VIVIANE CRISTINE SILVA

Engenheira Eletricista, EPUSP, 1985

Mestre em Engenharia, EPUSP, 1991

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, França, 1994

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO À SOLUÇÃO
DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Professora Livre Docente.

Área de Concentração:
Engenharia Elétrica

São Paulo

2006

VIVIANE CRISTINE SILVA

Engenheira Eletricista, EPUSP, 1985

Mestre em Engenharia, EPUSP, 1991

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, França, 1994

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO À SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Professora Livre Docente
junto ao Departamento de Engenharia de
Energia e Automação Elétricas.

São Paulo

2006

A Hernán, Gustavo e Rodrigo

Agradecimentos

Gostaria de dirigir meus sinceros agradecimentos às pessoas a seguir.

Em primeiro lugar ao Prof. Dr. José Roberto Cardoso, pioneiro da aplicação do Método de Elementos Finitos em Sistemas de Aterramento, pelo incentivo, apoio e amizade ao longo de toda minha carreira acadêmica e pela motivação para prosseguir com este trabalho.

Aos colegas do LMAG, Prof. Silvio Nabeta e Prof. Luiz Lebensztajn pelo companheirismo e amizade ao longo de tantos anos que temos trabalhado juntos.

Aos doutorandos do PEA/EPUSP Marcelo Facio Palin e Fábio Henrique Pereira e ao Dr. Sérgio L. L. Verardi pela inestimável contribuição e ajuda nos aspectos computacionais.

E por fim à minha família, pelo apoio incondicional e tolerância nos prolongados momentos de ausência.

RESUMO

SILVA, V. C. *Método de Elementos Finitos aplicado à solução de problemas de aterramento elétrico*. São Paulo, 2006. 89p. Tese (Livre Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo de sistemas de aterramento utilizando o Método de Elementos Finitos no regime estacionário e no regime harmônico. No primeiro caso, adequado à modelagem em baixas frequências, adota-se uma representação dos eletrodos baseada em formulação especial de elementos unidimensionais com salto de potencial. A modelagem para o regime harmônico, adequada a condições de operação em altas frequências, utiliza formulação híbrida, de aresta e nodal, em dois potenciais: potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico, sem imposição de condição de Coulomb. Os eletrodos são modelados como condutores perfeitos e despreza-se a corrente de deslocamento no ar, limitando o domínio de estudo ao meio condutor. Nas duas situações o sistema é alimentado em corrente, sendo que a excitação é contemplada através de uma condição de Neumann não homogênea, e o semi espaço condutor, relativo ao solo, é truncado por absorvedores anisotrópicos fictícios, PML, de parâmetros reais e perfil polinomial, terminados por fronteiras perfeitamente condutoras. Os resultados de impedância e distribuição de potenciais na superfície em configurações típicas são comparados com valores de referência, experimentais, analíticos e numéricos, disponíveis na literatura.

ABSTRACT

SILVA, V. C. *Finite element analysis applied to the modeling of earthing systems*. São Paulo, 2006. 89p. Thesis (Livre Docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

A full 3D finite elements analysis is presented to compute the characteristics of grounding systems in steady state and time-harmonic domain. In the first case, an electrokinetic formulation is applied which includes the use of special 1D elements with potential jump to model grounding electrodes. In the second case the full set of Maxwell equations governing the phenomenon in the time-harmonic domain is solved by applying the edge finite element approach. The field variables are written in terms of potential functions, namely magnetic vector potential and electric scalar potential, yielding a hybrid edge-nodal ungauged $A-V$ formulation. The grounding electrodes are modeled as perfect electric conductors and displacement currents in free space are neglected. In both cases the current-feeding of the grounding systems are implemented through a non homogeneous Neumann condition. The domain is truncated with the aid of PEC-backed perfectly matched layers with real parameter and polynomial profile. The methodology has been applied in several configurations of grounding systems presented in the literature. The results are compared with both analytical and experimental data reported by other authors, as well as with other numerical methods, with overall good agreement.

SIMBOLOGIA

E	campo elétrico real ou complexo (V/m)
J	densidade de corrente elétrica real ou complexa (A/m ²)
H	campo magnético real ou complexo (A/m)
B	densidade de fluxo magnético real ou complexo (T)
D	densidade de fluxo elétrico real ou complexo (C/ m ²)
A	potencial vetor magnético (Wb/m)
J_i	densidade de corrente induzida real ou complexa
J_0	densidade de corrente impressa real ou complexa (de excitação ou devido a fontes externas)
J_d	densidade de corrente de deslocamento real ou complexa
J_s	densidade de corrente elétrica superficial real ou complexa (A/m)
J_{PD}	densidade de corrente impressa real ou complexa no ponto de defeito
$\bar{E}_t$	componente tangencial do campo elétrico
$\bar{H}_t$	componente tangencial do campo magnético
J_0, J_1	funções de Bessel
R	resistência elétrica (Ω) ou resíduo do Método Residual de Galerkin
P	potência dissipada (W)
L	indutância (H)
C	capacitância (F)
$\dot{Z}$	impedância complexa (Ω)
U	tensão, diferença de potencial (V)
I	corrente elétrica (A)
V	potencial escalar elétrico (V)
D	espessura do PML
UI^*	potência aparente complexa (VA)
LI^2	dobro da energia magnética armazenada
$\frac{1}{\omega C} I^2$	dobro da potência reativa capacitiva
S	seção transversal de condutor

G	condutância (S)
Z_r	impedância superficial (Ω)
N	função de forma nodal escalar
w	função de forma vetorial de aresta
x, y, z	coordenadas de sistemas de coordenadas cartesiano
r, ϕ, z	coordenadas de sistemas de coordenadas cilíndrico
a	integral de linha de A sobre aresta de elemento finito ou parâmetro do PML
a_{max}	valor máximo do parâmetro do PML
e	integral de linha do campo elétrico sobre aresta de elemento finito
v	integral no tempo do potencial escalar elétrico V
j	$\sqrt{-1}$
r	raio de condutor, resíduo ou componente radial de sistema de coordenadas cilíndrico
f	frequência (Hz)
t	variável tempo (s) e componente tangencial de vetor
nn	número de nós de um elemento
na	número de arestas de um elemento
NE	número total de elementos finitos
l	comprimento de eletrodo ou de elemento unidimensional (m)
n_{PML}	número de camadas do PML
h	dimensão linear um elemento finito
$\hat{n}$	vetor unitário normal
$\hat{t}$	vetor unitário tangencial
$\hat{u}$	vetor unitário de sistema de coordenadas ortogonal
Ω	volume do domínio, subdomínio ou de um elemento finito
Γ	fronteira de domínio, subdomínio ou de um elemento finito
$[\Lambda]$	tensor de parâmetros do PML
ε	permissividade (F/m)
ε_0	permissividade do vácuo
μ	permeabilidade magnética (H/m)
ν	relutividade magnética (m/H)
ρ	resistividade elétrica ($\Omega.m$) ou densidade volumétrica de carga elétrica (C/m^3)
ρ_s	densidade superficial de carga elétrica (C/m^2)

σ condutividade elétrica (S/m)
 ω frequência angular (rd/s)
 τ_L, τ_C constantes de tempo indutiva e capacitva (s)

Subscritos e Sobrescritos

e relativo a um elemento finito
 i, j nós e arestas genéricos da malha de elementos finitos
 S solo
 E eletrodo
 E/S interface eletrodo/solo
 $1/2$ interface entre dois meios 1 e 2
 PD ponto de defeito
 n, t componentes vetoriais normal a uma superfície e tangencial a um percurso
 r, ϕ, z componentes radial, azimutal e axial de um vetor em sistemas de coordenadas cilíndricas

Abreviaturas

MEF	Método de Elementos Finitos
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEC	Método de Elementos de Fronteira ou Contorno
ICCG	<i>Incomplete Cholesky Conjugate Gradient</i>
SICCG	<i>Shifted ICCG</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
PEC	<i>Perfect Electric Conductor</i>
PML	<i>Perfectly Matched Layers</i>
MEF1	MEF com elementos unidimensionais
MEF2	MEF com elementos unidimensionais com salto de potencial
H32	Caso teste de haste vertical de 32 m
GS4, 16, 36, 60	Casos teste de sistemas de aterramento com 4, 16, 36 e 60 malhas

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO À SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO

Índice

Resumo

Abstract

Simbologia

1.	Introdução	1
1.1	Apresentação do problema	1
1.2	Objetivos	5
1.3	Organização do documento	5
2.	Estado da Arte	6
2.1	Introdução	6
2.2	Revisão bibliográfica	6
2.3	Resumo.....	11
3.	Regime Estacionário.....	12
3.1	Introdução	12
3.2	Condução de correntes estacionárias ou Eletrocinética	12
3.3	Formulação do Método de Elementos Finitos na Eletrocinética	15
3.4	Solução do sistema linear de equações algébricas	20
3.5	Cálculo de grandezas globais	20
3.6	Resumo.....	22
4.	Regime Harmônico	23
4.1	Introdução	23
4.2	Equações de Maxwell no regime harmônico e equação da onda vetorial.....	24
4.3	Formulação em dois potenciais: potencial vetor magnético A e potencial escalar elétrico V	26
4.4	Solução do sistema linear de equações algébricas	31
4.5	Cálculo de grandezas globais	32
4.6	Resumo.....	34
5.	Aspectos de Implementação do Método de Elementos Finitos para o Problema de Aterramento	35
5.1	Introdução	35

5.2	Modelagem dos eletrodos – elementos filiformes em regime estacionário e harmônico	35
5.2.1	Elemento unidimensional na Eletrocinética	36
5.2.2	Elemento unidimensional com salto de potencial (Eletrocinética)	38
5.2.3	Formulação $A-V$ de aresta com Impedância Superficial unidimensional	42
5.2.4	Eletrodos como condutores perfeitos – Regime Harmônico.....	45
5.3	Truncamento do domínio usando Absorvedores Anisotrópicos Fictícios (PML)	46
5.4	Modelo do sistema de aterramento no regime estacionário	48
5.5	Modelo do sistema de aterramento no regime harmônico	49
5.6	Discretização e parâmetros do PML	51
5.7	Resumo.....	53
6.	Aplicação e Resultados	54
6.1	Introdução	54
6.2	Regime estacionário.....	54
6.3	Regime harmônico	60
6.4	Resumo.....	66
7.	Conclusões	67
7.1	Observações gerais e conclusões	67
7.2	Principais contribuições do trabalho	71
7.3	Tópicos para desenvolvimento posterior	72
	Referências Bibliográficas	73

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação do problema

O principal objetivo de um sistema de aterramento é garantir a segurança de humanos e prevenir danos a instalações. O objetivo secundário é servir de referência para todo o sistema elétrico e eletrônico interligados.

A análise de sistemas de aterramento de redes elétricas de transmissão e distribuição é importante por razões de segurança e proteção de equipamentos. Em sistemas típicos, a diferença de potencial entre diferentes pontos pode fazer com que circule corrente em seres humanos ou equipamentos susceptíveis a altas tensões. Então é essencial determinar essa diferença de potencial sob condições normais ou na ocorrência de um defeito, como um surto de manobra ou descarga atmosférica.

Em condições normais é suficiente adotar a aproximação estática, para baixas frequências, ou regime estacionário. Nesse caso assume-se que o campo elétrico e a corrente no solo podem ser derivados a partir de um potencial escalar elétrico que obedece a Equação de Laplace. Se o problema envolver sistemas de aterramento de configurações complexas, métodos numéricos de solução podem ser necessários.

Soluções baseadas na equação de Laplace são limitadas no sentido de que são válidas até um determinado valor de frequência, dependendo portanto do tamanho dos eletrodos da malha de aterramento e das características elétricas do solo. Basicamente, os eletrodos devem ser muito menores que o comprimento de onda no solo para que essa aproximação seja correta. Uma condição suficiente para a validade dessa aproximação foi quantitativamente estabelecida em [46] e diz que os comprimentos dos eletrodos de uma malha de aterramento devem ser menores que um décimo do comprimento de onda no solo para que as hipóteses de regime estático ou quase estático sejam

válidas.

Entretanto, há situações como, por exemplo, surtos de manobra e descargas atmosféricas, para as quais as correntes de alta frequência podem se tornar importantes. Nesse casos, os riscos de danificar equipamentos são maiores que os de eletrocução em humanos [46].

Um sistema de aterramento equipotencial é um conceito teórico aplicável somente no caso estático. Na prática a indução eletromagnética faz com que a tensão entre dois pontos seja maior que zero. Essas desigualdades locais de tensão de referência são causas de distúrbios que podem ocasionar mal funcionamento e destruição de componentes em sistemas eletrônicos conectados ao sistema de aterramento. Sendo assim, estudos de compatibilidade eletromagnética exigem o conhecimento dessa distribuição espacial e temporal de tensões ao longo do sistema no caso de surtos nos sistemas eletrônicos e descargas atmosféricas.

A determinação de respostas transitórias e harmônicas devido a descargas atmosféricas e surtos de manobra consiste, portanto, numa etapa primordial para o projeto de sistemas de aterramento mais eficientes. Em geral determina-se primeiro a resposta harmônica, ou no domínio da frequência, e as respostas transitórias são obtidas usando transformadas de Fourier [38].

Primeiramente a corrente transitória deve ser decomposta em componentes harmônicos através de uma Transformada de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*). Em seguida seleciona-se um número finito de componentes que configurem uma amostra representativa do espectro. Então se determina a resposta harmônica do sistema de aterramento para cada uma das correntes selecionadas. De posse dessas soluções o comportamento no domínio do tempo em qualquer ponto no espaço pode ser obtido pela FFT inversa de todas as respostas naquele ponto. De acordo com [58], esse procedimento é o mais adequado, visto que as características elétricas do solo (condutividade e constante dielétrica) em geral dependem da frequência e seria difícil levar em conta essa dependência com uma análise no domínio do tempo.

Entretanto, esse procedimento, a rigor, só é aplicável a problemas lineares, o que em princípio impediria a sua utilização em sistemas de aterramento cujo solo está sujeito ao fenômeno de ionização [34,51,54], mas ele tem sido usado mesmo nessas condições.

O fenômeno de ionização do solo [58,59] ocorre quando o campo elétrico ultrapassa o gradiente de ionização do solo (tipicamente 300 a 1000 kV/m [49, 58]) e há ruptura dielétrica desse meio, provocando uma diminuição da sua resistividade. Isso acontece quando os sistemas de aterramento têm de drenar correntes impulsivas de altíssima intensidade, como aquelas oriundas de descargas atmosféricas ou curto fase-terra, por exemplo, tornando a resposta ao impulso tipicamente não linear. Entretanto, esse fenômeno não tem influência dominante durante a subida da corrente impulsiva (e, portanto, nas frequências mais altas), quando ocorrem os máximos de tensão e

impedância transitórias, pois é necessário um tempo maior para que esse fenômeno se desenvolva no solo [49,58].

Basicamente três abordagens têm sido usadas para a determinação de campos eletromagnéticos e distribuição de correntes em sistemas de aterramento, seja em regime estacionário, seja em altas frequências, e compreendem abordagens baseadas em:

- 1) Teoria de circuitos
- 2) Teoria eletromagnética
- 3) Acoplamento entre as teorias de circuitos e eletromagnética

A primeira é baseada na substituição de todos os elementos condutores por uma rede elétrica equivalente. A análise conduz diretamente a resultados em termos de correntes e tensões nos pontos de interesse.

A segunda baseia-se na solução direta das equações eletromagnéticas de Maxwell aplicadas a condutores energizados e outras estruturas metálicas próximas, diretamente energizadas ou não. É o que oferece mais vantagens em termos de precisão, flexibilidade e capacidade de modelagem, porém é mais complicado que o precedente e geralmente seu uso só é viável através de métodos numéricos de solução.

Os aplicativos baseados na terceira abordagem buscam explorar as vantagens das duas primeiras.

Quando o problema exige a aplicação da teoria eletromagnética com solução por métodos numéricos, abre-se outro leque de opções. Os métodos numéricos para solução de equações diferenciais a derivadas parciais, ou problemas de contorno, dividem-se em duas categorias: métodos ditos integrais ou de fronteira, onde se inclui, por exemplo, o Método dos Momentos e o Método de Elementos de Contorno (ou elementos de Fronteira); e os métodos ditos “diferenciais” ou métodos de domínio, como, por exemplo, Método de Diferenças Finitas (MDF) e Método de Elementos Finitos (MEF).

Os métodos integrais são métodos adequados para problemas a fronteiras abertas, como problemas de propagação de ondas, antenas e espalhamento, sendo que sua implementação e aplicação tornam-se complicadas em casos de configurações geométricas complexas e com meios heterogêneos, não lineares ou anisotrópicos. Além disso, conduzem a sistemas de equações cuja matriz é cheia, o que torna alto o custo computacional da sua solução.

Já os métodos diferenciais conduzem a sistemas de matrizes esparsas possibilitando melhores características de desempenho computacional. Mesmo com um alto grau de refinamento na discretização de um problema, o que resulta num sistema de ordem elevada, a esparsidade da matriz permite o uso de algoritmos iterativos de solução de alto desempenho.

Comparando MDF ao MEF, o primeiro leva a desvantagem de a implementação não ser genérica, apesar de mais simples, ou seja, cada equação diferencial necessita uma implementação específica. Além disso, ele exige uma discretização estruturada (uma grade, ou reticulado) o que complica a sua aplicação em dispositivos com geometria irregular.

O MEF não possui essas limitações; os elementos finitos podem ter qualquer formato, o que permite a utilização de malhas não estruturadas e a modelagem de dispositivos de formas irregulares com facilidade.

A desvantagem dos métodos diferenciais, como o MEF, é a de que, para tratar problemas a fronteiras abertas, deve-se efetuar um truncamento do domínio, o que pode ter impacto na solução se este não for feito de forma adequada. No entanto, existem inúmeras técnicas para tratar essa questão, o que torna viável a aplicação do método em problemas com essa característica. Exemplo de uma técnica interessante é o uso de absorvedores anisotrópicos fictícios, PML, aplicável tanto em altas quanto em baixas frequências.

Com relação a problemas de altas frequências, ou propagação de ondas, a utilização do MEF clássico, baseado em interpolação nodal, até alguns anos atrás oferecia dificuldades. Como exemplo pode-se citar o aparecimento de soluções espúrias, tanto em problemas de autovalores como em problemas determinísticos, a dificuldade de se impor condições de contorno, sobretudo quando as fronteiras não são paralelas aos eixos do sistema de coordenadas, e finalmente a dificuldade de se tratar singularidades dos campos em cantos e extremidades. Essas dificuldades surgem em parte porque o MEF nodal força a continuidade da variável de estado.

A técnica dos elementos finitos de aresta elimina essas dificuldades. Nessa abordagem se atribuem graus de liberdade às arestas dos elementos e não aos nós como na variante nodal. Ao contrário do MEF nodal, o MEF de aresta impõe continuidade tangencial apenas, o que o torna mais adequado para problemas de eletromagnetismo, visto que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ conservam apenas seus componentes tangenciais em interfaces entre materiais e as condições de contorno também se dão em termos de seus componentes tangenciais.

Por essa razão o MEF de aresta foi o método numérico escolhido para o desenvolvimento deste trabalho. Para frequências suficientemente baixas, em que as dimensões elétricas do problema são suficientemente grandes de acordo com os critérios estabelecidos em [46], diz-se que a natureza do problema é quase estática, com características de difusão, ou ainda estática, quando se recai num problema de Eletrocinética. No último caso a variante nodal do MEF é a mais indicada, uma vez que a variável de estado é escalar (potencial escalar elétrico). Já no caso do regime harmônico para altas frequências adota-se o MEF de aresta.

1.2 Objetivos

Este trabalho busca apresentar uma contribuição ao estudo e modelagem de sistemas de aterramento utilizando a técnica de elementos finitos através do desenvolvimento de aplicativos específicos para esse tipo de problema de modo a contemplar todas as suas características e proporcionar uma ferramenta de análise robusta e com bom desempenho numérico.

Os aplicativos desenvolvidos permitem a simulação de sistemas de aterramento no regime estacionário e no regime harmônico. No último caso não será considerado o fenômeno de ionização do solo.

1.3 Organização do documento

O Capítulo 2 apresenta o estado da arte relacionado à análise de sistemas de aterramento em regimes estacionário, harmônico e transitório, concentrando-se principalmente nos trabalhos baseados na teoria eletromagnética e no MEF.

O Capítulo 3 apresenta a formulação do método de elementos finitos no domínio da Eletrocinética para a modelagem de sistemas de aterramento no regime estacionário.

No Capítulo 4 é apresentada a formulação em dois potenciais (A - V) do método de elementos finitos de aresta no regime harmônico, bem como o cálculo da impedância complexa.

O Capítulo 5 aborda aspectos específicos da implementação adaptados à modelagem dos sistemas de aterramento, sobretudo no que concerne ao truncamento do domínio através de PML, modelagem dos eletrodos, seja no regime estacionário através de elementos unidimensionais com salto de potencial, seja no regime harmônico como condutores perfeitos.

No Capítulo 6 são apresentadas as aplicações das metodologias dos capítulos 3, 4 e 5 a sistemas de aterramento típicos, extraídos da literatura pertinente. Os resultados são comparados a valores experimentais, analíticos e a resultados obtidos por outros autores.

Finalmente, o Capítulo 7 sintetiza os principais resultados com conclusões, destaca as principais contribuições do mesmo e aponta algumas propostas para desenvolvimento posterior.

Capítulo 2

Estado da Arte

2.1 Introdução

Este Capítulo relata os principais trabalhos publicados sobre o problema de aterramento de sistemas elétricos, sobretudo aqueles baseados na teoria eletromagnética. Será visto que o problema vem sendo estudado através de diversas técnicas nos últimos anos, o que o caracteriza como um problema clássico.

Ao fim do Capítulo são apresentados um resumo da pesquisa bibliográfica realizada e uma avaliação em perspectiva da metodologia desenvolvida no presente trabalho, em relação aos demais trabalhos já publicados.

2.2 Revisão bibliográfica

O estudo de sistemas de aterramento em sistemas elétricos de potência é importante por razões de segurança humana e na proteção de equipamentos. No primeiro caso interessa o estudo desses sistemas sob condições estacionárias, a baixas frequências, enquanto que no segundo o risco de dano a equipamentos surge na presença de correntes impulsivas, como surtos de manobra e atmosféricos.

Os trabalhos disponíveis na literatura tratam independentemente as duas condições, sendo que a primeira corresponde a um caso particular da segunda.

A modelagem de sistemas de aterramento em altas frequências e no regime transitório tem sido tratada por um grande número de abordagens e o seu interesse se fundamenta na sua importância em numerosos problemas de engenharia, como por exemplo: proteção contra descargas

atmosféricas em edifícios residenciais, linhas telefônicas, de transmissão, de distribuição; qualidade de energia, compatibilidade eletromagnética em subestações, etc.

Os problemas são normalmente formulados no domínio da frequência e quando uma resposta transitória é necessária aplicam-se técnicas de transformada de Fourier ou Laplace. Isso limita a aplicação dos métodos a problemas lineares, ou seja, o fenômeno de ionização do solo quando sujeito a elevados impulsos de corrente em princípio não poderia ser considerado, embora ele tenha sido contemplado em alguns casos [50,51,54] através de um aumento na seção dos eletrodos.

Os trabalhos disponíveis, abordando métodos de cálculo analítico e simulação numérica, (seja no regime estático ou dinâmico) são classificados em três grupos [43]:

1. Métodos baseados no cálculo de campos eletromagnéticos;
2. Métodos baseados na teoria de circuitos e linhas de transmissão (TLM);
3. Métodos híbridos.

Os modelos baseados na teoria de circuitos podem ser a parâmetros concentrados ou distribuídos [49]. Em todos os casos, são limitados a solos homogêneos e superestimam a impedância em altas frequências. No entanto, dependendo das dimensões elétricas do sistema [46], essa abordagem pode ser utilizada com vantagens pela sua simplicidade e facilidade de interface com métodos de análise de sistemas elétricos de potência, os quais também se baseiam nessa abordagem.

Os modelos baseados na teoria eletromagnética são muito robustos quando comparados com os modelos baseados na teoria de circuitos, pois pressupõem menos hipóteses aproximadoras. Dessa maneira, serão mencionados aqui apenas os trabalhos baseados em modelos eletromagnéticos e que de alguma forma influenciaram as escolhas feitas durante a realização do presente trabalho.

Os primeiros trabalhos usam a Teoria de Antenas baseada numa formulação integral, o Método dos Momentos [37, 38, 45, 46, 54, 57]. Os cálculos geralmente incluem duas etapas: cálculo da distribuição de corrente nos condutores e em seguida cálculo dos campos. O método é, portanto, restrito a configurações com eletrodos horizontais ou verticais e a meios homogêneos e lineares. Trabalhos baseados no Método dos Elementos de Fronteira (ou Contorno) são mais recentes e limitados a aplicações estáticas [53].

Com a perspectiva de reduzir essas restrições, sobretudo com relação às características físicas do solo, apareceram os primeiros trabalhos utilizando métodos de domínio, em particular o MEF nodal no regime estático, que são creditados a Cardoso [30,31], seguidos posteriormente por Trlep [32,33,34].

Nekhoul utiliza em [34,35] o MEF com formulação nodal $A-V$ para o regime quase estático, assim como Passaro em [55].

Em [39], [40] e [56] é apresentada a modelagem baseada no MEF de aresta para o cálculo da impedância do problema no regime harmônico, utilizando truncamento simples do domínio.

Com relação aos trabalhos de cunho experimental, verifica-se uma carência de publicações, o que oferece uma dificuldade quando se busca validar os métodos numéricos e analítico-numéricos existentes. Grcev lista em [43] os poucos resultados experimentais existentes, sendo o trabalho de Bourg et al. [36] muito relevante, já que apresenta ensaios no domínio da frequência, além da metodologia analítica de cálculo para sistemas de aterramento canônicos, ou seja, compostos por uma única haste vertical enterrada.

A aplicação do MEF a problemas de domínio aberto encontra várias abordagens na literatura, uma vez que o domínio aberto precisa ser limitado para a construção da malha de elementos finitos.

Os métodos integrais levam vantagem nesse quesito, contemplando de maneira natural essa característica. No entanto, são menos versáteis no tratamento de domínios com características não homogêneas e não lineares, além de produzirem sistemas de equações algébricas com matrizes não esparsas.

Nos dois últimos quesitos citados acima, o MEF leva vantagens, apesar de oferecer um desafio para a modelagem de problemas a domínio aberto. Essa característica é geralmente tratada com uso de transformações de domínio.

Existem várias técnicas possíveis para o tratamento da questão quando se utiliza o MEF [2], como por exemplo, as técnicas que utilizam transformações espaciais, as que utilizam elementos infinitos, o truncamento simples do domínio, etc.

Nekhoul utiliza como técnica de truncamento em [34,35] transformações espaciais do domínio. Cardoso [30,31], assim como Passaro [55], divide as regiões mais externas do domínio e aplica transformações lineares sobre as coordenadas dos nós nessas regiões. O primeiro utiliza domínio cilíndrico, enquanto que o segundo um domínio hexaédrico. São também abordagens baseadas em transformações espaciais.

Nenhum dos trabalhos precedentes baseados em transformações espaciais analisa a adequação dessa metodologia a casos em que a frequência é suficientemente elevada de modo que os efeitos de propagação sejam importantes.

Nessas condições os métodos baseados no uso de condições de contorno absorventes são mais indicados. Jin [1] apresenta os principais, dando particular destaque à técnica baseada em PML – *perfectly matched layers*. Essa técnica proposta originalmente por Bérenger [19] tem se mostrado extremamente versátil para essa finalidade, sobretudo a sua versão sob a forma de materiais absorvedores anisotrópicos fictícios [27], pois não exige praticamente nenhuma alteração nos códigos de elementos finitos; basta que estes admitam materiais anisotrópicos em sua

implementação. Outra vantagem é sua validade inclusive no regime estacionário e quase estático [21, 22, 23, 24, 29].

Os primeiros trabalhos aplicando essa técnica em domínios abertos contendo dois semi espaços infinitos, um condutor (solo) e outro isolante (ar), são creditados a Chen et al. [64] no regime quase estático, em que utiliza o MDF, e mais recentemente Caorsi et al. [25] que utiliza o método de elementos finitos de aresta em altas frequências. Sua aplicação a sistemas de aterramento aparece em trabalhos baseados no MDF no domínio do tempo [52,47] (FDTD – finite difference time domain).

Com relação ao MEF, Bíró e Preis trazem em [61] uma revisão detalhada da formulação nodal utilizando o potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ e o potencial escalar elétrico V para problemas quase estáticos (correntes induzidas). Descreve as condições de contorno apropriadas para cada caso e propõe inclusive a mudança de variável $V = j\omega\psi$ como forma de se estabelecer a simetria do sistema de equações algébricas final.

Morweiser [9] utiliza essa formulação A - V nodal na modelagem de circuitos integrados em alta frequência contemplando correntes de deslocamento, com o intuito de determinar os parâmetros de circuito equivalente R , L e C .

A utilização do MEF em sistemas de aterramento iniciou-se na década de 90 com o trabalho de Cardoso [30,31] e mais adiante de seus colaboradores, incluindo a autora deste documento, abordando a modelagem dos eletrodos por elementos unidimensionais especiais [62, 63, 55], seguidos pelos trabalhos de Trlep et al. [32,33]. Essas referências contemplam apenas o regime estacionário.

Os primeiros trabalhos utilizando o MEF nodal no regime harmônico são creditados a Nekhoul [34,35] que utiliza acoplamento de formulações AV - A - ψ (AV no solo e A e ψ – potencial escalar magnético – no ar) com condição de Coulomb ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) conforme [61]. Embora considere correntes de deslocamento no solo, utiliza potencial escalar magnético no ar e transformações geométricas para o truncamento. Os eletrodos são modelados por elemento unidimensional convencional e em [35] tenta contemplar o efeito de ionização do solo conforme procedimento clássico, ou seja, aumentando-se a seção do eletrodo e utilizando discretização volumétrica nos mesmos. A metodologia é aplicada a um sistema de haste única.

Passaro [55] utiliza também o MEF nodal e formulação A - V nodal, mas com impedância superficial nos eletrodos. Realiza primeiro simulação eletrocinética para determinar a distribuição de $\mathbf{J}$ no solo e usa esse valor como excitação da simulação dinâmica. Apresenta também um estudo comparativo para o caso estático entre os elementos unidimensionais com discretização de primeira

ordem e de segunda ordem e com elementos unidimensionais especiais (propostos em [62,63]) e discretização de primeira ordem, ressaltando as vantagens do último.

Os primeiros trabalhos que se utilizam do MEF de aresta em sistemas de aterramento usando a formulação A - V são devidos à autora e colaboradores [39,40,41,56,60] e serão detalhados ao longo deste documento.

A utilização do MEF de aresta teve início na década de 80 e veio ganhando aceitação com o passar do tempo por conta dos bons resultados obtidos na modelagem de problemas de alta frequência e propagação de ondas [1,2,3].

Em [4] são revisadas uma série de formulações para o cálculo de campos eletromagnéticos utilizando os potenciais escalares e vetoriais concomitantemente com a utilização do MEF de aresta. Uma análise comparativa das formulações propostas, aplicadas ao MEF de aresta e ao MEF nodal, mostra que elementos de aresta são bem adaptados às equações vetoriais que regem os fenômenos eletromagnéticos. As funções de forma dos elementos de aresta forçam apenas a continuidade tangencial das grandezas calculadas, permitindo descontinuidade no componente normal. Além disso, condições de contorno são de fácil atribuição, uma vez que nos fenômenos eletromagnéticos elas se exprimem em termos de componentes tangenciais dos campos.

Em particular, na formulação A - V de aresta não há necessidade de se especificar a divergência de A , sendo que o sistema de equações algébricas resulta singular (embora positivo semi definido [4]).

A utilização do ICCG para a solução do sistema linear oriundo dessa formulação foi investigada por Fujiwara et al. [11] e um estudo comparativo foi feito sobre a validade de aplicação do método, demonstrando bons resultados e a rápida convergência da solução quando utilizados elementos de aresta, sem a necessidade de se impor a divergência de A . Para isso deve-se garantir a divergência da densidade de corrente impressa devido a fontes externas [4]. Tal condição é automaticamente satisfeita quando a excitação é dada através de uma diferença de potencial aplicada aos terminais do condutor.

Ida e Bastos [3] apresentam o MEF de aresta, descrevendo em detalhes a sua aplicação e a dedução das funções de forma vetoriais do elemento hexaédrico de primeira ordem.

Dular et al. [5] apresentam a formulação A - V com uma metodologia em que o condutor pode ser alimentado, seja por tensão, seja por corrente, sendo esta última equivalente a uma condição de Neumann não homogênea. Inicialmente ele resolve para V no condutor e utiliza essa solução como excitação numa segunda simulação em A . A excitação via condição de Neumann não homogênea foi utilizada com resultados positivos em [39, 40, 41, 56, 60], na simulação de um sistema de

aterramento em regime harmônico, utilizando o MEF de aresta e a formulação A - V . Nesse caso não se utilizou diretamente a abordagem de [5], mas resolveu-se simultaneamente para A e V .

2.3 Resumo

Os principais trabalhos publicados sobre sistemas de aterramento mostram que o problema tem sido objeto de análise através de várias técnicas diferentes, sejam elas baseadas na Teoria de Circuitos, sejam baseadas na teoria eletromagnética; em baixas ou altas frequências. Isso demonstra o grau de dificuldade do problema e procurou-se destacar aqui os trabalhos que se utilizam da técnica de elementos finitos.

No próximo Capítulo será apresentada a formulação do problema no regime estacionário – Eletrocinética – regido pela equação de Laplace. Será destacada a utilização de excitação por fonte de corrente, diferentemente do proposto em trabalhos prévios, alimentados em fonte de tensão.

Capítulo 3

Regime Estacionário

3.1 Introdução

Este Capítulo apresenta a formulação estática do Método de Elementos Finitos que será aplicada no estudo de sistemas de aterramento no regime estacionário – *Eletrocinética*. Aspectos particulares da aplicação que exigirão tratamento específico, como o truncamento do domínio, a representação dos eletrodos da malha de aterramento e a excitação em corrente, serão abordados no Capítulo 5. As unidades adotadas ao longo deste documento são aquelas do Sistema Internacional.

3.2 Condução de correntes estacionárias ou Eletrocinética

A dissipação de correntes de surto na terra pode ser modelada pelas Equações de Maxwell da Teoria Eletromagnética [2][3]. Limitando a análise ao campo de correntes estacionárias, o problema tridimensional associado à distribuição de corrente elétrica num meio condutor de volume Ω semi-infinito pode ser formulado como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{J} = [\sigma] \mathbf{E}, \quad (3.3)$$

sendo $[\sigma]$ o tensor de condutividade desse meio, $\mathbf{J}$ o campo vetorial densidade de corrente elétrica, que descreve o movimento de cargas elétricas nas vizinhanças de um ponto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de Ω , e $\mathbf{E}$ o campo elétrico.

No regime estacionário, por definição, a quantidade de carga não varia em cada ponto. Então a (3.2) representa uma lei de equilíbrio em Ω , conhecida como equação da continuidade, ou seja, uma lei de conservação que expressa a indestrutibilidade de carga.

A relação constitutiva (3.3) é a forma generalizada da Lei de Ohm e estabelece uma relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico a cada ponto x em termos do tensor de condutividade $[\sigma]$. Se o meio em questão for homogêneo, o tensor de condutividade é constante. Se o meio é isotrópico, o tensor é substituído por uma condutividade escalar σ .

A equação de Maxwell (3.1) prevê um campo elétrico irrotacional para o regime estacionário, de modo que deve existir um potencial escalar elétrico V , tal que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3.4)$$

Após substituição de (3.4) em (3.3) e (3.2), chega-se ao seguinte problema de contorno na região condutora:

$$\nabla \cdot (-[\sigma] \nabla V) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.5)$$

$$V = V_0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} \cdot \hat{n} = 0, \text{ ou } \nabla V \cdot \hat{n} = 0, \text{ em } \Gamma_N, \quad (3.7)$$

em que $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma = \delta\Omega$ corresponde à fronteira fechada que delimita Ω . A situação pode ser ilustrada pela Fig. 3.1.

Fig. 3.1 Problema de contorno regido pela Equação de Laplace (3.5) exibindo fronteiras de Dirichlet e Neumann.

A equação diferencial a derivadas parciais (3.5) que rege o fenômeno corresponde à Equação de Laplace, sujeita às condições de contorno de Dirichlet (3.6) em Γ_D , que são fronteiras onde o

potencial V é imposto, e condição de Neumann homogênea (3.7) em Γ_N , que no caso do aterramento corresponde à superfície do solo, ou seja, onde $\mathbf{J}$ é tangencial. Isso implica assumir que o semi-espaço relativo ao ar é um isolante perfeito. O produto escalar (3.7) fornece o fluxo de carga elétrica, isto é, a quantidade de carga fluindo por unidade de área e por unidade de tempo na direção do vetor $\hat{n}$, vetor unitário normal externo à fronteira Γ_N .

Ao problema de contorno dado por (3.5) a (3.7) deve-se ainda acrescentar as condições de passagem entre dois meios, 1 e 2, de propriedades distintas, como segue (Fig. 3.2):

$$\mathbf{E}_1 \times \hat{n}_1 = \mathbf{E}_2 \times \hat{n}_2 \text{ e} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{J}_1 \cdot \hat{n}_1 = \mathbf{J}_2 \cdot \hat{n}_2 \text{ em } \Gamma_{1/2}. \quad (3.9)$$

Fig. 3.2 Interface entre dois meios a condutividades diferentes.

De (3.9) se conclui que o componente do campo elétrico normal à superfície de interface entre dois meios a propriedades distintas sofre uma descontinuidade, ou seja:

$$\sigma_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{n}_1 = \sigma_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{n}_2, \quad (3.10)$$

ou

$$\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (3.11)$$

A solução do problema formulado por (3.5) a (3.7) fornece o potencial escalar elétrico $V(x,y,z)$ em qualquer ponto arbitrário em Ω , quando o mesmo é submetido à uma elevação de potencial $V_0 \neq 0$ relativa ao terra remoto (infinito), onde $V = 0$.

Esse tipo de problema já foi extensiva e rigorosamente estudado e sua solução pode ser obtida, por exemplo, pelo Método de Elementos Finitos (MEF). Para se chegar à formulação do MEF para a Eletrocinética pode-se aplicar o Método Variacional ou o Método Residual de Galerkin [2][3]. A seguir apresentaremos a segunda abordagem.

3.3 Formulação do Método de Elementos Finitos na Eletrocinética

Nesta seção o método de elementos finitos será aplicado à solução do problema de contorno definido por (3.5) a (3.7). O sistema de equações algébricas resultante será obtido através da aplicação do Método Residual de Galerkin [1][2].

O primeiro passo na aplicação do MEF é a discretização do domínio de interesse. Nesse caso deve-se subdividir o volume Ω em um número de pequenos elementos volumétricos; neste trabalho usaremos hexaedros ou prismas triangulares. Dessa forma a superfície que delimita o domínio será discretizada em triângulos ou quadriláteros.

Fica evidente aqui a necessidade, para a aplicação do MEF ou de qualquer outro método diferencial, de se efetuar um truncamento do domínio a fim de se poder efetuar a discretização, pois o problema de aterramento é um problema a fronteiras abertas, ou seja, se estende ao infinito. Assumir-se-á então que o domínio foi devidamente truncado para que se possa prosseguir com a análise. Detalhes acerca das técnicas utilizadas para esse truncamento serão abordados no Capítulo 5.

Uma vez discretizado o volume, aproxima-se a função incógnita no interior do elemento V por uma função $\tilde{V}$ que deverá ser escrita na forma:

$$V^e(x, y, z) \approx \tilde{V}^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^{nn} V_j^e N_j^e(x, y, z), \quad (3.12)$$

sendo nn o número de nós do elemento, $N_j^e(x, y, z)$ a função de forma do elemento e associada ao nó j e V_j^e a função no nó j . Quando se substitui a função aproximadora dada por (3.12) em (3.5), o erro residual associado se escreve como:

$$r = \nabla \cdot (-[\sigma] \nabla \tilde{V}), \quad (3.13)$$

e a integral do resíduo ponderado, ou equação residual de Galerkin, para um nó de um elemento genérico e de volume Ω^e fica:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e r d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, nn. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) em (3.14) resulta:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \nabla \cdot (-[\sigma] \nabla V^e) d\Omega. \quad (3.15)$$

O til foi omitido da função aproximadora de (3.12) por simplificação, já que não se utilizará mais, a partir de agora, a função original V . Aplicando a regra da cadeia, teorema da divergência e teorema de Green, chega-se a:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} \nabla N_i^e [\sigma] \nabla V^e d\Omega - \iint_{\Gamma^e} N_i^e [\sigma] \nabla V^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma, \quad (3.16)$$

sendo que Γ^e é a superfície que delimita Ω^e e $\hat{n}^e$, o seu vetor unitário normal externo. A substituição de V^e por (3.12) conduz à equação:

$$R_i^e = \sum_{j=1}^{nn} V_j^e \int_{\Omega^e} \nabla N_i^e [\sigma] \nabla N_j^e d\Omega - \iint_{\Gamma^e} N_i^e [\sigma] \nabla V^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma, \quad (3.17)$$

que pode ser escrita na forma matricial como:

$$\{R^e\} = [K^e] \{V^e\} - \{g^e\}.$$

Somam-se então a contribuição dos resíduos de todos os elementos do domínio (processo comumente chamado de *assemblagem*), originando:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{NE} \{R^e\} = [K] \{V\} - \{g\}, \quad (3.18)$$

em que NE é o número total de elementos, $\{V\}$ é o vetor com o potencial nos nós da malha de elementos finitos.

Igualando-se a zero os resíduos para cada nó da malha de elementos finitos, a equação residual de Galerkin para a Eletrocinética fica:

$$\int_{\Omega} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega - \iint_{\Gamma} N_i [\sigma] \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma = 0, \quad (3.19)$$

e chega-se ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$[K] \{V\} = \{g\}, \quad (3.20)$$

em que os termos genéricos de $[K]$ e $\{g\}$ são dados por:

$$K_{ij} = \int_{\Omega^e} \nabla N_i^e [\sigma] \nabla N_j^e d\Omega \quad (3.21)$$

e

$$g_i = \iint_{\Gamma^e} N_i^e [\sigma] \nabla V^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma. \quad (3.22)$$

No interior do domínio os termos relativos a g_i se anulam, dois a dois, a cada interface entre dois elementos [1][2], restando apenas a fronteira externa do domínio, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Em Γ_N esse termo é nulo de acordo com (3.7) e Γ_D é uma fronteira de Dirichlet, onde a função é conhecida, portanto o resíduo já é nulo e não necessita ser minimizado; nessas condições a função peso, N_i , pode ser considerada nula nessa fronteira. Assim, o sistema de equações algébricas se escreve:

$$[K] \{V\} = \{0\}. \quad (3.23)$$

Esse sistema é singular; sua solução só é possível após a aplicação das condições de contorno de Dirichlet, ou seja, a imposição de um potencial conhecido $V_0 \neq 0$ em ao menos um ponto do domínio.

Num sistema de aterramento isso corresponde a se atribuir um potencial diferente de zero no ponto de defeito, ou seja, no ponto onde a corrente de surto é injetada, e zero nas fronteiras remotas do domínio, onde o mesmo foi truncado. Esse ponto coincide sempre com a extremidade de um dos eletrodos da malha de terra. Isso corresponde a um sistema alimentado por fonte de tensão. No entanto, esse valor é em geral desconhecido; o que se conhece é o valor da corrente I que entra pelo ponto de defeito, ou seja, o sistema é alimentado por fonte de corrente. A situação é ilustrada na Fig. 3.3.

Fig. 3.3 Modelo de sistema de aterramento alimentado em tensão (a) e em corrente (b).

Os trabalhos apresentados até então, relativos à aplicação do MEF para o problema de aterramento, utilizam-se dessa abordagem, ou seja, resolvem a (3.23) impondo-se uma tensão qualquer U diferente de zero ao domínio [30 a 33], no ponto de defeito indicado na Fig. 3.3. Em seguida calculam a corrente total I' do domínio e fazem uma correção da solução, $\{V\}$ para a corrente real de defeito I , para se obter a solução real corrigida $\{V\}$, como segue:

$$\{V\} = \{V'\} \frac{I}{I'}. \quad (3.24)$$

Essa abordagem não será adotada neste trabalho, que será alimentado em corrente diretamente, o que elimina duas etapas: o cálculo de I' e a correção (3.24). Com isso espera-se, além de simplificar a implementação eliminando essas duas etapas, conseguir um ganho em precisão, já que em [32] a corrente I' é calculada via integral de superfície, ou seja:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \hat{n} d\Gamma = I. \quad (3.25)$$

Para isso é necessário escolher uma superfície para se efetuar a integração, o que numericamente compromete a precisão no cálculo da corrente, que fica dependente da escolha dessa superfície [9][13].

Para que o sistema de aterramento seja alimentado por uma fonte de corrente, ao invés de uma fonte de tensão, não se pode utilizar o sistema de equações (3.23). Deve-se retomar (3.20). Reescrevendo o termo genérico (3.22) do vetor $\{g\}$ como:

$$g_i = \iint_{\Gamma^e} N_i^e [\sigma] \nabla V^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma = \iint_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{J}^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma, \quad (3.26)$$

sendo que $\mathbf{J}$ é a densidade de corrente, observa-se que a superfície Γ^e , onde deve ser aplicada a corrente de surto, não corresponde a uma superfície do tipo Γ_D , nem Γ_N . No caso do sistema de aterramento essa superfície Γ^e corresponde à seção do eletrodo de passagem da corrente I de defeito, conforme ilustrado na Fig. 3.4. Trata-se de uma superfície com condição de Neumann não homogênea. No caso da seção Γ^e da Fig. 3.4, $\Gamma^e = \Gamma^{PD}$ e a integral de (3.25) é numericamente igual à corrente elétrica I que atravessa essa seção [5].

Fig. 3.4 Seção (Γ^{PD} , Ponto de Defeito) de eletrodo de terra onde é injetada corrente I .

No caso específico do problema estudado, quando o mesmo é resolvido pelo MEF ou qualquer método numérico, é comum, e até desejável, modelar os eletrodos por elementos unidimensionais, pois em geral seu diâmetro é desprezível face ao seu comprimento. Este trabalho adotará essa aproximação que será melhor detalhada no Capítulo 5. Nessas condições a seção do eletrodo se reduz a um ponto, ou nó da malha de elementos finitos que corresponde ao ponto de defeito, como segue:

$$g_i = \iint_{\Gamma^e = \Gamma^{PD}} N_i^e \mathbf{J}^e \cdot \hat{n}^e d\Gamma = I. \quad (3.27)$$

A (3.27) será diferente de zero somente para i igual ao ponto, ou nó, de injeção de corrente, ou ponto de defeito. O sistema de equações algébricas nessas condições fica:

$$[K] \{V\} = \{I\}. \quad (3.28)$$

A solução desse sistema fornece o valor do potencial elétrico a cada nó da malha de elementos finitos. Para obter o potencial em outros pontos que não os nós, utiliza-se a (3.12).

Pode-se notar que a matriz $[K]$ para a Eletrocinética tem dimensão de condutância, $G (\Omega)$, e como consequência o produto $[K]\{V\}$ tem dimensão de corrente, $I (A)$, conforme verificado em (3.27).

3.4 Solução do sistema linear de equações algébricas

A matriz $[K]$ de (3.28) é real, simétrica, esparsa (com elevado grau de esparsidade), de ordem elevada para problemas tridimensionais, podendo apresentar mal-condicionamento numérico dependendo das características físicas e geométricas do problema, bem como da qualidade da malha. A solução do sistema (3.28) é eficientemente realizada através de métodos de solução iterativos, como por exemplo, o ICCG: *Incomplete Cholesky Conjugate Gradient*, ou seja, Método de Gradientes Conjugados pré-condicionado por decomposição incompleta de Cholesky [11], que será utilizado neste trabalho e foi implementado na biblioteca LMAGLIB [7]. Considera-se que a convergência foi atingida quando o resíduo é menor que 10^{-4} .

3.5 Cálculo de grandezas globais

A partir da solução de (3.28), isto é, do potencial escalar elétrico, é possível determinar o campo elétrico em cada elemento do domínio, a densidade de corrente, a potência dissipada por efeito Joule como o somatório das potências dissipadas em cada elemento e por fim uma resistência equivalente do dispositivo.

O campo elétrico em cada elemento é obtido a partir do potencial escalar elétrico por (3.4), sendo que V é dado em função dos potenciais nos nós do elemento conforme (3.12), resultando em:

$$\mathbf{E}^e = -\nabla V = -\nabla \left(\sum_{j=1}^{nn} N_j^e \cdot V_j \right) = -\sum_{j=1}^{nn} \nabla N_j^e \cdot V_j = -[\nabla N^e] \{V^e\}. \quad (3.29)$$

A densidade de corrente é obtida por:

$$\mathbf{J}^e = -[\sigma] \nabla V = -[\sigma] [\nabla N^e] \{V^e\}. \quad (3.30)$$

A potência dissipada em cada elemento pode ser calculada na sua forma contínua como [17][9][30]:

$$P^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{J} d\Omega, \quad (3.31)$$

ou

$$P^e = \{V^e\}^T \left(\int_{\Omega^e} [\nabla N^e]^T [\sigma] [\nabla N^e] d\Omega \right) \{V^e\}, \quad (3.32)$$

ou ainda

$$P^e = \{V^e\}^T [K^e] \{V^e\}.$$

A potência dissipada total no domínio se calcula como:

$$P = \sum_{e=1}^{NE} P^e,$$

em que NE é o número total de elementos do domínio. A resistência equivalente pode então ser calculada por:

$$R = \frac{U^2}{P}, \quad (3.33)$$

sendo que U é a diferença de potencial à qual o dispositivo está submetido, ou seja,

$$U = V_a - V_b,$$

em que V_a e V_b são potenciais conhecidos, impostos ao domínio (condições de Dirichlet), para o caso de alimentação em tensão. No caso do sistema ser alimentado em corrente de valor I , tem-se:

$$R = \frac{P}{I^2}. \quad (3.34)$$

3.6 Resumo

Neste Capítulo foi apresentada a formulação em potencial escalar elétrico do método de elementos finitos nodal para o problema de condução elétrica no regime estacionário – *Eletrocinética* – que é regido pela equação de Laplace. Uma vez que o problema é alimentado em corrente, I (corrente de surto), a excitação é introduzida na formulação através de uma condição de Neumann não homogênea. Foi apresentado também o cálculo da resistência equivalente de aterramento.

No Capítulo 4 será abordada a formulação AV (potencial vetor magnético/potencial escalar elétrico) do MEF de aresta no domínio da frequência.

Capítulo 4

Regime Harmônico

4.1 Introdução

Este Capítulo apresenta a formulação matemática utilizada na resolução do problema de aterramento no regime harmônico, ou regime permanente senoidal.

A solução desse problema é de interesse para a determinação da resposta transitória dos sistemas de aterramento a correntes de excitação impulsivas, como por exemplo, surtos de manobra, descargas atmosféricas, curto fase-terra. A excitação impulsiva deve então ser decomposta em seus componentes harmônicos de Fourier por uma FFT. Em seguida determina-se a resposta a cada um dos componentes harmônicos do espectro e, de posse desses valores, efetua-se a FFT inversa para achar a resposta transitória. Este trabalho se limitará a determinação da resposta aos componentes harmônicos, ou seja, o regime senoidal.

Será apresentada a formulação híbrida nodal-aresta em dois potenciais: potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ e potencial escalar elétrico V , sem imposição da divergência de $\mathbf{A}$. Esta formulação tem se mostrado muito robusta e tem sido aplicada a uma vasta gama de problemas em eletromagnetismo, seja em baixas, seja em altas frequências. Suas vantagens sobre a formulação $\mathbf{A}$ - V nodal pura já foram exaustivamente relatadas na literatura [1 a 4].

O espectro de frequências de um surto de corrente chega a algumas dezenas de MHz. Na grande maioria dos casos, e para a maior parte das frequências do espectro, o problema tem natureza predominantemente difusiva [48]. Entretanto, para correntes impulsivas com tempo de subida muito curto, e dependendo das dimensões elétricas e características físicas do domínio, pode ser necessário resolver a equação de onda não homogênea, ainda que a atenuação no solo seja elevada. Nesta seção será então apresentada a formulação $\mathbf{A}$ - V para a equação de onda, configurando um problema determinístico. Detalhes relacionados às particularidades do problema de aterramento,

como o truncamento do domínio e a modelagem dos eletrodos, bem como as hipóteses adotadas, serão abordados no Capítulo 5.

4.2 Equações de Maxwell no regime harmônico e equação da onda vetorial

As equações de Maxwell no regime harmônico se aplicam quando os campos possuem variação senoidal no tempo, de frequência angular ω . Nessas condições, pode-se adotar a notação complexa fasorial, e as equações são dadas por [1]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ (Lei de Ampère),} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \text{ (Lei de Faraday),} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ (Lei de Gauss elétrica),} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ (Lei de Gauss magnética),} \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \text{ (Equação da continuidade),} \quad (4.5)$$

em que se omitiu por simplicidade o termo $e^{j\omega t}$. A notação para os campos de valor complexo não se distinguirá daquela usada para os campos estacionários do Capítulo 3, já que não serão usados ao mesmo tempo.

Os campos vetoriais $\mathbf{H}$ e $\mathbf{E}$ representam, respectivamente, os campos magnético e elétrico e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$, as densidades de fluxo magnético e elétrico; ρ representa uma densidade volumétrica de cargas e $\mathbf{J}$ corresponde ao campo vetorial densidade de corrente elétrica *total* que compreende três parcelas: densidade de corrente elétrica impressa, devido a fontes de corrente externas, $\mathbf{J}_0$, densidade de correntes parasitas, ou induzidas, em meios condutores, $\mathbf{J}_i$, e densidade de correntes de deslocamento, $\mathbf{J}_d$, ou seja:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d, \quad (4.6)$$

em que

$$\mathbf{J}_d = j\omega \mathbf{D} \quad (4.7)$$

e assume-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_0 = 0. \quad (4.8)$$

Então

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_d) = 0. \quad (4.9)$$

Às equações acima se somam as relações constitutivas:

$$\mathbf{H} = [\nu] \mathbf{B}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{J}_i = [\sigma] \mathbf{E}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{D} = [\varepsilon] \mathbf{E}. \quad (4.12)$$

em que $[\nu]$ é um tensor de relutividade magnética, igual a $[\mu]^{-1}$ (tensor de permeabilidade magnética), $[\sigma]$ um tensor de condutividade elétrica e $[\varepsilon]$ um tensor de permissividade elétrica.

Após manipulação de (4.6), (4.9) e (4.10) chega-se a:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + [\dot{\sigma}] \mathbf{E}. \quad (4.13)$$

Em (4.11) se definiu um tensor complexo com dimensão de condutividade, $[\dot{\sigma}]$, como sendo:

$$[\dot{\sigma}] = [\sigma] + j\omega[\varepsilon]. \quad (4.14)$$

Após um rearranjo das equações (4.1) a (4.14) chega-se à seguinte equação diferencial a derivadas parciais, correspondente à *equação de onda vetorial não homogênea* em termos de $\mathbf{E}$:

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \mathbf{E} + j\omega[\dot{\sigma}] \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{J}_0. \quad (4.15)$$

Para que (4.15) tenha solução única, é necessário impor as condições de contorno associadas ao problema, além das condições de interface entre dois meios distintos. No último caso, os campos vetoriais devem satisfazer às seguintes condições de continuidade entre dois meios com interface Γ_{12} , de vetor normal unitário $\hat{n}$:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (4.16)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (4.17)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (4.18)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (4.19)$$

em que ρ_s e $\mathbf{J}_s$ representam, respectivamente, uma densidade superficial de carga e uma densidade de corrente superficial, presentes na interface Γ_{12} .

Além das condições acima, quando o domínio é a fronteiras abertas, ou seja, suas dimensões se estendem ao infinito, deve-se ainda especificar alguma condição de contorno adequada de modo que o problema apresente solução única. Tal condição é normalmente do tipo de radiação ou absorvente. Neste trabalho se adotará uma abordagem que utiliza o conceito de materiais absorvedores fictícios (PML), o que será detalhado no Capítulo 5. De maneira genérica, considerando que o domínio de estudo, Ω , foi devidamente truncado (o que é necessário para a aplicação do MEF), e sua superfície externa é Γ , deve-se, adicionalmente, para garantir a unicidade da solução, impor:

$$\mathbf{E} \times \hat{n} = \bar{\mathbf{E}}_t \text{ em } \Gamma_E \quad (4.20)$$

e

$$\mathbf{H} \times \hat{n} = \bar{\mathbf{H}}_t \text{ em } \Gamma_H, \quad (4.21)$$

em que

$$\Gamma_E \cup \Gamma_H = \Gamma,$$

e $\bar{\mathbf{E}}_t$ e $\bar{\mathbf{H}}_t$ representam os componentes tangenciais de $\mathbf{E}$ em Γ_E e $\mathbf{H}$ em Γ_H , respectivamente.

4.3 Formulação em dois potenciais: potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ e potencial escalar elétrico V

Na seção anterior apresentou-se sucintamente o equacionamento para se chegar ao problema de contorno regido pela equação de onda vetorial não homogênea (4.15), que foi expressa em termos do vetor campo elétrico $\mathbf{E}$.

Devido às características do campo vetorial $\mathbf{E}$ (assim como dos demais vetores de campo), o MEF de aresta, ou MEF vetorial, parece ser ideal em problemas onde esse vetor é a incógnita.

Em problemas de autovalores (quando se procura determinar os modos de propagação), caso do problema regido pela equação de onda homogênea, o MEF de aresta é de fato muito eficiente. Entretanto, quando o problema é não homogêneo, a aplicação do MEF de aresta ao problema formulado em termos de $\mathbf{E}$ (ou $\mathbf{H}$) conduz a sistemas matriciais indefinidos e mal-condicionados,

resultando em convergência lenta, ou mesmo não convergência, ao se usar métodos iterativos de solução, como o ICCG, por exemplo, que em geral é o mais utilizado.

Quando a ordem do sistema de equações não é muito elevada pode-se utilizar métodos diretos de solução como alternativa. Nesses casos a formulação em campo elétrico, $\mathbf{E}$, apresenta excelente desempenho. No entanto, pode haver certas configurações em aplicações práticas que envolvem estruturas eletricamente grandes, com características não homogêneas ou geometria complicada que podem exigir discretização refinada, o que conduz inevitavelmente a sistemas de ordem elevada, podendo tornar proibitivo o custo computacional de métodos diretos. Nessas situações os métodos iterativos começam a ficar atrativos, senão indispensáveis, mas a convergência lenta desses métodos, quando aplicado ao problema formulado em termos de $\mathbf{E}$, torna-se também um entrave.

Como alternativa à formulação em campo elétrico pode-se usar então a formulação em dois potenciais, $\mathbf{A}$ - V (potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico), que reduz substancialmente o número de iterações do ICCG na solução do sistema de equações, mantendo o mesmo nível de precisão. Como efeito colateral tem-se o aumento da ordem do sistema pelo acréscimo da incógnita adicional referente ao potencial escalar. No entanto, essa formulação com elementos finitos de aresta tem se mostrado extremamente robusta em uma vasta gama de problemas eletromagnéticos, em vários níveis de frequência, tanto de autovalores quanto determinísticos.

Será apresentada então a formulação $\mathbf{A}$ - V *ungauged*, ou seja, sem imposição de condição sobre a divergência de $\mathbf{A}$ [4][6].

Escrevem-se então os vetores de campo em termos dos potenciais $\mathbf{A}$ e V , como segue:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.22)$$

e

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V, \quad (4.23)$$

conduzindo ao problema de contorno transformado [6], dado por:

$$\nabla \times [\nu] \nabla \times \mathbf{A} + [\dot{\sigma}](j\omega\mathbf{A} + \nabla V) = \mathbf{J}_0 \quad (4.24)$$

em Ω ,

$$\mathbf{A} \times \hat{n} = -(\bar{\mathbf{E}}_t \times \hat{n})/j\omega \quad (4.25)$$

e

$$V = V_0 \quad (4.26)$$

em Γ_E ,

$$([\nu]\nabla \times \mathbf{A}) \times \hat{n} = \bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n} \quad (4.27)$$

em Γ_H .

O problema discreto, correspondente a (4.24) a (4.27), consiste em achar a solução $\mathbf{A}$ - V para a seguinte Equação Residual de Galerkin:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot [\nu] \nabla \times \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot [\dot{\sigma}] (j\omega \mathbf{A} + \nabla V) d\Omega = \int_{\Gamma_H} \mathbf{w}_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega, \quad (4.28)$$

em que $\mathbf{w}_i$ representa uma função peso vetorial do método de resíduos ponderados, que é escolhida no método de Galerkin como sendo igual à função de forma vetorial do método de elementos finitos de aresta [1][2].

A condição (4.26) permite a imposição de uma tensão a um condutor, por exemplo. Entretanto, nas equações acima não é possível se determinar de forma única o potencial vetor $\mathbf{A}$, embora $\mathbf{B}$ e $\mathbf{E}$ sejam únicos. Para tanto, seria necessária a imposição da sua divergência, por exemplo, através da condição de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.29)$$

Como o objetivo é o cálculo de $\mathbf{E}$, em princípio (4.28) não seria necessária, mas o fato de $\mathbf{A}$ não ter solução única faz com que a matriz do sistema de equações algébricas seja singular. No entanto, ela é definida positiva, o que torna possível a solução do sistema via métodos iterativos, desde que o lado direito de (4.28) seja consistente (a divergência de $\mathbf{J}_0$, bem como a de $\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}$, seja numericamente nula). Além disso, a formulação sem a condição (4.29) conduz a uma melhor precisão numérica do que quando se impõe essa condição [4].

De modo a se obter um sistema de equações simétrico, reescreve-se (4.28), mas desta vez para um conjunto restrito de funções de ponderação ∇N_i em que as N_i são escolhidas como sendo as funções de forma escalares do MEF nodal. Adicionalmente faz-se a seguinte mudança de variável:

$$V = j\omega v, \quad (4.30)$$

resultando em

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot [\nu] \nabla \times \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot j\omega [\dot{\phi}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega = \iint_{\Gamma_H} \mathbf{w}_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega, \quad (4.31)$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot j\omega [\dot{\phi}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega = \iint_{\Gamma_H} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma. \quad (4.32)$$

Já foi mencionado no capítulo anterior que no problema de aterramento a excitação dificilmente é dada em termos de uma densidade de corrente. O que se conhece é a corrente total I à qual está submetido o sistema. Isso possibilita a eliminação da segunda integral do lado direito da equação vetorial (4.31), mas a excitação precisa então ser contemplada de alguma maneira.

Adota-se aqui a mesma abordagem utilizada no Capítulo 3, ou seja, a excitação é introduzida através de uma condição de Neumann não homogênea na equação escalar (4.32). Para tanto, é necessário alguma manipulação na (4.32) a fim de se introduzir uma condição do tipo:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{n} dS. \quad (4.33)$$

Tomando-se a integral de superfície em Γ_H do lado direito de (4.32), pode-se desmembrá-la em duas parcelas, como segue:

$$\iint_{\Gamma_H} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma = \iint_{\Gamma^{PD}} \nabla N_k \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma + \iint_{\Gamma_H - \Gamma^{PD}} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma, \quad (4.34)$$

sendo Γ^{PD} a seção do eletrodo correspondente ao ponto de defeito, ou ponto de injeção de corrente I . Denominando $\mathbf{J}_{PD}$ a densidade de corrente que atravessa a seção transversal do eletrodo Γ^{PD} , tem-se que,

$$I = \iint_{\Gamma^{PD}} \mathbf{J}_{PD} \cdot \hat{n} d\Gamma, \quad (4.35)$$

e após manipulação algébrica da primeira integral do lado direito de (4.34) (fazendo uso de (4.1) e identidades vetoriais), chega-se a:

$$\iint_{\Gamma^{PD}} \nabla N_k \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma = - \iint_{\Gamma^{PD}} N_k J_{PD} \cdot \hat{n} d\Gamma = I, \quad (4.36)$$

pois se admitiu que a seção Γ_{PD} do eletrodo se reduz a um nó da malha de elementos finitos, quando se adota a mesma hipótese apresentada no Capítulo 3 para a modelagem dos eletrodos. Tem-se assim:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot [\nu] \nabla \times \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot j\omega [\dot{\sigma}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega = \iint_{\Gamma_H} \mathbf{w}_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma, \quad (4.37)$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot j\omega [\dot{\sigma}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega = I + \iint_{\Gamma_H - \Gamma^{PD}} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma. \quad (4.38)$$

Substituem-se então os potenciais $\mathbf{A}$ e v por suas formas aproximadas, como segue:

$$\mathbf{A}^e(x, y, z) \simeq \sum_{i=1}^{na} a_i \mathbf{w}_i^e(x, y, z), \quad (4.39)$$

em que os $\mathbf{w}_i$'s representam as funções de forma vetoriais do MEF de aresta, na o número total de arestas de um elemento e o parâmetro a_i a integral de linha de $\mathbf{A}$ sobre a aresta i do elemento, ou seja,

$$a_i = \int_i \mathbf{A} \cdot d\ell. \quad (4.40)$$

O potencial escalar v (integral no tempo de V) é expandido em funções de forma escalares nodais, como:

$$v^e(x, y, z) \simeq \sum_{i=1}^{nn} v_i N_i^e(x, y, z), \quad (4.41)$$

em que o parâmetro v_i é valor do potencial v no nó i do elemento.

Substituindo (4.39) e (4.41) nas equações residuais de Galerkin referente a cada elemento e após efetuar a *assemblagem*, resulta o seguinte sistema matricial complexo e simétrico:

$$\begin{pmatrix} M_A & M_{Av} \\ M_{Av}^T & M_v \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_A \\ r_v \end{Bmatrix}, \quad (4.42)$$

cujos termos são dados por

$$M_{A_{mn}} = \int_{\Omega} [\nabla \times \mathbf{w}_m]^T \cdot [\nu] [\nabla \times \mathbf{w}_n] + [\mathbf{w}_m]^T \cdot j\omega [\dot{\sigma}] [\mathbf{w}_n] d\Omega, \quad (4.43)$$

$$M_{Av_{mn}} = j\omega \int_{\Omega} [\mathbf{w}_m]^T [\dot{\sigma}] [\nabla N_n] d\Omega, \quad (4.44)$$

$$M_{v_{mn}} = j\omega \int_{\Omega} [\nabla N_m]^T [\dot{\sigma}] [\nabla N_n] d\Omega, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{I}_m = \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq PD \\ = I & \text{para } m = PD \end{cases}, \quad (4.46)$$

$$r_{A_m} = \iint_{\Gamma_H} \mathbf{w}_m \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma, \quad (4.47)$$

$$r_{v_m} = \iint_{\Gamma_H - \Gamma^{PD}} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma. \quad (4.48)$$

Como já mencionado, o sistema (4.42) é singular, porém definido semi-positivo; portanto sua solução é possível via ICCG desde que o seu lado direito seja consistente, o que é conseguido através da adequada atribuição de condições de contorno. Este tópico será tratado em detalhes no Capítulo 5.

A solução desse sistema fornece o valor do potencial elétrico a cada nó da malha de elementos finitos a partir de v , após se efetuar a correção (4.30). Para obter o potencial em outros pontos que não os nós, utiliza-se a (4.41). Já o potencial vetor $\mathbf{A}$ se obtém a partir da solução $\{a\}$ por (4.39).

4.4 Solução do sistema linear de equações algébricas

A matriz (4.42) é a coeficientes complexos, simétrica, esparsa e de ordem elevada, podendo apresentar mal-condicionamento numérico dependendo das características físicas e geométricas do problema, da qualidade da malha e da frequência. A solução do sistema é eficientemente realizada através de métodos de solução iterativos, como por exemplo, o algoritmo SICCG (*Shifted ICCG*) na

sua versão complexa [11], que é a utilizada neste trabalho e foi implementado na biblioteca LMAGLIB [7]. Considera-se que a convergência foi atingida quando a norma do resíduo é inferior a 10^{-4} . O fator de aceleração, ou “*shift*”, utilizado foi de 1,1.

4.5 Cálculo de grandezas globais

A partir da solução de (4.42), é possível determinar o campo elétrico em cada elemento do domínio, a densidade de corrente, a potência complexa, energias elétrica e magnética armazenadas e finalmente uma impedância equivalente do dispositivo.

O método usado para se construir a aproximação de $\mathbf{A}$ e V em cada elemento através de interpolação usando funções de forma de aresta vetoriais e escalares nodais, respectivamente, permite a obtenção do campo elétrico $\mathbf{E}$ no elemento sem diferenciação numérica, como mostrado a seguir. Expande-se o campo elétrico em funções de forma vetoriais associadas às arestas do elemento, como em (4.39):

$$\mathbf{E}^e(x, y, z) \simeq \sum_{i=1}^{na} e_i \mathbf{w}_i^e(x, y, z), \quad (4.49)$$

sendo que e_i é a integral de linha de $\mathbf{E}$ ao longo da aresta i , ou seja,

$$e_i = \int_i \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (4.50)$$

Substituindo (4.23) e (4.30) em (4.50), chega-se a:

$$e_i = \int_i \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -j\omega \int_i \nabla v \cdot d\boldsymbol{\ell} - j\omega \int_i \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell},$$

ou

$$e_i = -j\omega(a_i + v_n - v_m), \quad (4.51)$$

em que a aresta i é delimitada pelos nós m e n e tem a direção $m \rightarrow n$.

A potência complexa UI^* em Ω pode ser calculada na sua forma contínua como [17][9]:

$$UI^* = \int_{\Omega} (-\nabla V')^T \cdot \mathbf{J}^* d\Omega. \quad (4.52)$$

O termo $-\nabla V'$ corresponde a um campo elétrico externo aplicado ao volume do dispositivo, Ω , calculado por:

$$-\nabla V' = -j\omega \nabla v = -j\omega \sum_{i=1}^{na} \mathbf{w}_i (v_n - v_m), \quad (4.53)$$

desde que a condição

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (4.54)$$

se verifique em Γ , fronteira externa de Ω [17].

A densidade de corrente em cada elemento pode ser calculada a partir de (4.13) e (4.49) como segue:

$$\mathbf{J}^e = [\dot{\sigma}] \mathbf{E}^e = [\dot{\sigma}] \left(\sum_{i=1}^{na} e_i \mathbf{w}_i^e \right) = [\dot{\sigma}] [\mathbf{w}] \{e\}, \quad (4.55)$$

e

$$\mathbf{J}^{*e} = [\dot{\sigma}^*] [\mathbf{w}] \{e^*\}. \quad (4.56)$$

Substituindo (4.56) e (4.53) em (4.52) chega-se a:

$$UI^* = \sum_{e=1}^{NE} UI^{*e} = -j\omega \sum_{e=1}^{NE} \{v_n - v_m\}^T \left(\int_{\Omega^e} [\mathbf{w}]^T [\dot{\sigma}^*] [\mathbf{w}] d\Omega \right) \{e^*\}. \quad (4.57)$$

As energias magnética e elétrica armazenadas em cada elemento se calculam a partir de [9]:

$$LI^2 = \text{Re} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{J}^* d\Omega \right\}, \quad (4.58)$$

ou

$$LI^2 = \text{Re} \left\{ \sum_{e=1}^{NE} \{a\}^T \left(\int_{\Omega^e} [\mathbf{w}]^T \cdot [\dot{\sigma}^*] [\mathbf{w}] d\Omega \right) \{e^*\} \right\}, \quad (4.59)$$

e

$$\frac{1}{\omega C} I^2 = -\text{Im} \left\{ \int_{\Omega^e} \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{J}^* d\Omega \right\}, \quad (4.60)$$

ou

$$\frac{1}{\omega C} I^2 = -\text{Im} \left\{ \sum_{e=1}^{NE} \{e\}^T \left(\int_{\Omega^e} [\mathbf{w}]^T \cdot [\dot{\sigma}^*] [\mathbf{w}] d\Omega \right) \{e^*\} \right\}. \quad (4.61)$$

De (4.57), (4.59) e (4.61) pode-se enfim calcular a impedância complexa equivalente do dispositivo, $\dot{Z}$, e os parâmetros R , L e C do circuito série equivalente alimentado em corrente I , como:

$$\dot{Z} = \frac{UI^*}{I \cdot I^*}, \quad (4.62)$$

$$R = \text{Re}\{\dot{Z}\}, \quad (4.63)$$

$$L = \frac{LI^2}{I \cdot I^*} \quad (4.64)$$

e

$$C = \frac{I \cdot I^*}{\omega \left(\frac{1}{\omega C} I^2 \right)}. \quad (4.65)$$

4.6 Resumo

Neste Capítulo foi apresentada em linhas gerais a formulação do método de elementos finitos de aresta em dois potenciais, A - V , sem imposição de divergência de $\mathbf{A}$, para a solução da equação de onda não homogênea no regime harmônico. A excitação foi na forma de uma condição de Neumann não homogênea. Essa formulação será usada na simulação do sistema de aterramento quando este está sujeito a uma corrente de surto, cujo espectro de frequências pode atingir a faixa de dezenas ou centenas de MHz. Foi apresentado também o cálculo da impedância equivalente complexa do sistema de aterramento a partir da solução numérica do MEF. O Capítulo 5 abordará aspectos particulares da aplicação das formulações estática (Capítulo 3) e dinâmica do MEF ao problema de aterramento elétrico.

Aspectos de Implementação do Método de Elementos Finitos para o Problema de Aterramento

---

5.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados aspectos particulares da implementação do método de elementos finitos, nodal e de aresta, que foram aplicados para o problema específico do aterramento elétrico. Tais aspectos estão relacionados à representação dos eletrodos da malha de aterramento, onde se encontra uma das contribuições originais deste trabalho; ao truncamento do domínio e às hipóteses adotadas para as condições de contorno do problema com vistas a se reduzir o custo computacional da ferramenta pelo enxugamento do tamanho do sistema.

5.2 Modelagem dos eletrodos – elementos filiformes em regime estacionário e harmônico

A aplicação MEF prevê a subdivisão do domínio de estudo Ω em subdomínios, os elementos finitos, sendo que essa discretização deve respeitar as interfaces entre regiões a materiais distintos. Além disso, ela deve ser tão densa quanto maior for a variação esperada da grandeza incógnita: potencial, campo ou ambos. Entretanto, quando o domínio ou parte dele apresenta contrastes muito grandes entre uma dimensão e as demais, a quantidade de elementos e, portanto, a ordem do sistema de equações, podem tornar o custo computacional da solução proibitivo, quando não inviável.

Esse é caso, por exemplo, do problema de aterramento em que os eletrodos, que são partes integrantes do domínio, possuem geometrias com imenso contraste entre suas dimensões. São

constituídos, em geral de barras condutoras cilíndricas cujo comprimento é da ordem de metros, enquanto seu diâmetro é da ordem de milímetros, ou seja, a relação comprimento/diâmetro quase sempre excede a cifra de 10^4 . A discretização em volume de tal estrutura conduziria a um número proibitivo de nós, além de produzir uma quantidade considerável de elementos de má qualidade. Juntando-se a isso o fato de existir ainda um contraste enorme entre as propriedades físicas dos eletrodos e do meio circundante, o solo, o sistema originado apresentaria péssimo condicionamento numérico, a sua solução invariavelmente se tornaria inviável do ponto de vista prático. Tal empreitada foi tentada em [35] e encerrou-se aí, uma vez que não há outro registro similar na literatura pertinente.

O ideal então seria poder representar os eletrodos como segmentos de reta, cuja área se degeneraria em um nó da malha de elementos finitos, viabilizando assim a discretização e a modelagem desse problema pelo MEF. É o que tem sido feito desde a primeira vez em que se propôs a aplicação dessa técnica [30 a 34].

5.2.1 Elemento unidimensional na Eletrocinética

Para se modelar os eletrodos como elementos filiformes unidimensionais (1D) algumas condições devem ser satisfeitas. De acordo com [57], essa hipótese é aplicável desde que $r_E \ll l$, ou mais especificamente, $l/r_E > 10$. Além disso, assume-se que a corrente elétrica I circula apenas na direção tangencial ao comprimento do eletrodo. Dessa maneira, parte-se da equação residual de Galerkin para a Eletrocinética (3.19):

$$\int_{\Omega} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega - \iint_{\Gamma} N_i [\sigma] \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma = 0,$$

e desmembram-se as integrais em duas partes distintas, uma relativa à região definida pelos eletrodos e outra definida pelo solo. A (3.19) fica então:

$$\int_{\Omega^S} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega + \int_{\Omega^E} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega - \iint_{\Gamma^{PD}} N_i [\sigma] \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma - \iint_{\Gamma^{E/S}} N_i [\sigma] \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma = 0, \quad (5.1)$$

em que $\Omega^S \cup \Omega^E = \Omega$, Γ^{PD} é a seção com o ponto de defeito (onde a corrente é injetada) e $\Gamma^{E/S}$ é a interface entre eletrodo e solo.

Nas formulações convencionais de elemento 1D [34], anula-se a integral de superfície $\Gamma^{E/S}$ em (5.1), uma vez que, como mencionado acima, para se permitir a adoção dessa hipótese a corrente deve fluir unicamente na direção paralela ao comprimento do eletrodo. Isso implica desprezar a corrente radial que sai do condutor, pois se considera que ela é desprezível face à corrente axial, já que a condutividade é da ordem de 10^8 - 10^9 maior que a do solo. Nessas condições, (5.1) fica:

$$\int_{\Omega^S} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega + \int_{\Omega^E} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega = \iint_{\Gamma^{PD}} N_i [\sigma] \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma = I, \quad (5.2)$$

em que se preservou apenas o termo de superfície relativo ao ponto de defeito, para permitir a excitação em corrente, I , como descrito no Capítulo 3.

Assumindo-se então as hipóteses $S \gg l$ para o volume dos eletrodos Ω^E e corrente somente na direção axial, a segunda integral do lado direito de (5.2) fica:

$$\int_{\Omega^E} \nabla N_i [\sigma] \nabla V d\Omega = S \int_{z=0}^{z=l} \nabla N_i \sigma_S \nabla V dz, \quad (5.3)$$

em que o tensor de condutividade foi substituído pela condutividade escalar do eletrodo; S é a seção do eletrodo, l seu comprimento e N_i , nesse caso representa a função de forma do elemento unidimensional. Quando o domínio é subdividido em elementos finitos, l representa na realidade o comprimento dos elementos 1D.

A (5.3) possui solução analítica simples que, para elementos de primeira ordem corresponde a:

$$S \int_{z=0}^{z=l} \nabla N_i \sigma_E \nabla V dz = [G] \{V\} = \begin{pmatrix} G_z & -G_z \\ -G_z & G_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_m \\ V_n \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

Na (5.3) o coeficientes G_z representam a condutância de um elemento 1D, cujo valor é dado por:

$$G_z = \sigma_E \frac{S}{l}. \quad (5.5)$$

A formulação (5.2) em que os elementos 1D são representados como em (5.4) será denominada MEF1, a fim de distingui-la daquela que será apresentada a seguir, denominada MEF2.

5.2.2 Elemento unidimensional com salto de potencial (Eletrocinética)

A formulação do item 5.2.1 despreza o componente radial da corrente que flui do condutor. No entanto, esse componente é o que domina o fenômeno, uma vez que a resistência de aterramento e, portanto, a elevação de potencial máxima dos sistemas, é determinada pela resistência de contato entre eletrodo e solo. Tanto é verdade que tem sido comum adicionar substâncias ao solo, envolvendo os eletrodos a fim de se reduzir essa resistência de contato, e em consequência o gradiente de potencial [35][36].

A formulação (5.2) despreza esse fenômeno, o que compromete sobremaneira a sua precisão, exigindo uma discretização extremamente refinada para se conseguir resultados satisfatórios. Na nossa experiência ela tem conduzido a resultados insatisfatórios, mesmo com malhas extremamente densas, e em consequência sistemas de ordem elevada. De acordo com [32], o uso de elementos de 2ª ordem seria suficiente para eliminar esse efeito. Entretanto, o seu uso conduz a matrizes mais densas, o que afeta o tempo para a resolução do sistema, mesmo para sistemas de ordem mais baixa.

A formulação apresentada a seguir, além de eliminar as hipóteses da anterior, conduz a resultados de excelente precisão, mesmo com elementos de primeira ordem. Isso torna atrativo o seu custo computacional, já que a esparsidade da matriz é preservada e o grau de refinamento exigido é menor que o da abordagem anterior, o que tem impacto positivo no desempenho da resolução.

Outra vantagem é que a aproximação unidimensional é mantida, ou seja, os eletrodos ainda são discretizados somente ao longo do comprimento.

Retomando então a formulação completa (5.1) e preservando o termo em $\Gamma^{E/S}$, é possível se levar em conta a corrente radial que flui do eletrodo para o solo. Isso é conseguido através da definição de um *elemento 1D radial*. A integral de superfície $\Gamma^{E/S}$, é reescrita como:

$$\iint_{\Gamma^{E/S}} N_i \sigma_E \nabla V \cdot \hat{n} d\Gamma = \iint_{\Gamma^{E/S}} N_i \sigma_E \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^E d\Gamma = \iint_{\Gamma^{E/S}} N_i \sigma_S \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S d\Gamma = I_r, \quad (5.4)$$

em que se utilizou a condição de interface (3.10); σ_E e σ_S são as condutividades do eletrodo e solo, respectivamente. Assumindo que o eletrodo tem seção transversal cilíndrica, a superfície $\Gamma^{E/S}$ é uma superfície cilíndrica de um elemento do eletrodo de raio r_E e comprimento l , conforme

esquematizado na Fig. 5.1. I_r é a corrente radial que flui pela interface entre eletrodo e solo de um elemento 1D.

Fig. 5.1 Interface entre eletrodo e solo (a) e esquema da discretização mostrando elementos 1D radiais, G_r , e axiais, G_z (b).

A terceira integral de (5.4) é possível de ser avaliada analiticamente como segue:

$$\iint_{\Gamma^{E/S}} N_i \sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S d\Gamma = \sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S \cdot \left(\iint_{\Gamma^{E/S}} N_i d\Gamma \right) = \sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S 2\pi r_E \int_m^n N_i dz = \quad (5.5)$$

$$\overbrace{\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S}^{(I)} \cdot \pi r_E l \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad i = m, n$$

com m, n dados na Fig. 5.1. Resta avaliar o termo (I) de (5.5) que corresponde ao componente normal da densidade de corrente em $\Gamma^{E/S}$, o que é feito a seguir:

$$\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S = \mathbf{J} \cdot \hat{n} = J_r = \frac{I_r}{\Gamma^{E/S}}. \quad (5.6)$$

Alternativamente, (I) em (5.5) pode ser escrito como:

$$\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S = \sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=r_E}^S \approx \sigma_s \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)^S, \quad (5.7)$$

para Δr suficientemente pequeno, sendo que a direção $\hat{n}$ de $\Gamma^{E/S}$ é paralela à direção r do sistema de coordenadas cilíndricos da Fig. 5.1, definido no eixo do eletrodo. Substituindo em (5.5) tem-se:

$$\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S \cdot \pi r_E l \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \sigma_s \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)^S \cdot \pi r_E l \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

A corrente radial I_r pode ser expressa como:

$$I_r = \frac{\Delta V}{R_r} = \sigma_s \pi l \cdot \Delta V, \quad (5.9)$$

em que R_r representa uma resistência no sentido radial, cujo comprimento é

$$\Delta r = (r_{m'} - r_m) = (r_n' - r_n), \quad (5.10)$$

o mesmo de (5.8). Como Δr deve ser suficientemente pequeno, escolhe-se, por exemplo,

$$\Delta r = r_E, \quad (5.11)$$

pois r_E deve tender a zero para se permitir o uso da formulação 1D de (5.3). Por outro lado, a superfície $\Gamma^{E/S}$ se calcula por:

$$\Gamma^{E/S} = 2\pi r_E l. \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) e (5.9) em (5.6), chega-se a:

$$\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=r_E}^S = \sigma_s \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)^E = \mathbf{J} \cdot \hat{n} = J_r = \frac{I_r}{\Gamma^{E/S}} = \frac{\sigma_s \pi l \cdot \Delta V}{2\pi r_E l} = \frac{\sigma_s}{2} \cdot \frac{\Delta V}{r_E}. \quad (5.13)$$

Após substituição de (5.13) em (5.8), tem-se finalmente o termo da integral de superfície em $\Gamma^{E/S}$:

$$\sigma_s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{r=r_E}^S \cdot \pi r_E l \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_s \pi l}{2} \Delta V \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (5.14)$$

onde aparece uma nova incógnita no sistema, ΔV , referente ao salto de potencial naquela interface. Esses termos, que devem ser somados às linhas m e n do sistema destroem a simetria do mesmo. Expressa-se então ΔV , referente ao nó m , como:

$$\Delta V = V_{m'} - V_m, \quad (5.15)$$

em que m torna-se um nó *virtual*, suficientemente próximo do novo nó criado m' , como definido em (5.10) e (5.11), que passa a ser o nó real. O nó m é denominado *virtual* porque não aparecerá na malha de elementos finitos; coincidirá com o nó m' .

Como a corrente I_r sai de m' ($= -I_r$) e entra em m ($= I_r$), escreve-se (5.13) para cada um desses nós (pois o resíduo deve ser minimizado na formulação de Galerkin para cada nó do domínio), substituindo-se (5.15) em (5.14), como segue:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_s \pi l}{2} (V_m - V_{m'}) \\ \frac{\sigma_s \pi l}{2} (-V_m + V_{m'}) \end{cases}. \quad (5.16)$$

A (5.16) pode ser expressa em forma matricial como:

$$\frac{\sigma_s \pi l}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_m \\ V_{m'} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_r & -G_r \\ -G_r & G_r \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} V_m \\ V_{m'} \end{Bmatrix}, \quad (5.17)$$

e dessa maneira a simetria do sistema é restabelecida.

Em (5.14), G_r representa a condutância do elemento 1D definido pelos nós m e m' da Fig. 5.1(b). Como foi mencionado, o nó m' é o nó *real*, enquanto m é um nó *virtual*. Dessa forma, os elementos 1D, definidos pelos nós virtuais m e n e nós *reais* m' e n' , são elementos com *salto de potencial*.

A formulação acima conduzirá a um sistema de equações com número maior de linhas que aquele oriundo da formulação de 5.2.1, mas esse acréscimo será pequeno, já que o número de nós sobre os eletrodos é uma pequena fração do número total de nós. Ela será referenciada no Capítulo 6, de Resultados, como MEF2, quando for comparada à do item 5.2.1, MEF1.

5.2.3 Formulação A-V de aresta com Impedância Superficial unidimensional

A impedância superficial de um condutor cilíndrico, definida como a relação entre os componentes tangenciais dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ é apresentada em [18]. Usando um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) os campos se exprimem como:

$$\mathbf{E} = E_r(r, z) \hat{u}_r + E_z(r, z) \hat{u}_z \quad (5.18)$$

e

$$\mathbf{H} = H_\phi \hat{u}_\phi, \quad (5.19)$$

em que se considerou desprezível o componente azimuthal do campo elétrico E_ϕ . A impedância superficial Z_r é dada por:

$$E_z = -Z_r H_\phi, \quad (5.20)$$

sendo que para $r = r_E$, Z_r vale

$$Z_r = Z_{r_E} = Z_{r_S} = -\frac{\lambda_E}{\sigma_E} \cdot \frac{J_0(\lambda_E r_E)}{J_1(\lambda_E r_E)}. \quad (5.21)$$

Em (5.21) J_0 e J_1 são funções de Bessel, em que $J_0(x)/J_1(x) \rightarrow j$ quando $x \rightarrow \infty$; λ_E é dado por:

$$\lambda_E^2 = -j\omega(\sigma_E - \hat{\sigma}_S). \quad (5.22)$$

A possibilidade de se definir uma impedância superficial de um meio condutor pressupõe a hipótese de variação unidimensional dos campos nesse meio e, portanto, solução analítica para esses campos. No contexto do MEF, a adoção dessa hipótese permite a exclusão dessa porção do domínio de estudo da simulação através da sua substituição pela impedância superficial equivalente. A seguir será apresentada a formulação de Galerkin com a inclusão da hipótese de impedância superficial para os eletrodos, análoga a apresentada em [15,16] para placas condutoras. Retoma-se então a (4.37) a (4.38) acrescentando-se o termo de integral de superfície para a interface $\Gamma^{E/S}$:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot [\nu] \nabla \times \mathbf{A} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot j\omega [\dot{\sigma}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega - \iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = \iint_{\Gamma_H} \mathbf{w}_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma \quad (5.23)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot j\omega [\dot{\sigma}] (\mathbf{A} + \nabla v) d\Omega - \iint_{\Gamma^{E/S}} \nabla N_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = I + \iint_{\Gamma_H - \Gamma^{PD}} \nabla N_i \cdot (\bar{\mathbf{H}}_t \times \hat{n}) d\Gamma \quad (5.24)$$

As integrais em $\Gamma^{E/S}$ foram retomadas a fim se introduzir a contribuição dos eletrodos, sendo que as integrais de volume (em Ω) se restringirão ao solo. Em (5.23) e (5.24), se os campos têm variação unidimensional nos eletrodos, as integrais em $\Gamma^{E/S}$ tem solução analítica; pode-se identificar os termos em $\mathbf{H} \times \hat{n}$ como:

$$\mathbf{H} \times \hat{n} = -\hat{n} \times \mathbf{H} = -H_t = -H_{\phi} = \frac{E_z}{Z_r}, \quad (5.25)$$

de acordo com (5.20). Substituindo nos termos de superfície correspondentes, tem-se que:

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = \iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot H_{\phi} d\Gamma = -\iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot \frac{E_z}{Z_r} d\Gamma \quad (5.26)$$

e

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \nabla N_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = -\iint_{\Gamma^{E/S}} \nabla N_i \cdot \frac{E_z}{Z_r} d\Gamma \quad (5.27)$$

O componente E_z é paralelo ao comprimento do eletrodo, ou seja:

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \hat{t}. \quad (5.28)$$

Expandindo $\mathbf{E}$ em funções de forma vetoriais de aresta, tem-se que:

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{na} \mathbf{w}_j e_j. \quad (5.29)$$

Substituindo em (5.28) e considerando que os eletrodos são representados na malha de elementos finitos como arestas dos elementos volumétricos, pode-se escrever:

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \hat{t} = \left(\sum_{j=1}^{na} \mathbf{w}_j e_j \right) \cdot \hat{t} = \mathbf{w}_k e_k, \quad (5.30)$$

em que k é a aresta paralela ao comprimento do eletrodo. Substitui-se então (5.30) em (5.26) e (5.27) e integra-se ao longo a superfície cilíndrica $\Gamma^{E/S}$, conduzindo a:

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot \frac{E_z}{Z_r} d\Gamma = -\frac{2\pi r_E}{Z_r} \left(\int_l \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k dz \right) \cdot e_k \quad (5.31)$$

e

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \nabla N_i \cdot \frac{E_z}{Z_r} d\Gamma = -\frac{2\pi r_E}{Z_r} \cdot \left(\int_l \nabla N_i \cdot \mathbf{w}_k dz \right) e_k, i = m, n, \quad (5.32)$$

em que m e n são os nós que delimitam a aresta k , com direção $m \rightarrow n$. Para discretização em elementos de primeira ordem as integrais de (5.31) e (5.32) tem solução analítica, como segue:

$$\left(\int_l \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k dz \right) = \frac{1}{l} \quad (5.31)$$

e

$$\int_l \nabla N_i \cdot \mathbf{w}_k dz = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (5.32)$$

e escrevendo e_k em termos das incógnitas do problema, ou seja, $e_k = -j\omega(a_k + v_n - v_m)$, chega-se a:

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = j\omega \frac{2\pi r_E}{lZ_r} \cdot a_k - j\omega \frac{2\pi r_E}{lZ_r} \cdot v_m + j\omega \frac{2\pi r_E}{lZ_r} \cdot v_n \quad (5.33)$$

e

$$-\iint_{\Gamma^{E/S}} \nabla N_i \cdot (\mathbf{H} \times \hat{n}) d\Gamma = j\omega \frac{2\pi r_E}{lZ_r} \begin{Bmatrix} -a_k \\ a_k \end{Bmatrix} + j\omega \frac{2\pi r_E}{lZ_r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_m \\ v_n \end{Bmatrix}. \quad (5.34)$$

Pode-se observar que os termos adicionais de (5.33) e (5.34) preservam a simetria do sistema de equações.

5.2.4 Eletrodos como condutores perfeitos – Regime Harmônico

A formulação acima pode não ser necessária num amplo espectro de frequências do fenômeno estudado. De acordo com [14], a hipótese de se adotar os eletrodos como condutores perfeitos (PEC – Perfect Electric Conductor) deve ser avaliada quantitativamente, o que é proposto nessa referência, e simplifica sobremaneira a formulação.

De fato, para os exemplos tratados neste trabalho e de acordo com [14] essa hipótese é aplicável para frequências a partir de algumas dezenas de kHz. Nesse caso, deve-se impor as seguintes condições de contorno às arestas que definem os eletrodos ($\Gamma^{E/S}$):

$$\mathbf{E} \times \hat{n} = 0 \quad (5.35)$$

em $\Gamma^{E/S}$.

A condição de condutor elétrico perfeito, PEC, dada por (5.35), é escrita em termos dos potenciais $\mathbf{A}$ - V , como em (4.25) e (4.26), ou:

$$\mathbf{A} \times \hat{n} = 0 \quad (5.36)$$

e

$$V = V_0 = \text{cte.} \quad (5.37)$$

A condição (5.36) é do tipo Dirichlet homogênea para o componente tangencial do potencial vetor. De acordo com (4.40) basta impor $a_i = 0$ às arestas correspondentes aos eletrodos. Já a (5.37) representa uma condição de contorno do tipo flutuante para o potencial escalar, uma vez que o mesmo deve ser constante na superfície de um condutor perfeito. Esse valor, no entanto, é desconhecido, pois o sistema é alimentado em corrente.

5.3 Truncamento do domínio usando Absorvedores Anisotrópicos Fictícios (PML)

Ao se resolver um problema eletromagnético a fronteiras abertas pelo MEF, a região mais externa à região de interesse, que se estende ao infinito, deve ser truncada por uma fronteira artificial a fim de se limitar o tamanho do domínio computacional. Deve-se então impor uma condição de contorno à essa fronteira artificial de modo a garantir a unicidade da solução. Essa condição de contorno deve tornar a fronteira o mais transparente possível, ou seja, deve minimizar reflexões numéricas.

No contexto dos sistemas de aterramento, várias alternativas foram adotadas para se truncar o domínio numérico discretizado em elementos finitos e baseiam-se, seja na adoção de transformações de domínio, em que se mapeia uma região de dimensões infinitas em outra de dimensões finitas [30,31,34,35], seja na adoção de formulações híbridas MEF-MEC (Método de Elementos de Contorno, ou de Fronteira) [33]. Ambas envolvem formulações específicas, que exigiriam alterações nas formulações apresentadas até o momento, além de apresentarem desvantagens. A primeira se limita a problemas de natureza estática ou quase estática, não sendo adequada em casos onde há efeitos de propagação. A segunda tem a desvantagem de reduzir substancialmente a esparsidade do sistema de equações, pois as matrizes geradas pelo MEC são cheias. A solução desse sistema híbrido exigiria métodos de resolução específicos, aumentando o custo computacional.

Uma alternativa interessante para o truncamento de problemas regidos a derivadas parciais foi proposta por Bérenger em 1994 [19], que é a de truncar o domínio por camadas de materiais anisotrópicos fictícios absorvedores, denominados PML – *perfectly matched layers* (ou camadas perfeitamente casadas) [1,26,27].

Uma interface perfeitamente casada é uma interface entre dois semi-espacos, sendo que um deles ao menos tem perdas elevadas, permitindo uma atenuação rápida dos campos incidentes na direção normal a essa interface. Além disso, deve garantir a absorção completa desses campos, ou seja, reflexão nula, para qualquer frequência, ângulo de incidência ou polarização. Com essas características um meio ou material como o PML pode ser usado para truncar o domínio computacional para a solução numérica de equações diferenciais parciais.

A formulação original de [19] é baseada numa modificação nas Equações de Maxwell. O modelo de PML baseado em absorvedores anisotrópicos proposto em [27] torna a sua aplicação

extremamente simples no MEF. Trabalha-se com as equações de Maxwell na sua forma original dada por (4.1) a (4.12) e nenhuma alteração à formulação A - V apresentada no Capítulo 4 se faz necessária.

A grande vantagem dessa abordagem é que se aplica tanto a problemas estáticos e quase estáticos [22 a 24], quanto àqueles que envolvem propagação. O inconveniente desse método é uma piora no condicionamento do sistema pela introdução de um material anisotrópico, resultando num maior número de iterações na resolução do sistema linear pelo ICCG.

Um meio do tipo PML possui como propriedades físicas tensores diagonais dados por:

$$[\bar{\mu}] = \mu[\Lambda] \quad (5.38)$$

e

$$[\bar{\sigma}] = \sigma[\Lambda], \quad (5.39)$$

sendo

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & a_z \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

e μ e σ são as propriedades do meio que compartilha a interface com o PML. Os parâmetros a_x , a_y e a_z , para um PML perpendicular à direção z , por exemplo, são dados por:

$$a_x = a_y = a, \quad a_z = 1/a, \quad (5.41)$$

sendo que a é uma função da posição e da frequência [21] para altas frequências, e seu valor é geralmente um número complexo do tipo $\alpha - j\beta$. Entretanto, para frequências que não são suficientemente altas ele depende apenas da posição [20, 21], reduzindo-se a um número real. Isso porque nessas condições a adoção de um valor complexo com parte real negativa pode violar o princípio da causalidade de Kramers-Kronig, ou seja, o material deixaria de ser passivo (seria sede de fontes ativas) [21].

No caso dos sistemas de aterramento, o espectro de frequências das correntes de surto mais usuais (como é o caso dos surtos atmosféricos) certamente não ultrapassa o limite de algumas dezenas de MHz, e a adoção de um parâmetro a real é geralmente suficiente para proporcionar uma atenuação rápida dos campos. Para um PML normal à direção z , por exemplo, adota-se a seguinte variação espacial para o parâmetro a [20,22]:

$$a = 1 + (a_{\max} - 1) \left(\frac{z}{D} \right)^m, \quad (5.42)$$

sendo D a espessura total do PML na direção z , m a ordem do polinômio da aproximação (que pode variar de 0 a 5), z a distância dentro do PML, variando de 0 a D e $a_{\max}$ um número real que é o valor máximo do parâmetro a para $z = D$.

A Fig. 5.2 abaixo ilustra esquematicamente um domínio genérico truncado por PML. Este, por sua vez, é limitado nas suas fronteiras exteriores por um condutor perfeito, o que equivale a impor a essa fronteira a condição de contorno (5.35). Em termos dos potenciais essas condições de contorno são dadas por:

$$\mathbf{A} \times \hat{n} = 0 \quad (5.43)$$

e

$$V = 0, \quad (5.44)$$

garantindo assim a unicidade da solução do sistema de equações algébricas resultante.

Fig. 5.2 Domínio truncado por material absorvedor anisotrópico, PML, de fronteira externa perfeitamente condutora (PEC).

5.4 Modelo do sistema de aterramento no regime estacionário

A seguir será apresentado o modelo do sistema de aterramento com as condições de contorno adotadas para a simulação por elementos finitos. A Fig. 5.3 apresenta uma representação

esquemática de um sistema composto de haste única enterrada verticalmente em solo homogêneo, em que aparecem as hipóteses e condições de contorno adotadas no modelo.

Todos os exemplos tratados foram discretizados em elementos prismáticos de primeira ordem, com altura paralela à direção z . Adotou-se um PML de espessura $D = 40$ m com 8 a 10 camadas e uma folga, ou *buffer*, definida como a máxima distância ente a extremidade da malha de terra e o PML, de no máximo 5 vezes a dimensão máxima da mesma.

A escolha dos parâmetros do PML foi baseada em critérios empíricos detalhados em [23,24]. Nas regiões onde há cruzamento entre dois PML's de direções distintas adotou-se $a = 1$ [24].

Fig. 5.3 Modelo do sistema de aterramento para simulação pelo método de elementos finitos em regime estacionário (Eletrocinética), exibindo alguns parâmetros físicos e dimensionais.

5.5 Modelo do sistema de aterramento no regime harmônico

A seguir são apresentadas as hipóteses adotadas no modelo do sistema de aterramento no regime harmônico [39, 40, 41]. A Fig. 5.4 exhibe esquematicamente as dimensões principais e hipóteses assumidas.

Como mencionado no Capítulo 4, o fenômeno eletromagnético relativo ao sistema de aterramento sujeito a um surto de corrente com elevado conteúdo harmônico é regido pela equação de onda tridimensional (4.15), cujo domínio é constituído de dois semi-espacos infinitos: ar e solo. Entretanto, para a faixa de frequências abrangida pelo fenômeno, o comprimento de onda no solo, bem como a sua impedância característica, é bem menor que no ar. Em consequência, pode-se considerar que a densidade de corrente no ar, composta unicamente da corrente de deslocamento, é

desprezível. Nessas condições, se $\mathbf{J}_d \cong 0$ no ar, pode-se assumir então que na superfície do solo, Γ_s , tem-se:

$$\mathbf{J} \cdot \hat{n} = 0, \quad (5.45)$$

exceto no ponto de defeito e, em consequência,

$$\mathbf{B} \cdot \hat{n} = 0. \quad (5.46)$$

De fato, de acordo com [17], a definição de impedância de um dispositivo, apresentada no Capítulo 4, só tem sentido se for possível definir uma tensão única entre seus terminais, o que equivale a dizer que a condição (5.46) deve ser satisfeita nas fronteiras externas de seu domínio.

Então a adoção das hipóteses (5.45) e (5.46) no problema de aterramento no regime harmônico permite a eliminação do semi-espaço relativo ao ar no domínio, o que possibilita uma redução significativa do número de incógnitas e, portanto da ordem do sistema de equações, além de melhorar o condicionamento do sistema. Além disso, será possível também definir uma impedância equivalente.

As dimensões e hipóteses principais para a modelagem por elementos finitos de sistemas de aterramento no regime harmônico podem ser vistas Fig. 5.4. Essas hipóteses, aparentemente restritivas, não afetaram significativamente os resultados, pelo menos no que diz respeito ao cálculo da impedância, como será mostrado no Capítulo 6. Além disso, conduziram a um modelo compacto e de bom desempenho computacional.

Fig. 5.4 Modelo do sistema de aterramento para simulação pelo método de elementos finitos em regime harmônico, exibindo algumas condições de contorno, bem como parâmetros físicos e dimensionais; estes últimos são funções da frequência.

5.6 Discretização e parâmetros do PML

A discretização do meio Ω (solo) no caso do regime harmônico foi realizada utilizando elementos do tipo hexaedro de 8 nós, 12 arestas [2], com PML de 8 camadas. Sua espessura, bem como o grau de refinamento da malha, foi baseada na dimensão linear máxima de um elemento finito, h_{max} , que deve ser estimada de acordo com um dos seguintes parâmetros: profundidade pelicular, δ , ou comprimento de onda no solo, λ , o menor deles. Estes correspondem às dimensões elétricas do problema [29,48] que são dependentes da frequência e dados por:

$$\delta = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (5.40)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (5.41)$$

que devem ser avaliadas para o máximo valor de σ , no caso de haver mais de uma camada.

Para $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, (5.40) assume a forma simplificada:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (5.40)$$

Em geral, mesmo quando a relação $\sigma/\omega\epsilon$ é maior que 1, a atenuação é suficientemente elevada, resultando em $\delta < \lambda$, mas isso sempre deve ser verificado. Considerando a hipótese de $\delta < \lambda$, o domínio do sistema de aterramento será estimado baseado nas seguintes dimensões dos elementos finitos, com dimensão linear h , de acordo com critérios estabelecidos em [29]:

$$h_{max} = \delta/5, \quad (5.41)$$

$$h_{min} = \delta/50, \quad (5.42)$$

$$D = n_{PML} \cdot h_{max}, \quad (5.43)$$

$$buffer \approx 4\delta, \quad (5.44)$$

sendo n_{PML} o número de camadas (elementos) no PML. Outra recomendação importante é a utilização de discretização com progressão geométrica, com a dimensão h dos elementos aumentando a partir dos eletrodos até o início do PML. De acordo com [29], no contexto do MDF, isso é necessário para evitar reflexões numéricas, mas nos exemplos testados neste trabalho mostrou-se também como uma condição essencial para se atingir os resultados esperados com o MEF, como será mostrado no próximo capítulo.

A estimativa de h_{max} e h_{min} conforme o critério acima ainda requer alguns cuidados, pois, ao contrário do que pode parecer, a determinação de δ ou λ não é tão imediata. Em princípio, para o cálculo de (5.40) e (5.41) utiliza-se a maior frequência do espectro da corrente de excitação, ou seja, da corrente de surto. No entanto, como descrito em trabalhos recentes [43], pode acontecer da frequência máxima do espectro da resposta ser maior do que a da excitação. Sendo assim, um estudo rigoroso, sobretudo para condições em que as correntes de surto apresentem tempos de subida inferiores a 1 μ s, requer algumas tentativas até se descobrir qual a maior frequência envolvida.

Com relação aos eletrodos, deve-se ainda tomar o cuidado de não utilizar uma subdivisão demasiadamente fina a ponto de se violar as hipóteses para aproximação unidimensional (ou filiforme) adotada para esses condutores [57], isto é, garantindo que $l/r_E > 10$.

Quanto aos parâmetros que foram utilizados no PML, mostrados na Fig. 5.4, estes foram escolhidos baseando-se em critérios empíricos, sugeridos em [20] [22], e mostraram-se satisfatórios

para os casos testados. Nas regiões onde há cruzamento entre dois PMLs de direções distintas adotou-se a convenção dada por [28], que corresponde à situação ilustrada na Fig. 5.4.

5.7 Resumo

Este capítulo apresentou aspectos específicos da implementação do MEF nodal e de aresta ao problema de aterramento elétrico no regime estacionário e harmônico. Essas particularidades se referem à modelagem dos eletrodos através de elementos unidimensionais.

No regime estático foi proposto um modelo de elemento unidimensional com salto de potencial, enquanto que no regime harmônico foi suficiente tratar os eletrodos como condutores elétricos perfeitos, uma vez que o espectro de frequências de interesse vai de dezenas de kHz até dezenas de MHz.

O truncamento do domínio foi realizado através da utilização de PMLs no solo e semi espaço relativo ao ar não foi considerado no modelo, pois desprezou-se as correntes de deslocamento nesse meio.

Na discretização deve-se tomar o cuidado, ao se refinar a subdivisão dos eletrodos, de observar a validade da hipótese de elemento unidimensional. No regime harmônico, além de se observar as dimensões elétricas do problema, deve-se adotar progressão geométrica na discretização.

O próximo capítulo será dedicado à aplicação da metodologia apresentada nos capítulos 3, 4 e 5 à simulação de sistemas de aterramento típicos disponíveis na literatura e comparação com resultados experimentais, analíticos e de outros autores.

Capítulo 6

Aplicações e Resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a aplicação do método de elementos finitos a sistemas de aterramento para os quais se conhece a solução, seja analítica, seja experimental, a fim de confrontar os resultados. No item 6.2 serão tratados os problemas no regime estacionário e no item 6.3, no regime harmônico.

Todas as simulações foram realizadas em microcomputador tipo Athlon XP 2.2 GHz RAM 1 GB e como método de solução do sistema de equações algébricas foi utilizado o SICCG (Shifted Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) [11].

Toda a parte gráfica correspondente ao pré e pós-processamento (geração do modelo geométrico, malha de elementos finitos e visualização gráfica de resultados) foi realizada por programa de domínio público: *Gmsh* [8]. O módulo numérico que realiza a montagem das matrizes, *assemblagem* e resolução do sistema linear foi implementado em linguagem C++ utilizando a biblioteca LMAGLIB [7].

6.2 Regime estacionário

A. Caso de uma haste de cobre vertical enterrada em solo homogêneo (H32)

Este representa o caso mais simples de sistema de aterramento (vide Fig. 6.1), pois apresenta solução analítica, tanto para o cálculo da resistência de aterramento, quanto para a elevação de potencial.

Fig. 6.1 Sistema de aterramento composto de haste única enterrada verticalmente em solo homogêneo.

A resistência de aterramento dessa configuração pode ser calculada pela seguinte expressão [36] [44]:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[\ln \frac{4l}{r_E} - 1 \right], \quad (6.1)$$

sendo ρ a resistividade do solo e l e r_E o comprimento e o raio da haste, respectivamente.

A elevação de potencial é obtida por [35]:

$$V(y) = \frac{I\rho}{2\pi l} \log \frac{\sqrt{l^2 + y^2} + l}{y}, \quad (6.2)$$

sendo I a corrente injetada na haste e y a distância até a mesma.

O exemplo analisado, extraído de [36] possui as seguintes características: $l = 32$ m, $\rho = 450$ Ω .m, $r_E = 0.004$ mm. A Fig. 6.2 mostra o modelo tridimensional desse exemplo, com a malha de elementos finitos, em que se representou apenas um quarto da geometria pela simetria do problema.

É evidente que esta configuração de haste vertical única prescinde de uma simulação em três dimensões, uma vez que possui simetria axial. No entanto, trata-se de um caso particular para o qual se dispõe de resultados experimentais, utilizado aqui para efeito de validação da ferramenta desenvolvida.

Nas faces sobre os planos Y0Z e Z0X nenhuma condição de contorno foi imposta, pois se tratam dos planos de simetria, sendo, portanto, superfícies com condição de Neumann homogênea.

O mesmo vale para o plano XOY que corresponde à superfície do solo. Nas demais superfícies foram impostas condição de Dirichlet homogênea. Para a modelagem dos eletrodos foi adotada a formulação apresentada no Capítulo 4, com elemento 1D com “salto” de potencial, que será denominada MEF2, a fim de distingui-la da formulação convencional que será denominada MEF1.

O domínio foi truncado usando materiais absorvedores fictícios, PML, com os seguintes parâmetros: $a_{\max} = 10$, $m = 0$, $D = 40$ m.

A extremidade da haste corresponde ao ponto de injeção de corrente no sistema de aterramento. Neste ponto a corrente será impressa via uma condição de Neumann não homogênea, igual a 1000 A, conforme detalhado no Capítulo 3.

Fig. 6.2 Modelo do sistema da haste vertical de 32 m (H32) mostrando malha de elementos finitos (hexaedros – 8 nós) e condições de contorno relevantes. Apenas $\frac{1}{4}$ da geometria foi representada, explorando a simetria do problema.

Na Tabela 6.I a seguir é apresentada comparação entre valores da resistência de aterramento: analítico, experimental e numérico (MEF1 e MEF2). A Fig. 6.3 mostra o valor do potencial ao longo de uma linha radial a partir da haste. Em ambos os casos o MEF2 apresentou excelentes resultados, ao contrário de MEF1; em ambos os casos, utilizou-se a mesma discretização.

A Tabela 6.II mostra uma comparação entre as características de desempenho das duas implementações: MEF1 e MEF2, onde se pode verificar que o acréscimo no custo computacional da segunda é desprezível.

TABELA 6.I

RESISTÊNCIA DE ATERRAMENTO EM Ω DO CASO H32

	$R (\Omega)$	Desvio (%)
Experimental	21	-
Analítico	20,98	0,1
Numérico (MEF2)	21,42	2,0
Numérico (MEF1)	17,33	17,6

Fig. 6.3 Potencial na superfície para o caso H32; comparação entre valor analítico e numérico.

TABELA 6.II

COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES SEM (1) E COM (2) SALTO DE POTENCIAL

	MEF1	MEF2
Nº de linhas do sistema	134 750	134 783
Nº de iterações do ICCG	248	249
Tempo de solução	5'26"	5'43"

B. Grade quadrada regular $16\text{ m} \times 16\text{ m}$ (GS4, GS16, GS36)

Os próximos exemplos analisados correspondem a malhas quadradas de $16\text{ m} \times 16\text{ m}$, enterradas horizontalmente a $0,6\text{ m}$ de profundidade num solo estratificado em duas camadas: a primeira com 4 m de profundidade e $\rho_1 = 200\ \Omega\cdot\text{m}$ e a segunda de $\rho_2 = 800\ \Omega\cdot\text{m}$.

As malhas são compostas de eletrodos de cobre de diâmetro $0,1\text{ m}$ formando um reticulado, como esquematizado na Fig. 6.4.

Fig. 6.4 – Sistemas de aterramento (a) GS4, (b) GS16 e (c) GS36 ($16\text{ m} \times 16\text{ m}$) com solo de duas camadas. A linha tracejada indica o caminho para traçado do potencial na superfície do solo.

Uma corrente de 100 A é injetada no centro da malha. Os exemplos foram extraídos de [45] que apresenta resultados experimentais para elevação de potencial nessas configurações. Os exemplos tratados correspondem aos casos *electrode* II, III e IV de [45], que serão denominados GS4, GS16 e GS36, respectivamente. O modelo tridimensional do caso GS4 com a malha de elementos finitos é mostrado na Fig. 6.5.

As Figs. 6.6 (a) e (b) apresentam o traçado do potencial na superfície para o caso GS4, a primeira ao longo da linha indicada na Fig. 6.4 (a) e a segunda a distribuição através de degradê. As

Figs. 6.7 (a), (b), (c) e (d) mostram o traçado do potencial dos casos GS16 e GS36 ao longo das linhas indicadas nas Figs. 6.4 (b) e (c). Nessas figuras os pontos correspondem aos valores experimentais extraídos de [45].

Fig. 6.5 Caso GS4 com malha de elementos finitos (prisma – 6 nós).

Fig. 6.6 Potencial elétrico na superfície do solo para o caso GS4: (a) ao longo da linha especificada; (b) Resultado da simulação pelo MEF (sistema com 85000 linhas; 186 iterações de ICCG) do potencial na superfície.

Fig. 6.7 Comparação entre resultados numérico e experimental do potencial ao longo das linhas tracejadas indicadas na Fig. 6.4:

(a) GS16; (b) GS36_1; (b) GS36_2; (c) GS36_3.

Em todos os casos a concordância foi excelente, com exceção dos valores nas extremidades do caso GS16, em que o desvio com relação ao valor experimental chega a 8%. Na tentativa de se diminuir este desvio, a discretização foi sistematicamente refinada, sem, contudo, se conseguir uma alteração significativa na solução. Deve-se considerar, no entanto, que os valores experimentais foram extraídos via interpolação dos gráficos apresentados em [45], tratando-se de referência antiga (1975), em que a resolução está bastante prejudicada, pois há várias curvas sobrepostas, o que dificultou sobremaneira a sua obtenção.

6.3 Regime harmônico

A. Caso de uma haste de cobre vertical enterrada em solo homogêneo (H32)

Este caso é o mesmo da seção anterior. O cálculo analítico da impedância complexa dessa configuração é detalhado a seguir [36]:

$$\dot{Z} = R \cdot F_2(x), \quad (6.3)$$

sendo R dado por (6.1) e

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{\frac{jx}{1+j\alpha x}}}{\tanh \sqrt{jx(1+j\alpha x)}},$$

em que

$$x = 2\pi f \tau_L,$$

$$\alpha = \frac{\tau_C}{\tau_L},$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} \approx \frac{\mu_0 l^2}{\rho}, \text{ constante de tempo indutiva,}$$

$$\tau_C = RC = \rho \varepsilon, \text{ constante de tempo capacitiva.}$$

Nesse exemplo a permissividade do solo vale $\varepsilon = 10 \varepsilon_0$. Considerando a frequência de 1 MHz e aplicando a expressão (6.3) tem-se o seguinte valor de impedância:

$$\dot{Z} = 88,4 \underline{37,7^\circ} \Omega.$$

A Fig. 6.8 mostra o modelo adotado nas simulações, indicando as condições de contorno e a malha de elementos finitos. Em todas as simulações adotou-se a corrente de $1000+j0$ A injetada na extremidade da haste. O domínio foi truncado por meio de PML com os seguintes parâmetros: $a_{\max} = 30$, $m = 2$ e D variando conforme a frequência e determinado de acordo com a metodologia descrita no Capítulo 4.

Fig. 6.8 – Malha de elementos finitos (hexaedros – 8 nós) e condições de contorno do caso H32 na frequência de 1 MHz, correspondendo a $\frac{1}{4}$ do domínio de modo a explorar a simetria

Na Fig. 6.9 são mostrados os diagramas de Bode com o valor da impedância (módulo e fase) do caso H32. Nesses gráficos a linha contínua representa os resultados experimentais extraídos de [36], os círculos vermelhos correspondem aos resultados da simulação por elementos finitos e os losangos verdes, os valores teóricos, evidenciando a eficácia do método de elementos finitos. Para esse problema o sistema de equações algébricas possui 73872 linhas e a solução, na frequência de 1 MHz, convergiu em 612 iterações do SICCG.

Na tentativa de se verificar se a validade da hipótese de se truncar o domínio na superfície do solo, excluindo o semi-espaco relativo ao ar do domínio, foi efetuada uma simulação incluindo-se este último. Como esperado, os resultados de impedância não se alteraram. Além disso, foi possível verificar os valores do componente vertical (z) do campo magnético na superfície do solo, exibido na Fig. 6.10 (a), confirmando que o mesmo é desprezível, ou seja, a hipótese adotada de B tangencial na superfície (fluxo magnético nulo através da mesma) é válida. A Fig. 6.10 (b) apresenta o valor da densidade de corrente total no domínio (condução+deslocamento). Pode-se verificar que seu valor é virtualmente nulo no ar, o que também valida a hipótese adotada de que a corrente de deslocamento no ar também é desprezível.

Fig. 6.9 Diagramas de Bode da impedância (módulo e fase) do caso H32. Comparação entre os resultados.

Fig. 6.10 Resultados da simulação do caso H32 a 1 MHz, considerando o ar: (a) B_z na cota $z=0$ (superfície); (b) J total. Pode-se notar que B_z e J no ar são desprezíveis.

Com relação à hipótese de se considerar os eletrodos como condutores perfeitos, uma simulação foi realizada a fim de verificar a validade da mesma. O resultado pode ser visto nas Fig. 6.11 (a) e (b), que exibem o traçado do potencial na superfície para o caso H32 a 1 MHz, considerando,

respectivamente, a haste como condutor perfeito (condições de contorno como na Fig. 6.8), e em segundo, considerando sua impedância superficial. A diferença entre resultados é de menos de 0.04%, confirmando-se assim que a hipótese de condutor perfeito é válida.

Fig. 6.11 Traçado do potencial na superfície do caso H32 para 1 MHz através de dégradé: (a) haste como condutor perfeito; (b) haste modelada por impedância superficial.

B. Grade regular 60 m × 60 m (GS60)

Este exemplo é bastante citado na literatura, usado por vários autores como referência, com a finalidade de comparar resultados, como em [37] e [38]. Corresponde a uma grade regular como esquematizado na Fig. 6.12, em que se pode ver também a discretização desse problema. O conjunto é enterrado a 0,5 m de profundidade em solo homogêneo com $\rho = 1000 \, \Omega \cdot \text{m}$, $\epsilon_r = 9$ e o diâmetro dos eletrodos vale 14 mm. A corrente de $1000+j0 \, \text{A}$ é injetada ora na extremidade, ora no centro da grade.

Na Fig. 6.13 pode-se ver a comparação entre os valores de potencial na superfície obtido em [38] e pelo MEF de aresta, para a frequência de 500 kHz e injeção de corrente no canto da malha. Embora a comparação seja qualitativa, uma vez que o gráfico apresentado em [38] é tridimensional, pode-se verificar pelo valor máximo do potencial que a concordância é razoável. Para frequência de 1 MHz e injeção de corrente no centro, o valor da impedância complexa do sistema também é satisfatório quando comparado aos valores de [37], como se pode verificar pela Tabela 6.III.

Fig. 6.12 Sistema de aterramento GS60 e sua discretização em elementos finitos (hexaedros – 8 nós).

Fig. 6.13 Comparação entre os resultados de [29] (a) e do MEF de aresta (b) para o potencial na superfície do exemplo GS60 (500 kHz e corrente injetada no canto da malha).

Fig. 6.14 Traçado do potencial na superfície na forma de dégradé. Resultado da simulação por elementos finitos de aresta (500 kHz e corrente injetada no canto superior).

TABELA 6.III
IMPEDÂNCIA DO CASO GS60 (1 MHz – INJEÇÃO DE CORRENTE NO CENTRO)

Z	MEF	[37]
Magnitude (Ω) <u>Fase</u> ($^\circ$)	36 39°	30 39°

6.4 Resumo

Este capítulo apresentou a aplicação das metodologias mostradas nos capítulos precedentes a sistemas de aterramento típicos descritos na literatura, quais sejam: haste vertical e grade regular horizontal. As resistências e impedâncias desses sistemas, bem como a elevação de potencial, foram comparadas com resultados experimentais, analíticos e resultados de outros métodos disponíveis na literatura, exibindo excelente concordância.

No caso do regime estacionário, mostrou-se que o uso dos elementos unidimensionais com salto de potencial melhora a precisão dos resultados sem aumento significativo da ordem do sistema, dispensando assim a discretização de segunda ordem, conforme verificado em [55].

No regime harmônico, verificou-se que a utilização da condição de impedância superficial nos eletrodos foi desnecessária, ao menos nos casos tratados aqui, para os quais se dispõe de resultados para comparação. A aproximação de condutor perfeito foi suficiente e as características elétricas dos problemas tratados mostram que essa hipótese está de acordo com os critérios estabelecidos em [14].

O próximo capítulo apresentará em detalhes um balanço das metodologias e resultados obtidos com comentários e apontará para desenvolvimentos futuros.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Observações gerais e conclusões

Ao longo deste documento procurou-se sintetizar as principais formulações que foram implementadas ao longo dos últimos anos em ferramentas computacionais para a simulação de sistemas de aterramento pelo Método de Elementos Finitos.

Iniciou-se pela análise no regime estacionário de condução de correntes, ou Eletrocinética, adequado a condições de operação em frequências baixas, tipicamente 50 ou 60 Hz, e cujo principal interesse refere-se à segurança de seres humanos.

Buscou-se desenvolver um aplicativo de bom desempenho numérico e com boa precisão. Nesse sentido, a formulação do elemento unidimensional com salto de potencial proposta para a modelagem dos eletrodos da malha de terra mostrou-se robusta e eficiente, permitindo boa precisão sem a necessidade de se utilizar interpolação de segunda ordem, o que diminui a esparsidade da matriz mesmo com redução do número de elementos finitos.

Foi apresentada no capítulo precedente uma análise do desempenho dessa técnica comparada à formulação convencional do elemento unidimensional mostrando que, com a mesma discretização e virtualmente mesmo tempo de processamento, conseguiu-se uma precisão muito melhor, tanto no cálculo da resistência de aterramento, quanto na distribuição de potenciais na superfície do solo, quando confrontados a valores experimentais. Em particular os resultados consistentes para o potencial da superfície são mais significativos na validação do método, uma vez que a resistência de aterramento se obtém por integração, o que atenua eventuais distorções localizadas. A comparação com discretização de segunda ordem já havia sido realizada em [55], também apontando vantagens na primeira.

A excitação em corrente, realizada através de condição de Neumann não homogênea, simplifica a implementação, eliminando-se a necessidade de correção da solução conforme realizado em trabalhos anteriores.

Outro detalhe introduzido no modelo proposto que contribuiu para simplificar a implementação foi a utilização de PML para o truncamento do domínio, pois não exige formulação nem implementação específica, sendo também uma técnica aplicável ao regime harmônico. O único inconveniente é que os parâmetros do PML – espessura, número de camadas, ordem da interpolação, valor máximo da constante α , distância de folga (*buffer*) ao objeto de interesse – têm determinação empírica e são dependentes da aplicação e características físicas do problema. Entretanto, isso vale também para as transformações geométricas de domínio, não o desqualificando perante essas técnicas.

Esses detalhes não foram abordados explicitamente neste trabalho; apenas foram encontrados parâmetros que se adaptaram bem aos exemplos analisados. A estimativa desses parâmetros foi baseada em critérios empíricos sugeridos nas referências pertinentes e se mostraram satisfatórios no sentido de que pequenas variações em torno dos parâmetros escolhidos não produziram alteração significativa nos resultados.

O que se pôde verificar é que, mais do que aos parâmetros do PML ou à técnica de truncamento adotada, os resultados são muito sensíveis à discretização dos eletrodos. Nesse sentido, essa sensibilidade foi bem reduzida com a adoção da formulação do elemento a salto de potencial, ou seja, pequenas alterações na segmentação dos eletrodos produzem variações pequenas na solução. O mesmo não acontece com a adoção de elementos unidimensionais simples.

Nesse sentido, a segmentação dos eletrodos desempenha um fator decisivo na qualidade da solução e isso aparentemente independe do método numérico utilizado, seja ele de fronteira ou de domínio, pois o mesmo já foi observado em inúmeros trabalhos que empregam métodos distintos do MEF [53,57].

O que se observa também é que a subdivisão dos eletrodos também é dependente das características físicas do problema, mais especificamente das dimensões dos mesmos e do valor de resistividade do solo. Isso significa que o que governa o fenômeno, ou o que determina a resistência de aterramento, é a resistência de contato entre eletrodo e solo. De fato, essa afirmação pode ser corroborada pela preocupação demonstrada nos últimos anos em se “melhorar” esse contato elétrico entre solo e condutor, sobretudo em solos de resistividade elevada, através da aplicação de bentonita envolvendo os condutores, conforme descrito e confirmado por Bourg et al. [36] e Nekhoul [35].

Outro fator que deve ser analisado com cuidado ao se definir a segmentação dos eletrodos é o limite superior dessa subdivisão, ou seja, ela não pode ser suficientemente fina a ponto de se atingir

o limite da hipótese de elemento unidimensional (diâmetro muito menor que comprimento), quando, ao invés de se melhorar a precisão, esta começa a se deteriorar. Esse limite, no entanto, também é uma convenção que depende das características físicas do problema, mas uma condição satisfatória como a apresentada em [57] mostra-se adequada e segura para a maioria dos casos ($r < 10l$).

Para a simulação de sistemas de aterramento no regime harmônico propôs-se a utilização de ferramenta computacional baseada na formulação A - V do método de elementos finitos de aresta sem imposição da divergência de A e alimentado em corrente através de condição de Neumann não homogênea.

O truncamento do domínio foi realizado através de PML com parâmetro de valor real e perfil polinomial como em [20], e como terminação utilizou-se condições de contorno relativas a condutor perfeito.

De acordo com [21], o parâmetro do PML tem valor complexo que é função da posição e cuja parte imaginária é função da frequência para altas frequências; no limite de baixas frequências reduz-se a um número real puro, dependente apenas da posição.

Embora o conteúdo harmônico das correntes de surto usuais de interesse para o problema de aterramento, que pode atingir a cifra de dezenas de MHz, seja considerado como de altas frequências no contexto de sistemas elétricos de potência, para efeito de determinação dos parâmetros do PML essa faixa de frequências é considerada ainda dentro do limite de baixas frequências. Esse limite, entretanto, não está claramente quantificado, e deve também ser dependente da aplicação de alguma maneira.

Entretanto, em [21] é apresentado também um critério para se verificar isso, que é baseado na causalidade. Esse critério diz que o material deve ser passivo, ou seja, possuir características que obedeçam à lei da causalidade de Kramers-Kronig. Quando isso não ocorre o material torna-se “ativo”, ou sede de fontes ativas no problema. Esse fenômeno foi observado neste caso ao se tentar utilizar um parâmetro complexo para o PML, provocando, quando não a divergência na solução do sistema, o surgimento de resultados sem significado físico.

De fato, para frequências na faixa de centenas de MHz, Cucinota et al. [20] utilizam PMLs a parâmetros reais para truncamento de problemas de guias de onda e este trabalho se baseou em parte nessa referência para estimar aqueles parâmetros nos exemplos apresentados; os mesmos se mostraram satisfatórios para esta aplicação, principalmente pelo fato dos parâmetros reais serem independentes da frequência. Isso pode simplificar a determinação da resposta transitória, quando as simulações tiverem de ser repetidas para todos os componentes do espectro da corrente de excitação.

Da mesma forma que no caso estático, essa escolha de parâmetros, ainda que tenha sido fácil para os exemplos tratados, a rigor é empírica e dependente do problema, mas foi pouca a sensibilidade da solução a pequenas variações nesses parâmetros, o que mostra que, uma vez escolhido o parâmetro, este pode se tornar adequado para uma família de casos.

Com relação à discretização valem as mesmas considerações que para o regime estacionário acrescentando-se, porém, aquelas relacionadas às dimensões elétricas que são funções da frequência máxima e das propriedades físicas dos meios (comprimento de onda no solo e profundidade pelicular, mencionadas no Capítulo 5) e a necessidade de progressão geométrica. Deve-se lembrar ainda que essa frequência máxima que determinará o nível de discretização não é necessariamente a máxima do espectro da excitação; a resposta pode possuir conteúdo harmônico de ordem superior [43, 57], o que pode requerer um breve processo iterativo por tentativas até se convergir ao resultado.

Para a modelagem dos eletrodos optou-se pela hipótese de condutor perfeito em detrimento à de impedância superficial unidimensional, o que se mostrou razoável para os casos analisados, considerando os critérios quantitativos propostos em [14] e os testes realizados com as duas abordagens, que não apontaram para diferenças significativas entre ambas.

Outra aproximação adotada no modelo foi o truncamento do domínio na interface ar-solo, considerando-a como uma superfície com condição de Neumann homogênea para V e com campo tangencial, o que corresponde a se desprezar as correntes de deslocamento no ar. Esse procedimento foi adotado nas primeiras implementações realizadas com o intuito de se reduzir ao máximo os domínios, juntamente com o truncamento simples dos mesmos sem o uso de PML, simplesmente impondo condições de Dirichlet homogêneas nas fronteiras remotas.

Os primeiros resultados com esse modelo simplificado foram, no entanto, muito satisfatórios, conforme relatado nos primeiros trabalhos da autora e colaboradores [39, 40, 56] e demonstrados neste documento no Capítulo 6 (desta vez com PML), confirmando a robustez da formulação A - V de aresta e a validade do modelo proposto, ao menos para os casos analisados. Testes realizados em modelos mais completos descritos no Capítulo 6, onde se incluiu o ar, mostram que a densidade de corrente de deslocamento é desprezível quando comparada à densidade de corrente total no solo; da mesma forma calculou-se o componente normal ao nível do solo da indução magnética na presença do ar, mostrando que seu valor é igualmente desprezível.

Fato equivalente foi observado por Tuma et al. [47] em trabalho recente que emprega o Método de Diferenças Finitas no domínio do tempo (FDTD) para tratar o mesmo problema. Nesse trabalho é realizada simulação transitória de um sistema de aterramento de haste única sujeito a uma surto

atmosférico incluindo o ar e mostra-se que o campo elétrico nesse meio durante todo o transitório tem comportamento estático.

Um ponto que merece destaque está relacionado aos casos selecionados para a validação da metodologia. De fato, conforme já observado por Grcev [49] há uma carência de resultados disponíveis na literatura, sobretudo experimentais, que sejam conclusivos e gerais a ponto de poderem servir de “benchmark” para a aferição de resultados, sendo aqueles exemplos apresentados no Capítulo 6 os mais citados e utilizados. Ambos limitam a análise a no máximo 2 MHz, condição que corresponde à maioria dos casos práticos encontrados [36, 37, 38, 48, 49, 57], ou seja, casos em que a corrente impulsiva de excitação apresenta tempo de subida de no mínimo 1 μ s.

7.2 Principais contribuições do trabalho

Destacam-se a seguir as principais contribuições deste trabalho.

- 1 - Apresentação da formulação do elemento unidimensional a salto de potencial na Eletrocinética; a metodologia já havia sido reportada em trabalhos anteriores da autora e colaboradores, mas a sua formulação havia sido introduzida em termos de uma analogia com a análise nodal da teoria de circuitos. O formalismo presente neste documento só foi precedido por uma versão mais resumida em [42].
- 2 - Estabelecimento das condições de aplicação e validade da aproximação unidimensional e indicação de diretrizes para a subdivisão do domínio.
- 3 – Excitação em corrente na formulação Eletrocinética através de condição de Neumann não homogênea.
- 4 – Uso da técnica de truncamento de domínio na Eletrocinética baseada em PML.
- 5 – Aplicação do método de elementos finitos de aresta e formulação AV sem especificação de divergência de A à simulação de sistemas de aterramento no regime harmônico com as seguintes características:
  - truncamento do domínio condutor (solo) pelo uso de PML com parâmetro real e terminado por condutor perfeito;
  - excitação em corrente através de condição de Neumann não homogênea;
  - truncamento na interface ar-solo, considerando que nessa superfície tanto a indução magnética como a densidade de corrente são paralelas a ela; equivalente a assumir densidade de corrente nula no ar;

- eletrodos da malha de aterramento como condutores perfeitos.

Essas características possibilitaram o desenvolvimento de uma ferramenta computacional mais compacta, de bom desempenho e aplicável à grande maioria dos casos típicos de sistemas de aterramento, representando um avanço em relação aos trabalhos análogos precedentes.

7.3 Tópicos para desenvolvimento posterior

Sugere-se a seguir alguns tópicos para desenvolvimentos futuros com vistas a se chegar a uma ferramenta robusta de análise de sistemas de aterramento e com domínio de aplicação amplo.

- Pesquisa e análise detalhadas a fim de se buscar procedimentos sistemáticos para a determinação de parâmetros do PML.
- Aprimoramento da implementação no regime harmônico através de: eliminação das restrições adotadas (exclusão do ar e eletrodos como condutores perfeitos), maior número de testes de validação em maior número de casos e em frequências mais elevadas, implementação de interpolação de segunda ordem, outras formas de excitação.
- Implementação e testes com outras formulações (potencial vetor elétrico/potencial escalar magnético, formulação em campo elétrico).
- Desenvolvimento de interface gráfica dedicada e parametrizada, para a geração rápida dos modelos via scripts, por exemplo (em curso).
- Implementação e testes de algoritmos alternativos de resolução de sistemas de equações algébricas, como por exemplo Multigrid (desenvolvimento já em curso [60]).
- Determinação da resposta transitória pela incorporação das transformadas de Fourier direta da excitação e inversa da resposta (FFTs).
- Desenvolvimento de aplicativo baseado no Método de Elementos Finitos de Aresta no domínio do tempo para a simulação no regime transitório.
- Modelagem do efeito de ionização do solo, incluindo comportamento não linear e histerese, baseados no modelo dinâmico de [59].
- Acoplamento do sistema de aterramento aos circuitos aéreos.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics*, 2nd edition, 2002, John Wiley & Sons Inc. NY.
- [2] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge University Press, 1996, 3a. edição.
- [3] N. Ida, J.P.A. Bastos, *Electromagnetics and Calculation of Fields*, Springer Verlag, 2^a. Edição, 1997.
- [4] O. Biro, “Edge element formulations of eddy current problems”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 169 (1999), 391-405.
- [5] P. Dular, F. Henrotte, W. Legros, “A general and natural method to define circuit relations associated with magnetic vector potential formulations”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, May 1999, 1630-3.
- [6] R. Dyczij-Edlinger, O. Biro, “A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements”, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, No. 1, Jan. 1996, 15-23.
- [7] LMA GLIB © – LMAG Class Library for finite element analysis – <http://www.lmag.pea.usp.br>.
- [8] Ch. Geuzaine, J.-F. Remacle, *Gmsh* © – A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Version 1.65, 16 May 2006, <http://www.geuz.org/gmsh/>.
- [9] W. Morweiser, G. Meunier, H. Salze, “Computer-aided design of passive multilayer components using electromagnetic field computation”, *IEEE Trans. on components, packaging, and manufacturing technology – Part A*, Vol. 17, No. 3, Sep. 1994, 338-343.
- [10] A. Kameari, “Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge-Elements”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 466-469, March 1990.
- [11] K. Fujiwara, T. Nakata, H. Fusayasu, “Acceleration of convergence characteristic of the ICCG Method”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, March 1993, 1958-1961.

-
- [12] W. Rehhart, W. Rucker, O. Biro, "Calculation of antenna near field reactions on low conducting materials using the finite element method", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, May 1996, 862-5.
- [13] J. L. Coulomb, G. Meunier, J. C. Sabonnadière, "Energy methods for the evaluation of global quantities and integral parameters in a finite element analysis of electromagnetic devices", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. MAG-21, No. 5, Sep. 1985, 1817-1822.
- [14] S. Yuferev, N. Ida, "Selection of the surface impedance boundary condition for a given problem", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, May 1999, 1486-9.
- [15] F. Z. Louai, D. Benzerga, M. Féliachi, F. Bouillaut, "A 3D finite element analysis coupled to the impedance boundary condition for the magnetodynamic in radio frequency plasma devices", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, May 1996, 812-815.
- [16] B. Dumont, A. Gagnoud, "3D finite element method with impedance boundary condition for the modeling of molten metal shape in electromagnetic casting", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, July 2000, 1329-1332.
- [17] R. Plonsey, R. E. Collin, *Principles and applications of electromagnetic fields*, TATA McGraw Hill, New Delhi, 1976.
- [18] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill, New York, 1941.
- [19] J. P. Bérenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, Oct. 1994, 185-200.
- [20] A. Cucinota, S. Selleri, L. Vincetti, M. Zoboli, "Mesh truncation in finite element modal analysis of dielectric waveguides", *Electromagnetics*, 22, 2002, Taylor & Francis, 331-343.
- [21] M. Kuzuoglu, R. Mittra, "Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 6, No. 12, Dec. 1996, 447-449.
- [22] T. I. Kosmanis, T. V. Yioultsis, T. D. Tsiboukis, "Perfectly matched anisotropic layer for the numerical analysis of unbounded eddy-current problems", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 34, No. 6, Nov. 1999, 4452-8.
- [23] W. Pinello, M. Gribbons, A. Cangellaris, "A new numerical grid truncation scheme for the finite difference/finite element solution of Laplace's equation", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, May 1996, 1397-1400.
- [24] I. Bardi, O. Biro, K. Preis, "Perfectly matched layers in static fields", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, Sep. 1998, 2433-6.
-

-
- [25] S. Caorsi, M. Raffetto, “Perfectly matched layers for the truncation of finite element meshes in layered half-space geometries and applications to electromagnetic scattering by buried objects”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 19, No. 6, Dec. 20 1998, 427-434.
- [26] R. Dyczij-Edlinger, D. M. Kingsland, G. Peng, “Application of anisotropic absorbers to the analysis of MMIC devices by the finite element method”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 32, No. 3, May 1996, 854-7.
- [27] Z. S. Sachs, D. M. Kingsland, R. Lee, J. F. Lee, “A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 43, Dec. 1995, 1460-1463.
- [28] I. Bardi, O. Biro, K. Preis, W. Renhart, K. R. Richter, “Parameter estimation for PMLs used with 3d finite element codes”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 34, No. 5, Sep. 1998, 2755-2758.
- [29] Y. K. Hue, F. L. Teixeira, L. San Martin, M. S. Bittar, “Three-dimensional simulation of eccentric LWD tool response in boreholes through dipping formations”, *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 43, No. 2, Feb. 2005, 257-268.
- [30] J. R. Cardoso, *GROUND-3D: Uma contribuição à análise dos sistemas de aterramento pelo método dos elementos finitos*, Tese Livre Docência, EPUSP, São Paulo, 1993.
- [31] J. R. Cardoso, “FEM modeling of grounded systems with unbounded approach”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 30, No. 5, Sep. 1994, 2893-6.
- [32] M. Trlep, A. Hamler, B. Hribernik, “The analysis of complex grounding systems by FEM”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 34, No. 5, Sep. 1998, 2521-2524.
- [33] M. Trlep, A. Hamler, M. Jesenik, B. Stumberger, “The FEM-BEM analysis of complex grounding systems”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 39, No. 3, May 2003, 1155-8.
- [34] B. Nekhoul, C. Guerin, P. Labie, G. Meunier, R. Feuillet, “A finite element method for calculating the electromagnetic fields generated by substation grounding systems,” *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 31, No. 3, May 1995, 2150 – 3.
- [35] B. Nekhoul, P. Labie, F. X. Zgainski, G. Meunier, “Calculating the impedance of a grounding system”, *IEEE Trans. on Magnetism*, Vol. 32, No. 3, May 1996, 1509-12.
- [36] S. Bourg, B. Sacepe, T. Debu, “Deep earth electrodes in highly resistive ground: frequency behaviour”, *IEEE Int. Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 14-18 Aug. 1995, 584-9.
- [37] L. C. Grcev, M. Heimbach, “Frequency dependent and transient characteristics of substation grounding systems”, *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 12, No. 1, Jan. 1997, 172-8.
-

-
- [38] F. P. Dawalibi, W. Xiong, J. Ma, "Transient performance of substation structures and associated grounding systems", *IEEE Trans. on Industry Appl.*, Vol. 31, No. 3, May/June. 1995, 520-7.
- [39] V. C. Silva, L. Stefani, N. Ida, J. R. Cardoso, "Analysis of grounding systems by edge finite elements: determination of impedance", *Digest of the Eleventh Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Seoul, South Korea, June 6-9, 2004, PD3-2, 297.
- [40] V. C. Silva, J. R. Cardoso, N. Ida, "Vector finite element analysis applied to the computation of frequency dependent characteristics of substation grounding", *Proceedings of the VIII International Symposium on Lightning Protection*, 21-25 Nov. 2005 São Paulo SP, 532-6.
- [41] V.C. Silva, J. R. Cardoso, S. I. Nabeta, M. F. Palin, F. H. Pereira, "Determination of frequency-dependent characteristics of substation grounding systems by vector finite element analysis", *The 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation – Digest CD (CEFC'2006)*, Miami, EUA, April 30th-May 3rd, 2006, 175 (Versão estendida de 4 páginas submetida ao IEEE Trans. on Mag.)
- [42] V.C. Silva, J. R. Cardoso, "Determination of grounding system impedance by FEA with the use of special elements", *Record of the 15th COMPUMAG Conference on the Computation of Electromagnetic Fields*, Vol. 3, Shenyang, China, June 26-30, 2005, 246-7.
- [43] L. Grcev, V. A. Toseva, "Grounding Systems Modeling for High Frequencies and Transients: Some Fundamental Considerations", *Proceedings of IEEE Bologna PowerTech Conference*, June 23-26 2003, Italy, 1020-6.
- [44] E. D. Sunde, *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, Dover Publishing, NY, 1967.
- [45] F. Dawalibi, W. Xiong, D. Mukhedkar, "Optimum design of substation grounding in two layer earth structure. Part II – Comparison between theoretical and experimental results", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-94, No. 2, March/April 1975, 262-272.
- [46] R. G. Olsen, M. C. Willis, "A comparison of exact and quasi-static methods for evaluating grounding systems at high frequencies", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 11, No. 2, April 1996, 1071-1081.
- [47] E. Tuma, R. Oliveira, C. L. S. S. Sobrinho, "New model of current impulse injection and potential measurement in transient analysis of grounding systems in homogeneous and stratified soils using the FDTD method", *Proceedings of the VIII International Symposium on Lightning Protection SIPDA*, 21-25 Nov. 2005 São Paulo SP, 526-531.
-

-
- [48] R. L. Stoll, G. Shen, N. Pilling, "Comparison of two simple high-frequency earthing electrodes", *IEE Proc. – Gener. Transm. Distrib.*, Vol. 151, No. 2, March 2004, 219-224.
- [49] L. Grcev, M. Popov, "On high-frequency circuit equivalents of a vertical ground rod", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 20, No. 2, April 2005, 1598-1603.
- [50] A. Geri, "Behaviour of grounding systems excited by high impulse currents: the model and its validation", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 14, No. 3, July 1999, 1008-1017.
- [51] J. Cidrás, A. F. Otero, C. Garrido, "Nodal frequency analysis of grounding systems considering the soil ionization effect", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 15, No. 1, Jan. 2000, 103-7.
- [52] K. Tanabe, "Novel method for analyzing dynamic behavior of grounding systems based on the finite-difference time-domain method", *IEEE Power Engineering Review*, Sep. 2001, 55-57.
- [53] I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro, "A boundary element numerical approach for grounding grid computation", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 174 (1999), Elsevier, 73-90.
- [54] B. Zhang, J. He, J.-B. Lee, X. Cui, Z. Zhao, J. Zou, S.-H. Chang, "Numerical analysis of transient performance of grounding systems considering soil ionization by coupling moment method with circuit theory", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, May 2005, 1440-3.
- [55] A. Passaro, *Análise de Desempenho de Sistemas de Aterramento em Alta Frequência pelo Método dos Elementos Finitos*, Tese de Doutorado, EPUSP, 1998.
- [56] L. Stefani, *Método dos elementos finitos de aresta no domínio harmônico aplicado ao cálculo de impedância de alta frequência em sistemas de aterramento*, Tese de Doutorado, EPUSP, 2005.
- [57] L. Grcev, F. Dawalibi, "An electromagnetic model for transients in grounding systems", *IEEE Trans. Power Del.*, Vol. 5, No. 4, Nov. 1990, 1773-1781.
- [58] EPRI, *Transmission Line Grounding*, Electric Power Research Institut, Vol. I, 1982, 7-23 a 7-29.
- [59] A. C. Liew, M. Darveniza, "Dynamic model of impulse characteristics of concentrated earths", *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 121, Feb. 1974, 123-135.
- [60] F. H. Pereira, M. F. Palin, S. L. L. Verardi, V. C. Silva, J. R. Cardoso, S. I. Nabeta, "A Wavelet-based algebraic multigrid preconditioning for iterative solvers in 3D time-harmonic electromagnetic edge-based finite element analysis", *The 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation – Digest CD (CEFC'2006)*, Miami, EUA, April 30th-May 3rd, 2006, 49 (Versão estendida de 4 páginas submetida ao IEEE Trans. on Mag.)
-

- [61] O. Biro, K. Preis, “On the use of magnetic vector potential in the finite element analysis of 3-D eddy currents”, *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 25, No. 4,, July 1989, 3145-3159.
- [62] V. C. Silva, N. M. Abe, A. Passaro, J. R. Cardoso, “A new line-element approach applied to 3D FEA of grounding system”, *International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering*, Proceedings, part 11, Sep. 1996, 410-415.
- [63] V. C. Silva, J. R. Cardoso, A. Passaro, N. M. Abe, “Elemento finito unidimensional anisotrópico”, *Revista Controle & Automação*, Vol. 8, No. 2, 1997, 52-56.
- [64] Y. H. Chen, W. C. Chew, M. L. Oristaglio, “Application of perfectly matched layers to the transient modeling of subsurface EM problems”, *Geophysics*, Vol. 62, No. 6, Nov-Dec. 1997, 1730-1736.