

PHILLIP M. S. BURT

Filtragem adaptativa IIR: análise da velocidade de convergência baseada na teoria de realização balanceada

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Livre Docente.

**CONSULTA  
FT-2131**

Fevereiro de 2005



## REITORIA

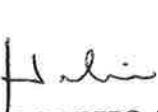
Proc. USP nº 92.1.1604.3.5

Portaria nº 988

1684/vfm

O REITOR DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, usando de suas atribuições legais, EXPEDIE a presente Portaria para declarar que tendo PHILLIP MARK SEYMOUR BURT, Professor Doutor, ref. MS-3, do QDUSP-PG, em Regime de Dedicação Integral à Docência e à Pesquisa, lotado na Escola Politécnica (Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle), obtido o título de Livre-Docente, conforme elementos constantes do Processo USP nº 92.1.1604.3.5, fica, a contar de 28/07/2005, designado para exercer a função de Professor Associado, ref. MS-5, do mesmo Quadro, Parte, Regime e Lotação, nos termos do artigo 84 do Estatuto da Universidade de São Paulo.

Reitoria da Universidade de São Paulo, 12 AGO 2005

 N  
ADOLPHO JOSÉ MELFI  
REITOR

Por Delegação do M. Reitor  
Art. 42 do Estatuto da USP  
HELIO NOGUEIRA DA CRUZ  
Vice-Reitor

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Abordagens de filtragem adaptativa IIR . . . . .	2
1.2	Organização do trabalho . . . . .	3
1.3	Definição do problema de filtragem adaptativa . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Aspectos de aproximação racional <math>L_2</math></b>	<b>6</b>
2.1	Espaços de funções $L_2$ e $\mathcal{H}_2$ . . . . .	6
2.1.1	Definições . . . . .	6
2.1.2	Produto interno . . . . .	7
2.2	Formulação no âmbito da teoria de sistemas . . . . .	8
2.2.1	Produto interno e correlação . . . . .	8
2.2.2	Matriz e gramiano de controlabilidade . . . . .	9
2.2.3	Vetor de controlabilidade e complemento passa-tudo . . . . .	10
2.3	Teorema de Beurling-Lax . . . . .	11
2.4	Base para $\mathcal{H}_2$ . . . . .	11
2.5	Pontos estacionários do erro quadrático . . . . .	12
2.6	Superfície de erro reduzida . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Filtros adaptativos IIR baseados no gradiente</b>	<b>15</b>
3.1	Forma direta . . . . .	15
3.1.1	Obtenção do algoritmo adaptativo . . . . .	15
3.1.2	Autocorrelação dos regressores . . . . .	17
3.1.3	Complexidade computacional . . . . .	18
3.2	Forma em treliça normalizada . . . . .	19
3.2.1	Algoritmo adaptativo . . . . .	19

3.2.2	Complexidade computacional . . . . .	20
3.3	Forma em treliça desnormalizada . . . . .	23
3.3.1	Relação dos sinais com os da treliça normalizada . . . . .	23
3.3.2	Obtenção do algoritmo . . . . .	25
3.3.3	Complexidade computacional . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Convergência lenta de filtros adaptativos IIR</b>	<b>28</b>
4.1	Dependência em relação à posição dos zeros . . . . .	28
4.2	Dependência em relação à parametrização e à posição dos pólos . . . . .	32
4.3	Adaptação na superfície de erro reduzida . . . . .	33
4.4	Motivação para a análise . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Análise da superfície reduzida e parametrização dos pólos</b>	<b>35</b>
5.1	Realização balanceada e a superfície de erro reduzida . . . . .	35
5.2	Parametrização dos pólos . . . . .	37
5.2.1	Conversão a partir dos parâmetros da forma direta . . . . .	37
5.2.2	Conversão para os parâmetros da forma direta . . . . .	38
5.2.3	Exemplo numérico . . . . .	39
5.2.4	Unicidade . . . . .	39
5.3	Aplicação da parametrização . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Análise da velocidade de convergência</b>	<b>42</b>
6.1	Adaptação na superfície de erro reduzida . . . . .	42
6.2	Reparametrização da adaptação baseada no gradiente . . . . .	44
6.3	Velocidade local de convergência . . . . .	46
6.4	Efeito dos valores singulares de $H(z)$ . . . . .	47
6.5	Propriedades relacionadas à matriz de sensibilidade $\mathbf{J}$ . . . . .	47
6.6	Casos especiais e limites para o espalhamento dos autovalores de $\mathbf{JJ}^t$ . . . . .	49
6.7	Aplicação à filtragem adaptativa e resumo das propriedades . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Algoritmos de aproximações sucessivas</b>	<b>53</b>
7.1	Aproximação racional sucessiva . . . . .	53
7.1.1	Pontos estacionários . . . . .	54

7.1.2	Passo 1: ajuste para passa-tudo . . . . .	55
7.1.3	Redução do erro após o passo 1 . . . . .	56
7.1.4	Passo 2: solução analítica para aproximação . . . . .	57
7.2	Filtragem adaptativa com aproximações sucessivas . . . . .	58
7.2.1	Descrição do algoritmo . . . . .	58
7.2.2	Complexidade computacional . . . . .	59
7.2.3	Comparação com filtragem adaptativa FIR . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>62</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Filtros adaptativos IIR podem, em princípio, representar uma alternativa vantajosa em relação a filtros adaptativos FIR, devido à sua capacidade de fornecer longas respostas impulsivas com um número pequeno de parâmetros [1]–[4]. No entanto, certos problemas, ausentes em filtros adaptativos FIR, tendem a desencorajar a sua utilização: 1) a superfície de erro pode apresentar mínimos locais; 2) os filtros podem se tornar instáveis e 3) sua convergência pode ser bastante lenta mesmo com sinais de entrada bem condicionados. Estes problemas têm sido atacados ao longo do tempo por vários pesquisadores (por exemplo, [5]–[22]), como discutido sucintamente a seguir.

### 1.1 Abordagens de filtragem adaptativa IIR

Pode-se buscar contornar o problema de mínimos locais usando algoritmos adaptativos cujo comportamento não é ditado pelo gradiente da superfície de erro (ver [12, 4] e as referências áí contidas), tentando fazer a inicialização de algoritmos do gradiente em pontos suficientemente próximos do mínimo global [17] ou, de forma semelhante, utilizando algoritmos distintos em cada etapa da adaptação ([10, 13], e, do autor desta tese, [18]). A instabilidade do filtro adaptativo pode ser evitada usando estruturas cujo controle de estabilidade é computacionalmente simples [4, 15, 16]. A dependência da velocidade de convergência na vizinhança de pontos de mínimo em relação à posição dos pólos do sistema sendo identificado é analisada em [9]. No caso de pontos afastados do ponto de mínimo, esta dependência é analisada pelo autor em [19]–[21]. Pode-se aumentar a velocidade de convergência em certos casos com o uso de estruturas não-diretas de filtragem [4] e com o uso da estrutura

polifásica proposta pelo autor [19]–[22].

Algoritmos simples, de baixa complexidade computacional, devem ser preferencialmente considerados para filtros adaptativos IIR. Do contrário, estariam-se minando desde o início suas vantagens em relação aos filtros adaptativos FIR. Neste âmbito, um aspecto pouco abordado no comportamento de filtros adaptativos IIR é a rápida degradação da velocidade de convergência de algoritmos simples com o aumento da ordem do filtro. É facilmente verificado por meio de simulações que, mesmo na ausência de mínimos locais na superfície de erro, filtros com ordem acima de 2 podem ficar praticamente estacionados em certas regiões do espaço de parâmetros nas quais o erro quadrático está longe de ser satisfatório. Algoritmos que buscam usar a inversa da matriz Hessiana [2] (genericamente denominados aqui de algoritmos do tipo Newton) são menos suscetíveis a esse efeito mas são mais complexos computacionalmente.

Um avanço considerável na compreensão deste aspecto foi obtido pelo autor em [23]–[25]<sup>1</sup>: a partir de uma análise baseada na teoria de realização balanceada, mostrou-se a relação da velocidade de convergência de algoritmos baseados no gradiente com o espalhamento dos valores singulares de Hankel do sistema sendo identificado e com a parametrização usada para os pólos do filtro adaptativo. Além disto, com base nesta análise, um novo algoritmo adaptativo IIR foi proposto. Análises preliminares indicaram que sua velocidade de convergência pode ser muito superior à de algoritmos mais convencionais, às custas de um aumento relativamente pequeno de complexidade computacional.

## 1.2 Organização do trabalho

O método de análise introduzido em [23]–[25], assim como o algoritmo adaptativo proposto, constituem uma abordagem bastante distinta da adotada até então na literatura sobre filtros adaptativos IIR. O instrumental matemático usado segue [4], mas não havia sido utilizado para a análise da velocidade de convergência. Devido a isto, acreditamos que é de interesse uma exposição mais didática desta nova abordagem, incluindo os aspectos daquele instrumental que sejam mais relevantes, assim como exemplos práticos que sirvam de motivação. A isto está dedicada então uma parte dos tópicos abordados nesta tese. Na outra parte, aspectos teóricos do algoritmo proposto são aprofundados e se discute a perspectiva de sua

---

<sup>1</sup>Os artigos do autor mais relevantes para esta tese estão anexados ao final do documento.

utilização no lugar de filtros adaptativos FIR. Isto exige, para fins de comparação, um detalhamento prévio da complexidade computacional dos filtros adaptativos IIR considerados. Devido a necessidades deste tipo, as duas partes mencionadas não são totalmente separadas na apresentação.

A organização do plano é como segue: no item final deste capítulo o problema de filtragem adaptativa IIR em questão é definido e sua relação com o problema de aproximação racional  $L_2$  é discutida; no Capítulo 2 é feita uma revisão de aspectos relevantes da teoria de sistemas e de aproximação racional  $L_2$ ; no Capítulo 3 são revistos algoritmos de filtragem adaptativa baseados no gradiente, para as estruturas direta e em treliça normalizada; é feita também uma extensão para a estrutura em treliça desnortinalizada; no Capítulo 4, como motivação para a análise do problema, são mostrados exemplos numéricos da ocorrência de convergência lenta destes filtros adaptativos; no Capítulo 5, com base na teoria da realização balanceada, uma nova parametrização para os pólos do filtro adaptativo é apresentada; esta nova parametrização não é usada para obter uma nova estrutura de filtragem adaptativa, mas, como apresentado no Capítulo 6, para analisar a velocidade de convergência das estruturas consideradas anteriormente (forma direta e em treliça); finalmente, no Capítulo 7 o algoritmo proposto em [23] é abordado.

### 1.3 Definição do problema de filtragem adaptativa

Consideremos a saída  $y(n) = H(z)u(n) + \eta(n)$  produzida por um sistema  $H(z)$  quando sua entrada é  $u(n)$ , sendo  $\eta(n)$  ruído independente de  $u(n)$ . Nesta notação mista,  $z$  é o operador de atraso unitário, tal que  $zu(n) = u(n - 1)$ . A escolha da notação mista e de  $z$  como o atraso unitário (em vez de  $z^{-1}$ , a escolha mais usual) proporciona uma notação mais compacta e visualmente agradável. Além disto, há a conveniência dos sinais dos índices da resposta impulsiva e dos correspondentes expoentes de  $z$  serem iguais.

Conhecendo apenas  $u(n)$  e  $y(n)$ , deseja-se adaptar  $\hat{H}(z)$  para que o erro quadrático médio  $E[(y(n) - \hat{y}(n))^2]$  seja minimizado, onde  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$  é a saída do filtro adaptativo. Nota-se que quando  $u(n)$  é branco esta minimização corresponde à minimização do quadrado da norma  $L_2 \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2$ , denominada de *erro quadrático* no que segue. Sendo o filtro adaptativo do tipo IIR, sua função de transferência  $\hat{H}(z)$  é racional. Assumindo um filtro

de ordem  $M$ , temos

$$\widehat{H}(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{1 + a_1 z + \dots + a_M z^M}.$$

Na estrutura direta de implementação, como detalhado no Capítulo 3, os parâmetros adaptados são os próprios coeficientes  $a_k$  e  $b_k$ . Consideraremos também estruturas em treliça [4]. A entrada  $u(n)$  será considerada sempre branca, sendo o caso de entrada não-branca deixado para trabalho futuro.

O problema assim definido tem forte conexão com o problema de aproximação racional  $L_2$ , no qual também se busca minimizar  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  mas conhecendo  $H(z)$ . Notamos que, a menos do caso trivial em que  $H(z)$  também é racional e tem grau menor ou igual a  $M$ , este problema não tem solução analítica.

# Capítulo 2

## Aspectos de aproximação racional $L_2$

A seguir revemos algumas propriedades do problema de aproximação racional  $L_2$ . Elas são de interesse para o problema de filtragem adaptativa IIR devido à forte conexão entre ambos os problemas. A exposição segue a exposição feita em [4].

### 2.1 Espaços de funções $L_2$ e $\mathcal{H}_2$

#### 2.1.1 Definições

Consideremos inicialmente o espaço  $L_2$  das funções  $f(z)$  que têm norma  $L_2$  finita:

$$\|f(z)\| \triangleq \left[ \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{j\omega})|^2 d\omega / 2\pi \right]^{1/2} < \infty.$$

Uma função que pertence a  $L_2$  pode ser expandida em uma série de Fourier  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k$ .  
 $|z| = 1$ , de modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(z) - \sum_{k=-N}^N f_k z^k \right\| = 0, \quad |z| = 1.$$

Esta convergência em norma  $L_2$  é sub-entendida ao se escrever simplesmente

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k, \quad |z| = 1.$$

Notar que, de modo geral, a região de convergência de expansões como a acima não se limita ao círculo unitário  $|z| = 1$ . Na maioria dos casos, porém, não será necessário considerar explicitamente as regiões de convergência das expansões utilizadas, sendo suficiente que a circunferência unitária faça parte destas regiões.

Será conveniente em certos casos separar uma função qualquer  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k$  em suas projeções estritamente causal  $[f(z)]_+ \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k$  e anti-causal  $[f(z)]_- \triangleq \sum_{k=-\infty}^0 f_k z^k$ :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k z^k = [f(z)]_- + [f(z)]_+.$$

Empregaremos ainda a notação  $[f(z)]_{(+)} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  para representar a projeção causal de  $f(z)$  e  $[f(z)]_{(-)} \triangleq \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k$  para a sua projeção estritamente anti-causal.

Um sub-espacô das funções  $L_2$  em  $z$  particularmente importante é o sub-espacô de Hardy  $\mathcal{H}_2$ , definido como o conjunto das funções  $f(z)$  de norma  $L_2$  finita e cuja expansão em somatória é causal:

$$\mathcal{H}_2 = \{f(z) \mid f(z) \in L_2, f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, |z| = 1\} \quad (2.1)$$

(em outros termos,  $f(z)$  é a função de transferência de um sistema linear de tempo discreto estável e causal). Se  $f(z)$  for uma função racional

$$f(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{1 + a_1 z + \dots + a_M z^M},$$

então  $f(z) \in \mathcal{H}_2$  se as raízes de  $A(z)$  estiverem fora do círculo unitário. Notar que neste caso  $B(z^{-1})/A(z^{-1}) = f(z^{-1})$  tem os pólos dentro do círculo unitário e sua expansão é dada por

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^0 f_{-k} z^k, \quad (2.2)$$

ou seja, se  $B(z)/A(z) \in \mathcal{H}_2$  então  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$  é uma função estável (tem norma  $L_2$  finita) e anti-causal. Analogamente se  $B(z)/A(z) \in \mathcal{H}_2$  e for estritamente causal ( $b_0 = 0$ ) então  $B(z^{-1})/A(z^{-1})$  é uma função estável e estritamente anti-causal.

Consideraremos sempre que a função  $H(z)$  que se deseja aproximar pertence a  $\mathcal{H}_2$  e que se busca uma aproximação  $\widehat{H}(z)$  que também esteja neste espaço.

### 2.1.2 Produto interno

Dadas duas funções  $f(z)$  e  $g(z)$  de  $L_2$  define-se o seu produto interno como

$$\langle f(z), g(z) \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} f(z) g(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k \quad (2.3)$$

(subentende-se que a integral de linha é feita no sentido anti-horário). Pode-se verificar diretamente que para quaisquer  $f(z)$ ,  $h(z)$  e  $g(z)$  de  $L_2$  o produto interno possui as seguintes propriedades:

$$\langle f(z)h(z), g(z) \rangle = \langle f(z) \cdot h(z^{-1})g(z) \rangle \quad \text{e} \quad \langle f(z), g(z) \rangle = \langle g(z), f(z) \rangle. \quad (2.4)$$

Uma operação de interesse é a derivada de um produto interno em relação a um determinado parâmetro  $w$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} \langle f(z), g(z) \rangle &= \frac{\partial}{\partial w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial w} f_k \right) g_k + f_k \left( \frac{\partial}{\partial w} g_k \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial w} f(z), g(z) \right\rangle + \left\langle f(z), \frac{\partial}{\partial w} g(z) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.2 Formulação no âmbito da teoria de sistemas

Ao analisar problemas de aproximação racional, isto é, a aproximação de uma função  $H(z)$  por uma função racional  $\widehat{H}(z)$ , podemos considerar  $\widehat{H}(z)$  como a função de transferência de um sistema linear de tempo discreto. Esta abordagem permite formular e deduzir propriedades do problema em um contexto mais concreto, o que é de interesse particular no campo da Engenharia.

### 2.2.1 Produto interno e correlação

O produto interno pode ser usado para exprimir a correlação entre dois sinais  $v(n) = F(z)u(n)$  e  $y(n) = G(z)u(n)$  obtidos pela passagem de um mesmo sinal de entrada  $u(n)$  por dois sistemas diferentes:

$$\begin{aligned} E[v(n)y(n)] &= \langle F(z), G(z)\mathcal{S}_u(z) \rangle \\ &= \langle F(z)\mathcal{S}_u(z), G(z) \rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{S}_u(z) = \mathcal{S}_u(z^{-1})$  é a Transformada  $z$  da autocorrelação da entrada  $u(n)$ :

$$\mathcal{S}_u(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[u(n)u(n+k)]z^k. \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Matriz e gramiano de controlabilidade

Consideremos a descrição em espaço de estados de um sistema linear com entrada  $u(n)$  e saída  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}u(n) \\ \hat{y}(n) &= \mathbf{c}^t\mathbf{x}(n) + du(n). \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde o vetor de estados  $\mathbf{x}(n)$  tem  $M$  elementos. De forma mais compacta podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ \hat{y}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix},$$

onde a matriz de sistema  $\mathbf{Q}$  é dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t & d \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A matriz de controlabilidade de horizonte infinito do sistema é definida por:

$$\mathcal{C} \triangleq [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots], \quad (2.10)$$

e o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  é dito completamente controlável se  $\mathcal{C}$  tiver posto  $M$ , ou seja, se tiver  $M$  colunas linearmente independentes.

Consideremos que  $\mathbf{A}$  tem todos os autovalores dentro do círculo unitário. O gramiano de controlabilidade formado a partir de  $\mathcal{C}$  segundo  $\mathbf{K} = \mathcal{C}\mathcal{C}^t$  satisfaz portanto a equação de Lyapunov [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b} (\mathbf{A}^k \mathbf{b})^t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b} (\mathbf{A}^k \mathbf{b})^t + \mathbf{b} \mathbf{b}^t \\ &= \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^t + \mathbf{b} \mathbf{b}^t. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se um par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  é completamente controlável segue diretamente que o seu gramiano de controlabilidade  $\mathbf{K}$  é uma matriz positiva definida.

Tomando agora uma raiz quadrada simétrica de  $\mathbf{K}^{-1}$ , temos que ela é uma transformação de similaridade  $\mathbf{T}$  que leva  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{K})$  a  $(\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{b}, \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}^t)$  tal que  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{I}$ .

Considerando que  $\mathbf{A}$  tem todos os autovalores dentro do círculo unitário e usando (2.11) temos então que

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{A}}^t + \overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{b}}^t = \mathbf{I}. \quad (2.12)$$

Desta igualdade decorre diretamente que  $[\overline{\mathbf{A}} \ \overline{\mathbf{b}}]$  tem  $M$  linhas ortonormais. Portanto, existem um vetor  $\mathbf{u}$  e um escalar  $v_0$  únicos de tal modo que a matriz de sistema

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{u}^t & v_0 \end{bmatrix}$$

seja ortogonal [4]. Além disso, pode-se mostrar que a função de transferência  $V(z)$  do sistema  $(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{u}, v_0)$ , dada por

$$V(z) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}^t \overline{\mathbf{A}}^{k-1} \overline{\mathbf{b}} z^k = v_0 + z \mathbf{u}^t (\mathbf{I} - z \overline{\mathbf{A}})^{-1} \overline{\mathbf{b}}, \quad (2.13)$$

é uma função passa-tudo, ou seja,  $V(z)V(z^{-1}) = 1$ , para todo  $z$ .

### 2.2.3 Vetor de controlabilidade e complemento passa-tudo

Cada linha da matriz de controlabilidade  $\mathcal{C}$  contém os termos da expansão em série de potências da função de transferência da entrada  $u(n)$  para um dos elementos do estado  $\mathbf{x}(n+1)$ :

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathcal{C}(z)u(n), \quad (2.14)$$

com  $\mathcal{C}(z) = [\mathcal{C}_1(z) \dots \mathcal{C}_M(z)]^t$  dado por

$$\mathcal{C}(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b} z^k = (\mathbf{I} - z \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.15)$$

Como veremos a seguir,  $\mathcal{C}(z)$  e  $V(z)$  definido no item anterior têm uma relação de ortogonalidade importante. Antes porém, definimos a nomenclatura utilizada:

**Definição 2.1** Dado um par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  completamente controlável, o vetor de funções de transferência  $\mathcal{C}(z) = [\mathcal{C}_1(z) \dots \mathcal{C}_M(z)]^t$  dado por (2.15) é denominado de vetor de controlabilidade de  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . A função de transferência  $V(z)$  dada por (2.13) é denominada de complemento passa-tudo de  $\mathcal{C}(z)$ .

Pode-se ver que, como  $\mathbf{A}$  e  $\overline{\mathbf{A}}$  tem os mesmos autovalores, cada linha de  $\mathcal{C}(z)$  tem os mesmos pólos que  $V(z)$ . Por outro lado, para ser uma função passa-todo, os zeros de  $V(z)$

devem ser recíprocos de seus pólos. Portanto, se cada função de  $\mathbf{C}(z)$  é da forma  $c_k(z)/A(z)$ , com  $A(z) = 1 + a_1z + \dots + a_M z^M$ , então  $V(z)$  é dado por

$$V(z) = \frac{z^M A(z^{-1})}{A(z)} = \frac{z^M + a_1 z^{M-1} + \dots + a_M}{1 + a_1 z^1 + \dots + a_M z^M}. \quad (2.16)$$

O vetor de controlabilidade de um sistema linear, por sua vez, depende da realização específica. No caso em que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  tem a forma de uma realização direta (canônica controlável), temos  $\mathbf{b} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t$  e o vetor de controlabilidade é dado por

$$\mathbf{C}(z) = \left[ \frac{1}{A(z)} \ \frac{z}{A(z)} \ \dots \frac{z^{M-1}}{A(z)} \right]^t. \quad (2.17)$$

## 2.3 Teorema de Beurling-Lax

Conforme mostrado em [4], pelo Teorema de Beurling-Lax uma função  $f(z) \in \mathcal{H}_2$  é ortogonal a um vetor de controlabilidade  $\mathbf{C}(z)$  se, e somente se,  $f(z)$  for causalmente divisível pelo complemento passa-tudo de  $\mathbf{C}(z)$ :

**Propriedade 2.1** *Se  $\mathbf{C}(z)$  é um vetor de controlabilidade e  $f(z) \in \mathcal{H}_2$  então*

$$\langle \mathbf{C}(z), f(z) \rangle = \mathbf{0} \iff f(z) = g(z)V(z), \quad g(z) \in \mathcal{H}_2,$$

onde  $V(z)$  é o complemento passa-todo de  $\mathbf{C}(z)$ .

Este Teorema é de grande importância, sendo usado em várias passagens neste trabalho.

## 2.4 Base para $\mathcal{H}_2$

A seguinte propriedade também será de interesse:

**Propriedade 2.2** *Dado um par  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  completamente controlável tal que  $\mathbf{A} \mathbf{A}^t + \mathbf{b} \mathbf{b}^t = \mathbf{I}$ , as  $M$  funções do seu vetor de controlabilidade  $\mathbf{C}(z)$  mais o conjunto  $\{z^k V(z)\}_{k=0}^{\infty}$ , onde  $V(z)$  é o complemento passa-todo de  $\mathbf{C}(z)$ , formam uma base ortonormal completa para o espaço  $\mathcal{H}_2$ .*

Para demonstrar esta propriedade, usando (2.3), (2.11) e (2.15) o gramiano de controlabilidade pode ser escrito como

$$\mathbf{K} = \mathbf{C} \mathbf{C}^t = \langle \mathbf{C}(z), \mathbf{C}(z) \rangle. \quad (2.18)$$

Portanto, quando  $\mathbf{K} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}^t + \mathbf{b}\mathbf{b}^t$  as  $M$  funções de  $\mathcal{C}(z)$  são ortonormais. Se observarmos ainda que

$$\langle z^k V(z), z^l V(z) \rangle = \langle z^k, z^l V(z)V(z^{-1}) \rangle = \langle z^k, z^l \rangle = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

a propriedade em questão decorre desta igualdade e da Propriedade 2.1.

## 2.5 Pontos estacionários do erro quadrático

Um ponto estacionário do erro quadrático é definido como segue:

**Definição 2.2**  $\widehat{H}(z)$  é um ponto estacionário de  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  se para qualquer  $w_j$  do conjunto de parâmetros de  $\widehat{H}(z)$  valer

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2 = 0. \quad (2.19)$$

Notar que uma condição necessária para que  $\widehat{H}(z)$  seja um ponto de mínimo do erro quadrático é que seja um ponto estacionário do mesmo. Pontos de máximo e pontos de sela, porém, também são pontos estacionários.

Utilizando a Propriedade 2.1, as seguintes propriedades do erro quadrático podem ser deduzidas [4]:

**Propriedade 2.3** Quando os pólos de  $\widehat{H}(z)$  são fixados e os seus zeros são escolhidos de modo a minimizar  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ , o erro  $H(z) - \widehat{H}(z)$  tem a forma:

$$H(z) - \widehat{H}(z) = V(z)g(z), \quad z^{-1}g(z) \in \mathcal{H}_2, \quad (2.20)$$

para algum  $g(z)$ , com  $V(z)$  dado por (2.16).

Notar que  $z^{-1}g(z) \in \mathcal{H}_2$  significa que  $g(z)$  é estritamente causal.

A seguir usamos  $\deg[f(z)]$  para denotar o grau de  $f(z)$ , entendido como o menor número de retardos necessários para implementar  $f(z)$ .

**Propriedade 2.4** (Teorema de Walsh) Se  $\deg[\widehat{H}(z)] = M$  então  $\widehat{H}(z)$  é um ponto estacionário de  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  se e somente se

$$H(z) - \widehat{H}(z) = z[V(z)]^2 Q(z), \quad (2.21)$$

para algum  $Q(z) \in \mathcal{H}_2$ .

## 2.6 Superfície de erro reduzida

Uma forma útil de exprimir a função  $g(z)$  em (2.20) é obtida [4] re-escrevendo inicialmente esta expressão como

$$V(z^{-1})H(z) - V(z^{-1})\widehat{H}(z) = V(z^{-1})V(z)g(z) = g(z), \quad z^{-1}g(z) \in \mathcal{H}_2, \quad (2.22)$$

onde  $V(z^{-1})V(z) \equiv 1$  pois  $V(z)$  é passa-tudo. Consideremos a parcela

$$V(z^{-1})\widehat{H}(z) = \frac{z^{-M}A(z)}{A(z^{-1})} \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^{-M}B(z)}{A(z^{-1})} = \frac{b_M + b_{M-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-M}}{A(z^{-1})}. \quad (2.23)$$

Como discutido em relação a (2.2), se  $\widehat{H}(z)$  é estável  $1/A(z^{-1})$  é estável e anti-causal. Portanto a parcela  $V(z^{-1})\widehat{H}(z) = z^{-M}B(z)/A(z^{-1})$  também é anti-causal pois  $z^{-M}B(z)$  não tem potências positivas de  $z$ . Agora, como  $g(z)$  é estritamente causal, segue que  $g(z)$  é dado apenas pela projeção estritamente causal de  $V(z^{-1})H(z)$  [4]:

**Propriedade 2.5** A função  $g(z)$  na Propriedade 2.3 pode ser escrita como

$$g(z) = [V(z^{-1})H(z)]_+ \quad (2.24)$$

Da Propriedade 2.3 decorre que quando os zeros de  $\widehat{H}(z)$  são otimizados em função dos seus pólos temos

$$\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2 = \|V(z)g(z)\|^2 = \|g(z)\|^2 \quad (2.25)$$

pois  $V(z)$  é passa-tudo. Neste caso,  $B(z)$  é determinado como segue:

$$\left[ V(z^{-1})H(z) - V(z^{-1})\widehat{H}(z) \right]_- = \left[ V(z^{-1})H(z) - \frac{B(z)}{\overline{A}(z)} \right]_- = 0,$$

portanto,

$$\frac{z^M B(z^{-1})}{A(z)} = [V(z)H(z^{-1})]_+$$

A partir deste caso ainda, podemos fazer a definição:

**Definição 2.3** A superfície de erro reduzida de  $H(z) - \widehat{H}(z)$  é dada por  $\|g(z)\|^2$  como função dos parâmetros de  $A(z)$ , com  $g(z)$  dado pela Propriedade 2.5.

Uma outra forma útil de exprimir  $g(z)$  [4] pode ser obtida notando que com  $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$ ,  $V(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^{-k}$  e  $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$  temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k &= \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_l h_k z^{k-l} \right]_+ = \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{\infty} v_l h_{k+l} z^k \right]_+ \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_l h_{k+l} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} v_l h_{k+l} z^k. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto os coeficientes  $g_k$  de  $g(z)$  são dados por

$$g_k = \sum_{l=0}^{\infty} v_l h_{k+l}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.27)$$

o que pode ser expresso matricialmente por

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \cdots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & \\ h_3 & h_4 & \ddots & & \\ h_4 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Na expressão acima, a forma matricial dos  $h_k$  é a forma de Hankel do sistema  $H(z)$ , denotada por  $\Gamma_H$ . Portanto, uma expressão equivalente a (2.24) é

$$\mathbf{g} = \Gamma_H \mathbf{v}, \quad (2.29)$$

e uma expressão para a superfície de erro reduzida, equivalente a (2.25), é

$$\|g(z)\|^2 = \mathbf{g}^t \mathbf{g} = \mathbf{v}^t \Gamma_H^2 \mathbf{v}. \quad (2.30)$$

# Capítulo 3

## Filtros adaptativos IIR baseados no gradiente

Retornamos agora ao problema de filtragem adaptativa formulado na Seção 1.3: conhecendo apenas  $u(n)$  e  $y(n) = H(z)u(n) + \eta(n)$ , sendo  $u(n)$  branco e independente de  $\eta(n)$ , queremos adaptar  $\hat{H}(z)$  para minimizar  $E[(y(n) - \hat{y}(n))^2]$ , onde  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$ .

### 3.1 Forma direta

A forma direta de implementação considerada é representada na Figura 3.1, para o caso de ordem 2. Os parâmetros adaptados são os próprios coeficientes da função de transferência

$$\hat{H}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{1 + a_1 z + \dots + a_M z^M}.$$

#### 3.1.1 Obtenção do algoritmo adaptativo

Consideremos inicialmente que os parâmetros são fixados no tempo. Usando 2.5, a derivada do erro quadrático em relação aos coeficientes do numerador é

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b_j} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial b_j} \left\langle H(z) - \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \frac{\partial}{\partial b_j} \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \frac{z^j}{A(z)}, H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle.\end{aligned}$$

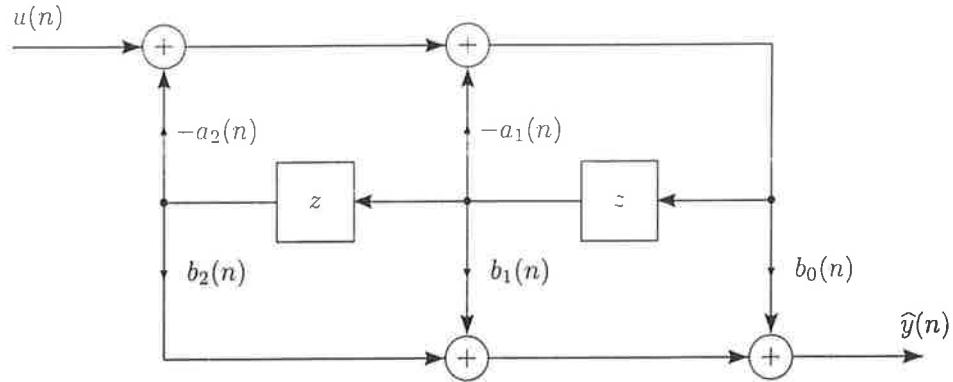


Figura 3.1: Forma direta de implementação

Usando (2.6), podemos escrever então,

$$\frac{\partial}{\partial b_j} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 = -2E \left[ \frac{z^j}{A(z)} u(n) e(n) \right],$$

onde  $u(n)$  é um sinal aleatório branco e  $e(n) = [H(z) - \hat{H}(z)]u(n)$  é o erro de saída. Para os coeficientes do denominador temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_j} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial a_j} \langle H(z) - \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \rangle \\ &= -2 \left\langle \frac{\partial}{\partial a_j} \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{z^j B(z)}{A^2(z)}, H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{z^j}{A(z)} \hat{H}(z), H(z) - \hat{H}(z) \right\rangle \\ &= 2E \left[ \frac{z^j}{A(z)} \hat{H}(z) u(n) e(n) \right]. \end{aligned}$$

Para a obtenção de um algoritmo prático, dois passos são tomados agora: 1) as operações de esperança acima são abandonadas, resultando em sinais aleatórios que se igualam às derivadas correspondentes apenas na média do conjunto das realizações e 2) os parâmetros passam a ser variantes no tempo, de modo que mesmo esta igualdade em média é aproximadamente correta apenas para variações lentas dos parâmetros. Com isto, definindo os regressores

$$\nabla_{b_j}(n) \triangleq \frac{z^j}{A(z)} u(n), \quad (3.1)$$

$$\nabla_{a_j}(n) \triangleq -\frac{z^j}{A(z)} \hat{H}(z) u(n), \quad (3.2)$$

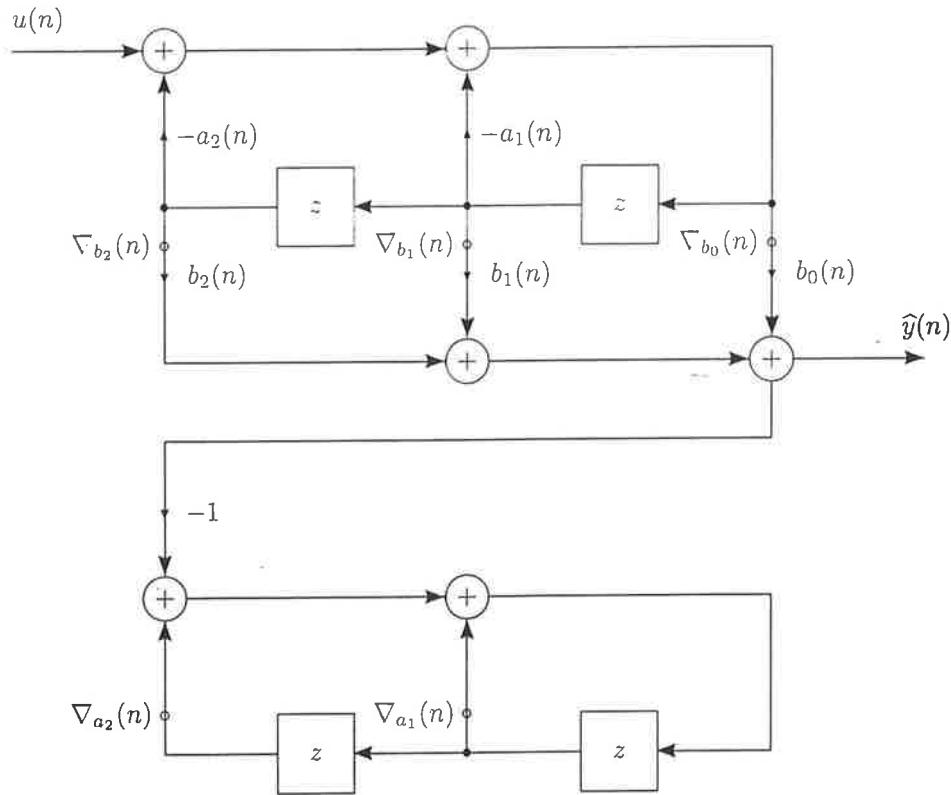


Figura 3.2: Sinais usados na adaptação, forma direta de implementação

os produtos  $\nabla_{b_j}(n)e(n)$  e  $\nabla_{a_j}(n)e(n)$  fornecem, a cada instante, uma estimativa do negativo das derivadas do erro quadrático considerando os valores assumidos no instante  $n$  pelos parâmetros. Os sinais  $\nabla_{b_j}(n)$  já estão disponíveis na estrutura de implementação, ao passo que os sinais  $\nabla_{a_j}(n)$  exigem um filtro adicional, como indicado na Figura 3.2.

A adaptação dos parâmetros na direção contrária do gradiente é dada então por

$$\begin{aligned} b_j(n+1) &= b_j(n) + \mu_b \nabla_{b_j}(n)e(n) \\ a_j(n+1) &= a_j(n) + \mu_a \nabla_{a_j}(n)e(n). \end{aligned}$$

Não foi incluído aqui um teste para verificar se os parâmetros  $a_j$  produzem um sistema estável. Para a forma direta de implementação, um teste com esta finalidade teria uma complexidade computacional considerável.

### 3.1.2 Autocorrelação dos regressores

De (3.1) e (3.2) podemos ver que mesmo quando o sinal de entrada  $u(n)$  é branco os regressores podem ser fortemente coloridos. Esta situação é mais favorável quando o sistema sendo identificado é passa-tudo e a adaptação levou a  $\hat{H}(z) \approx H(z)$ , caso em que

$|\nabla_{a_j}(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{A(e^{j\omega})} \right| |\widehat{H}(e^{j\omega})| \approx \left| \frac{1}{A(e^{j\omega})} \right|$ . Ainda assim há o efeito do termo  $1/A(z)$  nos regressores e a autocorrelação de cada regressor poderá ter componentes importantes fora da origem. Da experiência de filtros adaptativos FIR [26], isto sugere que a velocidade de convergência do filtro será pequena nestes casos. Este análise é ainda parcial, pois não está sendo levada em conta a relação entre o erro  $e(n)$  e os parâmetros, relação que é mais complexa no caso de filtros IIR. Como será visto nos capítulos 5 e 6, a introdução de uma nova parametrização dos pólos do filtro adaptativo facilitará a inclusão deste aspecto na análise.

### 3.1.3 Complexidade computacional

Neste trabalho usaremos como medida da complexidade computacional dos filtros adaptativos os números de multiplicações e de somas exigidos a cada instante de tempo.

Os passos do filtro adaptativo na forma direta são explicitados na Tabela 3.1. Deve-se observar que foi admitido que no instante  $n$ , de início, os termos  $\nabla_{b_j}(n)$  ainda não foram determinados mas que os termos  $\nabla_{a_j}(n)$  (que só dependem de  $u(n-1)$ ,  $u(n-2)$ , etc.) já foram determinados. Na tabela estão indicados também os números de multiplicações e somas de cada passo e os totais.

Passo	+	$\times$
$\nabla_{b_0}(n) = u(n) - \sum_{j=1}^M a_j(n) \nabla_{b_j}(n-1)$	$M$	$M$
$\nabla_{b_j}(n) = \nabla_{b_{j-1}}(n-1), j = 1, \dots, M$	-	-
$\widehat{y}(n) = \sum_{j=0}^M b_j(n) \nabla_{b_j}(n)$	$M$	$M+1$
$\mu_{a,b}e(n) = \mu_{a,b}[y(n) - \widehat{y}(n)]$	1	2
$b_j(n+1) = b_j(n) + \mu_b e(n) \nabla_{b_j}(n)$	$M+1$	$M+1$
$a_j(n+1) = a_j(n) + \mu_a e(n) \nabla_{a_j}(n)$	$M$	$M$
$\nabla_{a_1}(n+1) = -\widehat{y}(n) - \sum_{j=1}^M a_j(n+1) \nabla_{a_j}(n)$	$M$	$M$
$\nabla_{a_j}(n+1) = \nabla_{a_{j-1}}(n), j = 2, \dots, M$	-	-
<b>Total</b>	$5M+2$	$5M+4$

Tabela 3.1: Passos do filtro adaptativo na forma direta. O número de somas e de multiplicações de cada passo é indicado nas colunas '+' e ' $\times$ ', respectivamente.

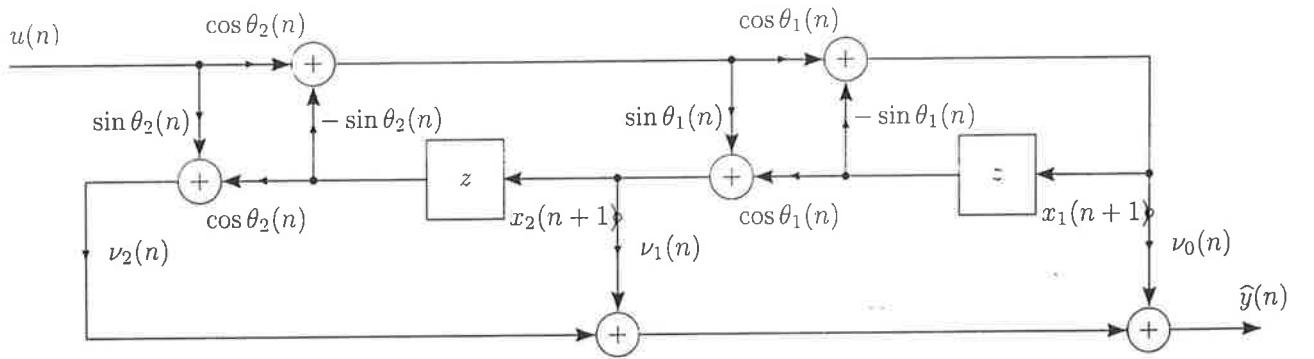


Figura 3.3: Forma em treliça normalizada

## 3.2 Forma em treliça normalizada

A forma em treliça normalizada está representada na Figura 3.3, para o caso de ordem 2. Uma discussão detalhada de suas propriedades pode ser encontrada em [4].

### 3.2.1 Algoritmo adaptativo

O algoritmo que consideramos é o descrito em [4, p. 332]. A dedução é bastante longa e não será reproduzida aqui. O algoritmo é dado por

$$\begin{aligned} \nu_j(n+1) &= \nu_j(n) + \mu_\nu \nabla_{\nu_j}(n) e(n) \\ \theta_j(n+1) &= \theta_j(n) + \mu_\theta \nabla_{\theta_j}(n) e(n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se  $|\theta_j(n+1)| \geq \frac{\pi}{2}$ , então  $\theta_j(n+1) = \theta_j(n)$ .

O teste  $|\theta_j(n+1)| \geq \frac{\pi}{2}$  é um teste de estabilidade: como pode ser provado, se a estrutura é estável (supondo parâmetros fixos) então  $|\theta_j(n+1)| < \frac{\pi}{2}$ . Esta simplicidade do teste de estabilidade é um dos atrativos desta estrutura.

Os regressores são indicados na Figura 3.4, onde  $\gamma_M = 1$  e

$$\gamma_j \triangleq \prod_{i=j+1}^M \cos \theta_i, \quad j = 1, 2, \dots, M-1.$$

É interessante observar a semelhança com a forma como são obtidos os regressores para a forma direta (Figura 3.2). Neste caso, porém, devido às simplificações realizadas ao longo da dedução, mesmo assumindo parâmetros fixados e tomando médias, os regressores  $\nabla_{\theta_j}(n)$

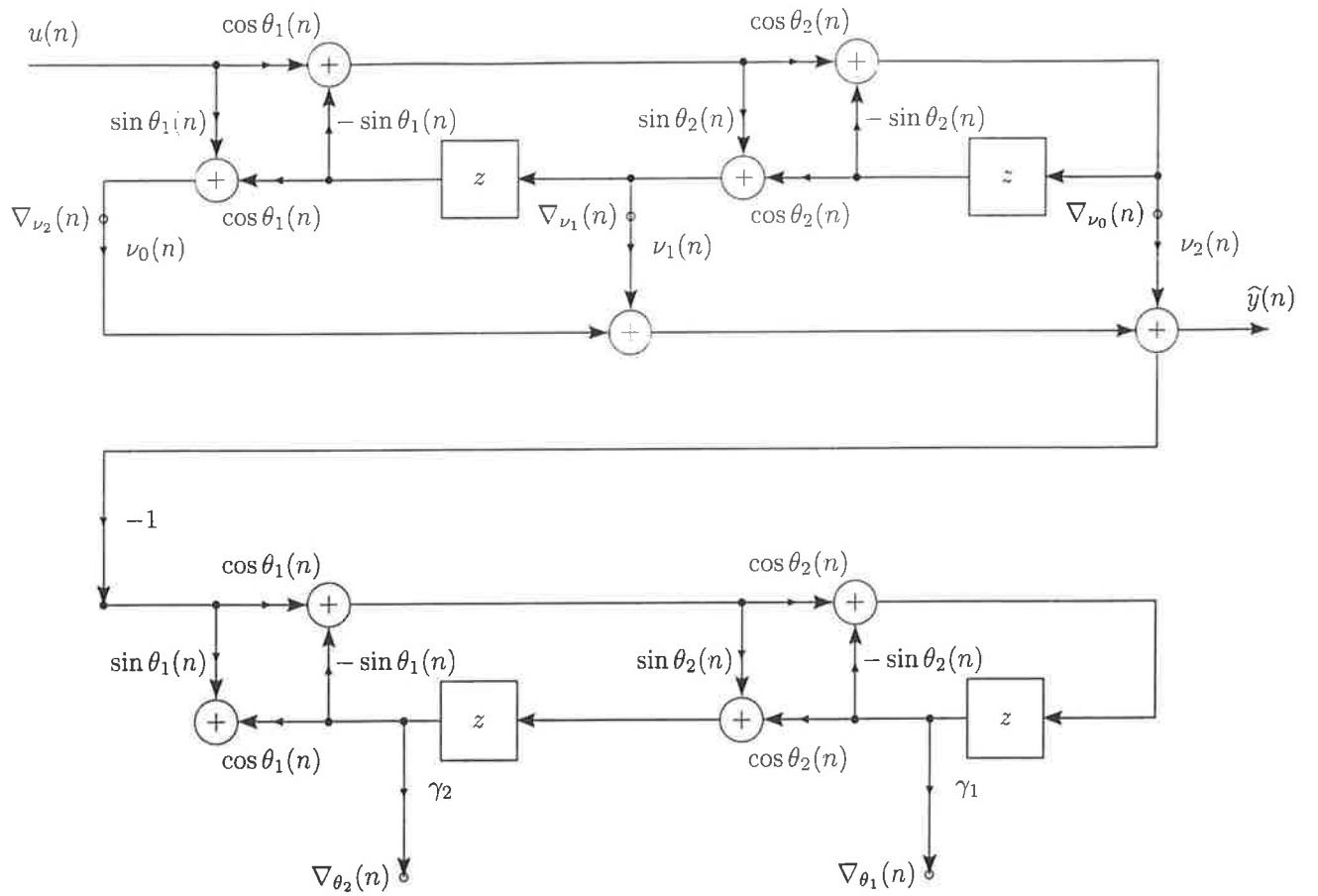


Figura 3.4: Sinais usados na adaptação, forma em treliça normalizada

não correspondem exatamente às derivadas do erro quadrático em relação a  $\theta_j$ . Ainda assim, pode-se mostrar que os pontos onde  $E[\nabla_{\nu_j}(n)] \equiv 0$  e  $E[\nabla_{\theta_j}(n)] \equiv 0$  são pontos estacionários do erro quadrático  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|^2$ . Isto sugere que pontos de mínimo do erro quadrático, sejam, como desejado, pontos de convergência do algoritmo. Isto é, de fato, corroborado por simulações numéricas.

### 3.2.2 Complexidade computacional

Podemos observar pela Figura 3.4 e por (3.3) que adaptam-se os parâmetros  $\theta_j$  enquanto que na geração dos sinais são necessários os valores de  $\sin \theta_j$  e  $\cos \theta_j$ ,  $|\theta_j| < \frac{\pi}{2}$ . É necessária portanto a computação de funções trigonométricas. Para tanto, consideraremos a expansão em série

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (3.4)$$

Quando a série é truncada podemos computá-la de modo eficiente como

$$\sin(x) \approx \left( \left( \left( -\frac{\theta^2}{7!} + \frac{1}{5!} \right) \theta^2 - \frac{1}{3!} \right) \theta^2 + 1 \right) \theta.$$

Para uma maior precisão, os coeficientes da série truncada podem ainda ser ajustados calculando o erro de aproximação, determinando para este erro uma aproximação polinomial de mesma ordem (usando por exemplo a função `polyfit` no Octave ou Matlab) e somando os coeficientes desta nova série aos coeficientes originais da série truncada. Na Tabela 3.2 temos, em função do grau da série truncada, o valores máximos absolutos do erro de aproximação (fazendo  $0 \leq x = k \times 10^{-4} \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ) para a série truncada original e a série corrigida e a complexidade computacional. Notamos que para  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$  pode ser usado  $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$  e a computação pode ser feita com uma expansão em série para o cosseno. Além disto, para  $-\frac{\theta}{2} < \theta < 0$  pode ser usado o fato de que  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ . A implementação destes testes não foi incluída na complexidade computacional.

Grau	Original	Corrigida	+	$\times$
3	$2,5 \times 10^{-3}$	$3,1 \times 10^{-4}$	1	3
5	$3,6 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{-6}$	2	4
7	$3,1 \times 10^{-7}$	$3,2 \times 10^{-9}$	3	5
9	$1,8 \times 10^{-9}$	$5,0 \times 10^{-12}$	4	6
11	$6,9 \times 10^{-12}$	$5,4 \times 10^{-15}$	5	7

Tabela 3.2: Precisão e complexidade computacional da computação do seno.

Os passos do filtro adaptativo e sua complexidade computacional estão explicitados na Tabela 3.3, onde foram consideradas expansões de ordem 5 para  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ . Na tabela, os estados do filtro adicional são denotados por  $\xi_j(n)$ . Pode-se ver que, considerando conjuntamente somas e multiplicações, a complexidade computacional total é aproximadamente 3,2 vezes maior do que para a estrutura direta.

Passo	+	$\times$
$\sin \theta_j, \cos \theta_j$	$4M$	$8M$
Com $g_M = u(n)$ e $j = M, M-1, \dots, 1$		
$\begin{bmatrix} g_{j-i} \\ \nabla_{\nu_j}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j(n) & -\sin \theta_j(n) \\ \sin \theta_j(n) & \cos \theta_j(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_k \\ \nabla_{\nu_{j-1}}(n-1) \end{bmatrix}$	$2M$	$4M$
Com $\nabla_{\nu_0}(n) = g_0$ , $\hat{y}(n) = \sum_{j=0}^M \nu_j(n) \nabla_{\nu_j}(n)$	$M$	$M+1$
$\mu_{\theta, \nu} e(n) = \mu_{\theta, \nu} [y(n) - \hat{y}(n)]$	1	2
Com $\gamma_M = 1$ e $j = M, M-1, \dots, 1$		
$\nabla_{\theta_j} = \gamma_j \xi_{j-1}(n)$		$2M$
$\gamma_{j-1} = \gamma_j \cos \theta_j(n)$		
$\nu_j(n+1) = \nu_j(n) + \mu_{\nu} e(n) \nabla_{\nu_j}(n)$	$M+1$	$M+1$
$\theta_j(n+1) = \theta_j(n) + \mu_{\theta} e(n) \nabla_{\theta_j}(n)$	$M$	$M$
Se $ \theta_j(n+1)  \geq \frac{\pi}{2}$ , $\theta_j(n+1) = \theta_j(n)$ .		
Com $x = -\hat{y}(n)$ e $j = M, M-1, \dots, 1$		
$\begin{bmatrix} x \\ \xi_j(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j(n+1) & -\sin \theta_j(n+1) \\ \sin \theta_j(n+1) & \cos \theta_j(n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi_{j-1}(n) \end{bmatrix}$	$2M$	$4M$
<b>Total</b>	$11M+2$	$21M+4$

Tabela 3.3: Passos do filtro adaptativo na forma em treliça normalizada. O número de somas e de multiplicações de cada passo é indicado nas colunas '+' e '×', respectivamente.

### 3.3 Forma em treliça desnortinalizada

Com a motivação de obter uma estrutura com menor complexidade computacional que a treliça normalizada, consideramos agora a treliça desnormalizada, representada na Figura 3.5. Como pode ser visto, são necessárias apenas 2 multiplicações por coeficiente do denominador (contra 4 da treliça normalizada) e não é necessária a computação de funções trigonométricas.

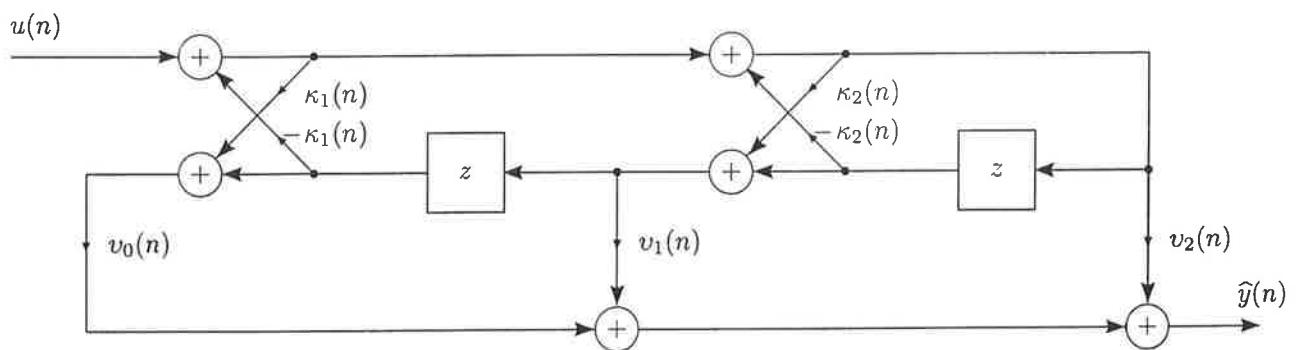


Figura 3.5: Forma em treliça desnortinalizada

### 3.3.1 Relação dos sinais com os da treliça normalizada

Veremos a seguir que os sinais de interesse na treliça desnormalizada podem ser obtidos a partir dos da forma em treliça normalizada. O elemento básico em cada caso está representado na Figura 3.6, onde adotamos uma notação simplificada para as variáveis. Temos, para o caso normalizado,

$$y = u \sin \theta + w \cos \theta$$

$$v = u \cos \theta - w \sin \theta,$$

e para o caso desnormalizado

$$y' \equiv y\kappa + w'(1 - \kappa^2) \quad (3.5)$$

$$v' \equiv u - w' \kappa. \quad (3.6)$$

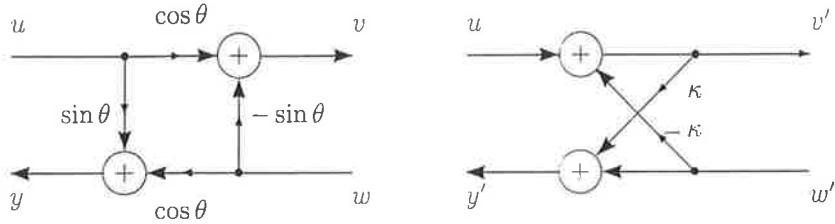


Figura 3.6: Elementos básicos das treliças normalizada e desnormalizada

Consideremos que ao elemento da treliça normalizada são adicionados os blocos indicados na Figura 3.7. Para os novos sinais definidos temos então

$$\begin{aligned} y &= u \sin \theta + w' \cos^2 \theta \\ v' &= u - w' \sin \theta. \end{aligned}$$

Comparando estas expressões com (3.5) e (3.6), concluímos que se

$$\kappa = \sin \theta$$

então  $y = y'$  e o elemento básico da treliça desnormalizada pode ser substituído pelo elemento da Figura 3.7.

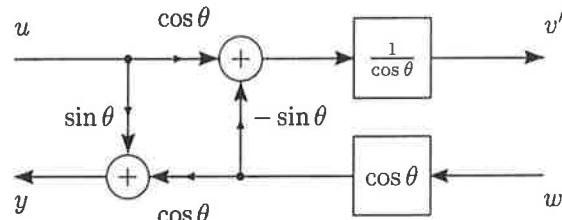


Figura 3.7: Modificação do elemento básico das treliça normalizada

Consideremos agora a estrutura completa do filtro, exemplificada para ordem 3 na Figura 3.8, onde cada bloco “ $\theta_j$ ” incorpora o elemento básico da treliça normalizada mais o bloco de retardo unitário.

Começando do último bloco à direita da treliça desnormalizada, vemos que o efeitos dos blocos “ $\cos \theta_1$ ” e “ $1/\cos \theta_1$ ” se cancelam e, portanto, as funções de transferência de  $u'_1$  para  $y'_1$  (na treliça desnormalizada) e de  $u_1$  para  $y_1$  (na treliça normalizada) são iguais. Retrocedendo, isto implica em que as funções de transferência de  $u'_2$  para  $y'_2$  e de  $u_2$  para  $y_2$  também são iguais e assim sucessivamente até o primeiro bloco.

Consideremos agora a relação entre os sinais  $y'_j$  e  $y_j$ , começando do primeiro bloco à esquerda. Como deduzido acima,  $y'_3 = y_3$ , o que exige que  $w'_3 = w_3$ . Consequentemente,

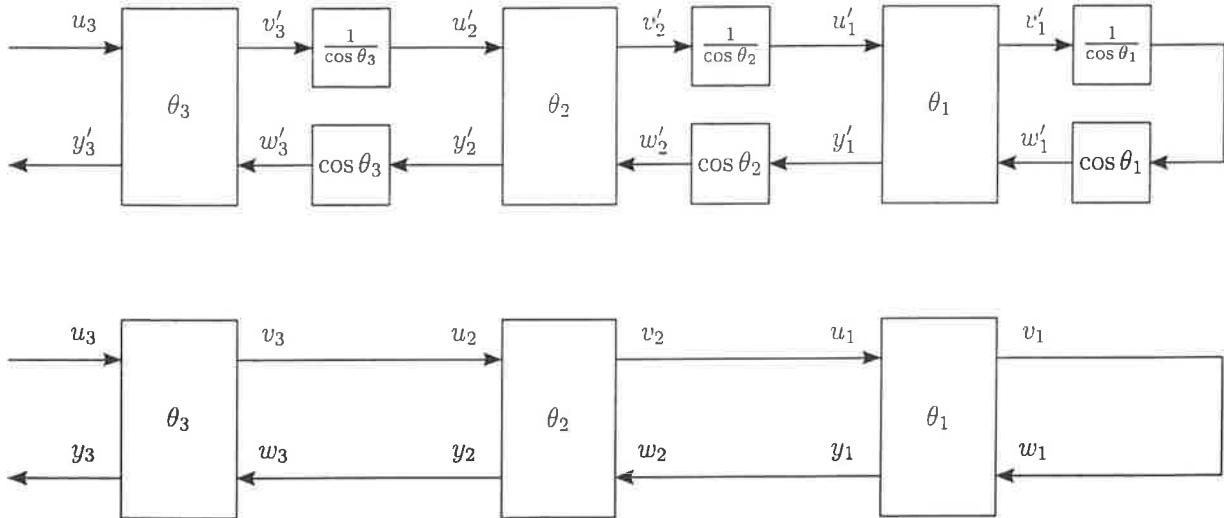


Figura 3.8: Formas em treliça desnormalizada (acima) e normalizada (abaixo)

$v'_3 = v_3$  e  $u'_2 = \frac{1}{\cos \theta_3} u_2$ . Uma vez que, como deduzido, as funções de transferência de  $u'_2$  para  $y'_2$  e de  $u_2$  para  $y_2$  iguais, temos que  $y'_2 = \frac{1}{\cos \theta_3} y_2 = \frac{1}{\cos \theta_3} w_3$ . Aplicando o mesmo raciocínio para os blocos subsequentes chegamos à expressão geral

$$y'_j = \frac{1}{\cos \theta_M \cos \theta_{M-1} \dots \cos \theta_j} w_{j+1}. \quad (3.7)$$

Esta relação será usada para obter os regressores utilizados na adaptação da estrutura desnormalizada.

### 3.3.2 Obtenção do algoritmo

Aplicando a regra da cadeia da derivação, temos a seguinte relação entre as derivadas do erro quadrático em relação aos parâmetros  $\kappa_j = \sin \theta_j$  da treliça desnormalizada e  $\theta_j$  da treliça normalizada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \|\widehat{H}(z) - H(z)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial \kappa_j} \|\widehat{H}(z) - H(z)\|^2 \frac{\partial \kappa_j}{\partial \theta_j} \\ &= \cos \theta_j \frac{\partial}{\partial \kappa_j} \|\widehat{H}(z) - H(z)\|^2. \end{aligned}$$

Admitindo que no caso da treliça normalizada os produtos  $\nabla_{\theta_j}(n)e(n)$  usados no algoritmo visto na seção anterior sejam aproximações estocásticas satisfatórias das derivadas  $\frac{\partial}{\partial \theta_j} \|\widehat{H}(z) - H(z)\|^2$ , é razoável supor que com

$$\nabla_{\kappa_j}(n) = \frac{1}{\cos \theta_j} \nabla_{\theta_j}(n) \quad (3.8)$$

os produtos  $\nabla_{\kappa_j}(n)e(n)$  também sejam aproximações satisfeitas de  $\frac{\partial}{\partial \kappa_j} \|\widehat{H}(z) - H(z)\|^2$ .

Agora, associando a treliça normalizada da Figuras 3.8 com o filtro adicional da Figura 3.4 vemos que

$$\begin{aligned}\nabla_{\kappa_j}(n) &= \frac{1}{\cos \theta_j} \nabla_{\theta_j}(n) \\ &= \frac{1}{\cos \theta_j} \gamma_j w_j(n-1) \\ &= \frac{\cos \theta_M \cos \theta_{M-1} \dots \cos \theta_{j+1}}{\cos \theta_j} w_j(n-1)\end{aligned}$$

o que, com (3.7), resulta em

$$\begin{aligned}\nabla_{\kappa_j}(n) &= \cos^2 \theta_M \cos^2 \theta_{M-1} \dots \cos^2 \theta_{j+1} y'_{j-1}(n-1) \\ &= (1 - \kappa_M^2)(1 - \kappa_{M-1}^2) \dots (1 - \kappa_{j+1}^2) y'_{j-1}(n-1).\end{aligned}$$

Estes regressores, assim como os regressores  $\nabla_{v_j}(n)$  estão indicados na Figura 3.9.

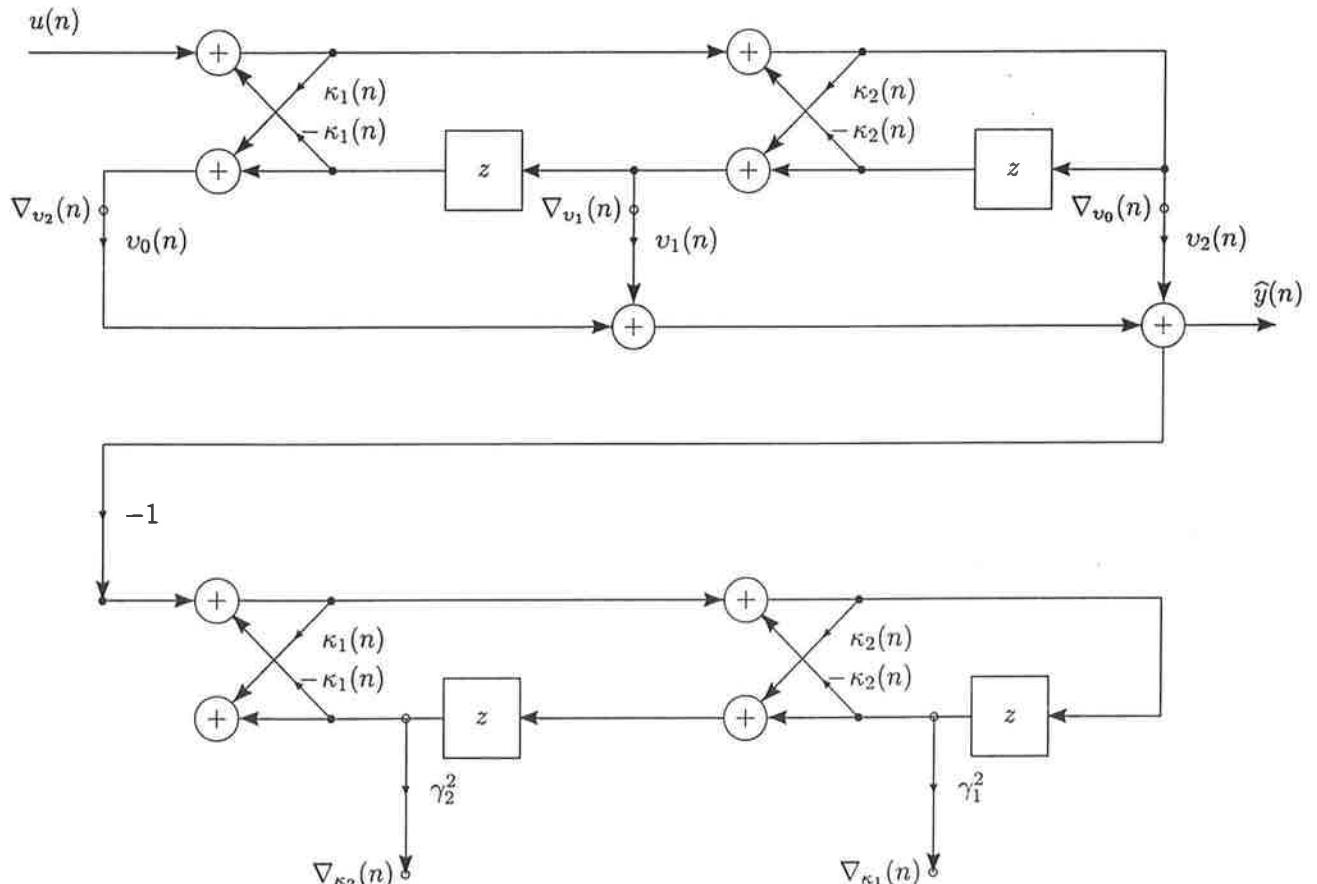


Figura 3.9: Sinais usados na adaptação, forma em treliça desnortinalizada

### 3.3.3 Complexidade computacional

Os passos do algoritmo derivado para a forma de implementação em treliça desnormalizada estão na Tabela 3.4, juntamente com a complexidade computacional. Esta é aproximadamente 1,8 vezes maior do que a da forma direta de implementação.

Passo	+	$\times$
Com $g_M = u(n)$ e $j = M, M - 1, \dots, 1$ $g_{j-1} = g_j - \kappa_j \nabla_{v_{j-1}}(n-1)$ $\nabla_{v_j}(n) = \kappa_j g_{j-1} + \nabla_{v_{j-1}}(n-1)$	$2M$	$2M$
Com $\nabla_{v_0}(n) = g_0$ , $\hat{y}(n) = \sum_{j=0}^M v_j(n) \nabla_{v_j}(n)$	$M$	$M + 1$
$\mu_{\kappa, \nu} e(n) = \mu_{\kappa, \nu} [y(n) - \hat{y}(n)]$	1	2
Com $\gamma_M = 1$ e $j = M, M - 1, \dots, 1$ $\nabla_{\kappa_j} = \gamma_j \xi_{j-1}(n)$ $\gamma_{j-1} = \gamma_j (1 - \kappa_j^2(n))$	$M$	$3M$
$v_j(n+1) = v_j(n) + \mu_\nu e(n) \nabla_{v_j}(n)$	$M + 1$	$M + 1$
$\kappa_j(n+1) = \kappa_j(n) + \mu_\kappa e(n) \nabla_{\kappa_j}(n)$ Se $\kappa_j(n+1) \geq 1$ , $\kappa_j(n+1) = \kappa_j(n)$ .	$M$	$M$
Com $x = -\hat{y}(n)$ e $j = M, M - 1, \dots, 1$ $x = x - \kappa_j \xi_{j-1}(n)$ $\xi_j(n+1) = \kappa_j x + \xi_{j-1}(n)$	$2M$	$2M$
<b>Total</b>	$8M + 2$	$10M + 4$

Tabela 3.4: Passos do filtro adaptativo na forma em treliça desnormalizada. O número de somas e de multiplicações de cada passo é indicado nas colunas '+' e '×', respectivamente.

# Capítulo 4

## Convergência lenta de filtros adaptativos IIR

Apresentamos agora alguns exemplos numéricos de situações de convergência lenta de filtros adaptativos IIR, como motivação para a análise apresentada nos capítulos subsequentes.

Quando o sistema sendo identificado  $H(z)$  tem pólos muito próximos ao círculo unitário, em pontos distantes do mínimo global a superfície de erro tende a possuir regiões planas [19]. Para algoritmos adaptativos de passo constante isto resulta em uma baixa velocidade de convergência. Quando a ordem de  $H(z)$  aumenta, uma baixa velocidade de convergência pode ocorrer mesmo quando seus pólos não estão muito próximos ao círculo unitário, como visto a seguir.

### 4.1 Dependência em relação à posição dos zeros

Consideremos inicialmente  $H_1(z)$  de quarta ordem, sendo que  $H_1(z^{-1})$  tem pólos em  $0.7\angle \pm 60^\circ$  e  $0.7\angle \pm 100^\circ$ , zeros em  $0.9\angle \pm 5^\circ$  e  $0.8\angle \pm 10^\circ$  e norma  $L_2$  unitária, como representado na Figura 4.1.

Neste caso e nos demais casos apresentados, foi considerado um sinal de entrada gaussiano e branco. A adaptação dos parâmetros da estrutura direta de um filtro adaptativo também de quarta ordem, usando o algoritmo do gradiente da Tabela 3.1 com um passo de adaptação de  $\mu = 4 \times 10^{-2}$ , é mostrada na Figura 4.2. O erro quadrático instantâneo de saída  $[y(n) - \hat{y}(n)]^2$  e a adaptação dos pólos são mostradas na Figura 4.3. O valor de  $\mu$  é

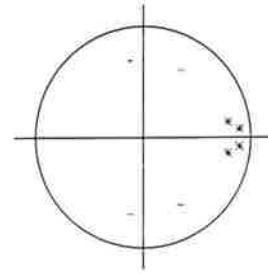


Figura 4.1: Pólos (+) e zeros (\*) de  $H_1(z^{-1})$ .

próximo ao seu valor máximo, sendo que  $\mu = 8 \times 10^{-2}$  resulta em divergência da adaptação (para um número maior de iterações). Pode ser visto que a adaptação praticamente pára após aproximadamente 200 iterações, embora o erro de saída seja consideravelmente elevado.

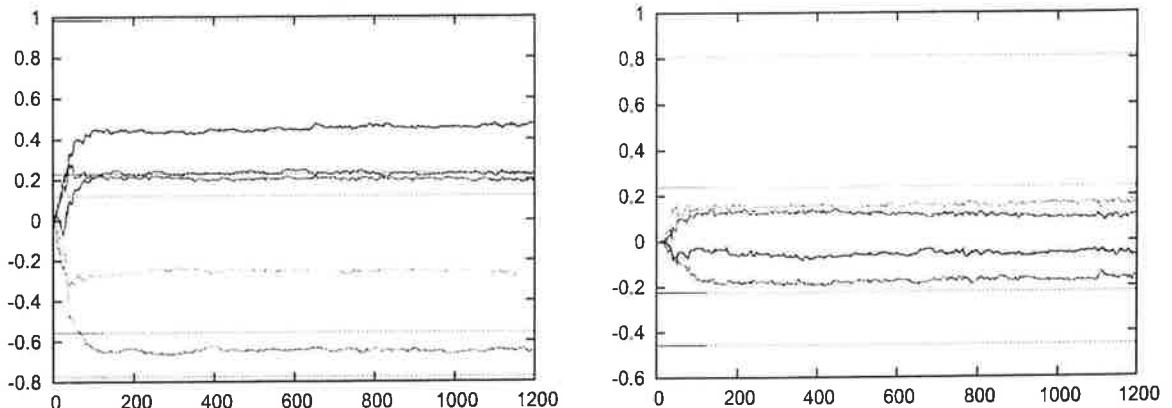


Figura 4.2: Identificação de  $H_1(z)$ : coeficientes do numerador (esquerda) e do denominador (direita). As linhas pontilhadas são os valores verdadeiros dos coeficientes.

Como neste caso há modelamento suficiente e o sinal de entrada é branco, não há mínimos locais na superfície de erro [4]. Portanto, a adaptação termina por alcançar o mínimo global, como mostrado nas Figuras 4.4 e 4.5. Pode ser visto que um erro de  $-60$  dB só é atingido após 75000 iterações.

Consideremos agora  $H_2(z)$  passa-tudo com os mesmos pólos que  $H_1(z)$ . Os zeros são recíprocos dos pólos. Os resultados usando um passo de adaptação de  $\mu = 4 \times 10^{-2}$  são mostrados nas Figuras 4.6 e 4.7. Como no caso anterior, aumentando  $\mu$  para  $8 \times 10^{-2}$  também resultou em divergência. Pode ser visto que um erro de  $-60$  dB, por exemplo, é atingido após aproximadamente 750 iterações, o que é 100 vezes mais rápido do que o caso anterior.

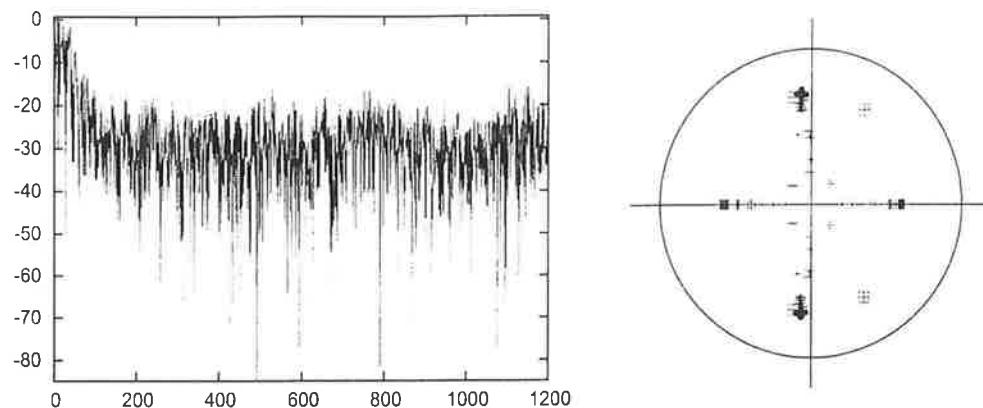


Figura 4.3: Identificação de  $H_1(z)$ : erro (dB) e adaptação dos pólos ('+'s enquadrados são os pólos de  $H_1(z)$ ).

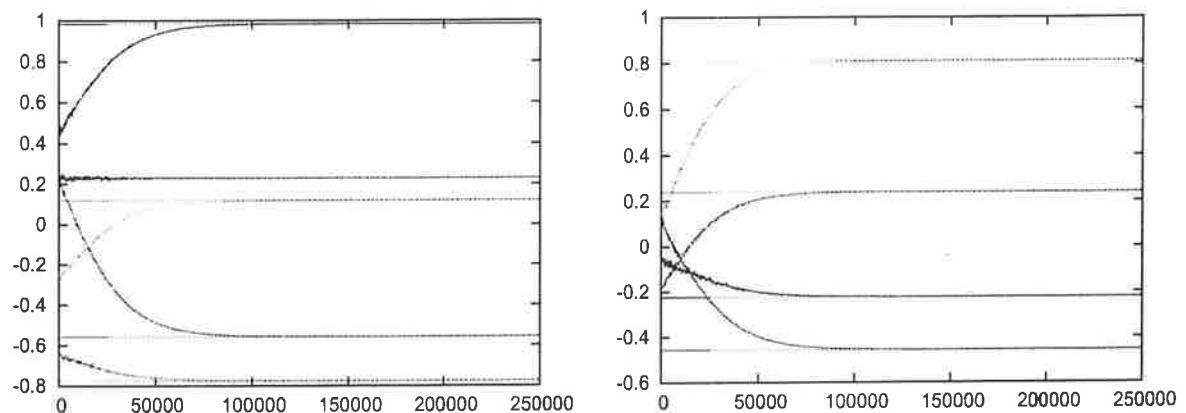


Figura 4.4: Identificação de  $H_1(z)$ : coeficientes do numerador (esquerda) e do denominador (direita).

Neste caso, resultados semelhantes são obtidos para a adaptação dos parâmetros de treliça, ao invés dos parâmetros da estrutura direta.

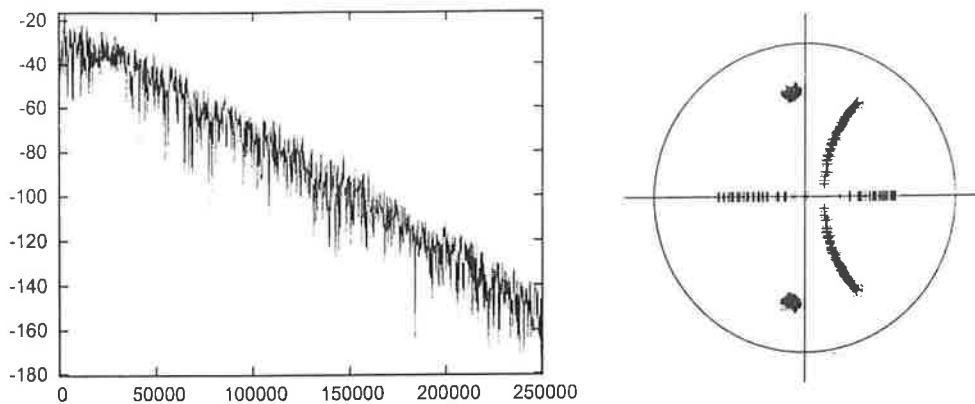


Figura 4.5: Identificação de  $H_1(z)$ : erro (dB) e adaptação dos pólos .

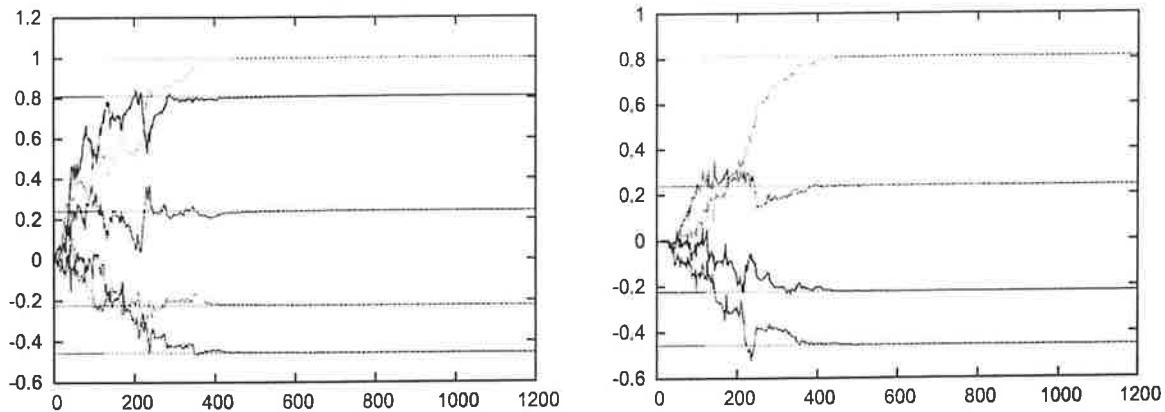


Figura 4.6: Identificação de  $H_2(z)$  (passa-tudo): coeficientes do numerador (esquerda) e do denominador (direita).

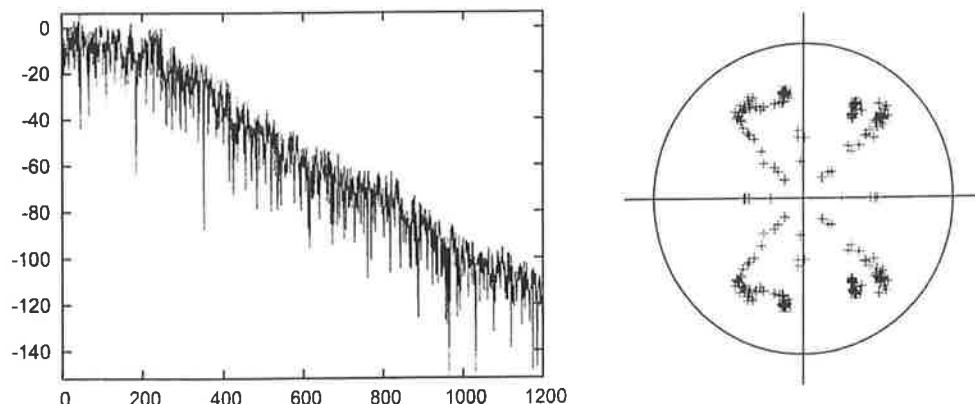


Figura 4.7: Identificação de  $H_2(z)$  (passa-tudo): erro (dB) e adaptação dos pólos.

## 4.2 Dependência em relação à parametrização e à posição dos pólos

Consideremos agora  $H_3(z^{-1})$  com pólos em  $0.7\angle \pm 48^\circ$  e  $0.79\angle \pm 5.9^\circ$ , zeros em  $1.6\angle \pm 83^\circ$  e  $0.81\angle \pm 94^\circ$  e norma  $L_2$  unitária, como representado na Figura 4.8. O erro quadrático instantâneo de saída  $[y(n) - \hat{y}(n)]^2$  usando o algoritmo do gradiente para os parâmetros da estrutura direta, iniciando a adaptação com os parâmetros em 0.8 vezes seus valores verdadeiros e com um passo de adaptação de  $\mu = 1 \times 10^{-4}$ , é mostrado na Figura 4.9. O valor de  $\mu$  é próximo ao seu valor máximo, sendo que  $\mu = 2 \times 10^{-4}$  resulta em divergência da adaptação. Na mesma figura é mostrado o resultado para os parâmetros da estrutura em treliça normalizada, adaptados com o algoritmo da Tabela 3.3, com a mesma inicialização e com  $\mu = 10^{-2}$ . Pode-se ver que a adaptação dos parâmetros de treliça é consideravelmente mais rápida do que os da forma direta. Ainda assim, porém, é mais lenta do que seria desejável.

Como no item anterior, consideremos agora  $H_4(z)$ , o correspondente passa-tudo de  $H_3(z)$ . Os resultados estão na Figura 4.10, tendo sido usado  $\mu = 2 \times 10^{-4}$  para a forma direta e  $\mu = 4 \times 10^{-2}$  para a treliça. Pode-se ver que neste caso a treliça converge muito mais rapidamente do que nos demais casos deste item.

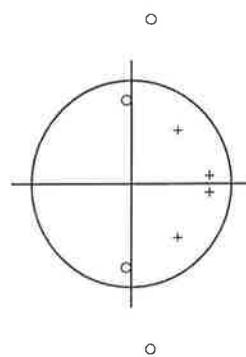


Figura 4.8: Polos (+) e zeros (o) de  $H_3(z^{-1})$ .

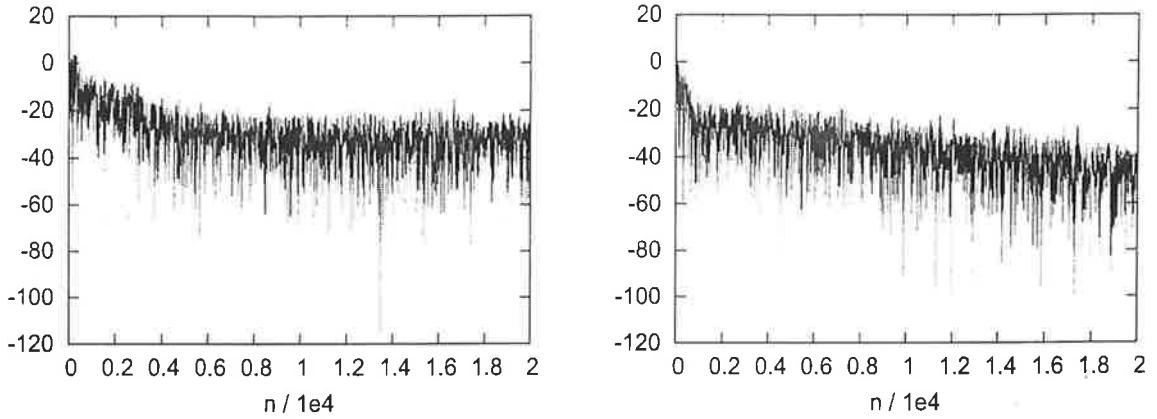


Figura 4.9: Identificação de  $H_3(z)$ : erro (dB) para forma direta (esquerda) e treliça (direita).

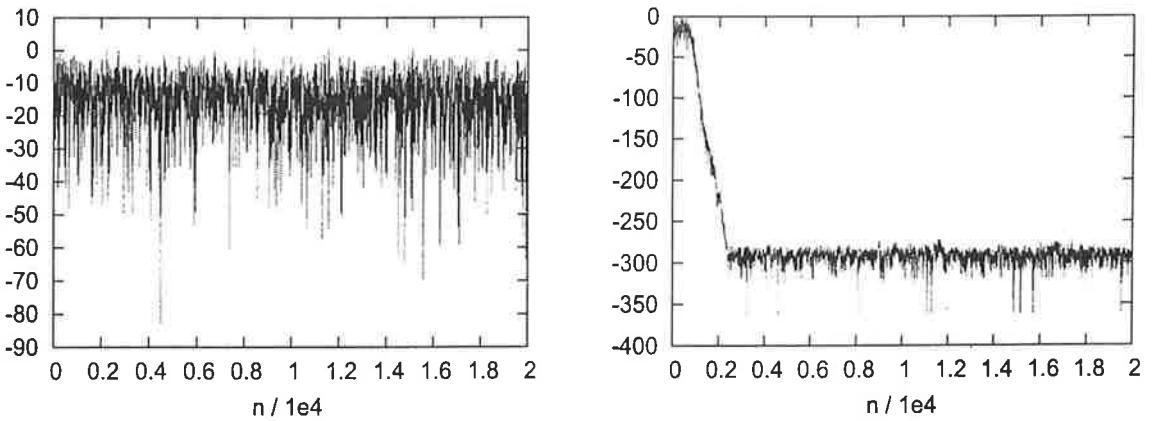


Figura 4.10: Identificação de  $H_4(z)$ : erro (dB) para forma direta (esquerda) e treliça (direita).

### 4.3 Adaptação na superfície de erro reduzida

Pode ser observado que nas situações de convergência lenta apresentadas acima, a adaptação recai rapidamente nas proximidades da superfície reduzida de erro definida na Seção 2.6. Ou seja, os zeros do filtro adaptativo acompanham rapidamente a lenta variação dos pólos e estão sempre próximos aos seus valores ótimos (dados os pólos). Isto é mostrado na Figura 4.11 para o caso do sistema  $H_1(z)$  visto acima. Quando a convergência é rápida, há um desvio considerável em relação à superfície de erro reduzida, como mostrado na Figura 4.12.

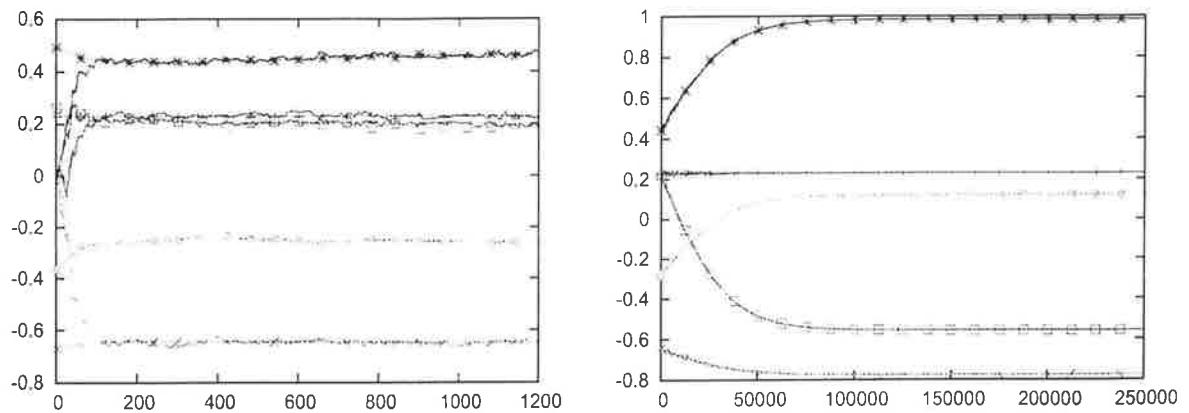


Figura 4.11: Adaptação dos parâmetros dos zeros (linhas contínuas) e seus valores ótimos dados os pólos (pontos e linhas pontilhadas), sistema  $H_1(z)$

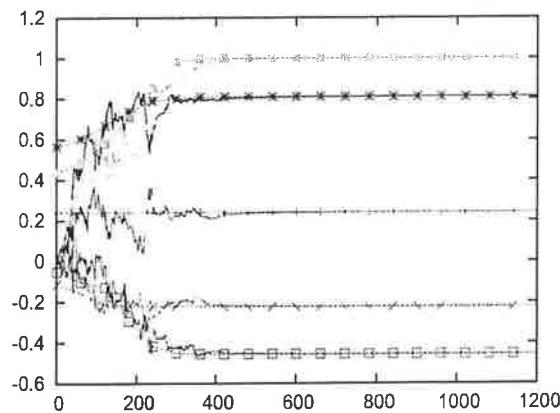


Figura 4.12: Adaptação dos parâmetros dos zeros (linhas contínuas) e seus valores ótimos dados os pólos (pontos e linhas pontilhadas), sistema  $H_2(z)$

#### 4.4 Motivação para a análise

Uma interpretação de resultados como os apresentados acima não era encontrada na literatura sobre filtragem adaptativa IIR. Ela é desejável, porém, dado que uma maior compreensão do problema poderia viabilizar a utilização prática destes filtros, com possíveis ganhos de complexidade computacional sobre filtros adaptativos FIR.

# Capítulo 5

## Análise da superfície reduzida e parametrização dos pólos

Neste capítulo, introduzimos uma parametrização dos pólos de  $\widehat{H}(z)$  que será útil para a análise do problema da velocidade de convergência de filtros adaptativos IIR.

### 5.1 Realização balanceada e a superfície de erro reduzida

Consideremos a forma de Hankel  $\Gamma_H$  de um sistema  $H(z)$ :

$$\Gamma_H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots & \\ h_3 & h_4 & \ddots & & \\ h_4 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}.$$

Os valores singulares de Hankel de  $H(z)$  são as raízes quadradas dos autovetores de  $\Gamma_H^t \Gamma_H$ :

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda_k(\Gamma_H^t \Gamma_H)}.$$

Se  $H(z)$  tem grau  $N$ , o que indicamos por  $\deg[H(z)] = N$ , querendo dizer que este é menor número de retardos necessários para implementar  $H(z)$ , então  $H(z)$  tem  $N$  valores singulares de Hankel não nulos. A forma de Hankel pode ser escrita em termos destes valores singulares

como [27]

$$\Gamma_H = \sum_{k=1}^N \zeta_k \sigma_k \boldsymbol{\eta}_k^t, \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_k > 0$  e  $\{\boldsymbol{\eta}_k\}$  e  $\{\zeta_k\}$  são ortonormais ( $\boldsymbol{\eta}_k^t \boldsymbol{\eta}_l = \zeta_k^t \zeta_l = \delta_{k,l}$ ). Em particular, cada vetor  $\zeta_k$  contém os termos da expansão da função de transferência de controlabilidade normalizada  $\zeta_k(z)$  associada a um dos estados de uma realização balanceada de  $H(z)$ ,

$$\zeta_k(z) = \sigma_k^{-1/2} \mathcal{C}_{b,k}(z).$$

Notamos que em uma realização balanceada [28] os gramianos de controlabilidade  $\mathbf{K} = \mathcal{C}_b \mathcal{C}_b^t$  e de observabilidade são diagonais e dados pelos valores singulares  $\sigma_k$ .

Vejamos agora como podemos usar as funções  $\zeta_k(z)$  para escrever a superfície de erro reduzida no problema de aproximação racional considerado no Capítulo 2. O interesse por isso vem do fato de que, como visto no Capítulo 4, é usual em situações de convergência lenta que a adaptação recaia na superfície de erro reduzida.

Reunindo (5.1) e (2.30), resulta

$$\begin{aligned} \|g(z)\|^2 &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{v}^t \zeta_k \sigma_k \underbrace{\boldsymbol{\eta}_k^t \boldsymbol{\eta}_l^t}_{\delta_{k,l}} \sigma_l \zeta_l^t \mathbf{v} \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbf{v}^t \zeta_k \sigma_k^2 \zeta_k^t \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde o vetor  $\mathbf{v}$  é formado pelos coeficientes da expansão de  $V(z)$  e depende dos pólos do filtro adaptativo  $\widehat{H}(z)$ . Notando que podemos escrever  $\mathbf{v}^t \zeta_k = \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle$ , resulta a seguinte proposição:

**Proposição 5.1** *Na aproximação racional pela norma  $L_2$   $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|$ , a superfície de erro reduzida é dada por*

$$\|g(z)\|^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \sigma_k^2, \quad (5.3)$$

onde definimos

$$\alpha_k \triangleq \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle. \quad (5.4)$$

Notar que, como  $\zeta_k(z)$  e  $V(z)$  têm norma unitária, então  $|\alpha_k| \leq 1$ .

Veremos a seguir que os termos  $\alpha_k$  assim definidos constituem uma parametrização dos pólos do filtro adaptativo.

## 5.2 Parametrização dos pólos

Dado  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  de ordem  $N$ ,

$$H(z) = \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_N z^N}{1 + d_1 z + \dots + d_N z^N}. \quad (5.5)$$

segue da Propriedade 2.2 que o conjunto formado pelas  $N$  funções de transferência de controlabilidade  $\zeta_k(z)$  e pelas funções  $z^k \overline{D}(z)/D(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , constituem uma base ortonormal para  $\mathcal{H}_2$ . Considerando  $\widehat{H}(z) = B(z)/A(z) \in \mathcal{H}_2$  então  $V(z) = \overline{A}(z)/A(z) \in \mathcal{H}_2$ .

Portanto  $V(z)$  pode ser escrito em termos daquela base como

$$V(z) = \sum_{k=1}^N \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle \zeta_k(z) + \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\overline{D}(z)}{D(z)} \quad (5.6)$$

$$= \sum_{k=1}^N \alpha_k \zeta_k(z) + \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\overline{D}(z)}{D(z)}, \quad \frac{P(z)}{Q(z)} \in H_2. \quad (5.7)$$

Nesta expressão, sempre podemos fazer  $Q(z) = A(z)$ , sendo que raízes comuns de  $A(z)$  e  $D(z)$  são supérfluas em  $Q(z)$  mas serão canceladas por  $P(z)$ . Da expressão geral para funções de transferência de controlabilidade (2.15) resulta que as funções  $\zeta_k(z)$  têm a forma

$$\zeta_k(z) = \frac{R_k(z)}{D(z)}, \quad \deg[R_k(z)] < N.$$

Podemos então re-escrever (5.6) como

$$\overline{A}(z)D(z) = R(z)A(z) + P(z)\overline{D}(z), \quad (5.8)$$

onde  $R(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k R_k(z) = r_0 + r_1 z + \dots + r_{N-1} z^{N-1}$ . Temos também  $\deg[\overline{A}(z)] = M$ ,  $\deg[D(z)] \leq N$ ,  $\deg[R_k(z)] < N$ ,  $\deg[A(z)] \leq M$  e  $\deg \overline{D}(z) = N$ . Segue que  $\deg[P(z)] \leq M$ .

### 5.2.1 Conversão a partir dos parâmetros da forma direta

Dado  $\overline{A}(z)$ , obtemos os parâmetros  $\alpha_k$  diretamente de sua definição na Proposição 5.1. Alternativamente, (5.8) dá o sistema com  $N + M + 1$  equações e incógnitas

$$\begin{bmatrix} \Theta_A \Phi_R & \Theta_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \rho \end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

onde

$$\Theta_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & a_1 & 0 & \\ a_M & \vdots & 1 & \\ 0 & a_M & a_1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_M & \end{bmatrix}, \quad \Phi_R = \begin{bmatrix} R_{1,0} & R_{2,0} & \dots & R_{M,0} \\ R_{1,1} & R_{2,1} & & R_{M,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{1,M-1} & R_{2,M-1} & \dots & R_{M,M-1} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{\bar{D}} = - \begin{bmatrix} d_M & 0 & \dots & 0 \\ d_{M-1} & d_M & & \vdots \\ \vdots & d_{M-1} & 0 & \\ 1 & \vdots & d_M & \\ 0 & 1 & d_{M-1} & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix},$$

e  $\rho$  e  $\mathbf{c}$  têm os coeficientes de  $P(z)$  e  $\bar{A}(z)D(z)$ , respectivamente. Notamos que se  $\hat{H}(z) = H(z)$  então  $\alpha = 0$ .

### 5.2.2 Conversão para os parâmetros da forma direta

Dado que  $A(z)$  tem a forma  $1 + a(z)$ ,  $\bar{A}(z)$  tem a forma  $z^M + z^M a(z^{-1}) = z^M + \bar{a}(z)$ , e segue de (5.8) que

$$\bar{a}(z)D(z) - a(z)R(z) - P(z)\bar{D}(z) = R(z) - z^M D(z). \quad (5.9)$$

Isto dá o sistema de  $N + M + 1$  equações e  $2M + 1$  incógnitas

$$\begin{bmatrix} \Theta_D - \Theta_R \Pi & -\Theta_{\bar{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \rho \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

onde

$$\theta_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & d_1 & 0 & \\ d_M & \vdots & 1 & \\ 0 & d_M & d_1 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & d_M \end{bmatrix}, \quad \theta_R = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & r_0 \\ \vdots & & r_o & r_1 \\ 0 & r_1 & 0 & \\ r_0 & \dots & \vdots & \\ r_1 & & r_{M-1} & r_{M-1} \\ \vdots & & & \\ r_{M-1} & 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

$\Pi$  é a matriz anti-diagonal de permutação e  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  contêm os coeficientes de  $\bar{a}(z)$  e  $R(z) - z^M D(z)$ , respectivamente. Pode não haver uma solução para o sistema quando  $M < N$ . A existência de um número infinito de soluções é discutido adiante.

### 5.2.3 Exemplo numérico

Consideremos  $H(z^{-1})$  com polos em  $0.7\angle\pm60^\circ$  e  $0.7\angle\pm100^\circ$ , zeros em  $0.8\angle\pm10^\circ$  e  $0.9\angle\pm5^\circ$  e norma  $L_2$  unitária. Os quadrados dos seus valores singulares de Hankel são  $\sigma_1^2 = 1.45$ ,  $\sigma_2^2 = 0.54$ ,  $\sigma_3^2 = 0.00759$  e  $\sigma_4^2 = 0.00468$ . Fazendo  $\boldsymbol{\alpha} = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^t$  dá  $A(z^{-1})$  com raízes em  $0.73\angle\pm57^\circ$  e  $0.77\angle\pm103^\circ$ . Fazendo  $\boldsymbol{\alpha} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1]^t$  dá  $A(z^{-1})$  com raízes em  $0.74\angle\pm58^\circ$  e  $0.71\angle\pm99.6^\circ$ .

### 5.2.4 Unicidade

Os parâmetros  $\alpha_k$  são unicamente determinados a partir de  $\bar{A}(z)$ . Colocamos o problema inverso como: existe  $\bar{X}(z) = z^L + x_1 z^{L-1} + \dots + x_0 \neq \bar{A}(z)$  tal que, com  $X(z) = z^L \bar{X}(z^{-1})$  e para  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\langle \zeta_k(z), \bar{X}(z)/X(z) \rangle = \langle \zeta_k(z), \bar{A}(z)/A(z) \rangle$ ? Isto equivale a obter as soluções de

$$\left\langle \zeta_k(z), \frac{\bar{A}(z)}{A(z)} - \frac{\bar{X}(z)}{X(z)} \right\rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.10)$$

Soluções não-únicas podem de fato existir: se  $A(z)$  tem raízes no círculo unitário elas também serão raízes de  $\bar{A}(z)$ , cancelando-se em  $\bar{A}(z)/A(z)$ . Estamos interessados, porém, na possibilidade de soluções para sistemas estáveis, isto é, para os quais as raízes de  $\bar{A}(z)$  estão dentro do círculo unitário. Neste âmbito, temos:

**Proposição 5.2** Dados  $\alpha_k$  e  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  com  $\deg[H(z)] = N \geq M$ , existe no máximo um  $\bar{A}(z)$ ,  $\deg[\bar{A}(z)] = M$ , com todas as raízes dentro do círculo unitário, tal que

$$\left\langle \zeta(z), \frac{\bar{A}(z)}{A(z)} \right\rangle = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

*Prova:* Um vetor de funções de transferência de controlabilidade pode ser formado agrupando as funções  $\zeta_k(z) = R_k(z)/D(z)$ . Da Propriedade 2.1 e de (5.10) resulta então a condição

$$\frac{\bar{A}(z)}{A(z)} - \frac{\bar{D}(z)}{D(z)} = q(z) \frac{\bar{D}(z)}{D(z)}, \quad (5.11)$$

com  $q(z)$ ,  $\bar{A}(z)/A(z)$ ,  $\bar{D}(z)/D(z) \in \mathcal{H}_2$ . O lado direito desta expressão tem ao menos  $N$  raízes dentro do círculo unitário, enquanto que o lado esquerdo tem no máximo um total de  $M + L$  raízes. Agora:

- 1) Se  $L \leq M < N$  ou  $L < M \leq N$ , então  $M + L < N$  e (5.11) implica em  $q(z) \equiv 0$ , o que dá  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ . Se  $\bar{A}(z)$  não tem raízes no círculo unitário então, para  $L = M$ , a única solução é  $X(z) = A(z)$ , enquanto que para  $L < M$  não há solução. Se  $\bar{A}(z)$  tem raízes no círculo unitário, estas também serão raízes de  $A(z)$  e poderá existir um  $X(z)$ , ou possivelmente um número infinito deles, tais que  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ .
- 2) Se  $M < L \leq N$  ou  $M \leq L < N$ , também resulta  $q(z) \equiv 0$  e  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ . Se restringirmos  $X(z)$  a não ter raízes no círculo unitário então a única solução é  $X(z) = A(z)$ .
- 3) Se  $L = M = N$ , então  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$  tem  $2N$  raízes. Devido à simetria da expressão, cada raiz  $z_0$  com  $|z_0| < 1$  forma um par com outra raiz  $1/z_0$ . Além disto, como os coeficientes são reais, cada raiz complexa  $z_0$  com  $|z_0| = 1$  forma um par com uma raiz conjugada  $z_0^*$ . Agora,  $z = 1$  é sempre uma raiz de  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$  e não recai em nenhum destes casos. Para completar as  $2N$  raízes, então, deve formar um par com uma raiz em  $z = 1$  ou em  $z = -1$ . Isto significa que  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$  tem no máximo  $N - 1$  raízes dentro do círculo unitário. Portanto, se  $q(z) \neq 0$ , das  $N$  raízes de  $\bar{D}(z)$  ao menos uma está fora ou sobre o círculo unitário, o que contradiz o pressuposto inicial  $H(z) \in \mathcal{H}_2$ . Devemos ter, portanto,  $q(z) \equiv 0$ , o que nos traz de volta ao caso 1). ■

### 5.3 Aplicação da parametrização

A parametrização dos pólos de  $\hat{H}(z)$  apresentada acima não será usada para, de fato, implementar um filtro adaptativo, apesar de eventualmente haver algum interesse neste sentido.

Como será visto no capítulo seguinte, ela será usada como forma de descrever e analisar a adaptação dos parâmetros das estruturas direta e em treliça consideradas no Capítulo 3.

# Capítulo 6

## Análise da velocidade de convergência

Neste capítulo, usamos a parametrização dos pólos introduzida no capítulo anterior para a análise da velocidade de convergência de métodos de gradiente para aproximação racional  $L_2$ . A motivação para isto é a expectativa de que as propriedades obtidas sejam relevantes para o problema de filtragem adaptativa IIR, como, por exemplo, na relação entre os algoritmos “steepest-descent” e LMS, no âmbito de filtragem adaptativa FIR [26].

É de interesse explicitar a terminologia adotada: dado que são considerados métodos iterativos de aproximação racional, dizemos que os parâmetros de  $\hat{H}(z)$  são “adaptados”. Isto não significa que se trata de um problema de filtragem adaptativa.

### 6.1 Adaptação na superfície de erro reduzida

A adaptação dos parâmetros dos zeros e dos pólos pelo gradiente do erro quadrático tem a forma

$$p_k(n+1) = p_k(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial p_k} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 \Big|_{\mathbf{p}(n)}, \quad (6.1)$$

onde  $\mathbf{p}$  contém os parâmetros dos zeros e dos pólos de  $\hat{H}(z)$ . Se considerarmos que a adaptação dos zeros é tornada implícita e adaptarmos os pólos usando o gradiente do erro quadrático na superfície de erro reduzida (ver Seção 2.6), a adaptação tem a forma

$$w_k(n+1) = w_k(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \|g(z)\|^2}{\partial w_k} \Big|_{\mathbf{w}(n)}, \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{w} = [w_1 \dots w_M]^t$  contém os parâmetros dos pólos.

Notamos que se os zeros de  $\hat{H}(z)$  estiverem em seus valores ótimos dados os pólos de

$\widehat{H}(z)$ , então a adaptação dos pólos dada por (6.1) é igual à dada por (6.2). Isto é formalizado na seguinte proposição:

**Proposição 6.1** Quando os zeros de  $\widehat{H}(z)$  estão em seus valores ótimos dados os pólos de  $\widehat{H}(z)$ , as derivadas de  $\|\mathbf{g}(z)\|^2$  e  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  em relação aos parâmetros dos pólos coincidem, isto é:

$$\left. \frac{\partial \|\mathbf{g}(z)\|^2}{\partial w_i} \right|_{\mathbf{w}} = \left. \frac{\partial}{\partial w_i} \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2 \right|_{\mathbf{w}, \mathbf{r}(\mathbf{w})},$$

onde  $\mathbf{r}(\mathbf{w})$  contém os parâmetros ótimos dos zeros dados os parâmetros dos pólos  $\mathbf{w}$ .

*Prova:* Escrevemos  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2 = \epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})$  e  $\|\mathbf{g}(z)\|^2 = \varepsilon(\mathbf{w})$ , onde  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{w}$  contêm, respectivamente, os parâmetros dos zeros e dos pólos. Como definido, quando  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\mathbf{w})$  os parâmetros dos zeros são otimizados dados os pólos. Notamos de início que embora

$$\varepsilon(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) = \epsilon(\mathbf{r}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}), \mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$$

em geral temos

$$\varepsilon(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) \neq \epsilon(\mathbf{r}(\mathbf{w}), \mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$$

e, portanto a validade da proposição não é imediata.

Quando  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\mathbf{w})$ ,  $\partial\epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})/\partial q_i = 0$  e as derivadas de interesse são

$$\left. \frac{\partial\epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})}{\partial w_i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{r}(\mathbf{w})}.$$

Por simplicidade de notação, consideramos parâmetros escalares, sem perda de generalidade na conclusão. Escrevemos inicialmente  $\partial\varepsilon(w)/\partial w = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \Delta\varepsilon(w)/\Delta w$ , onde  $\Delta\varepsilon(w) \triangleq \varepsilon(w + \Delta w) - \varepsilon(w)$ . Definindo  $\Delta\epsilon(r(w), w) \triangleq \epsilon(r(w + \Delta w), w + \Delta w) - \epsilon(r(w), w)$ , e como, por definição,  $\varepsilon(w) = \epsilon(r(w), w)$ , segue que

$$\Delta\varepsilon(w) = \Delta\epsilon(r(w), w) \quad (6.3)$$

Escrevendo agora  $r(w + \Delta w) = r(w) + \Delta r$  e assumindo que  $\epsilon(q, w)$  é uma função suave,  $\Delta\epsilon$  pode ser expandido em série de Taylor como

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon &= \epsilon(r(w) + \Delta r, w + \Delta w) - \epsilon(r(w), w) \\ &= \left. \frac{\partial\epsilon(q, w)}{\partial w} \right|_{w, q=r(w)} \Delta w + \underbrace{\left. \frac{\partial\epsilon(q, w)}{\partial q} \right|_{w, q=r(w)}}_{=0} \Delta r + \sum_{n, m=0}^{\infty} d_{n, m} \Delta w^n \Delta r^m. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Assumindo que  $r(w)$  também é uma função suave temos  $\Delta r = \sum_i \frac{1}{i!} (\partial^i r(w)/\partial w^i) \Delta w^i$ . Usando isto, a somatória dupla em (6.4) pode ser escrita como

$$\sum_{\substack{n,m=0 \\ n+m>1}}^{\infty} d_{n,m} \Delta w^n \Delta r^m = \sum_{n=2}^{\infty} d'_n \Delta w^n,$$

que combinado com (6.3) e (6.4) leva finalmente a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(w)}{\partial w} &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon(w)}{\Delta w} \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w} \left[ \frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial w} \Big|_{q=r(w)} \Delta w + \sum_{n=2}^{n=\infty} d''_n \Delta w^n \right] \\ &= \frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial w} \Big|_{q=r(w)}. \end{aligned}$$

■

## 6.2 Reparametrização da adaptação baseada no gradi- ente

No que segue, usamos termos que dependem de certos parâmetros, que, por sua vez podem ser variantes no tempo. Poderemos referirmo-nos a eles como em  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}(n))$ ,  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha})$  ou  $\mathbf{J}(n)$  e, para simplicidade notacional, poderemos também omitir o argumento, como em  $\mathbf{J}$ . Em todos os casos, porém, a cadeia completa de dependências é admitida implicitamente.

Retornamos agora a (6.2). Para maior conveniência, usamos  $\varepsilon = \|g(z)\|^2$  no que segue. Aplicando a lei da cadeia temos

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{w}} \right)^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{J}^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (6.5)$$

onde  $\partial \boldsymbol{\alpha}/\partial \mathbf{w} \triangleq \mathbf{J}$  é uma matriz Jacobiana  $N \times M$  de derivadas parciais, com  $\partial \alpha_i/\partial w_j$  na linha  $i$  e coluna  $j$ . Nos referimos a ela como a “matriz de sensitividade”. Notamos que, por enquanto, a forma específica de parametrizar os pólos não foi definida, sendo que os termos  $w_j$  empregados são uma designação genérica dos parâmetros.

**Proposição 6.2** *Para um conjunto adequado de parametrizações dos pólos, se  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  então  $\mathbf{J}$  tem posto  $M$ .*

*Prova:* Para os parâmetros da forma direta de implementação, os elementos de  $\mathbf{J}$  são

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial a_j} = \left\langle \zeta_i(z), \frac{\partial}{\partial a_j} V(z) \right\rangle,$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial a_j} V(z) = \frac{z^{M-j} A(z) - z^j \bar{A}(z)}{A^2(z)}.$$

Definindo  $X(z) \triangleq \sum_{j=1}^M x_i z^j$ ,  $\bar{X}(z) \triangleq z^M X(z^{-1})$  e  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^t$ , os elementos de  $\mathbf{J}\mathbf{x}$  são dados por

$$[\mathbf{J}\mathbf{x}]_i = \left\langle \zeta_i(z), \frac{\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z)}{A^2(z)} \right\rangle.$$

Com a Propriedade 2.1 se  $\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  temos então

$$\frac{\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z)}{A^2(z)} = q(z) \frac{\bar{D}(z)}{D(z)}, \quad (6.6)$$

para algum  $q(z) \in \mathcal{H}_2$ . Isto tem, essencialmente, a mesma forma da equação (5.11). Pelos argumentos apresentados em relação àquela equação se  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  e  $M \leq N$  então  $\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z) \equiv 0$ . Agora, para satisfazer isto não podemos ter  $X(z) = A(z)$ , uma vez que  $X(z)$  é estritamente causal e  $A(z)$  não é. Devemos ter, portanto,  $X(z) \equiv 0$ . Concluímos que  $\mathbf{J}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  exige  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , isto é,  $\mathbf{J}$  tem posto  $M$ . Isto se estende para outras parametrizações que dão uma matrix  $[\mathbf{J}_{wa}]_{ij} = \partial w_i / \partial a_j$  não-singular. ■

Prosseguindo, de (5.3), temos  $\partial \varepsilon / \partial \alpha_j = 2 \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \alpha_k$ . Em notação matricial isto pode ser escrito como

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 2 \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}, \quad (6.7)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}$  é diagonal, com os valores singulares  $\sigma_k$ . Combinando (6.5) e (6.7), podemos escrever o gradiente em termos dos parâmetros  $\alpha_k$  como

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} = 2 \mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}, \quad (6.8)$$

o que será usado em seguida.

Consideremos agora a aproximação de primeira ordem para  $\boldsymbol{\alpha}(n+1)$ ,

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1) \approx \boldsymbol{\alpha}(n) + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\boldsymbol{\alpha}(n)}}_{=\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}(n))} [\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)]. \quad (6.9)$$

Combinando isto com (6.2) e (6.8) leva a:

**Proposição 6.3** Uma descrição local da adaptação (6.2), inteiramente em termos dos parâmetros  $\alpha_k$ , é

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1) \approx [\mathbf{I} - \mu \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}(n)) \mathbf{J}^t(\boldsymbol{\alpha}(n)) \boldsymbol{\Sigma}^2] \boldsymbol{\alpha}(n). \quad (6.10)$$

Isto se aplica para qualquer  $\boldsymbol{\alpha}(n)$ , não tendo sido adotado nenhum pressuposto de que  $\boldsymbol{\alpha}(n)$  seja um ponto estacionário da adaptação.

A equação (6.10) é similar ao que é obtido para a adaptação pelo gradiente determinístico no caso FIR, sendo que autovalores de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2$ , que são sempre não-negativos, fazem o papel dos autovalores da matriz de correlação da entrada.

A principal característica de (6.10) é a separação parcial do efeito do sistema sendo identificado, que afeta  $\boldsymbol{\Sigma}$  e  $\mathbf{J}$ , e o efeito da parametrização da adaptação, que afeta apenas  $\mathbf{J}$ . Como sugerido por (6.10) também, temos:

**Proposição 6.4** Em pontos estacionários da superfície de erro,  $\boldsymbol{\alpha}$  está no espaço nulo de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2$ .

*Prova:* Da Proposição 6.2,  $\mathbf{J}$  tem posto  $M$ , assumindo  $H(z) \in \mathcal{H}_2$ . Portanto, os espaços nulos de  $\mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2$  e  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2$  são iguais. Em pontos estacionários temos, por definição,  $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Com (6.8), então,  $\boldsymbol{\alpha}$  está naquele espaço nulo. ■

Notamos que na aproximação de primeira ordem dada por (6.10), as componentes de  $\boldsymbol{\alpha}(n)$  que estão no espaço nulo de  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}(n)) \mathbf{J}^t(\boldsymbol{\alpha}(n)) \boldsymbol{\Sigma}^2$  não contribuem para  $\boldsymbol{\alpha}(n+1)$ . Desta forma, a análise da velocidade de convergência, em uma aproximação de primeira ordem, diz respeito apenas aos autovalores não-nulos de  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}(n)) \mathbf{J}^t(\boldsymbol{\alpha}(n)) \boldsymbol{\Sigma}^2$ .

### 6.3 Velocidade local de convergência

Uma medida conveniente da velocidade local de convergência é dada pela relação  $\varepsilon(n)/\varepsilon(n+1)$ , sendo que, de (5.3) temos que

$$\frac{\varepsilon(n)}{\varepsilon(n+1)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^t(n) \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}(n)}{\boldsymbol{\alpha}^t(n+1) \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}(n+1)}.$$

Com (6.10), portanto, se  $\boldsymbol{\alpha}(n)$  está na direção de um certo autovetor  $\mathbf{q}_k$  de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t \boldsymbol{\Sigma}^2$ , temos, abandonando o índice de tempo no lado direito da expressão,

$$\frac{\varepsilon(n)}{\varepsilon(n+1)} \approx \frac{\boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha} - 2\mu \lambda_k \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha} + \mu^2 \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\Sigma}^2 \boldsymbol{\alpha}} = (1 - \mu \lambda_k)^{-2},$$

onde  $\lambda_k$  é o autovalor associado a  $\mathbf{q}_k$ . Se  $\mu\lambda_k \ll 1$ , então a velocidade de convergência local será pequena, isto é, próxima de 1.

Em relação a isto, mostramos em [24] que se a adaptação levar os parâmetros para uma região do tipo “fundo de vale” do espaço dos parâmetros adaptados (como tende a ocorrer, quando a adaptação é pelo gradiente), então  $\alpha(n)$  estará essencialmente no subespaço dos autovetores de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  associados aos seus menores (não-nulos) autovalores.

Dado o passo de adaptação  $\mu$ , portanto, a velocidade de convergência local é diretamente relacionada com os menores (não-nulos) autovalores de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$ . Seus maiores autovalores, por outro lado, têm um efeito no máximo passo de adaptação permitido para a estabilidade. Uma grandeza importante, portanto, é o espalhamento dos autovalores

$$\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2) \triangleq \frac{\max\{\lambda(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2)\}}{\min\{\lambda(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2)\}},$$

onde  $\lambda(\cdot)$  indica o autovalor do argumento e  $\min\{\cdot\}$  leva em conta somente os autovalores não-nulos. Um limite superior útil para a análise deste espalhamento é

$$\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2) \leq \chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)\chi(\Sigma^2).$$

## 6.4 Efeito dos valores singulares de $H(z)$

O efeito dos valores singulares de Hankel de  $H(z)$  em  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)\chi(\Sigma^2)$  é imediato. Se têm um grande espalhamento, então  $\chi(\Sigma^2) \gg 1$ , assim como  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)\chi(\Sigma^2) \gg 1$  e a velocidade de convergência local provavelmente será pequena. Ela não será pequena apenas se o valor elevado de  $\chi(\Sigma^2)$  for compensado por  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$ , como o que ocorreria se  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t = (\Sigma^2)^{-1}$ . Se os valores singulares têm um pequeno espalhamento, que assumirá seu valor mínimo quando  $H(z)$  é passa-tudo, então  $\Sigma^2 \approx \mathbf{I}$  e a velocidade local de convergência dependerá essencialmente de  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$ .

## 6.5 Propriedades relacionadas à matriz de sensibilidade $\mathbf{J}$

Para analisar  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$ , fazemos uso das funções de controlabilidade

$$\xi_k(z) = \frac{\widehat{D}_{k-1}(z)}{D(z)}$$

de uma realização em treliça de  $H(z) = C(z)/D(z)$ , ao invés das funções  $\zeta_k(z)$ . De maneira análoga a  $\alpha_k$  definimos

$$\gamma_k \triangleq \langle \xi_k(z), V(z) \rangle,$$

e estendemos nossa notação para incluir mais possibilidades:

$$[\mathbf{J}_{\alpha w}]_{i,j} \triangleq \frac{\partial \alpha_i}{\partial w_j} \text{ e } [\mathbf{J}_{\gamma w}]_{i,j} \triangleq \frac{\partial \gamma_i}{\partial w_j}.$$

onde  $w_j$  será substituído pelo símbolo associado a uma parametrização específica.

As proposições a seguir são demonstradas em [24].

**Proposição 6.5**  $\chi(\mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t) = \chi(\mathbf{J}_{\gamma w} \mathbf{J}_{\gamma w}^t)$  depende dos pólos de  $H(z)$  e não de seus zeros.

Notamos que esta propriedade não depende da parametrização adotada. E também, que há aí uma complementaridade interessante:  $\chi(\Sigma^2)$  depende, em um certo sentido, somente da posição relativa dos pólos e zeros, uma vez que se os zeros forem recíprocos dos pólos, então  $\chi(\Sigma^2) = 1$ .

As proposições restantes se aplicam apenas ao caso de modelamento suficiente, isto é, quando  $H(z)$  é racional de ordem  $M$ , e ainda, apenas para ponto de mínimo do espaço de parâmetros, isto é, no qual  $\widehat{H}(z) = H(z)$ . Notamos que embora a solução do problema de aproximação racional  $L_2$  no caso de modelamento suficiente seja trivial ( $\widehat{H}(z) = H(z)$ ), há interesse em analisar o comportamento de métodos baseados no gradiente neste caso devido à utilidade dos resultados analíticos para filtragem adaptativa IIR.

A extensão das propriedades deduzidas ao caso mais geral de submodelamento é discutida por nós em [25].

**Proposição 6.6** Para os parâmetros da estrutura direta, temos, no ponto de mínimo  $\widehat{H}(z) = H(z)$ ,

$$\mathbf{J}_{\gamma a}^{-1} = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{S}_{dl}^t, \quad (6.11)$$

onde  $\boldsymbol{\Pi}$  é a matriz anti-diagonal de permutação e  $\mathbf{S}_{dl}^t \triangleq \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{d}}_0 & \widehat{\mathbf{d}}_1 & \dots & \widehat{\mathbf{d}}_{M-1} \end{bmatrix}$ , onde a  $k$ -ésima coluna tem os coeficientes de  $\widehat{D}_{k-1}(z)$ .

Disto segue um caso particular de interesse:

**Proposição 6.7** Se  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$  então  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = 1$ .

No caso geral, uma vez que as funções  $\xi_k(z) = \widehat{D}_k(z)/D(z)$  formam um conjunto ortonormal, escrevendo a expressão para  $\langle \xi_i(z), \xi_j(z) \rangle$  no domínio da frequência, podemos ver que se  $1/|D(e^{j\omega})|^2$  é quase constante então as funções  $\widehat{D}_k(z)$  são quase um conjunto ortogonal e  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) \approx 1$ . Isto acontece, por exemplo, quando os pólos de  $H(z)$  são mais uniformemente separados, ao invés de concentrados em um certo ponto. Acontece também quando os recíprocos dos pólos estão mais próximos à origem ao invés do círculo unitário.

No caso dos parâmetros da treliça normalizada, podemos escrever  $\mathbf{J}_{\gamma \theta} = \mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{a \theta}$ , com  $[\mathbf{J}_{a \theta}]_{i,j} \triangleq \partial a_i / \partial \theta_j$ . Em [24] mostramos então que

$$\chi(\mathbf{J}_{\gamma \theta} \mathbf{J}_{\gamma \theta}^t) = \chi(\mathbf{J}_{a \theta}^{-1} \mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl} \mathbf{J}_{a \theta}^{-t}), \quad (6.12)$$

e também:

**Proposição 6.8** *No ponto de mínimo  $\widehat{H}(z) = H(z)$ ,*

$$\mathbf{J}_{a \theta} = \begin{bmatrix} \times & \dots & \times & \widehat{d}_{M-1,0} \\ \vdots & & \vdots & \widehat{d}_{M-1,1} \\ \times & \dots & \times & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \widehat{d}_{M-1,M-1} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

onde a última linha e a última coluna são iguais às de  $\mathbf{S}_{dl}^t$ .

Se esta forma da última coluna se aplicasse às outras colunas, então  $\mathbf{J}_{a \theta} = \mathbf{S}_{dl}^t$  e, de (6.12),  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma \theta} \mathbf{J}_{\gamma \theta}^t) = 1$ . Embora este não seja, em geral, o caso, constatamos que é mais provável que  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma \theta} \mathbf{J}_{\gamma \theta}^t) < \chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t)$  do que o oposto, especialmente para valores maiores de  $M$ .

## 6.6 Casos especiais e limites para o espalhamento dos autovalores de $\mathbf{J}\mathbf{J}^t$

No caso de segunda ordem, escrevemos  $D(z) = 1 + \nu z + s\rho^2 z^2$ , com  $s = \pm 1$  e  $0 \leq \rho < 1$ . Para ordens maiores, consideramos dois casos:  $D(z) = (1 + s\rho z)^M$ , que tem  $M$  raízes concentradas em  $-s\rho^{-1}$  e  $D(z) = 1 + s\rho^M z^M$ , que tem  $M$  raízes de raio  $\rho^{-1}$ , uniformemente separadas. Como será visto, estes dois casos têm propriedades limitantes em relação a um  $D(z)$  qualquer. Expressões obtidas para o espalhamento dos autovalores de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t$  nestes casos

	$1 + \nu z + s\rho^2 z^2$	$1 + s\rho^M z^M$	$(1 + s\rho z)^M, \rho \approx 1$	$\forall D(z)$
Direct	$\frac{1 + s\rho^2 +  \nu }{1 + s\rho^2 -  \nu }$	1	$\approx M \frac{\ \widehat{D}_{M-1}(z)\ ^2}{\ \widehat{D}_0(z)\ ^2}$ $\approx \frac{M \sum_j \binom{M-1}{j}^2}{\prod_i \cos^2 \theta_i}$	$\leq M \frac{\ \widehat{D}_{M-1}(z)\ ^2}{\ \widehat{D}_0(z)\ ^2}$
Lattice	$\frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2}$	$\left(\frac{1 + \rho^M}{1 - \rho^M}\right)^2, M > 2$	-	-

Tabela 6.1: Espalhamento dos autovalores em alguns casos especiais de  $D(z)$ ,  $s = \pm 1$ ,  $0 \leq \rho < 1$

especiais estão na Tabela 6.1. Para alguns casos, a forma do espalhamento quando  $\rho \approx 1$  está na Tabela 6.2. Pode-se ver que é sempre  $C(M)(1 - \rho)^{-E}$ , onde  $C(M)$  depende de  $M$  mas não depende de  $\rho$ .

	$1 + s\rho^M z^M$	$(1 + s\rho z)^M$
Direct	1	$C(M)(1 - \rho)^{-2(M-1)}$
Lattice	$C(M)(1 - \rho)^{-1}, M = 2$ $C(M)(1 - \rho)^{-2}, M > 2$	$C(M)(1 - \rho)^{-1}$

Tabela 6.2: Forma do espalhamento dos autovalores para  $0 \leq \rho \approx 1$ ,  $s = \pm 1$

Para a forma direta, se  $D(z) = 1 + s\rho^M z^M$  então  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = 1$ , que é o limite inferior para o espalhamento. No caso de segunda ordem (ainda para forma direta), se  $D(z) = (1 \pm \rho z)^2$  então, da Tabela 6.1,  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = (1 + \rho)^2 / (1 - \rho)^2$ , o que, dado  $\rho \geq 0$ , é um limite superior para o espalhamento resultante de outros  $D(z)$ . Verificamos que, mesmo para  $M > 2$ , o caso  $D(z) = (1 + s\rho z)^M$  fornece um limite superior para o espalhamento.

Para a treliça normalizada de segunda ordem, diferentemente da forma direta, podemos ver na Tabela 6.1 que o espalhamento só depende de  $\rho$ . Para  $D(z) = 1 + s\rho^2 z^2$ , nunca será menor do que para a forma direta, caso em que é igual a 1. Por outro lado, como visto na Tabela 6.2, para  $D(z) = (1 + s\rho z)^2$  o espalhamento cresce mais lentamente do que para a forma direta, quando  $\rho$  tende a 1. Para  $D(z) = 1 + s\rho^M z^M$ ,  $M > 2$ , o expoente  $E$  não cresce com  $M$ . O mesmo ocorre para  $D(z) = (1 + s\rho z)^M$ , diferentemente da forma direta, para a qual  $E = 2(M - 1)$ .

## 6.7 Aplicação à filtragem adaptativa e resumo das propriedades

Nos algoritmos de filtragem adaptativa considerados nos capítulos anteriores, os parâmetros dos zeros e dos polos são adaptados. É necessário, portanto, justificar o uso para filtragem adaptativa dos resultados deste capítulo, que se referem à adaptação (no âmbito de aproximação racional) apenas dos parâmetros dos pólos, sendo implícita a otimização analítica dos zeros.

Neste sentido, notamos que quando a adaptação geral é lenta, a adaptação dos zeros do filtro adaptativo é, localmente, quase como a adaptação para uma entrada  $\frac{1}{A(z)}u(n)$ , com  $A(z)$  fixo. Para  $u(n)$  branco, portanto, os zeros convergem rapidamente aos seus valores ótimos dados os pólos do filtro adaptativo se a matriz de autocorrelação de  $\frac{1}{A(z)}u(n)$  for bem condicionada [26], o que exige que estes pólos não estejam muito próximos à circunferência unitária. Agora, na prática (por exemplo, as simulações no Capítulo 4), vemos que em pontos de convergência lenta os pólos não estão necessariamente próximos à circunferência unitária. Portanto, a adaptação dos zeros é em geral rápida, levando-os para as proximidades de seus valores ótimos dados os pólos, como exemplificado na Seção 4.3.

Com esta justificativa em mente, podemos então, com base na análise da velocidade local de convergência (em aproximação racional  $L_2$ ) apresentada neste capítulo, interpretar os resultados dos exemplos numéricos de filtragem adaptativa IIR do Capítulo 4.

A matriz  $\Sigma$  de valores singulares de Hankel depende essencialmente da posição relativa dos pólos e zeros de  $H(z)$  e não depende da parametrização escolhida. Com pólos e zeros distribuídos genericamente (como os exemplos numéricos  $H_1(z)$  e  $H_3(z)$  do Capítulo 4), o espalhamento dos valores singulares tende a crescer com a ordem de  $H(z)$ . Por outro lado, quando os zeros são recíprocos dos pólos,  $H(z)$  é passa-tudo (como em  $H_2(z)$  e  $H_4(z)$ ) e todos seus valores singulares são iguais. Neste caso, a velocidade local de convergência depende apenas do espalhamento dos autovalores do gramiano  $\mathbf{JJ}^t$ .

Este espalhamento, por sua vez, depende da parametrização escolhida, dos valores específicos assumidos por estes parâmetros e dos pólos de  $H(z)$ , não dos seus zeros. No que segue assumimos que os parâmetros estão próximos ao mínimo global. Para os parâmetros da forma direta, o espalhamento dos autovalores de  $\mathbf{JJ}^t$  é pequeno quando os pólos estão pouco concentrados (como em  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$ ). Em particular, quando os pólos são as raízes

de  $D(z) = 1 \pm \rho^N z^N$  temos  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t = \mathbf{I}$ . Por outro lado, quando os pólos estão mais concentrados (como em  $H_3(z)$  e  $H_4(z)$ ) o espalhamento cresce rapidamente. Para os parâmetros da estrutura em treliça normalizada, o espalhamento de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t$  não é tão sensível ao posicionamento dos pólos, podendo ser relativamente pequeno mesmo para pólos mais concentrados.

Estas propriedades estão sintetizadas na Tabela 6.3. Como será visto no capítulo seguinte, o algoritmo adaptativo proposto em [23] é baseado nelas: de modo a alcançar maior velocidade de convergência, usa-se a estrutura em treliça em conjunto com um bloco auxiliar que busca tornar  $H(z)$  um sistema passa-tudo.

	$H(z) \approx$ passa-todo	$H(z) \not\approx$ passa-todo
<b>Forma direta</b>	Rápida se pólos espalhados Lenta se pólos concentrados	Lenta
<b>Treliça</b>	Rápida	Lenta

Tabela 6.3: Velocidade de convergência. No caso passa-todo, válido próximo ao mínimo global.

# Capítulo 7

## Algoritmos de aproximações sucessivas

Na primeira parte deste capítulo, apresentamos um aprofundamento dos aspectos mais teóricos do algoritmo de filtragem adaptativa IIR proposto em [23]. Na segunda parte, abordamos a perspectiva de sua utilização no lugar de filtros adaptativos FIR.

Os aspectos discutidos neste capítulo fazem parte da pesquisa em andamento do autor. Há, portanto, mais pontos em aberto do que em relação aos tópicos discutidos nos capítulos anteriores.

### 7.1 Aproximação racional sucessiva

De início, consideremos novamente o problema de aproximação racional  $L_2$ . Métodos baseados no gradiente do erro quadrático podem convergir lentamente, como visto no Capítulo 6. Como uma tentativa de acelerar a convergência, um procedimento alternativo a buscar diretamente  $\hat{H}(z)$  de grau  $M$  que minimiza  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|^2$  seria:

1. Buscar  $\hat{H}_b(z)$  de que minimiza  $\|H(z) - H_a(z) - \hat{H}_b(z)\|^2$ , onde  $H_a(z)$  é uma função auxiliar escolhida em função de uma estimativa inicial  $\hat{H}(z)$  de  $H(z)$ .
2. Com  $\hat{H}_b(z)$  obtido no passo anterior, buscar  $\hat{H}'(z)$  que minimiza  $\|\hat{H}'(z) - H_a(z) - \hat{H}_b(z)\|^2$ . Com este  $\hat{H}'(z)$  obter um novo  $H_a(z)$  e retornar ao passo 1.

Assume-se que  $\deg[H_a(z)] = \deg[H_b(z)] = M$ . O objetivo é que  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 > \|H(z) - \hat{H}'(z)\|^2 > \|H(z) - \hat{H}''(z)\|^2 > \dots$ , e que o decaimento do erro seja mais rápido do que ao

buscar minimizar diretamente  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ .

### 7.1.1 Pontos estacionários

Antes de considerar a obtenção deste objetivo, uma questão que se coloca é: um ponto estacionário do erro quadrático  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  é um ponto estacionário deste algoritmo? Isto é, se  $\widehat{H}(z)$  é um ponto estacionário do erro quadrático, então  $\widehat{H}'(z) = \widehat{H}(z)$ ?

Podemos responder esta pergunta para o caso ideal em que em cada etapa definida acima sejam encontrados pontos estacionários dos erros quadráticos correspondentes, o que denominaremos de “aproximação racional sucessiva ideal”:

**Proposição 7.1** *Se  $\widehat{H}(z)$  é um ponto estacionário de  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ ,  $H_a(z)$  é escolhido com os mesmos pólos que  $\widehat{H}(z)$  e  $\widehat{H}_b(z)$  é inicializado com  $\widehat{H}(z) - H_a(z)$ , então  $\widehat{H}(z)$  é um ponto estacionário da aproximação racional sucessiva ideal.*

*Prova:* Notamos de início que com as hipóteses assumidas, no início do Passo 1 temos  $\|H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2 = \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ , ou seja, o erro quadrático que se deseja minimizar neste passo tem, no início da adaptação, o mesmo valor que o fornecido pela estimativa inicial  $\widehat{H}(z)$ . Porém, por si só isto não significa que este ponto seja um ponto estacionário de  $\|H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$ , o que exige as considerações adicionais que seguem. Se a estimativa inicial  $\widehat{H}(z) = B(z)/A(z)$  é um ponto estacionário de  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ , então pela Propriedade 2.4 temos

$$H(z) - \frac{B(z)}{A(z)} = z\left[\frac{\overline{A}(z)}{A(z)}\right]^2 Q(z) \quad (7.1)$$

para algum  $Q(z) \in \mathcal{H}_2$ . Por sua vez, se no Passo 1 do algoritmo for determinado um ponto estacionário  $\widehat{H}_b(z) = B_b(z)/A_b(z)$  de  $\|H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$ , então pela mesma propriedade,

$$H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z) = z\left[\frac{\overline{A}_b(z)}{A_b(z)}\right]^2 q(z) \quad (7.2)$$

para algum  $q(z) \in \mathcal{H}_2$ . Pela hipótese assumida temos que  $H_a(z)$  tem a forma  $E(z)/A(z)$ . Reunindo isto com (7.1) e (7.2) temos então que

$$z\left[\frac{\overline{A}(z)}{A(z)}\right]^2 Q(z) + \frac{B(z) - E(z)}{A(z)} - \widehat{H}_b(z) = z\left[\frac{\overline{A}_b(z)}{A_b(z)}\right]^2 q(z)$$

Com  $Q(z) = q(z)$ , uma solução para esta condição é  $A_b(z) = A(z)$ ,  $B_b(z) = B(z) - E(z)$ , que é a mesma condição imposta pela hipótese de que  $\widehat{H}_b(z)$  é inicializado em  $\widehat{H}(z) - H_a(z)$ .

Temos então que no Passo 1,  $\widehat{H}_b(z)$  é inicializado em um ponto estacionário de  $\|H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$ , e que, portanto, aí permanece. No Passo 2, busca-se um ponto estacionário  $\widehat{H}'(z)$  de  $\|\widehat{H}'(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$ , com  $\widehat{H}_b(z)$  dado pelo Passo 1. Como este valor de  $\widehat{H}_b(z)$  é  $\widehat{H}(z) - H_a(z)$ , busca-se um ponto estacionário de  $\|\widehat{H}'(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ , cuja única solução é  $\widehat{H}'(z) = \widehat{H}(z)$ . ■

Notamos que esta propriedade, com as condições nela definidas, significa que o comportamento da aproximação racional sucessiva atende a um “requisito mínimo” exigido. Ela não garante porém que não existam pontos estacionários do algoritmo que não sejam pontos estacionários do erro quadrático.

A seguir analisamos o comportamento do algoritmo na proximidades de um ponto estacionário do erro quadrático.

### 7.1.2 Passo 1: ajuste para passa-tudo

Consideremos agora o passo 1 do algoritmo. De início, notamos que mesmo no caso de modelamento suficiente de  $\widehat{H}(z)$  em relação a  $H(z)$ , a minimização de  $\|H(z) - H_a(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$  recai, em geral, no caso de submodelamento. Desta forma é mais econômico considerar este caso desde o início. Agora, dado que nosso objetivo final é que os resultados obtidos no âmbito de aproximação racional sejam usados para filtragem adaptativa IIR, justifica-se adotar aqui o pressuposto adotado em [25] de que o sistema sendo identificado tem a forma

$$H(z) = H_m(z) + \delta H_d(z),$$

onde  $H_m(z)$  é racional de ordem  $M$ ,  $\|[H_d(z)]_+\|_\infty = 1$  e  $\delta$  é pequeno. Isto significa que  $H(z)$  tem uma boa aproximação racional de ordem  $M$ , e que, portanto, o problema específico em questão tem maior interesse prático.

Consideremos agora que no passo 1 acima, a partir da estimativa inicial  $\widehat{H}(z) = B(z)/A(z)$ , seja adotado

$$H_a(z) = \frac{B(z) - \overline{A}(z)}{A(z)}.$$

Definindo

$$H_b(z) \triangleq H(z) - H_a(z),$$

temos que se  $\widehat{H}(z) \approx H(z) \approx H_m(z)$  então  $H_b(z)$  é próximo a um sistema passa-tudo de ordem  $M$ , que denominamos  $H_{bm}(z)$ . O objetivo da função auxiliar  $H_a(z)$  é, portanto, ajustar  $H(z)$  para uma função passa-tudo.

Agora, conforme visto em [25], o espalhamento dos  $M$  autovalores do produto  $\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}$  associado à minimização de  $\|H_b(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$  no passo 1 do algoritmo é próximo ao espalhamento dos  $M$  autovalores do produto  $\mathbf{J}_m^t \Sigma_m^2 \mathbf{J}_m$  que seria associado à minimização de  $\|H_{bm}(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$ :

$$\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J} \approx \mathbf{J}_m^t \Sigma_m^2 \mathbf{J}_m.$$

Como  $H_{bm}(z)$  é passa-tudo,  $\Sigma_m^2 = \mathbf{I}$ , e

$$\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J} \approx \mathbf{J}_m^t \Sigma_m^2 \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_m^t \mathbf{J}_m.$$

Portanto, no caso de uma boa estimativa inicial  $\widehat{H}(z)$ , dado que  $H(z)$  foi aproximadamente ajustado para uma função passa-tudo, a velocidade de convergência no passo 1 do algoritmo dependerá essencialmente do espalhamento dos autovalores de  $\mathbf{J}_m^t \mathbf{J}_m$ . Conforme visto no Capítulo 6, este espalhamento tende a ser menor para os parâmetros da estrutura em treliça normalizada do que para os da forma direta.

### 7.1.3 Redução do erro após o passo 1

Com base na discussão acima, consideremos que a minimização de  $\|H_b(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$  converge rapidamente e que, portanto, após um número não muito grande de iterações, na descrição local dada por (6.10) o vetor de parâmetros  $\alpha$  esteja quase que inteiramente no espaço nulo de  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2$ .

Nos interessa saber agora qual é o erro quadrático  $\|H_b(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2$  nesta situação e como ele se relaciona com o erro quadrático  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  associado à estimativa inicial  $\widehat{H}(z)$ . Para tanto, faremos as partições

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_M \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{bmatrix} \Sigma_M^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_R^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_M \\ \alpha_R \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{J}_M$  é uma matriz  $M \times M$ ,  $\Sigma_M^2$  é uma matriz diagonal  $M \times M$  e  $\alpha_M$  é um vetor de dimensão  $M$ . Podemos escrever então

$$\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_M \mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \alpha_M + \mathbf{J}_M \mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \alpha_R \\ \mathbf{J}_R \mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \alpha_M + \mathbf{J}_R \mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \alpha_R \end{bmatrix}.$$

Como o sistema  $H_b(z)$  sendo identificado é próximo a um passa-tudo, temos  $\Sigma_M^2 \approx \mathbf{I}_M$  e  $\Sigma_R^2 \approx 0 \times \mathbf{I}_R$ . Portanto,

$$\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha \approx \begin{bmatrix} \mathbf{J}_M \mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \alpha_M \\ \mathbf{J}_R \mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \alpha_M \end{bmatrix}$$

e se, como assumido,  $\alpha$  está no espaço nulo de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\boldsymbol{\Sigma}^2$  então  $\alpha_M \approx 0$ . Com 5.3, segue que o erro quadrático após a otimização de  $\widehat{H}_b(z)$  é dado por

$$\|H_b(z) - \widehat{H}_b(z)\|^2 \approx \sum_{k=M+1}^N \sigma_k^2 \alpha_k^2.$$

A pergunta colocada é então: dada uma estimativa  $\widehat{H}(z)$  de ordem  $M$  de  $H(z)$ , em que condições temos para os valores singulares de Hankel de  $H_b(z)$  que  $\sigma_k^2 < \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ ,  $k = M+1, M+2, \dots$ ? Se estas condições puderem ser atendidas então abre-se a perspectiva de que a cada ciclo da aproximação racional sucessiva possa ocorrer uma redução do erro quadrático  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ . Teste numéricos preliminares indicam que a relação  $\sigma_k^2 < \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ ,  $k = M+1, M+2, \dots$  tende a ser verdadeira.

#### 7.1.4 Passo 2: solução analítica para aproximação

No passo 2 do algoritmo deseja-se  $\widehat{H}'(z)$  que minimiza  $\|\widehat{H}'(z) - H'(z)\|^2$ , onde definimos

$$H'(z) \triangleq H_a(z) - \widehat{H}_b(z),$$

com  $\widehat{H}_b(z)$  obtido no passo anterior. Neste caso, diferentemente do que ocorre no passo 1,  $H'(z)$  não é próximo a um sistema passa-tudo e não podemos esperar convergência rápida com a utilização do gradiente.

Porém, como visto acima, em um ponto estacionário  $\widehat{H}(z)$  de grau  $M$  do erro quadrático temos, nesta fase do algoritmo,  $H'(z) = \widehat{H}(z)$ . Nas proximidades de um ponto estacionário  $\widehat{H}(z)$ , portanto, a minimização de  $\|\widehat{H}'(z) - H'(z)\|^2$  aproxima-se de um problema de modelamento suficiente. Neste caso, soluções analíticas sub-ótimas, como a minimização do erro de equação ou da norma de Hankel do erro [4], são próximas da solução da minimização do erro quadrático, o que não ocorre no caso geral de submodelamento. Podem, portanto, ser usadas ao invés da otimização iterativa pelo gradiente.

Notamos que na discussão acima não foi necessária a suposição de que o ponto estacionário é uma boa aproximação de  $H(z)$  e de que o algoritmo está na proximidade deste ponto estacionário, como assumido na discussão do passo 1. Foi necessária apenas a suposição de que o algoritmo está na proximidade do ponto estacionário.

## 7.2 Filtragem adaptativa com aproximações sucessivas

### 7.2.1 Descrição do algoritmo

O algoritmo de filtragem adaptativa IIR proposto em [23], denominado “algoritmo de aproximações sucessivas” (SA), pode ser considerado como uma transposição para o âmbito da filtragem adaptativa da aproximação racional sucessiva vista na Seção anterior. Seus passos estão descritos a seguir, onde podem ser notadas certas providências quando não se está lidando diretamente com as funções de transferência em questão mas com sistemas lineares associados a elas:

1. A partir de uma estimativa  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$  do sistema  $H(z)$ , a função de transferência de um bloco auxiliar  $H_a(z)$  é colocada em
$$H_a(z) = \frac{B(z) - \bar{A}(z)}{A(z)}.$$
2. Um filtro adaptativo em treliça  $\hat{H}_b(z)$  faz a identificação de  $H(z) - H_a(z)$ , durante um número estabelecido de amostras  $n_a$ .
3. A partir do valor resultante de  $\hat{H}_b(z)$ , determina-se  $H'(z) = \hat{H}_b(z) + H_a(z)$  (notar que as funções envolvidas são conhecidas) e uma nova estimativa  $\hat{H}'(z) = B'(z)/A'(z)$  é obtida pela solução numérica da minimização do erro quadrático de equação  $\|A'(z)H'(z) - B(z)\|^2$ . Um número estabelecido de amostras  $n_x$  é usado para este procedimento computacional. Com  $n_x$  suficientemente grande, a carga computacional por amostra é pequena. Durante estas amostras, a adaptação dos coeficientes de  $\hat{H}_b(z)$  é congelada.
4. De forma a reduzir transitórios intensos, os parâmetros do bloco auxiliar e do filtro adaptativo sofrem uma transição suave, durante  $n_t$  amostras, para os parâmetros decorrentes da nova estimativa  $\hat{H}'(z)$ . A adaptação continua congelada.
5. A adaptação continua congelada por mais  $n_w$  amostras, de modo a não ser influenciada por transitorio residuais.

Um diagrama de blocos do algoritmo está na Figura 7.1.

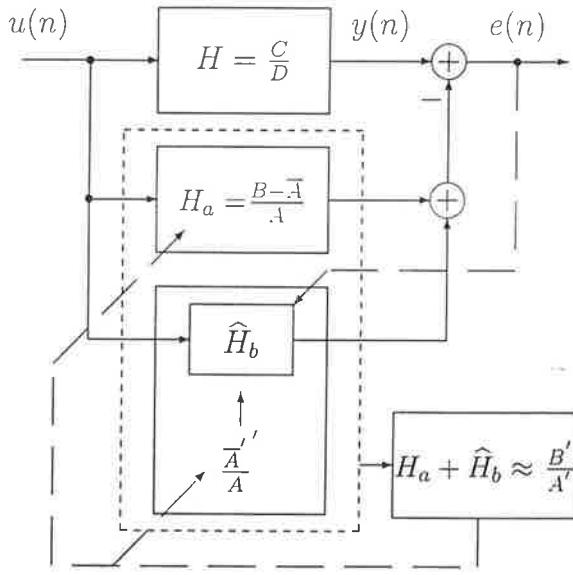


Figura 7.1: Diagrama de blocos do algoritmo de aproximações sucessivas

### 7.2.2 Complexidade computacional

Designando as etapas do filtro adaptativo SA associadas aos números de amostras  $n_a$ ,  $n_x$ ,  $n_t$  e  $n_w$  por NA, NX, NT e NW, respectivamente, a complexidade computacional em cada etapa está indicada na Tabela 7.1, supondo o uso da treliça desnormalizada.

### 7.2.3 Comparação com filtragem adaptativa FIR

Foi considerado  $H(z^{-1})$  com pólos em  $0,95\angle \pm 48$  e  $0,79\angle \pm 6$ , zeros em  $1,6\angle \pm 83$  e  $0,8\angle \pm 94$  e  $\|H(z)\| = 1$ . O número de coeficientes  $N$  e o passo de adaptação  $\mu$  de um filtro FIR adaptado pelo algoritmo LMS foram ajustados de modo a que um erro de  $-60$  dB fosse atingido no menor número possível de amostras. Isto resultou em  $N = 112$  e  $\mu = 0.075$ . Dado que a complexidade computacional do LMS é  $2M + 1$  somas e  $2M + 1$  multiplicações por amostra, isto leva a 225 somas e 225 multiplicações por amostra. O erro quadrático instantâneo está na Figura 7.2, onde podemos ver que um erro de  $-60$  dB é atingido em 3000 amostras.

Para o filtro adaptativo SA, a estimativa inicial  $\hat{H}(z)$  foi obtida rodando um filtro adaptativo FIR/LMS de 30 coeficientes durante 2000 amostras e aplicando o bloco de aproximação sobre estes coeficientes. Notamos que com  $n_x = 200$ , por exemplo, a complexidade computacional deste bloco, para  $M = 4$ , é desprezível:  $\frac{2M^3}{3n_x} = 0,21$ . A complexidade computacional

Ação	Etapa							
	NR		NX		NT		NW	
	+	×	+	×	+	×	+	×
$H_a(z)u(n)$	$2M$	$2M + 1$	$2M$	$2M + 1$	$2M$	$2M + 1$	$2M$	$2M + 1$
$\hat{H}_b(z)u(n)$	$3M$	$3M + 1$	$3M$	$3M + 1$	$3M$	$3M + 1$	$3M$	$3M + 1$
$\xi_n(n)l$	$2M$	$2M$	$2M$	$2M$	$2M$	$2M$	$2M$	$2M$
Adapt.	$3M + 2$	$5M + 3$	-	-	-	-	-	-
Aprox.	-	-	$\frac{2M^3}{3n_x}$	$\frac{2M^3}{3n_x}$	-	-	-	-
Trans.	-	-	-	-	$4M + 2$	-	-	-
<b>Totais</b>	$10M + 2$	$12M + 5$	$7M + \frac{2M^3}{3n_x}$	$7M + \frac{2M^3}{3n_x} + 2$	$11M + 2$	$7M + 2$	$7M$	$7M + 2$

Tabela 7.1: Filtro adaptativo SA: complexidade computacional

desta fase é, portanto,  $\frac{30}{112} = 27\%$  da do filtro FIR/LMS sendo comparado.

O erro quadrático instantâneo, incluindo o trecho do FIR/LMS, é mostrado na Figura 7.3. Podemos ver que um erro de  $-60$  dB é atingido após aproximadamente 3000 amostras, como o FIR. Neste caso, mesmo sem o cálculo de novas aproximações, o erro atinge um patamar de  $-90$  dB. Pela Tabela 7.1 , podemos ver que o pico de complexidade computacional do SA é na fase NR, com  $10M + 2$  somas e  $12M + 5$  multiplicações por amostra. Com  $M = 4$ , isto dá 42 somas e 53 multiplicações por amostra, ou seja, 24 % da complexidade do filtro FIR sendo comparado.

Neste caso, portanto, o filtro adaptativo SA poderia substituir com vantagens um filtro adaptativo FIR/LMS.

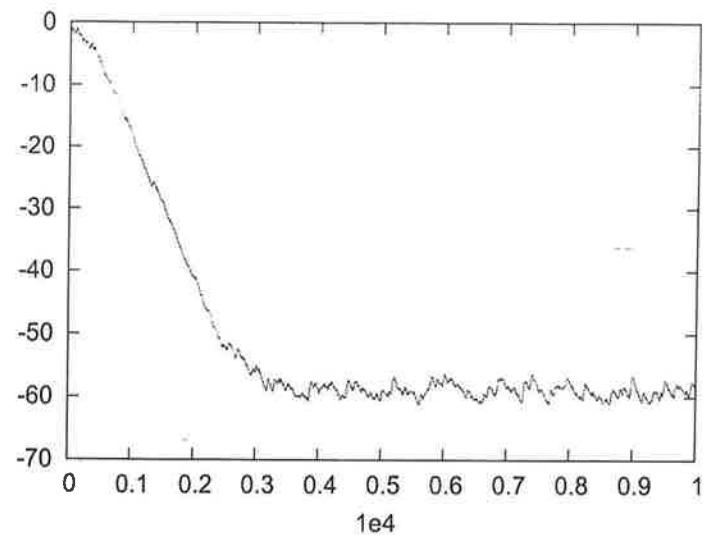


Figura 7.2: Erro quadrático instantâneo (dB), FIR/LMS.

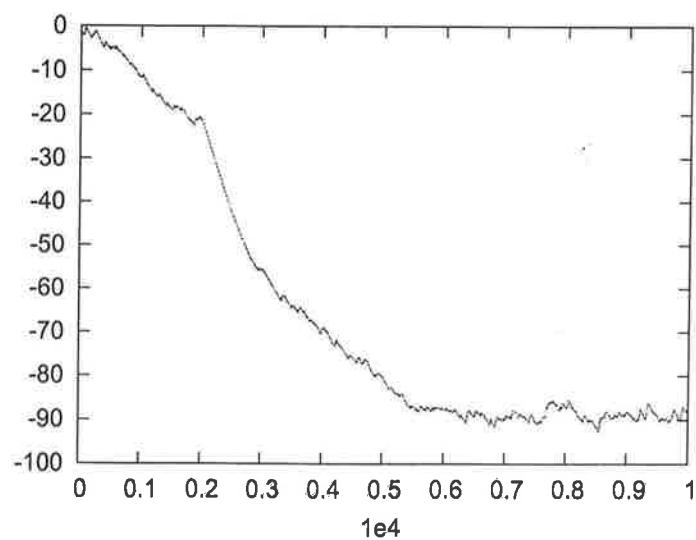


Figura 7.3: Erro quadrático instantâneo (dB), SA.

# Capítulo 8

## Conclusão

O método de análise da velocidade de convergência de filtros adaptativos IIR apresentado se mostrou bastante poderoso para interpretar resultados práticos cuja explicação era, anteriormente, algo obscura. Uma das implicações práticas desta análise é que sob certas condições, ainda que restritivas, estes filtros podem ser usados com considerável segurança quanto à sua velocidade de convergência. Outra consequência desta análise, possivelmente de aplicação prática mais ampla, é o algoritmo de adaptação inspirado nas propriedades de convergência deduzidas. A análise do seu comportamento é um trabalho em andamento, mas, como pode ser visto pelos resultados apresentados aqui, as perspectivas são promissoras.

# Bibliografia

- [1] J. Treichler, C. R. Johnson, Jr., e M. G. Larimore, *Theory and design of adaptive filters*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.
- [2] L. Ljung e T. Söderström, *Theory and practice of recursive identification*. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [3] J. J. Shynk, “Adaptive IIR filtering,” *IEEE ASSP Magazine*, vol. 6, pp. 4–21, Abril 1989.
- [4] P. A. Regalia, *Adaptive IIR filtering in signal processing and control*. New York: Marcel Dekker, 1995.
- [5] S. D. Stearns, “Error surfaces of recursive adaptive filters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, pp. 603–606, Junho 1981.
- [6] C. R. Johnson, Jr., “Adaptive IIR filtering: current results and open issues,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 30, pp. 237–250, Março 1984.
- [7] J. M. T. Romano e M. Bellanger, “Fast least squares adaptive notch filtering,” *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 36, pp. 1536–1540, Setembro 1988.
- [8] P. A. Regalia, “Stable and efficient lattice algorithms for adaptive IIR filtering,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 375–388, Fevereiro 1992.
- [9] H. Fan, “A structural view of asymptotic convergence speed of adaptive IIR filtering algorithms. I.Infinite precision implementation,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 1493–1517, Abril 1993.
- [10] V. L. Stonick e M. H. Cheng, “Adaptive IIR filtering: composite pre-filtered regressor method,” em *Proc. IEEE ICASSP*, Adelaide, pp. 501–504, 1994.

- [11] S. L. Netto, P. S. R. Diniz, e P. Agathoklis, “Adaptive IIR filtering algorithms for system identification: a general framework,” *IEEE Transactions on Education*, vol. 38, pp. 54–66, Fevereiro 1995.
- [12] J. E. Cousseau e P. S. R. Diniz, “New adaptive iir filtering algorithms based on the steiglitz-mcbride method,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, pp. 1367–1371, Maio 1997.
- [13] A. David e T. Aboulnasr, “A globally convergent adaptive IIR filter,” em *Proc. IEEE ISCAS*, vol. 3, geneva, pp. 531–534, 2000.
- [14] M. R. Petraglia, J. J. Shynk, e S. K. Mitra, “Stability bounds and steady-state coefficient variance for a second-order adaptive iir notch filter,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 1841–1845, Julho 1994.
- [15] R. López-Valcarce e F. Pérez-González, “Adaptive IIR lattice filtering revisited: convergence issues and new algorithms with improved stability properties,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, pp. 811–821, Abril 2001.
- [16] P. Campolucci e F. Piazza, “Intrinsic stability control method for recursive filters and neural networks,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 47, pp. 797–802, Agosto 2000.
- [17] L. Pasquato e I. Kale, “Adaptive IIR filter initialization via hybrid FIR/IIR adaptive filter combination,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 50, pp. 1830–1835, Dezembro 2001.
- [18] P. M. S. Burt, “A switched regressor algorithm for adaptive IIR filtering,” em *Proc. IEEE 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 990–993, 1995.
- [19] P. M. S. Burt e M. Gerken, “A polyphase IIR adaptive filter: error surface analysis and application,” em *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 3, Münich, pp. 2285–2288, 1997.
- [20] P. M. S. Burt e M. Gerken, “Um filtro polifásico adaptativo,” em *Proc. SBT*, Recife, pp. 511–514, 1997.

- [21] P. M. S. Burt e M. Gerken, "A polyphase IIR adaptive filter," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 49, pp. 356–359, Maio 2002.
- [22] P. M. S. Burt e M. Gerken, "On the uniqueness of stationary points in  $L_2$  approximation with a rational polyphase function," *Signal Processing*, vol. 82, pp. 1707–1725, Novembro 2002.
- [23] P. M. S. Burt e P. A. Regalia, "A new framework for convergence analysis and algorithm development of adaptive IIR filters," em *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 2, Montreal, pp. 441–444, 2004.
- [24] P. M. S. Burt e P. A. Regalia, "A new framework for convergence analysis and algorithm development of adaptive IIR filters," *Aceito em 14/09/2004 para publicação (12 páginas)*, *IEEE Transactions on Signal Processing*.
- [25] P. M. S. Burt e P. A. Regalia, "IIR adaptive filtering: convergence speed properties in the undermodelled case," em *A ser apresentado, Proc. IEEE ICASSP*, Philadelphia, 2005.
- [26] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2004.
- [27] F. Deprettere, ed., *SVD and signal processing*. Amsterdam: North-Holland, 1988.
- [28] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 17–32, Fevereiro 1981.

# A NEW FRAMEWORK FOR CONVERGENCE ANALYSIS AND ALGORITHM DEVELOPMENT OF ADAPTIVE IIR FILTERS

Phillip M. S. Burt \*

Dept. PTC  
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo  
CEP 05508-900 São Paulo SP Brazil

Phillip A. Regalia

Dept. CITI  
CNRS/SAMOVAR UMR 5157  
Institut National des Télécommunications/GET  
9 rue Charles Fourier  
91011 Evry cedex France

## ABSTRACT

A parameterization of an adaptive IIR filter's poles is developed, based on balanced realization theory. From this we develop a local approximation of the actual adapted pole parameters, in which convergence speed is related to a certain eigenvalue spread. This, in turn, is shown to relate to the Hankel singular values of the system to be identified, as well as certain coefficient sensitivity functions of the adapted filter. Based on these properties, a new adaptive IIR algorithm is proposed. In order to achieve faster convergence, it combines an adaptive lattice with function approximation.

## 1. INTRODUCTION

Adaptive IIR filters can in principle represent an advantageous alternative in relation to adaptive FIR filters, due to their capacity of providing long impulse responses with a small number of coefficients. Problems related to local minima, stability and the effect of poles close to the unit circle have been tackled, over the years, by several authors, leading to different adaptive algorithms and realization structures. In most cases, the numerical examples that are given are second order cases.

One aspect of adaptive IIR filters that hasn't received much attention is that the performance of simple constant gain algorithms can rapidly degrade as the order of the filter grows. It can easily be verified by simulations [1] that, even in the absence of local minima, the adaptation of filters with order greater than 2 (4, for instance) can remain almost stopped in regions where the mean square error is far from being acceptable. While other adaptive algorithms, such as the Newton kind, are less susceptible to this effect, their greater computational complexity undermines the main motivation of adaptive IIR filters, which is low computational complexity. More insight into this aspect of the

convergence of adaptive IIR filters is, therefore, desirable. This is the problem we address here.

## 2. ANALYTICAL FRAMEWORK

### 2.1. True gradient adaptation on the reduced error surface

We consider, initially, that a rational function  $\widehat{H}(z)$  is adapted so as to minimize the mean square error between the output  $\widehat{y}(n) = \widehat{H}(z)u(n)$  produced for a known white input  $u(n)$  and the output of a system  $H(z)$  to the same input,  $y(n) = H(z)u(n) + \eta(n)$ . In this mixed notation,  $z$  is the unit-delay operator, with  $zu(n) = u(n - 1)$ . Assuming additive noise  $\eta(n)$  is independent of  $u(n)$  makes the problem equivalent to the minimization of the norm  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ .

A less general problem, now, is to assume  $H(z)$  is known. If the order imposed on  $\widehat{H}(z)$  is smaller than the order of  $H(z)$ , this problem doesn't have a closed-form solution and is still an optimization problem of interest. One possible procedure for solving it would be as follows. 1) Choose an initial value for the poles of  $\widehat{H}(z)$ . 2) Given these poles, obtain the zeros of  $\widehat{H}(z)$  that minimize  $\|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$  (this problem has a closed-form solution). The error thus achieved, denoted by  $\|g(z)\|^2 = \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2$ , depends only on the poles of  $\widehat{H}(z)$  and is termed the *reduced error surface*. 3) Adapt whatever are the pole parameters  $w_k$  by the gradient, so that at iteration  $n + 1$  we have

$$w_k(n + 1) = w_k(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial w_k} \|g(z)\|^2, \quad (1)$$

and go back to step 2. The fact that  $H(z)$  is known here by no means makes the aforementioned problem of very slow convergence disappear. For our purposes this is good: as will be seen, when (1) is cast in a different parameterization a powerful insight is gained in relation to the origin of this convergence problem. Moreover, this extends to our original problem, where

\*Supported by FAPESP and CAPES.

$H(z)$  is not known and stochastic gradient adaptation is employed, and where the assumption that the orders of  $\tilde{H}(z)$  and  $H(z)$  are equal doesn't make the problem trivial.

## 2.2. SVD analysis of the reduced error surface

We consider that in  $\tilde{H}(z)$  we can vary  $M$  zeros,  $M$  poles and a gain. We say, therefore, that  $\tilde{H}(z)$  is "of order  $M$ ". It can be shown that, in this case, on the reduced error surface we have  $H(z) - \tilde{H}(z) = g(z)V(z)$ , where  $g(z)$  is strictly causal and  $V(z)$  is the unit-norm all-pass function that has the same poles as  $\tilde{H}(z)$  [1]. From this it also follows that

$$\|g(z)\|^2 = \mathbf{v}^t \Gamma_H^2 \mathbf{v}, \quad (2)$$

where  $\Gamma_H$  is the Hankel form of system  $H(z)$  and vector  $\mathbf{v}$  contains the coefficients of the expansion of  $V(z)$ . It should be noted that  $\|g(z)\|^2 = \|H(z) - \tilde{H}(z)\|^2$ , since  $V(z)$  is all-pass.

Now, if  $H(z)$  has order  $N$  then  $\Gamma_H$  can be written as a function of its singular values  $\sigma_k$  and Schmidt pairs  $(\zeta_k, \eta_k)$  as  $\Gamma_H = \sum_{k=1}^N \zeta_k \sigma_k \eta_k^t$  [2], where sets  $\eta_k$  and  $\zeta_k$  are orthonormal. From this and (2) it results that  $\|g(z)\|^2 = \sum_{k=1}^N \mathbf{v}^t \zeta_k \sigma_k^2 \zeta_k^t \mathbf{v}$ . We can then return to polynomial form and write

$$\|g(z)\|^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \alpha_k^2, \quad (3)$$

where  $\alpha_k \doteq \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle \leq 1$ . Functions  $\zeta_k(z)$  are scaled (to unit norm) controllability functions of a balanced realization of  $H(z)$ . As can be seen, the error is a quadratic function of the terms  $\alpha_k$ . In the following, we consider  $N = M$  and show that the terms  $\alpha_k$  can also be used to parameterize the poles of  $\tilde{H}(z)$ .

## 2.3. Balanced form linked parameterization

We consider initially a function  $\tilde{H}(z) = C(z)/D(z)$ , of order  $M$  as  $\tilde{H}(z)$ .  $\tilde{H}(z)$  is not necessarily equal to the system  $H(z)$  considered above. In the following, also, the notation  $\bar{F}(z) \doteq z^M F(z^{-1})$  is used, for any  $F(z)$ . It can be shown that the  $M$  scaled controllability functions  $\tilde{\zeta}_k(z)$  of a balanced implementation of  $\tilde{H}(z)$  and the functions  $\{U(z), zU(z), z^2U(z), \dots\}$ ,  $U(z) \doteq \bar{D}(z)/D(z)$ , constitute an orthonormal basis for the space  $H_2$  of causal and stable functions of  $z$  [1]. From the denominator of  $\tilde{H}(z) = B(z)/A(z)$  we form the all-pass function  $V(z) = \bar{A}(z)/A(z)$ , which belongs to  $H_2$ . Therefore, with  $P(z)/Q(z) \in H_2$ ,  $V(z)$  can always be written in function of that basis as

$$V(z) = \frac{\bar{A}(z)}{A(z)} = \sum_{k=1}^M \alpha_k \tilde{\zeta}_k(z) + \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\bar{D}(z)}{D(z)}. \quad (4)$$

If the  $\alpha_k$  are given, then it can be shown that (4) leads to a system of linear equations, where the  $M$  coefficients of monic  $A(z)$  and the  $M + 1$  coefficients of  $P(z)$  make up a total of  $2M + 1$  unknowns, for the same number of equations. We have, then,

$$\begin{bmatrix} \theta_D - \theta_R T & -\theta_{\bar{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

where, for any  $F(z)$ ,  $\theta_F$  is a convolution matrix composed of the coefficients of  $F(z)$ ,  $T$  is the anti-diagonal permutation matrix, and  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{b}$  contain the coefficients of  $A(z)$ ,  $P(z)$  and  $R(z) - z^M D(z)$ , respectively.

If, otherwise, the coefficients of  $A(z)$  are given, the parameters  $\alpha_k$  can be obtained directly from  $\alpha_k = \langle \tilde{\zeta}_k(z), V(z) \rangle$ . Alternatively, (4) gives a system of  $2M + 1$  linear equations and the same number of unknowns,

$$\begin{bmatrix} \theta_A \Phi_R & \theta_{\bar{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

where  $\boldsymbol{\alpha}$  contains the parameters  $\alpha_k$ ,  $\mathbf{c}$  has the coefficients of  $\bar{A}(z)D(z)$  and  $\Phi_R$  is composed of the coefficients of the numerators of  $\tilde{\zeta}_k(z)$ .

As seen, then, we can go back and forth between the coefficients of  $A(z)$  and parameters  $\alpha_k$ , which constitute, therefore, a different parameterization of the poles of  $\tilde{H}(z) = B(z)/A(z)$ . This parameterization is linked to the function  $\tilde{H}(z)$  adopted in the beginning.

It may be possible that an adaptive method can be developed where parameters  $\alpha_k$  are, themselves, the adapted parameters. In this scheme, the linked function  $\tilde{H}(z)$  would play the role of an initial estimate of  $H(z)$ . The motivation for this would be the fact that if  $\tilde{H}(z) \approx H(z)$  then the error surface would be close to quadratic and, as follows from (3), the problem of slow convergence could be overcome by simply using a different adaptation gain  $\mu_k = \mu/\sigma_k^2$  for each parameter. This idea is not pursued here, however. Otherwise, in the following we will use parameters  $\alpha_k$  to describe the adaptation process of a given set of parameters  $w_k$  by the gradient. Besides the greater understanding of the convergence of gradient algorithms this will provide, it will also lead to an algorithm that attempts to overcome the problem of slow convergence.

## 2.4. Local approximation

We are now in a position to return to the adaptation given by (1). As follows from the previous discussion, the poles of  $\tilde{H}(z)$  can be parameterized by the balanced form linked parameters  $\alpha_k$ , which we group in  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \dots \alpha_M]^t$ . Moreover, when the linked function satisfies  $\tilde{H}(z) = H(z)$ , the error is entirely determined by  $\boldsymbol{\alpha}$  as given by (3). Therefore, the adaptation of the parameters  $\mathbf{w} = [w_1 \dots w_M]^t$  used for the poles, and the resulting error, are entirely described by the

sequence  $\alpha(n)$ . Of course, for this to be useful it is necessary in the first place to be able to write  $\alpha(n+1)$  in function of  $\alpha(n)$ . To this end, a first-order approximation of  $\alpha(n+1)$  is given by

$$\tilde{\alpha}(n+1) = \alpha(n) + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}(n)} [\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)], \quad (5)$$

where  $\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}(n)} \doteq \mathbf{J}(\alpha(n))$  is the Jacobian matrix of derivatives ( $\partial \alpha_i / \partial w_j$  at row  $i$  and column  $j$ ) at point  $\mathbf{w}(n)$ . Now, considering adaptation of  $\mathbf{w}$  by the gradient, from (1) we have  $\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n) = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}(n)}$ , where we use  $\varepsilon \doteq \|g(z)\|^2$ , for notational simplicity. With (5) this leads to

$$\tilde{\alpha}(n+1) = \alpha(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}(n)}.$$

Applying the chain law of differentiation, we can always write  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} = (\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{w}})^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}$ . Also, from (3), we have  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 2\Sigma^2 \alpha$ , where  $\Sigma$  is the diagonal matrix with singular values  $\sigma_k$ . We arrive, finally, at

$$\tilde{\alpha}(n+1) = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{J}(\alpha(n)) \mathbf{J}(\alpha(n))^t \Sigma^2] \alpha(n). \quad (6)$$

This expression applies at any point  $\alpha(n)$ , no assumption that  $\alpha(n)$  is a stationary point of the adaptation having been made. As can be seen, there is a partial separation of the effect of the system to be identified, which affects  $\Sigma$  and  $\mathbf{J}$ , and the effect of the parameterization of the adaptation, which affects only  $\mathbf{J}$ . The expression is also similar to what is obtained for the steepest-descent algorithm in adaptive FIR filtering, the eigenvalues of  $\mathbf{J}(\alpha(n)) \mathbf{J}(\alpha(n))^t \Sigma^2$  playing the part of the eigenvalues of the input correlation matrix. These eigenvalues are non-negative, which can be seen noting that the non-null eigenvalues of  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2$  and  $\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J} = (\Sigma \mathbf{J})^t (\Sigma \mathbf{J})$  are always equal. The larger of them will tend to limit the value of the gain  $\mu$ . Convergence will be slow then at a point  $\alpha(n)$  if the minimum eigenvalue of  $\mathbf{J}(\alpha(n)) \mathbf{J}(\alpha(n))^t \Sigma^2$  is small and  $\alpha(n)$  is in the direction of the associated eigenvector.

## 2.5. Relation with Hessian approximation

Usually, convergence analysis of adaptive IIR filters is carried out directly in terms of the adapted parameters and local approximation is restricted to stationary points  $\mathbf{w}_*$ . Writing the Hessian matrix as a function of the parameters  $\alpha_k$ , it can be shown for gradient adaptation that at a stationary point  $\mathbf{w}_*$  we have  $\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_* \approx [\mathbf{I} - \mu \mathbf{J}^t(\mathbf{w}_*) \Sigma^2 \mathbf{J}(\mathbf{w}_*)] [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_*]$ . As in the local approximation (6), the use of the balanced form linked parameterization leads to a partial separation of the effects of the system to be identified and the choice of the adapted parameters. The local approximation, though, is more useful since it is not restricted to stationary points.

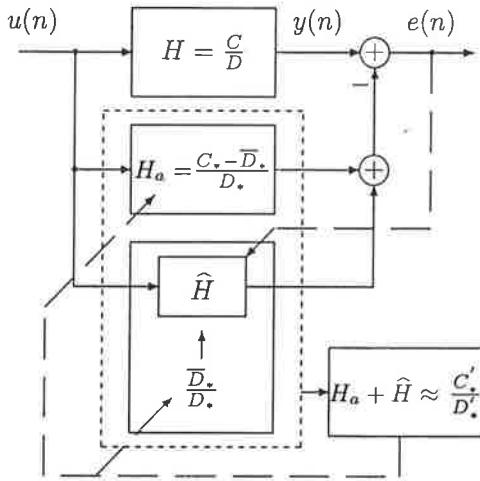
## 3. JACOBIAN GRAMMIAN PROPERTIES

For analyzing the eigenvalue spread of  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2$ , denoted  $\chi_{J \Sigma}$ , it can be verified that the product upper bound  $\chi_J \chi_\Sigma$  is often useful.  $\chi_\Sigma$  depends on the relative position of the poles and zeros of  $H(z)$ , being equal to 1 when  $H(z)$  is all-pass. To deal with  $\chi_J$ , we call upon the orthonormal controllability functions  $\xi_k(z) = \hat{D}_k(z)/D(z)$  of a lattice realization of  $H(z)$  and define  $\beta_k \doteq \langle \xi_k(z), V(z) \rangle$ . We have  $\mathbf{J}_\beta = \mathbf{Q} \mathbf{J}$  for the associated Jacobian, with  $\mathbf{Q}$  orthogonal, and, therefore,  $\chi_J = \chi_{J,\beta}$ . This shows that  $\chi_J$  depends only on the poles of  $H(z)$ . When the adapted parameters are the direct form parameters, it can be also be shown that  $[\mathbf{J}_\beta^{-t} \mathbf{J}_\beta^{-1}]_{i,j} = \langle \hat{D}_i(z), \hat{D}_j(z) \rangle$  at the global minimum. Using subscript  $o$  in association with the global minimum, it follows that  $\chi_{J,o}$  is closer to one when the poles of  $H(z)$  are away from the unit circle and/or uniformly distributed in angle. A trivial case is  $D(z) = 1 - a^M z^M$ , which gives  $\chi_{J,o} = 1$ . For the lattice form only partial analytical properties have been obtained so far. However, it has been observed numerically that, in relation to the direct form case,  $\chi_{J,o}$  tends to be closer to one.

## 4. SUCESSIVE APPROXIMATIONS

An adaptive IIR algorithm that makes use of the properties of matrices  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t$  and  $\Sigma$  seen in the previous section is presented in the following. Due to space limitation, the algorithm is not described in a more formal manner and some details are left out. A block diagram of the algorithm is at the end of this paragraph. From an initial estimate  $C_*(z)/D_*(z)$  of system  $H(z) = C(z)/D(z)$  (estimate that in some cases may be the origin of the coefficient space), the transfer function of a fixed auxiliary block is set at  $H_a(z) = [C_*(z) - \bar{D}_*(z)]/D_*(z)$  and an  $M$  order lattice adaptive filter is initialized with  $\hat{H}(z) = \bar{D}_*(z)/D_*(z)$ . The simplified partial (stochastic) gradient algorithm [1] is employed. Assuming  $H(z)$  and  $H_a(z)$  also have order  $M$ , the overall system  $H(z) - H_a(z)$  to be identified by the lattice has order  $2M$ . Depending on the initial estimate, the overall system will be close to all-pass and the first  $M$  eigenvalues of  $\Sigma$  will be close to one. We assume that in this case the adaptive lattice  $\hat{H}(z)$  will converge rapidly, say in  $n_a$  iterations, to a point where the first  $M$  error terms in (3) are close to zero. (This assumption is based on the analysis presented in the previous sections, though the analysis has yet to be extended to the undermodelled case.) After  $n_a$  iterations, then, the function now given by  $\hat{H}(z) + H_a(z)$ , which is of order  $2M$ , is approximated by a new  $M$  order function  $C_*(z)/D_*(z)$  and the whole process starts again. Different closed-form approximation methods can be employed for the last step, which is directly related to model reduction problems (e.g.,

[3]). Here, we have used minimization of the equation error  $\|H(z)D_*(z) - C_*(z)\|^2$ . An important point is that the approximation procedure is not performed at each iteration. In particular, we consider that after the  $n_a$  adaptation iterations,  $n_x$  iterations are used to compute the approximation, period during which the adapted parameters are frozen. If  $n_x$  is large enough, the per-iteration computational load of the approximation will be small. Another important point is that after introducing the new approximation the adapted parameters remain frozen still for  $n_w$  iterations, so that the error transient can decay.

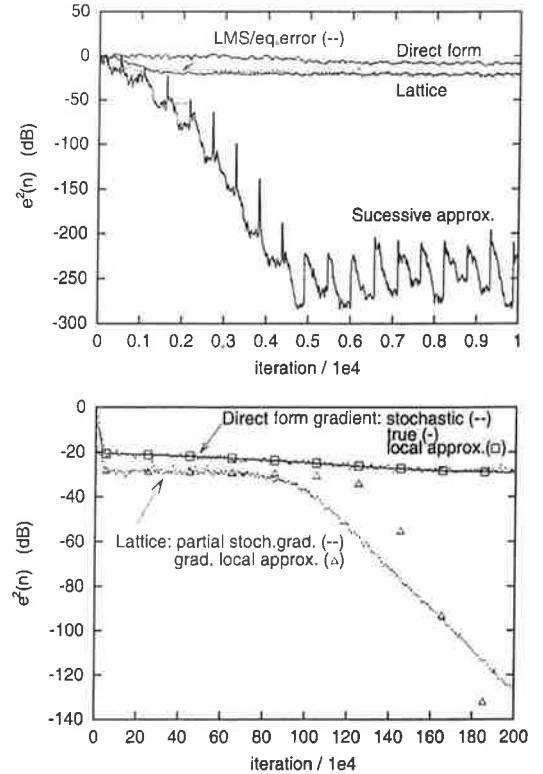


## 5. NUMERICAL RESULTS

One  $H(z^{-1})$  was selected from of a set of 100 randomly generated fourth-order unit-norm transfer functions. Its zeros are at  $0.20 \pm 1.60j$  and  $-0.051 \pm 0.81j$ , and its poles are at  $0.47 \pm 0.52j$  and  $0.78 \pm 0.081j$ . The successive approximations (SA) algorithm, with  $n_a = 300$ ,  $n_x = 200$  and  $n_w = 50$  was compared with the more conventional direct form (stochastic gradient) and lattice (simplified partial stochastic gradient) cases. As equation error approximation was used in the SA algorithm, an LMS/equation error algorithm was also considered for comparison. For each algorithm the employed step  $\mu$  was within a factor of 2 of its maximum value. Adaptation started from the origin in all cases. No output noise was considered in order to highlight the previously analyzed convergence properties. The results for one realization of the white input are in the first figure that follows. Smoothing was employed for better visualization. It can be seen that the proposed algorithm converges much faster than the other cases.

Results of a longer simulation are in the second figure. For the direct form, the stochastic gradient algorithm is closely approximated by the true gradient algorithm given by (1) and the local approximation given by  $\tilde{\alpha}(n+L) = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{J}(\tilde{\alpha}(n))\mathbf{J}(\tilde{\alpha}(n))^t\Sigma^2]^L \tilde{\alpha}(n)$ , with  $L = 10^4$  ( $\tilde{\alpha}(n)$  is only shown every  $2 \times 10^5$  iterations).

For the lattice, a true gradient algorithm was not implemented, due to its complexity. The local approximation, with  $L = 10^3$ , initially follows closely but then deviates from the partial gradient algorithm. This is not unexpected, as the latter employs a biased approximation of the gradient in order to reduce computational complexity.



For the considered  $H(z)$ , the eigenvalue spread of  $\Sigma^2$  is 36 dB. The other eigenvalue spreads (in dB) and the product bound are in the table below, calculated at the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$  and at the points reached after  $5 \times 10^4$  iterations. It can be seen that at these points the eigenvalue spread is considerably higher than at the global minimum, which exemplifies the greater utility of the local approximation in comparison with the Hessian approximation.

Form	$\hat{H} = H$			$n = 5 \times 10^4$		
	$\chi_J$	$\chi_J \chi_\Sigma$	$\chi_{J\Sigma}$	$\chi_J$	$\chi_J \chi_\Sigma$	$\chi_{J\Sigma}$
Direct	36	72	67	49	85	79
Lattice	7	43	36	29	64	62

## 6. REFERENCES

- [1] P. A. Regalia, *Adaptive IIR filtering in signal processing and control*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [2] F. Deprettere, Ed., *SVD and signal processing*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [3] R. Johansson, "System identification using LQG-balanced model reduction," in *Proc. 41st IEEE Conf. on Decision and Control*, 2002, pp. 258–263.

# A New Framework for Convergence Analysis and Algorithm Development of Adaptive IIR Filters

Phillip M. S. Burt, *Member, IEEE*, Phillip A. Regalia, *Fellow, IEEE*

**Abstract**—A parameterization of an adaptive IIR filter's poles is developed, based on balanced realization theory. From this we develop a local approximation of the actual adapted pole parameters, in which convergence speed is related to a certain eigenvalue spread. This, in turn, is shown to relate to the Hankel singular values of the system to be identified, as well as certain coefficient sensitivity functions of the adapted filter. The local approximation is not restricted to stationary points. At these points, however, it is equivalent to a Hessian approximation, with the benefit of decomposing the Hessian matrix into terms related to the aforementioned singular values and sensitivity functions. The description of the adaptation process by means of the developed approximation leads to a greater understanding of the effects on convergence speed of factors such as the Hankel singular values of the system, its order, the distribution of its poles and the choice of adapted parameters. In particular, the use of direct form and lattice parameters are compared in detail. Based on these properties, a new adaptive IIR algorithm with faster convergence and relatively low computational complexity has recently been proposed, which is briefly mentioned. Results also indicate a potential for variable gain algorithms.

**Index Terms**—Adaptive IIR filtering, Convergence speed, Balanced realization

## I. INTRODUCTION

ADAPTIVE IIR filters can in principle represent an advantageous alternative in relation to adaptive FIR filters, due to their capacity of providing long impulse responses with a small number of coefficients [1]–[3]. Problems related to local minima, stability and the effect of poles close to the unit circle have been tackled, over the years, by several authors, leading to different adaptive algorithms and realization structures (for instance, [4]–[9]).

One aspect of adaptive IIR filters that hasn't received much attention is that the performance of simple constant gain algorithms can rapidly degrade as the order of the filter grows. It can easily be verified by simulations [3] that, even in the absence of local minima, the adaptation of filters with order greater than 2 can remain almost stopped in regions where the mean square error is far from being acceptable. While other adaptive algorithms, such as the Newton kind [10], are less susceptible to this effect, their greater computational

Manuscript received January 20, 2002; revised November 18, 2002.

P. M. S. Burt is with the Department of Telecommunications and Control Engineering of the University of São Paulo (Escola Politécnica), Brazil. For this work, he was supported by FAPESP and CAPES.

P. A. Regalia was with the Department of Communications, Image and Information Processing of the Institut National des Télécommunications in Evry, France. He is now with the Department of Electrical Engineering and Computer Science of the Catholic University of America, Washington, DC 20064.

complexity undermines the main motivation of adaptive IIR filters, which is low computational complexity. More insight into this aspect of the convergence of adaptive IIR filters is, therefore, desirable.

In this work we apply balanced realization theory to obtain a new parameterization of the adaptive filter's poles, which is then used to analyze the effect on convergence speed of the Hankel singular values of the system being identified and the choice of actually adapted parameters. Direct form and lattice parameters are considered. As will be seen, when the system is far from being all-pass (that is, has a large Hankel singular value spread) convergence is slow for both parameterizations. On the other hand, when it is all-pass, at least close to the global minimum convergence is fast, provided the poles of the system being identified are not too close to each other. Otherwise, it will be fast only for the lattice case. Partial results of this work have been presented in [11] and are developed here in more detail.

The organization of the paper is as follows. In Section II, initial assumptions are presented. In Section III a new parameterization of an adaptive IIR filter's poles is developed and in sections IV and V it is applied to the convergence analysis of gradient-based adaptive IIR filters. Convergence speed is shown to relate to the Hankel singular values of the system to be identified, as well as certain coefficient sensitivity functions of the adapted filter. In Section VI, numerical examples related to these singular values are given. In Section VII and VIII an analysis of the coefficient sensitivity functions is carried out for the cases of direct form and lattice parameters, numerical examples being given in Section IX. Convergence speed results are summarized in Section X, where we also mention the adaptive algorithm proposed in [11], which is based on the concepts and results presented here. In Section XI, perspectives for the presented approach are discussed.

## II. INITIAL ASSUMPTIONS

### A. Problem statement

A rational function  $\hat{H}(z) = B(z)/A(z)$  is adapted to minimize the mean square error between  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$  and the noisy output of a system,  $y(n) = H(z)u(n) + \eta(n)$ , where  $u(n)$  is a known white signal. In this mixed notation,  $zu(n) = u(n-1)$ . The choice of  $z$  as the unit-delay operator implies that the signs of the impulsive response indexes and corresponding exponents of  $z$  are equal, which is convenient. Assuming, now, independent  $\eta(n)$  and  $u(n)$  makes the problem equivalent to the minimization of the squared norm  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|^2$ , which

we call the “squared error”. Implications of a non-white input are briefly discussed in Appendix A.

We assume that  $B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M$  and  $A(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_M z^M$ . Therefore, in  $\widehat{H}(z)$  we can adapt  $M$  zeros,  $M$  poles and a gain (there will be zeros or poles at infinity if  $\deg[B(z)] < M$  or  $\deg[A(z)] < M$ , respectively). There are different choices of parameterization of these zeros, poles and gain, as well as of how to adapt the parameters. In this work, we’re concerned with the convergence speed of stochastic gradient-based adaptive algorithms, applied, in particular, to direct form and lattice parameters.

For greater simplicity, in what follows we refer to the zero and gain parameters as the “zero parameters”.

### B. True gradient adaptation on the reduced error surface

We take now two approximation steps in order to obtain an adaptation equation more suitable for analysis. Initially, we consider that the true (instead of the stochastic) gradient of the squared error is used. Grouping the parameters in  $p$ , but without defining yet which parameterization is used, deterministic adaptation of the pole and zero parameters has then the form  $p(n+1) = p(n) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial p} \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2|_{p(n)}$ , as further elaborated in Appendix B. This has limited practical interest in most adaptive filtering applications, since  $H(z)$  must be known. However, as it approximates well stochastic gradient-based adaptive algorithms in the aforementioned slow convergence situations, it is of interest for analytical purposes.

To go further in this direction, we consider now the use of the squared error obtained when the zeros of  $\widehat{H}(z)$  are optimized given its poles, which we denote by  $\varepsilon$ . An expression for  $\varepsilon$  and its derivatives will be seen in Subsection IV-A. Here, it is sufficient to note that by construction  $\varepsilon$  depends only on the poles of  $\widehat{H}(z)$ . Adaptation of the zeros is, therefore, bypassed. Using  $w$  for the pole parameters, we have then,

$$w(n+1) = w(n) - \frac{\mu}{2} \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial w} \right|_{w(n)}. \quad (1)$$

With this, we say that the adaptation is restricted to the “reduced error surface.”

Two observations can be made to justify this second step. One is that when the overall adaptation is slow, adaptation of the zeros would take place, locally, almost as if the input were  $\frac{1}{A(z)} u(n)$ , with a fixed  $A(z)$ . For white  $u(n)$ , therefore, the zeros would converge rapidly if the correlation matrix of  $\frac{1}{A(z)} u(n)$  were well-conditioned [12], which would require poles to be not too close to the unit circle. Now, in practice we see that at points where convergence is slow it is not necessary that the poles be close to the unit circle. Therefore, the adaptation of the zeros would most often be fast, taking them close to their optimal values given the poles, as assumed in (1).

The second observation is that if the zeros were also being adapted and were at their optimal values given the poles, then the pole parameters would adapt exactly as in (1). Indeed, as shown in Appendix C, under mild assumptions,

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial w} \right|_w = \frac{\partial}{\partial w} \left. \|H(z) - \widehat{H}(z)\|^2 \right|_{w, r(w)}, \quad (2)$$

where  $r(w)$  contains the optimal zero parameters, given the pole parameters  $w$ .

Finally, we note that although two approximation steps have been taken (from stochastic gradient to true gradient and then to reduced error gradient), this approach will lead to useful analytical results, due to the mathematical structure imposed on the problem by the reduced error surface restriction.

### III. BALANCED FORM LINKED PARAMETERIZATION

The analytical utility of the approach described above appears once we use a new parameterization of the adaptive filter’s poles, which now will be introduced.

#### A. SVD analysis of the reduced error surface

From  $\widehat{H}(z) = B(z)/A(z)$ , the unit-norm all-pass function  $V(z)$  is defined as  $V(z) = \overline{A}(z)/A(z)$ ,  $\overline{A}(z) \doteq z^M A(z^{-1})$ . We note that  $\deg[\overline{A}(z)] = M$ . We consider also a rational  $H(z) = C(z)/D(z)$ , with  $C(z)$  and  $D(z)$  mutually prime and  $\deg[H(z)] = N \geq M$ , given by  $\max\{\deg[C(z)], \deg[D(z)]\}$ . Functions  $H(z)$  and  $\widehat{H}(z)$  are assumed to belong to the Hardy subspace  $\mathcal{H}_2$  of causal and stable functions.

In a balanced realization [13] of  $H(z)$ , the controllability and observability Grammians obtained from the “infinite horizon” controllability and observability matrices [3, p.33] are diagonal and equal. Let  $\zeta_k(z)$  then be the normalized transfer function between the input  $u(n)$  and the  $k$ -th state variable  $x_k(n+1)$  in a balanced realization of  $H(z)$ . We refer to it as a “normalized controllability transfer function”.

*Proposition 1:* Defining  $\alpha_k \doteq \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle \leq 1$ ,  $\alpha \doteq [\alpha_1 \dots \alpha_N]^t$  and  $\Sigma$  as the diagonal matrix of Hankel singular values of  $H(z)$ , on the reduced error surface we have

$$\varepsilon = \alpha^t \Sigma^2 \alpha. \quad (3)$$

*Proposition 2:* Parameters  $\alpha_k$  defined in Proposition 1 are related to  $A(z)$  by

$$\overline{A}(z)D(z) = A(z) \sum_{k=1}^N \alpha_k R_k(z) + P(z)\overline{D}(z), \quad (4)$$

where  $R_k(z)$  are the numerators of  $\zeta_k(z)$ ,  $\deg[R_k(z)] < N$ ,  $\deg[P(z)] \leq M$  and  $\overline{D}(z) \doteq z^N D(z^{-1})$ .

These propositions are shown in Appendixes D and E, respectively. In the following, we show that the terms  $\alpha_k$  can also be used to parameterize the poles of  $\widehat{H}(z)$ .

#### B. Conversion from direct form

Given  $\overline{A}(z)$ , we obtain parameters  $\alpha_k$  from their definition. Alternatively, (4) gives the system of  $N+M+1$  equations and unknowns  $[\Theta_A \Phi_R \Theta_D] [\alpha \rho]^t = c$ , where  $\Theta_A$  and  $\Theta_D$  are convolution matrices,  $\rho$  and  $c$  have the coefficients of  $P(z)$  and  $\overline{A}(z)D(z)$ , respectively, and the  $k$ -th column of  $\Phi_R$  has the coefficients of  $R_k(z)$ . We note that if  $\widehat{H}(z) = H(z)$ , then  $\alpha = 0$ .

### C. Conversion to direct form

Writing  $A(z) = 1 + a(z)$ , with strictly causal  $a(z)$ , and  $\bar{A}(z) = z^M + \bar{a}(z)$ , we have, from (4),

$$\bar{a}(z)D(z) - a(z)R(z) - P(z)\bar{D}(z) = R(z) - z^M D(z), \quad (5)$$

where  $R(z) \doteq \sum_{k=1}^N \alpha_k R_k(z)$ . This gives the system of  $N + M + 1$  equations and  $2M + 1$  unknowns  $[\Theta_D - \Theta_R \Pi - \Theta_{\bar{D}}] [a \ \rho]^t = b$ , where  $\Pi$  is the anti-diagonal permutation matrix and  $a$  and  $b$  contain the coefficients of  $\bar{a}(z)$  and  $R(z) - z^M D(z)$ , respectively. There may not be a solution when  $M < N$ . The existence of an infinite number of solutions is discussed in the next subsection.

As a numerical example, we consider  $H(z^{-1})$  with poles at  $0.7\angle \pm 60^\circ$  and  $0.7\angle \pm 100^\circ$ , zeros at  $0.8\angle \pm 10^\circ$  and  $0.9\angle \pm 5^\circ$  and  $L_2$  norm. Its squared Hankel singular values are  $\sigma_1^2 = 1.45$ ,  $\sigma_2^2 = 0.54$ ,  $\sigma_3^2 = 0.00759$  and  $\sigma_4^2 = 0.00468$ . Making  $\alpha = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^t$  gives  $A(z^{-1})$  with roots at  $0.73\angle \pm 57^\circ$  and  $0.77\angle \pm 103^\circ$ . Making  $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1]^t$  gives  $A(z^{-1})$  with roots at  $0.74\angle \pm 58^\circ$  and  $0.71\angle \pm 99.6^\circ$ .

### D. Uniqueness

Parameters  $\alpha_k$  are uniquely defined from  $\bar{A}(z)$ . We pose the inverse problem as: does  $\bar{X}(z) = z^L + x_1 z^{L-1} + \dots + x_0 \neq \bar{A}(z)$  exist such that, with  $X(z) = z^L \bar{X}(z^{-1})$  and for  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\langle \zeta_k(z), \bar{X}(z)/X(z) \rangle = \langle \zeta_k(z), \bar{A}(z)/A(z) \rangle$ ? This amounts to obtaining the solutions to

$$\left\langle \zeta_k(z), \frac{\bar{A}(z)}{A(z)} - \frac{\bar{X}(z)}{X(z)} \right\rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Non-unique solutions may indeed exist: if  $A(z)$  has roots on the unit circle they will also be roots of  $\bar{A}(z)$ , cancelling out in  $\bar{A}(z)/A(z)$ . We're concerned, though, with the possibility of solutions with stable roots, that is, roots of  $\bar{A}(z)$  inside the unit circle. In Appendix F we prove the following:

*Proposition 3:* Given  $\alpha_k$  and  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  with  $\deg[H(z)] = N \geq M$ , there exists at most one  $\bar{A}(z)$ , with all roots inside the unit circle, such that  $\langle \zeta_k(z), \bar{A}(z)/A(z) \rangle = \alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

### E. Application of the new parameterization

As seen above, we can go back and forth from the coefficients of  $A(z)$  to parameters  $\alpha_k$ , which constitute a new parameterization of the adaptive filter's poles, linked to  $H(z)$ .

It may be possible to develop a method in which parameters  $\alpha_k$  are, themselves, adapted. The linked function would then be an initial estimate of the system being identified. If it were good, then the error surface would be close to quadratic and slow convergence could be overcome simply by using a different adaptation gain  $\mu_k = \mu/\sigma_k^2$  for each parameter. This idea is not pursued here, however. Otherwise, we will use parameters  $\alpha_k$  to describe the adaptation process of a given set of parameters  $w_k$  by the gradient, when identifying  $H(z)$ .

## IV. REPARAMETERIZATION OF GRADIENT ADAPTATION

We will use quantities that depend on certain parameters which in turn may be time-varying. We may refer to them as in  $J(\alpha(n))$ ,  $J(\alpha)$  or  $J(n)$  and, for notational simplicity, we may also omit the argument, as in  $J$ . The full chain of dependencies is always assumed implicitly, though.

### A. Gradient in terms of the new parameters

We return now to (1). Applying the chain law of differentiation gives

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w} = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = J^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}, \quad (7)$$

where  $\partial \alpha / \partial w \doteq J$  is a  $N \times M$  Jacobian matrix of derivatives, with elements  $[\partial \alpha / \partial w]_{ij} = \partial \alpha_i / \partial w_j$ . We refer to it as the "sensitivity matrix".

*Proposition 4:* For a suitable set of parameterizations, if  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  then  $J$  has rank  $M$ .

This is shown in Appendix G and is used ahead. Now, from (3), we have

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 2 \Sigma^2 \alpha. \quad (8)$$

Combining (7) and (8), the gradient can be written in terms of the new parameters  $\alpha_k$  as

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial w} = 2 J^t \Sigma^2 \alpha. \quad (9)$$

For an actual implementation of (1), in the direct form case we have  $\partial \alpha_k / \partial a_j = \langle \zeta_k(z), \frac{\partial}{\partial a_j} V(z) \rangle$ , where  $\frac{\partial}{\partial a_j} V(z) = [z^{M-j} A(z) - z^j \bar{A}(z)] / A^2(z)$ . Residue calculation is used for inner products.

### B. Local description in terms of the new parameters

Turning to the adaptation of the parameters, a first-order approximation of  $\alpha(n+1)$  is

$$\alpha(n+1) \approx \alpha(n) + \underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial w} \Big|_{\alpha(n)}}_{=J(\alpha(n))} [w(n+1) - w(n)]. \quad (10)$$

Combining this with (1) and (9) leads to:

*Proposition 5:* A local description of adaptation on the reduced error surface (1) is

$$\alpha(n+1) \approx [I - \mu J(\alpha(n)) J^t(\alpha(n)) \Sigma^2] \alpha(n). \quad (11)$$

where the eigenvalues of  $J(\alpha(n)) J^t(\alpha(n)) \Sigma^2$  are non-negative.

This description applies at any  $\alpha(n)$ , no assumption that  $\alpha(n)$  is a stationary point of the adaptation having been made. Its main feature is the partial separation of the effect of the system to be identified, which affects  $\Sigma$  and  $J$ , and the effect of the parameterization of the adaptation, which affects only  $J$ . This is at the heart of the convergence speed analysis presented in the following sections.

Some useful properties can be shown. As suggested by (11),

*Proposition 6:* At stationary points,  $\alpha$  is in the null space of  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$ .

*Proof:* From Proposition 4,  $\mathbf{J}$  has rank  $M$ , assuming  $H(z) \in \mathcal{H}_2$ . Therefore, the null spaces of  $\mathbf{J}^t\Sigma^2$  and  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  are equal. At stationary points,  $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{w} = 0$ . With (9), then,  $\alpha$  is in that null space.

We note that the projection of  $\alpha(n+1)$  in the null space of  $\mathbf{J}(\alpha(n+1))\mathbf{J}^t(\alpha(n+1))\Sigma^2$  is not directly accounted for in (11).

*Proposition 7:* The eigenvectors of  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  are linearly independent.

*Proof:* From the spectral theorem [14], the symmetric matrix  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t$  can always be diagonalized:  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t = \mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^t$ . Denoting by  $\mathbf{Q}$  the eigenvector matrix of  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$ , we have  $\Sigma\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^t\Sigma\Sigma\mathbf{Q} = \Sigma\mathbf{Q}\Lambda$ , where  $\Lambda$  is the diagonal matrix of its eigenvalues.  $\mathbf{P} = \Sigma\mathbf{Q}$  is, therefore, the eigenvector matrix of  $\Sigma\mathbf{U}\Gamma\mathbf{U}^t\Sigma$ , which is Hermitian and can also be diagonalized. Eigenvectors in  $\mathbf{P}$  are therefore linearly independent and, since the diagonal elements of  $\Sigma$  are not null, the same applies to  $\mathbf{Q}$ .

### C. Relation to Hessian approximation

Usually, convergence analysis of adaptive IIR filters is carried out in terms of the adapted parameters, around stationary points  $\mathbf{w}_o$ . From  $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{w}}|_{\mathbf{w}_o} = 0$  follows the first-order approximation  $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{w}}|_{\mathbf{w}(n)} \approx \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{w}^2}|_{\mathbf{w}_o} [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o]$ , where  $\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{w}^2}|_{\mathbf{w}_o}$  is the Hessian matrix at  $\mathbf{w}_o$ . Now, from (9) follows  $\partial\varepsilon/\partial w_j = 2(\partial\alpha/\partial w_j)^t\Sigma^2\alpha$ , where  $\partial\alpha/\partial w_i$  is a vector with rows  $\partial\alpha_k/\partial w_i$ . We have then

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial w_i \partial w_j} = 2 \left( \frac{\partial\alpha}{\partial w_j} \right)^t \Sigma^2 \left( \frac{\partial\alpha}{\partial w_i} \right) + 2\alpha^t\Sigma^2 \frac{\partial^2\alpha}{\partial w_j \partial w_i}.$$

If the absolute values of all elements of  $\alpha^t\Sigma$  are sufficiently small, the second term of the right side of the equation above can be discarded. With (3), this means the squared error is small at  $\mathbf{w}_o$ . From this assumption follows

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{w}^2} \approx 2\mathbf{J}^t\Sigma^2\mathbf{J}, \quad (12)$$

which is exact in the case of sufficient modelling. With (1) we have then  $\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_o \approx [\mathbf{I} - \mu\mathbf{J}^t\Sigma^2\mathbf{J}] [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o]$ . As in (11), the new parameterization leads to a partial separation of the effects of the system to be identified and the choice of the adapted parameters. However, (11) is more useful: 1) it is not restricted to stationary points; 2) parameters  $\alpha_k$  are related to the squared error in a simple way and by means of meaningful quantities, the Hankel singular values of  $H(z)$ .

## V. LOCAL CONVERGENCE SPEED

### A. Adaptation matrix eigenvalues and convergence speed

In the following, we refer to  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  in (11) as the “adaptation matrix”.

A convenient measure of local convergence speed is  $\varepsilon(n)/\varepsilon(n+1)$ . From (3) we have  $\varepsilon(n)/\varepsilon(n+1) = [\alpha^t(n)\Sigma^2\alpha(n)]/[\alpha^t(n+1)\Sigma^2\alpha(n+1)]$ . With (11), then, if

$\alpha(n)$  is in the direction of a certain eigenvector  $\mathbf{q}_k$  of the adaptation matrix, we have, dropping the time index in  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(n)}{\varepsilon(n+1)} &\approx \frac{\alpha^t\Sigma^2\alpha}{\alpha^t\Sigma^2\alpha - 2\mu\lambda_k\alpha^t\Sigma^2\alpha + \mu^2\lambda_k^2\alpha^t\Sigma^2\alpha} \\ &= (1 - \mu\lambda_k)^{-2} \end{aligned}$$

where  $\lambda_k$  is the eigenvalue associated to  $\mathbf{q}_k$ . If  $\mu\lambda_k \ll 1$ , local convergence will be slow. As the larger eigenvalues have a direct effect on the maximum adaptation step for stability, an important quantity is then the eigenvalue spread  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2)$  of the adaptation matrix, excluding its null eigenvalues.

A numerical example may be of interest:  $H(z^{-1})$  has poles at  $0.7\angle\pm60^\circ$ , zeros at  $0.9\angle\pm5^\circ$  and unit  $L_2$  norm. Adaptation of the direct form parameters according to (1) with  $\mu = 0.05$  and starting at  $\mathbf{w}(0) = [0 \ -0.8]^t$  is showed in Fig. 1. The corresponding path of  $\alpha(n)$  is in Fig. 2, where are also shown the adaptation matrix eigenvectors for some values of  $n$ . The eigenvalues are shown in Fig. 3. It can be seen that, after an initial phase of higher convergence speed (up to around  $n = 200$ ),  $\alpha(n)$  is mostly in the direction of the eigenvector associated to the smaller eigenvalue of the adaptation matrix and convergence is slower.

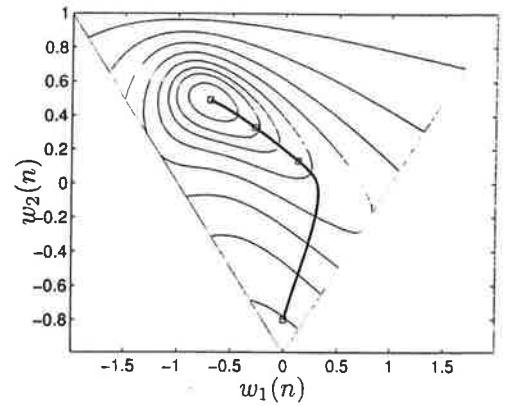


Fig. 1. True gradient adaptation on the reduced error surface, second order  $H(z)$ : parameter path, constant squared error contours and stability region: markers at  $n = 1, 200, 400$  and  $1200$ , starting at the bottom.

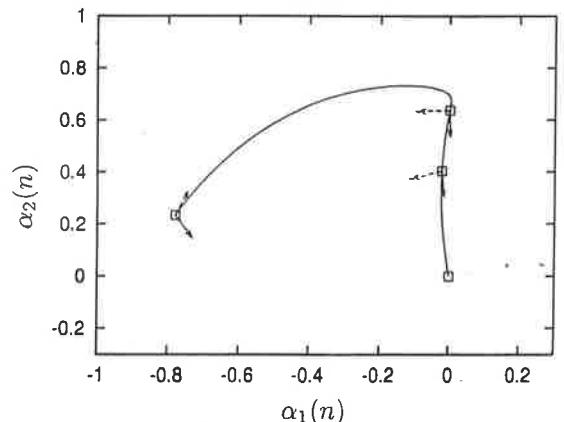


Fig. 2. True gradient adaptation on the reduced error surface, second order  $H(z)$ : parameter path and eigenvector directions of the adaptation matrix (dashed arrow for eigenvector related to maximum eigenvalue): markers at  $n = 1, 200, 400$  and  $1200$ , starting at the left.

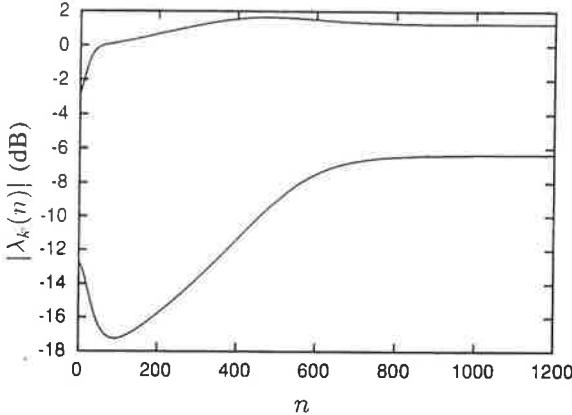


Fig. 3. True gradient adaptation on the reduced error surface, second order  $H(z)$ : eigenvalues of the adaptation matrix.

### B. Asymptotic behaviour

Since  $\mathbf{J}(\alpha)$  depends on  $\alpha$ , it could be that no  $\alpha \approx \alpha_o$  existed in the subspace of the eigenvectors of  $\mathbf{J}(\alpha_o)\mathbf{J}^t(\alpha_o)\Sigma^2$  associated to its smaller eigenvalues. There would be then little use for (11) in convergence speed analysis. Now, at least when  $\alpha_o$  is a stationary point, this is not the case: from Proposition 6, writing  $\alpha = \alpha_o + \Delta\alpha$ ,  $\Delta\alpha \approx 0$ , then  $\mathbf{J}(\alpha_o)\mathbf{J}^t(\alpha_o)\Sigma^2\alpha = \mathbf{J}(\alpha_o)\mathbf{J}^t(\alpha_o)\Sigma^2\Delta\alpha$ , where the only constraint on  $\Delta\alpha$  is orthogonality to the null space of  $\mathbf{J}(\alpha_o)\mathbf{J}^t(\alpha_o)\Sigma^2$ . Vector  $\Delta\alpha$  can be, for instance, in a direction for which convergence is slow.

Our interest, however, is not restricted to stationary points. We consider then a second order approximation of the squared error around a generic point  $\mathbf{w}(n)$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{w}(n+1)) &\approx \varepsilon(\mathbf{w}(n)) + \Delta\mathbf{w}^t \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{w}} \Big|_{\mathbf{w}(n)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{w}^t \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\mathbf{w}^2} \Big|_{\mathbf{w}(n)} \Delta\mathbf{w},\end{aligned}$$

where  $\Delta\mathbf{w}(n) \doteq \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$  and  $\partial^2\varepsilon/\partial\mathbf{w}^2$  is the Hessian matrix at  $\mathbf{w}(n)$ . Noting that the non-null eigenvalues of  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  and  $\mathbf{J}^t\Sigma^2\mathbf{J}$  are equal, we show the following in Appendix H:

*Proposition 8:* If, as derived from (12), the Hessian matrix at  $\mathbf{w}(n)$  is given by  $2\mathbf{J}^t\Sigma^2\mathbf{J}$ , when a subset of its eigenvalues tends to zero and the gradient  $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{w}}$  is in the subspace of the corresponding eigenvectors, then  $\alpha$  tends to be in the union of the subspace of the corresponding eigenvectors of  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2$  and its null space.

The assumptions mean that  $\mathbf{w}(n)$  is at the bottom of a “steep valley” of the reduced error surface, as for  $n > 200$  in the example above. Gradient adaptation (when out of the attraction domain of local minima) will most likely lead the parameters to such regions, if they exist. At this point, local convergence will be slow and (11) will be useful as an analytical tool.

### C. Upper bound for eigenvalue spread

Using the upper bound  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)\chi(\Sigma^2) \geq \chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t\Sigma^2)$  has led to useful results in practice and makes the analytical treatment much easier. This is carried out in Section VI, for  $\chi(\Sigma^2)$ , and in Sections VII to IX, for  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$ .

## VI. EFFECT OF THE ORDER AND RELATIVE ZERO/POLE POSITION

The eigenvalue spread  $\chi(\Sigma^2)$  is equal to the square of the Hankel singular value spread. In a sense, it depends on the relative position of the zeros and poles of  $H(z)$ . If they are reciprocal, then  $H(z)$  is all-pass and  $\chi(\Sigma^2) = 1$ , for any order  $N$ . (This property is exploited in the adaptation algorithm proposed in [11] and mentioned in Section X). If they are far from being reciprocal then we tend to have  $\chi(\Sigma^2) \gg 1$  as  $N$  grows.

As an example, we consider the second-order system used in Subsection V-A, a fourth-order  $H(z^{-1})$  with additional poles at  $0.7\angle \pm 100^\circ$  and zeros at  $0.8\angle \pm 10^\circ$  and a sixth-order  $H(z^{-1})$  with other additional poles at  $0.5\angle \pm 130^\circ$  and zeros at  $0.3\angle \pm 20^\circ$ , all having unit  $L_2$  norm. Some of their squared Hankel singular values  $\sigma_k^2$  are in Table I.

Adaptation given by (1) was carried out for direct form parameters, with  $M = N$ , starting at the origin and with  $\mu$ , indicated in Table II, close to the maximum admitted by the stochastic gradient algorithm. As can be seen, the squared error until certain time instants is still too high for many applications. As  $N$  grows, local convergence speed decreases sharply: for  $N = 6$  an error level of  $-100$  dB is only reached after  $n_{100} = 5,4$  million iterations. Results for the stochastic algorithm are also indicated ( $n'_{100}$ ). As expected, approximation by the true gradient is better as convergence speed decreases. A segment of  $\varepsilon(n)$  and  $\varepsilon(n) \doteq [y(n) - \hat{y}(n)]^2$  (for the stochastic case) is in Fig. 4.

Quantities related to the proposed framework are in Table I. Components  $\beta_k(n_s)$  of  $\alpha(n_s)$  are small in the directions associated to the larger eigenvalues, as discussed in Subsection V-B. Comparing  $\varepsilon(n_s)/\varepsilon(n_s + 1)$  from Table II with  $[1 - \mu\lambda_k(n_s)]^{-2}$ , shows that convergence speed is determined mainly by the smaller eigenvalues, as discussed in Subsection IV-B. Also shown are the eigenvalues  $\lambda_k^*$  at the point of minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ , which in this case are close to the corresponding  $\lambda_k(n_s)$ .

Finally, we consider three all-pass systems, each one with the same poles as one of the previous systems. As seen in Table III, convergence is much faster.

## VII. SENSITIVITY GRAMMIAN PROPERTIES

Ideally, we should analyze  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$  for any point in the parameter space and adaptive filter order, which is yet to be accomplished. The following results are for sufficient order ( $M = N$ ) and concern mostly the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ . Direct form and lattice adapted parameters are considered.

### A. Use of lattice controllability transfer functions

The functions  $\zeta_k(z)$  are now replaced by the controllability transfer functions  $\xi_k(z) \doteq \hat{D}_{k-1}(z)/D(z)$  of the lattice realization of  $H(z) = C(z)/D(z)$ . The functions  $\hat{D}_k$  can be obtained from the classical Schur algorithm, as summarized in Appendix J. Since both sets are orthonormal sets of functions with the same poles, there is an orthogonal transformation  $\mathbf{Q}$  from one to the other.

TABLE I  
ANALYSIS OF LOCAL CONVERGENCE SPEED

$k$	$\sigma_k^2$	$\lambda_k(n_s)$	$\beta_k(n_s)$	$[1 - \mu\lambda_k(n_s)]^{-2}$ (dB)	$\lambda_k^*$
1	$8.3 \times 10^{-1}$	1.4	$4.7 \times 10^{-5}$	1.0	1.3
2	$1.7 \times 10^{-1}$	$2.1 \times 10^{-1}$	$-4.1 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-1}$	$2.3 \times 10^{-1}$
1	1.5	1.9	$1.0 \times 10^{-6}$	$6.9 \times 10^{-1}$	2.1
3	$7.6 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$-5.4 \times 10^{-2}$	$3.7 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-2}$
4	$4.7 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$-6.4 \times 10^{-1}$	$4.3 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10^{-3}$
1	1.6	1.8	$-2.2 \times 10^{-11}$	$6.6 \times 10^{-1}$	2.4
5	$7.7 \times 10^{-5}$	$6.1 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-1}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-5}$
6	$2.8 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-1}$	$7.1 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-5}$

TABLE II  
SIMULATION PARAMETERS AND RESULTS ( $\varepsilon(n_s)$  AND  $\frac{\varepsilon(n_s)}{\varepsilon(n_s+1)}$  IN dB)

$N$	$\mu$	$n_s$	$\varepsilon(n_s)$	$\frac{\varepsilon(n_s)}{\varepsilon(n_s+1)}$	$n_{100}$	$n'_{100}$
2	0.08	300	-35.2	$1.5 \times 10^{-1}$	$7.0 \times 10^2$	$2.0 \times 10^3$
4	0.04	300	-27.0	$4.7 \times 10^{-4}$	$6.7 \times 10^4$	$1.6 \times 10^5$
6	0.04	$10^5$	-47.8	$8.6 \times 10^{-6}$	$5.4 \times 10^6$	$8.0 \times 10^6$

TABLE III  
SIMULATION RESULTS, ALL-PASS SYSTEMS

$N$	$n_{100}$	$\lambda_1^*$	$\lambda_N^*$	$n'_{100}$
2	172	2.5	0.90	350
4	671	3.3	0.41	900
6	791	3.3	0.32	1000

Similarly to  $\alpha_k$  in Proposition 1, we define  $\gamma_k \doteq \langle \xi_k(z), V(z) \rangle$ , and extend our notation as in  $[\mathbf{J}_{\gamma w}]_{i,j} \doteq \partial \gamma_i / \partial w_j$ . Subscript  $w$  denotes generic parameterization, while  $a$  and  $\theta$  will be used for the direct and lattice forms, respectively. We have, then,  $\mathbf{J}_{\gamma w} = \mathbf{Q} \mathbf{J}_{\alpha w}$ .

Two matrix properties will be repeatedly used in the following: for any  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  such that  $\mathbf{AB}$  is square, we have, for the non-null eigenvalues,  $\lambda(\mathbf{AB}) = \lambda(\mathbf{BA})$ . Also, for any non-singular  $\mathbf{A}$  we have  $\chi(\mathbf{A}) = \chi(\mathbf{A}^{-1})$ . With  $\mathbf{J}_{\gamma w} = \mathbf{Q} \mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t \mathbf{Q}^t$  we have, then,  $\lambda(\mathbf{J}_{\gamma w} \mathbf{J}_{\gamma w}^t) = \lambda(\mathbf{Q} \mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t \mathbf{Q}^t) = \lambda(\mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t \mathbf{Q}^t \mathbf{Q}) = \lambda(\mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t)$ , and, as a consequence,  $\chi(\mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t) = \chi(\mathbf{J}_{\gamma w} \mathbf{J}_{\gamma w}^t)$ . Based on this equality, from now on we will analyze  $\mathbf{J}_{\gamma w}$  instead of  $\mathbf{J}_{\alpha w}$ .

*Proposition 9:*  $\chi(\mathbf{J}_{\alpha w} \mathbf{J}_{\alpha w}^t) = \chi(\mathbf{J}_{\gamma w} \mathbf{J}_{\gamma w}^t)$  depends on the poles of  $H(z)$ , not on its zeros.

This follows from the fact that the functions  $\hat{D}_k(z)$  depend only on the poles of  $H(z)$ . It wasn't immediate with  $\zeta_k(z)$ , since they change with the zeros of  $H(z)$ . Regarding the upper bound  $\chi(\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2) \leq \chi(\mathbf{J} \mathbf{J}^t) \chi(\Sigma^2)$ , there is an interesting complementarity here, since, as seen,  $\chi(\Sigma^2)$  depends on the relative position of the poles and zeros.

### B. Direct form

Denoting by  $\Pi$  the anti-diagonal permutation matrix, the following is proved in Appendix I:

*Proposition 10:* At the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ ,

$$\mathbf{J}_{\gamma a}^{-1} = \Pi \mathbf{S}_{dl}^t, \quad (13)$$

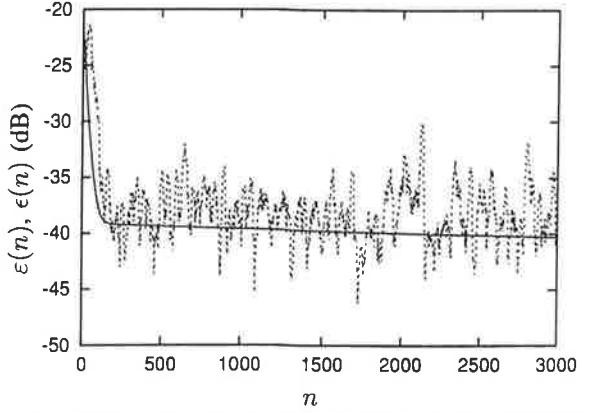


Fig. 4. True gradient adaptation on the reduced error surface (solid line) and stochastic gradient adaptation (dashed line, smoothed for better visualization). sixth-order  $H(z)$ .

where the  $k$ -th column of  $\mathbf{S}_{dl}^t$  has the coefficients of  $\hat{D}_{k-1}(z)$ . ( $\mathbf{S}_{dl}$  is a submatrix of  $\mathbf{T}_{dl}$  defined in [3, p.45]).

It follows that at  $\hat{H}(z) = H(z)$ ,

$$\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = \chi(\mathbf{J}_{\gamma a}^{-t} \mathbf{J}_{\gamma a}^{-1}) = \chi(\mathbf{S}_{dl} \Pi \Pi \mathbf{S}_{dl}^t) = \chi(\mathbf{S}_{dl} \mathbf{S}_{dl}^t). \quad (14)$$

Since  $[\mathbf{S}_{dl} \mathbf{S}_{dl}^t]_{i,j} = \langle \hat{D}_i(z), \hat{D}_j(z) \rangle$ , if the functions  $\hat{D}_k(z)$  form an orthogonal set, then  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = 1$ . A case of interest, which attains the lower bound for the eigenvalue spread is:

*Proposition 11:* If  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$  then  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = 1$ , at  $\hat{H}(z) = H(z)$ .

In this case,  $\hat{D}_k(z) = \|1/D(z)\|^{-1} z^k$  and  $\mathbf{S}_{dl}^t = \|1/D(z)\|^{-1} \mathbf{I}$ . The roots of  $D(z)$  are uniformly separated. In the more general case, since the functions  $\xi_k(z)$  form an orthonormal set, writing out  $\langle \xi_i(z), \xi_j(z) \rangle$  in the frequency domain, we can see that if  $1/|D(e^{j\omega})|^2$  is almost constant then the functions  $\hat{D}_k(z)$  are almost an orthogonal set and  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) \approx 1$ . This happens, for instance, when the poles of  $H(z)$  are more uniformly separated, instead of more concentrated. It happens also when the reciprocal of the poles are closer to the origin instead of the unit circle.

### C. Lattice

We write  $\mathbf{J}_{\gamma \theta} = \mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{a \theta}$ , where  $[\mathbf{J}_{a \theta}]_{i,j} \doteq \partial a_i / \partial \theta_j$  relates direct form to lattice parameters. Therefore,  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma \theta} \mathbf{J}_{\gamma \theta}^t) =$

$\chi(\mathbf{J}_{a\theta}^{-1} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^{-1} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^{-t} \mathbf{J}_{a\theta}^{-t})$ , and, with (13),

$$\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = \chi(\mathbf{J}_{a\theta}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl} \mathbf{\Pi} \mathbf{J}_{a\theta}^{-t}).$$

Now,  $\mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl}$  is the inverse of a Toeplitz matrix ([3, p. 74]), so  $\mathbf{\Pi} \mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl} \mathbf{\Pi} = \mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl}$  and we arrive at

$$\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = \chi(\mathbf{J}_{a\theta}^{-1} \mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl} \mathbf{J}_{a\theta}^{-t}). \quad (15)$$

*Proposition 12:* At the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ ,  $\mathbf{J}_{a\theta}$  has the form

$$\mathbf{J}_{a\theta} = \begin{bmatrix} \times & \dots & \times & \hat{d}_{M-1,0} \\ \vdots & & \vdots & \hat{d}_{M-1,1} \\ \times & \dots & \times & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \hat{d}_{M-1,M-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

its last row and column being equal to those of  $\mathbf{S}_{dl}^t$ .

*Proof:* Column  $k$  of  $\mathbf{J}_{a\theta}$  contains the  $M$  last coefficients of  $\frac{\partial}{\partial \theta_k} D(z)$ , which is given by the backward recursion  $\frac{\partial}{\partial \theta_k} D(z) = z[D_{k-1}(z)T_k(z) + \hat{D}_{k-1}(z)S_k(z)]$ , starting at  $S_M(z) \equiv 1$  and  $T_M(z) \equiv 0$  [3, p.320]. From this follows  $\frac{\partial}{\partial \theta_M} D(z) = z\hat{D}_{M-1}(z)$  and, for  $k < M$ ,  $\deg[\frac{\partial}{\partial \theta_k} D(z)] < M$ .

If the form of its last column applied to its other columns, then  $\mathbf{J}_{a\theta} = \mathbf{S}_{dl}^t$  and, from (15),  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = 1$  at  $\hat{H}(z) = H(z)$ . The lattice would then be an optimal parameterization, from this point of view. Although, in general,  $\mathbf{J}_{a\theta}$  is only a rough approximation of  $\mathbf{S}_{dl}^t$ , it will be seen, comparing the direct and lattices forms, that  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) < \chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  is more likely than the opposite, especially for larger values of  $M$ .

### VIII. SENSITIVITY GRAMMian SPECIAL CASES AND BOUNDS

Throughout this section we assume that  $\hat{H}(z)$  is at the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ . The second order case is of interest as it gives a clue for bounds in the higher order cases. Calculation of eigenvalue spreads is in Appendix K and results are given in Table IV. For some cases, the form of the spread for  $\rho \approx 1$  is in Table V. The results are discussed in the following.

#### A. Direct form

As seen in Proposition 11,  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$  attains the lower bound of the spread. For an upper bound, if  $D(z) = (1 \pm \rho z)^2$  then, from Table IV,  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = (1 + \rho)^2 / (1 - \rho)^2$ . Given  $\rho$ , this is an upper bound for the spread resulting from  $D(z) = 1 + \nu z \pm \rho^2 z^2$  with other values of  $\nu$ . In this case the poles are concentrated at  $\rho^{-1}$ .

*Conjecture 1:* Given  $D(z)$  of order  $M$ , an upper bound for  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  is obtained replacing  $D(z)$  with  $(1 \pm \rho z)^M$ , with  $\rho^{-1}$  being the maximum radius of its roots.

To test this, 1000 random fourth-order  $D(z)$  were produced, with two pairs of conjugate roots. The reciprocal of the radius of each pair was uniformly distributed between 0.1 and 0.99 and the absolute value of its angle was uniformly distributed between 0 and  $\pi$ . For each  $D(z)$ , the exact value

of  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  was computed and plotted against  $(1 - \rho)$ . Making  $D(z) = (1 + \rho z)^M$ , the exact value of  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  and the approximation  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) \approx M \|\hat{D}_{M-1}(z)\|^2 / \|\hat{D}_0(z)\|^2$  were also computed.

The results are in Fig. 5, corroborating the conjecture. They also show that, remarkably, the approximation in question is good even away from the condition  $\rho \approx 1$  for which it was obtained.

Analogous procedures were carried out for  $M = 3, 4$  and  $5$ , for all combinations of real and conjugate poles. The results were exactly equivalent to those presented for  $M = 4$ .

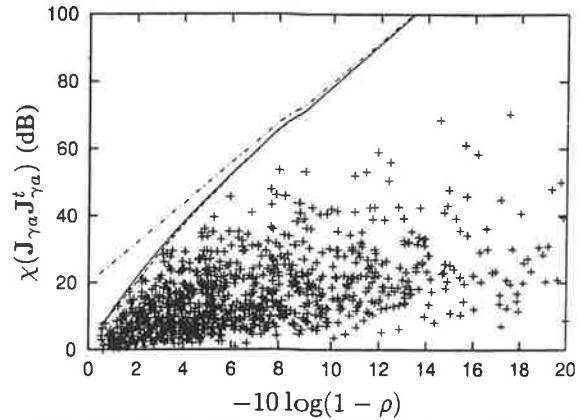


Fig. 5. Eigenvalue spread,  $M = 4$ . Case  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$ : exact spread (solid line);  $M \|\hat{D}_{M-1}(z)\|^2 / \|\hat{D}_0(z)\|^2$  approximation (dash, close to exact value);  $C(M)(1 - \rho)^{-2(M-1)}$  asymptote (dash-dot). Random  $D(z)$ : (points '+').

#### B. Lattice

If  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$  the spread will never be smaller than for the direct form. On the other hand, as seen in Table V, if  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$  the spread grows slower than for the direct form, as  $\rho$  approaches 1. Similarly to the direct form case, numerical evaluations were carried out. The results are in Fig. 6 and Fig. 7, for  $M = 4$  and  $M = 6$ , respectively. For  $M = 4$  the worst case among the spreads associated to  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$  and  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$ , for each  $\rho$ , provides an upper bound for the spread. For  $M = 6$  a reasonable approximation of an upper bound is obtained.

In Fig. 8 we have the value of  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) / \chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  for the randomly generated  $D(z)$ , in the case  $M = 4$ . It is clear that with no *a priori* knowledge about the position of the poles of the system, the lattice parameterization is likely to lead to a considerably smaller eigenvalue spread, as suggested by the results in Table V. For  $M = 6$  the results are similar, with a slight increase in the performance of the lattice case. This property is exploited in [11], which is mentioned ahead, in Section X.

### IX. POLE DISTRIBUTION, ADAPTED PARAMETERS AND CONVERGENCE SPEED

We give now an example of the effect of  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$  on convergence speed. Unit-norm all-pass systems are considered, so  $\mathbf{J}\mathbf{J}^t \Sigma^2 = \mathbf{J}\mathbf{J}^t$ .

TABLE IV  
 $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$  FOR SPECIAL CASES OF  $D(z)$

	$1 + \nu z \pm \rho^2 z^2$	$1 \pm \rho^M z^M$	$(1 \pm \rho z)^M, \rho \approx 1$	$\forall D(z)$
Direct	$1 \pm \rho^2 +  \nu $	1	$\approx M \frac{\ \hat{D}_{M-1}(z)\ ^2}{\ \hat{D}_0(z)\ ^2}$	$\leq M \frac{\ \hat{D}_{M-1}(z)\ ^2}{\ \hat{D}_0(z)\ ^2}$
	$1 \pm \rho^2 -  \nu $			
Lattice	$\frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2}$	$\left(\frac{1 + \rho^M}{1 - \rho^M}\right)^2, M > 2$	-	-

TABLE V  
 FORM OF  $\chi(\mathbf{J}\mathbf{J}^t)$  FOR  $\rho \approx 1$

	$1 \pm \rho^M z^M$	$(1 \pm \rho z)^M$
Direct	1	$C(M)(1 - \rho)^{-2(M-1)}$
Lattice	$C(M)(1 - \rho)^{-1}, M = 2$ $C(M)(1 - \rho)^{-2}, M > 2$	$C(M)(1 - \rho)^{-1}$

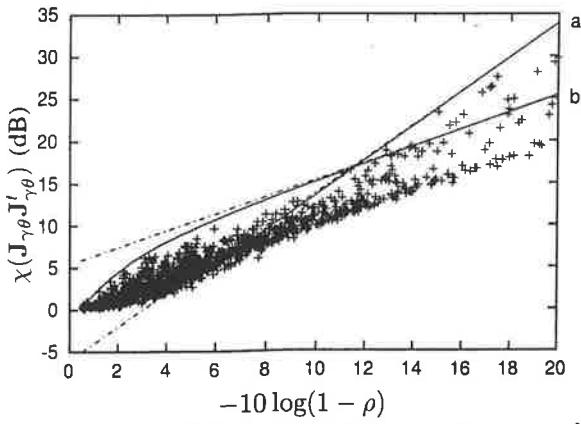


Fig. 6. Eigenvalue spread, lattice,  $M = 4$ . a) case  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$  (solid line),  $C(M)(1 - \rho)^{-2}$  asymptote (dash-dot); b) case  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$  (solid line),  $C(M)(1 - \rho)^{-1}$  asymptote (dash-dot); random  $D(z)$ : (points '+').

We consider two cases for  $H(z^{-1})$ , one with uniformly separated poles at  $0.7\angle \pm 45^\circ$  and  $0.7\angle \pm 135^\circ$ , and the other with more closely placed poles, at  $0.7\angle \pm 45^\circ$  and  $0.7\angle \pm 50^\circ$ . Stochastic gradient adaptive algorithms for direct form and lattice parameters were applied, starting at the origin and with adaptation steps  $\mu$  within a factor of 2 from the maximum value for stability. Local convergence speed  $S \doteq (1 - \mu \lambda_M)^{-2}$  of true gradient algorithms were also calculated, using the smaller eigenvalues. Results are in Table VI, for the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$  and for the origin of the parameter space (denoted by superscript "o"). At the origin,  $\mathbf{J}_{\theta o} = \mathbf{I}$  and the spreads are equal for both parameterizations.

With uniform pole separation the error reached  $-100$  dB after 287 and 380 iterations, for direct form and lattice parameters, respectively. As discussed in the previous section, for the direct form the eigenvalue spread at the point of minimum is 1 in this case, so it can't be better for the lattice. The decrease in convergence speed is small, though. For more closely placed poles the situation is largely reversed and convergence speed of the lattice is 68 times higher (in dB per iteration). To this contribute the facts that the spread is 29 times smaller and that the product  $\mu \lambda_M$  is 2.2 times higher than for the direct form.

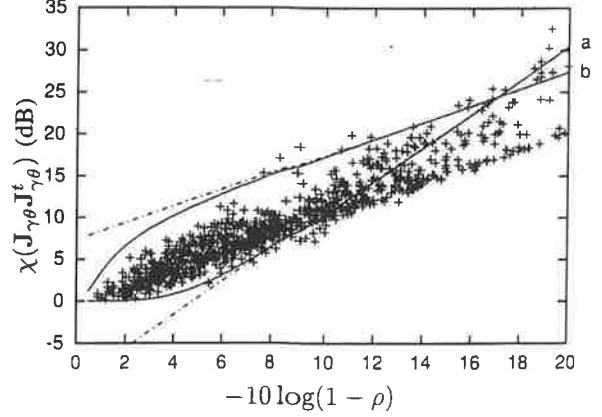


Fig. 7. Eigenvalue spread, lattice,  $M = 6$ . a) case  $D(z) = 1 \pm \rho z^M$  (solid line),  $C(M)(1 - \rho)^{-2}$  asymptote (dash-dot); b) case  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$  (solid line),  $C(M)(1 - \rho)^{-1}$  asymptote (dash-dot); random  $D(z)$ : (points '+').

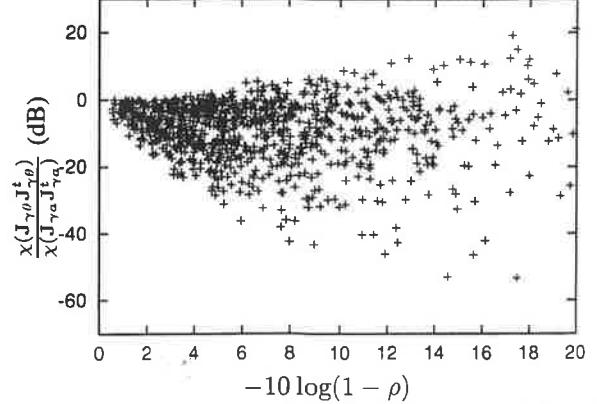


Fig. 8. Relation of the eigenvalue spreads for the lattice and direct forms,  $M = 4$ , random  $D(z)$ .

The squared errors  $\epsilon(n) = [y(n) - \hat{y}(n)]^2$  are in Fig. 9.

As the eigenvalue spread at the origin is equal for both parameterizations, an effort to better initialize the adaptation can pay off much more in the lattice case. In the presented case, starting the adaptation with the poles at  $0.5\angle \pm 30^\circ$  and  $0.5\angle \pm 100^\circ$  (which is not unreasonably close to the true values  $0.7\angle \pm 45^\circ$  and  $0.7\angle \pm 50^\circ$ ) and the zeros at the reciprocals of the poles, makes the squared error reach  $-100$  dB in 1,100 iterations in the lattice case against 91,000 iterations in the direct form case. This also suggests that a variable adaptation gain  $\mu$  could be of interest. In the example, a higher value of  $\mu$  could, in principle, be used close to the origin, since the maximum eigenvalue is smaller than at the point of minimum, for both parameterizations.

TABLE VI  
CONVERGENCE PROPERTIES: UNIFORMLY SEPARATED (U) AND CLOSE (C) POLES, DIRECT FORM (D) AND LATTICE (L)

	$\mu$	$\lambda_1$	$\lambda_M$	$S$ (dB)	$\lambda_1^o$	$\lambda_M^o$	$S^o$ (dB)
U/D	0.08	1.1	1.1	0.77	1.4	0.54	0.39
U/L	0.08	1.6	0.61	0.44	1.4	0.54	0.39
C/D	0.005	23	0.12	0.0051	1.8	$3.6 \times 10^{-4}$	$1.6 \times 10^{-5}$
C/L	0.04	6.5	1	0.35	1.8	$3.6 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$

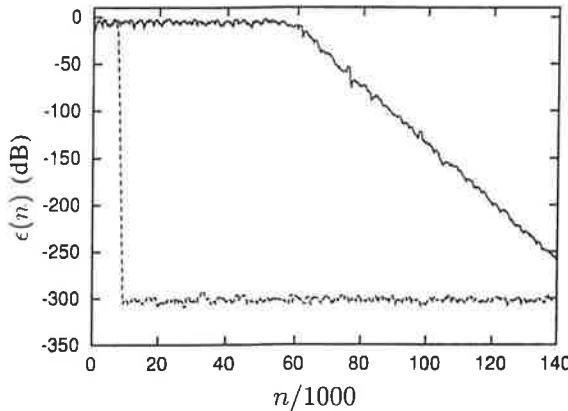


Fig. 9. Squared error resulting from the adaptation of the direct form (solid line) and lattice (dashed line) parameters.

## X. SUMMARY OF CONVERGENCE SPEED PROPERTIES

From the preceding results, the convergence speed of gradient-based adaptive IIR algorithms, with white input and sufficient modelling, tends to be as showed in Table VII. For the all-pass case, close to the global minimum  $\hat{H}(z) = H(z)$ , if the poles of  $H(z)$  are not too close to each other then convergence will be fast for either direct form or lattice parameters; otherwise, it will be fast only for the lattice. When the system is far from being all-pass (large Hankel singular value spread) convergence will be slow for both parameterizations.

An adaptive IIR algorithm that makes use of these properties is presented in [11]. Lattice parameterization is used as well as an auxiliary block to make the system to be identified approximately all-pass. It can exhibit much faster convergence than more conventional direct form or lattice constant gain adaptive algorithms, while keeping a relatively low computational complexity.

TABLE VII  
CONVERGENCE SPEED TENDENCY

	$H(z) \approx$ all-pass $\hat{H}(z) \approx H(z)$	$H(z) \not\approx$ all-pass
Direct form	Fast for separated poles Slow for concentrated poles	Slow
Lattice	Fast	Slow

## XI. CONCLUSION

The presented framework for convergence analysis of adaptive IIR filters leads to a greater understanding of the effects on convergence speed of factors such as the Hankel singular

values of the system, its order, the distribution of its poles and the choice of adapted parameters. It also is at the base of a new adaptive IIR algorithm with faster convergence and relatively low computation complexity. One desirable extension is in respect to the more general undermodelled case. Though reparameterization discussed in Sections III and IV applies to the undermodelled case, sufficient modelling is assumed in the sensitivity grammian analysis. Also, it would be of interest to extend this analysis to points other than the point of minimum.

## APPENDIX

### A. Implications of non-white input

Extension to the case of non-white input, that is,  $S_u(z) \neq \sigma_u^2$ , isn't immediate. Our results depend on the causality of certain functions, which, in turn, depend on the causality of  $S_u(z)$ . However, in the special case where  $u(n) = F(z)v(n)$ , with  $v(n)$  white and  $F(z)$  known, if the input of the adaptive filter is equalized by  $G(z)$ , such that  $F(z)G(z) \approx z^d$  and  $y(n)$  is delayed by  $d$  samples, then our results apply to the modified system  $F(z)H(z)$ .

### B. True gradient and stochastic gradient equations

The elements of the gradient vector are  $\frac{\partial}{\partial p_k} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 = -2(H(z) - \hat{H}(z), \frac{\partial}{\partial p_k} \hat{H}(z))$ . For direct form denominator parameters, for instance,  $\frac{\partial}{\partial a_k} \hat{H}(z) = -z^k \hat{H}(z)/A(z)$ . For actual implementation, the inner products are obtained by residue calculation. Now, since the input is white,  $\langle H(z) - \hat{H}(z), z^k \hat{H}(z)/A(z) \rangle = E[e(n)\hat{y}_f(n-k)]$ , where  $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ ,  $\hat{y}_f(n) = \frac{1}{A(z)}\hat{y}(n)$  and  $\hat{H}(z)$  is fixed. In the stochastic case, the expectation is dropped and  $\hat{H}(z)$  is time-varying, giving  $\frac{\partial}{\partial a_k} \|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 \approx 2e(n)\hat{y}_f(n-k)$ . The complete descriptions of the stochastic algorithms that are used are in [3, p.271] and [3, p.332], for the direct form and lattice cases, respectively.

### C. Proof of (2)

We write  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|^2 = \epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})$ , where  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{w}$  contain, respectively, the zero and the pole parameters. As defined, when  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\mathbf{w})$  the zero parameters are optimized given the poles. We note that even though  $\epsilon(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) = \epsilon(\mathbf{r}(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}), \mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$ , in general we have  $\epsilon(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w}) \neq \epsilon(\mathbf{r}(\mathbf{w}), \mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$  and, therefore the validity of (2) is not immediate.

When  $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\mathbf{w})$ ,  $\partial\epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})/\partial q_i = 0$  and the derivatives of interest are  $\partial\epsilon(\mathbf{q}, \mathbf{w})/\partial w_i|_{\mathbf{q}=\mathbf{r}(\mathbf{w})}$ . For notational simplicity, we consider scalar parameters, without loss of generality in the conclusion. We write initially  $\partial\epsilon(\mathbf{w})/\partial w =$

$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \Delta \varepsilon(w)/\Delta w$ , where  $\Delta \varepsilon(w) \doteq \varepsilon(w + \Delta w) - \varepsilon(w)$ . Defining  $\Delta \epsilon(r(w), w) \doteq \epsilon(r(w + \Delta w), w + \Delta w) - \epsilon(r(w), w)$ , and since, by definition,  $\varepsilon(w) = \epsilon(r(w), w)$  it follows that  $\Delta \varepsilon(w) = \Delta \epsilon(r(w), w)$ .

Writing now  $r(w + \Delta w) = r(w) + \Delta r$  and assuming  $\epsilon(q, w)$  is a smooth function,  $\Delta \epsilon$  can be expanded in a Taylor series as

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= \epsilon(r(w) + \Delta r, w + \Delta w) - \epsilon(r(w), w) \\ &= \frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial w} \Big|_{w, q=r(w)} \Delta w + \underbrace{\frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial q} \Big|_{w, q=r(w)}}_{=0} \Delta r + \\ &\quad + \sum_{\substack{n, m=0 \\ n+m>1}}^{\infty} d_{n,m} \Delta w^n \Delta r^m. \end{aligned} \quad (17)$$

Assuming  $r(w)$  is also a smooth function we have  $\Delta r = \sum_i \frac{1}{i!} (\partial^i r(w)/\partial w^i) \Delta w^i$ . Using this, the double sum term in (17) can be written as  $\sum_{n,m=0}^{\infty} d_{n,m} \Delta w^n \Delta r^m = \sum_{n=2}^{\infty} d'_n \Delta w^n$ , which combined with  $\Delta \varepsilon(w) = \Delta \epsilon(r(w), w)$  and (17) leads finally to

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(w)}{\partial w} &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon(w)}{\Delta w} \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta w} \left[ \frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial w} \Big|_{q=r(w)} \Delta w + \sum_{n=2}^{\infty} d'_n \Delta w^n \right] \\ &= \frac{\partial \epsilon(q, w)}{\partial w} \Big|_{q=r(w)}. \end{aligned}$$

#### D. Proof of Proposition 1

Optimizing the  $M + 1$  direct form parameters  $b_k$  of the numerator of  $\hat{H}(z)$  leads to the condition  $\langle C(z), H(z) - \hat{H}(z) \rangle = 0$ , where  $C(z)$  is a controllability transfer vector with elements  $z^i/A(z)$ ,  $i = 0, \dots, M$ , and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the standard inner product. This applies also to parameterizations of the zeros of  $\hat{H}(z)$  that give a non-singular Jacobian matrix with elements  $[J_{wb}]_{ij} = \partial w_i / \partial b_j$ . Now, more generally, if  $C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k b z^k$  for a completely controllable state-space pair  $(A, b)$  then, for  $f(z) \in \mathcal{H}_2$  (where  $\mathcal{H}_2$  is the Hardy subspace of causal and stable functions),

$$\langle C(z), f(z) \rangle = 0 \iff f(z) = q(z)S(z), \quad (18)$$

where  $q(z) \in \mathcal{H}_2$  and  $S(z)$  is the unit-norm all-pass function whose zeros are the eigenvalues of  $A$  [3, p.90]. Applying this to our case, in which  $A$  has dimension  $M+1$  [3, p.125], gives  $S(z) = zV(z)$ . We have, therefore,  $H(z) - \hat{H}(z) = g(z)V(z)$ , where  $g(z)$  is stable and strictly causal. Since  $V(z)$  is all-pass, the error on the reduced error surface is  $\varepsilon = \|g(z)\|^2$ .

From this it can be shown [3, p.126] that  $g(z)$  is the strictly causal projection of  $V(z^{-1})H(z)$ . Grouping the coefficients of  $V(z)$  in  $v$ , leads then to  $\|g(z)\|^2 = v^t \Gamma_H^t \Gamma_H v$ , where  $\Gamma_H$  is the Hankel form of system  $H(z)$ . Now, it can be shown that  $\Gamma_H = \sum_{k=1}^N \zeta_k \sigma_k \eta_k^t$ , where  $\sigma_k$  are the Hankel singular values and  $\zeta_k$  groups the coefficients of the expansion of  $\zeta_k(z)$  [15]. As vectors  $\eta_k$  and  $\zeta_k$  form orthonormal sets,

we have, returning to polynomial form,  $\varepsilon = \|g(z)\|^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle^2$ . With  $\alpha_k \doteq \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle$ , this gives (3).

#### E. Proof of Proposition 2

It can be shown [3, p. 92] that functions  $\zeta_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , and the all-pass functions  $z^m \bar{D}(z)/D(z)$ ,  $\bar{D}(z) \doteq z^N D(z^{-1})$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , form a complete orthonormal basis for  $\mathcal{H}_2$ . With it, all-pass  $V(z) = \bar{A}(z)/A(z) \in \mathcal{H}_2$  can be written as  $\bar{A}(z)/A(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \zeta_k(z) + [P(z)/Q(z)] \bar{D}(z)/D(z)$ ,  $P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}_2$ . Noting that  $\zeta_k(z)$  has always the form  $R_k(z)/D(z)$ ,  $\deg[R_k(z)] < N$ , we can make  $Q(z) = A(z)$ . Roots shared by  $A(z)$  and  $D(z)$  are superfluous, but can be cancelled by  $P(z)$ . From this follows (4), where  $\deg[P(z)] \leq M$  is obtained comparing the orders on both sides.

#### F. Proof of proposition 3

A controllability transfer vector is formed grouping functions  $\zeta_k(z) = R_k(z)/D(z)$ . From (18) and (6) results then the condition  $\bar{A}(z)/A(z) - \bar{X}(z)/X(z) = q(z) \bar{D}(z)/D(z)$ , with  $q(z)$ ,  $\bar{A}(z)/A(z)$ ,  $\bar{D}(z)/D(z) \in \mathcal{H}_2$ . The right side of this condition has at least  $N$  zeros inside the unit circle, while the left side has at most a total of  $M + L$  zeros. Now:

1) If  $L \leq M < N$  or  $L < M \leq N$ , then  $M + L < N$  and the condition implies  $q(z) \equiv 0$ , which gives  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ . If  $A(z)$  has no roots on the unit circle then, for  $L = M$ , the only solution is  $X(z) = A(z)$ , while for  $L < M$  there is no solution. If  $A(z)$  has roots on the unit circle, these will also be roots of  $\bar{A}(z)$  and there may be a  $X(z)$ , possibly an infinite number of them, such that  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ .

2) If  $M < L \leq N$  or  $M \leq L < N$ , then we also must have  $q(z) \equiv 0$  and  $\bar{A}(z)X(z) = A(z)\bar{X}(z)$ . If we restrict  $X(z)$  to have no roots on the unit circle then the only solution is  $X(z) = A(z)$ .

3) If  $L = M = N$ , then  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$  has  $2N$  roots. Due to its symmetry, each root  $z_0$  with  $|z_0| < 1$  is paired with a root  $1/z_0$ . Also, since the coefficients are real, each complex root  $z_0$  with  $|z_0| = 1$  is paired with a complex conjugate root  $z_0^*$ . Now,  $z = 1$  is always a root of  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$ , and doesn't fall under any of these cases. To complete the  $2N$  roots, then, it must be paired with a root either at  $z = 1$  or at  $z = -1$ . This means that  $\bar{A}(z)X(z) - A(z)\bar{X}(z)$  has at most  $N - 1$  roots inside the unit circle. Therefore, if  $q(z) \neq 0$ , of the  $N$  roots of  $\bar{D}(z)$  at least one is outside or on the unit circle, which would contradict our initial assumption that  $H(z) \in \mathcal{H}_2$ . We must have, therefore,  $q(z) \equiv 0$ , which brings us back to case 1).

#### G. Proof of proposition 4

For direct form parameters the elements of  $J$  are  $\partial \alpha_i / \partial a_j \doteq \langle \zeta_i(z), \frac{\partial}{\partial a_j} V(z) \rangle$ , where  $\frac{\partial}{\partial a_j} V(z) = [z^{M-j} A(z) - z^j \bar{A}(z)]/A^2(z)$ . Defining  $X(z) \doteq \sum_{j=1}^M x_j z^j$ ,  $\bar{X}(z) \doteq z^M X(z^{-1})$  and  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^t$ , the elements of  $Jx$  are given by  $[Jx]_i = \langle \zeta_i(z), [\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z)]/A^2(z) \rangle$ . With (18), then, if  $Jx = 0$  we have

$$\frac{\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z)}{A^2(z)} = q(z) \frac{\bar{D}(z)}{D(z)}, \quad (19)$$

for some  $q(z) \in \mathcal{H}_2$ . This has, essentially, the same form as the equation considered in Appendix F. From the arguments presented there, if  $H(z) \in \mathcal{H}_2$  and  $M \leq N$  then  $\bar{X}(z)A(z) - X(z)\bar{A}(z) \equiv 0$ . Now, to satisfy this we cannot have  $X(z) = A(z)$ , since  $X(z)$  is strictly causal and  $A(z)$  is not. We must have, then,  $X(z) \equiv 0$ . We conclude that  $\mathbf{J}\mathbf{x} = 0$  requires  $\mathbf{x} = 0$ , that is,  $\mathbf{J}$  has rank  $M$ . This extends to parameterizations of the poles of  $\hat{H}(z)$  that give a non-singular matrix with  $[\mathbf{J}_{wa}]_{ij} = \partial w_i / \partial a_j$ .

### H. Proof of Proposition 8

$\mathbf{J}'\Sigma^2\mathbf{J}$  is symmetric, having orthogonal eigenvectors [14]. If the gradient is in the subspace of eigenvectors associated to eigenvalues  $\lambda_m, \dots, \lambda_M$ , which are in descending order, we have, with (9),  $\alpha^t \Sigma^2 \mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha \leq \lambda_m \|\mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha\|^2$ . Using the linearly independent eigenvectors of  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2$  (see Proposition 7) we write  $\alpha = \sum_{k=1}^M \beta_k \mathbf{q}_k + \sum_{k=M+1}^N \beta_k \mathbf{q}_k$ , where  $\mathbf{q}_{M+1}, \dots, \mathbf{q}_N$  are associated to null eigenvalues. We have then  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha = \sum_{k=1}^M \lambda_k \beta_k \mathbf{q}_k$ . Using this in the first equation leads to  $\|\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \beta_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=m}^M \lambda_k \beta_k \mathbf{v}_k\|^2 \leq \lambda_m \|\mathbf{J}^t \Sigma^2 \alpha\|^2$ , where  $\mathbf{v}_k \doteq \Sigma \mathbf{q}_k$  are also linearly independent, since the elements of diagonal  $\Sigma$  are strictly positive. When  $\lambda_m, \dots, \lambda_M$  tend to zero then  $\|\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \beta_k \mathbf{v}_k\|^2$  must also tend to zero, which, in turn, means coefficients  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ , tend to zero, since  $\mathbf{v}_k$  are linearly independent. Thus,  $\alpha$  tends to the space of  $\mathbf{q}_m, \dots, \mathbf{q}_N$ , as claimed.

### I. Proof of Proposition 10

The elements of  $\mathbf{J}_{\gamma a}$  are  $\partial \gamma_i / \partial a_j \doteq \langle \xi_i(z), \frac{\partial}{\partial a_j} V(z) \rangle$ . With (19), the elements of the product  $\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{x}$  at the global minimum, where  $A(z) = D(z)$ , are given by

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{x}]_i &= \left\langle \xi_i(z), \frac{\bar{X}(z)}{D(z)} - \frac{X(z)}{D(z)} \frac{\bar{D}(z)}{D(z)} \right\rangle = \\ &= \begin{cases} 1, & \bar{X}(z) = \hat{D}_{i-1}(z) \\ 0, & \bar{X}(z) = \hat{D}_{k-1}(z), k \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

The last equality is due to functions  $\xi_k(z)$  forming an orthonormal set and being orthogonal to any  $q(z)\bar{D}(z)/D(z)$ ,  $q(z) \in \mathcal{H}_2$  [3, p.60]. From (20) then, follows (13).

### J. Lattice recursions

Functions  $\hat{D}_k(z)$  are obtained from the Schur recursion

$$\begin{bmatrix} D_{k-1}(z) \\ z\hat{D}_{k-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta_k} \begin{bmatrix} 1 & -\sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_k(z) \\ \hat{D}_k(z) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

for  $k = M, M-1, \dots, 1$ , where  $D_M(z) = D(z)$ ,  $\hat{D}_k(z) = z^k D_k(z^{-1})$  are of degree  $k$  and  $\sin \theta_k = \hat{D}_k(0)/D_k(0)$  [3]. In the ascending order the recursion is

$$\begin{bmatrix} D_k(z) \\ \hat{D}_k(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta_k} \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta_k \\ \sin \theta_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{k-1}(z) \\ z\hat{D}_{k-1}(z) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

for  $k = 1, 2, \dots, M$ , with  $D_0(z) = \prod_{k=1}^M \cos \theta_k$ .

### K. Eigenvalue spread formulas

1) *Second order direct form:* From the Schur recursion (21) we obtain  $\hat{D}_1(z) = \sqrt{1-\rho^4}(-\mu+z)$  and  $\hat{D}_0(z) = \sqrt{1-\rho^4}\sqrt{1-\mu^2}$ , with  $\mu \doteq \nu/(1+\rho^2)$ . We have then  $\mathbf{S}_{dl}^t \mathbf{S}_{dl} = (1-\rho^4)(\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Pi})$ . With (14) it follows, then, that  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) = [1+|\mu|]/[1-|\mu|] = [1 \pm s\rho^2 + |\nu|]/[1 \pm s\rho^2 - |\nu|]$ .

2) *Higher-order direct form,*  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$ : If  $\rho \approx 1$  then from the Schur recursion (21) we have  $\theta_k \approx (-1)^k \frac{\pi}{2}$ . Carrying out now the reversed Schur recursion (22) leads to  $\hat{d}_{k,j} \approx (-1)^{j-k} \binom{k}{j} \hat{d}_{0,0} / \prod_{i=1}^k \cos \theta_i$ , with  $\hat{d}_{0,0} = \prod_{k=1}^M \cos \theta_k$ . From this and  $\theta_k \approx (-1)^k \frac{\pi}{2}$  it results that the coefficients of  $\hat{D}_k(z)$  are much greater in modulus than the corresponding coefficients of  $\hat{D}_{k-1}(z)$ , that is,  $|\hat{d}_{k,j}| \gg |\hat{d}_{k-1,j}|$ . One consequence of this is that  $\max\{\lambda(\mathbf{S}_{dl} \mathbf{S}_{dl}^t)\} \approx ||\hat{D}_{M-1}(z)||^2$ , for which we use the fact that for a symmetric matrix  $\mathbf{A}$  we have  $\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \max\{\lambda(\mathbf{A})\} \mathbf{x}^t \mathbf{x}$ , for any  $\mathbf{x}$ . Also, it can be verified numerically that, in this case,  $\min\{\lambda(\mathbf{S}_{dl} \mathbf{S}_{dl}^t)\} \approx ||\hat{D}_0(z)||^2/M$ . Combining these eigenvalue results with (14), we have that  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) \approx M ||\hat{D}_{M-1}(z)||^2 / ||\hat{D}_0(z)||^2$ . With the approximation for  $\hat{d}_{kj}$ , we have, finally  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma a} \mathbf{J}_{\gamma a}^t) \approx M \sum_{j=0}^{M-1} \binom{M-1}{j}^2 / \prod_{i=1}^{M-1} \cos^2 \theta_i$ . The exponent  $-2(M-1)$  in Table V is due to the term  $\prod_{i=1}^{M-1} \cos^2 \theta_i$ .

3) *Second-order lattice :* From (13), (15) and (16) we have that  $\mathbf{J}_{a\theta}^{-1} \mathbf{S}_{dl}^t$  is diagonal and  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = (\hat{d}_{0,0}/[\mathbf{J}_{a\theta}]_{1,1})^2$ . With the expression for  $\frac{\partial}{\partial \theta_k} D(z)$  in Section VII-C we arrive at  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = 1 + \rho^2/1 - \rho^2$ . The exponent  $-1$  in Table V follows from the fact that  $1 - \rho^2 = (1 + \rho)(1 - \rho)$ .

4) *Higher-order lattice :* For  $D(z) = 1 \pm \rho^M z^M$ , we have  $\hat{D}_k(z) = ||1/D(z)||^{-1} z^k$ . With (15) it follows that  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t) = \chi(\mathbf{J}_{a\theta} \mathbf{J}_{a\theta}^t)$ . It is rather straightforward, then, to show that the result in Table IV holds. Since  $1 - \rho^M = (1 - \rho)P(\rho)$ , with  $P(1) \neq 0$ , the exponent in Table V is  $-2$ . For the case  $D(z) = (1 \pm \rho z)^M$ , the dependency of  $\chi(\mathbf{J}_{\gamma\theta} \mathbf{J}_{\gamma\theta}^t)$  on  $\rho$  is more involved and we have limited ourselves to a numerical evaluation.

## REFERENCES

- [1] J. Treichler, C. R. Johnson, Jr., and M. G. Larimore, *Theory and design of adaptive filters*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2001.
- [2] J. J. Shynk, "Adaptive IIR filtering," *IEEE ASSP Magazine*, vol. 6, no. 2, pp. 4-21, Apr. 1989.
- [3] P. A. Regalia, *Adaptive IIR filtering in signal processing and control*. New York: Marcel Dekker, 1995.
- [4] S. D. Stearns, "Error surfaces of recursive adaptive filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 6, pp. 603-606, June 1981.
- [5] C. R. Johnson, Jr., "Adaptive IIR filtering: current results and open issues," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 30, no. 2, pp. 237-250, Mar. 1984.
- [6] H. Fan, "A structural view of asymptotic convergence speed of adaptive IIR filtering algorithms. I. Infinite precision implementation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 4, pp. 1493-1517, Apr. 1993.
- [7] P. A. Regalia, "Stable and efficient lattice algorithms for adaptive IIR filtering," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 2, pp. 375-388, Feb. 1992.
- [8] P. M. S. Burt and M. Gerken, "A polyphase IIR adaptive filter: error surface analysis and application," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 3, Münich, 1997, pp. 2285-2288.

- [9] R. López-Valcarce and F. Pérez-González, "Adaptive IIR lattice filtering revisited: convergence issues and new algorithms with improved stability properties," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 4, pp. 811–821, Apr. 2001.
- [10] L. Ljung and T. Söderström, *Theory and practice of recursive identification*. Cambridge: MIT Press, 1983.
- [11] P. M. S. Burt and P. A. Regalia, "A new framework for convergence analysis and algorithm development of adaptive IIR filters," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 2, Montreal, 2004, pp. 441–444.
- [12] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2004.
- [13] B. C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 17–32, Feb. 1981.
- [14] G. Strang, *Linear algebra and its applications*. Philadelphia: Saunders, 1988.
- [15] F. Deprerere, Ed., *SVD and signal processing*. Amsterdam: North-Holland, 1988.

# ADAPTIVE IIR FILTERING: CONVERGENCE SPEED PROPERTIES IN THE UNDERMODELED CASE

Phillip M. S. Burt \*

Dept. of Telecomm. and Control Eng.  
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo  
CEP 05508-900 São Paulo SP Brazil

Phillip A. Regalia

Dept. of Electrical Eng. and Computer Sci.  
Catholic University of America  
Washington, D.C., 20064

## ABSTRACT

Previous results based on balanced realization theory and concerning the local convergence speed of adaptive IIR filters apply to the sufficient order case. In the undermodelled case, situations of greater practical interest are those in which the order chosen for the adaptive filter provides a good approximation of the system being modelled. A relevant question is then if the existence of a good approximation of the system implies a good approximation of the sufficient order convergence speed properties. We address this problem here, based on the same balanced realization theory framework. Our results suggest a positive answer to the question.

## 1. INTRODUCTION

Several aspects of adaptive IIR filters have been tackled over the years, leading to different adaptive algorithms and realization structures. We can mention, for instance, problems related to local minima, stability and the effect of poles close to the unit circle. Many references can be found in [1]–[3]. In [4, 5], we presented an analysis of the local convergence speed of adaptive IIR filters, based on balanced realization theory. From it, followed a new adaptive IIR algorithm. These results applied mostly to the sufficient order case.

In practice, however, the undermodelled case is more common. Not because the order of the adaptive filter is wrong chosen, but because the underlying physical system being modelled has a very high order, possibly infinite (meaning its transfer function is not rational). It is also true, though, that situations of greater practical interest are those in which the order chosen for the adaptive filter provides a good approximation of the system being modelled. A relevant question in

these cases, then, is whether convergence speed properties derived for sufficient order can be applied with any confidence. In other words, does the existence of a good approximation of the system (according to a suitable criterion) imply a good approximation of the sufficient order convergence speed properties? We address this problem here, based on the framework presented in [4, 5].

## 2. INITIAL ASSUMPTIONS

We consider an adaptive IIR filtering identification problem: a rational function  $\hat{H}(z)$  is adapted so as to minimize the mean square error between the output  $\hat{y}(n) = \hat{H}(z)u(n)$  produced for a known white input  $u(n)$  and the noisy output of a system  $H(z)$  to the same input,  $y(n) = H(z)u(n) + \eta(n)$ . In this mixed notation,  $z$  is the unit-delay operator, with  $zu(n) = u(n-1)$ . Assuming additive noise  $\eta(n)$  is independent of  $u(n)$  makes the problem equivalent to the minimization of the  $L_2$  norm  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|$ . We consider that in  $\hat{H}(z)$  we can vary  $M$  zeros,  $M$  poles and a gain. We say, therefore, that  $\hat{H}(z)$  is “of order  $M$ ”.

The system being identified  $H(z)$  is assumed to have order  $N \geq M$  and to have the form

$$H(z) = H_m(z) + \delta H_d(z), \quad (1)$$

where  $H_m(z)$  has order  $M$ . Undermodelling is due to the discrepancy  $\delta H_d(z)$ , for which we assume

$$\|[H_d(z)]_+\|_\infty = 1,$$

with  $\|[H_d(z)]_+\|_\infty = \sup_\omega |\sum_{n=1}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}|$ . These assumptions imply that  $\min_{\hat{H}(z)} \|H(z) - \hat{H}(z)\|$  is upper bounded, as we now verify.

A norm inequality true for any  $F(z)$  is

$$\|[F(z)]_+\| \leq \|\Gamma_F\| \leq \|[F(z)]_+\|_\infty, \quad (2)$$

\*Supported by FAPESP and CAPES.

where  $\|\Gamma_F\|$  is the Hankel norm of  $F(z)$ . With  $F(z) = H(z) - H_m(z)$ , it follows that

$$\|[F(z)]_+\| \leq \|[F(z)]_+\|_\infty = \delta \|[H_d(z)]_+\|_\infty = \delta.$$

Now, the minimization of  $\|H(z) - \hat{H}(z)\|$  always leads to  $\hat{h}(0) = h(0)$  [3]. Making then  $\hat{h}(0) = h(0)$  and  $\hat{h}(n) = h_m(n)$ ,  $n > 0$ , we obtain  $\|H(z) - \hat{H}(z)\| \leq \|H(z) - \hat{H}(z)\|_\infty = \delta$ . Therefore, under the adopted assumptions,  $\min_{\hat{H}(z)} \|H(z) - \hat{H}(z)\| \leq \min_{\hat{H}(z)} \|H(z) - \hat{H}(z)\|_\infty \leq \delta$ .

Properties of the convergence speed of IIR adaptive filters were obtained in [4, 5], mostly for the case of sufficient modelling ( $N = M$ ). In the setting described above, this is achieved with  $\delta = 0$ , leading to  $H(z) = H_m(z)$ . Our aim here is to analyze how these properties extend to the undemodelled case for small values of  $\delta$ .

### 3. REVIEW OF CONVERGENCE SPEED PROPERTIES

We review here the convergence speed properties of adaptive IIR filters obtained in [4, 5]. A new parameterization of the adaptive filter's poles was introduced:  $\alpha_k \doteq \langle \zeta_k(z), V(z) \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the standard inner product,  $\zeta_k(z)$  is the normalized transfer function between the input  $u(n)$  and the  $k$ -th state variable  $x_k(n+1)$  in a balanced realization of  $H(z)$  and  $V(z)$  is the  $M$ -order all-pass function with the same poles as the adaptive filter  $\hat{H}(z)$ . The adaptation process of a chosen set of pole parameters  $w_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  (for instance, direct form parameters or lattice parameters) can be locally described in terms of these new parameters as

$$\alpha(n+1) \approx [\mathbf{I} - \mu \mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2] \alpha(n),$$

where  $\alpha(n) = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^t$ ,  $\Sigma$  is the diagonal matrix of Hankel singular values of  $H(z)$  and the elements of sensitivity matrix  $\mathbf{J}$  are  $[\mathbf{J}]_{kj} = \partial \alpha_k / \partial w_j$ . We note that  $\mathbf{J}$  depends on  $\alpha(n)$ , which is not explicitly indicated for greater simplicity of the notation.

Local convergence speed depends on the eigenvalue spread  $\chi(\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2)$  of the  $M$  non-null eigenvalues of the  $N \times N$  matrix  $\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2$ . In summary its properties are:

1) When  $H(z)$  is far from being all-pass ( $\chi(\Sigma) \gg 1$ ), convergence tends to be slow, irrespective of parameterization.

2.1) When  $H(z)$  is close to all-pass ( $\chi(\Sigma) \approx 1$ ) and  $\hat{H}(z) \approx H(z)$  (sufficient order assumed), convergence for direct form parameters is fast if the poles of  $H(z)$  are uniformly distributed and slow if they are concentrated.

2.2) Under the same conditions, convergence of lattice parameters is fast and less dependent on the pole distribution.

### 4. UNDERMODELLED CASE

On the assumptions made in Section 2 and based on the convergence speed properties discussed in Section 3, our aim is to analyze how the eigenvalue spread  $\chi(\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2)$  for the undermodelled case ( $\delta > 0$  in (1)) relates to the eigenvalue spread  $\chi(\mathbf{J}_m \mathbf{J}_m^t \Sigma_m^2)$  for the associated sufficient order case ( $\delta = 0$ ). We will in fact analyze the eigenvalues of the  $M \times M$  matrix  $\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}$ , which are the same as the non-null eigenvalues of  $\chi(\mathbf{J} \mathbf{J}^t \Sigma^2)$ . We note that for any  $\mathbf{X}$  and  $\mathbf{Y}$  such that  $\mathbf{XY}$  is square, for the non-null eigenvalues we have  $\lambda(\mathbf{XY}) = \lambda(\mathbf{YX})$ . This matrix property is repeatedly used in the following.

#### 4.1. Discrepancy of controllability functions

As seen in Section 3, let  $\zeta_k(z) = \sum_n \zeta_{kn} z^n$ ,  $k = 1, \dots, N$  be the normalized controllability functions of a balanced realization of  $H(z)$ . Let now  $\zeta_{m,k}(z)$  be the ones related to  $H_m(z)$ , with  $k = 1, 2, \dots, M$ . We define then the discrepancy functions  $\Delta_k(z) \doteq \zeta_k(z) - \zeta_{m,k}(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ .

The norms  $\|\Delta_k(z)\|$  and  $\|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty$  can be related, as described in the following. Defining the normalized infinite horizon controllability matrix  $\mathcal{C}_M \doteq [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_M]^t$ , where  $\zeta_k \doteq [\zeta_{k0} \ \zeta_{k1} \ \dots]^t$ , and likewise  $\mathcal{C}_m \doteq [\zeta_{m,1} \ \zeta_{m,2} \ \dots \ \zeta_{m,M}]^t$ , we can write

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \sigma_{m,k}^2 \|\Delta_k(z)\|^2 &= \sum_{k=1}^M \sigma_{m,k}^2 \|\zeta_k(z) - \zeta_{m,k}(z)\|^2 \\ &= \text{trace} [\Sigma_m (\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m) (\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m)^t \Sigma_m] \\ &\leq M \lambda_{\max}[(\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m) (\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m)^t \Sigma_m^2], \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\Sigma_m = \text{diag}[\sigma_{m,1} \ \sigma_{m,2} \ \dots \ \sigma_{m,M}]$  contains the Hankel singular values of  $H_m(z)$  and  $\lambda_{\max}[\cdot]$  denotes the maximum eigenvalue of the argument.

Now, the Hankel form of  $H(z)$  is given by  $\Gamma_H = \mathcal{O} \Sigma \mathcal{C}$  [3, p. 150], where  $\mathcal{C} \doteq [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_N]^t$  and  $\mathcal{O}$  is an infinite horizon observability matrix. Likewise,  $\Gamma_{H_m} = \mathcal{O}_m \Sigma_m \mathcal{C}_m$ . At this point we make a necessary approximation, which is good for small values of  $\delta$ :

$$\Gamma_H \approx \mathcal{O}_m \Sigma_m \mathcal{C}_M.$$

From this,  $\Gamma_{H-H_m} \approx \mathcal{O}_m \Sigma_m (\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m)$ . We have then

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{H-H_m}\|^2 &= \lambda_{\max}(\Gamma_{H-H_m} \Gamma_{H-H_m}^t) \\ &\approx \lambda_{\max}(\mathcal{O}_m \Sigma_m [\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m] [\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m]^t \Sigma_m \mathcal{O}_m^t) \end{aligned}$$

$$= \lambda_{\max}([\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m][\mathcal{C}_M - \mathcal{C}_m]^t \Sigma_m^2), \quad (4)$$

where we used  $\mathcal{O}_m^t \mathcal{O}_m = \mathbf{I}$ . Combining (2), (3) and (4) we arrive at

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \sigma_{m,k}^2 \|\Delta_k(z)\|^2 &\lesssim M \|\Gamma_{H-H_m}\|^2 \\ &\leq M \| [H(z) - H_m(z)]_+ \|^2_\infty, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\lesssim$  indicates an approximate upper bound.

## 4.2. Sensitivity matrix partition

We make the partition  $\mathbf{J}^t = [\mathbf{J}_M^t \mathbf{J}_R^t]$ , where  $\mathbf{J}_M$  is  $M \times M$  and  $\mathbf{J}_R$  is  $R \times M$ ,  $R = N - M$ . We have, then  $\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J} = \mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R$ . For  $\mathbf{J}_M$  we also have

$$[\mathbf{J}_M]_{k,j} = \langle \frac{\partial}{\partial w_j} V(z), \zeta_k(z) \rangle = [\mathbf{J}_m]_{k,j} + [\mathbf{J}_\Delta]_{k,j} \quad (6)$$

where  $[\mathbf{J}_m]_{k,j} \doteq \langle \frac{\partial}{\partial w_j} V(z), \zeta_{m,k}(z) \rangle$  and  $[\mathbf{J}_\Delta]_{k,j} \doteq \langle \frac{\partial}{\partial w_j} V(z), \Delta_k(z) \rangle$ .

For greater notational simplicity, we define  $\mathbf{K}_m \doteq \Sigma_M \mathbf{J}_m$  and  $\mathbf{K}_\Delta \doteq \Sigma_M \mathbf{J}_\Delta$ . An approximation for the upper bound of the norm of  $\mathbf{K}_\Delta$  is obtained as follows. For a unit-norm  $\mathbf{x}$  we have

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{x} &= \sum_{j=1}^M \langle \frac{\partial}{\partial w_j} V(z), \sum_{k=1}^M x_k \sigma_k \Delta_k(z) \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^M \left\| \frac{\partial}{\partial w_j} V(z) \right\|^2 \left\| \sum_{k=1}^M x_k \sigma_k \Delta_k(z) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^M \left\| \frac{\partial}{\partial w_j} V(z) \right\|^2 \sum_{k=1}^M \sigma_k^2 \|\Delta_k(z)\|^2, \end{aligned}$$

where we used

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^M x_k \Delta_k(z) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^M x_k \sum_l \Delta_{k,l} z^l \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_l \left( \sum_{k=1}^M x_k \Delta_{k,l} \right) z^l \right\|^2 = \sum_l \left( \sum_{k=1}^M x_k \Delta_{k,l} \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_l \left( \sum_{k=1}^M x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^M \Delta_{k,l} \right)^2 = \sum_l \sum_{k=1}^M \Delta_{k,l}^2 = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_l \Delta_{k,l}^2 = \sum_{k=1}^M \|\Delta_k(z)\|^2. \end{aligned}$$

Now, since  $\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t) = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{x})$ , with (5) and assuming  $\sigma_k \approx \sigma_{m,k}$ ,  $k = 1, \dots, M$ , we arrive at

$$\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t) \lesssim M \sum_{j=1}^M \left\| \frac{\partial}{\partial w_j} V(z) \right\|^2 \| [H(z) - H_m(z)]_+ \|^2_\infty. \quad (7)$$

## 4.3. Eigenvalue bounds

From the partition of the sensitivity matrix follows

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) + \\ &\quad + \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R). \end{aligned} \quad (8)$$

The second term of this sum is

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R) &= \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R \mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2) \\ &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R \mathbf{J}_R^t) \sigma_{M+1}^2. \\ \text{AAK theory gives } \sigma_{M+1}^2 &\leq \|\Gamma_{H-H_m}\|^2. \text{ With (2). then,} \\ \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R) &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R \mathbf{J}_R^t) \times \\ &\quad \| [H(z) - H_m(z)]_+ \|^2_\infty. \end{aligned} \quad (9)$$

In [5] it is shown that  $\lambda(\mathbf{J} \mathbf{J}^t)$  depends only on the poles of  $H(z)$ . The same can be shown for an upper bound for  $\lambda(\mathbf{J}_R \mathbf{J}_R^t)$ , bound which is therefore constant with  $\delta$ . Due to its growth with the square of the norm, when  $\delta$  is small we can then discard  $\lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R)$ .

Using (6) now in the first term of (8) gives

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) &= \\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^t \mathbf{K}_m^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}) \\ &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^t \mathbf{K}_m^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} + 2|\mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_m \mathbf{x}| + \mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}) \\ &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\|\mathbf{K}_m \mathbf{x}\| + \|\mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}\|)^2 \\ &\leq \left[ \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} + \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t)} \right]^2. \end{aligned}$$

For the minimum eigenvalue,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) &\geq \lambda_{\min}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) = \\ &= \min_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^t \mathbf{K}_m^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} + \mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}) \\ &\geq \min_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{x}^t \mathbf{K}_m^t \mathbf{K}_m \mathbf{x} - 2|\mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_m \mathbf{x}| + \mathbf{x}^t \mathbf{K}_\Delta^t \mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}) \\ &\geq \min_{\|\mathbf{x}\|=1} (\|\mathbf{K}_m \mathbf{x}\| - \|\mathbf{K}_\Delta \mathbf{x}\|)^2. \end{aligned}$$

Assuming  $\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)$  gives then

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) &\geq \\ &\geq \left[ \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} - \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t)} \right]^2. \end{aligned}$$

Proceeding similarly, we obtain also the bounds

$$\lambda_{\max}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) \geq \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R) \geq$$

$$\geq \left[ \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} - \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t)} \right]^2$$

and  $\lambda_{\min}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) + \lambda_{\max}(\mathbf{J}_R^t \Sigma_R^2 \mathbf{J}_R) \lesssim \lambda_{\min}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M)$ , with

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{J}_M^t \Sigma_M^2 \mathbf{J}_M) &\leq \\ &\leq \left[ \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} + \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\Delta \mathbf{K}_\Delta^t)} \right]^2. \end{aligned}$$

Combining these expressions with (7) and using  $G = \sqrt{M \sum_{j=1}^M \|\frac{\partial}{\partial w_j} V(z)\|^2}$ , we obtain the following bounds for the eigenvalue spread of  $\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}$ :

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) &= \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J})}{\lambda_{\min}(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J})} \lesssim \\ &\lesssim \left[ \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} + G \|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} - G \|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty} \right]^2 \end{aligned} \quad (10)$$

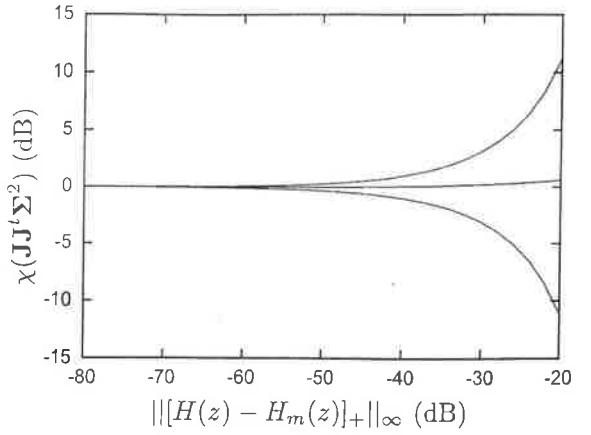
and

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J}) &\gtrsim \\ &\gtrsim \left[ \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} - G \|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_m \mathbf{K}_m^t)} + G \|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty} \right]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Provided  $G$  is itself bounded, as  $\|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty$  tends to zero these bounds tend uniformly to the eigenvalue spread of the sufficient modelling case. In relation to our initial problem, then, this means that a good approximation of the sufficient order convergence speed properties is obtained for sufficiently small values of  $\|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty$ . We note that, in these expressions,  $G$  is a constant, since it depends only on the poles of  $\hat{H}(z)$ . An analytical assessment of this dependency is a matter for future work.

## 5. NUMERICAL EXAMPLE

In (1) we consider that  $H_m(z^{-1})$  is all-pass with uniformly distributed poles at  $0.8 \angle \pm 45$  and  $0.8 \angle \pm 135$ . In this case, for direct form parameters,  $\chi(\mathbf{J}_m^t \Sigma_m^2 \mathbf{J}_m) = 1$  at  $\hat{H}(z) = H_m(z)$  and convergence is fast for sufficient order. Function  $H_d(z^{-1})$  is also all-pass but with more concentrated poles, at  $0.8 \angle \pm 5$  and  $0, 8 \angle \pm 20$ . For a sufficiently large  $\delta$ , therefore, convergence would be slow. The true value of the eigenvalue spread  $\chi(\mathbf{J}^t \Sigma^2 \mathbf{J})$  at  $\hat{H}(z) = H_m(z)$  as well as the bounds (10) and (11) were calculated for different values of  $\delta$ . The results are in Figure 1, where the fact that  $\|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty = \delta$  is used.



**Fig. 1.** True eigenvalue spread, lower and upper bounds.

## 6. CONCLUSION

Approximate upper and lower bounds were obtained for the eigenvalue spread that determines local convergence speed of adaptive IIR filters in the identification of a system  $H(z)$ , assuming an undermodelled setting. These bounds tend uniformly to the eigenvalue spread of the sufficient order identification of a system  $H_m(z)$ , as the norm  $\|[H(z) - H_m(z)]_+\|_\infty$  tends to zero. This result suggests that when there is a good undermodelled approximation of a system, as is the case in situations of greater practical interest, then convergence speed properties are close to those derived under the sufficient order assumption.

## 7. REFERENCES

- [1] J. Treichler, C. R. Johnson, Jr., and M. G. Larimore. *Theory and design of adaptive filters*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2001.
- [2] J. J. Shynk. "Adaptive IIR filtering," *IEEE ASSP Magazine*, vol. 6, no. 2, pp. 4–21, Apr. 1989.
- [3] P. A. Regalia. *Adaptive IIR filtering in signal processing and control*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [4] P. M. S. Burt and P. A. Regalia, "A new framework for convergence analysis and algorithm development of adaptive IIR filters," in *Proc. IEEE ICASSP*, Montreal, 2004, vol. 2, pp. 441–444.
- [5] P. M. S. Burt and P. A. Regalia, "A new framework for convergence analysis and algorithm development of adaptive IIR filters," *Accepted for publication, IEEE Transactions on Signal Processing*.