, \mathbf{d}_B). \end{aligned} \quad (6.3)$$

De forma análoga à desenvolvida no Capítulo 4, aqui pode-se definir a função *gap* vetorial $\mathbf{g}$, que conecta pontos materiais em ambas as curvas:

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\Gamma_A - \Gamma_B). \quad (6.4)$$

Aqui pode-se definir uma medida escalar de *gap*, introduzindo os valores dos raios r_A e r_B , que incorporam informação da seção transversal circular ou tubular na medida da distância:

$$g_n = \hat{g}_n(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{g}\| - (r_A + r_B) = \|\Gamma_A - \Gamma_B\| - (r_A + r_B). \quad (6.5)$$

A direção normal de contato é dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{(\Gamma_A - \Gamma_B)}{\|\Gamma_A - \Gamma_B\|}. \quad (6.6)$$

Assim como na formulação do Capítulo 4, o leitor pode notar que a função *gap* pode ser avaliada para certa configuração de sólidos associada a certo $\bar{\mathbf{d}}$, e para um conjunto de coordenadas convectivas $\bar{\mathbf{c}}$. Dada uma configuração descrita por $\bar{\mathbf{d}}$, é necessário estabelecer uma metodologia para determinar o valor das coordenadas $\bar{\mathbf{c}}$ de forma conveniente e representativa para quesitos de medição de penetração/distância entre as superfícies. Esse é novamente alvo de discussão, mas no presente contexto apenas duas variáveis convectivas são abordadas: ζ_A e ζ_B .

6.2 Determinação dos pontos materiais para representação da ação de contato nas curvas

Como discutido no Capítulo 4, a formulação *master-master* está imersa em uma classe de métodos que representam a ação mecânica do contato por meio de um esforço pontual. As discussões feitas naquele contexto acerca da aplicabilidade desse tipo de hipótese se mantêm no presente Capítulo. A única diferença é que agora há somente duas coordenadas convectivas envolvidas. Essas serão associadas com pontos materiais nas curvas Γ_A e Γ_B .

Admite-se uma configuração de curvas regida por certo conjunto de coordenadas generalizadas atribuídas, dado por $\bar{\mathbf{d}}$. Os pontos materiais candidatos a suportar a ação de contato nos corpos B_A e B_B estão associados às coordenadas convectivas $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta}_A \quad \bar{\zeta}_B]^T$, solução do problema geométrico regido por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_A \zeta_A \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_B \zeta_B \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\Gamma_A \zeta_A \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_B \zeta_B \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{o}_2. \quad (6.7)$$

As equações presentes em (6.7) representam relações de ortogonalidade entre as curvas candidatas a contato. A solução do problema (6.7) pode ser feita pelo Método de Newton-Raphson, assim como já foi abordado no Capítulo 4 e no Capítulo 5, sob contextos distintos. Dessa forma, é necessário elaborar o Jacobiano, dada por $\mathbf{r}_{,c}$. A solução se dá da mesma forma que foi abordada anteriormente (por exemplo na equação (4.9)), mas aplicando ao presente contexto, trata-se de um problema de apenas duas equações e duas incógnitas. Assim, o Jacobiano é dado por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_{,c} = \begin{bmatrix} (+\Gamma_A \zeta_A \cdot \mathbf{g})_{,c} \\ (-\Gamma_B \zeta_B \cdot \mathbf{g})_{,c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_{,c})_{11} & (\mathbf{r}_{,c})_{12} \\ (\mathbf{r}_{,c})_{21} & (\mathbf{r}_{,c})_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Novamente também podem ocorrer problemas com relação à não convexidade do problema (6.7). Um caso particular de interesse prático é quando ambas as curvas Γ_A e Γ_B são retilíneas. Nesse caso é possível provar que a solução do problema (6.7) é única (desde que não seja retas paralelas). Tal solução é expressa, por exemplo, em [26].

Problemas geométricos que apresentam infinitas soluções de mínima distância como, por exemplo, eixos paralelos ou situações de contato conforme que descrevem localmente uma região de não convexidade podem se tornar uma dificuldade à determinação da solução $\bar{\mathbf{c}}$. Além disso, a questão da intersecção já discutida no contexto de contato entre superfícies também se faz presente. De fato, um conjunto de coordenadas convectivas associadas a um ponto de intersecção entre duas curvas é solução de (6.7), ainda que as curvas sejam não ortogonais. No presente contexto, no entanto, a questão da intersecção parece ser menos problemática. De fato, a ocorrência da intersecção exata entre duas curvas espaciais só ocorre em um cenário extremamente idealizado, enquanto que a intersecção entre superfícies sempre irá ocorrer em qualquer interação pontual de contato. Além do que, no contexto das superfícies, a solução de interesse prático associada à ortogonalidade entre as superfícies geralmente coexiste com a solução da intersecção, e é comum o cenário em que as duas se encontram geometricamente muito próximas, levando a dificuldades de convergência para a solução de interesse, como já discutido no Capítulo 4. Existe aqui novamente a possibilidade da utilização de um ferramental de otimização que aumenta a robustez na busca da solução desejada. As ideias discutidas no

item 4.2.2 podem ser utilizadas como base para tal desenvolvimento, mas há diferentes interpretações envolvidas.

6.3 Contribuições normais

A contribuição dos esforços normais de contato à forma fraca do modelo matemático, apresentada na equação (2.25), exige a introdução de um termo nomeado δW_c , responsável pela imposição da restrição associada ao contato. Admite-se que a solução $\bar{\mathbf{c}}$ já seja conhecida, ou seja, para um conjunto fixo de graus de liberdade que define a parametrização das curvas candidatas a contato, já foram determinados os pontos materiais, candidatos a contato, em ambas as curvas.

A função *gap* g_n pode ser avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$ para escrever uma inequação que descreva o vínculo mecânico do contato:

$$(g_n)_{\bar{\mathbf{c}}} \geq 0. \quad (6.9)$$

Nos casos em que a inequação (6.9) for obedecida, pode-se afirmar que ao menos localmente, em torno de $\bar{\mathbf{c}}$ não há violação da condição de contato. Caso contrário, penetração terá sido identificada (já considerando a medida do *gap* introduzida na equação (6.5), que contém informação dos raios externos das seções transversais). Nesse caso, é necessário tomar uma ação para impedir a penetração, pois o vínculo mecânico proposto em (6.9) deve sempre ser obedecido.

As formas abordadas no Capítulo 4 para imposição da restrição de contato no contexto da formulação *master-master* entre superfícies foram o Método das Penalidades e o Método dos Multiplicadores de Lagrange. No presente contexto do contato entre curvas, novamente as duas abordagens são possíveis. Há muita semelhança entre os desenvolvimentos do Capítulo 4 e a presente formulação. Há algumas diferenças importantes, no entanto, discutidas a seguir.

Há uma mudança de interpretação importante associada à definição do *gap* normal. No Capítulo 4 a definição de g_n difere da do presente Capítulo, uma vez que agora é considerado em g_n uma informação adicional dos raios exteriores das seções transversais das barras, o que não faz sentido para o Capítulo 4, em que não se fala em seções transversais quando da apresentação da formulação *master-master* entre superfícies gerais. Assim, o cálculo de g_n aqui deve ser feito com a expressão (6.5). No entanto, essa diferença não introduz modificações nas

variações e linearizações de g_n . De fato, para o presente contexto, a primeira variação de g_n dada por δg_n é descrita, a partir de (6.5), por:

$$\delta g_n = \delta(\|\Gamma_A - \Gamma_B\| - (r_A + r_B)) = \delta(\|\Gamma_A - \Gamma_B\|). \quad (6.10)$$

que é o mesmo resultado apresentado em (4.20). Assim, a presença dos termos constantes como modificadores de g_n em nada alteram sua variação, tampouco sua linearização. Assim, com essa reinterpretação acerca do *gap*, as mesmas equações apresentadas em todo o desenvolvimento do item 4.3 podem ser empregadas.

Há outra diferença fundamental, obviamente, no que tange ao número de coordenadas convectivas envolvidas na formulação. Por exemplo, o termo $\mathbf{g}_{,c}$ se apresenta por

$$\mathbf{g}_{,c} = [\mathbf{g}_{,\zeta_A} \quad \mathbf{g}_{,\zeta_B}]. \quad (6.11)$$

O termo $\mathbf{B}$ é dado por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}_{,d} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g})_{,d} \\ (-\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g})_{,d} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (6.12)$$

com

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A}^T \mathbf{g}_{,d} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B}^T \mathbf{g}_{,d} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

e

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T(\Gamma_{A,\zeta_A})_{,d} \\ -\mathbf{g}^T(\Gamma_{B,\zeta_B})_{,d} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Com a reinterpretação aqui descrita sobre alguns termos, pode-se escrever para a notação do presente Capítulo os seguintes potenciais para gerar as restrições normais do contato (W_{cL} se utiliza do Método dos Multiplicadores de Lagrange e W_{cP} do Método das Penalidades):

$$W_{cL} = \lambda g_n \quad e \quad (6.15)$$

$$W_{cP} = \frac{1}{2} \epsilon_n g_n^2 ,$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange e ϵ_n é um fator de penalidade para a restrição. A primeira variação de (6.15) leva a:

$$\delta W_{cL} = \delta \lambda g_n + \lambda \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_d)^T \mathbf{n} \quad (6.16)$$

e

$$\delta W_{cP} = \epsilon_n g_n \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_d)^T \mathbf{n}. \quad (6.17)$$

A linearização consistente de (6.16) e (6.17) leva a:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{cL}) = & \delta \lambda \mathbf{n} \cdot (\mathbf{g}_c \mathbf{D} + \mathbf{g}_d) \Delta \mathbf{d} + \\ & + \delta \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_c)^T + (\mathbf{g}_d)^T \right) \mathbf{n} \Delta \lambda + \\ & + \delta \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_c)^T + (\mathbf{g}_d)^T \right) \lambda \frac{1}{\|\mathbf{g}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) (\mathbf{g}_c \mathbf{D} + \mathbf{g}_d) \Delta \mathbf{d} + \\ & + \delta \mathbf{d} \cdot \lambda \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \right. \\ & \left. \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) \right) \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (6.18)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_{cP}) = & \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_c)^T + (\mathbf{g}_d)^T \right) (\mathbf{g}_c \mathbf{D} + \mathbf{g}_d) \Delta \mathbf{d} + \\ & + \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n g_n \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{n}) \mathbf{D} + \right. \\ & \left. \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{n}) \right) \Delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.4 Discussão sobre as contribuições tangenciais

O desenvolvimento das contribuições tangenciais feito no item 4.4, para superfícies em contato, também pode ser reinterpretado no presente contexto. Toda a base de desenvolvimento

descrita no item 4.4 assume que a interação pontual de contato se dá diretamente sobre as parametrizações das superfícies de contato. O presente contexto difere na questão, à medida que é considerado, para efeito da detecção de contato, a medida de *gap* normal da equação (6.5). Esse inclui além das próprias parametrizações das curvas, a presença dos raios das seções transversais das barras. Isso implica em assumir que as ações pontuais de contato não ocorrem exatamente sobre as curvas Γ_A e Γ_B , mas afastada das mesmas, de distâncias correspondentes aos raios r_A e r_B .

A simples inclusão dos raios r_A e r_B na função g_n não inclui nenhuma dependência adicional para o *gap* normal em relação a outros graus de liberdade do modelo, uma vez que os raios são constantes que entram como modificadores para a função *gap* normal. Assim, a função g_n é puramente baseada na descrição geométrica da parametrização das curvas Γ_A e Γ_B . A ação pontual de contato atua fisicamente nas superfícies das barras, distantes dos eixos. No entanto, quando a seção transversal da barra é circular e há somente componente normal na força de contato, a linha de atuação do par ação-reação passa pelos pontos materiais associados à solução $\bar{\mathbf{c}}$. Logo, o par de forças de contato não induz momentos em relação aos eixos das barras.

Quando se deseja incluir atrito nessa formulação, tudo se torna mais complexo. As componentes tangenciais podem induzir momento em relação ao eixo de cada barra, em cenários complexos que envolvem, por exemplo, o rolamento de uma barra sobre a outra. Se for feita a mesma hipótese que em [27], esses momentos são desprezados e os esforços de atrito são calculados diretamente pela definição de uma função *gap* tangencial avaliada considerando-se a tendência de deslizamento diretamente entre as parametrizações das curvas, assumindo que as ações tangenciais possam ser diretamente transportadas para os eixos das barras, sem a indução de momentos. Isso é razoável se os raios envolvidos forem muito pequenos. Nos casos em que não for razoável, pode-se recorrer à formulação *master-master* entre superfícies, descrita no Capítulo 4, que considera naturalmente todos esses efeitos de momentos induzidos de forma implícita na parametrização das superfícies de contato, inclusive para seções transversais não circulares.

Com base na discussão aqui colocada, entende-se que a ação tangencial possa ser considerada de forma semelhante à proposta no item 4.4, considerando-se apenas duas coordenadas convectivas em $\mathbf{c}$, de modo a descrever as duas curvas Γ_A e Γ_B . Poderia ser revisitada a questão associada ao plano de projeção do *gap* tangencial incremental, naquele contexto tomado como sendo o orientado segundo $\mathbf{n}_B$ (ver equação (4.54)). Seria necessário aqui redefinir a orientação desse plano com base na direção normal dada na equação (6.6). Com isso se estaria quantificando a tendência de deslizamento entre duas curvas espaciais

associadas aos eixos das barras. Ao se tratar o modelo dessa forma para a direção tangencial, se estaria assumindo as mesmas hipóteses simplificadoras de [27], pois não se utilizaria nenhuma informação do ponto de aplicação da força, que é afastado de cada curva, mas ao contrário, seria assumido diretamente que as ações ocorrem sobre cada curva, diretamente. Dessa forma não seriam induzidos momentos em relação ao eixo da barra.

Existe uma forma alternativa para formular as contribuições tangenciais dos esforços de contato. Trata-se de uma técnica apresentada inicialmente (pelo conhecimento do autor) em [27], mas depois amplamente utilizada em [13], [30] e [36], dentre outras referências. É desenvolvida de forma já pensada para elementos de barra. A ideia básica é decompor o *gap* tangencial em uma base não ortogonal formada pelas direções tangenciais instantâneas das barras. Inicialmente essa ideia foi utilizada com critérios independentes para avaliar as condições de não deslizamento ou deslizamento para cada direção da base não ortogonal, ou seja, associada a cada barra (ver [27]). No entanto, posteriormente os desenvolvimentos de [30] e [28] propuseram formas de acoplar as duas direções. A próxima seção ilustra o desenvolvimento dessa técnica para barras de eixo retilíneo, o que simplifica em muito aspectos algébricos, mas permite visualizar os conceitos envolvidos.

6.5 Barras de eixo retilíneo

Essa seção apresenta a formulação e exemplos numéricos de contato entre barras para um caso bastante particular: barras com eixo retilíneo. O desenvolvimento é baseado na formulação proposta em [27] e [28], que consideram todas as simplificações já mencionadas acerca da ausência de momentos induzidos pelo atrito.

6.5.1 Parametrização dos eixos das barras

Assume-se que a parametrização aqui descrita possa ser utilizada em conjunto com elementos finitos de barras. A descrição do eixo é dada por um segmento de reta unido as posições nodais das extremidades da barra. São adotadas as seguintes formas de parametrização para os eixos das barras, conforme ilustrado na Figura 6.2:

$$\Gamma_A = N_A(\zeta_A)\mathbf{x}_{AA}^{i+1} + N_B(\zeta_A)\mathbf{x}_{BA}^{i+1} \quad (6.20)$$

$$\Gamma_B = N_A(\zeta_B)\mathbf{x}_{AB}^{i+1} + N_B(\zeta_B)\mathbf{x}_{BB}^{i+1}.$$

Figura 6.2 – Parametrizações propostas para os eixos das barras

Fonte: do autor

A nomenclatura adotada em (6.20) é a seguinte: $\mathbf{x}_{vw}^{i+1}$ é a posição atual do nó “v” da barra “w”. Os índices “v” e “w” podem assumir “A” e “B”. Note que a forma proposta em (6.20) pode ser entendida como um caso particular de (4.115), considerando-se que a seção transversal se reduza ao eixo da barra. As funções $N_A(\zeta_A)$ e $N_B(\zeta_B)$ são lineares conforme descritas em (4.105).

Assume-se que as posições nodais sejam atualizadas de acordo com a descrição Lagrangiana atualizada por:

$$\mathbf{x}_{vw}^{i+1} = \mathbf{x}_{vw}^i + \mathbf{u}_{vw}^\Delta. \quad (6.21)$$

Note que a variação de ζ_A e ζ_B entre -1 e $+1$ leva ao mapeamento do comprimento completo de cada uma das barras. O leitor deve observar que assim como nos outros modelos de contato descritos nessa tese, é necessário julgar se a solução $\bar{\mathbf{c}}$ obtida em (6.7) se encontra no domínio de interesse geométrico para a parametrização em questão. Caso algum dos valores de coordenada convectiva esteja fora dessa faixa, o contato deve ser ignorado, pois não há sentido físico em considerá-lo.

Em particular, para o presente contexto de barras com eixo retilíneo, a solução do problema de mínima distância possui solução analítica, descrita em [27]. A solução é única, se não houver paralelismo.

A formulação normal de contato foi feita como ilustrado no artigo [28], e adaptada para a notação da presente tese nas equações do item 6.3. A formulação de atrito foi considerada de forma particular para a parametrização linear proposta e seguindo a técnica alternativa que foi mencionada na discussão do item 6.4. A mesma é detalhada a seguir.

6.5.2 Atrito

A fim de considerar a ação de componentes tangenciais de contato (atrito), o presente modelo define a função *gap* tangencial, medida responsável por quantificar o deslizamento relativo ou sua tendência. Posteriormente essa medida é utilizada para imposição da restrição de não deslizamento (*sticking*) ou para quantificar a direção de deslizamento (*sliding*). Seguem-se as ideias propostas em [27], [30] e [28].

A medida de *gap* tangencial proposta é vetorial, sendo decomposta em duas direções em geral não ortogonais, escritas para a próxima configuração (ainda não convergida): $\mathbf{t}_A^{i+1}$ e $\mathbf{t}_B^{i+1}$. Essas direções são alinhadas com os eixos das barras.

$$\mathbf{g}_t^{i+1} = g_{tA}^{i+1} \mathbf{t}_A^{i+1} + g_{tB}^{i+1} \mathbf{t}_B^{i+1} . \quad (6.22)$$

Cada uma das componentes é calculada com “w” assumindo “A” ou “B” por:

$$g_{tw}^{i+1} = \frac{1}{2} (\zeta_w - \zeta_w^0) \ell_w^{i+1} \quad (6.23)$$

em que ℓ_w^{i+1} é o comprimento atual de cada barra e ζ_w^0 é a coordenada convectiva associada ao início da interação de contato em cada barra. Note que as coordenadas de início de contato devem ser reestabelecidas no caso de perda e reinício de contato, para certo par de curvas. A forma vetorial aqui proposta para avaliar $\mathbf{g}_t^{i+1}$ difere da apresentação de [27], em que o tratamento do atrito se dá de forma independente e desacoplada para as direções $\mathbf{t}_A^{i+1}$ e $\mathbf{t}_B^{i+1}$, inclusive permitindo utilização de coeficientes de atrito distintos. Como se trata, no entanto, de

uma única interação de contato, optou-se pela verificação e tratamento acoplado das componentes g_{tA}^{i+1} e g_{tB}^{i+1} . Um desenvolvimento similar é encontrado em [30].

No início da interação de contato o deslizamento é nulo. No entanto, ao longo da interação pode ocorrer acúmulo de deslizamento. A fim de separar a ocorrência de *gap* tangencial associado ao deslizamento já acumulado em passos anteriores de solução daquele que ocorre no passo atual, é necessário salvar e atualizar uma variável de história de deslizamento ao final de cada passo. Seja o deslizamento acumulado proveniente de passos anteriores para cada direção tangente das barras dado por g_{tA}^s e g_{tB}^s (associados às direções atuais dadas por $\mathbf{t}_A^{i+1}$ e $\mathbf{t}_B^{i+1}$, respectivamente). É possível propor o *gap* tangencial-tentativa (*try*), cujas componentes são dadas por:

$$g_{tw}^{try} = g_{tw}^{i+1} - g_{tw}^s, \quad (6.24)$$

levando à forma vetorial:

$$\mathbf{g}_t^{try} = g_{tA}^{try} \mathbf{t}_A^{i+1} + g_{tB}^{try} \mathbf{t}_B^{i+1}. \quad (6.25)$$

Essa medida pode ser interpretada como a atual tendência de deslizamento entre as barras, ocorrida entre as configurações “i” e “i+1”. A força de atrito máxima comportada em tal cenário é dada, pela Lei de Coulomb, por $F_{at}^{max} = |\mu \epsilon_n g_n|$, sendo μ o coeficiente de atrito do par de contato. Alternativamente, utilizando-se do Método dos Multiplicadores de Lagrange para imposição da restrição normal, pode-se avaliar da forma $F_{at}^{max} = |\mu \lambda|$. A fim de checar se a condição é de não deslizamento ou de deslizamento, pode-se fazer o seguinte teste: calcula-se uma força de atrito-tentativa por $F_{at}^{try} = \|\epsilon_t \mathbf{g}_t^{try}\|$, sendo ϵ_T um fator de penalidade para a direção tangencial. Se F_{at}^{try} for menor ou igual a F_{at}^{max} , assume-se que não há deslizamento. Caso contrário, há deslizamento e ele deve ser calculado. Para tal, define-se o escalar $\overline{\Delta \lambda}$ por

$$\overline{\Delta \lambda} = \frac{F_{at}^{try} - F_{at}^{max}}{\epsilon_t}, \quad (6.26)$$

o qual representa a magnitude do deslizamento ocorrido. Uma vez convergido o passo da simulação, deve-se atualizar as medidas de deslizamento ocorridos g_{tw}^s para que haja coerência no cálculo de (6.24) no próximo passo de solução. Essas atualizações são feitas por:

$$(\mathbf{g}_{tw}^s)_{\text{updated}} = \mathbf{g}_{tw}^s + \overline{\Delta\lambda}_w, \quad (6.27)$$

com as componentes de deslizamento calculadas impondo-se que $\overline{\Delta\lambda}\mathbf{t}^{i+1} = \overline{\Delta\lambda}_A\mathbf{t}_A^{i+1} + \overline{\Delta\lambda}_B\mathbf{t}_B^{i+1}$, levando a:

$$\overline{\Delta\lambda}_A = \overline{\Delta\lambda} \frac{[(\mathbf{t}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1})(\mathbf{t}_A^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1}) - (\mathbf{t}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_A^{i+1})]}{(\mathbf{t}_A^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1})^2 - 1}, \quad (6.28)$$

$$\overline{\Delta\lambda}_B = \overline{\Delta\lambda} \frac{[(\mathbf{t}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_A^{i+1})(\mathbf{t}_A^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1}) - (\mathbf{t}^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1})]}{(\mathbf{t}_A^{i+1} \cdot \mathbf{t}_B^{i+1})^2 - 1}, \quad (6.29)$$

com $\mathbf{t}^{i+1} = \frac{\mathbf{g}_t^{\text{try}}}{\|\mathbf{g}_t^{\text{try}}\|}$ representando a direção estimada para o deslizamento (dada pelo *gap* tangencial-tentativa). A força de atrito, no caso de deslizamento, é dada por:

$$\mathbf{F}_{\text{at}}^{\text{slide}} = F_{\text{at}}^{\text{max}} \left(\frac{\overline{\Delta\lambda}_A}{\overline{\Delta\lambda}} \mathbf{t}_A^{i+1} + \frac{\overline{\Delta\lambda}_B}{\overline{\Delta\lambda}} \mathbf{t}_B^{i+1} \right) = F_{\text{at}}^{\text{max}} \mathbf{t}^{i+1}. \quad (6.30)$$

Caso o cenário seja de não deslizamento, então tem-se que $\overline{\Delta\lambda} = 0$. A força de atrito será regida pela tendência de deslizamento (cenário denominado por “*sticking*”), tal que:

$$\mathbf{F}_{\text{at}}^{\text{stick}} = \epsilon_t \mathbf{g}_t^{\text{try}}. \quad (6.31)$$

Com isso, pode-se escrever a contribuição à forma fraca do modelo devido à ação do atrito, dada de formas distintas para as condições de deslizamento ou não deslizamento:

$$\delta W_{f_{\text{stick}}} = \epsilon_t \mathbf{g}_t^{\text{try}} \cdot \delta \mathbf{g}_t^{\text{try}}, \quad (6.32)$$

$$\delta W_{f_{\text{slide}}} = F_{\text{at}}^{\text{max}} \mathbf{t}^{i+1} \cdot \delta \mathbf{g}_t^{\text{try}}. \quad (6.33)$$

A linearização consistente das equações (6.32) e (6.33) leva às contribuições para o operador tangente do modelo (2.30), devido aos efeitos de atrito. Pode ser esquematizada da forma:

$$\Delta(\delta W_{f_{\text{stick}}}) = \epsilon_t \Delta(\mathbf{g}_t^{\text{try}}) \cdot \delta \mathbf{g}_t^{\text{try}} + \epsilon_t \mathbf{g}_t^{\text{try}} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_t^{\text{try}}), \quad (6.34)$$

$$\Delta(\delta W_{f_{\text{slide}}}) = \Delta(F_{\text{at}}^{\text{max}} \mathbf{t}^{i+1}) \cdot \delta \mathbf{g}_t^{\text{try}} + F_{\text{at}}^{\text{max}} \mathbf{t}^{i+1} \cdot \Delta(\delta \mathbf{g}_t^{\text{try}}), \quad (6.35)$$

em que $\Delta(\dots)$ representa a linearização consistente da grandeza $(\dots)$.

6.6 Exemplo numérico

Essa seção ilustra uma aplicação envolvendo auto-contato que se utiliza da abordagem *master-master* entre curvas no espaço.

6.6.1 Auto-contato

O auto-contato representa um tipo de interação em que há um único corpo envolvido e existe contato entre porções distintas desse mesmo corpo. Tipicamente pode ocorrer em casos de corpos muito extensos e flexíveis, que venham a se tocar por conta de grandes deformações ocorridas, ou então quando a geometria de referência do corpo já é propícia a esse tipo de interação.

A principal diferença na abordagem do auto-contato em relação a outros cenários de contato entre corpos distintos está associada às técnicas de busca global. No item 3.3.6.1 foram discutidos alguns detalhes sobre a busca global, em que foi descrita uma técnica para eleger um possível par contato como forte candidato ou eliminá-lo prontamente, antes mesmo de despendar tempo com operações computacionais mais custosas. O objetivo desse tipo de abordagem é melhorar a eficiência computacional, evitando o gasto de tempo na solução do problema local de contato para um par improvável.

No contexto do auto-contato, pode-se adicionar critérios à busca global, a fim de eliminar prontamente alguns pares de contato que, embora elegíveis pelos critérios de proximidade geométrica discutidos no item 3.3.6.1, são improváveis ou impossíveis por critérios de vizinhança de malha, por exemplo (é improvável ou impossível o auto-contato entre elementos finitos imediatamente vizinhos em uma malha, por exemplo). Assim, pode-se criar um critério com base na geometria da configuração de referência que busca eliminar

prontamente alguns pares candidatos a contato [28]. A ideia é bastante simples: atribui-se para cada curva *master* um conjunto de curvas vizinhas (com base na configuração de referência) com as quais toda e qualquer possibilidade de contato será ignorada durante toda a simulação. A região geométrica de alcance para essa atribuição é denominada região de negação, e pode ser utilizada para criar negação entre curvas imediatamente vizinhas ou em vizinhança próxima. A Figura 6.3(a) mostra um exemplo de estabelecimento da região de negação em torno da curva número 3. A abrangência se dá atingindo as curvas de 1 a 5. Assim, pares de contato envolvendo essa região não serão considerados pelo modelo. Já um par de contato envolvendo as curvas 3 e 6, por exemplo, será permitido.

A configuração deformada ilustrada na Figura 6.3(b) mostra esferas *pinball* de detecção de contato que poderiam remeter à busca local de pares de contato impossíveis ou improváveis, por exemplo entre a curva 3 e suas vizinhas 2, 4, ou ainda a 5. A utilização conjunta da detecção da proximidade global de contato com a região de negação se mostra adequada para melhorar esse tipo de cenário, diminuindo custo computacional e evitando divergência da solução local do contato de pares improváveis ²⁷.

Figura 6.3 – (a) Região de negação para a curva número 3 com base na configuração de referência (b) Esferas *pinball* para detecção de contato em uma configuração deformada

Fonte: [28]

²⁷ Ainda mais importante do que evitar o custo computacional, a tentativa da solução local de contato para pares que geometricamente não são prováveis pode levar à divergência do Método de Newton-Raphson. Isso pode levar à total divergência de um modelo computacional por conta da não convergência do problema local de um par de contato que jamais seria ativo.

6.6.2 Formação de laços em estruturas de barras (*loops*)

Estruturas esbeltas comuns em aplicações de engenharia, como cabos elétricos, cabos umbilicais, arames, linhas de ancoragem e outras podem apresentar a formação de laços quando submetidas a certos carregamentos. Em particular, a ocorrência de laços pode ocorrer quando ocorrer compressão ou baixa tração, combinada com torção.

O estudo de instabilidade estrutural sob essas condições já foi bastante explorado na literatura. A base conceitual do problema de instabilidade pode ser vista em [80], em que é apresentada a fórmula de Greenhill para o cálculo da condição crítica de carregamentos que leva à instabilidade por flexo-torção. Para o leitor interessado em adentrar o assunto, recomenda-se a leitura dos trabalhos [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88] e [50]. Note que há ampla discussão do ponto de vista de engenharia, mas dependendo do trabalho os aspectos de modelagem computacional são também abordados. Em particular, o assunto da formação de laços gera interessantes discussões conceituais com relação às questões relacionadas às grandes rotações envolvidas e transformação de esforços de torção em flexão e vice-versa por meio de mudanças de configuração.

Em particular, em [89] é apresentada uma contribuição que envolve a modelagem do auto-contato em conjunto com um modelo de barra para aplicações envolvendo dinâmica estrutural. A formação do laço foi induzida em uma viga em balanço. Foi utilizado no contexto um critério de máxima proximidade geométrica para a viga, criando forças repulsivas quando o critério é desobedecido (emulando ação do contato). De acordo com os autores, as forças envolvidas se manifestaram aproximadamente na direção normal às barras.

Na temática da formação de laços em vigas é que se encontra o exemplo numérico desse Capítulo. A ideia é não apenas utilizar os modelos de contato *master-master* entre curvas, mas ainda comparar os resultados obtidos com experimentos disponíveis na referência [84].

6.6.3 Simulações e comparação com experimentos disponíveis na literatura

As simulações que são apresentadas nessa seção estão relacionadas aos experimentos propostos nos artigos [84] e [87]. Esses envolvem a indução de laços em barras bastante esbeltas (arames) de uma liga de níquel e titânio (nitinol) que possui propriedades elásticas bastante peculiares, sendo capaz de sofrer grandes deformações elásticas. O aparato experimental proposto foi modelado com as condições de contorno e dimensões exibidas na Figura 6.4. O

ponto material A é engastado, enquanto o ponto material B possui uma junta de translação, permitindo aplicação de esforços axiais (F) na barra, causando movimento em x . Ainda em B é possível aplicação de momento de torção (M_t), causando rotações em torno de x . Alternativamente é possível prescrever movimento de translação e rotação na direção x . A única rotação não nula que pode ocorrer em B é na direção x .

Fonte: [28]

Em [84] são feitos comentários sobre as formas convenientes e naturais para realização de experimentos que induzam a formação de laços em barras inicialmente retilíneas. A abordagem escolhida foi de controlar os deslocamentos e as rotações, e deixar com que as reações vinculares surjam naturalmente. Outra abordagem possível seria a imposição dos esforços e deixar com que os deslocamentos/rotações surgissem naturalmente.

Com o objetivo de procurar realizar uma simulação que reproduza os resultados de [84], no presente modelo numérico foi abordada também a imposição de deslocamentos e rotações no ponto material B. Dessa forma, a estratégia de simulação adotada foi de primeiro impor a rotação, criando um estado de pré-torção na barra, para posteriormente impor um deslocamento compressivo (gerando compressão na barra). As propriedades mecânicas e geométricas devidas estão mostradas na Tabela 6.1. As simulações realizadas foram executadas em três passos de carregamento:

1. A fim de induzir imperfeição no sistema para induzir uma direção preferencial de flambagem na bifurcação primária, uma força é aplicada na direção z , no meio da barra ($x = 0.25$ m). O valor considerado dessa força é de $1E-4$ N, o que é muito baixo quando comparado aos esforços solicitantes esperados para a barra em questão. Essa força é essencial para indução da flambagem. Trata-se de um passo quase estático.
2. Aplicação de rotação prescrita em B, na direção x . O valor da rotação varia de caso para caso simulado e está especificado mais à frente, nos resultados. Além disso, é prescrito um deslocamento compressivo na barra no ponto B $(-0.01, 0, 0)$ [m]. Esse passo também é realizado quase estaticamente.

3. A rotação do ponto B não é mais permitida, sendo mantida fixa. O ponto B agora sofre um deslocamento prescrito de valor mais elevado, criando uma compressão inicial em toda a barra, seguida de uma bifurcação secundária, que culmina na formação do laço. O valor total de deslocamento prescrito é de 0.4 m, durante 4.5 s. Esse passo é realizado dinamicamente, considerando a série temporal mostrada na Figura 6.5 ²⁸. Amortecimento estrutural foi considerado para atenuar vibrações de alta frequência. Isso foi feito por meio de um modelo de Rayleigh, adotando fator de amortecimento proporcional à matriz de rigidez $\beta_d = 1E-7$, e fator de amortecimento proporcional à matriz de massa $\alpha_d = 0$. Esses valores se mostraram como baixos o suficiente para não alterar (atrasar) a dinâmica estrutural esperada. Seu papel fundamental está associado a evitar problemas numéricos que podem ocorrer na integração ao longo do tempo em sistemas que sofrem impactos durante a simulação. Note que isso ocorre nesse modelo pois a formação do laço se dá dinamicamente e é brusca. Na ocorrência do auto-contato, a barra se choca com ela mesma promovendo esforços muito elevados.

Uma malha uniforme de 50 elementos de barra é considerada (101 nós). Para as interações de auto-contato, foi considerado o Método das Penalidades com $\epsilon_n = 1E5$ e $\epsilon_t = 1E4$. Esses valores se mostram adequados, havendo penetração desprezível.

²⁸ As condições iniciais de deslocamento e velocidade do ponto B foram consideradas nulas no início do terceiro passo de simulação. Pode-se notar que a rampa de deslocamento prescrito é composta de uma parte polinomial de segunda ordem – até o instante 1 s – e na sequência se torna uma rampa linear. Essa forma evita a ocorrência de um tranco inicial na simulação, o qual pode ocorrer se considerada uma rampa linear. Essa suavização foi bastante útil, uma vez que se está trabalhando com baixíssima taxa de amortecimento nesse modelo.

Tabela 6.1 – Exemplo numérico: dados da barra de nitinol

Diâmetro	ϕ	0.001	m
Módulo de Young	E	57	GPa
Módulo de Cisalhamento	G	20	GPa
Rigidez à torção (barra)	GA	1.57E+04	N
Rigidez axial (barra)	EA	4.48E+04	N
Rigidez flexional (barra)	EI	2.80E-03	N.m ²
Rigidez à torção (barra)	GJ	2.00E-03	N.m ²
Massa por unidade de comprimento (barra)	ρ	5.11E-03	kg/m
Comprimento	L	0.5	m

Fonte: [28]

Figura 6.5 – Deslocamento prescrito no ponto B ao longo do terceiro passo da simulação

Fonte: [28]

Dois grupos de simulações foram executados, nomeados “4 π ” e “5 π ”. Esses números descrevem a magnitude aplicada de rotação durante o segundo passo da simulação. São definidos a seguir alguns adimensionais, utilizados em [84] na plotagem dos resultados. Para tal, seja D a magnitude do deslocamento aplicado na direção x e que comprime a barra, M a magnitude do momento de torção reativo no ponto B e T a magnitude da reação axial na barra, no ponto B. Com isso, definem-se os três adimensionais:

- Adimensional de deslocamento axial: $\frac{D}{L}$
- Adimensional de força axial: $\frac{TL^2}{4\pi^2 EI}$

- Adimensional de momento de torção: $\frac{ML}{2\pi EI}$

Sendo o coeficiente de atrito desconhecido, foram considerados quatro diferentes valores para tal a fim de realizar um estudo paramétrico. A Figura 6.6 e a Figura 6.7 mostram os resultados das simulações e sua comparação com os experimentos para o caso “ 4π ”. A Figura 6.8 e Figura 6.9 mostram os resultados das simulações e sua comparação com os experimentos para o caso “ 5π ”. Os resultados experimentais foram todos retirados de [84]. A Figura 6.6 mostra uma boa correlação entre as simulações e o experimento. É possível observar que nesse caso não ocorrem diferenças importantes nos resultados associados ao torque, quando se varia o coeficiente de atrito. Entretanto, os resultados das forças axiais são sensíveis ao atrito, como mostrado na Figura 6.7. Nessa plotagem pode-se observar oscilações ao longo do tempo após a ocorrência da flambagem secundária (formação do laço). Estas estão relacionadas aos sucessivos impactos que ocorrem na estrutura durante o auto-contato. A Figura 6.10 mostra a configuração final encontrada para o caso de coeficiente de atrito 0.1. Nessa plotagem, não se verifica um padrão de emaranhado (*snarl*), uma vez que não foi fornecido torque suficiente para tal durante a fase de aplicação da rotação (segundo passo da simulação). Note que todas as plotagens parecem possuir um desvio constante em relação ao experimento. O mesmo foi relatado em [84], quando foi feita também uma comparação com modelos estruturais analíticos de vigas de Cosserat. As razões para tal são extensivamente discutidas no artigo, que conclui que tais diferenças devem ser devido às imperfeições iniciais existentes no experimento, mas que não foram incluídas no modelo analítico (e no presente caso, no modelo numérico).

A Figura 6.8 mostra diferentes tendências, quando comparada à Figura 6.6. De fato, nesse caso há grande sensibilidade ao atrito. Isso ocorre devido à maior magnitude de torque introduzido no modelo durante a imposição de rotação que, nesse caso, é superior. Um impacto mais significativo ocorre e forças normais no contato com maior magnitude são registradas. Com isso, um cenário de não deslizamento é encontrado durante a fase inicial do auto-contato. Em seguida, a estrutura se rearranja adquirindo uma forma de emaranhado, como mostrado na Figura 6.11. É interessante notar também que na Figura 6.8 o modelo numérico pode capturar tanto a ocorrência do emaranhado como também o nível de torque reativo com excelente correlação com os valores experimentais. O maior desvio está relacionado a um atraso no registro do emaranhado em relação aos experimentos. Uma vez que os resultados com atrito 0.5 e 1.0 são praticamente idênticos, pode-se inferir que o aumento do atrito colabora com o emaranhamento até certo limite, quando não há mais influência.

Figura 6.6 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “4 π ” (dados experimentais de [84])

Fonte: [28]

Figura 6.7 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “4 π ” (dados experimentais de [84])

Fonte: [28]

Figura 6.8 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “5 π ” (dados experimentais de [84])

Fonte: [28]

Figura 6.9 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “5 π ” (dados experimentais de [84])

Fonte: [28]

Figura 6.10 – Configuração final obtida para o caso “ 4π ” considerando coeficiente de atrito 0.1

Fonte: [28]

Figura 6.11 – Configuração final obtida para o caso “ 5π ” considerando coeficiente de atrito 0.1

Fonte: [28]

A Figura 6.9 mostra uma plotagem muito mais suja quando comparada ao caso anterior, vista na Figura 6.7. Isso ocorre por conta das maiores magnitudes de forças normais ocorridas durante os impactos sucessivos que ocorrem na estrutura, bem como rearranjos estruturais que são muito mais severos do que no caso anterior. Uma mesma tendência, entretanto, é observada, quando se comparam os resultados experimentais com as simulações.

Como uma forma de explorar possibilidades mais desafiadoras ao modelo numérico, em particular, para testar o comportamento de múltiplos pontos de contato simultâneos, propôs-se uma terceira condição de 10π rad de magnitude de rotação aplicada durante o segundo passo da simulação. Esse caso não possui comparações com experimentos. Aliás, é possível que o material venha a experimentar comportamento reológico não linear para o nível de deformação desse caso. Entretanto, optou-se por manter o modelo constitutivo linear elástico nas simulações. Os resultados obtidos estão na Figura 6.12 e Figura 6.13. Uma vez que esse caso envolve mais zonas de contato, bem como maiores valores de interações normais nos contatos, foi conveniente aumentar os fatores de penalidade para $\epsilon_n = 1E7$ e $\epsilon_t = 1E6$ para evitar penetrações excessivas e cruzamento das vigas no contato. A imperfeição do primeiro passo de carregamento também foi modificada para $1E-3$ N. Note na Figura 6.12 como o valor do torque se reduz com o rearranjo estrutural ocorrido, que nesse caso foi um longo emaranhamento mostrado na Figura 6.14, a qual descreve a configuração final para o caso sem atrito.

Figura 6.12 – Adimensional de torque vs. adimensional de deslocamento axial para “ 10π ”

Fonte: [28]

Figura 6.13 – Adimensional de força axial vs. adimensional de deslocamento axial para “ 10π ”

Fonte: [28]

Figura 6.14 – Configuração final renderizada obtida para o caso “ 10π ” considerando coeficiente de atrito 0.0

(a) vista lateral (b) vista isométrica (c) detalhe da vista isométrica

Fonte: [28]

7 Degeneração da formulação de contato *master-master* entre superfícies

Esse Capítulo contém uma discussão comparativa entre as formulações matemáticas para modelagem de contato apresentadas nos Capítulos 4, 5 e 6. Busca-se relacionar os modelos no que tange às hipóteses geométricas da detecção de contato e consequente implicação nas equações e métodos de solução. É apresentado o conceito de degeneração do contato *master-master* entre superfícies, o que possibilita criar uma família de formulações de contato em um mesmo ferramental matemático. Ao longo desse desenvolvimento são elencadas as dificuldades que devem ser enfrentadas em trabalhos futuros.

A partir do momento em que se assume a representação do contato entre dois sólidos como pontual (conforme apresentado no item 2.5.4), detém-se a tarefa de determinar o par de pontos materiais localizados em ambas as superfícies candidatas a contato. Esses serão escolhidos como pontos de aplicação, local da interação mecânica homogeneizada por meio de forças. Para tal, como apresentado no item 2.3.2 pode ser adotado o procedimento *master-slave*. Alternativamente, como dito em 2.5.4 e desenvolvido ao longo desse texto nos Capítulos 4 e 6, também pode-se adotar o procedimento *master-master*. A seguir será feita uma discussão mais detalhada da essência desses métodos, enfatizando suas hipóteses, peculiaridades e similaridades.

7.1 Procedimento *master-master* entre duas superfícies

No Capítulo 4, no desenvolvimento do procedimento *master-master* entre duas superfícies parametrizadas $\Gamma_A = \hat{\Gamma}_A(\zeta_A, \theta_A)$ e $\Gamma_B = \hat{\Gamma}_B(\zeta_B, \theta_B)$, definiu-se um vetor conectando dois pontos materiais arbitrários em ambas as superfícies, dado por:

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}) = \hat{\mathbf{g}}(\zeta_A, \theta_A, \zeta_B, \theta_B) = (\Gamma_A - \Gamma_B). \quad (7.1)$$

Naquela formulação de contato pontual entre duas superfícies, o par de pontos materiais associado à ação de contato nas superfícies foi adotado como o resultado da solução em $\mathbf{c} = [\zeta_A \ \theta_A \ \zeta_B \ \theta_B]^T$ para as relações de ortogonalidade descritas por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g} \\ \Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_4, \quad (7.2)$$

sendo o resultado denotado por $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta}_A \ \bar{\theta}_A \ \bar{\zeta}_B \ \bar{\theta}_B]^T$. Algumas possíveis técnicas para determinação dessa solução estão descritas no item 4.2.

Aqui enfatiza-se que o problema em questão possui quatro variáveis, que estão associadas aos pares ordenados (ζ_A, θ_A) e (ζ_B, θ_B) , os quais permitem localizar pontos materiais em ambas as superfícies, dados por $\bar{\mathbf{x}}_A = \hat{\Gamma}_A(\bar{\zeta}_A, \bar{\theta}_A)$ e $\bar{\mathbf{x}}_B = \hat{\Gamma}_B(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)$. Assim, a formulação *master-master* entre superfícies parametrizadas não pressupõe nenhuma informação a priori acerca de $\mathbf{c} = [\zeta_A \ \theta_A \ \zeta_B \ \theta_B]^T$, mas apenas assume as relações (7.2) para obtenção de $\bar{\mathbf{c}} = [\bar{\zeta}_A \ \bar{\theta}_A \ \bar{\zeta}_B \ \bar{\theta}_B]^T$. Todas as coordenadas convectivas decorrem da solução de (7.2), levando à ortogonalidade do vetor $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{\mathbf{x}}_A - \bar{\mathbf{x}}_B)$ em relação a ambas as superfícies.

7.2 Procedimento *master-slave* entre duas superfícies

O problema anterior pode ser modificado assumindo-se que em uma das superfícies, por exemplo em Γ_A , já se conhece a localização do ponto material candidato à interação de contato $\bar{\mathbf{x}}_A$, isto é, são conhecidas (ou adotadas) as coordenadas $(\bar{\zeta}_A, \bar{\theta}_A)$. Nesse caso, busca-se somente o ponto material em Γ_B , isto é, as coordenadas convectivas $(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)$ associadas a $\bar{\mathbf{x}}_B$. Para tal, abandona-se a exigência da ortogonalidade do vetor $\mathbf{g}$ em relação à superfície Γ_A , mas impõe-se a ortogonalidade de $\mathbf{g}$ em relação à superfície Γ_B , o que é expresso por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2, \quad (7.3)$$

que representa um conjunto simplificado de relações de ortogonalidade sendo um extrato de (7.2). Nesse caso $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\zeta_B, \theta_B)$. A determinação de $(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)$ vem da solução de (7.3). Enfatiza-se que nesse caso o problema em questão possui apenas duas variáveis e representa geometricamente a projeção ortogonal de um ponto material pré-escolhido em Γ_A na superfície Γ_B .

Note que o que acaba de ser descrito é o procedimento *master-slave*, entre um ponto *slave* $\bar{x}_A$ e a superfície *master* Γ_B . Portanto o procedimento *master-slave* pode ser compreendido como uma simplificação do procedimento *master-master* entre duas superfícies, em que são abandonadas duas relações de ortogonalidade em detrimento da escolha prévia de duas coordenadas convectivas associadas à mesma superfície e, portanto, do ponto material candidato a contato na mesma (ponto *slave*).

A formulação de contato apresentada no Capítulo 5 possui como base o procedimento *master-slave* para a definição da função *gap* normal, como visto na equação (5.7). Note que naquele contexto foi considerada a influência de uma medida do raio da esfera para quantificar o *gap*, uma vez que o ponto *slave* utilizado para detectar o contato se encontra no centro da esfera, e não em sua superfície. Tomando-se o caso particular em que o raio da esfera é nulo, ou seja, ela se colapsa em um ponto e a detecção de contato se dá pela posição desse ponto, a formulação do Capítulo 5 se torna um caso particular da apresentada no Capítulo 4. Ocorre a simplificação da detecção *master-master* em *master-slave*, uma vez que o centro da esfera já se torna naturalmente um ponto *slave*.

Para os casos em que o raio da esfera não é nulo, ainda pode-se entender a formulação do Capítulo 5 como um caso particular da do Capítulo 4, não por se tornar um caso do tipo *master-slave*, mas por assumir a particularidade em que uma das superfícies de contato seja esférica. Nesse caso, simplifica-se a descrição geométrica e cinemática de uma das superfícies de contato pelo movimento de uma superfície esférica no espaço, o qual é feito utilizando-se da informação de seis graus de liberdade. Isso torna a formulação livre de quatro coordenadas convectivas, sendo apenas duas necessárias para descrever a outra superfície, que permanece genérica.

7.3 Procedimento *master-master* entre duas curvas

Partindo-se novamente do procedimento *master-master* entre duas superfícies, pode-se agora propor uma outra escolha a priori de coordenadas convectivas, diferente da desenvolvida na seção anterior e que culminou no procedimento *master-slave*.

Impõe-se, dessa vez, que o ponto material candidato a contato na superfície Γ_A esteja em uma curva definida em Γ_A por meio da escolha de uma das coordenadas convectivas dessa superfície, por exemplo adotando certo valor $\bar{\theta}_A$. Em Γ_B , de forma análoga, propõe-se que o

ponto material candidato a contato esteja em uma curva definida em Γ_B por meio da escolha de certo valor $\bar{\theta}_B$.

A solução das outras coordenadas convectivas ainda em aberto (ζ_A e ζ_B) exige a imposição de duas relações geométricas. São adotadas as relações de ortogonalidade apenas em relação às duas curvas definidas, ou seja:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{o}_2. \quad (7.4)$$

Nesse caso $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\zeta_A, \zeta_B)$. A determinação de $(\bar{\zeta}_A, \bar{\zeta}_B)$ vem da solução de (7.4).

O procedimento aqui descrito é também nomeado *master-master* pois mantém a possibilidade de mudanças de pontos materiais candidatos a contato em ambos os sólidos. A diferença é que as mudanças permitidas são restritas a uma única variável convectiva para cada corpo, isto é, trata-se da busca geométrica de pontos materiais localizados sobre duas curvas.

A formulação de contato apresentada no Capítulo 6 é baseada no procedimento *master-master* entre duas curvas. De fato, naquele contexto, a descrição do eixo de barras espaciais é feita por meio de curvas. Na equação (6.5) define-se a medida de *gap* normal, o qual deve ser avaliado com base na solução $(\bar{\zeta}_A, \bar{\zeta}_B)$, que goza da ortogonalidade em relação a ambas as curvas. São introduzidos raios referentes às dimensões das seções transversais das barras em questão, a fim de considerar a influência dessas medidas na função *gap*²⁹. Tomando o limite em que ambos os raios são nulos, chega-se exatamente em uma medida de distância entre duas curvas espaciais na quantificação do *gap*. Ou seja, a formulação apresentada no Capítulo 6 se torna um caso particular da apresentada no Capítulo 4.

²⁹ Esse procedimento é muito semelhante ao feito no Capítulo 5 para a introdução da medida do raio da esfera no *gap* normal.

7.4 Degeneração da formulação de contato *master-master* entre duas superfícies

As apresentações feitas nos itens 7.1, 7.2 e 7.3 mostram que é possível tomar o procedimento *master-master* entre duas superfícies como base para elaboração dos procedimentos *master-slave* (ponto-superfície) e *master-master* entre duas curvas. Essa constatação motiva a proposta de uma formulação de contato baseada no procedimento *master-master* entre duas superfícies, mas que possa sofrer degenerações, de modo a particularizá-la de forma conveniente a outras formulações. A palavra “coordenadas” será sempre empregada a seguir referindo-se às coordenadas convectivas.

Figura 7.1 – (a) Contato master-master entre duas superfícies (b) Degeneração do tipo *master-slave* (c) Degeneração do tipo *master-master* entre duas curvas

Fonte: do autor

A Figura 7.1 ilustra a ideia geométrica de degeneração da formulação de contato, a qual corresponde à adoção a priori de algum valor (ou valores) para certa coordenada (ou coordenadas). Na Figura 7.1(a) é mostrado o problema-referência, sem degenerações. Na Figura 7.1(b) é mostrada a interpretação geométrica da degeneração do tipo *master-slave*. Note que a ortogonalidade só existe entre o vetor gap $\mathbf{g}$ e a superfície Γ_B . Já a Figura 7.1(c) mostra a degeneração para *master-master* entre duas curvas, o que leva à ortogonalidade de $\mathbf{g}$ entre duas curvas definidas em Γ_A e Γ_B por meio da adoção prévia de uma coordenada convectiva em cada superfície ($\bar{\theta}_A$ e $\bar{\theta}_B$).

Cada uma das degenerações propostas tem influência na solução de $\bar{\mathbf{c}}$ pois sua obtenção deverá considerar somente as relações de ortogonalidade que não envolvem as coordenadas já prescritas, consideradas fixas. Dessa forma, a degeneração diminui o número de coordenadas consideradas na solução do problema de determinação do par de pontos materiais candidatos a contato, pois admite que algumas dessas coordenadas já são pré-determinadas.

A seguir é estabelecida uma formulação matemática para melhor formalizar a ideia de degeneração da formulação de contato *master-master* entre duas superfícies.

7.4.1 Problema de otimização associado a $\bar{\mathbf{c}}$ e transformação de coordenadas convectivas

Na seção 4.2.2, no contexto da formulação *master-master* entre duas superfícies, definiu-se uma função objetivo $f_1 = \hat{f}_1(\mathbf{c})$, estabelecendo-se um ferramental associado a um problema de otimização para determinação da solução desejada $\bar{\mathbf{c}}$. Aqui ainda não se entra no mérito quanto à caracterização da solução de interesse (pode ser um ponto de máximo, mínimo ou sela), mas somente por hora se estabelece que a solução $\bar{\mathbf{c}}$ esteja associada a um ponto crítico de f_1 , conforme também foi abordado na seção 4.2.2. Em particular, se estará interessado na solução associada à ocorrência de uma direção normal comum em ambas as superfícies, conforme já discutido naquele item. Maiores discussões sobre a caracterização dessa solução podem ser vistas no item 7.5. A função objetivo é dada por:

$$f_1 = \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \quad (7.5)$$

considerando que $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c})$. O gradiente de f_1 é dado por $\nabla f_1 = \mathbf{r}$, interpretado geometricamente pelas relações de ortogonalidade. Busca-se, portanto, a solução associada a $\nabla f_1 = \mathbf{r} = \mathbf{o}_4$. A matriz Hessiana é dada por $\nabla^2 f_1 = \mathbf{H} = \mathbf{r}_{,\mathbf{c}}$. Trata-se de uma matriz simétrica.

O problema de otimização é definido no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, em que se está trabalhando intrinsecamente com uma base canônica, tal que o vetor $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$ é descrito por coordenadas $c_j, j = 1, \dots, 4$ nessa base. É possível estabelecer uma nova base em $\mathbb{R}^4$ e dela utilizar-se para escrever o mesmo vetor, expresso agora por novas coordenadas $\check{\mathbf{c}} = [\check{c}_1 \ \check{c}_2 \ \check{c}_3 \ \check{c}_4]^T$. Essa nova base é descrita pelo conjunto de vetores $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3, \check{\mathbf{b}}_4\}$, tal que seja ortonormal.

Seja a transformação linear dada por $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que descreve a mudança de base, representada da forma matricial por: $\check{\mathbf{P}} = [\check{\mathbf{b}}_1 \ \check{\mathbf{b}}_2 \ \check{\mathbf{b}}_3 \ \check{\mathbf{b}}_4]$. Cada coluna de $\check{\mathbf{P}}$ contém as coordenadas que compõem os vetores $\check{\mathbf{b}}_j, j = 1, \dots, 4$ escritas na base canônica de $\mathbb{R}^4$. Assim, pode-se escrever:

$$T(\check{\mathbf{c}}) = \mathbf{c} = \check{\mathbf{P}}\check{\mathbf{c}}, \quad (7.6)$$

$$T^{-1}(\mathbf{c}) = \check{\mathbf{c}} = \check{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{c}. \quad (7.7)$$

Nessa transformação tem-se que $\check{\mathbf{P}}^{-1} = \check{\mathbf{P}}^T$, pois $\check{\mathbf{P}}$ é um operador ortogonal.

Com isso, pode-se escrever o vetor $\nabla f_1 = \mathbf{r}$ na nova base. Esse será dado por $\check{\mathbf{P}}^T \mathbf{r}$. A mudança de base pode ser também aplicada a operadores lineares tal que, para certo operador $H: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, representado pela matriz $\mathbf{H}$ escrita na base canônica, pode-se escrever na nova base $\{\check{\mathbf{b}}_1, \check{\mathbf{b}}_2, \check{\mathbf{b}}_3, \check{\mathbf{b}}_4\}$ tal operador por $\check{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{H}\check{\mathbf{P}} = \check{\mathbf{P}}^T\mathbf{H}\check{\mathbf{P}}$. A matriz Hessiana, em particular, pode sofrer tal transformação e ser reescrita na nova base.

7.4.2 Decomposição espectral da matriz Hessiana

A matriz Hessiana $\mathbf{H} = \mathbf{r}_{,\mathbf{c}}$ é simétrica, e por isso seus autovalores são sempre números reais. Ainda é possível a escrita da matriz Hessiana de forma diagonalizada, utilizando-se para tal de uma base composta por seus autovetores. De fato, sejam os autovetores de $\mathbf{H}$ avaliada em certo ponto de $\mathbb{R}^4$, escritos na base canônica e dados por $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4\}$. Organizando-os em

colunas, é possível definir a matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{P}$ para a base composta pelas direções dos autovetores, tal que:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3 \quad \mathbf{h}_4]. \quad (7.8)$$

Reescrevendo a matriz Hessiana nessa nova base, pode-se expressá-la por $\mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P}$. Nessa base ela se encontra de forma diagonalizada, tal que é dada por:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

sendo $\lambda_j, j = 1, \dots, 4$ os autovalores associados aos autovetores $\mathbf{h}_j, j = 1, \dots, 4$. Partindo de (7.9) e transformando a base novamente para a canônica, pode-se escrever a expressão para a decomposição espectral da matriz Hessiana, escrita na base canônica, dada por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T. \quad (7.10)$$

A transformação linear das coordenadas convectivas envolvendo os autovetores da matriz Hessiana avaliada em algum ponto de interesse de $\mathbb{R}^4$ é dada por:

$$\mathbf{T}(\tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{c} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{c}}, \quad (7.11)$$

em que $\tilde{\mathbf{c}}$ representa as coordenadas convectivas nessa nova base, dadas de forma explícita por:

$$\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \tilde{c}_3 \quad \tilde{c}_4]^T.$$

7.4.3 Operador degenerativo

Nomeia-se por grau de degeneração o número de coordenadas prescritas a priori no vetor $\mathbf{c}$ e que, portanto, não serão variáveis na solução do problema de otimização cuja função objetivo é f_1 . O número de coordenadas remanescentes é “s” ($s \in \mathbb{N} | 1 \leq s \leq 4$). Essas são nomeadas “coordenadas livres” e serão descritas pelo vetor $\mathbf{c}_s$, que possui dimensão “s”. É

possível estabelecer uma base em $\mathbb{R}^4$ para descrever um vetor $\mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^s$, dada por $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s\}$, tal que seja ortonormal. Note que $\mathbb{R}^s$ é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

A fim de realizar a degeneração das coordenadas de $\mathbf{c}$, isto é, de acordo com as coordenadas que são fixas a priori estabelecer o vetor de coordenadas livres $\mathbf{c}_s$, é possível estabelecer uma transformação linear $T_s: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^s$, representada da forma matricial por: $\mathbf{P}_s^T = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_s]^T$. Cada coluna de $\mathbf{P}_s$ contém as coordenadas que compõem os vetores $\mathbf{b}_j$, $j = 1, \dots, s$ escritas na base canônica de $\mathbb{R}^4$. Assim, pode-se definir o operador degenerativo $\mathbf{P}_s^T$ como a expressão matricial que caracteriza a transformação T_s :

$$T_s(\mathbf{c}) = \mathbf{c}_s = \mathbf{P}_s^T \mathbf{c}. \quad (7.12)$$

Observe que aqui se define o caso em que $s = 4$ como uma possibilidade de não ocorrência de degeneração, mas somente uma possível mudança de base, o que faz com que a definição de $\mathbf{P}_s$ recaia na anterior, de $\tilde{\mathbf{P}}$. Ainda é destacado o caso que não foi incluído dentre os casos de interesse, que caracteriza $s = 0$. Esse seria retratado pela escolha prévia de todas as coordenadas e consequentemente dos pontos materiais candidatos a contato, o que retrataria um vetor $\mathbf{c}_s$ de dimensão nula e, por conseguinte, não se faria mais necessária qualquer solução para coordenadas convectivas, pois todas já estariam pré-determinadas. Por isso esse caso foi excluído da presente discussão.

O papel desempenhado por $\mathbf{P}_s$ é o de estabelecer uma transformação entre os vetores de coordenadas $\mathbf{c}$ e $\mathbf{c}_s$, sendo que a dimensão desses vetores é diferente ($\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^s$). O posto de $\mathbf{P}_s$ deve ser igual a “s”, pois essa é a dimensão do espaço a ser gerado pelas coordenadas degeneradas. Isso naturalmente irá ocorrer na medida em que $\mathbf{P}_s$ é composto por vetores $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s\}$ que forma uma base para o espaço $\mathbb{R}^s$.

O operador $\mathbf{P}_s$ pode ser obtido como o extrato de “s” colunas de certa matriz de mudança de base estabelecida entre $\check{\mathbf{c}}$ e $\mathbf{c}$, descrita por um operador ortogonal $\tilde{\mathbf{P}}$. Em particular, pode-se tomar $\mathbf{b}_j$, $j = 1, \dots, s$ como sendo um conjunto de “s” vetores dentre os que geram a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Dessa forma a degeneração é aplicada de modo a não envolver nenhuma mudança de base, mas somente a escolha de um grupo de “s” coordenadas convectivas previamente estabelecidas nas superfícies de contato para compor o sub-espaço de degeneração $\mathbb{R}^s$. Ainda é possível realizar a degeneração envolvendo mudança de base por meio da escolha de “s” vetores coluna de certa matriz de mudança de base genérica $\tilde{\mathbf{P}}$. Em particular será de

interesse a degeneração envolvendo mudança de base tal que envolva as direções de uma seleção de autovetores da matriz $\mathbf{H}$, dentre os disponíveis $\mathbf{h}_j, j = 1, \dots, 4$.

Note que a obtenção de um conjunto de coordenadas degeneradas $\mathbf{c}_s$ a partir de $\mathbf{c}$ é sempre possível pela equação (7.12), pois sempre a dimensão de $\mathbf{c}_s$ é menor ou igual à dimensão de $\mathbf{c}$. Pelo fato de a degeneração corresponder ao estabelecimento de um espaço de dimensão “s” para compor $\mathbf{c}_s$, naturalmente a(s) coordenada(s) degenerada(s) associadas aos versores que não foram incluídos no operador $\mathbf{P}_s^T$ não estão armazenadas em $\mathbf{c}_s$. Por isso, a obtenção de $\mathbf{c}$ a partir de $\mathbf{c}_s$ em geral não é possível. Quando $s = 4$ será possível obter $\mathbf{c}$ a partir de $\mathbf{c}_s$, pois não ocorre degeneração, de fato. Isso é caracterizado pela existência do operador inverso $\mathbf{P}_s^{-1}$.

O complemento ortogonal ao sub-espaço $\mathbb{R}^s$ é dado por $\mathbb{R}^{4-s}$, tal que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^{4-s}$, somente para os casos em que $s \neq 4$. De acordo com a escolha feita para a dimensão “s” na geração da transformação T_s , haverá uma transformação linear $T_{4-s}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{4-s}$, representada da forma matricial por: $\mathbf{P}_{4-s}^T = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{4-s}]^T$. Cada coluna de $\mathbf{P}_{4-s}$ contém as coordenadas que compõem os vetores $\mathbf{b}_j, j = 1, \dots, (4 - s)$ escritos na base canônica de $\mathbb{R}^4$, tal que todos os $\mathbf{b}_j$ adotados sejam ortogonais aos adotados para compor $\mathbf{P}_s$. Pode-se definir o operador degenerativo complementar $\mathbf{P}_{4-s}^T$ como a expressão matricial que caracteriza a transformação T_{4-s} :

$$T_{4-s}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}_{4-s} = \mathbf{P}_{4-s}^T \mathbf{c}. \quad (7.13)$$

Assim, a informação contida em $\mathbf{c}_s$ combinada com a informação contida em $\mathbf{c}_{4-s}$ permite a obtenção de $\mathbf{c}$, tal que:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{P}_s \quad \mathbf{P}_{4-s}] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_s \\ \mathbf{c}_{4-s} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

7.4.4 Linearização envolvendo coordenadas degeneradas

A fim de estabelecer o ferramental de otimização envolvendo diretamente a ideia já apresentada de degeneração, discute-se nesse tópico como se avalia a linearização de $\mathbf{c}_s$, representada por $\Delta \mathbf{c}_s$.

O operador degenerativo tem o objetivo de separar um grupo “s” de coordenadas que são livres de outro grupo “4 – s” que sofrem degeneração, ou seja, que são consideradas fixas. Assim, pode-se escrever que $\Delta \mathbf{c}_{4-s} = \mathbf{0}_{4-s}$. Considera-se que os operadores $\mathbf{P}_s$ e $\mathbf{P}_{4-s}$ são constantes para a linearização, aplicada na equação (7.14) levando a:

$$\Delta \mathbf{c} = [\mathbf{P}_s \quad \mathbf{P}_{4-s}] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_s \\ \Delta \mathbf{c}_{4-s} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{c}_s, \quad (7.15)$$

ou seja, é possível avaliar a linearização $\Delta \mathbf{c}$, dada $\Delta \mathbf{c}_s$. O inverso também é possível, o que é imediato da linearização da equação (7.12):

$$\Delta \mathbf{c}_s = \mathbf{P}_s^T \Delta \mathbf{c}. \quad (7.16)$$

Com isso, pode-se interpretar pela própria definição de derivada parcial que:

$$\frac{\Delta \mathbf{c}_s}{\Delta \mathbf{c}} = \mathbf{c}_{s,\mathbf{c}} = \mathbf{P}_s^T \quad (7.17)$$

e

$$\frac{\Delta \mathbf{c}}{\Delta \mathbf{c}_s} = \mathbf{c}_{,\mathbf{c}_s} = \mathbf{P}_s. \quad (7.18)$$

7.4.5 Exemplos de degeneração

A seguir são feitos exemplos de degeneração, tendo-se sempre como referência o vetor de coordenadas convectivas original dado por $\mathbf{c} = [\zeta_A \quad \theta_A \quad \zeta_B \quad \theta_B]^T$. A base canônica para o $\mathbb{R}^4$ é descrita por $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$.

7.4.5.1 Master-slave

Deseja-se fixar as coordenadas $\bar{\zeta}_A$ e $\bar{\theta}_A$ pela eleição de um ponto *slave* na superfície Γ_A . Com isso, a composição de $\mathbf{c}_s$ é feita utilizando-se somente das coordenadas ζ_B e θ_B , não sendo

necessária tampouco desejada qualquer mudança de base. Assim, pode-se compor $\mathbf{P}_s$ pelos próprios versores da base canônica, tal que $\mathbf{P}_s = [\mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4]$ e:

$$\mathbf{P}_s^T = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3^T \\ \mathbf{b}_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Com isso, leva a $\mathbf{c}_s = [\zeta_B \quad \theta_B]^T$.

7.4.5.2 *Master-master* entre curvas

Nesse caso fixam-se $\bar{\theta}_A$ e $\bar{\theta}_B$ em $\mathbf{c}$. Novamente a obtenção de $\mathbf{c}_s$ não envolve qualquer necessidade de mudança de base, mas somente a pré-seleção de versores da base canônica, tal que $\mathbf{P}_s = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_3]$ e:

$$\mathbf{P}_s^T = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Com isso, leva a $\mathbf{c}_s = [\zeta_A \quad \zeta_B]^T$.

Note que a forma que foi definido o operador degenerativo permite uma generalidade muito maior do que a simples escolha de um conjunto com “s” versores da base canônica para o compor. De fato, essa generalidade terá utilidade prática em outras situações em que a necessidade ou objetivo da degeneração não esteja atrelado às orientações da base canônica, mas à outra base de interesse.

7.4.6 Problema de otimização degenerado

Revisitando o ferramental de otimização apresentado no item 7.4.1 pode-se, no contexto da degeneração do contato, redefinir a função objetivo associada à distância entre duas superfícies *master*. Agora serão consideradas como variáveis apenas as coordenadas do vetor $\mathbf{c}_s$ as quais, de fato, são as variáveis livres no caso de haver degeneração. A função *gap* vetorial continua sendo calculada com todas as coordenadas convectivas, ou seja, $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{4-s})$. Mas $\mathbf{c}_{4-s}$ contém coordenadas degeneradas, escolhidas a priori e consideradas fixas. Dessa forma, a linearização de f_1 no presente contexto é dada por:

$$\Delta f_1 = f_{1,c_s} \Delta c_s. \quad (7.21)$$

No contexto anterior à degeneração, quando se considerou o vetor $\mathbf{c}$ completo para efeito de linearização, tinha-se: $\Delta f_1 = f_{1,c} \Delta \mathbf{c}$. A utilização da regra da cadeia permite se aproveitar de $f_{1,c}$ para o cálculo de f_{1,c_s} , pois $f_{1,c_s} = f_{1,c} \mathbf{c}_{c_s}$. Com isso, pode-se escrever:

$$\Delta f_1 = f_{1,c} \mathbf{c}_{c_s} \Delta c_s = f_{1,c} \mathbf{P}_s \Delta c_s = \Delta c_s \cdot \mathbf{P}_s^T f_{1,c}, \quad (7.22)$$

o que permite identificar o gradiente de f_1 por $\nabla f_1 = \mathbf{P}_s^T f_{1,c}$, que é um vetor com “s” linhas, uma vez que se aplicou a degeneração $\mathbf{P}_s^T$ no vetor $f_{1,c}$.

Analogamente, a linearização de ∇f_1 leva a:

$$\Delta(\nabla f_1) = \Delta(\mathbf{P}_s^T f_{1,c}) = (\mathbf{P}_s^T f_{1,c})_{,c} \mathbf{c}_{c_s} \Delta c_s = \mathbf{P}_s^T f_{1,cc} \mathbf{P}_s \Delta c_s, \quad (7.23)$$

o que permite identificar a Hessiana de f_1 por $\nabla^2 f_1 = \mathbf{P}_s^T f_{1,cc} \mathbf{P}_s$, que é uma matriz com “s” linhas e “s” colunas.

Note que a apresentação do gradiente e da Hessiana de f_1 está feito de uma forma que permite aproveitar toda a formulação desenvolvida no contexto *master-master* entre duas superfícies, que leva ao gradiente $f_{1,c}$ e Hessiana $f_{1,cc}$. A diferença é que no caso de haver degeneração é necessária a utilização do operador $\mathbf{P}_s$ para modificar o gradiente de f_1 para $\mathbf{P}_s^T f_{1,c}$ e a Hessiana para $\mathbf{P}_s^T f_{1,cc} \mathbf{P}_s$.

As relações de ortogonalidade para cada tipo de degeneração podem ser obtidas por meio da interpretação associada ao ∇f_1 que poderá ou não ter uma conotação geométrica imediata. Para os casos explorados nos exemplos do tipo *master-slave* e *master-master* entre duas curvas, há conotação geométrica imediata no problema degenerado, que está associada à ortogonalidade ilustrada em cada caso na Figura 7.1. Para os casos em que houver mudança de base, deixando a base canônica, a interpretação geométrica se torna mais abstrata. A obtenção do ponto crítico no problema degenerado requer que $\nabla f_1 = \mathbf{o}_s$. Tem-se, portanto:

$$\mathbf{r}_s = \nabla f_1 = \mathbf{P}_s^T f_{1,c} = \mathbf{o}_s. \quad (7.24)$$

7.4.7 Implicações da degeneração na formulação *master-master* entre duas superfícies

No Capítulo 4, em que foi apresentada a formulação *master-master* entre duas superfícies, desenvolveu-se a contribuição do contato pontual para forma fraca e sua linearização consistente. Aqui se faz a discussão de quais seriam as mudanças em todo aquele desenvolvimento em detrimento da degeneração do contato que foi discutida até então.

7.4.7.1 Localização da ação de contato e linearizações

Há um ponto de grande importância na formulação *master-master* entre duas superfícies que está associado à obtenção de $\bar{\mathbf{c}}$. O efeito da degeneração nessa problemática é discutido à frente, no item 7.5. Assume-se, por hora, que $\bar{\mathbf{c}}$ seja conhecido, em uma condição já explicitada em (7.24). Portanto, as posições dos pontos materiais candidatos à interação por contato são tratadas como conhecidas.

A questão fundamental que a degeneração implica na formulação de contato *master-master* entre duas superfícies está atrelada ao desenvolvimento feito na equação (4.25), quando foi obtida uma relação entre variações $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$ para um cenário de contato em que essas variações não são independentes. Para essa obtenção, a equação (4.25) parte da variação de $\mathbf{r} = \nabla f_1$ apresentada no item 4.2.2 e revisitada no presente contexto. A questão é que quando ocorrer degeneração, nem todas as coordenadas convectivas poderão sofrer variação não nula. Aquelas que forem prescritas a priori não poderão sofrer variação. Isso, portanto, deverá ser considerado nesse contexto, a fim de que se possa estabelecer uma relação mais geral entre $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$, mas considerando de forma consistente a mesma degeneração adotada na busca pela solução $\bar{\mathbf{c}}$. Tal consistência é fundamental para obtenção de convergência quadrática na vizinhança da solução, quando aplicado o Método de Newton-Raphson na solução do modelo completo.

Parte-se de ∇f_1 , como feito em (4.25). No entanto, em vez de considerar a variação $\delta \mathbf{c}$ para as coordenadas convectivas, considera-se apenas a variação $\delta \mathbf{c}_s$, por conta da degeneração assumida.

$$\delta(\nabla f_1) = \delta \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_{s,c_s} \delta \mathbf{c}_s + \mathbf{r}_{s,d} \delta \mathbf{d} = \mathbf{0}_s \Rightarrow \mathbf{r}_{s,c_s} \delta \mathbf{c}_s = -\mathbf{r}_{s,d} \delta \mathbf{d}. \quad (7.25)$$

Pela analogia entre as operações de variação e linearização de certa grandeza, pode-se utilizar das relações (7.15) e (7.16) no presente contexto, a fim de escrever:

$$\mathbf{r}_{s,c_s} \delta \mathbf{c}_s = \mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cc} \mathbf{P}_s \delta \mathbf{c}_s = -\mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cd} \delta \mathbf{d}, \quad (7.26)$$

portanto:

$$\delta \mathbf{c}_s = -(\mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cc} \mathbf{P}_s)^{-1} \mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cd} \delta \mathbf{d}. \quad (7.27)$$

Utilizando-se da relação (7.15) pode-se escrever que $\delta \mathbf{c} = \mathbf{P}_s \delta \mathbf{c}_s$. Utilizando esse resultado obtém-se:

$$\delta \mathbf{c} = -\mathbf{P}_s (\mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cc} \mathbf{P}_s)^{-1} \mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cd} \delta \mathbf{d} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}. \quad (7.28)$$

A equação (7.28) representa a requerida relação entre $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$ que, no presente contexto, é expressa pelo operador $\mathbf{D}$, tal que:

$$\mathbf{D} = -\mathbf{P}_s (\mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cc} \mathbf{P}_s)^{-1} \mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cd}. \quad (7.29)$$

A utilização desse operador $\mathbf{D}$ permite degenerar a formulação *master-master* entre superfícies de forma consistente em formulações de contato que envolvam a utilização de menos coordenadas convectivas, de acordo com o desejado. A possibilidade de degeneração em uma base diferente da canônica é possível, bastando para tal compor $\mathbf{P}_s$ com os versores desejados para compor a mudança de base. Enfatiza-se ainda que, com o ferramental de otimização proposto, de acordo com o grau de degeneração aplicado, a imposição de gradiente nulo de f_1 irá resultar no número de relações de ortogonalidade adequado. Naturalmente, a utilização dessa formulação depende da obtenção de $\bar{\mathbf{c}}$ no problema de otimização degenerado. Esse tópico é apresentado no item 7.5.

7.4.7.2 Atrito

No desenvolvimento do Capítulo 4, particularmente na quantificação do esforço de atrito, há frequente utilização da direção normal de uma das superfícies $\mathbf{n}_B$, inclusive na própria

definição de *gap* tangencial incremental e sua acumulação, como discutido nos itens 4.4.1 e 4.4.3. Ao realizar a degeneração, é necessário visitar esse tópico por meio de uma nova forma mais geral de definir o *gap* tangencial incremental, que não se utilize de $\mathbf{n}_B$, mas de modo geral que se apoie somente nas relações de ortogonalidade já degeneradas. Esse desenvolvimento está fora do escopo do presente trabalho, mas é alvo de futuras contribuições, a fim de generalizar a formulação *master-master* com degeneração para casos com atrito.

7.5 Caracterização da solução de $\bar{\mathbf{c}}$ no problema de otimização degenerado

A solução desejada $\bar{\mathbf{c}}$ é descrita por $\nabla f_1 = \mathbf{o}_4$ nos casos em que não há degeneração. Quando há degeneração, se prescreve a priori $\bar{\mathbf{c}}_{4-s}$ (conhecido) e $\bar{\mathbf{c}}_s$ decorre de $\nabla f_1 = \mathbf{o}_s$. Uma possibilidade para solução de ambos os casos é a direta imposição de $\nabla f_1 = \mathbf{o}_4$ ou $\nabla f_1 = \mathbf{o}_s$, seguida de sua solução por meio do Método de Newton-Raphson ou outros métodos para determinação de zeros de funções. No entanto, como já discutido na seção 4.2.1, existe sempre a chance de convergência para soluções não desejadas, por exemplo, associadas à intersecção entre superfícies para o caso sem degeneração. A convergência para uma solução não desejada ou a não convergência representa a falha total da formulação de contato, uma vez que coloca a perder todo o restante do desenvolvimento.

Como alternativa para tentar garantir a obtenção de soluções desejadas, propôs-se na seção 4.2.2 a imposição da condição de normal comum à solução $\bar{\mathbf{c}}$, por meio de multiplicadores de Lagrange que também entram na solução do sistema não linear de equações. A técnica se mostra adequada e traz bons resultados mostrados nos exemplos do Capítulo 4. No entanto, existe um apelo geométrico particular para o caso de contato entre duas superfícies *master*, que é o que possibilita a direta imposição da condição de normal comum nos pontos materiais candidatos a contato. Enfatiza-se, ainda, que essa técnica é limitada a superfícies que sejam ao menos de classe $\mathbb{C}^1$. A existência de singularidades em alguma das superfícies representa um problema para esse tipo de critério.

No contexto de degeneração do contato, a imposição de normal comum para as superfícies envolvidas na solução de $\bar{\mathbf{c}}_s$ não é possível. Quando se degenera alguma coordenada convectiva, naturalmente se perde a condição de ortogonalidade do vetor *gap* $\mathbf{g}$ em relação a essa coordenada, conforme já foi observado nas degenerações *master-slave* e *master-master* entre duas curvas, o que pode ser visto graficamente na Figura 7.1. Além disso, deseja-se a

possibilidade de trabalhar com bases não canônicas na degeneração, o que permite não apenas a eliminação de certa coordenada convectiva original do problema local de contato, mas sim de uma coordenada associada a uma direção que é caracterizada por uma combinação linear das coordenadas convectivas originais. Com isso, almeja-se o desenvolvimento de metodologias de busca para determinação de $\bar{\mathbf{c}}$ (sem degeneração) ou $\bar{\mathbf{c}}_s$ (com degeneração) que não se utilizem de informações geométricas, ou ao menos que minimizem esse uso. Idealiza-se a utilização somente da função objetivo f_1 , escrita em função das coordenadas $\mathbf{c}$ ou das coordenadas remanescentes após a degeneração $\mathbf{c}_s$.

A fim estabelecer uma estratégia para o desenvolvimento dessa técnica, acredita-se que o primeiro passo é procurar compreender que tipo de ponto crítico de f_1 é, de fato, a solução de interesse, ou seja, deseja-se caracterizar a solução desejada $\bar{\mathbf{c}}$ ou $\bar{\mathbf{c}}_s$ (ponto de máximo, mínimo ou sela – o que está intimamente ligado às características espectrais da matriz Hessiana associada a tal ponto). Esse conhecimento pode proporcionar a elaboração de metodologias mais gerais de busca.

Nesse contexto abre-se à utilização de métodos de otimização que possibilitam uma robustez muito superior quando comparados com a imposição de gradiente nulo e posterior solução por meio do Método de Newton-Raphson, como até então foi empregado nesta tese. A robustez vem da possibilidade de buscar a solução desejada em meio ao comportamento da função objetivo f_1 , o que possibilita traçar estratégias para busca de $\bar{\mathbf{c}}$ ou $\bar{\mathbf{c}}_s$, para tal dispondo de uma vasta gama de métodos de otimização. A discussão das possíveis técnicas de otimização é retomada no item 7.6.3.

A seguir são apresentados alguns estudos de caracterização do ponto crítico $\bar{\mathbf{c}}$ ou $\bar{\mathbf{c}}_s$ de interesse para problemas particulares envolvendo quádricas e curvas quadráticas, imaginadas como aproximações locais de superfícies que venham a interagir pontualmente, em que o início da interação ocorre em pontos materiais associados com $\bar{\mathbf{c}}$ ou $\bar{\mathbf{c}}_s$. Os estudos servem de base para as técnicas apresentadas posteriormente no item 7.6.3. A caracterização é feita por meio da análise espectral da matriz Hessiana, avaliada sempre no ponto crítico de interesse.

7.5.1 Caracterização do contato entre quádricas

Antes de analisar o comportamento para soluções degeneradas $\bar{\mathbf{c}}_s$ é prudente fazer uma análise dos autovalores da matriz Hessiana, avaliada com dados da solução de interesse $\bar{\mathbf{c}}$ para a interação entre duas superfícies de contato, sem degeneração.

A metodologia dessa análise consiste em estabelecer duas quádricas particulares, com a possibilidade de realizar estudos paramétricos, por exemplo variando suas curvaturas ou sua posição no espaço. É possível considerar casos em que ocorre intersecção entre as superfícies, de acordo com a escolha dos parâmetros que as compõem. Sejam as superfícies dadas por:

$$\Gamma_A = (\zeta_A, \theta_A, a_A \zeta_A^2 + b_A \theta_A^2 + c_A \zeta_A \theta_A + d_A), \quad (7.30)$$

$$\Gamma_B = (\zeta_B, \theta_B, a_B \zeta_B^2 + b_B \theta_B^2 + c_B \zeta_B \theta_B + d_B), \quad (7.31)$$

em que $a_A, b_A, c_A, d_A, a_B, b_B, c_B$ e d_B são parâmetros denotados por números reais. Essas parametrizações procuram representar aproximações locais de superfícies na iminência do contato pontual. Considera-se que o plano tangente ao contato seja o xy local das parametrizações propostas.

Deseja-se estudar o cenário em que essas superfícies representem localmente uma interação de contato que se inicie pelo ponto $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, considerando a evolução do posicionamento espacial de Γ_A por meio de variações paramétricas em d_A , e considerando Γ_B fixa, particularmente com $d_B = 0$. Assume-se que Γ_A represente o contorno local de um sólido B_A , sendo que a normal exterior aponta para baixo, isto é, com componente na direção z local negativa. Complementarmente, assume-se que Γ_B represente o contorno local de um sólido B_B , sendo que a normal exterior aponta para cima, isto é, com componente na direção z local positiva. Para tal, é estabelecida a função objetivo f_1 utilizando-se de Γ_A e Γ_B para compor o *gap*. Na sequência, é avaliada a matriz Hessiana de f_1 no ponto crítico $\bar{\mathbf{c}}$ mencionado, a fim de caracterizá-lo para diferentes parâmetros adotados para compor as superfícies.

O estudo de interesse prático para a modelagem de contato corresponde a uma situação em que inicialmente não há contato ($d_A > 0$). Com a aproximação das superfícies, por meio da alteração de d_A , induz-se uma interação pontual em $\bar{\mathbf{c}}$ quando $d_A = 0$ e posteriormente, quando $d_A < 0$, há penetração de Γ_A em Γ_B , caracterizando a violação do vínculo mecânico de contato. Note que dependendo dos valores considerados para os parâmetros para construir Γ_A e Γ_B pode

haver intersecção entre as superfícies quando $d_A > 0$. Trata-se, nesse caso, de um cenário não plausível para o estudo local de contato. Por exemplo, a escolha de parâmetros para as superfícies representadas na Figura 7.2 ilustra uma situação em que o contato pontual associado ao par de pontos materiais descrito por $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ não seria plausível. No plano de corte xz o raio de curvatura da superfície Γ_B é menor do que o da superfície Γ_A , e ambos os centros de curvatura se localizam em $z > 0$. A caracterização de $\bar{\mathbf{c}}$ para esse caso é apresentada, mas enfatiza-se que não corresponde a uma solução de interesse para a interação de contato pontual.

Figura 7.2 – Estudo paramétrico em “ d_A ” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$ para o problema envolvendo quádricas – caso de contato não plausível

Fonte: do autor

A Figura 7.3 mostra alguns exemplos de superfícies plotadas para escolhas plausíveis de parâmetros para representação do cenário desejado. A caracterização para cada caso foi feita, considerando-se distintos valores de afastamento d_A entre as superfícies. Sempre o ponto de avaliação da matriz Hessiana e de seus autovalores foi o ponto crítico $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, associado à intersecção entre as superfícies quando $d_A = 0$. Observe que nos casos (c) e (d) quando $d_A = 0$ há intersecção em infinitos pontos, sendo o $\bar{\mathbf{c}}$ escolhido associado a um desses. Trata-se, nesses casos, de cenários de superfícies conformes.

A Figura 7.3(a) ilustra um caso em que análise espectral da matriz Hessiana mostra quatro autovalores positivos quando não há intersecção. Portanto, nessa situação, o ponto $\bar{\mathbf{c}}$ corresponde a um ponto de mínimo de f_1 . No entanto, quando $d_A < 0$ a solução deixa de ser um ponto de mínimo e passa a ser um ponto de sela, com dois autovalores positivos e dois negativos.

O caso ilustrado na Figura 7.3(b) mostra um comportamento distinto, em que quando $d_A > 0$, de acordo com sua magnitude, o ponto analisado se comporta como mínimo ou sela.

Quando d_A se aproxima de zero, $\bar{c}$ se torna um ponto de mínimo. Quando $d_A < 0$, comporta-se como ponto de sela, possuindo dois autovalores positivos e dois negativos.

Figura 7.3 – Estudo paramétrico em “ d_A ” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\bar{c}$ para o problema envolvendo quádricas

Fonte: do autor

A Figura 7.3(c) mostra um caso de duas superfícies idênticas, com intersecção em todos os pontos quando $d_A = 0$. Nessa situação há dois autovalores nulos e outros dois positivos. Na situação de $d_A \neq 0$, o ponto $\bar{c}$ considerado não é um mínimo, mas um ponto de sela.

Por último a Figura 7.3(d) mostra um comportamento em que, quando $d_A > 0$, não há intersecção. Quando $d_A = 0$, ocorre intersecção ao longo de uma curva, em infinitos pontos, mas quando $d_A < 0$ ocorre intersecção ao longo de duas curvas abertas. Aqui o comportamento é também de sela quando $d_A < 0$, pois se manifestam dois autovalores positivos e dois negativos. Nesse caso as superfícies não são conformes, mas o contato entre elas se dá pelos infinitos pontos de uma curva. Assim, trata-se de uma situação em que há uma curva conforme à outra em cada superfície considerada, que é exatamente onde se dá o contato na medida que ocorre a aproximação entre as superfícies.

Esse estudo mostra que, nos cenários considerados, plausíveis com a realidade da aproximação local por quádricas de duas superfícies candidatas a contato, o ponto crítico de interesse $\bar{\mathbf{c}}$ é caracterizado por ser um ponto de sela de f_1 , com dois autovalores positivos e dois negativos, em cenários de penetração ocorrida logo após o contato. Na situação imediatamente anterior ao contato, o ponto $\bar{\mathbf{c}}$ se comporta como um mínimo para os casos de contato não conforme.

Note que os casos aqui mostrados se referem sempre a situações em que as curvaturas principais de ambas as superfícies estão alinhadas. Em casos em que não ocorrer esse alinhamento, é necessário tomar o mesmo cuidado aqui tratado em relação à representação de superfícies plausíveis para descrição local de contato, a fim de evitar situações como a mostrada na Figura 7.2. Para tal, deve-se sempre verificar a seguinte condição: quando $d_A = 0$ somente os pontos materiais descritos por $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ devem estar em contato entre as superfícies (ou seja, contato pontual). Se houver intersecção entre as superfícies para $d_A > 0$, o estudo aqui mostrado deveria ser realizado em torno desses outros pontos, e não do $\bar{\mathbf{c}}$ considerado. Assim, a análise espectral de $\bar{\mathbf{c}}$ não seria representativa para o ponto de interação de contato pontual desejado.

7.5.2 Caracterização do contato entre uma quádrica e uma curva quadrática

Nesse estudo procura-se caracterizar o ponto crítico não mais na função objetivo descrita por duas superfícies Γ_A e Γ_B , mas entre uma quádrica e uma curva quadrática imersa em uma quádrica. Assim, pode-se compreender esse estudo como uma avaliação de $\bar{\mathbf{c}}_s$, considerando-se $s = 3$, ou seja, uma das superfícies do estudo anterior se degenerou em uma curva. Propõe-se a seguinte forma para a curva Γ_A :

$$\Gamma_A = (\zeta_A, 0, a_A \zeta_A^2 + d_A) \quad (7.32)$$

em que a_A e d_A são parâmetros para definir Γ_A . Note, portanto, se tratar da escolha particular de $\theta_A = 0$, assim caracterizando o operador degenerativo aplicado ao problema original entre duas superfícies:

$$\mathbf{P}_s^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Novamente foi avaliada a matriz Hessiana de f_1 em um ponto crítico escolhido a priori, dado por $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, em um estudo semelhante ao realizado na seção anterior.

A Figura 7.4 mostra exemplos de cenários adotados para diversas escolhas de parâmetros. A análise dos autovalores da matriz Hessiana para cada caso foi feita, considerando-se distintos valores de afastamento d_A entre a curva e a superfície. Sempre o ponto de avaliação da matriz Hessiana e de seus autovalores foi $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, correspondendo ao local de intersecção entre a curva e a superfície quando se escolhe $d_A = 0$. Quando $d_A > 0$ não há intersecção entre a curva e a superfície – novamente limitando-se à utilização de parâmetros plausíveis para o cenário de interesse, mas quando $d_A < 0$ há intersecção (exceto no caso (c), em que há contato conforme)

A Figura 7.4(a) mostra um caso em que quando $d_A > 0$, $\bar{\mathbf{c}}$ se mostra como um ponto de mínimo. Ao ocorrer penetração com $d_A < 0$, ocorre a inversão de um dos autovalores, caracterizando um ponto de sela.

A Figura 7.4(b) ilustra um cenário com diferentes curvaturas, mas que se caracterizam de forma semelhante: quando $d_A > 0$, nas proximidades do contato, $\bar{\mathbf{c}}$ é um mínimo, e quando $d_A < 0$ $\bar{\mathbf{c}}$ é um ponto de sela. Note que quando $d_A > 0$ fora das imediações de contato nesse caso $\bar{\mathbf{c}}$ deixa de ser um mínimo.

O cenário ilustrado na Figura 7.4(c) é bastante particular em que ocorre contato conforme. De fato, quando $d_A = 0$ ocorre intersecção de toda a curva Γ_A com a superfície Γ_B . Por isso, ao variar o parâmetro d_A em torno de $d_A = 0$, há simetria para valores de $d_A > 0$ e $d_A < 0$. Imaginando-se novamente uma transformação de Γ_A que parte de $d_A > 0$ para $d_A < 0$, a solução $\bar{\mathbf{c}}$ de penetração máxima nesse caso é também um ponto de sela de f_1 .

Por fim, novamente remete-se a um caso não plausível, apenas para completo entendimento, mas sem apelo prático para cenários realistas de contato. Considera-se que a

curva Γ_A possui raio de curvatura maior do que o da superfície Γ_B , em seu corte alinhado com o plano da curva Γ_A . Esse representa um cenário em que o contato não se manifesta em $\bar{c}$. Assim, as aproximações locais de Γ_A e Γ_B deixam de fazer sentido.

Figura 7.4 – Estudo paramétrico em “ d_A ” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\bar{c}$ para o problema envolvendo um curva quadrática e uma quádrica

Fonte: do autor

Os exemplos estudados indicam que a degeneração mudou a característica do ponto de interesse $\bar{c}$, sendo que agora ele é uma sela com dois autovalores positivos, mas apenas um negativo para cenários de penetração ocorrida logo após o contato. Antes da penetração, nos casos de contato não conforme, o mesmo $\bar{c}$ é um ponto de mínimo nas proximidades da ocorrência da interação de contato. Note que nesse estudo há apenas três autovalores envolvidos pois, com a degeneração da superfície Γ_A em uma curva, a matriz Hessiana diminui para dimensão 3.

Figura 7.5 – Estudo paramétrico em “ d_A ” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$ para o problema envolvendo um curva quadrática e uma quádrlica

Fonte: do autor

7.5.3 Caracterização do contato entre uma quádrlica e um ponto

Um último estudo de sensibilidade é apresentado a seguir, a fim de ilustrar o comportamento espectral para a solução $\bar{\mathbf{c}}$ quando há degeneração de duas coordenadas de uma parametrização de superfície, levando-a a um ponto material (trata-se da degeneração *master-slave*). Tem-se a mesma superfície Γ_B dos exemplos anteriores, mas Γ_A agora é degenerada a um ponto:

$$\Gamma_A = (0,0,d_A). \quad (7.34)$$

em que d_A é um parâmetro utilizado para mover o ponto material. Note, portanto, se tratar da escolha particular de $\zeta_A = 0$ e $\theta_A = 0$, assim caracterizando o operador degenerativo aplicado ao problema original entre duas superfícies:

$$\mathbf{P}_s^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Figura 7.6 – Estudo paramétrico em “ d_A ” com outros parâmetros fixos para os autovalores da matriz Hessiana avaliada em $\bar{\mathbf{c}}$ para o problema envolvendo um ponto e uma quádrlica

Fonte: do autor

Estudou-se novamente o comportamento da matriz Hessiana assumindo a interação de contato em $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. O comportamento dos autovalores está ilustrado na Figura 7.6 e mostra claramente que o ponto analisado é um mínimo (dois autovalores positivos) quando o ponto se encontra nas proximidades da superfície. Valores mais elevados de afastamento ou penetração podem levar à mudança da característica para um ponto de sela, pelo fato de que na verdade haveria outro mínimo (ao menos) associado a outro $\bar{\mathbf{c}}_s$, ou seja, outro ponto na superfície Γ_B , caracterizado pela projeção ortogonal em Γ_B do ponto material resultado da degeneração de Γ_A . Assim, esse problema tem um comportamento muito mais simples do que os anteriores. Para efeitos de modelagem computacional de contato, em geral se está interessado em permitir pequenas penetrações (por exemplo, pelo Método das Penalidades. Portanto, nessas

situações em geral é possível caracterizar a solução $\bar{c}$ de interesse como um ponto de mínimo de f_1 .

7.5.4 Discussão

Um algoritmo numérico robusto para detecção local de contato deve ser capaz de determinar o $\bar{c}$ de interesse para situações que envolvam afastamento, intersecção pontual ou penetração entre superfícies candidatas a contato. Assim, é fundamental que seja previsível a caracterização da solução de interesse $\bar{c}$ para todas essas situações.

O estudo das seções 7.5.1, 7.5.2 e 7.5.3 com as quádricas e sua degeneração em curvas quadráticas e pontos materiais que foi ilustrado não é de caráter geral, na medida em que se fez a hipótese para uma forma particular para as superfícies e suas degenerações. No entanto, é possível identificar nos resultados diretrizes para o tipo de solução que se espera encontrar na busca de $\bar{c}$ em uma classe de problemas de contato, envolvendo alguns tipos de degeneração. A demonstração formal para a caracterização esperada para casos gerais, com diversas naturezas de degeneração, incluindo mudanças de base, pelo conhecimento do autor, é um tema em aberto. No entanto, acredita-se que a linha estabelecida da aproximação local de qualquer superfície por alguma forma padronizada, como aqui foi feita com as quádricas, seguida de sua caracterização, é promissora e pode ser mais explorada em trabalhos futuros. Enfatiza-se que há casos patológicos não cobertos no estudo anterior que envolvem singularidades ou situações de não convexidade que devem ser tratados para tornar as conclusões, de fato, gerais.

Idealizam-se cenários em que o estudo realizado nas seções 7.5.1, 7.5.2 e 7.5.3 seja representativo. Para essas situações um resumo da caracterização realizada está ilustrado na Tabela 7.1. Note que o contato conforme, mesmo envolvendo as superfícies particulares desse estudo, é um caso patológico que deve ser tratado separadamente e não está englobado nesse resumo. Esse será comentado na seção 7.7.2.

Os resultados da Tabela 7.1 mostram que no estudo realizado, o aumento do grau de degeneração modifica as características espectrais da solução de interesse para $\bar{c}$. Em casos que envolvem a penetração das superfícies, ao degenerar o contato, há diminuição do número de autovalores negativos. O caso extremo se configura na degeneração de uma das superfícies em um ponto material, que induz a mudança da característica de sela para a de um ponto de mínimo de f_1 .

Com o objetivo de determinar numericamente a solução $\bar{c}$, deve-se estabelecer um ferramental de otimização para a busca de pontos de sela ou mínimo. A literatura mais comum de otimização geralmente apresenta técnicas focadas na busca de mínimos (ou máximos). A sela, no entanto, exige um tratamento diferenciado e por vezes mais desafiador.

Tabela 7.1 – Resultados da análise espectral da caracterização da solução $\bar{c}$ de interesse em torno da interação de contato pontual de superfícies não conformes.

Geometrias envolvidas	Caso	Caracterização de $\bar{c}$	Sinais dos autovalores da matriz Hessiana
duas quádricas	afastamento	mínimo	4 positivos
	intersecção pontual	indeterminado	2 positivos, 2 nulos
	penetração	sela	2 positivos, 2 negativos
quádrica e curva quadrática	afastamento	mínimo	3 positivos
	intersecção pontual	indeterminado	2 positivos, 1 nulo
	penetração	sela	2 positivos, 1 negativo
quádrica e ponto	afastamento	mínimo	2 positivos
	intersecção pontual	mínimo	2 positivos
	penetração	mínimo	2 positivos

Fonte: do autor

O estudo apresentado contabilizou somente a degeneração de coordenadas convectivas na base canônica, sem realizar mudanças de base. Ou seja, na prática, a degeneração é interpretada geometricamente como a obtenção de uma curva a partir de uma superfície, ou de um ponto a partir de uma superfície, que foram os exemplos feitos. Naturalmente é possível estender esse estudo para outras naturezas de degeneração, como a *master-master* entre curvas, por exemplo, ou ainda o contato entre um ponto e uma curva, que representa uma degeneração de grau 3, em que apenas uma coordenada convectiva resta como variável. A interpretação geométrica em casos envolvendo mudanças de base fica comprometida, pois as novas coordenadas envolvem combinações das coordenadas convectivas originais. Assim, variações de uma única coordenada após mudança de base podem representar variações ao longo de todas as coordenadas convectivas originais, com diferentes intensidades. A busca de um entendimento sobre a caracterização de $\bar{c}$ com o devido rigor para situações abstratas dessa natureza é desejável e também é alvo de trabalhos futuros.

7.6 Busca pela solução $\bar{\mathbf{c}}$

Aqui se apresenta uma técnica para busca da solução $\bar{\mathbf{c}}$. Com base na discussão anterior, $\bar{\mathbf{c}}$ pode se manifestar como ponto de mínimo, indeterminado ou sela da função objetivo f_1 , de acordo com o caso considerado, como descrito na Tabela 7.1. Por isso, é necessário o desenvolvimento de um método de busca não limitado a tipos particulares de pontos críticos, mas capaz de ser versátil para procurar, de acordo com o caso de interesse, a solução de mínimo, indeterminada ou sela.

Em particular, aqui enfatiza-se a suma importância da robustez de um algoritmo para a busca de $\bar{\mathbf{c}}$, sobretudo quando esse é um ponto de sela. Em formulações de mecânica computacional do contato pontual entre corpos, quando se utiliza o Método das Penalidades, a presença de pequenas penetrações entre as superfícies não só é comum, como é fundamental para a quantificação dos esforços de contato. Assim, na prática, quando houver contato entre superfícies, a determinação do ponto de sela de uma função objetivo é a necessidade primária. Sem ele não há como utilizar a formulação apresentada no Capítulo 4, tampouco ideias de degenerações. Há de se imaginar em problemas práticos, também, a necessidade de lidar com a proximidade entre a solução $\bar{\mathbf{c}}$ e pontos de intersecção entre as superfícies, caracterizados por soluções denominadas por $\mathbf{c}_i$.

A fim de facilitar a busca por $\bar{\mathbf{c}}$, é desejável a utilização de uma medida auxiliar à função objetivo f_1 , que procure quantificar a penetração entre superfícies, indicando valores de afastamento ou penetração com sinais opostos. Para tal, define-se a seguir a função escalar denominada Gap por:

$$\text{Gap} = \frac{1}{2} [(\Gamma_A - \Gamma_B) \cdot \mathbf{n}_B + (\Gamma_B - \Gamma_A) \cdot \mathbf{n}_A]. \quad (7.36)$$

Note que, quando avaliada na solução de interesse $\bar{\mathbf{c}}$ para casos de ponto de sela, o valor de Gap esperado é negativo. Para conseguir criar essa diferenciação de sinal, se faz necessário o uso das direções normais $\mathbf{n}_A$ e $\mathbf{n}_B$ das superfícies candidatas a contato.

Mostra-se, a seguir, um estudo do comportamento da função objetivo f_1 e da função escalar Gap utilizadas para compor uma estratégia de busca para $\bar{\mathbf{c}}$. Considera-se, para tal, um exemplo de contato envolvendo duas superfícies descritas nas equações (7.30) e (7.31) com os seguintes parâmetros: $a_A = 0.5$, $b_A = 1.0$, $c_A = 0.0$, $d_A = -0.25$, $a_B = -1.0$, $b_B = -0.75$,

$c_B = 0.0$ e $d_B = 0.0$. Não é considerado nesse exemplo nenhum tipo de degeneração. Note que esse exemplo envolve grande penetração entre as superfícies.

As superfícies estão ilustradas na Figura 7.7, em que também estão exibidos os pontos materiais em Γ_A e Γ_B associados à solução desejada $\bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (em azul), bem como os pontos materiais em Γ_A e Γ_B associados a $\mathbf{c}_i = [0.408248 \ 0 \ 0.408248 \ 0]^T$, que representa uma das soluções para a intersecção entre as superfícies (em vermelho).

Figura 7.7 – Exemplo de interação entre superfícies com penetração para estudo da função objetivo

Fonte: do autor

A dificuldade de visualização direta do comportamento de f_1 e Gap por meio de gráficos com coordenadas em $\mathbb{R}^4$ pode ser melhorada com a plotagem de superfícies de nível a partir de variações simultâneas de duas coordenadas e fixando-se outras duas. No entanto a escolha direta das próprias coordenadas convectivas, duas a duas, para compor variações e gerar superfícies de nível pode não levar às visualizações mais claras possíveis. A fim de procurar sanar tal dificuldade, a seguinte proposta é feita: avaliam-se os autovalores e autovetores da matriz Hessiana em algum ponto de interesse, em particular em $\bar{\mathbf{c}}$ ou $\mathbf{c}_i$, conhecidos para esse exemplo. Os autovetores da matriz Hessiana de f_1 permitem construir uma matriz de mudança de base $\mathbf{P}$, conforme apresentado no item 7.4.2. Pode-se visualizar as funções f_1 sob a óptica $f_1 = \hat{f}_1(\tilde{\mathbf{c}})$ e Gap sob a óptica $\text{Gap} = \widehat{\text{Gap}}(\tilde{\mathbf{c}})$, ou seja, com uma mudança de coordenadas em relação às funções originais. As novas coordenadas $\tilde{\mathbf{c}}$ devem ser compreendidas como contribuições

segundo as direções que compõem $\mathbf{P}$, com a mesma origem que o sistema de coordenadas original.

7.6.1 Estudo do ponto de sela $\bar{\mathbf{c}}$

Para esse estudo avaliam-se os autovalores e autovetores da matriz Hessiana de f_1 em $\bar{\mathbf{c}}$. Os autovalores obtidos são: $\lambda_1 = -0.382782$, $\lambda_2 = -0.439451$, $\lambda_3 = 1.56445$ e $\lambda_4 = 1.63278$, o que caracteriza a solução de sela. É possível escrever o vetor $\bar{\mathbf{c}}$ na nova base, resultado nas coordenadas $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{P}^T \bar{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Toma-se para esse exemplo superfícies de nível de f_1 e Gap para $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0]^T$ e $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$, em que as direções $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4\}$ estão associadas à sequência crescente de autovalores. O comportamento dessas superfícies de nível é mostrado na Figura 7.8 e Figura 7.9. Note que as superfícies de nível contêm a solução $\tilde{\mathbf{c}}$, mostrada com um ponto azul.

Figura 7.8 – Curvas de nível da função f_1 analisadas segundo variação em (a) $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0]^T$ (b) $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$. O ponto azul ilustra $\tilde{\mathbf{c}}$.

Fonte: do autor

O comportamento ilustrado na Figura 7.8 permite visualizar claramente o caráter de sela de $\bar{\mathbf{c}}$. Segundo variações nas coordenadas $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$, associadas às direções $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, observa-se na Figura 7.8(a) um ponto de máximo local. Já segundo variações nas coordenadas $\tilde{c}_3$ e $\tilde{c}_4$, associadas às direções $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$, é observado um ponto de mínimo local, como visto na Figura 7.8(b).

O estudo do comportamento da função Gap ilustrado na Figura 7.9 permite visualizar que segundo variações nas coordenadas $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$, associadas às direções $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, $\bar{\mathbf{c}}$ se manifesta como um ponto de mínimo local. Já segundo variações nas coordenadas $\tilde{c}_3$ e $\tilde{c}_4$, associadas às

direções $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$, se manifesta como um máximo local. Portanto, o comportamento é invertido em relação ao de f_1 .

Figura 7.9 – Curvas de nível da função Gap analisadas segundo variação em (a) $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0]^T$ (b) $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$. O ponto azul ilustra $\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}$.

Fonte: do autor

Figura 7.10 – Pontos materiais em Γ_A e Γ_B provenientes de variações segundo direções $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta) em torno $\tilde{\mathbf{c}}$.

Fonte: do autor

A Figura 7.10 mostra os pontos materiais nas superfícies Γ_A e Γ_B provenientes de variações segundo as direções principais $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta), em torno de $\bar{\mathbf{c}}$. É possível ver que o valor da distância entre cada par de pontos materiais diminui à medida que se afasta de $\bar{\mathbf{c}}$, segundo essas direções. Trata-se de mais uma visualização do caráter de máximo local de f_1 em $\bar{\mathbf{c}}$, já plotado na Figura 7.8(a) – sob a óptica das direções $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$.

7.6.2 Estudo do ponto de intersecção $\mathbf{c}_i$

A intersecção entre as superfícies está associada às soluções $\mathbf{c}_i$ para as quais vale a condição: $\Gamma_A = \Gamma_B$. Note que em casos de intersecção pontual, a solução $\mathbf{c}_i$ é única. Há casos em que há infinitos pontos de intersecção, levando a infinitas soluções para $\mathbf{c}_i$. O presente exemplo, em que a solução desejada $\bar{\mathbf{c}}$ é um ponto de sela, é caracterizado pela existência de uma curva em que $\Gamma_A = \Gamma_B$, que leva a infinitas soluções para intersecções $\mathbf{c}_i$. Observe que para casos de intersecção pontual a solução $\bar{\mathbf{c}}$ requerida corresponde diretamente ao $\mathbf{c}_i$, que se apresentará com dois autovalores positivos e dois nulos, conforme apresentado na síntese da Tabela 7.1 (não se trata do cenário proposto nesse exemplo).

Para os casos em que a solução desejada $\bar{\mathbf{c}}$ for uma sela (caso proposto), as infinitas soluções $\mathbf{c}_i$ podem estar próximas de $\bar{\mathbf{c}}$ e devem receber uma atenção particular. Isso pois, como já dito, em geral em modelos de contato em que se utiliza o Método das Penalidades para imposição do vínculo mecânico, ocorrem penetrações pequenas. Dessa forma, a região de intersecção representa um local de proximidade geométrica em relação à solução de máxima penetração $\bar{\mathbf{c}}$, requerida.

A função objetivo f_1 é definida tal que, por construção, sempre assume valores positivos ou nulos. A intersecção representa uma solução em que a distância entre as superfícies é nula, levando a $f_1 = 0$. Portanto, soluções $\mathbf{c}_i$ são pontos de mínimo global da função objetivo f_1 .

Da mesma forma que desenvolvido na seção anterior, agora é apresentado o estudo do comportamento de f_1 e Gap em torno de $\mathbf{c}_i$. Para tal, avaliou-se outra mudança de base, dessa vez tomando-se $\mathbf{P}$ pela organização em colunas dos autovetores da matriz Hessiana de f_1 avaliada em $\mathbf{c}_i$. Os autovalores da matriz Hessiana obtidos são: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.704666$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 2.12867$. Realizando a mudança de base dada por $\mathbf{P}$, as coordenadas da intersecção $\mathbf{c}_i$ podem ser escritas na nova base, tal que $\tilde{\mathbf{c}}_i = \mathbf{P}^T \mathbf{c}_i$. Para o exemplo particular da presente discussão, tomando-se $\mathbf{c}_i = [0.408248 \ 0 \ 0.408248 \ 0]^T$, tem-se o resultado $\tilde{\mathbf{c}}_i = [0 \ 0.568086 \ 0 \ 0.103014]^T$.

Toma-se, para esse exemplo, superfícies de nível de f_1 e Gap para $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0.103014]^T$ e $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0.568086 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$, em que as direções $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4\}$ estão escritas na ordem associada à sequência crescente de autovalores. O comportamento dessas superfícies de nível é mostrado na Figura 7.11 e Figura 7.13. Note que as superfícies de nível contêm a solução $\tilde{\mathbf{c}}_i$, mostrada com um ponto vermelho.

Figura 7.11 – Curvas de nível da função f_1 analisadas segundo variação em (a) $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0.103014]^T$ (b) $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0.568086 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$. O ponto vermelho ilustra $\tilde{\mathbf{c}}_i$.

Fonte: do autor

A Figura 7.11(b) mostra que $\tilde{\mathbf{c}}_i$ é um ponto de mínimo segundo as direções $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$. Já a Figura 7.11(a) mostra que segundo variações na coordenada $\tilde{c}_2$, em torno de $\tilde{\mathbf{c}}_i$, também é caracterizado um ponto de mínimo. No entanto, segundo a direção $\mathbf{h}_1$, na vizinhança do ponto $\tilde{\mathbf{c}}_i$ ocorre variação nula de f_1 , o que é previsto pelo autovalor nulo associado à curvatura da função objetivo segundo essa direção. Geometricamente, espera-se a existência de um conjunto de soluções caracterizadas pela intersecção dada por $f_1 = 0$. A orientação que se deve variar as coordenadas convectivas em torno de $\mathbf{c}_i$ para encontrar essas soluções é dada por $\mathbf{h}_1$.

A Figura 7.12 ilustra os pontos materiais em Γ_A e Γ_B , provenientes de variações segundo direções $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta) em torno $\mathbf{c}_i$. Note que $\mathbf{h}_1$ remete em Γ_A e Γ_B à direção tangente à curva dada pela intersecção entre as superfícies, avaliada em $\mathbf{c}_i$. Já a direção $\mathbf{h}_2$ chama a atenção por apontar na direção da bacia de $\bar{\mathbf{c}}$ (mas também na direção oposta à mesma). De fato, o caminho de $\mathbf{c}_i$ para $\bar{\mathbf{c}}$ envolve uma direção ascendente de f_1 .

Complementando esse estudo, por fim avalia-se o comportamento da função Gap em torno de $\tilde{\mathbf{c}}_i$, conforme visto na Figura 7.13. Note a importante constatação de que $\tilde{\mathbf{c}}_i$ não é ponto crítico de Gap. Ainda chama a atenção na Figura 7.13(a) que, segundo as direções $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, pode-se localizar a existência de um ponto de mínimo de Gap. Apesar de a curva de nível

mostrada na Figura 7.13(a) não permitir diretamente a visualização desse mínimo do Gap com $\bar{\mathbf{c}}$ do estudo anterior, a busca de tal mínimo pode representar uma maneira de adentrar a bacia do ponto de sela de interesse, a partir do ponto $\mathbf{c}_i$. Tal comportamento de mínimo local permanece, quando avaliado diretamente em $\bar{\mathbf{c}}$ segundo as direções locais $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, como visto na Figura 7.9(a).

Figura 7.12 – Pontos materiais em Γ_A e Γ_B provenientes de variações segundo direções $\mathbf{h}_1$ (amarelo) e $\mathbf{h}_2$ (magenta) em torno $\mathbf{c}_i$.

Fonte: do autor

A ideia de busca de $\mathbf{c}_i$ para $\bar{\mathbf{c}}$ aqui introduzida deve ser restrita ao sub-espço representado pelas direções dadas por $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, uma vez que a busca de um mínimo do Gap segundo as direções $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$ pode levar a outras soluções que não são o ponto de sela de interesse, dado por $\bar{\mathbf{c}}$. A Figura 7.13(b) mostra o comportamento da função Gap segundo as direções $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$.

Figura 7.13 – Curvas de nível da função Gap analisadas segundo variação em (a) $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}_1 \ \tilde{c}_2 \ 0 \ 0.103014]^T$ (b) $\tilde{\mathbf{c}} = [0 \ 0.568086 \ \tilde{c}_3 \ \tilde{c}_4]^T$. O ponto vermelho ilustra $\tilde{\mathbf{c}}_i$.

Fonte: do autor

7.6.3 Algoritmo de busca para a solução $\bar{\mathbf{c}}$

Os estudos das seções 7.6.1 e 7.6.2 representam constatações que levam à elaboração de uma técnica de busca do ponto $\bar{\mathbf{c}}$. Em primeiro lugar, observa-se que a busca de um ponto de mínimo, em geral, é mais simples do que um ponto de sela. Isso, pois há diversos métodos de otimização já desenvolvidos para trabalhar na busca de mínimos. Nesse contexto, a procura por uma solução de um ponto de intersecção em uma primeira fase de busca parece uma alternativa bastante atrativa. Além disso, para problemas práticos em que as superfícies representam o contorno de corpos em contato, como já mencionado, espera-se trabalhar com pequenas penetrações entre as superfícies, o que leva em geral à proximidade da solução da intersecção e do ponto de sela. Além disso, a obtenção de um mínimo de f_1 tem uma utilidade adicional: ao avaliar o valor de f_1 no ponto de mínimo e os autovalores da matriz Hessiana de f_1 nesse mesmo ponto, é possível antever se há ou não penetração entre as superfícies, a fim de tomar a decisão de continuar ou não a busca pelo ponto de sela, conforme o caso.

A presente discussão admite que não se esteja trabalhando com situações de superfícies conformes, as quais são discutidas na seção 7.7.2. Ao determinar a solução de mínimo para f_1 , se todos os autovalores da matriz Hessiana de f_1 forem estritamente positivos, de acordo com a Tabela 7.1 já é possível identificar o caso como uma situação em que não ocorre contato entre as superfícies. Já quando houver dois autovalores nulos e dois positivos, pode-se estar no caso de contato pontual, em que a evolução da penetração leva à intersecção em uma curva em que $\Gamma_A = \Gamma_B$. No entanto, de acordo com o estudo anterior, assumindo que as conclusões sejam

válidas em cenários além das quádricas adotadas (note que aqui se abre a necessidade de uma generalização formal do que foi discutido nas seções anteriores), quando um dos autovalores da matriz Hessiana avaliada na solução de mínimo de f_1 for nulo, há a indicação da existência da necessidade de continuar a busca de $\mathbf{c}_i$ para $\bar{\mathbf{c}}$. Note que aqui se está falando sobre a identificação da intersecção não pontual entre duas superfícies, o que também pode ser confirmado pela própria avaliação de f_1 em $\mathbf{c}_i$, que deve ser nula nessas condições, indicando a intersecção.

Após a identificação de uma intersecção não pontual $\mathbf{c}_i$, parte-se para uma segunda fase de busca, procurando adentrar a bacia do ponto de sela requerido para esse caso, dado por $\bar{\mathbf{c}}$. Tal ponto pode ser buscado pela minimização da função Gap segundo as direções $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$, avaliadas em $\mathbf{c}_i$. O resultado dessa minimização pode levar à bacia de atração do ponto de sela, aqui denominada como a região que possui comportamentos de matrizes Hessianas com as mesmas características espectrais de tal ponto, o qual pode ser obtido na sequência, em um terceiro passo.

Note que a técnica proposta se constitui em uma busca em três fases para $\bar{\mathbf{c}}$. Nas duas primeiras fases buscam-se mínimos locais. Já na terceira fase há a busca de um ponto de sela local. Um resumo desse algoritmo pode ser visto na Figura 7.14. A não convergência em qualquer uma das fases se configura no insucesso na busca por $\bar{\mathbf{c}}$.

7.6.4 A utilização de métodos do tipo *trust-region* (TR)

Pode-se imaginar que as parametrizações das superfícies originais sempre estarão disponíveis para a construção da função objetivo, bem como será possível calcular suas derivadas. Nesse contexto imaginam-se superfícies de classe $\mathbb{C}^2$. Assim, a avaliação do gradiente e da Hessiana é sempre possível.

Para o tipo de problema de otimização em questão, existe a possibilidade de utilização de métodos de busca do tipo *trust-region* (TR). Trata-se de uma técnica que procura, a partir de um chute inicial para as coordenadas associadas ao ponto crítico de interesse (que pode ser feito no problema em questão por aproximações geométricas) dar passos na direção do ponto crítico de interesse, mas limitando o tamanho de cada passo a um valor pré-fixado (raio de uma região de confiança, denominada TR). Esse raio pode ser atualizado ao longo da busca: trata-se do raio de uma esfera no espaço de variáveis da função objetivo. A direção da busca pode se dar puramente pela máxima declividade, limitada pelo tamanho do raio da TR (no caso da busca de

um mínimo) – que caracteriza o chamado método *steepest-descent*, ou utilizar-se uma aproximação quadrática local para a função objetivo e tentar utilizar-se do passo completo de Newton (aqui há questões mais delicadas, pois nem sempre o passo de Newton resulta em uma direção que leva a um ponto de mínimo – caso esse seja o interesse). Há também a possibilidade de combinar as direções de máxima declividade e de Newton de forma conveniente, caracterizando os métodos do tipo *dog-leg path*. A robustez dos métodos TR é formidável para os tipos de problemas aqui propostos e recomenda-se fortemente seu uso.

Na Figura 7.14 há três etapas que envolvem a determinação de pontos de mínimo ou sela de funções objetivo. Nessas etapas é que os métodos TR se tornam úteis. Como referências sobre o assunto, pode-se mencionar os livros [90] e [91] em que há diversos algoritmos bem como o devido formalismo matemático sobre o método. A busca de soluções de pontos de sela, no entanto, é mais rara de ser encontrada. O leitor irá localizar em [92] uma interessante forma de abordar via método TR pontos de sela de superfícies potenciais associadas a problemas de formação molecular, que permitem a utilização de aproximações quadráticas para a função objetivo nas imediações de um ponto para caminhar por direções envolvendo o aumento da função objetivo, em busca de pontos de sela. Esse artigo apresenta ideias que servem de base para a terceira etapa de busca, para o ponto de sela. Note que aqui se utilizou diretamente o passo completo de Newton em busca da solução de sela, limitado pelo raio da TR. Isso possibilita trilhar em direções ascendentes da função objetivo. Observe que todo o controle pode ser feito avaliando as direções de busca por meio dos autovalores associados aos autovetores da matriz Hessiana da função objetivo f_1 . Assim, a busca por direções pré-selecionadas de curvatura positiva ou negativa pode ser feita, de maneira a permitir a busca não somente de mínimos, quando for o caso, mas também de pontos de sela.

Figura 7.14 – Algoritmo de busca para solução $\bar{c}$

Fonte: do autor

7.6.5 Casos que envolvem degeneração

Os estudos apresentados anteriormente, bem como o algoritmo apresentado no item anterior são aplicáveis ao problema sem degeneração de coordenadas. Seguindo a linha de raciocínio ilustrada no item 7.5 e assumindo sua validade, quando há degeneração de apenas uma coordenada convectiva, é possível adaptar as ideias apresentadas anteriormente de modo a buscar não mais pontos de sela com duas curvaturas positivas e duas negativas, mas pontos de sela com uma curvatura negativa e duas positivas.

A primeira fase do algoritmo (busca de mínimo de f_1) permanece igual, mas considera-se que $f_1 = \hat{f}_1(\mathbf{c}_s)$. Após obtenção da solução $\mathbf{c}_{is}$ (via TR, por exemplo), procura-se identificar o tipo de ponto crítico que se está avaliando. No caso de ser um caso em que há penetração entre as superfícies (ver Tabela 7.1), é necessária a busca pela solução da sela, que será o $\bar{\mathbf{c}}_s$. A ideia de trilhar a busca de $\mathbf{c}_{is}$ para $\bar{\mathbf{c}}_s$ é também aplicável. No entanto, nesse caso se restringe a busca ao espaço unidimensional que envolve a direção $\mathbf{h}_1$ apenas, e não mais a busca bidimensional, como feito no caso sem degeneração. Por fim, a busca do ponto de sela $\bar{\mathbf{c}}_s$ é feita na terceira fase do algoritmo.

Casos em que há degeneração de duas coordenadas convectivas acabam por eliminar a necessidade da busca da solução de sela, se admitirmos como válidas as conclusões da Tabela 7.1. Note que nesse caso a solução de interesse $\bar{\mathbf{c}}_s$ é um mínimo, que pode diretamente ser obtido via TR pela minimização de $f_1 = \hat{f}_1(\mathbf{c}_s)$.

Note que aqui novamente enfatiza-se a necessidade de realizar verificações sobre a possibilidade de expandir as ideias intuídas na Tabela 7.1, de forma geométrica, para casos em que há menos interpretação geométrica disponível, como quando há degeneração envolvendo mudança de base. Trata-se de um trabalho futuro a ser desenvolvido.

7.7 Algumas possíveis aplicações para a degeneração do contato

Nessa seção são elencadas algumas possibilidades de utilização do conceito de degeneração do contato *master-master* entre superfícies. Além de representar uma forma geral de formular uma classe de métodos de contato, o que por si só já pode ser visto como algo interessante do ponto de vista de implementação computacional, o uso da degeneração pode se

mostrar valioso no tratamento de singularidades e de cenários de contato que envolvem superfícies conformes. Esses tópicos são explorados a seguir.

7.7.1 Singularidades

No presente contexto, singularidades são interpretadas como pontos ou regiões em alguma das superfícies candidatas a contato em que não há continuidade $\mathbb{C}^1$, mas somente $\mathbb{C}^0$. Geometricamente, a existência de bicos ou quinas estão associadas a esse tipo de característica singular. Ao procurar estabelecer um algoritmo de contato *master-master* entre superfícies que envolva a interação de pontos materiais presentes em regiões de singularidade podem surgir algumas dificuldades.

A Figura 7.15 mostra um exemplo de singularidade existente em uma superfície Γ_A , candidata a contato com Γ_B . A singularidade ocorre neste caso ao longo de uma curva contida em Γ_A , caracterizada por $\Gamma_A(\zeta_A, \bar{\theta}_A)$, sendo $\bar{\theta}_A$ um valor conhecido e fixo para a coordenada convectiva θ_A em que geometricamente se encontra uma quina. Na Figura 7.15 são mostradas duas direções normais $\mathbf{n}_A$ à superfície Γ_A , nas vizinhanças à esquerda e à direita da singularidade. Note que na própria singularidade a definição de $\mathbf{n}_A$ pode ser feita por meio de sub-derivadas, levando a um conjunto de possíveis direções normais, de acordo com os valores limites de $\mathbf{n}_A$ em torno da região singular.

Figura 7.15 – Singularidade existente em uma superfície Γ_A candidata a contato com Γ_B

Fonte: do autor

Do ponto de vista da modelagem computacional de contato, em particular quando se deseja utilizar a formulação *master-master* entre duas superfícies, a existência de uma singularidade pode representar uma dificuldade. A imposição das relações de ortogonalidade em relação a ambas as superfícies é prejudicada, pois quando ocorre contato envolvendo pontos materiais presentes na região singular de alguma das superfícies, a imposição de ortogonalidade depende da escolha de uma direção normal à superfície no ponto de singularidade em meio a diversas possibilidades existentes. Ainda há a expectativa de enfrentar dificuldades relacionadas a saltos abruptos na quantificação do *gap* ao representar um contato que envolve deslizamento entre superfícies passando por uma singularidade.

A fim de evitar problemas numéricos com singularidades, a degeneração de contato pode ser aplicada de maneira a construir um par de contato exatamente no ponto em que se espera um comportamento singular, por meio da fixação da coordenada convectiva da superfície na própria localização da singularidade. Para o caso da Figura 7.15, esse procedimento pode ser feito fixando-se $\bar{\theta}_A$ e deixando as outras três coordenadas convectivas livres para compor uma interação pontual de contato envolvendo pontos sobre a singularidade. Note que a consequência prática dessa degeneração é o abandono da exigência da ortogonalidade envolvendo a direção problemática em que a singularidade ocorre.

Para casos em que a ação de contato é móvel, pela física do modelo, e passa de regiões que não possuem singularidades para regiões com singularidades, é possível criar pares de contato não degenerados para compor ações de contato ao longe da singularidade, suplementados por outros pares de contato degenerados nas singularidades. O exemplo numérico 7.8.4 ao fim desse Capítulo ilustra essa técnica.

7.7.2 Superfícies conformes

A interação de contato entre superfícies sempre envolve a existência de um carregamento distribuído, aplicado em ambas as superfícies de contato (pares ação e reação). No entanto, conforme já discutido no item 2.5.4, quando a área de contato é pequena frente ao tamanho dos corpos envolvidos, a interação de contato pode ser mecanicamente bem representada por meio de ações pontuais nas superfícies. A determinação dos pontos materiais em ambas as superfícies para aplicação desses esforços de contato se constitui no objetivo da busca por $\bar{\mathbf{c}}$, o que já foi bastante discutido nesse Capítulo.

Dadas duas superfícies candidatas a contato, quando há localmente solução única para $\bar{c}$, a localização da interação mecânica de contato fica bem definida. Com isso, é possível se utilizar da formulação *master-master* entre superfícies (Capítulo 4). No entanto, há cenários que envolvem a ocorrência de infinitas soluções para $\bar{c}$. Quando isso ocorre há infinitos pares de pontos materiais equidistantes entre as superfícies. Nesses casos, é possível determinar um conjunto de coordenadas convectivas que obedeçam à condição de ponto crítico de f_1 .

O contato entre corpos cujos contornos sejam descritos por superfícies conformes envolve um cenário em que ocorrem infinitas soluções $\bar{c}$. Assim, a utilização imediata da formulação *master-master* entre superfícies deve ser revista pois, em primeiro lugar, é necessário estabelecer uma metodologia para determinar $\bar{c}$ em meio às infinitas possibilidades. Um exemplo bastante simples em que esse tipo de problema pode ocorrer é no contato entre superfícies planas e paralelas. Deve-se estabelecer alguma estratégia para determinação de certo $\bar{c}$ em meio a infinitas possibilidades. No entanto, a homogeneização da ação mecânica de contato de forma pontual em cenários de contato conforme, embora possível, pode não representar bem o cenário físico desejado, na medida que as áreas de contato envolvidas podem se assemelhar às dimensões dos corpos envolvidos. Esse tipo de problema em geral não ocorre quando o contato é não conforme, em que a representação da interação por esforços pontuais é mais fiel ao carregamento distribuído, de fato, nas superfícies envolvidas, que são em geral pequenas.

Do ponto de vista geométrico, enfatiza-se que no cenário de superfícies conformes soluções $\bar{c}$ que satisfazem a condição de ponto crítico de f_1 existem. A dificuldade a ser sanada (associada à física) está associada à escolha de certo $\bar{c}$ que bem represente a homogeneização da ação mecânica de contato, por meio de esforços concentrados.

Nota: a evidência de infinitas soluções para $\bar{c}$ não ocorre somente para casos que envolvem o contato *master-master* entre superfícies. Pode ser encontrado também em casos de degeneração em que se procura o contato entre uma curva e uma superfície – como o caso mostrado na Figura 7.4(c) – e também no caso de degeneração para contato *master-slave*, em que o ponto *slave* se encontra no centro de curvatura de uma superfície *master* que possua curvatura localmente constante.

7.7.2.1 Caracterização de $\bar{\mathbf{c}}$ entre superfícies conformes

O exemplo mostrado na Figura 7.3(c) mostra que, quando da ocorrência de contato entre duas superfícies conformes, se evidenciam dois autovalores nulos e dois positivos na matriz Hessiana da função objetivo f_1 avaliada em certo $\bar{\mathbf{c}}$ em meio aos outros disponíveis. No caso da Figura 7.4(c) é exibido um caso que envolve degeneração de uma superfície em uma curva. Explora-se novamente um caso de contato conforme, caracterizado por um autovalor nulo e dois positivos na matriz Hessiana da função objetivo f_1 , avaliada em certo $\bar{\mathbf{c}}$ em meio aos outros disponíveis.

O cenário de paralelismo entre retas no espaço envolve a ocorrência de um autovalor nulo na Hessiana de f_1 avaliada nas infinitas soluções $\bar{\mathbf{c}}$ obtidas quando se busca um ponto crítico de f_1 . A Figura 7.16(a) mostra um exemplo de posicionamento espacial de barras de seção transversal elíptica, paralelas no espaço, que induz a esse tipo de situação. Em azul são ilustrados os pontos materiais referentes a uma solução $\bar{\mathbf{c}}$ escolhida de forma arbitrária. O autovetor associado ao autovalor nulo pode ser usado para compor uma direção para variar $\mathbf{c}$ em torno de $\bar{\mathbf{c}}$, levando aos pontos materiais em amarelo plotados na Figura 7.16(c).

Já o cenário de superfícies planas paralelas envolve a ocorrência de dois autovalores nulos na Hessiana de f_1 avaliada nas infinitas soluções $\bar{\mathbf{c}}$ obtidas quando se busca um ponto crítico de f_1 . A Figura 7.16(b) mostra um exemplo de posicionamento espacial de barras de seção super elíptica – ver equação (4.111) com expoente $n = 10$, paralelas no espaço, que induz a esse tipo de situação. Em azul são ilustrados os pontos materiais referentes a uma solução $\bar{\mathbf{c}}$ escolhida de forma arbitrária. Novamente os autovetores associados aos autovalores nulos podem ser usados para compor direções para variar $\mathbf{c}$ em torno de $\bar{\mathbf{c}}$, levando aos pontos materiais ilustrados nas cores amarelo e laranja na Figura 7.16(d).

Figura 7.16 – Exemplo de situação de contato conforme (a) linhas paralelas (b) superfícies paralelas (c) pontos materiais associados à direção principal de um autovalor nulo (d) pontos materiais associados às direções principais de autovalores nulos

Fonte: do autor

Os exemplos anteriores mostram que a matriz Hessiana de f_1 avaliada em $\bar{c}$ imerso em região de equidistância entre as superfícies (conformes) possui um ou dois autovalores nulos, justamente associados às direções de curvatura nula na função objetivo f_1 . Assim, é necessário lidar com isso na formulação de contato quando se deseja contemplar a possibilidade de interação envolvendo esse tipo de situação. Esse tópico é mais explorado no próximo item.

7.7.2.2 Utilizando a degeneração em cenários de superfícies conformes

Foi visto no desenvolvimento da formulação de contato *master-master* entre duas superfícies que há a necessidade de se inverter a matriz Hessiana da função objetivo f_1 ,

conforme descrito na equação (4.27). Quando ocorrer algum autovalor nulo, portanto, tal inversão se tornará inviável, o que se tornaria uma patologia da formulação.

Pode-se observar a origem dessa problemática quando é obtida a relação entre $\delta \mathbf{c}$ e $\delta \mathbf{d}$, conforme exibido na equação (4.26). Utilizando-se a decomposição espectral da matriz Hessiana $\mathbf{H}$ conforme a equação (7.10), pode-se reescrever (4.26):

$$\mathbf{PDP}^T \delta \mathbf{c} = -\mathbf{r}_d \delta \mathbf{d} . \quad (7.37)$$

Pode-se utilizar de $\mathbf{P}^T \delta \mathbf{c} = \delta \tilde{\mathbf{c}}$, que representa uma mudança de base para tratar da variação das coordenadas convectivas associadas às direções principais de $\mathbf{H}$. Manipulando-se (7.37) leva a:

$$\mathbf{D} \delta \tilde{\mathbf{c}} = -\mathbf{P}^T \mathbf{r}_d \delta \mathbf{d} . \quad (7.38)$$

A forma mostrada em (7.38) permite uma interpretação bastante clara e que leva à relação entre cada componente de $\delta \tilde{\mathbf{c}}$ e o vetor $\delta \mathbf{d}$. Sendo $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal com os autovalores de $\mathbf{H}$ conforme ilustrado na equação (7.9), pode-se escrever para cada linha de (7.38):

$$\lambda_i \delta \tilde{c}_i = -\mathbf{h}_i^T \mathbf{r}_d \delta \mathbf{d} \Rightarrow \delta \tilde{c}_i = -\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \mathbf{h}_i^T \mathbf{r}_d \delta \mathbf{d}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (7.39)$$

Dessa forma, quando $\lambda_i \neq 0$ dispõe-se de uma equação que permite relacionar a variação $\delta \tilde{c}_i$ com $\delta \mathbf{d}$. No entanto, quando $\lambda_i = 0$ não se dispõe dessa relação. De fato, examinando o limite da relação (7.39) para $\lambda_i \rightarrow 0$, tem-se que $\delta \tilde{c}_i \rightarrow \infty$. A interpretação geométrica para tal fato é a seguinte: a curvatura pequena da função objetivo com $\lambda_i \rightarrow 0$ está associada a um cenário em que variações muito pequenas nos graus de liberdade $\delta \mathbf{d}$ podem levar a variações muito grandes em $\delta \tilde{c}_i$. Quando, de fato, $\lambda_i = 0$, qualquer variação $\delta \tilde{c}_i$ satisfaz a relação (7.39), o que é caracterizado pelas infinitas soluções de $\tilde{c}_i$ ao longo da direção de curvatura nula de f_1 . Isso se manifesta na condição em que $\lambda_i = 0$ pela não inversibilidade da matriz Hessiana de f_1 .

De posse dessa interpretação e examinando-se a possibilidade de degeneração de contato, em particular observando a equação (7.29), pode-se pensar em realizar a degeneração do contato em direções principais associadas a autovalores nulos. Com isso, após a aplicação

do operador degenerativo na Hessiana original por $\mathbf{P}_s^T \mathbf{f}_{1,cc} \mathbf{P}_s$, irá resultar uma matriz Hessiana inversível. Fisicamente o que se está propondo é a fixação a priori das coordenadas convectivas principais $\bar{c}_i$, associadas a $\lambda_i = 0$. Com isso, impõe-se que $\delta \bar{c}_i = 0$, eliminando-se a sua indeterminação.

7.8 Exemplos numéricos

A seguir são mostrados exemplos numéricos com algumas aplicações iniciais para o conceito de degeneração de contato. Os exemplos foram simulados utilizando-se dos recursos da plataforma GIRAFFE, conforme já apresentado no Capítulo 3.

Em todos os exemplos foi utilizada a formulação de contato *master-master* entre superfícies, degenerando-a de maneira particular para cada caso. Somente o Método das Penalidades foi utilizado para a imposição da restrição mecânica de contato, e não foi considerado atrito. Os sólidos considerados foram modelados por meio de elementos finitos de barras. Optou-se por representar graficamente na visualização dos modelos a plotagem renderizada somente das superfícies candidatas a contato, cujo movimento está atrelado aos elementos finitos estruturais de barras.

7.8.1 Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies

A Figura 7.17 mostra a configuração inicial das superfícies de contato atreladas aos elementos finitos que compõem as barras AC e BD, engastadas em A e em B respectivamente. Considera-se que cada uma das superfícies de contato seja degenerada pela fixação de uma coordenada convectiva associada à posição angular das seções transversais. Com isso, o contato degenerado considera a interação entre as curvas indicadas em azul na Figura 7.17. Trata-se de uma degeneração que resulta em uma interação de contato *master-master* entre curvas no espaço.

Figura 7.17 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Configuração inicial

Fonte: do autor

Algumas informações geométricas e de materiais relevantes sobre o modelo estão mostradas na Tabela 7.2. Dois passos de carregamento quase-estáticos são considerados, dados por:

- Intervalo 0-1: O ponto A é fixo e o ponto B é submetido a um deslocamento prescrito de $(0.0, 0.0, -1.0)$ [m]. Isso introduz a interação de contato entre as barras. O intervalo espacial que as separa inicialmente é fechado, de tal modo que elas se tocam e sofrem flexão. Esse passo é subdividido em 100 incrementos uniformes.
- Intervalo 1-2: O ponto A é submetido a um deslocamento prescrito de $(1.0, 0.0, 0.0)$ [m]. O ponto B é submetido ao deslocamento $(0.0, 1.0, 0.0)$ [m]. O efeito causado é a mudança sucessiva dos pontos materiais de contato entre as vigas, uma vez que é induzido deslizamento entre elas. Esse passo é subdividido inicialmente em 100 incrementos, com a possibilidade de alteração automática de acordo com dificuldade/facilidade de convergência ao longo da simulação.

Tabela 7.2 – Dados do modelo: Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies.

Posições dos pontos materiais [m]	A (0.0,2.5,0.0) B (2.5,0.0,0.3) C (3.0,2.5,0.0) D (2.5,3.0,0.3)
Comprimentos dos elementos de viga	0.2 m (corresponde a 15 elementos ao longo de AC e BD)
Dados da seção transversal	circular com raio = 0.1 m
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 1e7$
Módulo de Young	$E = 2e9$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$

Fonte: do autor

A evolução das configurações está mostrada na Figura 7.19 e permite visualizar que as vigas sofrem flexões bastante pronunciadas. O contato foi estabelecido ao longo de quase todo o período simulado, com exceção do início, em que as barras estavam separadas. Ao longo da

simulação houve diversas transições entre superfícies vizinhas (degeneradas) que, conjuntamente, compõem a representação dos contornos das barras AC e BD. A Figura 7.18 ilustra a evolução da reação vincular no ponto B, que se tornou mais pronunciada na medida que a flexão se acentuou.

Figura 7.18 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Reação vincular no ponto B

Fonte: do autor

Figura 7.19 – Contato entre curvas degeneradas a partir de superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.

Fonte: do autor

7.8.2 Contato *master-slave* a partir de superfícies

A Figura 7.20 mostra a configuração inicial das superfícies de contato, que são atreladas aos elementos finitos que compõem as barras, inicialmente retilíneas, AEB e CD. Os pontos C e D são engastados, enquanto que a barra AEB possui todos os graus de liberdade prescritos em seu ponto médio E. Suas extremidades A e B, bem como os outros pontos se encontram livres. Considera-se que a superfície de contato da barra AEB seja degenerada pela fixação de duas coordenadas convectivas, de modo que cada superfície da barra AEB se reduza a um ponto material para efeitos de detecção de contato. Com isso, considera-se a interação de contato adotando, por construção (associada à escolha dos valores das coordenadas degeneradas), na barra AEB os pontos materiais destacados em azul na Figura 7.20. Trata-se de uma degeneração que resulta em uma interação de contato *master-slave*.

Figura 7.20 – Contato *master-slave* a partir de superfícies. Configuração inicial.

Fonte: do autor

A Tabela 7.3 mostra alguns dados numéricos para a construção do modelo em questão. Em termos de evolução do modelo, considerou-se apenas um passo quase-estático no intervalo 0-1. Ao longo desse passo foi prescrito o deslocamento no ponto E, dado por $(0.0, 0.5, 0.0)$ [m]. As outras condições de contorno foram mantidas conforme a configuração inicial previamente descrita. Ao longo da prescrição do deslocamento no ponto E, foi monitorada sua reação vicular segundo a direção y, que pode ser visualizada na Figura 7.21.

Tabela 7.3 – Dados do modelo: Contato *master-slave* a partir de superfícies.

Posições dos pontos materiais [m]	A (0.75,-0.2,0.0) B (2.25,-0.2, 0.0) E (1.5, -0.2,0.0) C (0.0, 0.0, 0.0) D (3.0, 0.0, 0.0)
Comprimentos dos elementos de viga	0.1 m (trecho AEB) e 0.2 m (trecho CD)
Dados da seção transversal	super elipse com $a = b = 0.1$ [m] e $n = 10$
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 1e7$
Módulo de Young	$E = 2e9$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$

Fonte: do autor

A Figura 7.22 mostra a evolução da configuração das superfícies de contato ao longo da solução do modelo, bem como ilustra os esforços pontuais de contato. Note que a degeneração propiciou a escolha a priori dos pontos materiais para interação de contato na barra AEB, o que possibilitou a solução do modelo proposto. A utilização da formulação *master-master* entre superfícies para esse caso, sem degeneração, seria bastante problemática por conta do paralelismo entre as superfícies de contato envolvidas. A degeneração prévia da formulação, no entanto, permitiu a utilização de um contato *master-slave* que é bastante conveniente para o cenário que se está modelando.

Figura 7.21 – Contato *master-slave* a partir de superfícies. Reação vincular no ponto E.

Fonte: do autor

Figura 7.22 – Contato *master-slave* a partir de superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ações mecânicas pontuais de contato.

Fonte: do autor

7.8.3 Contato entre curvas super elípticas e superfícies

A Figura 7.23 mostra as superfícies de contato que envolvem o contorno da configuração inicial de dois sólidos, modelados com elementos finitos de barras. O sólido AC (barra AC) se encontra engastado em A, enquanto que o sólido BD (barra BD) é engastado em B. As dimensões geométricas consideradas no modelo, bem como informações das seções transversais e dados de materiais estão na Tabela 7.4.

A barra AC possui uma seção transversal muito pronunciada na direção y , o que torna a própria utilização de uma modelagem utilizando elementos finitos de barras nesse caso questionável em relação às hipóteses cinemáticas envolvidas. No entanto, para o presente propósito, considerou-se essa modelagem adequada pois o objetivo é testar o estabelecimento do modelo de contato de forma a contemplar a ocorrência de muitos pontos de interação mecânica na mesma superfície da barra AC. As imprecisões cinemáticas da modelagem do sólido AC com elementos finitos de barra não parecem ter influência significativa nesse quesito. O que parece ser a simplificação mais forte, nesse caso, é o fato de considerar cada seção transversal como rígida (hipótese cinemática feita na formulação das barras empregadas).

Quanto à degeneração de contato, nesse caso considerou-se que as superfícies estabelecidas como contorno da barra BD são degeneradas em curvas super elípticas, mostradas em azul na Figura 7.23. Com isso, fixaram-se diversas curvas ao longo do comprimento da barra BD, e em cada uma delas pode surgir, individualmente, uma interação pontual de contato.

Figura 7.23 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Configuração inicial.

Fonte: do autor

Em termos de evolução do modelo, considerou-se apenas um passo quase estático entre no intervalo 0-1. Foi prescrito o deslocamento no ponto B, dado por $(-2.0, 0.0, 0.0)$ [m], bem como foi prescrita a rotação desse mesmo ponto por $(0.0, 4\pi, 0.0)$ [rad]. O ponto A foi mantido engastado durante toda a simulação. Foi monitorada a reação vincular no ponto B, resultando no gráfico da Figura 7.25. Note a grande alternância dos esforços reativos, o que é resultado da rotação prescrita em B e do expoente da seção super elíptica. Na medida que a barra BD se aproxima do engaste A da barra AC, os esforços de contato se tornam mais pronunciados.

Tabela 7.4 – Dados do modelo: Contato entre curvas super elípticas e superfícies.

Posições dos pontos materiais [m]	A (0.0,2.5,0.0) B (2.5,0.0,0.3) C (3.0,2.5,0.0) D (2.5,3.0,0.3)
Comprimentos dos elementos de viga	0.2 m
Dados da seção transversal – trecho AC	super ellipse com $a = 2.0$; $b = 0.1$ [m] e $n = 20$
Dados da seção transversal – trecho BD	super ellipse com $a = b = 0.2$ [m] e $n = 4$
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 1e6$
Módulo de Young	$E = 2e9$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$

Fonte: do autor

A Figura 7.24 mostra a evolução das configurações das barras desse exemplo, bem como as ações mecânicas pontuais de contato. Note que ocorrem diversas ações pontuais simultâneas envolvendo a mesma superfície na barra AC e diversas curvas elípticas na barra BD. Cada ação tem uma magnitude distinta. Esse modelo na realidade está representando por meio de ações pontuais uma interação que fisicamente ocorre de forma distribuída ao longo de uma área de contato longilínea.

Figura 7.24 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.

Fonte: do autor

Figura 7.25 – Contato entre curvas super elípticas e superfícies. Reação vincular no ponto B.

Fonte: do autor

7.8.4 Contato envolvendo singularidade

A Figura 7.26 mostra as superfícies de contorno de dois sólidos, modelados por meio de elementos finitos de barras. O sólido AC (barra AC) se encontra engastado em A, enquanto que o sólido BD (barra BD), está engastado em B. A Tabela 7.5 contém detalhamentos geométricos e de materiais do modelo. O contato é considerado, a princípio, utilizando-se diretamente a formulação *master-master* entre superfícies, adotando as superfícies ilustradas na Figura 7.26, sem degenerações.

Figura 7.26 – Contato envolvendo singularidade. Configuração inicial.

Fonte: do autor

Considera-se uma sequência de duas simulações:

- Um único passo, quase estático, no qual é prescrito o deslocamento no ponto B, dado por (0.0,0.0,-0.5) [m]. O ponto A foi mantido engastado durante toda a simulação. Esse passo é estabelecido com 100 subdivisões iniciais, mas permitindo uma auto-adaptatividade de acordo com facilidade/dificuldade de convergência. Com isso, se estabelece o contato entre as barras, o que é ilustrado na Figura 7.27.
- Um intervalo 0-2 [s], dinâmico. Durante essa etapa, é prescrito o deslocamento no ponto B dado por (0.0,-2.0,0.0) [m], de forma incremental de forma a compor uma rampa linear ao longo do tempo da simulação. Esse deslocamento é incremental à configuração final do passo quase-estático anterior. O passo temporal de integração adotado é de 0.01 s, com possibilidade de auto adaptação.

Tabela 7.5 – Dados do modelo: Contato envolvendo singularidade.

Posições dos pontos materiais [m]	A (0.0,2.5,0.0) B (2.5,0.0,0.3) C (3.0,2.5,0.0) D (2.5,3.0,0.3)
Comprimentos dos elementos de viga	0.2 m
Dados da seção transversal – trecho AC	super elipse com $a = 0.24$; $b = 0.06$ [m] e $n = 2$
Dados da seção transversal – trecho BD	super elipse com $a = 0.12$; $b = 0.06$ [m] e $n = 2$
Fator de penalidade normal	$\epsilon_n = 1e7$
Módulo de Young	$E = 2e9$ Pa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Massa específica	$\rho = 2,000$ kg/m ³

Fonte: do autor

Figura 7.27 – Contato envolvendo singularidade – Configurações inicial e final da simulação estática.

Fonte: do autor

O objetivo desse exemplo é provocar a transição da ação de contato ao longo de algumas superfícies da barra BD, até que o mesmo deixe de existir (passo dinâmico). Nesse processo, no entanto, quando a ação de contato atinge a extremidade da barra BD (seção transversal no

ponto D), se manifesta uma singularidade caracterizada pelo fim da barra BD. Com isso, a tentativa de realizar a simulação dinâmica não pode ser bem-sucedida, o que pode ser visto na Figura 7.28. Note que no instante 0.64 s está ilustrada a penetração indevida entre as barras, a qual ocorreu por conta da não consideração da singularidade do ponto B de forma correta. A fim de sanar essa deficiência, propôs-se no modelo a criação de um par de contato suplementar aos previamente existentes: a superfície da extremidade da barra BD foi degenerada em uma elipse, exibida em cor azul na Figura 7.26. Com isso, a simulação pôde ser realizada com sucesso até o instante final 2.0 s.

A Figura 7.29 mostra a evolução das configurações, ao longo da etapa dinâmica. Note, em particular no instante 0.59 s, a coexistência de duas ações pontuais no mesmo ponto (pois foram criados dois pares de contato na mesma superfície, sendo um deles degenerado e o outro não. Nesse instante ambos estão ativos. Em instantes posteriores naturalmente se desativa o par de contato não degenerado e passa a atuar somente o par degenerado na singularidade, o que perdura até a separação física entre as vigas, quando o contato cessa. Note na Figura 7.30 o detalhamento da ação de contato na singularidade da ponta da barra BD. A direção da ação de contato (sem atrito), nesse caso, não acata a ortogonalidade com superfície de contorno lateral da barra, e por isso a ausência da degeneração não é capaz de considerar de forma correta o que se espera, fisicamente.

O tratamento da singularidade foi essencial para o sucesso da modelagem proposta, o que foi feito utilizando-se do conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre duas superfícies.

Figura 7.28 – Contato envolvendo singularidade – simulação não considerando contato suplementar degenerado. Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.

Fonte: do autor

Figura 7.29 – Contato envolvendo singularidade – simulação considerando contato suplementar degenerado.
Configurações sucessivas das superfícies de contato e ação mecânica de contato pontual.

Fonte: do autor

Figura 7.30 – Contato envolvendo singularidade – detalhamento da ação normal de contato no instante 0.70 s.

Fonte: do autor

8 Conclusões

Problemas que envolvem interação mecânica de contato entre corpos são muito presentes em aplicações de engenharia. A fim de melhor compreender o comportamento de sistemas dessa natureza, o recurso da modelagem matemática em um contexto de mecânica dos sólidos deformáveis e sua solução aproximada para determinação de campos cinemáticos e de esforços é frequentemente empregada, em particular por meio do Método dos Elementos Finitos. Nesse contexto, a mecânica computacional do contato representa uma área de conhecimento que contempla diferentes técnicas para considerar nos modelos a possibilidade de contato entre corpos. Esta tese está imersa em uma classe de métodos computacionais que trata o contato entre corpos como pontual, isto é, assume que a ação mecânica do contato pode ser modelada por meio de esforços pontuais.

No Capítulo 4 é apresentada a formulação de contato *master-master* entre duas superfícies. Essas representam o contorno de sólidos que podem interagir por meio de contato pontual. A principal característica dessa formulação é a possibilidade de computar eventuais mudanças nos pontos materiais nos quais atuam os esforços de contato, em ambas as superfícies. Isso exige a solução de um problema local de contato que recai em um sistema não linear de equações com quatro incógnitas, representando valores das coordenadas convectivas utilizadas na parametrização das superfícies de contato. O tratamento do atrito exige a redefinição da função *gap* tangencial em relação ao que é feito classicamente na abordagem *master-slave* e suas aplicações. O resultado é uma formulação que propicia a possibilidade de modelar problemas que envolvem deslizamento ou rolamento entre corpos, utilizando-se para tal de um único par de contato para uma interação pontual.

No Capítulo 5 é apresentada uma generalização da formulação de contato *master-slave*. Em vez de considerar o comportamento clássico da cinemática do movimento de um ponto sobre uma superfície, elabora-se a formulação para representar a cinemática de uma esfera rígida sobre uma superfície, com a possibilidade de deslizamento ou rolamento da mesma. Uma interpretação possível sobre essa formulação é que ela representa um caso particular da apresentada no Capítulo 4, em que uma das superfícies dos corpos em contato é esférica, enquanto que a do outro corpo permanece genérica. O caso em que uma das superfícies é esférica merece um tratamento diferenciado, pois é possível tratar a cinemática da esfera rígida e se utilizar de uma função *gap* especial para construir uma formulação que envolve apenas duas coordenadas convectivas em uma das superfícies. Pelo lado da esfera, são considerados

seis graus de liberdade, representando um movimento geral de corpo rígido. A utilização de duas coordenadas convectivas reduz o problema local de contato para um sistema não linear de apenas duas equações, o que é um ganho relevante em relação à formulação do Capítulo 4. Assim, quando uma das superfícies envolvida no contato for esférica, essa particularização se mostra muito bem-vinda.

No Capítulo 6 é mostrada a formulação *master-master* entre duas curvas no espaço. Nesse contexto, duas curvas são parametrizadas e é definida uma função *gap* representando a distância entre as mesmas. No contexto de aplicação para sólidos esbeltos (barras), quando a seção transversal é circular, pode-se incluir as informações dos raios na própria função *gap*. A solução do problema local de contato se dá por um sistema não linear de duas equações, que busca identificar os valores de coordenadas convectivas associados à ocorrência da ação pontual de contato. Essa técnica é classicamente empregada em estruturas de barras, que é o objeto principal de discussão do Capítulo 6, que apresenta a utilização dessa formulação para problemas envolvendo auto-contato.

Pode-se dizer que o conteúdo do Capítulo 6, em sua gênese, deu origem à generalização de ideias apresentada no Capítulo 4. A principal motivação foi a possibilidade de trabalhar com contato envolvendo barras com seções transversais não circulares. A principal diferença entre as formulações dos Capítulos 4 e 6 é a parametrização e tratamento do contato por meio de superfícies, e não mais por curvas, o que implica no aumento do número de coordenadas convectivas envolvido. No entanto, a formulação foi desenvolvida de forma mais geral que permite não somente a utilização em conjunto com estruturas de barras, mas para uma classe mais geral de superfícies. Os exemplos mostrados no Capítulo 4, entretanto, foram limitados a barras com seção transversal super elíptica.

As similaridades e diferenças entre cada um dos métodos apresentados são levadas à discussão no Capítulo 7, em que é desenvolvido um ferramental matemático que permite, a partir da formulação *master-master* entre superfícies, a obtenção de outras concepções de contato. Trata-se do conceito denominado “degeneração de uma formulação de contato”. Pode-se, a partir da formulação *master-master* entre superfícies chegar à formulação *master-master* entre curvas e à formulação *master slave*. O conceito de degeneração, entretanto, é muito mais amplo e permite realizar a mudança de base do problema local de contato, propiciando uma ferramenta com potencial para o tratamento de situações de contato conforme e de singularidades. Foram ilustrados alguns exemplos numéricos que envolvem aplicações de degeneração em cenários de contato conforme e singularidade.

Um ponto crucial em todas as formulações é a solução do problema local de contato, que consiste na determinação do par de pontos materiais, candidatos a contato em ambos os corpos. Ao considerar um número variado de coordenadas convectivas, esse problema pode se tornar bastante desafiador, principalmente no contexto de degeneração de uma formulação de contato. Isso é bastante discutido no Capítulo 7, quando se trata a caracterização da solução desse problema local, visto sob a óptica de um problema local de otimização. As interpretações acerca da solução desse problema é que propiciam degenerar a formulação de contato *master-master* entre superfícies, aliviando relações de ortogonalidade de forma seletiva e permitindo a elaboração de um ferramental mais geral para formulações de contato pontual entre corpos.

Por fim, enfatiza-se que nesta tese é apresentada no Capítulo 3 a plataforma GIRAFFE, que representa um ambiente de programação em que todos os desenvolvimentos computacionais foram executados. Trata-se de uma contribuição mais ampla do que somente a utilização com modelos que envolvem contato entre corpos. De fato, essa plataforma vem sendo utilizada pelo autor, colegas e alunos como um pacote de elementos finitos desenvolvido dentro da Escola Politécnica e que propicia grande versatilidade na implementação de novos recursos de modelagem computacional para problemas de engenharia.

8.1 Trabalhos futuros

Ao longo do texto foram elencados diversos tópicos para serem explorados em trabalhos futuros. Aqui é apresentada uma lista com essas possibilidades, sendo que algumas delas inclusive já estão em andamento:

- Desenvolvimento de novas parametrizações de superfícies para utilização da formulação *master-master* em conjunto com outras classes de modelos, como cascas, sólidos rígidos e flexíveis;
- Desenvolvimento de parametrizações de superfícies que se utilizem de funções de CAD como B-splines e NURBS e utilização dessas na formulação *master-master* entre superfícies;
- Utilização de novas leis constitutivas normais e tangenciais em conjunto com a formulação *master-master* em problemas de contato de rolamento;
- Elaboração conjunta de modelos constitutivos de contato que envolvam esforços elásticos e dissipativos para representar ações normais e tangenciais simultâneas e sua implementação no contexto *master-master* entre superfícies;

- Implementação e utilização de modelos de atrito para cenários de situações de giro na direção normal (*spin*) de esferas sobre superfícies na formulação *master-slave* envolvendo esferas e superfícies genéricas;
- Adaptação da formulação *master-master* entre superfícies para propiciar a inclusão de atrito em casos que envolvem degeneração;
- Aprimoramento de técnicas para solução de forma mais robusta do problema local de contato sob o ponto de vista de um ferramental de otimização, em particular explorando técnicas como métodos do tipo *trust region*;
- Tratamento de cenários mais gerais de contato conforme e singularidades por meio do conceito de degeneração da formulação de contato *master-master* entre superfícies;
- Formalização matemática de algumas ideias discutidas no contexto de quádras, utilizadas para caracterizar os pontos críticos de interesse no contexto de solução do problema local de contato, com e sem degeneração.

Referências

1. BAUCHAU., O. A. **Flexible Multibody Dynamics**. London New York: Springer Dordrecht Heidelberg, 2011.
2. SHABANA, A. A. **Dynamics of Multibody Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
3. CARDONA, M.; GERADIN; DOAN, D. B. Rigid and flexible joint modelling in multibody dynamics using finite elements. **Comp. Methods in App. Mech. Eng.** , v. 89, p. 395-418, 1991.
4. GAY NETO, A. Dynamics of Offshore Risers using a Geometrically-exact Beam Model with Hydrodynamic Loads and Contact with the Seabed. **Eng. Structures**, v. 125, p. 438-454, 2016.
5. GAY NETO, A.; MARTINS, C. A.; PIMENTA, P. M. Static analysis of offshore risers with a geometrically-exact 3D beam model subjected to unilateral contact. **Comp. Mechanics** , v. 53, p. 125-145, 2014.
6. CRAVEIRO, M. V.; GAY NETO, A. Upheavel buckling of pipelines due to internal pressure: a geometrically nonlinear finite element analysis. **Engineering Structures**, v. 158, n. 1, p. 136-154, 2018.
7. DE CAMPOS, P. R. R.; HIGA, D. N.; GAY NETO, A. **Lateral Stability of Railway Vehicles and New Contact Formulations**. Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Florianópolis: ABMEC. 2017.
8. SAITO, M. T.; GAY NETO, A. **Woven Fabrics Computational Simulation using Beam-to-Beam Contacts Formulation**. Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Brasília: ABMEC. 2016.
9. DE CAMPOS, P. R. R.; GAY NETO, A. Rigid Body formulation in a finite element context with contact interaction. **Submitted to Comp. Mech.**, 2017.
10. BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Second edition. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
11. WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag , 2008.

12. BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. [S.l.]: Wiley.
13. WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. West Sussex: Wiley, 2002.
14. LAURSEN, T. A. **Computational Contact and Impact Mechanics Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis**. [S.l.]: Springer, 2003.
15. KONYUKHOV, A.; SCHWEIZERHOF, K. **Computational Contact Mechanics**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
16. OÑATE, E.; OWEN, R. **Particle-based Methods Fundamentals and Applications**. [S.l.]: Springer Science+Business Media B.V., 2011.
17. FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A note on numerical computation of elastic contact problems. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v. 9, p. 913–924, 1975.
18. STADTER, J. T.; WEISS, R. O. Analysis of contact through finite element gaps. **Computers and Structures**, v. 10, p. 867–873, 1979.
19. WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact -problems with friction. **Computers and Structures**, v. 37, p. 319–333, 1990.
20. SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 50, p. 163–180, 1985.
21. BANDEIRA, A. A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. Numerical Derivation of Contact Mechanics Interface Laws using a Finite Element Approach for Large 3D Deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 173–195, 2004.
22. BATHE, K. J.; CHAUDHARY, A. B. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 21, p. 65–88, 1985.
23. PUSO, M. A. A 3D mortar method for solid mechanics. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 59(3), p. 315–336, 2004.
24. PUSO, M. A.; LAURSEN, T. A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 193, p. 601–629, 2004.

25. FISCHER, K. A.; WRIGGERS, P. Frictionless 2d contact formulations for finite deformations based on the mortar method. **Comp. Mechanics**, v. 36, p. 226–244, 2005.
26. WRIGGERS, P.; ZAVARISE, G. On contact between three-dimensional beams undergoing large deflections. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 13, p. 429-438, 1997.
27. ZAVARISE, G.; WRIGGERS, P. Contact with friction between beams in 3-D space. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 49, p. 977-1006, 2000.
28. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. Self-contact modeling on beams experiencing loop formation. **Comp. Mechanics** , v. 55(1), p. 193-208, 2015.
29. LITEWKA, P.; WRIGGERS, P. Frictional Contact between 3D beams. **Computational Mechanics**, v. 28, p. 26-39, 2002.
30. LITEWKA, P. Hermite polynomial smoothing in beam-to-beam frictional contact. **Comp. Mechanics**, v. 40, p. 815-826, 2007.
31. KONYUKHOV, A.; SCHWEIZERHOF, K. Geometrically exact covariant approach for contact between curves. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 199, p. 2510–2531, 2010.
32. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. Contact between rolling beams and flat surfaces. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v. 97, p. 683-706, 2014.
33. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A Master-surface to Master-surface Formulation for Beam to Beam Contact. Part I: Frictionless Interaction. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** , v. 303, p. 400-429, 2016.
34. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A Master-surface to Master-surface Formulation for Beam to Beam Contact. Part II: Frictional Interaction. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 319, p. 146-174, 2017.
35. LITEWKA, P. Enhanced multiple-point beam-to-beam frictionless contact finite element. **Computational Mechanics**, v. 52, p. 1365-1380, 2013.
36. LITEWKA., P. Frictional beam-to-beam multiple-point contact finite element. **Comp. Mechanics**, v. 56, p. 243-264, 2015.
37. DURVILLE, D. Contact-friction modeling within elastic beam assemblies: an application to knot tightening. **Comp. Mechanics**, v. 49, p. 687-707, 2012.

38. DURVILLE, D. Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers. **Int. J. Mater. Form.** , v. 3 (Suppl. 2), p. S1241–S1251, 2010.
39. CHAMEKH, M.; MANI-AOUADI, S.; MOAKHER, M. Stability of elastic rods with self-contact. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 279, p. 227-246, 2014.
40. CHAMEKH, M.; MANI-AOUADI, S.; MOAKHER., M. Modeling and numerical treatment of elastic rods with frictionless self-contact. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 198, p. 3751-3764, 2009.
41. MEIER, C.; POPP, A.; WALL., W. A. A finite element approach for the line-to-line contact interaction of thin beams with arbitrary orientation. **Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 308, p. 377-413, 2016.
42. KONYUKHOV, A.; SCHWEIZERHOF, K. On the solvability of closest point projection procedures in contact analysis: Analysis and solution strategy for surfaces of arbitrary geometry. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 197, p. 3045-3056, 2008.
43. MEIER, C.; WALL., W. A.; POPP, A. A unified approach for beam-to-beam contact. **Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 315(1), p. 972-1010, 2017.
44. KONYUKHOV, A. Geometrically Exact Theory of Contact Interactions – Applications with Various Methods FEM and FCM. **Journal of App. Mathematics and Physics**, v. 3, p. 1022-1031, 2015.
45. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. Contact between spheres and general surfaces. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 328, p. 686-716, 2018.
46. GAY NETO, A. Giraffe User's Manual - Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements, 2017. Disponivel em: <<http://sites.poli.usp.br/p/alfredo.gay/>>.
47. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; MARTINS, C. A. Hydrostatic Pressure Load in Pipes Modeled using Beam Finite Elements: Theoretical Discussions and Applications. **J. Eng. Mech.**, v. 143, n. 4, p. 04017003, 2017.
48. GAY NETO, A. Simulation of Mechanisms Modeled by Geometrically-Exact Beams using Rodrigues Rotation Parameters. **Comp. Mechanics**, v. 59 (3), p. 459-481, 2017.
49. GAY NETO, A.; CAMPELLO, E. M. B. Granular materials interacting with thin flexible rods. **Comp. Particle Mechanics**, v. 4 (2), p. 229–247, 2017.
50. GAY NETO, A.; MARTINS, C. A. Structural stability of flexible lines in catenary configuration under torsion. **Marine Structures**, v. 34 , p. 16-40, 2013.

51. PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. **Geometrically nonlinear analysis of thin-walled space frames**. Proceedings of the Second European Conference on Computational Mechanics (ECCM). Krakow: ECCOMAS. 2001.
52. MOREIRA, M. L. T. **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas**. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. Tese de Doutorado, 2009.
53. IBRAHIMBEGOVIC, A.; MIKIDAD, M. A. Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. **Int. J. for Num. Meth. in Eng.**, v. 41, p. 781–814, 1998.
54. IBRAHIMBEGOVIC, A.; MAMOURI, S. On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model. **Comp. Methods in App. Mech. Eng.**, v. 188, p. 805-831, 2000.
55. IBRAHIMBEGOVIC, A.; MAMOURI, S. Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. **Comp. Methods in App. Mech. Eng.**, v. 191, p. 4241-4258, 2002.
56. PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dof's and general hyperelasticity. part 1: Rods. **Comp. Mechanics**, v. 42, p. 715-732, 2008.
57. CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. Part 2: Shells. **Computational Mechanics**, v. 48, p. 195-211, 2011.
58. SIMO, J. C. A finite strain beam formulation. Three-dimensional dynamic problem. Part I. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 49, p. 55-70, 1985.
59. SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions- A geometrically exact approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 66, p. 125-161, 1988.
60. SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. Three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 58 (1), p. 79-116, 1986.
61. PIMENTA, P. M.; YOJO, T. Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames. **Applied Mechanics Reviews**, v. 46, p. 118-128, 1993.
62. GAY NETO, A. **Estabilidade estrutural da configuração estática de risers em catenária**. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. Tese de Doutorado, 2012.

63. CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. **Comp. Mechanics**, v. 31, p. 505-518, 2003.
64. OTA, N. S. N. et al. Nonlinear dynamic analysis of creased shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 121, p. 64-74, 2016.
65. KORELC, J. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. **Theoretical Computer Science**, v. 187, p. 231-248, 1997.
66. LIN, M. C.; GOTTSCHALK, S. **Collision detection between geometric models: a survey**. [S.l.]: University of North Carolina.
67. BELYTCHKO, T.; NEAL, M. O. Contact-impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods. **Int. J. for Numerical Methods in Eng.**, v. 31, p. 547-572, 1991.
68. JOHNSON., K. L. **Contact Mechanics**. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.
69. TIJSKENS, E.; BAERDEMAEKER, J. D.; RAMON, H. Strategies for contact resolution of level surfaces. **Engineering Computations**, v. 21 (2/3/4), p. 137-150.
70. WELLMANN, C.; LILLIE, C.; WRIGGERS, P. A contact detection algorithm for superellipsoids based on the common-normal concept. **Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, v. 25(5), p. 432-442, 2008.
71. CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**, n. 29 (1), p. 47-65, 1979.
72. SHABANA, A. A.; ZAAZAA, K. E.; SUGIYAMA, H. **Railroad vehicle dynamics. A computational approach**. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
73. SIMO, J. C.; HUGUES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer, 2000.
74. DASAMBIAGIO, E. R. **Um modelo geometricamente exato de barras com grandes deformações, que considera a distorção e o empenamento geral da seção transversal, e sua discretização pelo método dos elementos finitos**. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. Dissertação de Mestrado, 2008.
75. KORELC, J. Multi-language and Multi-environment Generation of Nonlinear Finite Element Codes. **Engineering with Computers**, v. 18(4), p. 312-327, 2002.
76. KORELC, J.; WRIGGERS, P. **Automation of Finite Element Methods**. Switzerland : Springer International Publishing, 2016.

77. FLORES, P.; LANKARANI, H. M. **Contact Force Models for Multibody Dynamics**. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.
78. GILARDI, G.; SHARF, I. Literature survey of contact dynamics modelling. **Mechanism and Machine Theory** , v. 37, p. 1213-1239, 2002.
79. LUDING., S. Introduction to Discrete Element Methods. **European Journal of Environmental and Civil Engineering** , v. 12(7-8), p. 785-826, 2008.
80. LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. New York: Dover publications, 1944.
81. LIU, F. C. **Kink formation and rotational response of single and multi-strand electromechanical cables**. Civil Engineering Lab, Naval Construction Battalion Center. [S.l.]. 1975. (Tech. Note N-1403).
82. ROSS, A. L. Cable kinking analysis and prevention. **Journal of Engineering for Industry**, p. 112-115, 1977.
83. YABUTA, T. Submarine cable kink analysis. ,. **Bulletin of JSME**, v. 27, p. 1821-1828, 1984.
84. GOSS, V. G. A. et al. Experiments on Snap Buckling, Hysteresis and Loop Formation in Twisted Rods. **Experimental Mechanics**, v. 45 (2), p. 101-111, 2005.
85. COYNE, J. Analysis of the formation and elimination of loops in twisted cable. **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, v. 15, p. 72-83, 1990.
86. THOMPSON, J. M. T.; CHAMPNEYS, A. R. From helix to localized writhing in the torsional post-buckling of elastic rods. **Proc. R. Soc. Lond. A, Royal Society Publishing**, v. 452, p. 117-138, 1996.
87. VAN DER HEIJDEN, G. H. M. et al. Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. **Int. Jr. Mech. Sciences**, v. 45, p. 161-196, 2003.
88. MIYAZAKI, Y.; KONDO, K. Analytical solution of spatial elastica and its application to kinking problem. **International Journal of Solid and Structures**, v. 27, p. 3619-3636, 1997.
89. GOYAL, S.; PERKINS, N. C.; LEE, C. L. Non-linear dynamic intertwining of rods with self-contact. **International Journal of Non-linear Mechanics**, v. 43, p. 65-73, 2008.
90. NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. New York: Springer, 1999.

91. CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. **Trust Region Methods**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics and Mathematical Programming Society, 2000.
92. SIMONS, J. et al. Walking on Potential Energy Surfaces. **J. Phys. Chem.**, n. 87, p. 2745-2753, 1983.
93. SPRING, K. W. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulations of finite rotations: a review. **Mechanism and Machine Theory** , v. 21, p. 365–373, 1986.
94. BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics A classification of concepts with applications to smooth shells. **Comp. Meth. App. Mech. Engrg.**, v. 155, p. 273-305, 1998.
95. ALTMANN, S. L. **Rotations, Quaternions, and Double Groups**. New York: Dover Books on Mathematics, 2005.
96. ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite Elements & Approximation**. [S.l.]: Dover, 2006.
97. FACCIO JR., C. **Modeling wind turbine blades by geometrically exact beam and shell elements**: a comparative approach. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. Dissertação de Mestrado, 2017.
98. SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 27, n. 3, p. 371-393, 1991.
99. YOJO, T. **Análise não-linear geometricamente exata de pórticos espaciais**. São Paulo: Universidade de São Paulo, v. Tese de Doutorado, 1993.