

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS REDES
COM MALHAS DE SINCRONISMO DE FASE**

Prof. Dr. José Roberto Castilho Piqueira

Tese apresentada para o
concurso público de
Livre-Docência na área de
Controle e Automação

SÃO PAULO - SP

1997

Sumário

Prefácio	4
1. Introdução	6
2. Considerações Gerais sobre Malhas de Sincronismo de Fase	9
2.1. Modelagem e Equacionamento	10
2.2. Faixas de Retenção e Captura	12
2.3. Faixas de Retenção e Captura para Malhas de 2 ^a Ordem	15
3. Distribuição de Sinais de Tempo	21
3.1. Formulação de Problema	22
3.2. Redes Mestre-Escravo	23
3.3. Redes com Nós Mutuamente Sincronizados	31
4. Redes Mestre-Escravo Unidirecionais — Estrelas Simples	33
4.1. Formulação do Problema	34
4.2. Modelagem e Equacionamento	35
4.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidades Lentas	38
4.4. Efeito Doppler	40
4.5. Faixas de Retenção e Captura	41

5. Redes Mestre-Escravo Bidirecionais — Estrelas Duplas	43
5.1. Formulação do Problema	44
5.2. Modelagem e Equacionamento	45
5.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidades Lentas	50
5.4. Algumas Conclusões sobre Redes Bidirecionais	53
6. Comparações entre Arranjos Mestre-Escravo	54
6.1. Formulação do Problema	55
6.2. Rede OWMS — Estrela Simples	56
6.3. Rede TWMS — Estrela Dupla	59
6.4. Comparações	63
7. Redes de Osciladores Mutuamente Sincronizados	64
7.1. Formulação do Problema	66
7.2. Modelagem e Equacionamento	66
7.3. Determinação da Frequência de Estado Estacionário	71
7.4. Estabilidade do Estado Síncrono	72
8. Conclusões	76
Referências Bibliográficas	79

Prefácio

Quando terminei meu trabalho de doutoramento, há cerca de dez anos, tive a oportunidade de entrar em contato com duas áreas de trabalho: a Teoria de Sistemas Dinâmicos e o Sincronismo de Osciladores.

São assuntos fascinantes e de presença tão marcante nas diversas áreas de conhecimento que geraram, em todo o mundo, estudos relevantes dos mais variados problemas ([1]; [2]).

Por isso, ao longo desses anos, ouvi filósofos, físicos, biólogos e médicos, li sobre as chamadas “ciências da vida” e pude trabalhar em questões combinando aspectos biológicos, físicos, filosóficos e matemáticos.

Interessei-me, inicialmente, pela Cronobiologia ([3]), tentando modelar os diversos ciclos biológicos através das técnicas e teorias já estudadas nos Sistemas Dinâmicos.

Ao pensar na geração de sinais caóticos ([4] e [5]), deparei-me com pessoas que estudavam a chamada Inteligência Artificial, ligada à Neurobiologia ([6]), desenvolvendo com elas trabalhos que buscavam a obtenção de modelos cognitivos de funções superiores ([7]).

Visando aos modelos de cronobiologia e de inteligência artificial, estudei as chamadas malhas de sincronismo de fase (PLLs) acopladas e obtive alguns resultados ([8]; [9] e [10]), cuja complementação, detalhamento e análise reporto nesta tese.

O que já me pareceu um conjunto de idéias desconexas, soa com alguma unidade e resume o que de mais útil fiz, a partir do que estudei durante o doutoramento.

Agradecer a quem me ajudou, gastaria muitas páginas, mas algumas pessoas devem ser citadas em especial:

— o prof. Dr. Jocelyn Freitas Bennaton, meu orientador de mestrado e doutoramento, incentivador permanente de minha carreira docente.

— o prof. Octávio Ferreira Affonso, colega de sala e meu professor para todas as horas.

— o prof. Henrique Schützer Del Nero, orientado e companheiro constante das andanças cognitivas.

— os professores Simão Faiguenboim, Emílio Gabriades e Nicolau Marmo, que me ensinaram o gosto por uma aula bem dada.

— o aluno Antonio Rafael Sito Antunes, de contribuição inestimável para este trabalho.

Capítulo 1: Introdução

RESUMO:

Neste capítulo, explica-se origem do problema estudado e procura-se dar uma visão geral do trabalho desenvolvido.

Capítulo 1

Introdução

O problema de distribuição de sinais de tempo, ao longo das redes, consiste no controle de sinais de fase e frequência de relógios espalhados ao longo de uma certa área. O que se deseja é sincronizar as escalas de fase e frequência de diversos osciladores, pertencentes a uma dada rede, usando a capacidade de comunicação de dados das interconexões ([11]).

Essa questão aparece, em um grande número de aplicações, como:

- Estabelecimento de um sistema mundial de distribuição de sinais de tempo.
- Sincronização de relógios localizados em diferentes pontos de multiplexação em uma rede digital de comunicações.
- Distribuição de sinais de tempo em uma rede de controle de processos, com o propósito de executar controle e monitoração de desempenho em instantes específicos.
- Estabelecimento do sincronismo para um supercomputador constituído de múltiplos processadores.

As razões listadas são suficientes para justificar sua relevância em aplicações de engenharia de controle e comunicações, exigindo tratamento matemático preciso, permitindo a comparação objetiva entre as diversas possibilidades de solução.

Além disso, as equações relativas a esses processos podem servir na modelagem de problemas de sincronismo entre osciladores biológicos ([6]). Ritmos biológicos, sincronizados ou não, constituem requisito fundamental nos diversos processos relacionados com a vida ([12], [13] e [14]) e suas descrições matemáticas estão, cada vez mais, presentes na literatura ([15]).

Pelas razões expostas, iniciou-se o estudo desse tipo de problemas, considerando, nos modelos, as malhas de sincronismo de fase (PLLs) como elementos básicos na detecção de bases de tempo síncronas.

Assim, inicia-se, no capítulo 2, a modelagem e o equacionamento dos PLLs, tentando expressar, com alguma precisão, os conceitos de faixas de retenção e captura e aplicando-os para as redes de segunda ordem ([16]).

O capítulo 3 é uma tentativa de classificação das redes de distribuição de sinais de tempo, proporcionando equacionamento geral de cada opção de esquema de sincronismo.

Nos três capítulos posteriores (4, 5 e 6), duas técnicas diferentes de implementação de redes mestre-escravo, unidirecional e bidirecional, serão equacionadas, discutidas e comparadas.

As redes de osciladores mutuamente sincronizados, de matematização mais complicada, serão estudadas em capítulo independente (capítulo 7) e as questões de estabilidade serão discutidas.

Conclusões finais, comparando os arranjos, serão apresentadas, ressaltando-se que, em todo o trabalho, as ferramentas matemáticas usadas são provenientes da Teoria de Bifurcações ([17]), associando-se as famílias de soluções das equações diferenciais dos modelos aos valores possíveis dos parâmetros constitutivos.

Capítulo 2: Considerações Gerais sobre Malhas de Sincronismo de Fase

2.1. Modelagem e Equacionamento

2.2. Faixas de Retenção e Captura

2.3. Faixas de Retenção e Captura para Malhas de 2ª Ordem

RESUMO:

Este capítulo apresentará os conceitos de faixa de retenção e captura para malhas de sincronismo de fase, usando os fundamentos da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Além disso, efetuará o cálculo das referidas faixas para redes de 2ª ordem.

Capítulo 2:

Considerações Gerais sobre Malhas de Sincronismo de Fase

As malhas de sincronismo de fase (PLLs) são os elementos básicos para a extração eletrônica de sinais de tempo. Neste capítulo serão apresentados seu modelamento matemático e a definição de dois parâmetros fundamentais: faixa de retenção e faixa de captura.

Além disso, serão deduzidas as expressões dessas faixas para PLLS de 2ª ordem, de particular interesse em telecomunicações e controle.

O uso de PLLs com $n > 2$ leva a respostas transitórias melhores do que as dos PLLs de 2ª ordem introduzindo, entretanto, a possibilidade de aparecimento de oscilações auto-sustentadas isoladas (ciclos-limite) ([18]).

2.1. Modelagem e Equacionamento

As malhas de sincronismo de fase (PLLs) são fechadas e constituídas por três elementos: um detetor de fase (PD), um filtro passa-baixas linear (F) e um oscilador controlado por tensão (VCO), interligados conforme a figura 1.

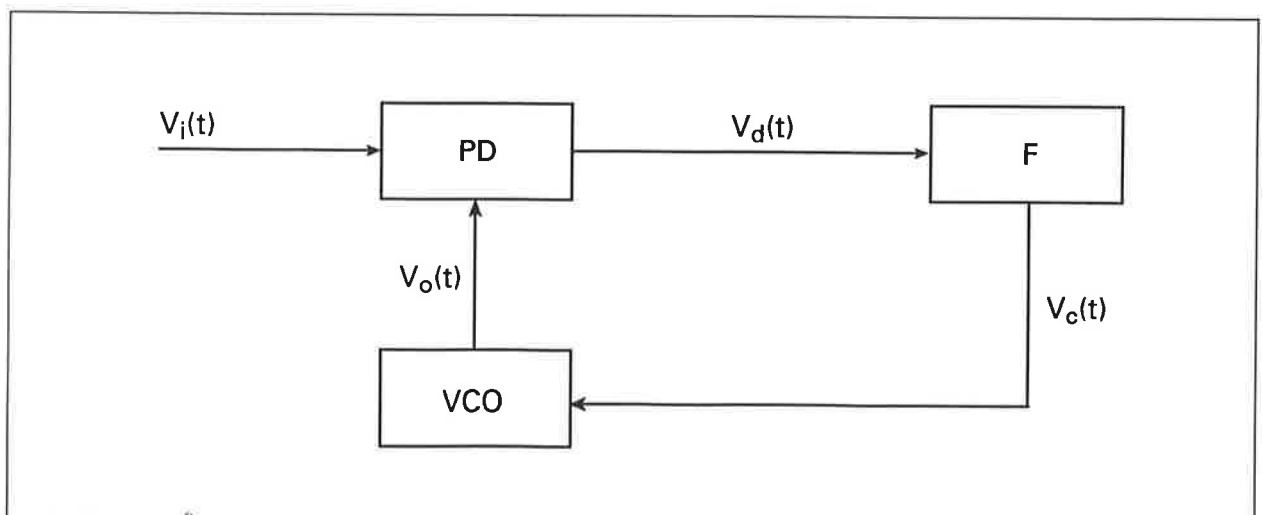


Figura 1 – Diagrama em blocos de um PLL.

Sejam os sinais externo e local da forma:

$$v_i(t) = V_i \text{sen}(\omega_o t + \theta_i(t)) \quad (1)$$

$$v_o(t) = V_o \text{cos}(\omega_o t + \theta_o(t)) \quad (2),$$

sendo V_i ; V_o e ω_o constantes positivas e as fases $\theta_i(t)$ e $\theta_o(t)$ variáveis no tempo.

Como o objetivo da sincronização através de um PLL é fazer com que a fase local $\theta_o(t)$ seja, em cada instante, tão próxima da fase de entrada $\theta_i(t)$ quanto possível, define-se erro de fase (φ):

$$\varphi(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t) \quad (3)$$

Nessas condições, conforme demonstrado em [17]:

$$v_d = K_d V_i \text{sen} \varphi(t) \quad (4).$$

Considerando o filtro passa-baixas implementado só com polos ([18]), com função de transferência:

$$F(s) = \frac{V_c(s)}{V_d(s)} = \frac{G b_o}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_o} \quad (5), \text{ com}$$

$G b_o > 0$ e $b_i > 0$, para $i = 0, 1, \dots, n$.

Como a fase $\theta_o(t)$ é controlada por $v_c(t)$ segundo a relação:

$$\theta_o(t) = K_o v_c(t) \quad (6),$$

com $K_o > 0$, a combinação das equações (3), (4), (5) e (6) resulta em:

$$\begin{aligned} b_n \varphi^{(n+1)} + b_{n-1} \varphi^{(n)} + \dots + b_1 \varphi^{(1)} + K_o G b_o K_d V_i \text{sen} \varphi = \\ = b_n \theta_i^{(n+1)} + b_{n-1} \theta_i^{(n)} + \dots + b_1 \theta_i^{(2)} + b_o \theta_i^{(1)} \end{aligned} \quad (7),$$

com $(.)^n = \frac{d^n}{dt^n} (.)$.

Para simplificar a notação, define-se:

$L(.) = b_n (.)^{n+1} + b_{n-1} (.)^n + \dots + b_1 (.)^1$ e a equação (7) se reduz a:

$$L(\varphi) + K_o G b_o K_d V_i \text{sen} \varphi = L(\theta_i) \quad (8)$$

Assim, a relação (8) descreve a relação entre o erro de fase $\varphi(t)$ e a

fase do sinal de entrada $\theta_i(t)$ através de uma equação diferencial ordinária de ordem $(n + 1)$, uma vez que a ordem do filtro da malha é n .

O estudo da equação em questão, via Teoria de Bifurcações ([17]), proporciona uma boa visão para os comportamentos possíveis do ponto de vista de Engenharia de Controle e Telecomunicações.

Para tanto, nas sub-seções seguintes, definem-se os conceitos de faixa de retenção e faixa de captura, procurando relacioná-los com os parâmetros da equação (8).

Para efeito de nomenclatura, considerando a equação (8), o PLL será chamado de ordem $(n + 1)$, sendo n a ordem do filtro.

Generalizando trabalhos experimentais desenvolvidos na literatura ([19]), foram obtidos alguns resultados para as faixas de retenção e captura, quando o PLL é de 2ª ordem.

2.2. Faixas de Retenção e Captura

É um hábito bastante difundido, em Engenharia de Controle e Telecomunicações, distinguir, do ponto de vista prático, dois modos dinâmicos de operação de um PLL. O chamado modo de aquisição, relativo ao alcance de um estado síncrono a partir de certa condição inicial e o chamado modo de rastreamento, relativo aos ajustes automáticos realizados pelo PLL para manter o estado síncrono, sob certas perturbações ([20]).

Do ponto de vista da operação do sistema dinâmico, descrito pela equação (8), deve-se ressaltar que o modo de rastreamento é caso particular do modo de aquisição, reduzindo-se as condições iniciais possíveis àquelas próximas de um ponto de equilíbrio, assintoticamente estável, no espaço de estados ([17]).

Assim, associada ao modo de aquisição, costuma-se trabalhar com o conceito de faixa de captura (“acquisition range”; “pull-in range”; “lock-in

range”; “catching range”) como sendo a faixa de freqüências do sinal externo que possibilita a obtenção de um estado síncrono. Do ponto de vista do sistema dinâmico descrito pela equação (8), propõe-se uma equivalência para os diferentes termos supra-referidos, não dando relevância ao fato do sistema atingir o estado síncrono num ciclo de largura 2π (“lock-in range”) ou em mais de um ciclo (“pull-in range”), dando ensejo ao fenômeno de deslizamento de ciclos (“cycle-slipping”).

Associada ao modo de rastreamento, costuma-se trabalhar com o conceito de faixa de retenção (“hold-in range”, “holding range”, “lock range”, “synchronous range”, “tracking range”) como sendo a faixa de freqüências em que deve se situar o sinal externo, de modo a não tirar o PLL de um dado estado síncrono.

Abreviadamente, pode-se dizer que a faixa de valores de freqüência do sinal externo, sincronizáveis com o PLL, recebe o nome de faixa de captura no modo de aquisição e de faixa de retenção no modo de rastreamento.

O fato desses termos não estarem bem definidos na literatura, com o respaldo do trabalho experimental de Viterbi ([19]), levou ao estudo que se segue, com definições da terminologia, relacionando-a com a dinâmica descrita na equação (8).

Para tanto, deve-se atentar ao fato que duas funções de excitação ($\theta_i(t)$) são típicas, correspondendo a variações de fase com velocidade constante (9) e com aceleração constante (10), descritas, analiticamente, em ([21]) por:

$$\theta_i = \Omega t + \phi \quad (9)$$

$$\theta_i = \frac{Rt^2}{2} + \Omega t + \phi \quad (10)$$

Nas equações (9) e (10) assume-se, por simplicidade, que R , Ω e ϕ são constantes maiores ou iguais a zero.

Definição 1 (Estado Síncrono)

Um PLL, em estado síncrono, está em um ponto de equilíbrio de sua equação diferencial, da forma dada pela equação (8), com erro de frequência (φ) nulo.

Definição 2 (Faixa de Retenção)

Faixa de Retenção de um PLL é o conjunto de Ω , em (9) e (10) e o conjunto de R em (10), tal que a equação diferencial, da forma dada pela equação (8), que rege o comportamento dinâmico do PLL, tenha um ponto de equilíbrio, assintoticamente estável, correspondente a um estado síncrono. Isto é, a faixa de retenção é o conjunto de Ω e R , tal que se a malha estiver em estado síncrono e, caso os valores de Ω e R , mudem infinitesimalmente, a malha tenderá a voltar ao estado síncrono por ele ser assintoticamente estável ([18]).

Definição 3 (Faixa de Captura)

Faixa de Captura de um PLL é o conjunto de Ω em (9) e (10) e o conjunto de R em (10), tal que a solução da equação diferencial, da forma dada pela equação (8), que rege a dinâmica do PLL convirja para um ponto de equilíbrio, assintoticamente estável, seja qual for sua condição inicial ([18]).

A definição 3 pode, como se verifica facilmente, ser substituída por outra, mais conveniente do ponto de vista operacional, quando se trata de um sistema de 2ª ordem.

Definição 3A (Faixa de Captura) — Sistemas de 2ª Ordem

Faixa de Captura de um PLL de 2ª ordem é o conjunto de Ω em (9) e (10) o conjunto de R em (10), que para a equação diferencial, da forma dada pela equação (8), que rege a dinâmica do PLL assegura:

- i) Existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
- ii) Não-existência de ciclos-limite no retrato de fase do sistema.

A respeito do exposto, algumas observações úteis podem ser feitas:

— Quando se trata de sistemas de 2ª ordem, a definição 3A é mais útil, operacionalmente, do que a definição 3, pois permite dividir o processo de cálculo da faixa de captura em duas partes objetivas: verificação da existência de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis ([22]) e verificação da não existência de ciclos-limite pelo Teorema de Bendixon ([22]), ([23]) e ([16]).

— Como a equação (8) contém o termo $\sin \varphi$, a representação de suas trajetórias, no espaço de estados, é 2π -periódica, admitindo portanto, na representação cilíndrica do espaço de estados, ciclos-limite generalizados ([23]). Existência de ciclos-limite generalizados importam para a determinação da faixa de captura e não para a faixa de retenção. Para a faixa de retenção, podem existir ciclos-limite no retrato de fase do sistema, desde que ocorram pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

— Esse conjunto de definições é uma complementação das idéias propostas por Viterbi ([19]), sendo, totalmente, compatíveis com o trabalho experimental por ele apresentado.

— Em Engenharia de Telecomunicações, costuma-se dizer que a faixa de retenção sempre contém a faixa de captura. Isso está ligado ao eventual aparecimento de ciclos-limite nas equações da forma dada por (8). Variando o valor de Ω , com os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, Ω ainda estará dentro da faixa de retenção mas fora da faixa de captura.

2.3. Faixas de Retenção e Captura para Malhas de 2ª ordem

Nos sistemas de transmissão e recuperação de sinais de tempo, as células básicas são os PLLs descritos, dinamicamente, por equações do

tipo (8), correspondentes a malhas de ordem $(n + 1)$, quando os filtros utilizados são de ordem (n) .

Malhas de segunda ordem são as mais utilizadas pois apresentam respostas transitórias razoáveis para entradas (θ_i) do tipo degrau. Para entradas (θ_i) do tipo rampa, que aparecem muito na prática, não permitem comportamentos oscilatórios ou caóticos para a função erro de fase $\varphi(t)$ ([24]).

Malhas de ordem superior podem apresentar melhor resposta transitória mas, de acordo com as combinações entre parâmetros da malha e do sinal de entrada, mesmo degraus e rampas podem produzir erros oscilantes e, até mesmo, caóticos ([16]).

Por esses motivos, esta sessão está dedicada à determinação das faixas de retenção e captura de PLLs de 2ª ordem. Os resultados propostos serão essenciais para o estudo das redes de distribuição de sinais de tempo, estudadas nos capítulos seguintes.

Retomando, assim, a equação (8) e reescrevendo-a para ordem dois:

$$b_1 \ddot{\varphi} + b_0 \dot{\varphi} + K_o G b_o K_d V_i \sin \varphi = b_1 \ddot{\theta}_i + b_0 \dot{\theta}_i \quad (11)$$

Considerando o filtro como sendo de primeira ordem, com as normalizações devidas de ganho e freqüência e, portanto, com função de transferência dada por:

$$F(s) = \frac{1}{s + 1}$$

A equação (11) se reduzirá à:

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + K_o K_d V_i \sin \varphi = \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i \quad (12)$$

O termo $K_o K_d V_i$ tem dimensão de freqüência, normalizada em relação à freqüência de corte do filtro, sendo denominado ganho da malha ([20], [24]) e será, de agora em diante, denotado por μ . Feitas essas considerações, a equação diferencial a ser trabalhada, será:

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \mu \sin \varphi = \ddot{\theta}_i + \dot{\theta}_i \quad (13)$$

Na equação (13), μ é um parâmetro real e positivo, $\theta_i(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a entrada e $\varphi(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ representa a resposta do sistema.

Para a determinação das faixas de retenção e captura deve-se considerar θ_i dado por (10), conforme já definido, reduzindo a equação (13) a:

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \mu \sin \varphi = R t + R + \Omega \quad (14)$$

Proposição 1: Seja um PLL de 2ª ordem, descrito pela equação (14) com $\mu > 0$; $R \geq 0$ e $\Omega \geq 0$. No espaço de estados $(\varphi; \dot{\varphi})$ o sistema dinâmico admite pontos de equilíbrio para todo $t \geq t_0$ se, e somente se: $R = 0$ e $\Omega \leq \mu$.

Prova:

É evidente que, nessas condições, é necessário que $R = 0$ para que a equação tenha pontos de equilíbrio para todo $t \geq t_0$. Além disso, cumprida essa exigência, esses pontos serão dados por:

$$(\varphi, \dot{\varphi}) = \left(\arcsin \frac{\Omega}{\mu}; 0 \right) \text{ e, portanto, é necessário que } \Omega \leq \mu. \text{ A prova, no}$$

sentido inverso, é mais simples, pois $R = 0$ e $\Omega \leq \mu$ são condições suficientes para a existência de pontos de equilíbrio.

O prosseguimento do raciocínio partirá dos pressupostos apresentados na Proposição 1, isto é, $R = 0$ e $\Omega \leq \mu$, resultando na equação:

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + \mu \sin \varphi = \Omega \quad (15), \text{ que representa um sistema com superfície de fase cilíndrica ([23]) e, portanto, a análise se restringirá ao intervalo } (-\pi, \pi]$$

Proposição 2: Seja um PLL de 2ª ordem descrito pela equação (15), com $\mu > 0$, $\Omega \geq 0$, $\Omega \leq \mu$ e $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

i) se $\Omega = \mu$ há um único ponto de equilíbrio, não hiperbólico.

ii) se $\Omega < \mu$ há dois pontos de equilíbrio $A = (\varphi_1, 0)$ e $B = (\varphi_2, 0)$ com

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi, \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \frac{\Omega}{\mu} \text{ e } \cos \varphi_1 = -\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^2}.$$

iii) A é assintoticamente estável e B é de sela.

Prova:

i) se $\Omega = \mu$, a equação (15) se reduzirá à:

$\ddot{\phi} + \dot{\phi} + \mu \sin \phi = \Omega$, cujos pontos de equilíbrio são dados por:

$-\dot{\phi} = 0$ e $\Omega - \mu \sin \phi = 0$ e, portanto, para $\phi \in (-\pi, \pi]$ só o ponto $(\phi, \dot{\phi}) = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ satisfaz.

— O polinômio característico do sistema linearizado, em volta do ponto em apreço, será:

$\lambda^2 + \lambda = 0$, cujas raízes são 0 e -1 e, portanto, o ponto é não hiperbólico.

ii) É imediata, por inspeção da equação diferencial.

iii) O polinômio característico do sistema linearizado, em torno do ponto A, é:

$\lambda^2 + \lambda + \mu \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^2} = 0$, cujas raízes são dadas por:

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1 - 4 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^2}}$ que são reais e negativas ou complexas con-

jugadas, com partes reais negativas, e, portanto, A é assintoticamente estável.

— O polinômio característico do sistema linearizado, em torno do ponto B, é:

$\lambda^2 + \lambda - \mu \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^2} = 0$, cujas raízes são dadas por:

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1 + 4 \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^2}}$ que são reais e de sinais opostos e, por-

tanto, B é de sela.

A título de ilustração, a figura 2 resume as proposições 1 e 2 em um diagrama de bifurcações do tipo sela-nó. ([22]).

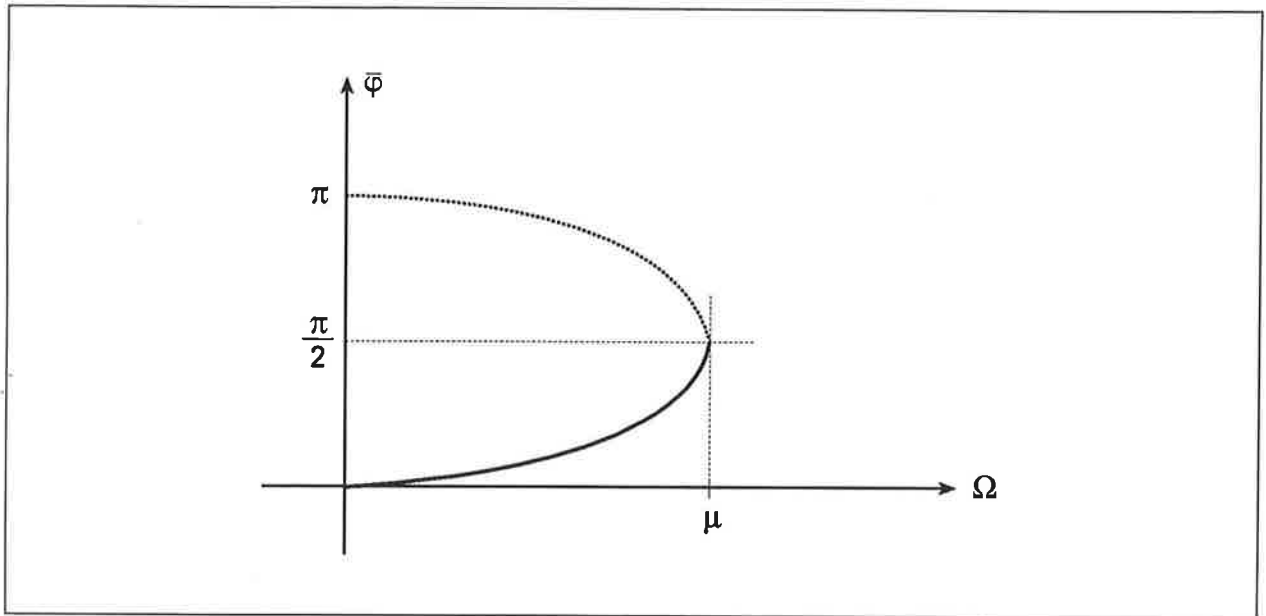


Figura 2 – Diagrama de bifurcações dos pontos de equilíbrio para PLLs de 2ª ordem

A linha tracejada representa as selas e a linha cheia, os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Proposição 3: PLLs de 2ª ordem, descritos pela equação (15), com $\mu > 0$, $\Omega \geq 0$ e $\Omega < \mu$, não apresentam ciclos limite em seus retratos de fase.

Prova: Chamando $x_1 = \varphi$ e $x_2 = \dot{\varphi}$ a equação (15) pode ser reescrita na forma de estados como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = \Omega - \mu \sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

Assim, calcula-se $\nabla f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$ e, como ∇f não muda de sinal

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pelo critério de Bendixon ([23]), não há ciclos-limite no retrato de fase.

Proposição 4: Nas condições das proposições (1), (2) e (3):

i) A faixa de retenção de um PLL de 2ª ordem é:

$$R = 0 \text{ e } 0 \leq \Omega < \mu.$$

ii) A faixa de captura de um PLL de 2ª ordem é:

$$R = 0 \text{ e } 0 \leq \Omega < \mu.$$

Prova: Será um corolário das proposições 1, 2 e 3 e das definições 2 e 3A.

Capítulo 3:

Distribuição de Sinais de Tempo

3.1. Formulação do Problema

3.2. Redes Mestre-Escravo

3.3. Redes com Nós Mutuamente Sincronizados

RESUMO:

Neste capítulo procura-se apresentar o problema da distribuição de sinais de tempo, explicando e equacionando as diversas estratégias de rede utilizadas na prática.

Capítulo 3:

Distribuição de Sinais de Tempo

O problema de distribuição de sinais de tempo, ao longo de uma certa área geográfica, pode ser entendido como a sincronização de diversos osciladores, segundo uma certa estratégia.

Entretanto, em algumas situações de engenharia, a necessidade de sincronismo não é crítica e, nesses casos, são utilizados circuitos de relógio independentes que, periodicamente, são ajustados manualmente. Esse tipo de estratégia originou as chamadas redes plesiócronicas, que não são objeto deste trabalho.

As redes, a serem estudadas, são as chamadas redes síncronas, em que os osciladores locais de diversos PLLs operam na mesma frequência.

Neste capítulo, formula-se o problema de classificação das redes síncronas e apresentam-se algumas idéias para seu equacionamento.

3.1. Formulação do Problema

As redes de distribuição de sinais de tempo têm uma classificação inicial em redes plesiócronicas e síncronas, de acordo com a existência ou não de sinais de controle.

As redes síncronas, que possuem algum mecanismo de priorização de relógios, são chamadas **redes mestre-escravo (M-S)**.

Aquelas em que todos relógios têm relevância na determinação de seu estado de sincronismo são chamadas de **redes com nós mutuamente sincronizados**. As redes mestre-escravo e as redes com nós mutuamente sincronizados podem incluir ou não técnicas de compensação de atraso. A figura 3 resume as estratégias descritas, permitindo a sistematização do estudo do problema ([11]).

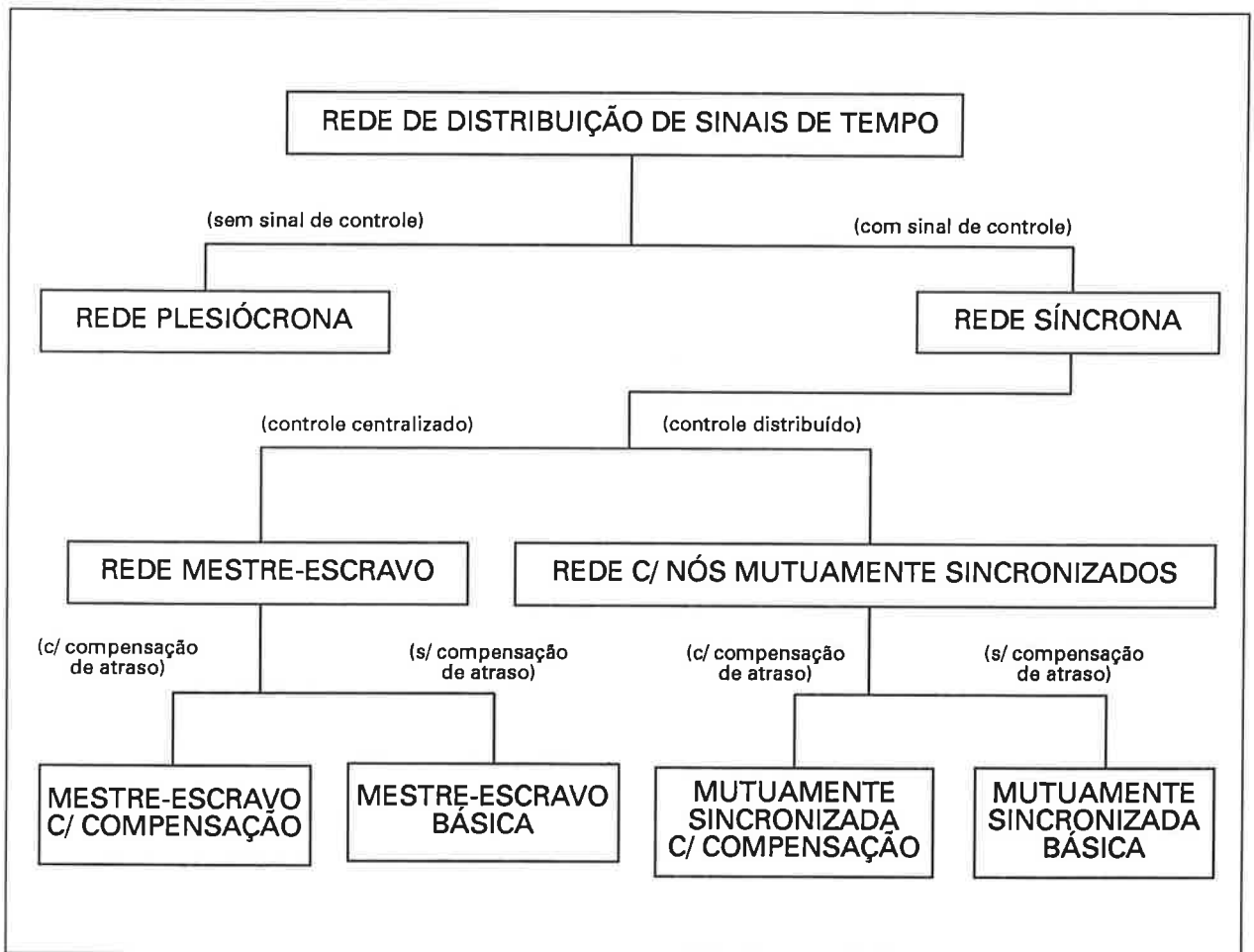


Figura 3 – Estratégias de Distribuição de Sinais de Tempo

Nos itens seguintes, serão apresentados os detalhes das diversas estratégias, considerando que as fases dos osciladores locais de cada nó são denotadas por Φ , sendo constituídas por um termo de livre curso (ωt), por um termo forçante $\theta(t)$ e por perturbações $P(t)$.

Isto é:

$$\Phi(t) = \omega t + \theta(t) + P(t) \quad (16)$$

3.2. Redes Mestre-Escravo (MS)

Para modelar as redes mestre-escravo, costuma-se classificá-las, quanto ao sentido de distribuição das bases de tempo, em redes de via única (OWMS) e redes de via dupla (TWMS).

Nas redes OWMS, o nó mestre tem sua base de tempo própria e independente dos demais. Os nós escravos têm base de tempo dependente, exclusivamente, de um único nó, que pode ser o mestre ou outro escravo.

As redes OWMS classificam-se, quanto à topologia, em redes em cadeia e redes em estrela.

Nas redes TWMS, o nó mestre tem sua base de tempo própria, mas ajustável aos outros nós. Os nós escravos podem ter sua base de tempo dependente de mais de um nó.

As redes TWMS classificam-se, quanto à topologia, em redes em cadeia, em estrela ou em enlace.

Na figura 4, essas diversas modalidades de redes estão resumidas. Cada uma delas será descrita e equacionada na seqüência

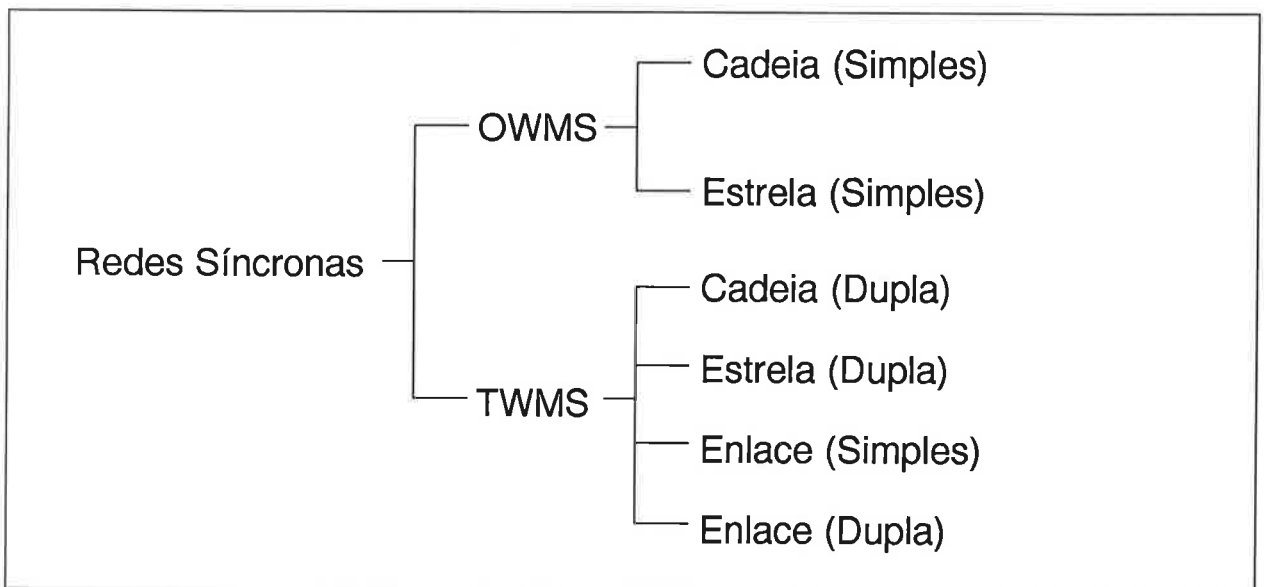


Figura 4 – Tipos de Redes Síncronas

— OWMS – Cadeia Simples

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada é a da figura 5, com o mestre (nó – 1) fornecendo a base de tempo para o nó 2, esse para o nó 3 e, assim, sucessivamente.

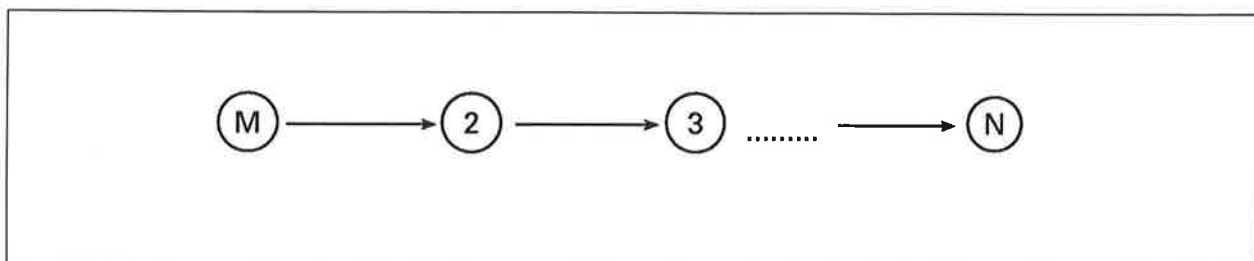


Figura 5 – Rede OWMS – Cadeia Simples

O nó mestre é livre, com frequência $\dot{\Phi}_M(t)$ e sua fase pode ser escrita como:

$$\Phi_1(t) = \omega_M + \Omega_M \cdot t \quad (17) \quad , \text{ com o}$$

termo ω_M representando a frequência do oscilador mestre e o termo $\Omega_M \cdot t$, o desvio provocado durante a operação.

Cada nó escravo pode ser esquematizado como um PLL cuja fase do sinal de entrada será igual à fase do VCO do nó anterior, devidamente afetada pelo tempo ($\tau_{i,j}$) de propagação do sinal entre os nós i e j (figura 6).

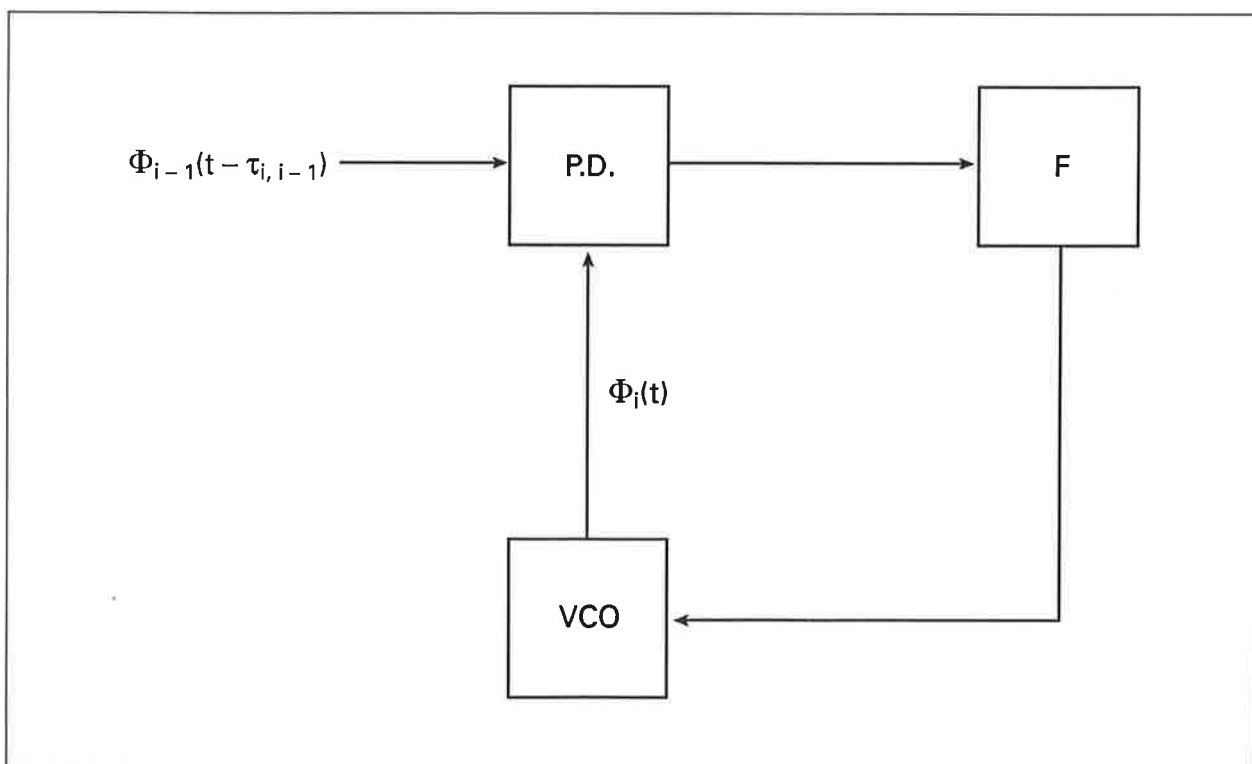


Figura 6 – Esquema do i -ésimo nó escravo — OWMS – Cadeia Simples

— OWMS – Estrela Simples

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada será a da figura 7, com o mestre (nó – 1) fornecendo a base de tempo para todos os outros nós.

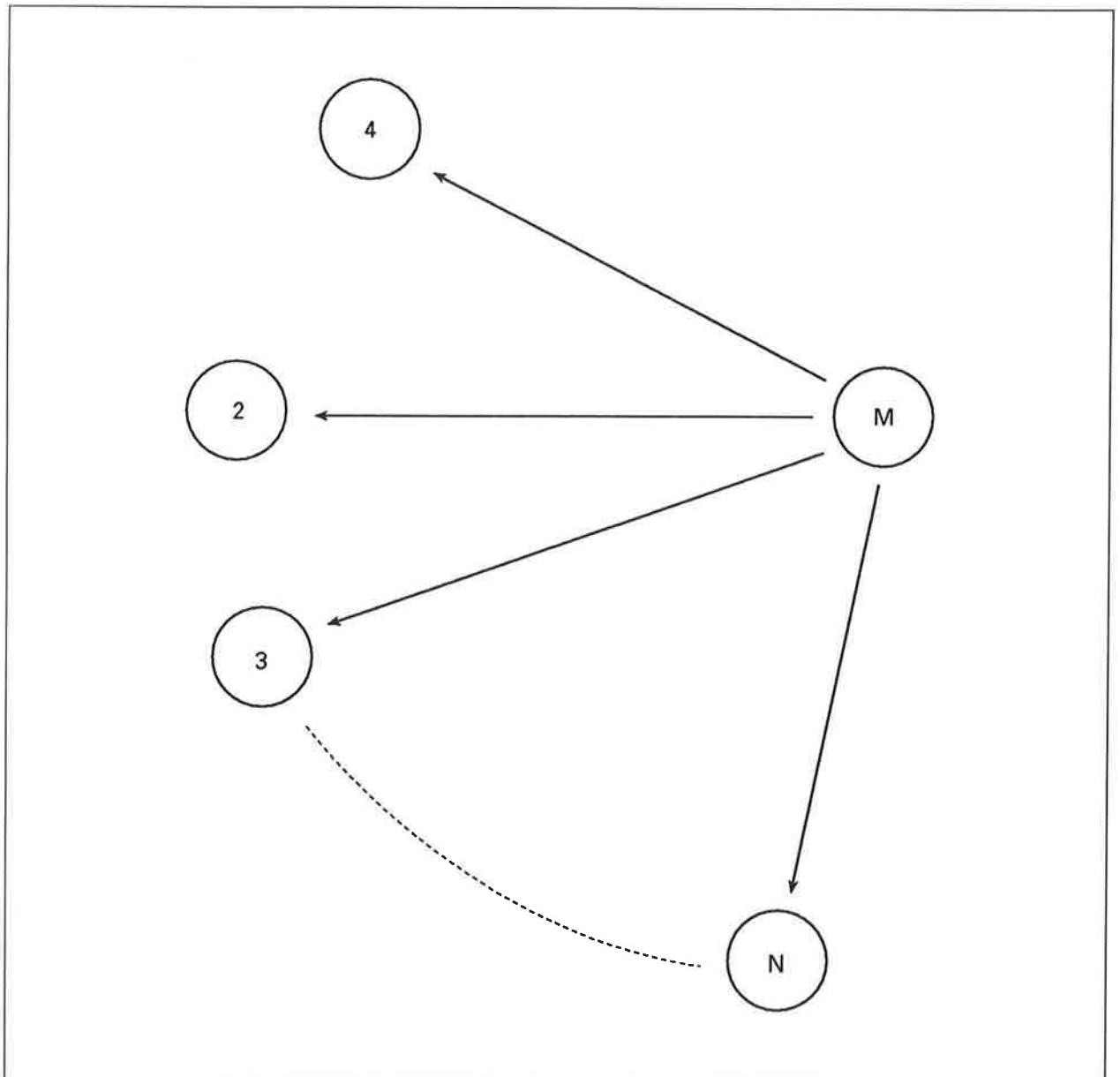


Figura 7 – Rede OWMS – Estrela Simples

O nó mestre é descrito como o da OWMS – Cadeia Simples (equação 17) e o esquema de cada nó escravo é idêntico ao da figura 6, substituindo-se a fase do sinal de entrada $\Phi_{i-1}(t - \tau_{i, i-1})$ por $\Phi_1(t - \tau_{i, 1})$.

TWMS – Cadeia Dupla

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada será a da figura 8, com o nó i-1 servindo de mestre para o nó i. Entretanto, ao estabelecer sua base de tempo, cada nó escravo levará em conta o nó que lhe serve de mestre e o que lhe serve de escravo.

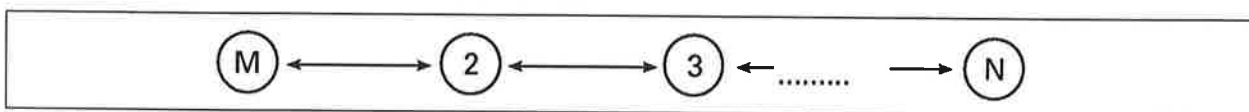


Figura 8 – Rede TWMS – Cadeia Dupla

O nó mestre estabelece sua base de tempo ponderando sua própria fase e a fase do nó 2, conforme será equacionado a seguir.

TWMS – Estrela Dupla

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada é a da figura 9, com o nó mestre fornecendo a base de tempo para todos os outros.

A base de tempo do nó mestre será dada pela ponderação de sua própria fase e da fase de todos os outros nós, conforme será equacionado a seguir.

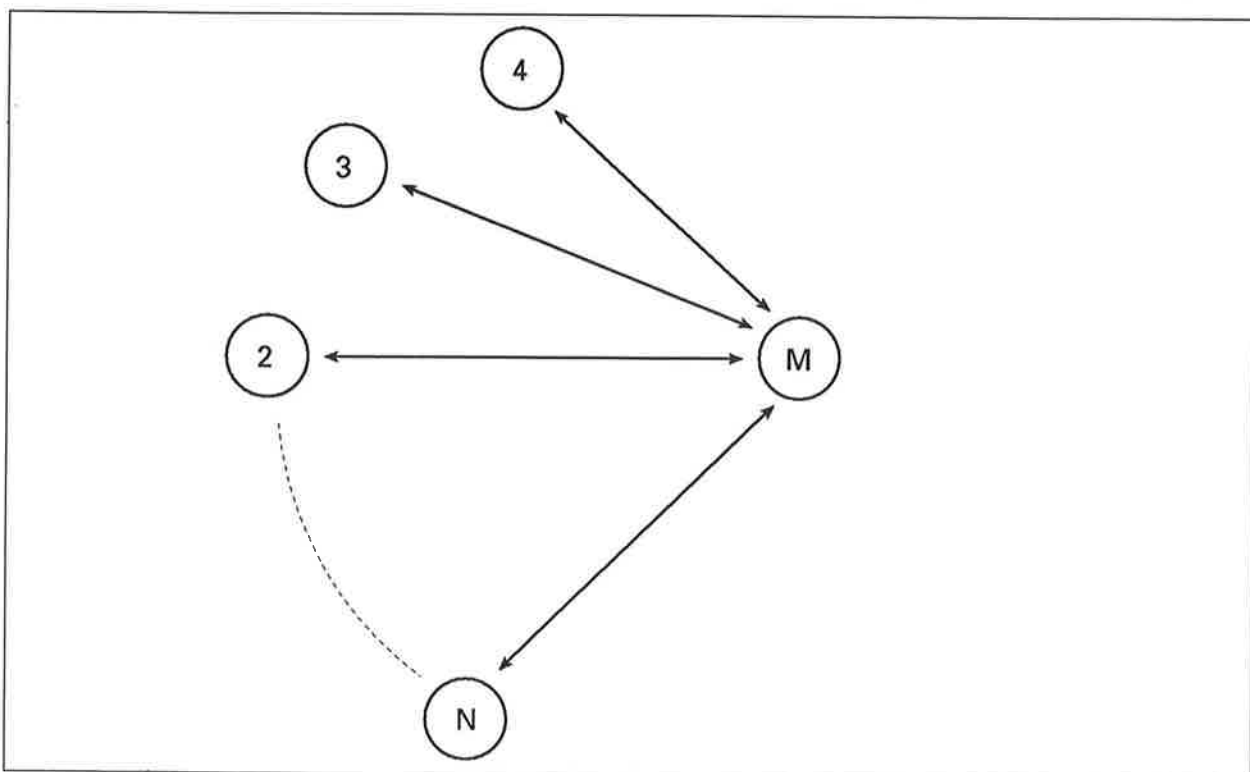


Figura 9 – Rede TWMS – Estrela Dupla

TWMS – Enlace Simples

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada será a da figura 10, com o nó $i-1$ funcionando como mestre para o nó i . A base de tempo do nó mestre será dada pela ponderação de sua própria fase e da fase N -ésimo nó, conforme será equacionado a seguir.

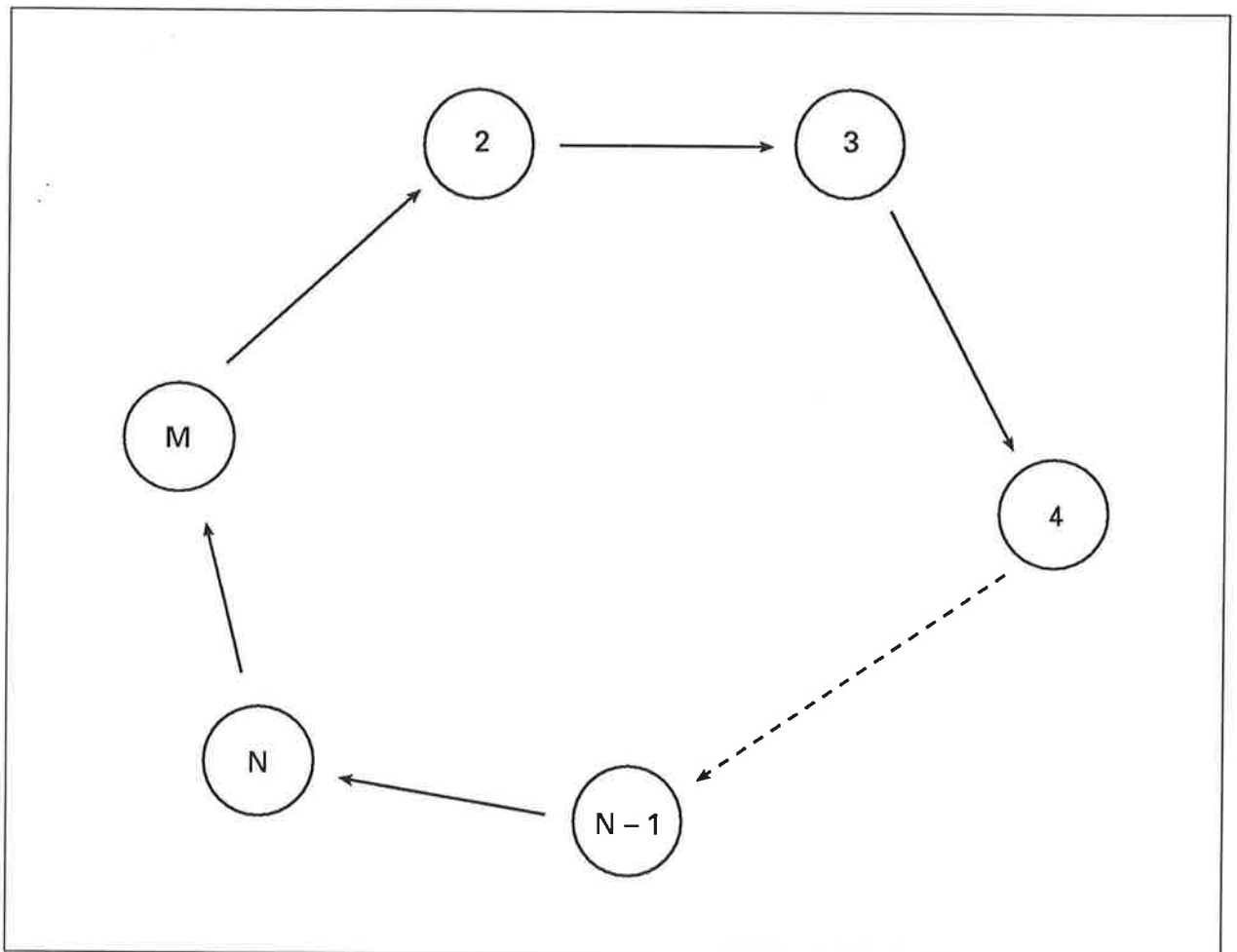


Figura 10 – Rede TWMS – Enlace Simples

TWMS – Enlace Duplo

Nesse tipo de rede, a topologia utilizada será a da figura 11, com o nó $i-1$ servindo de mestre para o nó i . Entretanto, ao estabelecer sua base de tempo, cada nó escravo leva em conta o nó que lhe serve de mestre e o que lhe serve de escravo.

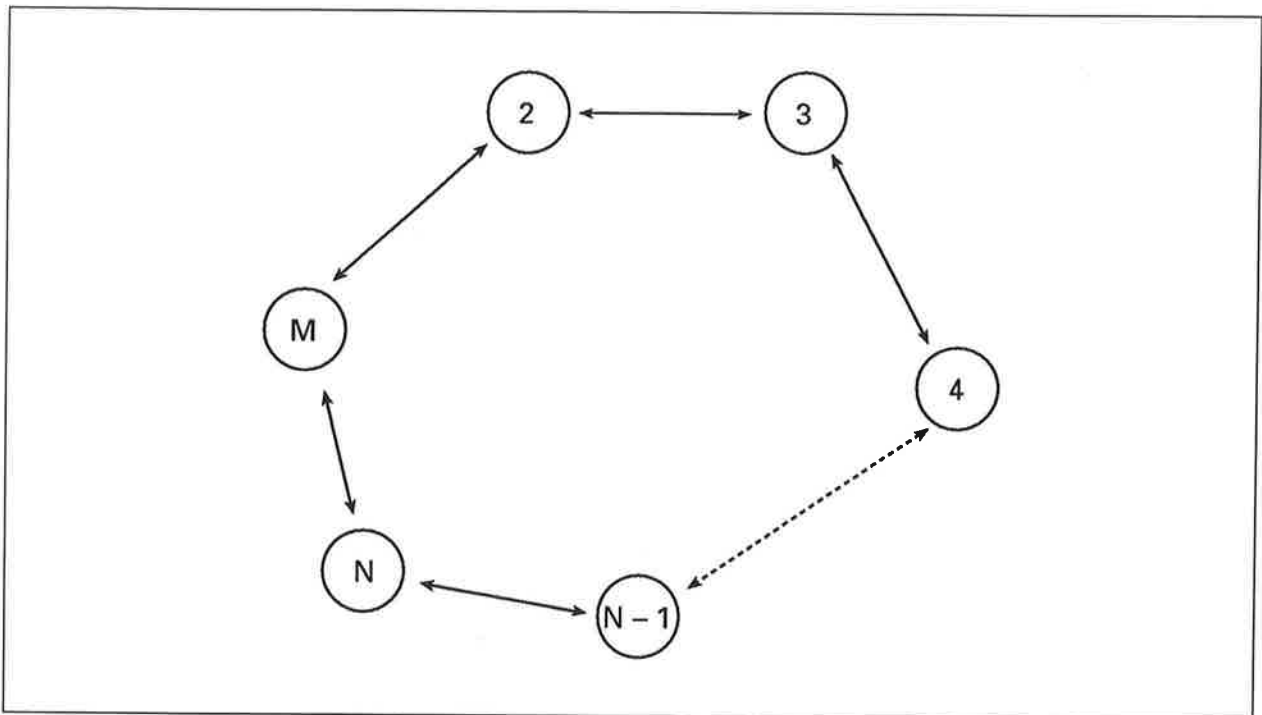


Figura 11 – Rede TWMS – Enlace Duplo

A base de tempo do nó mestre será dada pela ponderação de sua própria fase, do nó 2 e do nó N, conforme será equacionado a seguir.

O Nó-Mestre em Redes TWMS

A figura 12 representa, esquematicamente, o nó mestre de redes TWMS, indicando a ponderação entre a fase Φ_M do nó mestre e as fases Φ_j de cada nó escravo.

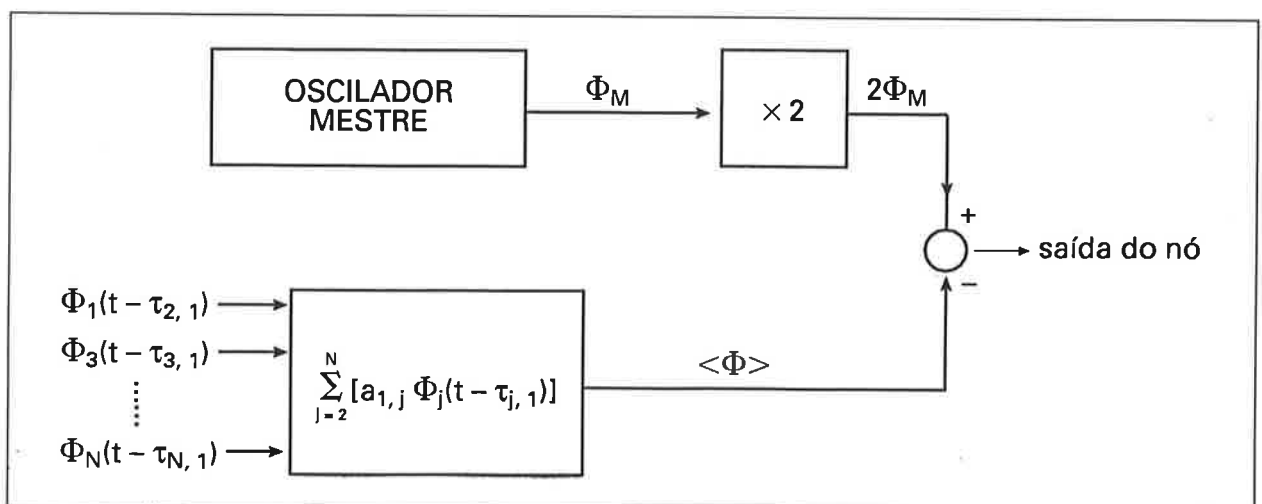


Figura 12 – Esquema do Nó Mestre em Redes TWMS.

A saída do nó está sujeita a uma compensação que considera as fases Φ_j dos nós escravos, de tal maneira que a soma dos coeficientes $a_{1, j}$, responsáveis pelo cálculo de $\langle \Phi \rangle$, seja igual a 1.

No caso da cadeia dupla, $a_{1, 2} = 1$ e $a_{1, j} = 0$ para $\forall j \neq 2$.

Para a estrela dupla, $a_{1, j} = \frac{1}{(N-1)}$ para $\forall j$.

O enlace simples tem $a_{1, N} = 1$ e $a_{1, j} = 0$, $\forall j \neq N$. Caso a topologia seja enlace duplo:

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}, a_{1, N} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{1, j} = 0 \text{ para } \forall j \neq 2 \text{ e } N.$$

Os Nós-Escravos em Redes TWMS

Nas redes TWMS, os PLLs dos nós escravos têm o sinal de entrada com fase $\langle \Phi \rangle$ que resulta da ponderação das fases dos diversos nós, conforme mostra a figura 13.

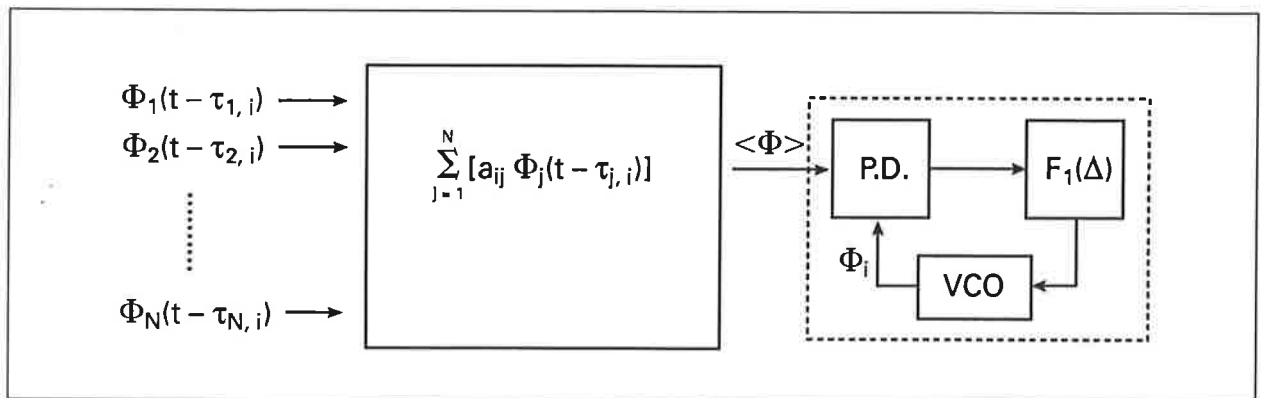


Figura 13 – Nós Escravos em Redes TWMS

As ponderações executadas em cada i -ésimo nó escravo serão tais que:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1 \text{ e } a_{ii} = 0$$

No caso da topologia ser em cadeia dupla, os valores dos coeficientes serão $a_{i, i+1} = 1/2$; $a_{i, i-1} = 1/2$ para $\forall i$ e $a_{ij} = 0$, $\forall i$ e $\forall j \neq i-1$ e $i+1$.

No caso da topologia ser em estrela dupla, os valores dos coeficientes serão: $a_{i, 1} = 1$, para $\forall i$ e $a_{i, j} = 0$, para $\forall i$ e $\forall j \neq 1$.

Caso a topologia seja enlace simples, $a_{i, i-1} = 1$ para $\forall i$ e $a_{i, j} = 0$ para $\forall i$ e $\forall j \neq i-1$. Caso o enlace seja duplo, valerão, para os nós escravos, os mesmos critérios da cadeia dupla.

3.3. Redes com Nós Mutuamente Sincronizados

Nas redes com nós mutuamente sincronizados, não é possível estabelecer sistemáticas bem determinadas para a montagem das equações, pois a base de tempo de cada nó dependerá de como a rede está estruturada, o que será variável em cada caso.

A topologia com nós mutuamente sincronizados pode ser esquematizada como na figura 14, sendo possível que um dado nó tenha sua base de tempo dependente da combinação das fases de quaisquer outros.

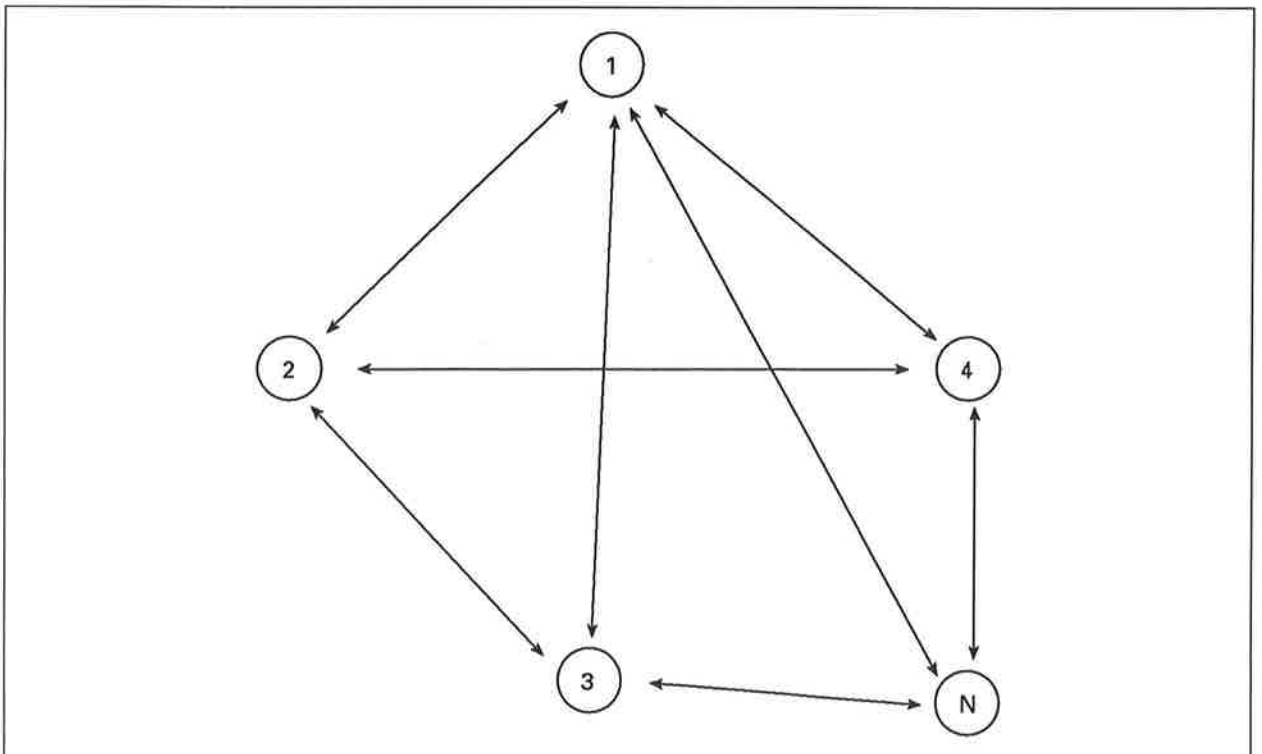


Figura 14 – Rede com Nós Mutuamente Sincronizados

Assim, o esquema de cada i -ésimo nó será dado pela figura 15 e a entrada $\langle \Phi \rangle$ do PLL será a média ponderada das fases dos outros nós, devidamente afetadas pelos tempos de propagação $\tau_{j,i}$ entre cada nó j e o nó i .

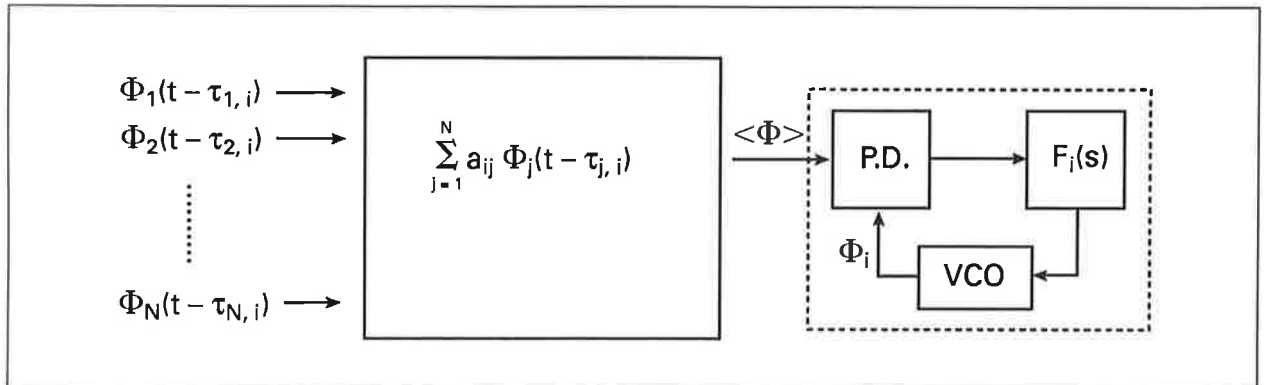


Figura 15 – Redes com Nós Mutuamente Sincronizados

Os coeficientes de ponderação deverão satisfazer às seguintes condições:

$$\sum_{j=1}^N a_{i,j} = 1 \text{ e } a_{ii} = 0$$

Nos capítulos que se seguem, serão apresentados estudos analíticos detalhados das redes OWMS – Estrela Simples, de uma rede TWMS – Estrela Dupla e de uma rede de Nós Mutuamente Sincronizados.

Capítulo 4: Redes Mestre-Escravo Unidirecionais — Estrelas Simples

4.1. Formulação do Problema

4.2. Modelagem e Equacionamento

4.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidades Lentas

4.4. Efeito Doppler

4.5. Faixas de Retenção e Captura

RESUMO:

Neste capítulo serão estudadas as redes OWMS — Estrela Simples, discutindo suas condições de sincronismo, faixas de retenção e captura.

Capítulo 4: Redes Mestre-Escravo Unidirecionais — Estrela Simples

As redes OWMS – Estrela Simples são muito conhecidas e empregadas amplamente, devido ao baixo custo e à facilidade de implementação.

Este capítulo apresenta a formulação matemática de uma rede OWMS — Estrela Simples de N nós (figura 16), tentando estabelecer as condições de sincronismo, através das faixas de retenção e captura, e discutir sua sensibilidade a certos tipos de perturbação.

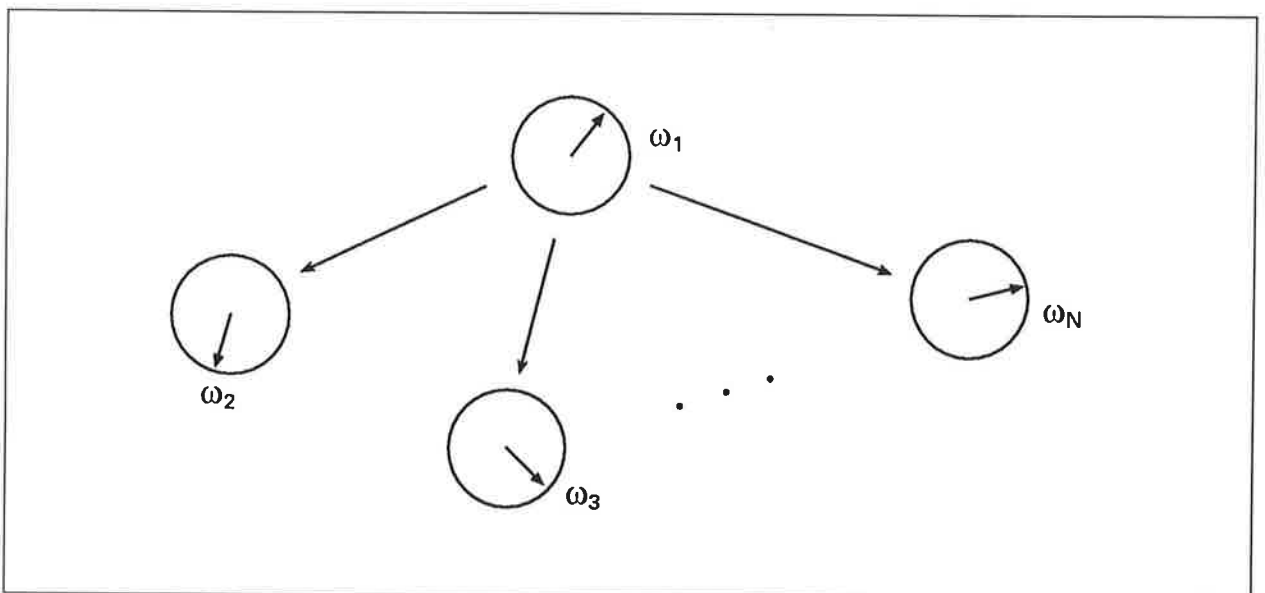


Figura 16 – Rede OWMS – Estrela Simples

4.1. Formulação do Problema

Neste capítulo, procura-se, inicialmente, formular uma descrição matemática para essa topologia, levando-se em conta determinados problemas não relevantes no estudo de PLLs do capítulo 2, e que, agora, serão de importância básica, pois o objetivo é conseguir a sincronização dos vários osciladores da rede.

Esses problemas referem-se a:

- i) considerar que as frequências de livre curso dos osciladores da rede não são precisamente iguais.
- ii) considerar que podem ocorrer perturbações nos processos de tempo, tanto no oscilador mestre como nos escravos.
- iii) considerar a existência de atrasos de percurso nos sinais de sincronismo.

A seguir, faz-se o estudo das possibilidades de sincronização dessa topologia, para dois casos práticos:

- i) perturbações originadas por efeito de envelhecimento do cristal com o tempo, ditas instabilidades lentas.
- ii) deslocamento Doppler de frequência, originado pelo movimento do mestre em relação aos seus escravos.

4.2. Modelagem e Equacionamento

Para modelar a rede OWMS – Estrela Simples, considera-se que cada nó escravo consiste de um PLL de 2ª ordem.

Sempre que for pertinente, será utilizado um sub-índice, com o seguinte critério:

- 1: para o nó mestre
- i: para o nó escravo, $i = 2, 3, \dots, N$

Nessas condições, os PLLs dos nós escravos poderão ser esquematizados como na figura 17 e será estabelecida uma formulação geral prevendo as:

- i) perturbações de qualquer tipo nos osciladores mestre e escravo representadas por $P_M(t)$ e $P_i(t)$.
- ii) frequências de livre curso diferentes entre os osciladores mestre e escravo representadas por ω_m e ω_i .

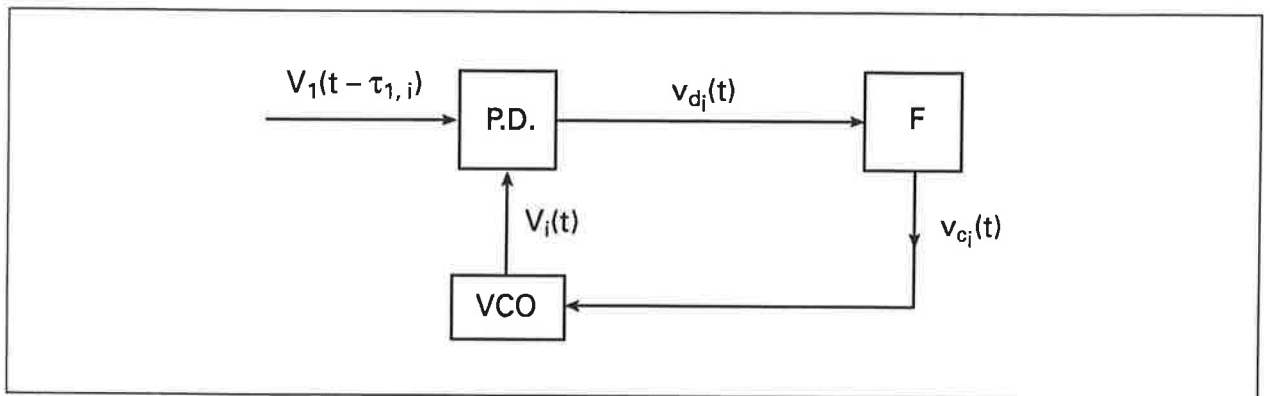


Figura 17 – Rede OWMS – Estrela Simples – i-ésimo nó escravo

Assim, as fases na saída dos osciladores, tomam a forma:

- **Oscilador Mestre:**

$$\Phi_1(t) = \Phi_M(t) = \omega_M t + P_M(t) \quad (18)$$

- **Osciladores Escravos:**

$$\Phi_i(t) = \omega_i t + \theta_i(t) + P_i(t)$$

- O sinal de tensão, na saída do oscilador mestre, será dado por:

$$v_1(t) = V_1 \sin \Phi_1(t) = V_1 \sin \Phi_M(t) \quad (20)$$

- Chamando de $\tau_{1,i}$, o atraso para o sinal partir do nó 1 e chegar ao nó escravo i:

$$v_1(t - \tau_{1,i}) = V_1 \sin \Phi_M(t - \tau_{1,i}) \quad (21)$$

- Sendo: $v_i(t) = V_i \cos \Phi_i(t)$ para $i = 2, 3, \dots, N$ (22),

- Multiplicando $v_1(t - \tau_{1,i})$ por $v_i(t)$, obtém-se a saída do detetor de fase (P. D.) do i-ésimo nó que, desprezando os termos de frequência dupla, será:

$$v_{d_i}(t) = \frac{K_{m_i} V_1 V_i}{2} \sin [\Phi_M(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] \quad (23)$$

- Prosseguir com a modelagem implicará escolher um filtro particular para as malhas dos nós escravos.

- Escolhendo um filtro “LAG” de 1ª ordem ([17]), como indica a figura 18 e definindo:

$$\mu_{1i} = \frac{1}{R_i C_i} \text{ e } \mu_{2i} = \frac{K_{mi} K_i V_1 V_i}{2}, \text{ obtém-se:}$$

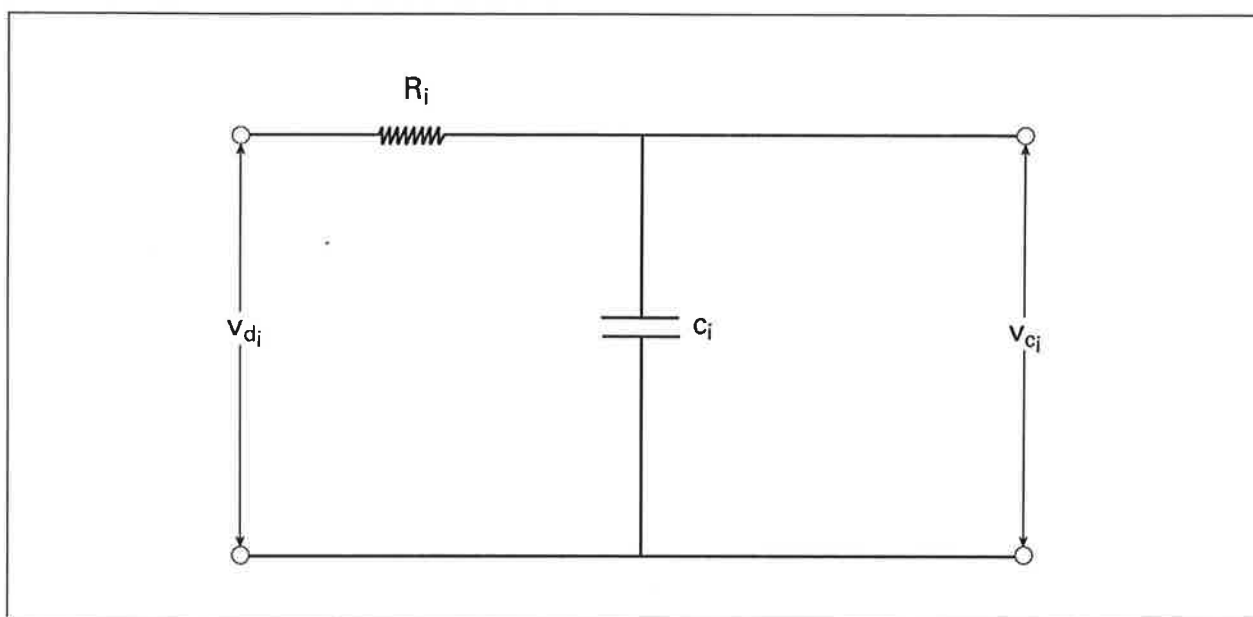


Figura 18 – Filtro Lag de 1ª ordem do i-ésimo nó escravo

$$-\ddot{\theta}_i(t) - \mu_{1i} \dot{\theta}_i(t) - \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Phi_M(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] = 0 \quad (24)$$

- Definindo os erros de fase e frequência entre o nó mestre e cada um dos i-ésimos nós escravos:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_{M,i} = \Phi_M(t) - \Phi_i(t) \\ \Delta \dot{\Phi}_{M,i} = \dot{\Phi}_M(t) - \dot{\Phi}_i(t) \end{cases} \quad (25) \text{ e combinando com as equações (18), (19) e (24):}$$

$$-\ddot{\theta}_i(t) + \ddot{P}_i(t) - \mu_{1i} \dot{\Phi}_i(t) + \mu_{1i} \omega_i + \mu_{1i} \dot{P}_i(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Phi_M(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] = 0 \quad (26)$$

$$\Rightarrow -\ddot{\Phi}_i(t) - \mu_{1i} \dot{\Phi}_i(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Phi_M(t - \tau_{1,i}) - \Phi_i(t)] = -\ddot{P}_i(t) - \mu_{1i} \dot{P}_i(t) - \mu_{1i} \omega_i \quad (27)$$

- Somando em ambos os membros da equação (27) o termo:

$$\ddot{\Phi}_M(t) + \mu_{1i} \dot{\Phi}_M(t):$$

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Delta \Phi_{M,i}(t) + \Phi_M(t - \tau_{1i}) - \Phi_M(t)] = \ddot{\Phi}_M(t) + \mu_{1i} \dot{\Phi}_M(t) - \ddot{P}_i(t) - \mu_{1i} \dot{P}_i(t) - \mu_{1i} \omega_i \quad (28)$$

O raciocínio desenvolvido permite concluir que, em uma rede OWMS – Estrela Simples, com nós escravos sujeitos a perturbações $P_i(t)$, a equação dinâmica que descreve cada i -ésimo nó escravo, através da diferença de fase entre ele e o nó mestre ($\Delta \Phi_{M,i}$) é dada por (28), para $i = 2, 3, \dots, N$.

O modelo, assim obtido, permitirá estudar vários aspectos da rede OWMS – Estrela Simples, que são apresentados na seqüência.

4.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidades Lentas

Um problema de importância, nas redes síncronas, é a influência das instabilidades lentas, que aparecem através da introdução de um termo de aceleração no oscilador do nó mestre (Ω_M) e no oscilador de cada nó escravo (Ω_i).

Estudar esse problema significa verificar o comportamento da equação (28), considerando:

$$P_M(t) = \frac{\Omega_M t^2}{2} \quad (29) \text{ e } P_i(t) = \frac{\Omega_i t^2}{2}, \text{ para } i = 2, 3, \dots, N \quad (30)$$

Substituindo (29) e (30) em (28):

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} \left[\Delta \Phi_{M,i}(t) + \frac{\Omega_M \tau_{1i}^2}{2} - \omega_M \tau_{1i} - \Omega_M \cdot \tau_{1i} \cdot t \right] = (\Omega_M - \Omega_i) + \mu_{1i} (\omega_M - \omega_i) + \mu_{1i} (\Omega_M - \Omega_i) t \quad (31)$$

Para facilitar a análise qualitativa, utiliza-se a linearização: $\sin x \approx x$ e, portanto:

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} [\Delta \Phi_{M,i}(t) + \frac{\Omega_M \tau_{1i}^2}{2} - \omega_M \tau_{1i} - \Omega_M \tau_{1i} t] = (\Omega_M - \Omega_i) + \mu_{1i} (\omega_M - \omega_i) + \mu_{1i} (\Omega_M - \Omega_i) t \quad (32)$$

O sistema descrito por (32) é não-autônomo e não admite ponto de equilíbrio para as variáveis de rede $(\Delta \Phi_{M,i}; \Delta \dot{\Phi}_{M,i})$.

Derivando a equação (32):

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} [\Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) - \Omega_M \tau_{1i}] = \mu_{1i} (\Omega_M - \Omega_i) \quad (33)$$

Descrivendo a equação (33) em termos de variáveis de estado da rede:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta \dot{\Phi}_{M,i} \\ x_2 = \Delta \ddot{\Phi}_{M,i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_{1i} x_2 - \mu_{1i} \mu_{2i} (x_1 - \Omega_M \tau_{1i}) + \mu_{1i} (\Omega_M - \Omega_i) \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio de (33) será dado por:

$$\hat{x}_1 = \frac{\Omega_M (1 + \tau_{1i} \cdot \mu_{2i}) - \Omega_i}{\mu_{2i}}; \hat{x}_2 = 0$$

Esse ponto, em termos das variáveis de estado da rede, será:

$$\Delta \dot{\Phi}_{M,i} = \frac{\Omega_M (1 + \tau_{1i} \cdot \mu_{2i}) - \Omega_i}{\mu_{2i}} \text{ e } \Delta \ddot{\Phi}_{M,i} = 0 \quad (34)$$

Isto é, para o equilíbrio, os valores finais dos erros serão:

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,i} = 0 \Rightarrow \ddot{\Phi}_M(t) - \ddot{\Phi}_i(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\Phi}_i(t) = \ddot{\Phi}_M(t)$$

$$\text{com } \Phi_M(t) = \omega_M t + \frac{\Omega_M t^2}{2} \Rightarrow \ddot{\Phi}_M(t) = \Omega_M \text{ e, portanto:}$$

$$\ddot{\Phi}_i(t) = \Omega_M \quad (35)$$

Assim, como resultado de instabilidades de longa duração, os osciladores escravos não se sincronizam em fase com o mestre, pois os erros de fase entre cada escravo e o mestre ($\Delta\Phi_{M, i}$) são ilimitados, como consequência da equação (32).

Entretanto, o erro de frequência ($\Delta\dot{\Phi}_{M, i}$) assume, ao longo do tempo, um valor de equilíbrio constante. O erro de aceleração ($\Delta\ddot{\Phi}_{M, i}$) tenderá a zero e a aceleração, em qualquer nó escravo, acompanhará a aceleração do nó mestre.

Esses resultados estão expressos nas equações (34) e (35) deduzidas acima e foram obtidos por Cideciyan e Lindsey ([26]), usando a linearização das equações e a transformada de Laplace.

4.4. Efeito Doppler

A equação (29) permite estudar, para as redes OWMS – Estrela Simples, o efeito Doppler produzido pelo movimento relativo entre o oscilador mestre e os nós escravos.

Nessas condições, o efeito aparece pela adição de um termo de frequência D_M na expressão de $P_M(t)$. Isto é:

$$\omega_M = \omega_i; \Omega_i = 0 \text{ e } P_M(t) = D_M t + \Phi_M \quad (36)$$

Substituindo as condições de (36) na equação (29):

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\Phi}_{M, i}(t) + \mu_{1i} \Delta\dot{\Phi}_{M, i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Delta\Phi_{M, i}(t) - (\omega_m + D_m) \tau_{1i}] = \\ = \mu_{1i} (\omega_m + D_m) \mu_{1i} \omega_M \quad (37) \end{aligned}$$

Em notação de variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta\Phi_{m, i} \\ x_2 = \Delta\dot{\Phi}_{m, i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_{1i} x_2 - \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [x_1 - (\omega_M + D_M) \tau_{1i}] + \mu_{1i} D_M \end{cases} \quad (38)$$

Os pontos de equilíbrio de (38) serão da forma:

$$\hat{x}_1 = (D_M + \omega_M) \tau_{1i} + \arcsen\left(\frac{D_M}{\mu_{2i}}\right), \hat{x}_2 = 0$$

Ou seja, para o equilíbrio:

$$\Delta\Phi_{m,i} = (D_M + \omega_M) \tau_{1,i} + \arcsen\left(\frac{D_M}{\mu_{2i}}\right) \text{ e } \Delta\dot{\Phi}_{M,i} = 0 \quad (39)$$

A equação (37) é muito semelhante à equação (15), estudada no capítulo 2 e, apresenta, também, superfície de fase cilíndrica.

Assim, a menos de uma translação de eixos, seus pontos de equilíbrio, dados em (39), apresentam o diagrama de bifurcações da figura 19.

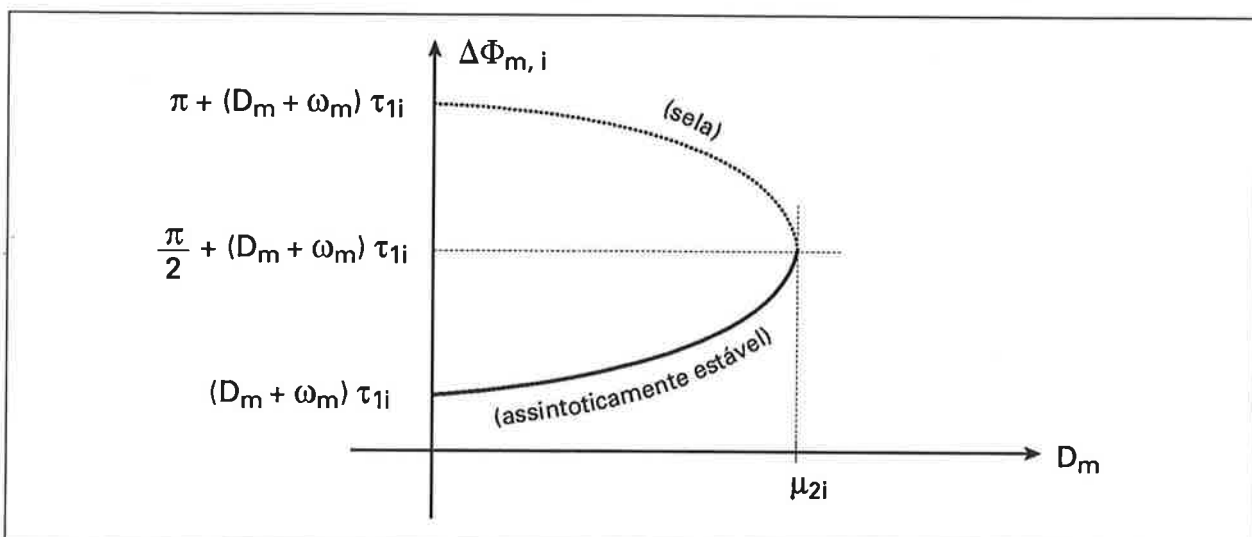


Figura 19 – Rede OWMS – Estrela Simples: Efeito Doppler e Bifurcações do Equilíbrio

4.5. Faixas de Retenção e Captura

Diante do efeito Doppler, a condição de rastreamento para a rede se relaciona com a existência de pontos de equilíbrio, assintoticamente estáveis, nas variáveis de estado da rede $(\Delta\Phi_{M,i}; \Delta\dot{\Phi}_{M,i}) = \left((D_M + \omega_M) \tau_{1,i} + \arcsen\left(\frac{D_M}{\mu_{2i}}\right); 0 \right)$ para todo $i = 2, 3, \dots, N$.

Do diagrama de bifurcações da figura 19, conclui-se que a faixa de retenção será dada por:

$$D_m < \mu_2, \text{ com } \mu_2 = \min \{ \mu_{2i} \}; i = 2, 3, \dots, N. \quad (40)$$

A não-existência de ciclos-limite para equações na forma (38) está garantida. Portanto, a condição (40) proporciona, também, o cálculo da faixa de captura.

Resumindo, pode-se propor:

Proposição 5:

Uma rede OWMS – Estrela Simples de N-nós, com osciladores de mesma frequência de livre curso ($\omega_M = \omega_i$) e com deslocamento Doppler do oscilador de intensidade D_M , tem faixas de retenção e captura dadas pelas condições expressas em (40).

Concluindo, os comportamentos possíveis para uma rede OWMS – Estrela Simples não diferem, qualitativamente, dos comportamentos dos PLLs que constituem os seus nós, com a ressalva de que os erros de fase e frequência são definidos de maneira diferente.

O estudo do caso de deslocamento Doppler de frequência mostrou que a rede pode alcançar um estado real de sincronismo (“lock”) com erros de frequência ($\Delta\dot{\Phi}_{M, i}$) nulos e erros de fase ($\Delta\Phi_{M, i}$) constantes, entre o mestre e os nós-escravos.

O efeito do atraso de tempo dos sinais (τ_{1i}) traduziu-se em um acréscimo de fase no estado permanente em relação a sinais enviados diretamente aos PLLs.

Capítulo 5: Redes Mestre-Escravo Bidirecionais — Estrelas Duplas

5.1. Formulação do Problema

5.2. Modelagem e Equacionamento

5.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidades Lentas

5.4. Algumas Conclusões sobre Redes Bidirecionais

RESUMO:

Neste capítulo formula-se o problema das redes TWMS – Estrela Dupla, deduzindo-se as equações para uma rede com um oscilador mestre e dois escravos. Essas equações permitem que o problema de instabilidade lenta seja estudado e que se façam comparações entre as estratégias OWMS e TWMS.

Capítulo 5: Redes Mestre-Escravo Bidirecionais — Estrelas Duplas

As rede OWMS – Estrelas Simples, estudadas no capítulo 4, embora sejam versáteis e de implementação econômica, não permitem correções automáticas nas variáveis do oscilador mestre. Por essa razão, em algumas redes, implementa-se o esquema TWMS – Estrela Dupla, que será estudado neste capítulo (figura 20)

A modelagem matemática é obtida, permitindo o estudo das instabilidades lentas e, para o capítulo 6, a comparação com as redes OWMS – Estrela Simples.

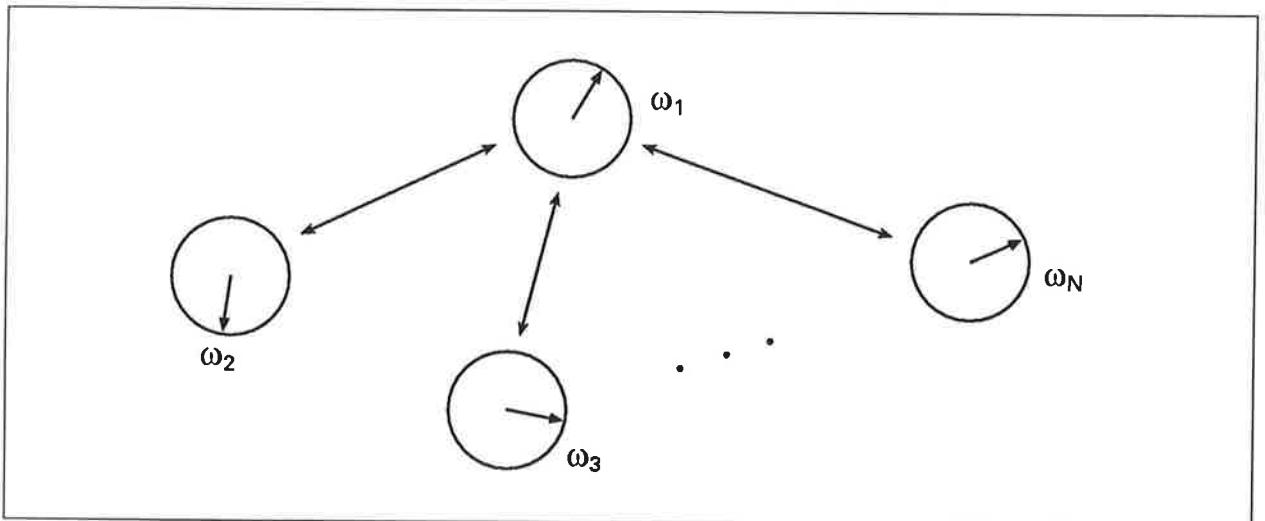


Figura 20 – Rede TWMS – Estrela Dupla

5.1. Formulação do Problema

Neste capítulo, procura-se, inicialmente, formular uma descrição matemática para essa topologia, levando em consideração os seguintes problemas:

- i) frequência de livre curso dos osciladores da rede diferentes.
- ii) Perturbações nos processos de tempo do oscilador mestre e dos escravos.
- iii) existência de atrasos de percurso nos sinais de sincronismo.

A rede a ser estudada será constituída por um nó mestre e dois escravos, como mostra a figura 21, para facilitar o equacionamento.

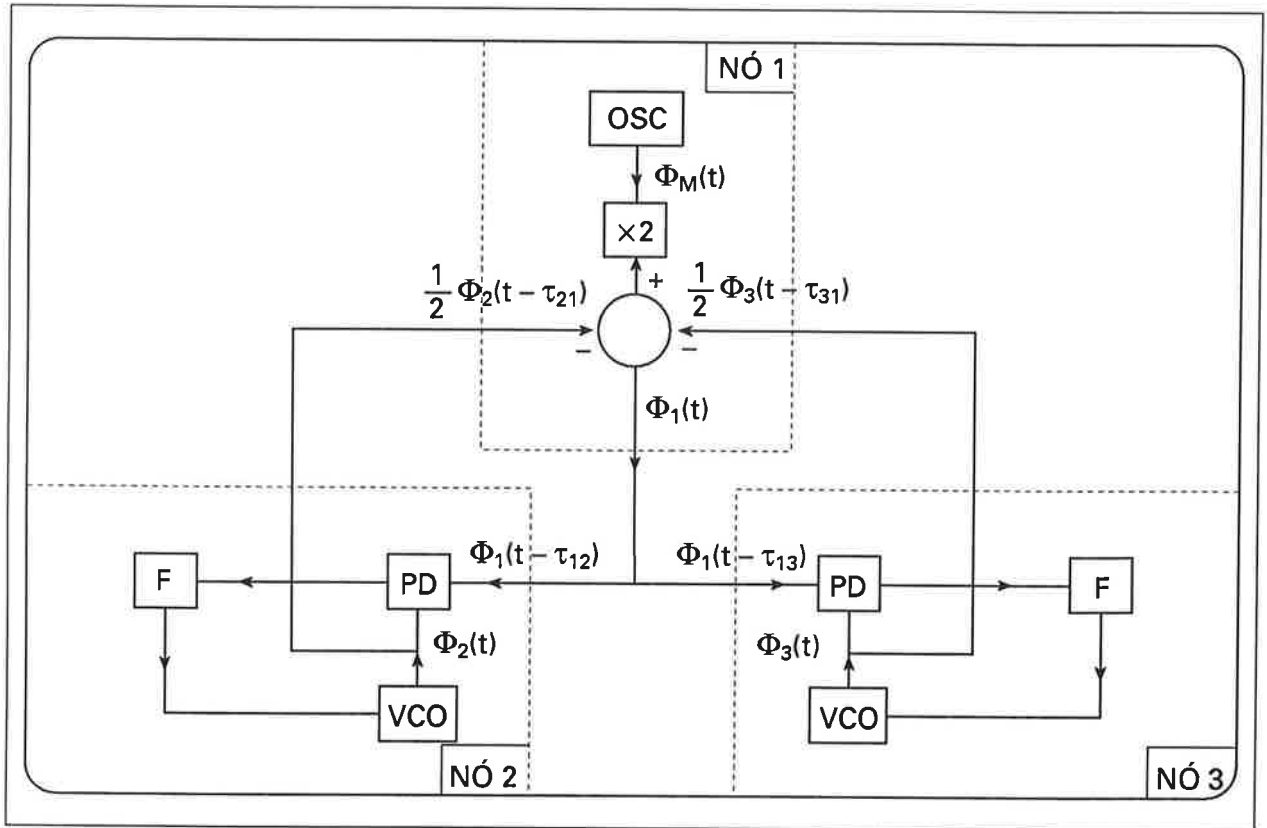


Figura 21 – Rede TWMS – Estrela Dupla com Dois Nós Escravos

As equações obtidas permitem o estudo da possibilidade de sincronização dessa topologia para o caso de ocorrerem perturbações originadas por efeito de envelhecimento do cristal com o tempo, ditas instabilidades lentas.

5.2. Modelagem e Equacionamento

Para modelar a rede TWMS – Estrela Dupla, considera-se que cada nó escravo consiste de um PLL de 2ª ordem e, quando for pertinente, será utilizado um sub-índice, de acordo com o seguinte critério:

1: para o nó mestre

$i = 2$ ou 3 : para os nós escravos

Nessas condições, os PLLs dos nós escravos poderão ser esquematizados na figura 22. Será estudada uma formulação mais restrita que a executada para as redes OWMS – Estrela Simples, prevendo:

- i) instabilidade lenta e freqüência inicial dos osciladores escravos, representados respectivamente por Ω_i e ω_i , levados em conta no termo $\Phi_i(t)$.
- ii) instabilidade lenta e freqüência inicial do oscilador-mestre, representadas, respectivamente, por Ω_M e ω_M , levados em consideração no termo $\Phi_M(t)$.

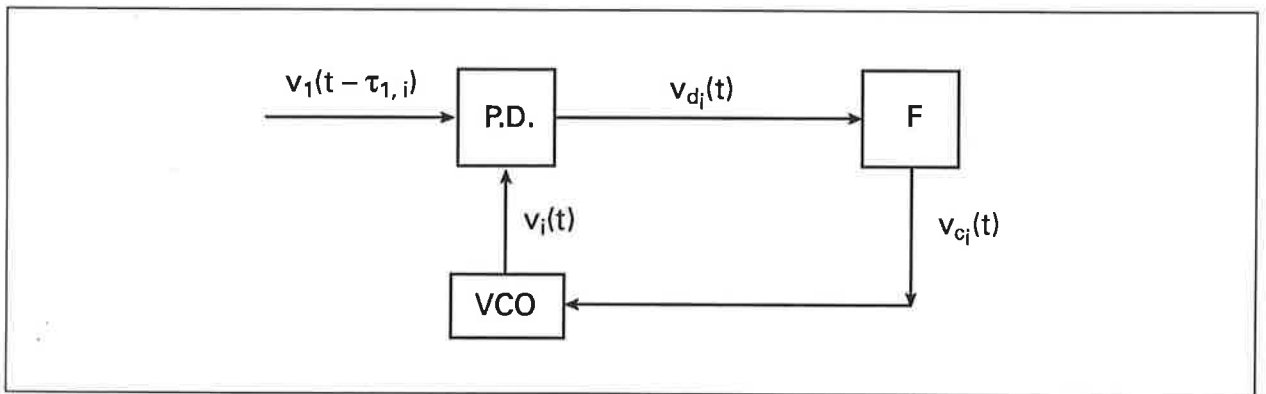


Figura 22 – PLL dos nós escravos — Rede TWMS – Estrela Dupla.

As fases nas saídas dos osciladores têm, como consequência do que foi exposto no item 3.2, as seguintes formas:

- **Oscilador Mestre**, pertencente ao nó 1:

$$\Phi_M(t) = \omega_M t + \frac{\Omega_M t^2}{2} \quad (41)$$

- **Saída do nó-1:**

$$\Phi_1(t) = 2 \Phi_M(t) - \frac{1}{2} \Phi_2(t - \tau_{21}) - \frac{1}{2} \Phi_3(t - \tau_{31}) \quad (42)$$

- **Entrada do nó-2:**

$$\begin{aligned} \Phi_1(t - \tau_{12}) = & 2 \Phi_M(t - \tau_{12}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t - \tau_{12} - \tau_{21}) - \\ & - \frac{1}{2} \Phi_3(t - \tau_{12} - \tau_{31}) \quad (43) \end{aligned}$$

- **Entrada do nó-3:**

$$\Phi_1(t - \tau_{13}) = 2 \Phi_m(t - \tau_{13}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t - \tau_{13} - \tau_{21}) - \frac{1}{2} \Phi_3(t - \tau_{13} - \tau_{31}) \quad (44)$$

- **Saída do nó-2:** (Oscilador controlado)

$$\Phi_2(t) = \omega_2 t + \frac{\Omega_2 t^2}{2} + \theta_2(t) \quad (45)$$

- **Saída do nó-3:** (Oscilador controlado)

$$\Phi_3(t) = \omega_3 t + \frac{\Omega_3 t^2}{2} + \theta_3(t) \quad (46)$$

- As saídas dos detetores de fase dos nós escravos serão dadas pelo produto dos sinais de tensão $v_1(t - \tau_{1,i})$ e $v_i(t)$ que são dadas por:

$$v_1(t - \tau_{1,i}) = V_i \text{sen}(t - \tau_{1,i}) \quad (47)$$

$$v_i(t) = V_i \text{cos} \Phi_i(t), \quad i = 2, 3. \quad (48)$$

- Efetuando o produto das equações (47) e (48) e desprezando os termos de alta frequência:

$$v_{d_i}(t) = \frac{K_{m_i} V_1 V_i}{2} \text{sen}(\Phi_1(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)) \quad (49)$$

- Prosseguir a modelagem implica escolher um filtro particular para as malhas dos nós escravos.

- Fazendo a mesma escolha de 4.2 e, estabelecendo as definições do mesmo item, obtém-se:

$$\begin{aligned} & -\ddot{\theta}_i(t) - \mu_{1i} \dot{\theta}_i(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen}[\Phi_M(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] = 0 \text{ e, portanto:} \\ & \Omega_i - \ddot{\Phi}_i(t) + \mu_{1i} \omega_i + \mu_{1i} \Omega_i t - \mu_{1i} \dot{\Phi}_i(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen}[\Phi_1(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] = 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow -\ddot{\Phi}_i(t) - \mu_{1i} \dot{\Phi}_i(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen}[\Phi_1(t - \tau_{1i}) - \Phi_1(t)] = \Omega_i - \mu_{1i} \omega_i - \mu_{1i} \Omega_i t \quad (50) \end{aligned}$$

- Somando, membro a membro, na equação (50), o termo $\ddot{\Phi}_M(t) + \mu_{1i} \dot{\Phi}_i(t)$, segue:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \Delta \dot{\Phi}_{M,i}(t) + \mu_{1i} \mu_{2i} \text{sen} [\Phi_1(t - \tau_{1i}) - \Phi_i(t)] = \\ = \ddot{\Phi}_M(t) + \mu_{1i} \dot{\Phi}_M(t) + \Omega_i - \mu_{1i} \omega_i - \mu_{1i} \Omega_i t \quad (51) \end{aligned}$$

- Levando em conta a equação (42) em (51) e recorrendo à aproximação de Taylor de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \Phi_2(t - (\tau_{1i} + \tau_{21})) = \Phi_2(t) - (\tau_{1i} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_2(t) \\ \Phi_3(t - (\tau_{1i} + \tau_{31})) = \Phi_3(t) - (\tau_{1i} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_3(t) \end{cases}, \quad \text{para } i = 2, 3;$$

resultarão as equações:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t - \tau_{12}) = 2 \Phi_M(t - \tau_{12}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t) + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_2(t) - \\ - \frac{1}{2} \Phi_3(t) + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_3(t) \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t - \tau_{13}) = 2 \Phi_M(t - \tau_{13}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t) + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_2(t) - \\ - \frac{1}{2} \Phi_3(t) + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_3(t) \quad (53) \end{aligned}$$

- Substituindo as expressões (52) e (53) no seno da expressão (51), para $i = 2$ e 3 , resultará:

$$\begin{aligned} \text{sen} [\Phi_1(t - \tau_{12}) - \Phi_2(t)] = \text{sen} [2 \Phi_M(t - \tau_{12}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t) + \\ + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_2(t) - \frac{1}{2} \Phi_3(t) + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_3(t) - \Phi_2(t)] \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen} [\Phi_1(t - \tau_{13}) - \Phi_3(t)] = \text{sen} [2 \Phi_M(t - \tau_{13}) - \frac{1}{2} \Phi_2(t) + \\ + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_2(t) - \frac{1}{2} \Phi_3(t) + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_3(t) - \Phi_3(t)] \end{aligned}$$

Pode-se, então, fazer aparecer as variáveis da estado da rede:

$$\begin{aligned} & \text{sen} [2 \Phi_M (t - \tau_{12}) - 2 \Phi_M (t) + \frac{3}{2} \Delta \Phi_{M, 2} (t) + \Delta \Phi_{M, 3} (t) - \\ & - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M, 2} (t) - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M, 3} (t) + \\ & + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_M (t) + \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_M (t)] \quad (54) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sen} [2 \Phi_M (t - \tau_{13}) - 2 \Phi_M (t) + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{M, 2} (t) + \frac{3}{2} \Delta \Phi_{M, 3} (t) - \\ & - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M, 2} (t) - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M, 3} (t) + \\ & + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \dot{\Phi}_M (t) + \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_M (t)] \quad (55) \end{aligned}$$

- A expressão (41) permite simplificar as expressões (54) e (55)

$$\begin{aligned} & 2 [\Phi_M (t - \tau_{12}) - \Phi_M (t)] + \frac{1}{2} (2 \tau_{12} + \tau_{21} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_M (t) = \\ & = \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{12}) (\omega_M + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{12}^2 \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 [\Phi_M (t - \tau_{13}) - \Phi_M (t)] + \frac{1}{2} (2 \tau_{13} + \tau_{21} + \tau_{31}) \dot{\Phi}_M (t) = \\ & = \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{13}) (\omega_M + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{13}^2 \quad (57) \end{aligned}$$

- A expressão (51), para $i = 2$ e 3 , ficará, então:

$$\begin{aligned} & \Delta \ddot{\Phi}_{M, 2} (t) + \mu_{12} \Delta \dot{\Phi}_{M, 2} (t) + \mu_{12} \mu_{22} \text{sen} [\frac{3}{2} \Delta \Phi_{M, 2} (t) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{M, 3} (t) - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M, 2} (t) - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \\ & \Delta \dot{\Phi}_{M, 3} (t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{12}) (\omega_M + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{12}^2] = \\ & = \Omega_M + \mu_{12} \omega_M \mu_{12} \Omega_M t - \Omega_2 - \mu_{12} \omega_2 - \mu_{12} \Omega_2 t \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \mu_{13} \Delta \dot{\Phi}_{M,3}(t) + \mu_{13} \mu_{23} \text{sen} \left[\frac{1}{2} \Delta \Phi_{M,2}(t) + \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} \Delta \Phi_{M,3}(t) - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M,2}(t) - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \right. \\
& \left. \Delta \dot{\Phi}_{M,3}(t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{13}) (\omega_M + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{13}^2 \right] = \\
& = \Omega_M + \mu_{13} \omega_M + \mu_{13} \Omega_M t - \Omega_3 - \mu_{13} \omega_3 - \mu_{13} \Omega_3 t \quad (59)
\end{aligned}$$

Assim, dada uma rede mestre-escravo TWMS – Estrela Dupla, com dois osciladores escravos, caso o oscilador mestre tenha instabilidade lenta modelada por Ω_M e os osciladores escravos por Ω_i , $i = 1; 2$, o equacionamento dos osciladores escravos, usando os erros de fase ($\Delta \Phi_{M,i}$) como variáveis, seguirá as equações (58) e (59).

5.3. Estudo do Sincronismo diante de Instabilidade Lenta

As instabilidades lentas, estudadas em 4.3 para redes OWMS – Estrela Simples podem, também ser analisadas para as redes TWMS – Estrela Dupla, fazendo uso das equações (58) e (59) e considerando a aproximação $\text{sen } x \approx x$.

Assim, as equações (58) e (59) ficarão:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Delta \ddot{\Phi}_{M,2}(t) + \mu_{12} \Delta \dot{\Phi}_{M,2}(t) + \mu_{12} \mu_{22} \left[\frac{3}{2} \Delta \Phi_{M,2}(t) + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{M,3}(t) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_2(t) - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M,3}(t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{12}) \right. \\
& \left. (\omega_M + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{12}^2 \right] = \Omega_M + \mu_{12} \omega_M + \mu_{12} \Omega_M t - \Omega_2 - \mu_{12} \omega_2 - \\
& - \mu_{12} \Omega_2 t \quad (60)
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Delta \ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \mu_{13} \Delta \dot{\Phi}_{M,3}(t) + \mu_{13} \mu_{23} \left[\frac{1}{2} \Delta \Phi_{M,2}(t) + \frac{3}{2} \Delta \Phi_{M,3}(t) - \frac{1}{2} \right. \\
& \left. (\tau_{13} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M,2}(t) - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M,3}(t) + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{13}) (\omega_M + \right. \\
& \left. + \Omega_M t) + \Omega_M \tau_{13}^2 \right] = \Omega_M + \mu_{13} \omega_M + \mu_{13} \Omega_M t - \Omega_3 - \mu_{13} \omega_3 - \mu_{13} \Omega_3 t \quad (61)
\end{aligned} \right.$$

O sistema descrito por (60) e (61) é não-autônomo, não admitindo ponto de equilíbrio para as variáveis de rede ($\Delta\Phi_{M,i}$; $\Delta\dot{\Phi}_{M,i}$).

Derivando as equações (60) e (61):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\ddot{\Phi}_{M,2}(t) + \mu_{12}\Delta\ddot{\Phi}_{M,2}(t) + \frac{3}{2}\mu_{12}\mu_{22}\Delta\dot{\Phi}_{M,2}(t) + \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}\Delta\dot{\Phi}_{M,3}(t) - \\ - \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{12} + \tau_{21})\Delta\ddot{\Phi}_{M,2}(t) - \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{12} + \tau_{31})\Delta\ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \\ + \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{21} + \tau_{31} - 2\tau_{12})\Omega_M = (\Omega_M - \Omega_2)\mu_{12} \quad (62) \\ \\ \Delta\ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \mu_{13}\Delta\ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}\Delta\dot{\Phi}_{M,2}(t) + \frac{3}{2}\mu_{13}\mu_{23}\Delta\dot{\Phi}_{M,3}(t) - \\ - \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{13} + \tau_{21})\Delta\ddot{\Phi}_{M,2}(t) - \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{13} + \tau_{31})\Delta\ddot{\Phi}_{M,3}(t) + \\ + \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{21} + \tau_{31} - 2\tau_{13})\Omega_M = (\Omega_M - \Omega_3)\mu_{13} \quad (63) \end{array} \right.$$

Descrivendo as equações (62) e (63) em termos de variáveis de estado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \Delta\dot{\Phi}_{M,2} \\ x_2 = \Delta\ddot{\Phi}_{M,2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \Delta\dot{\Phi}_{M,3} \\ x_4 = \Delta\ddot{\Phi}_{M,3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_{12}x_2 - \frac{3}{2}\mu_{12}\mu_{22}x_1 - \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}x_3 + \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{12} + \tau_{21})x_2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{12} + \tau_{31})x_4 - \frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{22}(\tau_{21} + \tau_{31} - 2\tau_{12})\Omega_M + (\Omega_M - \Omega_2)\mu_{12} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\mu_{13}x_4 - \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}x_1 - \frac{3}{2}\mu_{13}\mu_{23}x_3 + \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{13} + \tau_{21})x_2 + \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{13} + \tau_{31})x_4 - \frac{1}{2}\mu_{13}\mu_{23}(\tau_{21} + \tau_{31} - 2\tau_{13})\Omega_M + (\Omega_M - \Omega_3)\mu_{13} \end{array} \right. \quad (64)$$

O ponto de equilíbrio de (64) será, então, dado por:

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_4 = 0, \text{ e}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \hat{x}_1 + \frac{1}{2} \hat{x}_3 = \frac{\Omega_M - \Omega_2}{\mu_{22}} - \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{12}) \Omega_M & (65) \\ \frac{1}{2} \hat{x}_1 + \frac{3}{2} \hat{x}_3 = \frac{\Omega_M - \Omega_3}{\mu_{23}} - \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - 2 \tau_{13}) \Omega_M & (66). \end{cases}$$

Fazendo $\tau_{12} = \tau_{21}$ e $\tau_{13} = \tau_{31}$, os valores de x_1 e x_2 , correspondentes ao equilíbrio, serão dados por:

$$\hat{x}_3 = \frac{\Omega_M (3 + 2 \tau_{13} \mu_{23}) - 3 \Omega_3}{4 \mu_{23}} - \frac{\Omega_M (1 + 2 \tau_{12} \mu_{22}) - \Omega_2}{4 \mu_{22}} \quad (67)$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\Omega_M (3 + 2 \tau_{12} \mu_{22}) - 3 \Omega_2}{4 \mu_{22}} - \frac{\Omega_M (1 + 2 \tau_{13} \mu_{23}) - \Omega_3}{4 \mu_{23}} \quad (68)$$

Como as expressões (67) e (68) relacionam-se com os pontos de equilíbrio do sistema, os valores finais para os erros de frequência e aceleração da rede serão:

- erros de aceleração

$$\Delta \ddot{\Phi}_{M,2} = \Delta \ddot{\Phi}_{M,3} = 0 \Rightarrow \ddot{\Phi}_2 = \ddot{\Phi}_3 = \ddot{\Phi}_M = \Omega_M$$

- erro de frequência entre o nó mestre e o nó-2

$$\Delta \dot{\Phi}_{M,2} = \frac{\Omega_M (3 + 2 \tau_{12} \mu_{22}) - 3 \Omega_2}{4 \mu_{22}} - \frac{\Omega_M (1 + 2 \tau_{13} \mu_{23}) - \Omega_3}{4 \mu_{23}}$$

- erro de frequência entre o nó-mestre e o nó-3

$$\Delta \dot{\Phi}_{M,3} = \frac{\Omega_M (3 + 2 \tau_{13} \mu_{23}) - 3 \Omega_3}{4 \mu_{23}} - \frac{\Omega_M (1 + 2 \tau_{12} \mu_{22}) - \Omega_2}{4 \mu_{22}}$$

5.4. Algumas Conclusões

Para comparar os resultados obtidos em 5.3 com os de Cideciyan ([26]), as seguintes simplificações deverão ser feitas:

- $2 \tau_{12} \mu_{22} \lll 3$; $2 \tau_{13} \mu_{23} \lll 1$
- $2 \tau_{13} \mu_{23} \lll 3$; $2 \tau_{12} \mu_{22} \lll 1$
- $\mu_{22} = \mu_{23}$
- $\Omega_2 = \Omega_3$

Essas simplificações, feitas nos resultados gerais aqui obtidos, levam ao resultado obtido em ([26]):

$$\Delta \dot{\Phi}_{M, i} = \frac{\Omega_M - \Omega_i}{2 \mu_{2i}}; i = 1, 2.$$

Instabilidades lentas (Ω_M, Ω_i) nos osciladores que compõem uma rede em **estrela-dupla** (TWMS-DS) impedem que se chegue ao estado **real de sincronismo**, pois o erro de fase ($\Delta \Phi_{M, i}$) fica ilimitado por haver um erro de frequência de estado estacionário constante.

Assim, ocorrerá uma imposição da aceleração da frequência (Ω_M) do mestre sobre os osciladores escravos. ([26]).

Capítulo 6:

Comparação entre Arranjos Mestre-Escravo

- 6.1. Formulação do Problema
- 6.2. Rede OWMS – Estrela Simples
- 6.3. Rede TWMS – Estrela Dupla
- 6.4. Comparações

RESUMO:

Neste capítulo, as redes descritas e equacionadas nos capítulos 4 e 5 serão comparadas, do ponto de vista da estabilidade do estado síncrono.

Capítulo 6:

Comparação entre Arranjos Mestre-Escravo

Será de interesse comparar os arranjos OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla, estudados nos capítulos 4 e 5, sob o ponto de vista do sincronismo.

As duas redes serão equacionadas e comparadas, na seqüência, escolhendo-se uma situação de tratamento analítico simples.

6.1. Formulação do Problema

Os desempenhos das redes OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla serão comparados em relação ao erro de estado estacionário e estabilidade do estado síncrono, no modo de rastreamento.

Para tanto, a topologia OWMS – Estrela Simples será considerada com dois nós escravos (figura 23) e a TWMS – Estrela Dupla, considerada como na figura 21, já estudada no capítulo 5.

Para efeito de comparação, será utilizada uma situação física caracterizada, apenas, por diferenças nas freqüências iniciais, dos três osciladores componentes da rede.

Isto é:

- $\omega_M \neq \omega_i$; para $i = 2, 3$
- $P_M(t) = 0 \Rightarrow \Phi_M(t) = \omega_M t$
- $P_i(t) = 0 \Rightarrow \Phi_i(t) = \omega_i t + \theta_i$

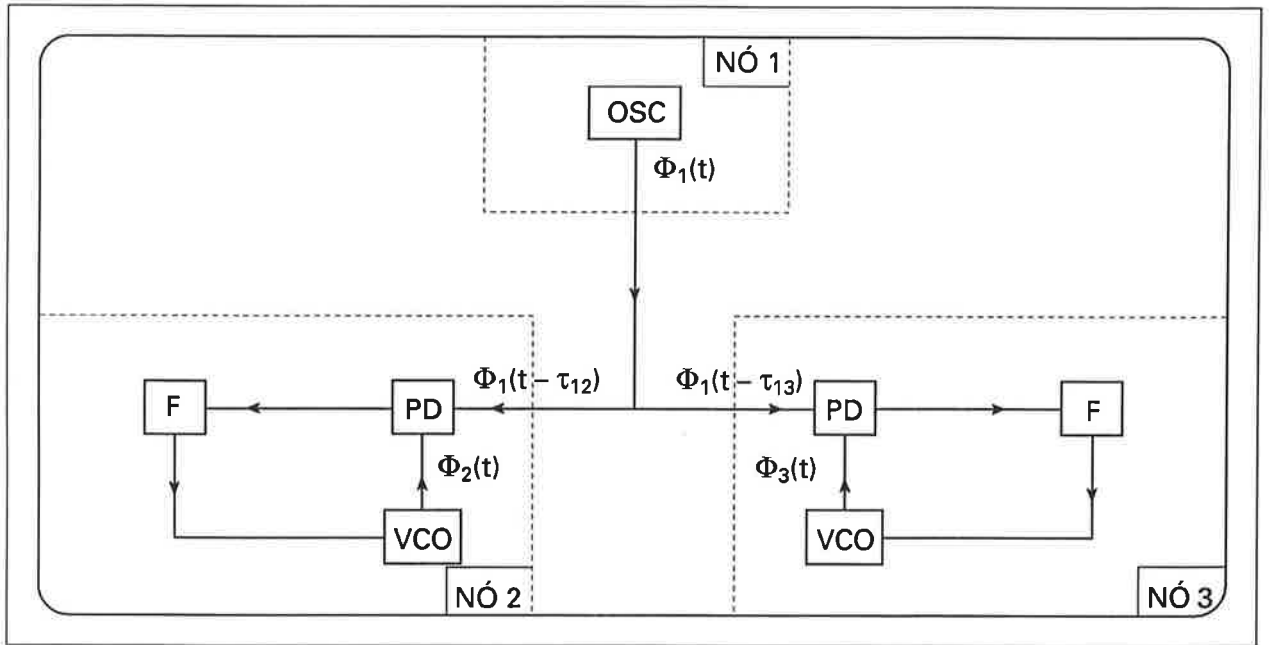


Figura 23 – Rede OWMS – Estrela Simples com dois Nós Escravos

6.2. Rede OWMS – Estrela Simples

A equação (28), combinada com as hipóteses iniciais, levará às equações:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\Phi}_{M,2} + \mu_{12} \Delta \dot{\Phi}_{M,2} + \mu_{12} \mu_{22} \text{sen} [\Delta \Phi_{M,2} - \omega_M \tau_{12}] &= \\ = \mu_{12} (\omega_M - \omega_2) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\Phi}_{M,3} + \mu_{13} \Delta \dot{\Phi}_{M,3} + \mu_{13} \mu_{23} \text{sen} [\Delta \Phi_{M,3} - \omega_M \tau_{13}] &= \\ = \mu_{13} (\omega_M - \omega_3) \end{aligned} \quad (70)$$

Utilizando a notação de variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta \Phi_{M,2} \\ x_2 = \Delta \dot{\Phi}_{M,2} \\ x_3 = \Delta \Phi_{M,3} \\ x_4 = \Delta \dot{\Phi}_{M,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu_{12} (\omega_M - \omega_2) - \mu_{12} x_2 - \mu_{12} \mu_{22} \text{sen} [x_1 - \omega_M \tau_{12}] \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \mu_{13} (\omega_M - \omega_3) - \mu_{13} x_4 - \mu_{13} \mu_{23} \text{sen} [x_3 - \omega_M \tau_{13}] \end{cases} \quad (71)$$

Chamando:
$$\begin{cases} \omega_M - \omega_2 = \Delta \omega_{M, 2} \\ \omega_M - \omega_3 = \Delta \omega_{M, 3} \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio serão no intervalo $(-\pi, \pi]$, dados por:

$$\bullet \text{ sena} = \frac{\Delta \omega_{M, 2}}{\mu_{22}} \Rightarrow \text{cosa} = \pm \frac{\sqrt{\mu_{22}^2 - \Delta \omega_{M, 2}^2}}{\mu_{22}}$$

$$\bullet \text{ senb} = \frac{\Delta \omega_{M, 3}}{\mu_{23}} \Rightarrow \text{cosb} = \pm \frac{\sqrt{\mu_{23}^2 - \Delta \omega_{M, 3}^2}}{\mu_{23}}$$

Assim, os pontos de equilíbrio são quatro e sua estabilidade pode ser analisada através da matriz Jacobiana colocada em função dos argumentos a e b.

$$A = Jf|_{\hat{x}} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mu_{12} \mu_{22} \text{cosa} & -\mu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\mu_{13} \mu_{23} \text{cosb} & -\mu_{13} \end{bmatrix}$$

Os autovalores seguem de: $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \mu_{12} \mu_{22} \text{cosa} & \lambda + \mu_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \mu_{13} \mu_{23} \text{cosb} & \lambda + \mu_{13} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \mu_{12} \mu_{22} \text{cosa} & \lambda + \mu_{12} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \mu_{13} \mu_{23} \text{cosb} & \lambda + \mu_{13} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \mu_{12} \lambda + \mu_{12} \mu_{22} \text{cosa} = 0 \\ \lambda^2 + \mu_{13} \lambda + \mu_{13} \mu_{23} \text{cosb} = 0 \end{cases}$$

Da Teoria de Sistemas Lineares, sabe-se que uma condição necessária e suficiente para um polinômio do 2º grau ter raízes com partes reais negativas é seus coeficientes possuírem o mesmo sinal ([27]).

A estabilidade ou instabilidade, ditada pelos autovalores do sistema linear, poderá ser transferida para o sistema não-linear desde que esses autovalores não tenham partes reais nulas ([22]).

Substituindo-se os pontos de equilíbrio, nas duas equações acima, resultará:

$$I) \lambda^2 + \mu_{12} \lambda + \mu_{12} \sqrt{\mu_{22}^2 - \Delta \omega_{M,2}^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \mu_{13} \lambda + \mu_{13} \sqrt{\mu_{23}^2 - \Delta \omega_{M,3}^2} = 0$$

x_{E_1} : $\cos a > 0$ e $\cos b > 0$ é assintoticamente estável.

$$II) \lambda^2 + \mu_{12} \lambda + \mu_{12} \sqrt{\mu_{22}^2 - \Delta \omega_{M,2}^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \mu_{13} \lambda - \mu_{13} \sqrt{\mu_{23}^2 - \Delta \omega_{M,3}^2} = 0$$

x_{E_2} : $\cos a > 0$ e $\cos b < 0$ é instável.

$$III) \lambda^2 + \mu_{12} \lambda - \mu_{12} \sqrt{\mu_{22}^2 - \Delta \omega_{M,2}^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \mu_{13} \lambda + \mu_{13} \sqrt{\mu_{23}^2 - \Delta \omega_{M,3}^2} = 0$$

x_{E_3} : $\cos a < 0$ e $\cos b > 0$ é instável.

$$IV) \lambda^2 + \mu_{12} \lambda - \mu_{12} \sqrt{\mu_{22}^2 - \Delta \omega_{M,2}^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \mu_{13} \lambda - \mu_{13} \sqrt{\mu_{23}^2 - \Delta \omega_{M,3}^2} = 0$$

x_{E_4} : $\cos a < 0$ e $\cos b < 0$ é instável.

O importante é observar que, desde que os pontos de equilíbrio existam, três serão, incondicionalmente, instáveis e um único será, incondicionalmente, estável, representando o estado síncrono da rede, independente de qualquer combinação de parâmetros.

Para esse estado síncrono estável, os erros de regime permanente serão dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_{M,2} = \omega_M \tau_{12} + \arcsen \frac{\omega_M - \omega_2}{\mu_{22}} \\ \Delta \dot{\Phi}_{M,2} = 0 \\ \Delta \Phi_{M,3} = \omega_M \tau_{13} + \arcsen \frac{\omega_M - \omega_3}{\mu_{23}} \\ \Delta \dot{\Phi}_{M,3} = 0 \end{array} \right. \quad (71)$$

6.3. Rede TWMS – Estrela Dupla

Reescrevendo as equações (58) e (59) e considerando as hipóteses iniciais, a modelagem da rede TWMS – Estrela Dupla ficará:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ddot{\Phi}_{M,2} + \mu_{12} \Delta \dot{\Phi}_{M,2} + \mu_{12} \mu_{22} \sin \left[\frac{3}{2} \Delta \Phi_{M,2} + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{M,3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M,2} - \frac{1}{2} (\tau_{12} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M,3} + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - \right. \\ \left. - 2 \tau_{12}) \omega_M \right] = \mu_{12} (\omega_M - \omega_2) \end{array} \right. \quad (72)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ddot{\Phi}_{M,3} + \mu_{13} \Delta \dot{\Phi}_{M,3} + \mu_{13} \mu_{23} \sin \left[\frac{1}{2} \Delta \Phi_{M,2} + \frac{3}{2} \Delta \Phi_{M,3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{21}) \Delta \dot{\Phi}_{M,2} - \frac{1}{2} (\tau_{13} + \tau_{31}) \Delta \dot{\Phi}_{M,3} + \frac{1}{2} (\tau_{21} + \tau_{31} - \right. \\ \left. - 2 \tau_{13}) \omega_M \right] = \mu_{13} (\omega_M - \omega_2) \end{array} \right. \quad (73)$$

Fazendo as hipóteses simplificadoras

- $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{31} = \tau$
- $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_1$
- $\mu_{22} = \mu_{23} = \mu_2$ e usando a notação de variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_1 = \Delta \Phi_{M,2} \\ x_2 = \Delta \dot{\Phi}_{M,2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_3 = \Delta \Phi_{M,3} \\ x_4 = \Delta \dot{\Phi}_{M,3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 - \mu_1 \mu_2 \sin \left[\frac{3}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3 - \tau x_2 - \tau x_4 \right] + \mu_1 (\omega_M - \omega_2) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\mu_1 x_4 - \mu_1 \mu_2 \sin \left[\frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{2} x_3 - \tau x_2 - \tau x_4 \right] + \mu_1 (\omega_M - \omega_3) \end{cases} \quad (74)$$

Os pontos de equilíbrio de (74) serão dados por:

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_4 = 0, \text{ e}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\sin \left[\frac{3}{2} \hat{x}_1 + \frac{1}{2} \hat{x}_3 \right]}_a = \frac{\Delta \omega_{M,2}}{\mu_2} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{\sqrt{\mu_2^2 - \Delta \omega_{M,2}^2}}{\mu_2} \\ \underbrace{\sin \left[\frac{1}{2} \hat{x}_1 + \frac{3}{2} \hat{x}_3 \right]}_b = \frac{\Delta \omega_{M,3}}{\mu_2} \Rightarrow \cos b = \pm \frac{\sqrt{\mu_2^2 - \Delta \omega_{M,3}^2}}{\mu_2} \end{cases}$$

Mais uma vez, os pontos de equilíbrio são quatro e sua estabilidade poderá ser analisada através da matriz Jacobiana.

$$A = Jf|_{\hat{x}} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos a & -\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \cos a \tau & -\mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos a & \mu_1 \mu_2 \cos a \tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos b & \mu_1 \mu_2 \cos b \tau & -\mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos b & -\mu_1 + \mu_1 \mu_2 \cos b \tau \end{bmatrix}$$

Os autovalores seguem de: $\det (\lambda I - A)$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos a & \lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos a \tau & \mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos a & -\mu_1 \mu_2 \cos a \tau \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ \mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos b & -\mu_1 \mu_2 \cos b \tau & \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos b & \lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos b \tau \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos a \tau & \mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos a & -\mu_1 \mu_2 \cos a \tau \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\mu_1 \mu_2 \cos b \tau & \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos b & \lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos b \tau \end{vmatrix} + 1 \cdot$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos a & \mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos a & -\mu_1 \mu_2 \cos a \tau \\ 0 & \lambda & -1 \\ \mu_1 \mu_2 \frac{1}{2} \cos b & \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos b & \lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos b \tau \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & \lambda [\lambda (\lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos a \tau) (\lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos b \tau) + \\ & + \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{1}{2} \cos a \cos b \tau - \mu_1^2 \mu_2^2 \cos a \cos b \tau^2 \lambda + \\ & + \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos b (\lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos a \tau)] + \\ & + \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} \cos a (\lambda + \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \cos b \tau) \lambda - \\ & - \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{1}{4} \cos a \cos b + \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{1}{2} \cos a \cos b \tau \lambda + \\ & + \mu_1^2 \mu_2^2 \frac{9}{4} \cos a \cos b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \underbrace{[2 \mu_1 - \mu_1 \mu_2 \tau (\cos a + \cos b)]}_{a_2} \lambda^3 + \\ & + \underbrace{[\mu_1^2 - \mu_1^2 \mu_2 \tau (\cos a + \cos b) + \mu_1 \mu_2 \frac{3}{2} (\cos a + \cos b)]}_{a_3} \lambda^2 + \\ & + \underbrace{[\mu_1^2 \mu_2 \frac{3}{2} (\cos a + \cos b) - 2 \mu_1^2 \mu_2^2 \cos a \cos b \tau]}_{a_4} \lambda + \\ & + \underbrace{2 \mu_1^2 \mu_2^2 \cos a \cos b}_{a_5} = 0 \quad (75) \end{aligned}$$

Substituindo-se os pontos de equilíbrio, na equação acima, resultará:

I) x_{E_2} : $\cos a > 0$ e $\cos b < 0 \Rightarrow$ observa-se que o 5º coeficiente do polinômio (75) ficará com sinal contrário ao 1º \Rightarrow ponto de equilíbrio instável.

II) x_{E_3} : $\cos a < 0$ e $\cos b > 0 \Rightarrow$ mesmo comentário de I) \Rightarrow ponto de equilíbrio instável.

III) x_{E_4} : $\cos a < 0$ e $\cos b < 0 \Rightarrow$ observe-se que o 4º coeficiente fica negativo \Rightarrow ponto de equilíbrio instável.

IV) x_{E_1} : $\cos a > 0$ e $\cos b > 0 \Rightarrow$ a estabilidade do ponto de equilíbrio depende da combinação de parâmetros nos coeficientes do polinômio.

Assim, para o possível estado síncrono da rede TWMS – Estrela Dupla, os erros de regime permanente serão dados por:

$$\Delta \Phi_{M,2} = \frac{3}{4} \arcsen \frac{(\omega_M - \omega_2)}{\mu_2} - \frac{1}{4} \arcsen \frac{(\omega_M - \omega_3)}{\mu_2}$$

$$\Delta \dot{\Phi}_{M,2} = 0$$

$$\Delta \Phi_{M,3} = \frac{3}{4} \arcsen \frac{(\omega_M - \omega_3)}{\mu_2} - \frac{1}{4} \arcsen \frac{(\omega_M - \omega_2)}{\mu_2}$$

$$\Delta \dot{\Phi}_{M,3} = 0$$

6.4. Comparações

As análises executadas, nesse capítulo, levam às seguintes conclusões:

— Em termos de estabilidade, os três pontos de equilíbrio instáveis na rede OWMS continuaram a ser, incondicionalmente, instáveis na rede TWMS. No entanto, o ponto de equilíbrio, incondicionalmente estável, da rede OWMS terá, na rede TWMS, sua estabilidade dependente de, pelo menos, uma combinação de parâmetros que garanta mesmo sinal no polinômio característico. Assim, a rede TWMS terá uma estabilidade mais frágil do que a rede OWMS.

— Em termos de erro de regime, os erros para a rede TWMS serão, praticamente, a metade dos erros para a rede OWMS e não incluem a parcela do atraso de canal. Isto é, a configuração TWMS conseguirá fazer uma compensação automática dos atrasos de canal, que implicará um cancelamento dos atrasos.

Capítulo 7:

Redes com Nós Mutuamente Sincronizados

7.2. Modelagem e Equacionamento

7.3 Determinação da Freqüência de Estado Estacionário

7.4. Estabilidade do Estado Síncrono

RESUMO:

Neste capítulo, será estabelecido um modelo para redes com três nós, mutuamente sincronizados.

As equações dinâmicas serão obtidas e uma análise das condições de sincronismo será apresentada.

Capítulo 7:

Redes com Nós Mutuamente Sincronizados

Osciladores Mutuamente Sincronizados constituem uma técnica de sincronização sem osciladores prioritários, como na técnica mestre-escravo. Preferivelmente, são compostas de osciladores controlados, que trocam sinais de sincronismo.

Esse esquema de sincronização parece ser comum na natureza, provendo órgãos ou indivíduos com a capacidade de registrar e acompanhar a evolução do tempo ([11], [20]).

Cada oscilador tem sua própria frequência de livre-curso $\bar{\omega}_i$, aceitando sinais de controle que podem fazer sua frequência desviar-se da frequência de livre-curso, proporcionalmente à entrada de controle ([28]).

Um esquema dado em ([29]) ilustra bem esse tipo de topologia, que aparecerá exemplificada na figura 24.

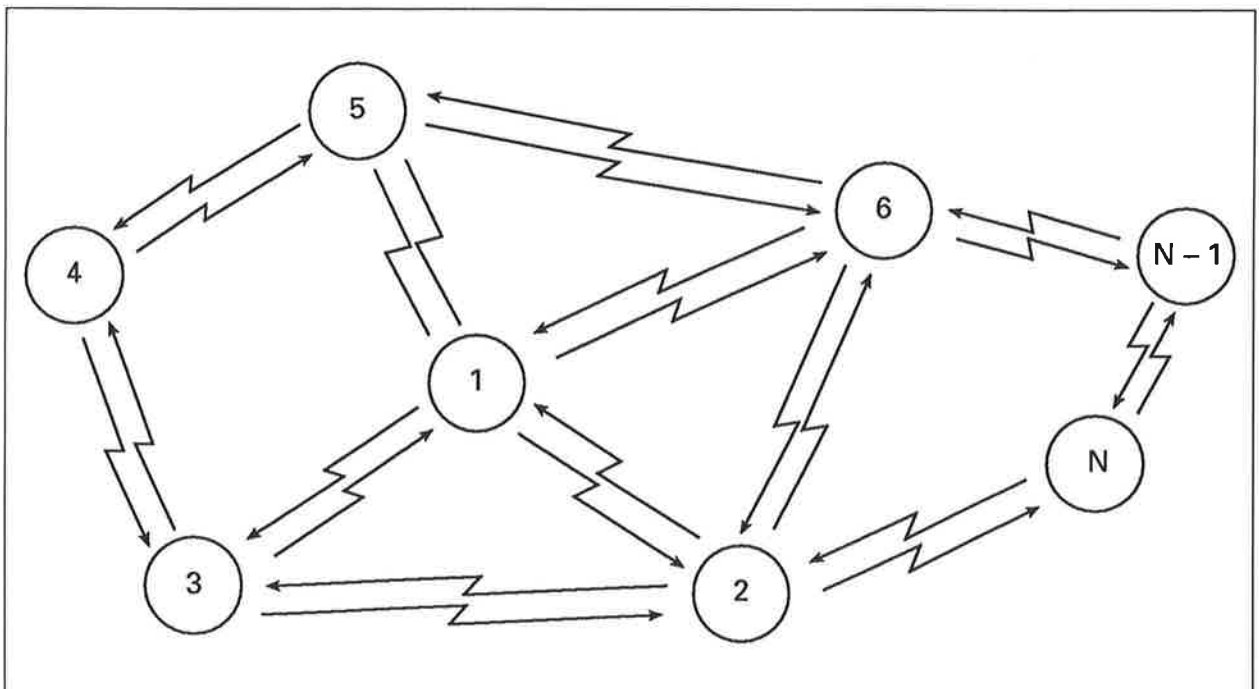


Figura 24 – Rede parcialmente conectada a N-nós.

Como esse tipo de arranjo admite uma grande variedade de configurações, será apresentada uma rede de duas vias, sob forma de triângulo, cujo equacionamento será obtido. Além disso, algumas questões sobre possíveis estados síncronos serão estudadas.

7.1. Formulação do Problema

A rede, a ser equacionada, tem topologia em triângulo, com três nós, totalmente conectados (figura 25).

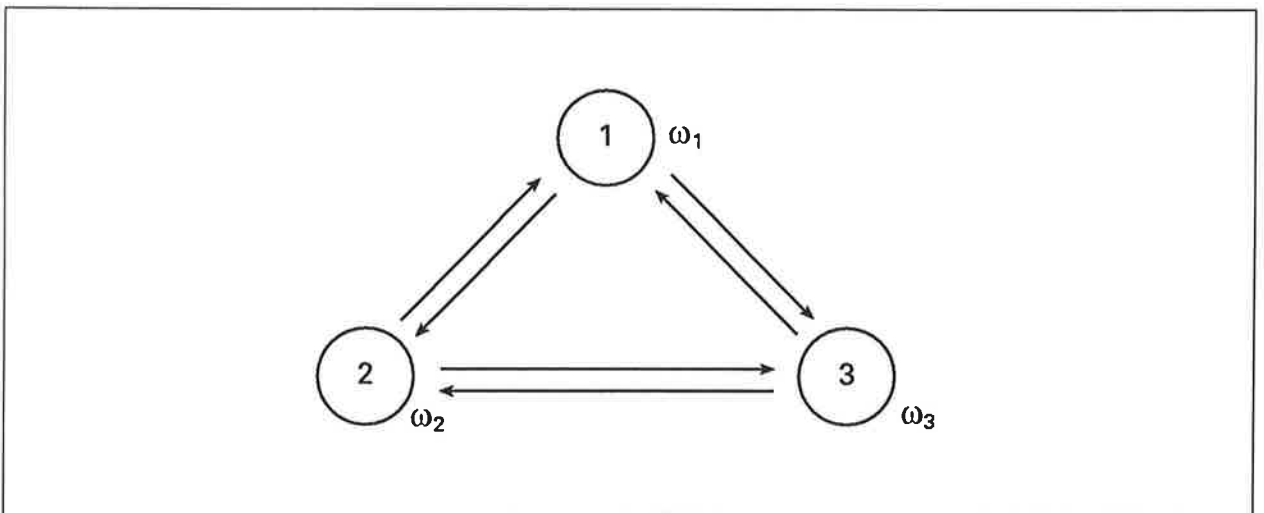


Figura 25 – Rede com Três Nós Mutuamente Sincronizados

O modelo a ser desenvolvido levará em consideração os seguintes aspectos:

- i) frequência de livre-curso dos osciladores da rede diferentes.
- ii) existência de atrasos de percurso nos sinais de sincronismo.

7.2. Modelagem e Equacionamento

Para a rede, considerada na figura 25, o esquema de operação de cada nó ([30]) aparecerá, para o nó 1, como na figura 26.

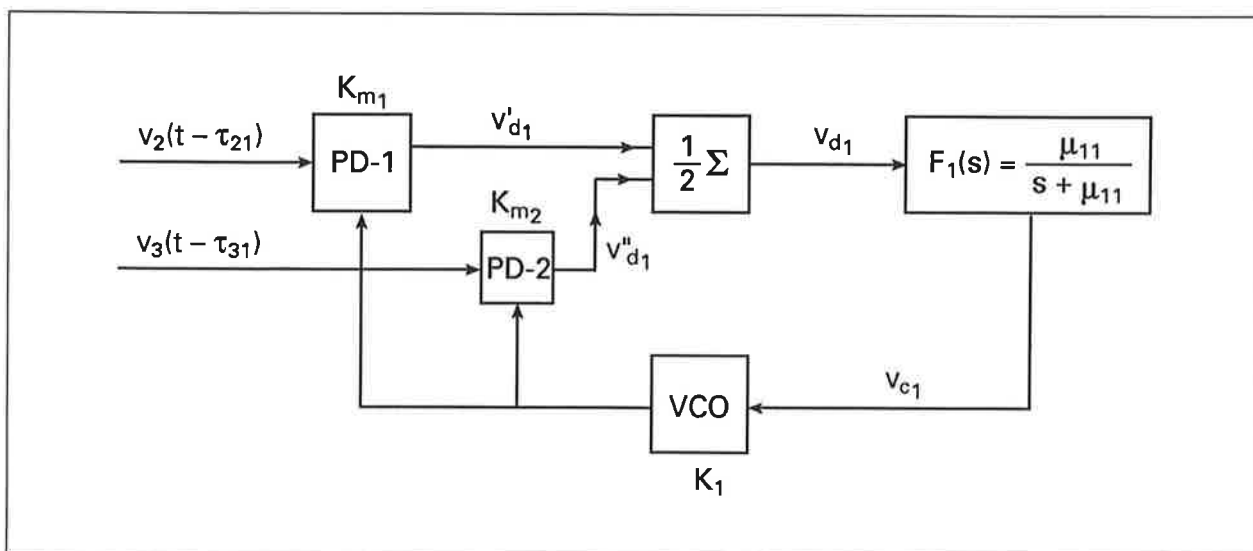


Figura 26 – Nó Controlado 1: Topologia em Triângulo

O esquema nos nós 2 e 3 é, totalmente, análogo ao do nó 1 e fase de cada oscilador será dada por:

$$\Phi_i(t) = \omega_i t + \theta_i(t), \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } 3. \quad (76)$$

Assumindo que:

$$K_{m1} = K_{m2} = K_{m3} = K_m$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_0$$

$V_1 = V_2 = V_3 = V$ e que os filtros são “lag” de 1ª ordem com $\mu_1 = \frac{1}{RC}$,

pode-se equacionar a dinâmica do processo do nó 1.

— os sinais $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$ serão da forma:

$$v_1(t) = V \cos \Phi_1(t)$$

$$v_2(t) = V \cos \Phi_2(t)$$

$$v_3(t) = V \cos \Phi_3(t)$$

- Sendo $\tau_{i,1}$, o atraso para o sinal partir do nó- i e chegar no nó-1, com $i = 2$ e 3:

$$v_2(t - \tau_{21}) = V \text{ sen } \Phi_2(t - \tau_{21}) \text{ e } v_3(t - \tau_{31}) = V \text{ sen } \Phi_3(t - \tau_{31})$$

- Para a implementação proposta na figura 26:

$$v'_{d1} = K_m V_2(t - \tau_{21}) \cdot v_1(t)$$

$$v'_{d1} = K_m VV [\text{sen } \Phi_2(t - \tau_{21}) \cdot \cos \Phi_1(t)] \quad (77)$$

$$v''_{d1} = K_m v_3(t - \tau_{31}) \cdot v_1(t)$$

$$v''_{d1} = K_m VV [\text{sen } \Phi_3(t - \tau_{31}) \cdot \cos \Phi_1(t)] \quad (78)$$

- O efeito do filtro lag será eliminar os termos de alta frequência, assim como já demonstrado para as redes mestre-escravo, as expressões (77) e (78) se simplificarão para:

$$v'_{d1}(t) = \frac{K_m VV}{2} \text{ sen } [\Phi_2(t - \tau_{21}) - \Phi_1(t)] \quad (79)$$

$$v''_{d1}(t) = \frac{K_m VV}{2} \text{ sen } [\Phi_3(t - \tau_{31}) - \Phi_1(t)] \quad (80)$$

- Considerando a soma ponderada da figura 26:

$$v_{d1} = \frac{1}{2} v'_{d1} + \frac{1}{2} v''_{d1}$$

$$\Rightarrow v_{d1} = \frac{1}{2} \frac{K_m VV}{2} [\text{sen } [\Phi_2(t - \tau_{21}) - \Phi_1(t)] + \text{sen } [\Phi_3(t - \tau_{31}) - \Phi_1(t)]] \quad (81)$$

As relações constitutivas dos elementos da figura 26 são:

$$\bullet \quad v_{c1} = \frac{\dot{\theta}_1}{K_0} \quad \cdot \quad v_{c1} = F(s) v_{d1} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = K_0 \cdot v_{d1} \cdot F(s)$$

Derivando (76) e usando as expressões anteriores:

$$\ddot{\Phi}_1(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_1(t) - \mu_1 \omega_1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{2} [\text{sen} [\Phi_2(t - \tau_{21}) - \Phi_1(t)] + \text{sen} [\Phi_3(t - \tau_{31}) - \Phi_1(t)]] = 0 \quad (82)$$

— Da mesma forma, para os nós 2 e 3:

$$\ddot{\Phi}_2(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_2(t) - \mu_1 \omega_2 - \frac{\mu_1 \mu_2}{2} [\text{sen} [\Phi_1(t - \tau_{12}) - \Phi_2(t)] + \text{sen} [\Phi_3(t - \tau_{32}) - \Phi_2(t)]] = 0 \quad (83)$$

$$\ddot{\Phi}_3(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_3(t) - \mu_1 \omega_3 - \frac{\mu_1 \mu_2}{2} [\text{sen} [\Phi_1(t - \tau_{13}) - \Phi_3(t)] + \text{sen} [\Phi_2(t - \tau_{23}) - \Phi_3(t)]] = 0 \quad (84)$$

— Assumindo que os atrasos satisfazem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_a \\ \tau_{13} = \tau_{31} = \tau_b \\ \tau_{23} = \tau_{32} = \tau_c \end{array} \right.$$

— Perto do estado estacionário, poderá ser utilizada a aproximação ([31]):

$\Phi(t - T) \approx \Phi(t) - \omega_s \cdot T$ (85), sendo ω_s a frequência de estado estacionário comum a todos os osciladores da rede.

— Fazendo $\frac{\mu_1 \mu_2}{2} = k$, e definindo:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_{21}(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) \\ \Delta \Phi_{13}(t) = \Phi_1(t) - \Phi_3(t) \\ \Delta \Phi_{32}(t) = \Phi_3(t) - \Phi_2(t) \end{cases}$$

as equações (82), (83) e (84) tornar-se-ão:

$$\ddot{\Phi}_1(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_1(t) - \mu_1 \omega_1 - k \sin[\Delta \Phi_{21}(t) - \omega_s \tau_a] + k \sin[\Delta \Phi_{13}(t) + \omega_s \tau_b] = 0 \quad (86)$$

$$\ddot{\Phi}_2(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_2(t) - \mu_1 \omega_2 + k \sin[\Delta \Phi_{21}(t) + \omega_s \tau_a] - k \sin[\Delta \Phi_{32}(t) + \omega_s \tau_c] = 0 \quad (87)$$

$$\ddot{\Phi}_3(t) + \mu_1 \dot{\Phi}_3(t) - \mu_1 \omega_3 - k \sin[\Delta \Phi_{13}(t) - \omega_s \tau_b] + k \sin[\Delta \Phi_{32}(t) + \omega_s \tau_c] = 0 \quad (88)$$

— Subtraindo-se as equações acima, duas a duas:

$$\Delta \ddot{\Phi}_{21}(t) + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{21}(t) + \mu_1 (\omega_1 - \omega_2) + 2k \sin \Delta \Phi_{21}(t) \cdot \cos \omega_s \tau_a - k \sin[\Delta \Phi_{13}(t) + \omega_s \tau_b] - k \sin[\Delta \Phi_{32}(t) - \omega_s \tau_c] = 0 \quad (89)$$

$$\Delta \ddot{\Phi}_{13}(t) + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{13}(t) + \mu_1 (\omega_3 - \omega_1) + 2k \sin \Delta \Phi_{13}(t) \cdot \cos \omega_s \tau_b - k \sin[\Delta \Phi_{21}(t) - \omega_s \tau_a] - k \sin[\Delta \Phi_{32}(t) + \omega_s \tau_c] = 0 \quad (90)$$

$$\Delta \ddot{\Phi}_{32}(t) + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{32}(t) + \mu_1 (\omega_2 - \omega_3) + 2k \sin \Delta \Phi_{32}(t) \cdot \cos \omega_s \tau_c - k \sin[\Delta \Phi_{21}(t) + \omega_s \tau_a] - k \sin[\Delta \Phi_{13}(t) - \omega_s \tau_b] = 0 \quad (91)$$

Assim, ficará estabelecido que o modelo para uma rede, com três nós em triângulo, totalmente conectados, com diferentes frequências iniciais de livre curso, será dado pelas equações (89); (90) e (91).

7.3. Determinação da Freqüência de Estado Estacionário

Conforme se pode notar, o equacionamento de redes com nós mutuamente sincronizados é, em geral, complicado e, cada caso, requer análise específica com poucas possibilidades de generalização.

Entretanto, existem maneiras simples de se estimar o estado síncrono (mesma freqüência), a partir de freqüências nodais, inicialmente diferentes. A seguir, a rede da figura 25 será analisada, a partir das freqüências iniciais de livre curso ω_1 , ω_2 e ω_3 .

Para tanto, considera-se que uma rede mutuamente sincronizada alcançou seu estado de equilíbrio síncrono, estável ou não, se as freqüências dos osciladores da rede convergirem todas para o valor de equilíbrio ω_s e os erros de fase ($\Delta\Phi_{21}$, $\Delta\Phi_{13}$, $\Delta\Phi_{32}$), apesar de não necessariamente iguais, passarem a ser independentes do tempo.

É de interesse, nas aplicações práticas, obter uma estimativa dessa freqüência ω_s .

Pode-se efetuar um cálculo rápido admitindo que exista um estado síncrono de freqüência ω_s .

Levando esse fato em consideração, obtêm-se as equações (89), (90) e (91) linearizadas:

$$\mu_1 \omega_s - \mu_1 \omega_1 - k \Delta\Phi_{21} + k \omega_s \tau_a + k \Delta\Phi_{13} + k \omega_s \tau_b = 0$$

$$\mu_1 \omega_s - \mu_1 \omega_2 - k \Delta\Phi_{21} + k \omega_s \tau_a - k \Delta\Phi_{32} + k \omega_s \tau_c = 0$$

$$\mu_1 \omega_s - \mu_1 \omega_3 - k \Delta\Phi_{13} + k \omega_s \tau_b - k \Delta\Phi_{32} + k \omega_s \tau_c = 0$$

Somando-se as três expressões acima, resultará:

$$3 \mu_1 \omega_s - \mu_1 (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + k \omega_s (2 \tau_a + 2 \tau_b + 2 \tau_c) = 0$$

$$\omega_s [3 \mu_1 + \mu_1 \mu_2 (\tau_a + \tau_b + \tau_c)] = \mu_1 (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

Portanto, uma estimativa para ω_s será dada por:

$$\omega_s = \frac{\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3}}{1 + \frac{1}{3} \mu_2 (\tau_a + \tau_b + \tau_c)} \quad (92)$$

Pode-se, observando a expressão (92), verificar que a frequência síncrona (ω_s) será igual à média aritmética das frequências de livre-curso, quando os atrasos forem muito pequenos.

Num caso prático, todavia, a frequência ω_s será mais baixa que a média e poderá cair numa faixa fora de interesse das aplicações pretendidas como observado em ([32]).

7.4. Estabilidade do Estado Síncrono

Uma vez que a rede de nós mutuamente sincronizados, detalhada na figura 27, alcançou o estado síncrono representado pela frequência ω_s , será necessário verificar se a rede pode manter esse estado sob determinadas perturbações. Isto é, se esse estado, no modo de rastreamento, será de equilíbrio estável.

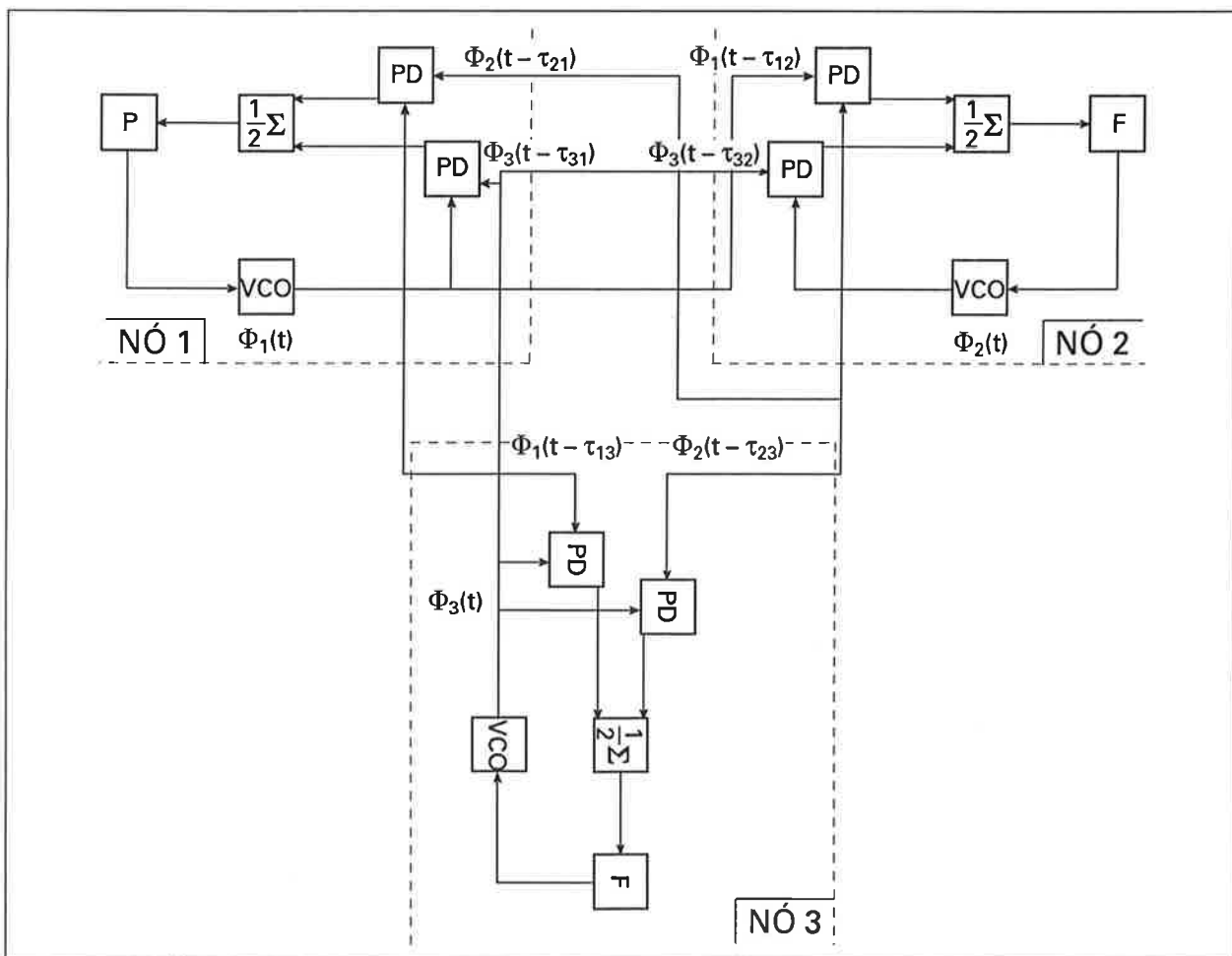


Figura 27 – Rede de Nós Mutuamente Sincronizados.

Linearizando as equações (89), (90) e (91):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \ddot{\Phi}_{21} + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{21} + 2k \Delta \Phi_{21} - k \Delta \Phi_{13} - k \Delta \Phi_{32} - \underbrace{\mu_1 \Delta \omega_{21} + \omega_s (\tau_c - \tau_b)}_a = 0 \\ \Delta \ddot{\Phi}_{13} + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{13} + 2k \Delta \Phi_{13} - k \Delta \Phi_{21} - k \Delta \Phi_{32} - \underbrace{\mu_1 \Delta \omega_{13} + \omega_s (\tau_c - \tau_c)}_b = 0 \\ \Delta \ddot{\Phi}_{32} + \mu_1 \Delta \dot{\Phi}_{32} + 2k \Delta \Phi_{32} - k \Delta \Phi_{21} - k \Delta \Phi_{13} - \underbrace{\mu_1 \Delta \omega_{32} + \omega_s (\tau_b - \tau_a)}_c = 0 \end{array} \right.$$

Utilizando-se as variáveis de estado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \Delta \Phi_{21} \\ x_2 = \Delta \dot{\Phi}_{21} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \Delta \Phi_{13} \\ x_4 = \Delta \dot{\Phi}_{13} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_5 = \Delta \Phi_{32} \\ x_6 = \Delta \dot{\Phi}_{32} \end{array} \right.,$$

O sistema passará a ser descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\mu_1 x_2 - a - 2k x_1 + k x_3 + k x_5 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\mu_1 x_4 - b - 2k x_3 + k x_1 + k x_5 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -\mu_1 x_6 - c - 2k x_5 + k x_1 + k x_3 \end{array} \right. \quad (93)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (equações de estado 93) serão, portanto:

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_4 = \hat{x}_6 = 0$$

$$\hat{x}_1 = -\frac{2a+b}{3k} + \hat{x}_5$$

$$\hat{x}_3 = \hat{x}_5 - \frac{a+2b}{3k} \text{ sendo, portanto, não isolados ou degenerados ([22]).}$$

A estabilidade desses estados de equilíbrio poderá ser verificada pelos autovalores da matriz Jacobiana.

$$A = Jf|_{\hat{x}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & -\mu_1 & k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2k & -\mu_1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & k & 0 & -2k & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores seguem de: $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2k & \lambda + \mu_1 & -k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 2k & \lambda + \mu_1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -k & 0 & -k & 0 & 2k & \lambda + \mu_1 \end{vmatrix} = 0$$

Obtém-se, desse modo, o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^3 (\lambda + \mu_1)^3 + \lambda^2 (\lambda + \mu_1)^2 6k + \lambda (\lambda + \mu_1) 9k^2 = 0$$

Considerando as raízes:

$$\lambda^2 (\lambda + \mu_1)^2 + \lambda (\lambda + \mu_1) 6 k + 9 k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^4 + 2 \mu_1 \lambda^3 + (\mu_1^2 + 6 k) \lambda^2 + \mu_1 6 k \lambda + 9 k^2 = 0$$

Observa-se que os coeficientes do polinômio acima, são todos positivos e, assim, a condição necessária para a estabilidade não é violada. A verificação da condição suficiente via tabela de Routh ([27])

λ^4	1	$\mu_1^2 + 6 k$	$9 k^2$
λ^3	$2 \mu_1$	$\mu_1 6 k$	0
λ^2	$\mu_1^2 + 3 k$	$9 k^2$	
λ^1	$6 k \mu_1^3$	0	
λ^0	$9 k^2$		

Como a 1ª coluna da Tabela de Routh é sempre positiva, a estabilidade dos estados de equilíbrio estará garantida para qualquer combinação de parâmetros μ_1 e k .

O arranjo de 3-nós, da figura 27, resultará, portanto, com estados síncronos estáveis para qualquer combinação de parâmetros.

Esse resultado, obtido via abordagem por variáveis de estado, corrobora um teorema sobre estabilidade de redes com nós mutuamente sincronizados, provado em ([32]) e citado em ([28]), segundo o qual uma condição necessária e suficiente para redes mutuamente sincronizadas serem estáveis é existir, pelo menos, um caminho direto ou indireto entre quaisquer dois nós.

Capítulo 8: Conclusões

RESUMO:

Os vários resultados teóricos,
obtidos ao longo do trabalho
são comentados,
relacionados com
questões práticas.

Capítulo 8: Conclusões

Ao longo do trabalho, várias considerações teóricas foram tecidas, através de alguns resultados, a respeito das redes de distribuição de sinais de tempo.

Entretanto, as principais conclusões práticas são:

— As redes OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla possuem um oscilador não controlado (mestre), que será o responsável pela influência final do sincronismo da rede. Desse modo, pode-se saber, previamente, que a rede operará com a frequência de livre-curso do oscilador mestre.

— As redes mutuamente sincronizadas têm sua frequência de sincronismo (ω_s) determinada por uma equação que levará em conta a participação de todos os osciladores da rede, bem como os atrasos de percurso, podendo sincronizar em uma frequência (ω_s) fora das especificações.

— As redes OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla, quando sofrem instabilidades lentas nos processos de fase de seus osciladores (“drifts”), poderão ter essas instabilidades mascaradas, uma vez que o “drift” do mestre prevalecerá no estado estacionário (itens 4.3 e 5.3).

— Como as redes de nós mutuamente sincronizados não privilegiam osciladores, não haverá como evitar que os “drifts” sofridos se evidenciem na rede.

— Quanto à complexidade de implementação, as redes mutuamente sincronizadas superam as OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla. Entretanto, no caso mutuamente sincronizado, se alguns oscila-

dores sofrerem falha de funcionamento, os osciladores restantes estabelecerão um novo estado de sincronismo.

— Nas redes OWMS – Estrela Simples e TWMS – Estrela Dupla, um mau funcionamento do oscilador mestre levará à perda total do sincronismo de rede.

Referências Bibliográficas

- [1] Mainzer, K. – **“Thinking Complexity”** – Springer – Verlag; Berlin, 1994.
- [2] Piqueira, J.R.C. – Estabilidade Estrutural e Organização – em **“Auto-Organização: Estudos Multidisciplinares”** – editado por M. Débrun, M.E.Q. Gonzales e O. Pessoa Jr. – Coleção CLE – UNICAMP – Campinas – S.P. – 1996.
- [3] Halberg, F.; Caradente, F.; Cornélissen, G. Katinas, G.S. — Glossary of chronobiology. – **Chronobiologia**, v.4, Suppl.1, p. 189, 1977.
- [4] Piqueira, J.R.C. e Pasquarelli, F.A. – Um Circuito para Geração de Ruído Colorido – **IX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações** – 15.3.1 / 15.3.5 – Setembro de 1991.
- [5] Purves, F.; Gonzales, J.A.Q. e Piqueira, J.R.C. – Geração de Sinais Aleatórios a partir do Mapeamento Logístico – **IX Congresso Brasileiro de Automática** – 45 / 50 – Vitória – E.S. – Setembro de 1992.
- [6] Piqueira, J.R.C. – “Os Conceitos de Auto-Organização e Complexidade: uma tentativa de interpretação” – **coleção documentos – IEA – USP** – São Paulo – S.P. – Maio de 1996.
- [7] Piqueira, J.R.C. e Del Nero, H.S. – Um modelo de átomo cognitivo fundamentado em malhas de sincronismo – em **“Encontro com as Ciências Cognitivas”** – 125/137 – organizado por M.E.Q. Gonzales, C.A. Lungarzo, C.B. Milidoni, A. Pereira Jr. e M. B. Wrigley – Editora da UNESP – Marília – SP – 1996.

- [8] Piqueira, J.R.C. – Bifurcação Sela-Nó e Faixas de Relação e Cap-
tura de PLLS – **XII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e
Computacional** – São José do Rio Preto – S.P. – Setembro de 1989.
- [9] Piqueira, J.R.C. – Bifurcações em PLLS de Terceira Ordem –
I Workshop Brasileiro de Fenômenos não-lineares – 63 / 65 –
Rio Claro - S.P. – Novembro de 1993.
- [10] Piqueira, J.R.C.; Maranca, A.P.; Maciel, L.M.A. e Del Nero, H.S. –
Third- Order Phaselock Loop as a Trigger for Cognitive Tasks –
International Neural Networks Society – vol 1/347/351 –
Washington – D.C. – USA – Julho de 1995.
- [11] Lindsey, W.C. et al – Network Synchronization – **Proceedings of
the IEEE** – vol. 73, nº 10, Outubro 1985.
- [12] Bliwise, D.L. – Sleep in normal aging and dementia. – **Sleep**, v. 16,
p.40-81, 1993.
- [13] Carskadon, M.A.; Vieira, C.; Acebo, C. – Association between puberty
and delayed phase reference – **Sleep** – v. 16, p. 258-62, 1993.
- [14] Dawkins, R. – **“The Blind Watchmaker”** – Penguin Books —
London — England – 1986.
- [15] Murray, J.D. – **“Mathematical Biology”** – Springer — Verlag —
Berlin — second edition – 1993.
- [16] Bennaton, J.F. e Piqueira, J.R.C. – O teorema de Hopf, acoplado
ao método do Lugar das Raízes, na Análise de Malhas de Sincro-
nismo. – **X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e
Computacional** – 59/65 – Gramado – R.S. – Setembro de 1987.

- [17] Piqueira, J.R.C. – **“Aplicação da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais a Problemas de Sincronismo de Fase”** – Tese de Doutorado – São Paulo – S.P. 1987.
- [18] Green, D.N. – Lock-In, Tracking and Acquisition of AGC – Aided Phase-Locked Loops – **IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-32, nº 6**, Dec. 1983.
- [19] Viterbi, A.J. – **“Principles of Coherent Communication”**. New York: McGraw – Hill, 1966.
- [20] Lindsey, W.C. – **“Synchronization System in Communication and Control”**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1972.
- [21] Van Trees, H.L. – **“Detection, Estimation, and Modulation Theory – Part II – Nonlinear Modulation Theory”** – John Wiley and Sons, Inc. – 1971.
- [22] Guckenheimer, J. and Holmes, P. – **“Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields”** – Springer – Verlag – 1983.
- [23] Andronov, A.A.; Vitt, A.A. and Khaikin, S.E. – **“Theory of Oscillations”** – Addison – Wesley – 1966.
- [24] Gardner, F.M. – **“Phase Lock Techniques”** – John Wiley and Sons, Inc. 1971.
- [25] Blinchikoff, H.J. e Vaughan, G.R. – All-Pole Phase-Locked Tracking Filters – **IEEE Transactions on Communications, vol. COM-30, nº 10**, October, 1982.

- [26] Cideciyan, R.D. e Lindsey, M.C. – Effects of Long-Term Clock Instability on Master Slave Networks – **IEEE Transactions on Communications**, vol. **COM-35**, nº 9, Setembro de 1987.
- [27] Dorf, R.C. – “**Modern Control Engineering**” – Prentice—Hall, Inc. – 1970.
- [28] Brilliant, M.B. – The Determination of Frequency in Systems of Mutually Synchronized Oscillators, **Bell Syst. Tech. J.**, vo. **45**, Dec. 1966.
- [29] Lindsey, W.C.; Kantak, A.V. – Network Synchronization of Random Signals, **IEEE Trans. Commun.**, vol. **COM-28**, nº 8, Aug. 1980.
- [30] Choi, H.J.; Lindsey, W.C. – Phase and Frequency Transfer Analysis of N. Mutually Synchronized Oscillators, **IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.**, vol **AES-20**. nº 6, Nov. 1984.
- [31] Lindsey, W.C.; Kantak, A.V. and Dobrogovski, A. – Mutual Synchronization Properties of a System of two Oscillators with Sinusoidal Phase Detectors, **IEEE Trans-Commun.**, **COM-24**, nº 12, Dec. 1976.
- [32] Gersho, A., Karafin, B.J. – Mutual Synchronization of Geographically Separated Oscillators, **Bell Syst. Tech. J.**, vol. **45**, Dec. 1966.