

Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos

Caracterização e Estimativas da Área de Atração  
de Sistemas Dinâmicos Não Lineares

*Tese Livre Docência*

Luís Fernando Costa Alberto

Março 2006



À minha esposa Adriana.



# Conteúdo

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Sistemas Dinâmicos Autônomos Não Lineares</b>	<b>5</b>
2.1 Sistemas Dinâmicos Autônomos . . . . .	5
2.2 Conjuntos Invariantes . . . . .	6
2.3 Comportamento Assintótico . . . . .	7
2.4 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade Local . . . . .	9
2.5 Conjuntos Atratores . . . . .	12
2.6 Hiperbolicidade e Variedades Invariantes . . . . .	13
2.7 Resultados de Lyapunov . . . . .	15
2.8 Transversalidade . . . . .	18
2.9 O $\lambda$ -Lema . . . . .	18
<b>3 Área de Atração</b>	<b>19</b>
3.1 Área de Atração . . . . .	19
3.2 Equilíbrios na Fronteira da Área de Atração . . . . .	21
3.3 Caracterização da Fronteira da Área de Atração . . . . .	23
3.4 Órbitas Fechadas na Fronteira da Área de Atração . . . . .	24
<b>4 Função Energia, Conjuntos Limites e Estimativas da Área de Atração</b>	<b>27</b>
4.1 Função Energia . . . . .	27
4.1.1 Funções Energia e Conjuntos Limites . . . . .	28
4.1.2 Função Energia e a Caracterização da Fronteira da Área de Atração . . . . .	29
4.2 Função Energia Estendida . . . . .	30
4.2.1 Função Energia Estendida e Conjuntos Limites . . . . .	30
4.2.2 Função Energia Estendida e a Caracterização da Fronteira da Área de Atração . . . . .	31

4.3	Estimativas Ótimas da Área de Atração . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Função Energia Generalizada, Conjuntos Limites e Estimativas da Área de Atração</b>	<b>35</b>
5.1	Função Energia Generalizada e Conjuntos Limites . . . . .	36
5.2	Função Energia Generalizada e Área de Atração . . . . .	39
5.3	Uma classe de sistemas que satisfazem as hipóteses (C4)-(C7) . . . .	44
5.4	Exemplo . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Caracterização da Área de Atração em Sistemas com Múltiplas Escalas de Tempo</b>	<b>55</b>
6.1	Introdução . . . . .	55
6.2	Sistemas Singularmente Perturbados . . . . .	56
6.2.1	O Sistema Lento . . . . .	57
6.2.2	O Sistema Rápido . . . . .	58
6.2.3	Decomposição da Dinâmica . . . . .	59
6.3	Caracterização da Fronteira da Área de Atração de Sistemas Singularmente Perturbados . . . . .	60
6.3.1	Análise dos Pontos de Equilíbrio . . . . .	60
6.3.2	Equilíbrios na Fronteira da Área de Atração . . . . .	64
6.3.3	Comportamento Limite da Fronteira da Área de Atração . . . .	67
6.4	Análise de Estabilidade . . . . .	69
6.4.1	Funções Energia Compostas . . . . .	70
6.4.2	Exemplos . . . . .	72
6.5	Estabilidade Uniforme do Sistema Rápido . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>87</b>

# Agradecimentos

- Ao Prof. Newton G. Bretas que me ensinou Sistemas Elétricos de Potência e com o qual venho trabalhando a mais de 10 anos sempre com o forte intuito de melhorar o ensino e a pesquisa em nosso departamento.
- Ao Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues que me ensinou matemática, incluindo o Princípio de Invariância o qual tenho constantemente explorado em minha atuação como pesquisador.
- Ao Prof. Hsiao-Dong Chiang por ter me introduzido à teoria de sistemas singularmente perturbados durante minha visita à Cornell University.
- Aos meus alunos, sem os quais não haveria razão para minha profissão, pelas discussões que contribuíram significativamente para o meu aprendizado como professor e pesquisador.
- Ao departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP.
- À FAPESP, CAPES e CNPq que em diversas fases de minha vida profissional financiaram estas pesquisas.





## Resumo

Atratores de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares usualmente não são globalmente estáveis. Na maioria dos casos, existe um subconjunto de condições iniciais, chamado área de atração, cujas trajetórias, iniciando dentro deste conjunto, tendem para o atrator quando o tempo tende ao infinito. Caracterizar este conjunto e propor metodologias para estimá-lo é o principal objetivo desta tese.

Funções energia podem fornecer informações importantes a respeito dos conjuntos limites assim como da área de atração de conjuntos atrativos de sistemas dinâmicos não lineares. Infelizmente, muitos sistemas físicos não possuem função energia ou ainda, quando possuem, é difícil expressá-la analiticamente em termos de funções elementares. As condutâncias de transferência em sistemas elétricos de potência, por exemplo, podem dar origem a ciclos limites na fronteira da área de atração impossibilitando estes sistemas de possuírem uma função energia geral.

Nesta tese, generaliza-se o conceito de função energia e estudam-se as implicações desta generalização em termos dos conjuntos limites e estimativas da área de atração. A generalização da função energia proposta nesta tese acomoda a existência de conjuntos limites complexos, tais como ciclos limites e órbitas caóticas, na fronteira da área de atração. Com isto, uma classe maior de problemas pode ser estudada via funções do tipo energia. Aplica-se esta generalização à estimativa da área de atração de um sistema elétrico de potência com condutância de transferência.

Além desta generalização, apresentam-se resultados parciais relacionados a caracterização da fronteira da área de atração de sistemas singularmente perturbados. O objetivo destes resultados é decompor as metodologias computacionais de estimativa da área de atração e análise de estabilidade em duas fases: uma de dinâmicas rápidas e outra de dinâmicas lentas. Usualmente, se as propriedades de diferentes escalas de tempo dos sistemas singularmente perturbados não são levadas em consideração, então problemas de natureza numérica e analítica são frequentemente encontrados. Com esta decomposição espera-se obter métodos computacionais de análise de estabilidade de sistemas singularmente perturbados mais rápidos e mais robustos assim como obter estimativas menos conservadoras da área de atração.

**Palavras-chave:** Estabilidade, Área de Atração, Bacia de Atração, Sistemas Dinâmicos, Sistemas Singularmente Perturbados, Função Energia, Função Energia Generalizada, Sistemas Complexos.



# Abstract

Usually, attractive sets of autonomous nonlinear dynamical systems are not globally stable. In most of the cases, there exists a set of initial conditions, called stability region, whose trajectories, starting inside this set, converge to the attractive set when time goes to infinity. The characterization of this set and the proposal of new methodologies to estimate it are the main aims of this thesis.

Energy functions can provide important information regarding the composition of limit sets as well as estimates of the stability region of attractive sets of nonlinear dynamical systems. Unfortunately, many physical systems do not possess energy functions and even when they exist, it is usually impossible to represent it by a close analytical form. The transfer conductances in power system models, for example, can give origin to limit cycles on the stability region boundary. The existence of limit cycles prevents the system of having a general energy function.

In this thesis, the concept of energy function is generalized and its implications in terms of limit sets and attraction area estimates are studied. The proposed generalization allows the existence of complex dynamical behavior, like limit cycles and chaotic orbits, on the boundary of the stability region. As a consequence, a larger class of dynamical systems can be studied via energy-like function theory. The proposed theory is applied to estimate the stability region of a power system taking into account the transfer conductances in the model.

Beyond this generalization, some partial results regarding the characterization of the stability region of singularly perturbed systems is presented. The main aim of these results is the decomposition of the computational tools to estimate the stability region in two phases: the fast and the slow dynamic phases. Usually, if the time-scale properties of singularly perturbed systems are not taken into account, then several numerical and analytical problems may arise. Using the decomposition, we hope to improve the robustness and velocity of numerical tools for stability analysis of singularly perturbed systems and to obtain less conservative stability region estimates.

**Keywords:** Stability, Stability Region, Basin of Attraction, Dynamical Systems, Singularly Perturbed Systems, Energy Function, Generalized Energy Function, Complex Systems.



# Capítulo 1

## Introdução

Atratores de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares usualmente não são globalmente estáveis. Na maioria dos casos, existe um subconjunto de condições iniciais, chamado área de atração<sup>1</sup>, cujas trajetórias, iniciando dentro deste conjunto, tendem para o atrator quando o tempo tende ao infinito. O conhecimento da área de atração é muito importante em diversas aplicações, tais como, a análise de estabilidade de sistemas elétricos de potência[12], técnicas de otimização global via sistemas dinâmicos[26] e sistemas de controle [28]. Caracterizar este conjunto e propor metodologias para estimá-lo é o principal objetivo desta tese.

Embora o conhecimento da área de atração forneça uma visão muito mais completa do comportamento assintótico global do sistema do que uma simples análise local de estabilidade, ela não têm sido tão explorada na literatura quanto análises de estabilidade locais devido principalmente às dificuldades em se determiná-la ou estimá-la. Entretanto, do ponto de vista prático, a região de estabilidade ou área de atração de um atrator possui um papel muito importante. Um ponto de operação de um certo sistema dinâmico pode ser assintoticamente estável, mas se a sua área de atração é muito pequena, o sistema pode "escapar" deste ponto de operação desejado por pequenas perturbações.

Uma caracterização bastante completa da área de atração de uma classe de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares foi apresentada em [9] sob condições bastante aceitáveis do ponto de vista prático. Estes resultados foram especializados para sistemas autônomos de segunda ordem com aplicações em sistemas elétricos de potência [8][44]. Uma condição fundamental exigida para estas caracterizações é que todas as trajetórias na fronteira da área de atração se aproximam de um ponto de equilíbrio quando o tempo tende ao infinito. Neste caso, a fronteira da área de atração é constituída pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio instáveis que estão na fronteira.

Embora a caracterização da fronteira da área de atração seja por si só um tópico importante, a caracterização da área de atração torna-se muito mais útil, do ponto de

---

<sup>1</sup>Neste texto usaremos a expressão área de atração. Na literatura este conjunto também é denominado bacia de atração ou região de estabilidade

vista computacional, quando uma função energia está associada ao sistema. Funções energia podem fornecer, de maneira implícita, uma estimativa da área de atração por intermédio de um número escalar. Além disto, explorando as propriedades de invariância e suas implicações em termos de funções energia, obtêm-se informações muito importantes a respeito dos conjuntos limites, da área de atração e sua fronteira.

Apesar dos significativos avanços obtidos na caracterização da área de atração e sua fronteira, existem ainda muitos problemas importantes em aberto. Em sistemas dinâmicos autônomos não lineares, os conjuntos limites podem ser bastante complexos. Ciclos limites, órbitas caóticas, por exemplo, podem existir na fronteira da área de atração. Em algumas aplicações em sistemas elétricos de potência envolvendo linhas de transmissão em corrente contínua, a existência de ciclos limites na fronteira da área de atração foi relatada [41].

Existem algumas generalizações na literatura para acomodar a presença de ciclos limites na fronteira da área de atração [9]. Isto é feito modificando-se a definição de função energia. Entretanto, o problema é apenas parcialmente resolvido pois, do ponto de vista prático, é muito difícil encontrar uma função satisfazendo as condições requeridas nesta nova definição. Além disto, não existem ferramentas computacionais eficientes para calcular ciclos limites instáveis.

Neste trabalho revisam-se os resultados existentes relacionados a caracterização da área de atração de sistemas dinâmicos autônomos do ponto de vista topológico e dinâmico. Algumas técnicas tradicionais para estimar a área de atração também são discutidas. Após esta revisão, generaliza-se o conceito de função energia e explora-se a relação entre estas funções e a área de atração. A generalização proposta neste trabalho acomoda a existência de conjuntos limites complexos na fronteira da área de atração. Esta generalização explora propriedades de invariância da fronteira da área de atração e a extensão do princípio de invariância de LaSalle [34].

Mostra-se que toda solução na fronteira da área de atração se aproxima de um conjunto limite quando o tempo tende ao infinito. Estes conjuntos limites ou pertencem ao conjunto onde a derivada da função energia generalizada é nula ou interceptam conjuntos limitados onde a derivada da função energia é positiva. A nova definição, apesar de poder lidar com conjuntos limites complexos na fronteira da área de atração, exige, por sua vez, cálculos numéricos muito mais complicados que o caso convencional, onde os conjuntos limites na fronteira são constituídos apenas por pontos de equilíbrio.

Além desta generalização do conceito de energia, estuda-se a caracterização da área de atração de sistemas com múltiplas escalas de tempo. Embora a caracterização de sistemas autônomos gerais seja válida para os sistemas com múltiplas escalas de tempo, estimativas muito conservadoras são usualmente obtidas quando as diferentes escalas não são levadas em consideração. Além disto, as diferentes escalas de tempo podem dificultar, do ponto de vista numérico, o cálculo dos pon-

tos de equilíbrio instáveis na fronteira da área de atração[30]. Alguns resultados parciais são apresentados no sentido de justificar a decomposição dos métodos computacionais de análise de estabilidade e estimativa da área de atração, tais como o PEBS e o BCU [11] propostos na literatura de sistemas elétricos de potência, em duas etapas: uma de dinâmicas rápidas e outra de dinâmicas lentas. Com esta decomposição espera-se obter métodos computacionais de análise de estabilidade e estimativa da área de atração de sistemas singularmente perturbados mais rápidos e robustos assim como obter estimativas menos conservadoras da área de atração.





# Capítulo 2

## Sistemas Dinâmicos Autônomos Não Lineares

### 2.1 Sistemas Dinâmicos Autônomos

Considere o sistema dinâmico autônomo não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema. Admite-se que o campo vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ , condição esta suficiente para garantir a existência e unicidade das soluções de (2.1) (ver [3] para maiores detalhes). Em outras palavras, para cada condição inicial  $x_o$ , existe um intervalo maximal de existência  $I := (\omega_-, \omega_+) \subset \mathbb{R}$ , contendo a origem, e uma única função continuamente diferenciável  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é solução da equação diferencial (2.1) e satisfaz a condição inicial  $x(0) = x_o$ . A teoria de existência das soluções de (2.1) está fora do escopo deste texto, entretanto, o seguinte resultado é uma consequência desta teoria da qual faremos uso freqüente.

**Teorema 2.1.1** *Seja  $x(t)$  uma solução de (2.1) e seja  $[0, \omega_+)$  o intervalo maximal (à direita) de existência desta solução. Se existir conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $x(t) \in K$  para todo  $t \in [0, \omega_+)$ , então  $\omega_+ = \infty$ , ou seja, a solução  $x(t)$  existe e está bem definida para todo tempo  $t \geq 0$ .*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [36]. Como consequência deste resultado, temos que ou as soluções estão definidas para todo tempo ou "explodem" em tempo finito. É óbvio esperar que as soluções das equações diferenciais que representam sistemas físicos estejam definidas para todo o tempo. Entretanto, deve-se lembrar que as equações diferenciais são apenas modelos que procuram imitar o comportamento dos sistemas dinâmicos reais. Sendo assim, algum cuidado deve ser tomado com o intervalo maximal de existência das soluções do modelo.

As soluções de sistemas autônomos têm propriedades especiais. Se a função  $x(t)$  é uma solução de (2.1), então a função  $x(t + \tau)$  também é solução de (2.1), ou seja, translações no tempo de soluções também são soluções.

A teoria de existência garante que as soluções de (2.1) variam continuamente com a condição inicial  $x_o$ . Para expressar a continuidade das soluções de (2.1) com relação às condições iniciais, denota-se por  $\varphi(t, x_o)$  a solução de (2.1) iniciando em  $x_o$  no tempo  $t = 0$ . A aplicação  $\varphi(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é denominada fluxo do sistema dinâmico (2.1) e possui as seguintes propriedades:

- $\varphi(0, x_o) = x_o$
- $\varphi(t, \varphi(\tau, x_o)) = \varphi(t + \tau, x_o)$

A aplicação  $t \rightarrow \varphi(t, x_o)$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$  define uma curva no espaço  $\mathbb{R}^n$ , passando por  $x_o$ , a qual denomina-se trajetória de (2.1) passando por  $x_o$  e que denotaremos por  $\varphi_t(x_o)$ , ou seja,  $\varphi_t(x_o) := \{\varphi(t, x_o) \in \mathbb{R}^n : t \in (\omega_-, \omega_+)\}$ . A unicidade das soluções garante que trajetórias não se interceptam.

Em alguns casos, estaremos interessados não apenas na trajetória de um único ponto  $x_o$  mas na trajetória de um conjunto de condições iniciais. Neste caso, se  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\varphi(t, A)$  denota o conjunto  $\{\varphi(t, x) \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$ . Se  $I$  é um intervalo da reta,  $\varphi(I, x_o)$  denota o conjunto  $\{\varphi(t, x_o) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ .

## 2.2 Conjuntos Invariantes

O conceito de invariância é fundamental na análise de sistemas dinâmicos.

**Definição 2.2.1** *Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é invariante com relação ao sistema autônomo (2.1) se, para todo  $x_o \in A$ , a solução  $\varphi(t, x_o) \in A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Cada trajetória  $\varphi_t(x_o)$  constitui um conjunto invariante. A união de conjuntos invariantes é naturalmente invariante.

Na literatura, é muito comum o uso da expressão invariante com o significado daquilo que definiremos neste texto como positivamente invariante. Neste texto, os significados destas expressões são distintos e relevantes para o entendimento da teoria que se apresenta.

**Definição 2.2.2** *Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é positivamente (negativamente) invariante com relação ao sistema autônomo (2.1) se, para todo  $x_o \in A$ , a solução  $\varphi(t, x_o) \in A$  para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ).*

Em palavras, se uma solução entra em um conjunto positivamente invariante, ela permanece dentro deste conjunto para todo tempo futuro. Conjuntos positivamente invariantes serão muito úteis, como veremos adiante, para a obtenção de estimativas da área de atração.

Neste texto, a seguinte noção mais geral de invariância será utilizada:

**Definição 2.2.3** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto positivamente (negativamente) invariante de  $B \subset \mathbb{R}^n$  com relação ao sistema dinâmico (2.1) se, para todo  $x_0 \in B$ , a solução  $\varphi(t, x_0) \in A$  para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ).

## 2.3 Comportamento Assintótico

No estudo de sistemas dinâmicos estamos frequentemente interessados no comportamento assintótico dos mesmos quando o tempo vai para infinito. Matematicamente, essa informação sobre a tendência das soluções quando o tempo vai para o infinito é dada pelos conjuntos limites.

**Definição 2.3.1** Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto  $\omega$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$  de (2.1) se existir uma sequência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow +\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$ , tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . O conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite de  $\varphi(t, x_0)$  é chamado conjunto  $\omega$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$ , ou simplesmente  $\omega$ -limite de  $x_0$ , e é denotado por  $\omega(x_0)$ .

Se o interesse for conhecer de "onde vem a solução", ou seja, o comportamento assintótico das soluções quando  $t \rightarrow -\infty$ , os conjuntos  $\alpha$ -limite devem ser considerados.

**Definição 2.3.2** Um ponto  $p$  é um ponto  $\alpha$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$  de (2.1) se existir uma sequência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow -\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$ , tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . O conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limite de  $\varphi(t, x_0)$  é chamado conjunto  $\alpha$ -limite de  $\varphi(t, x_0)$ , ou simplesmente, conjunto  $\alpha$ -limite de  $x_0$ , e é denotado por  $\alpha(x_0)$ .

O próximo teorema mostra uma maneira alternativa para definir o conjunto  $\omega$ -limite.

**Teorema 2.3.3**  $\omega(x_0) = \bigcap_{0 < \tau < \infty} \overline{\varphi([\tau, \infty), x_0)}$

**Demonstração:** Suponha que  $p \in \omega(x_0)$ , então, pela definição 2.3.1, existe uma sequência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Logo, para qualquer  $\tau \in [0, \infty)$ , existe um número inteiro  $N > 0$  tal que  $t_j \in [\tau, \infty)$  para todo  $j \geq N$ . Assim,  $\varphi(t_j, x_0) \in \varphi([\tau, \infty), x_0)$  para todo  $j \geq N$ . Portanto,  $p \in \overline{\varphi([\tau, \infty), x_0)}$ . Como  $\tau$  pode ser escolhido arbitrariamente grande, tem-se que  $p \in \bigcap_{0 < \tau < \infty} \overline{\varphi([\tau, \infty), x_0)}$ . Suponha agora que  $p \in \bigcap_{0 < \tau < \infty} \overline{\varphi([\tau, \infty), x_0)}$ . Então, dado  $\tau > 0$  arbitrário,  $p \in \overline{\varphi([\tau, \infty), x_0)}$ . Em particular, dado uma sequência  $\{\tau_j\}$ , com  $\tau_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$ , existe  $t_j \in [\tau_j, \infty)$  tal que  $\|\varphi(t_j, x_0) - p\| \leq \frac{1}{j}$ . Obviamente,  $t_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  e, por construção,  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Portanto  $p \in \omega(x_0)$ .  $\square$

Conjuntos limites podem ser bastante complexos. Usualmente são constituídos por equilíbrios, ciclos limites, órbitas quasi-periódicas, órbitas caóticas ou pela união de um certo conjunto de órbitas. Os teoremas a seguir estabelecem algumas propriedades destes conjuntos.

**Teorema 2.3.4** *O conjunto  $\omega$ -limite de uma solução  $\varphi(t, x_0)$  do sistema autônomo (2.1) é fechado e invariante.*

**Demonstração:** Como a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado, obtém-se trivialmente do Teorema 2.3.3 que  $\omega(x_0)$  é um conjunto fechado. Para provar que  $\omega(x_0)$  é um conjunto invariante, seja  $p \in \omega(x_0)$ . Então, de acordo com a definição 2.3.1, existe uma seqüência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Seja  $\varphi(t, p)$  a solução de (2.1) passando por  $p$ . Vamos mostrar que  $\varphi(t, p) \in \omega(x_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $\tau$  um número real arbitrário. Da continuidade das soluções de (2.1) com relação às condições iniciais, tem-se que dado  $\varepsilon > 0$ , arbitrariamente pequeno, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|q - p\| < \delta$  implica em  $\|\varphi(\tau, q) - \varphi(\tau, p)\| < \varepsilon$ . Se escolhermos  $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$  onde  $m = 1, 2, \dots$ , então, para cada inteiro  $m$ , existe número real  $\delta_m > 0$  e um inteiro  $M > 0$  (dependendo de  $m$ ) tal que  $\|\varphi(t_M, x_0) - p\| < \delta_m$  e portanto  $\|\varphi(\tau, \varphi(t_M, x_0)) - \varphi(\tau, p)\| < \frac{1}{m}$ . Pode-se, sem perda de generalidade, escolher a seqüência  $\{t_M\}$  estritamente crescente com  $t_M \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Logo, tem-se que  $\varphi(\tau, \varphi(t_M, x_0)) = \varphi(\tau + t_M, x_0) \rightarrow \varphi(\tau, p)$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Portanto,  $\varphi(\tau, p) \in \omega(x_0)$ . A arbitrariedade da escolha de  $x_0$  completa a demonstração mostrando que, para qualquer  $p \in \omega(x_0)$ ,  $\varphi(\tau, p) \in \omega(x_0)$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Se for possível verificar a priori que a solução  $\varphi(t, x_0)$  de (2.1) é limitada, ou seja, existe um número real positivo  $M < \infty$  tal que  $\sup_{t \geq 0} \|\varphi(t, x_0)\| \leq M$ , então pode-se demonstrar que o conjunto  $\omega$ -limite possui algumas propriedades adicionais.

Lembrando-se que a distância entre um ponto  $p$  e um conjunto  $A$  pode ser definida a partir da distância usual entre pontos, isto é,  $d(p, A) = \inf_{x \in A} \|p - x\|$ , tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.5** *Se a solução  $\varphi(t, x_0)$  de (2.1) é limitada, então o conjunto  $\omega$ -limite é não-vazio, conexo, fechado, limitado e invariante. Além disso,  $d(\varphi(t, x_0), \omega(x_0)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Demonstração:**<sup>1</sup> Já provamos no teorema 2.3.4 que o conjunto  $\omega(x_0)$  é fechado e invariante. O conjunto  $\omega(x_0)$  é não vazio, pois toda seqüência em um conjunto compacto possui subsequência convergente. A limitação da solução garante naturalmente a limitação do conjunto limite.

---

<sup>1</sup>A demonstração da conexidade apresentada nesta tese é uma adaptação da demonstração sugerida pelo Prof. Adalberto P. Bergamasco para sistemas autônomos discretos. A versão desta demonstração para sistemas discretos pode ser encontrada na dissertação de mestrado [5].

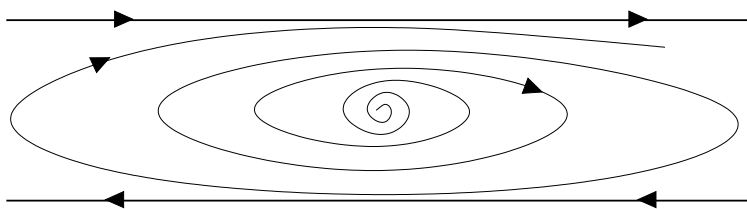


Figura 2.1: Exemplo de uma solução (ilimitada) com conjunto  $\omega$ -limite não conexo. Observe que a distância da solução ao conjunto limite não tende a zero quando o tempo  $t$  tende ao infinito.

Vamos provar que  $d(\varphi(t, x_o), \omega(x_o)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para isto, suponha, por contradição, que  $\varphi(t, x_o)$  não se aproxima de  $\omega(x_o)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Então, dada uma seqüência de tempos  $\{T_n\}$  arbitrária, com  $T_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , existe  $\varepsilon > 0$  e  $t_n > T_n$  tal que  $d(\varphi(t_n, x_o), \omega(x_o)) > \varepsilon$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Como  $\varphi(t_n, x_o)$  é uma seqüência limitada em  $\mathbb{R}^n$ , então possui subseqüência convergente, ou seja, existe  $p \in \mathbb{R}^n$  e subseqüência  $\{t_{n_j}\}$  de  $\{t_n\}$  tal que  $\varphi(t_{n_j}, x_o) \rightarrow p$  quando  $n_j \rightarrow \infty$ . Mas por definição,  $p \in \omega(x_o)$ , portanto chegamos a uma contradição provando o desejado.

Resta-nos provar que o conjunto  $\omega(x_o)$  é conexo. Suponha que  $\omega(x_o)$  é não conexo, ou seja, ele pode ser escrito como sendo a união de dois conjuntos disjuntos, fechados, limitados e não-vazios. Sejam  $A_1$  e  $A_2$  estes conjuntos. Como eles são disjuntos, existem dois conjuntos abertos e disjuntos  $U_1$  e  $U_2$  tal que  $A_1 \subset U_1$  e  $A_2 \subset U_2$ . Como  $d(\varphi(t, x_o), \omega(x_o)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então existe  $T > 0$  tal que  $\varphi(t, x_o) \in U_1 \cup U_2$  para todo  $t > T$ . Como a aplicação  $t \rightarrow \varphi(t, x_o)$  é contínua e  $U_1$  e  $U_2$  são disjuntos, conclui-se que  $\varphi(t, x_o)$  pertence apenas a um dos abertos para todo  $t > T$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\varphi(t, x_o) \in U_1$  para todo  $t > T$ . Então, necessariamente  $A_2$  é um conjunto vazio. Isto nos leva a uma contradição e portanto o conjunto  $\omega$ -limite é conexo.  $\square$

A limitação da solução é um pré-requisito fundamental para demonstrar o resultado anterior. A Figura 2.1 mostra um exemplo de uma solução não limitada que possui um conjunto  $\omega$ -limite não conexo. Mais precisamente, o conjunto  $\omega$ -limite é constituído pela união de duas retas disjuntas. O conjunto  $\omega$ -limite é não limitado e ainda, dado  $T > 0$  arbitrariamente grande e  $\varepsilon > 0$ , existe  $t > T$  tal que  $d(\varphi(t, x_o), \omega(x_o)) > \varepsilon$ , ou seja, a solução não se aproxima do conjunto limite quando o tempo tende ao infinito.

## 2.4 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade Local

Na análise de sistemas dinâmicos, a estabilidade é o estudo do comportamento dinâmico local de (2.1) nas vizinhanças de uma certa solução de interesse. Existem diversas definições de estabilidade na literatura, utilizaremos neste texto a definição

de estabilidade segundo Lyapunov (ou no sentido de Lyapunov).

**Definição 2.4.1** *Seja  $\phi(t)$  a solução de (2.1) passando por  $\phi_0$  no tempo  $t = 0$ . Suponha que esta solução esteja definida para todo  $t \geq 0$ . A solução  $\phi(t)$  é estável no sentido de Lyapunov, ou simplesmente estável, se, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno, existir um  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que, para toda condição inicial  $x_0$  satisfazendo  $\|x_0 - \phi_0\| < \delta$ , a solução passando por  $x_0$ ,  $\varphi(t, x_0)$ , está definida para todo  $t \geq 0$  e satisfaz  $\|\varphi(t, x_0) - \phi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .*

A definição 2.4.1 está de acordo com o conceito intuitivo de estabilidade, pois estabelece que uma solução é estável se qualquer solução iniciando suficientemente próxima dela, permanece arbitrariamente próxima no futuro.

A estabilidade, segundo a definição 2.4.1, não é uma propriedade do sistema mas sim de uma certa solução de um sistema dinâmico. Ela é também um conceito local na medida em que escolhe-se  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno, ou seja, a propriedade de estabilidade de uma solução é definida pelo comportamento local do campo vetorial. Além disso, a estabilidade é uma propriedade que independe da norma escolhida, visto que no  $\mathbb{R}^n$  todas as normas são equivalentes [29].

Embora tenhamos definido estabilidade de uma solução arbitrária  $\phi(t)$ , muitos autores preferem estudar a estabilidade da solução nula. Não há perda de generalidade em se analisar a estabilidade da solução nula, pois, uma solução arbitrária  $\phi(t)$  pode ser transformada na solução nula de um novo sistema equivalente por meio de uma mudança de variáveis. Seja  $z(t)$  uma nova variável definida por:

$$z(t) := x(t) - \phi(t) \tag{2.2}$$

Derivando a equação anterior obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t))$$

onde  $g(t, z(t)) := f(t, z(t) + \phi(t)) - f(t, \phi(t))$ . A origem é um ponto de equilíbrio deste novo sistema e estudar a estabilidade da origem no sistema resultante é equivalente a estudar a estabilidade de  $\phi(t)$  no problema original. Entretanto, com este procedimento obtém-se um campo vetorial  $g$  variante no tempo e portanto, o sistema resultante é não-autônomo.

Um tipo muito especial e importante de soluções do sistema (2.1) que estaremos particularmente interessados em estudar a estabilidade são os pontos de equilíbrio os quais, usualmente, estão associados a pontos de operação de sistemas físicos. Os pontos de equilíbrio também serão muito importantes na caracterização da fronteira da área de atração.

**Definição 2.4.2** *Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (2.1) se  $f(p) = 0$ .*

Denotaremos o conjunto de todos os pontos de equilíbrio do sistema (2.1) por  $E$ , ou seja,

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

Se  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (2.1), então a solução de (2.1) iniciando em  $p$  no tempo  $t = 0$  é a função constante  $\varphi(t, p) \equiv p$ . Obviamente, o ponto de equilíbrio é um conjunto invariante de (2.1).

Determinar os pontos de equilíbrio é usualmente o primeiro passo para analisar o comportamento dinâmico de um sistema não-linear. Sistemas dinâmicos não-lineares podem ter múltiplos (e até infinitos) pontos de equilíbrio. Do ponto de vista numérico, o cálculo dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear pode ser complexo. Usualmente, algum método numérico, tal como o método de Newton-Raphson, é empregado para o cálculo das raízes da equação  $f(x) = 0$ . Entretanto, dificilmente se conhece a priori o número de pontos de equilíbrio de um sistema. Além disto, o desconhecimento de uma boa estimativa inicial do equilíbrio pode dificultar a convergência do cálculo numérico. Estes problemas ficam especialmente mais evidentes quando a dimensão do problema é elevada.

A seguir vamos explorar um pouco mais o campo vetorial e analisar o comportamento local do sistema dinâmico (2.1) nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio. Neste sentido, o conceito de estabilidade e atratividade são fundamentais. A seguir apresenta-se uma versão da definição 2.4.1 especializada para pontos de equilíbrio.

**Definição 2.4.3** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) é estável se, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno, existir um  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que, para toda condição inicial  $x_0$  satisfazendo  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ ,  $\|\varphi(t, x_0) - x^*\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Observação 2.4.4** *No caso particular de pontos de equilíbrio, também não há perda de generalidade em se estudar a estabilidade da solução nula. Entretanto, neste caso, a mudança de variáveis (2.2) não é variante no tempo e o sistema resultante equivalente também será autônomo. Não utilizaremos este procedimento neste texto na medida em que estaremos interessados, nos próximos capítulos, não apenas no comportamento local dos equilíbrios mas sim no comportamento dinâmico global do sistema onde a relação entre diversos equilíbrios de um mesmo sistema será estudada.*

**Definição 2.4.5** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  do sistema dinâmico autônomo (2.1) é instável se ele não é estável.*

Uma outra propriedade interessante dos pontos de equilíbrio é a atratividade.

**Definição 2.4.6** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é atrativo se existir um número real  $\eta > 0$  tal que, para toda condição inicial  $x_0$  satisfazendo  $\|x_0 - x^*\| < \eta$ ,  $\varphi(t, x_0) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

É evidente das definições anteriores que estabilidade não implica em atratividade. A atratividade, por sua vez, não implica em estabilidade (vide exemplo devido a Vinograd [20]).

Combinando as propriedades de estabilidade e atratividade define-se o conceito de estabilidade assintótica.

**Definição 2.4.7** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é assintoticamente estável se for estável e atrativo.*

Em algumas situações deseja-se que não apenas o ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável mas que todas as soluções tendam para este equilíbrio quando o tempo tende ao infinito. Para isto define-se o conceito de estabilidade global assintótica.

**Definição 2.4.8** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) é globalmente assintoticamente estável se ele é estável e para todo  $x_o \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(t, x_o) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Em sistemas não-lineares, raramente um ponto de equilíbrio é globalmente estável. Se o sistema (2.1) possui um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, então este ponto de equilíbrio é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.1). Neste texto estaremos particularmente interessados em pontos de equilíbrio ou atratores que não são globalmente assintoticamente estáveis.

## 2.5 Conjuntos Atratores

Em sistemas não lineares, nem sempre deseja-se estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. Podemos generalizar as definições da seção anterior para conjuntos e introduzir o conceito de atrator. Como os conjuntos limites são fechados, nos restringiremos ao estudo de estabilidade de conjuntos fechados e invariantes.

**Definição 2.5.1** *Um conjunto  $H$ , fechado e invariante com relação ao sistema (2.1), é estável se, dada uma vizinhança  $U$  de  $H$  (conjunto aberto contendo o fecho<sup>2</sup> de  $H$ ), arbitrariamente pequena, existir uma vizinhança  $V$  de  $H$  tal que  $U$  é um conjunto positivamente invariante de  $V$ , ou seja, para todo  $x_0 \in V$ , a solução  $\varphi(t, x_0) \in U$  de (2.1) para todo  $t \geq 0$ .*

**Definição 2.5.2** *Um conjunto  $H$ , fechado e invariante com relação ao sistema (2.1), é um conjunto atrativo se existir uma vizinhança  $U$  de  $H$  tal que, para toda condição inicial  $x_o \in U$ ,  $d(\varphi(t, x_o), H) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

---

<sup>2</sup>Um ponto  $p$  pertence ao fecho ou aderência de  $A$  se para todo  $r > 0$  arbitrariamente pequeno  $B_r(p) \cap A \neq \emptyset$ , onde  $B_r(p)$  é a bola aberta centrada em  $p$  e raio  $r$ .



**Definição 2.5.3** *Um conjunto  $H$ , fechado e invariante, é um conjunto atrator de (2.1) se  $H$  for estável e atrativo.*

**Observação 2.5.4** *Neste texto utiliza-se uma definição mais fraca de atrator do que aquela que é usualmente apresentada na literatura de sistemas dinâmicos. Em geral exige-se que o atrator, além de ser um conjunto atrativo, seja também topologicamente transitivo. Veja [43], pag.45, para maiores informações.*

## 2.6 Hiperbolicidade e Variedades Invariantes

Nas seções anteriores definiu-se o conceito de estabilidade de atratores e em particular de pontos de equilíbrio. Para demonstrar que um certo ponto de equilíbrio é estável, precisamos de ferramentas de análise que sejam capazes de descrever, ainda que qualitativamente, o comportamento dinâmico local, nas vizinhanças do equilíbrio, do sistema dinâmico em estudo.

Para os sistemas lineares invariantes no tempo, o cálculo dos autovalores e autovetores fornece informação completa do comportamento dinâmico do sistema. Veremos a seguir, sob algumas condições, que localmente, nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, o sistema não-linear comporta-se, do ponto de vista qualitativo, da mesma maneira que o sistema linearizado associado. Portanto, do ponto de vista local, a análise do comportamento dinâmico de um certo sistema dinâmico não linear resume-se, sob certas condições, à auto-análise do sistema linearizado associado.

Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico não-linear (2.1), ou seja,  $f(x^*) = 0$ , e considere o sistema linearizado (em torno de  $x^*$ ) associado:

$$\dot{\psi} = J(x^*)\psi \tag{2.3}$$

onde  $\psi := x - x^*$  e  $J(x^*)$  é a matriz Jacobiana de  $f(x)$  calculada no ponto de equilíbrio  $x^*$ . Denotaremos o espectro do operador  $J$ , ou seja, o conjunto dos autovalores de  $J$ , por  $\sigma(J)$ .

**Definição 2.6.1** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  do sistema dinâmico (2.1) é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real não nula.*

Como conseqüência direta do Teorema da Função Inversa, tem-se que pontos de equilíbrio hiperbólicos são necessariamente pontos de equilíbrio isolados, isto é, existe uma vizinhança do equilíbrio (um conjunto aberto contendo o ponto de equilíbrio) que não contém outro ponto de equilíbrio.

**Definição 2.6.2** *Um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x^*$  do sistema dinâmico (2.1) é do tipo  $k$  se  $k$  autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real positiva e  $n - k$  autovalores possuem parte real negativa.*

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $J$ . Denota-se por  $\mathcal{M}_\lambda(J)$  o autoespaço generalizado de  $J$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Se a origem do sistema linearizado (2.3) é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $k$ , podemos então decompor o espaço  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_+^n \oplus \mathbb{R}_-^n$  onde

$$\mathbb{R}_+^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(J) \\ \operatorname{Re}(\lambda) > 0}} \mathcal{M}_\lambda(J) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_-^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(J) \\ \operatorname{Re}(\lambda) < 0}} \mathcal{M}_\lambda(J)$$

Os espaços  $\mathbb{R}_+^n$  e  $\mathbb{R}_-^n$  possuem respectivamente dimensão  $k$  e  $n-k$  e são invariantes com relação ao sistema linear (2.3). Esta decomposição dá origem a uma dicotomia exponencial [15], isto é, se  $\Pi_+$  e  $\Pi_-$  são projeções definidas a partir da decomposição anterior, então existem constantes positivas  $\alpha$  e  $K$  tal que:

$$\begin{aligned} \|e^{Jt}\Pi_+x_o\| &\leq ke^{\alpha t} \quad \text{para } t \leq 0 \\ \|e^{Jt}\Pi_-x_o\| &\leq ke^{-\alpha t} \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

A primeira desigualdade expressa a propriedade de estabilidade assintótica na variedade instável enquanto que a segunda expressa a propriedade de estabilidade assintótica na variedade estável, ou seja, soluções iniciando em  $\mathbb{R}_-^n$  são limitadas para  $t \geq 0$  e tendem ao ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$  ao passo que soluções iniciando em  $\mathbb{R}_+^n$  são limitadas para  $t \leq 0$  e tendem para o ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow -\infty$ .

O comportamento do sistema dinâmico não linear (2.1) nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio hiperbólico é equivalente ao comportamento do sistema dinâmico linearizado associado. O Teorema de Hartman & Grobman estabelece que nas vizinhanças de pontos de equilíbrio hiperbólicos, existe um homeomorfismo  $h$  que conjuga os campos vetoriais, isto é,  $h \circ J = f \circ h$ , ou seja, existe, localmente, uma correspondência contínua e biunívoca entre as trajetórias do sistema linearizado e do não linear. Esta correspondência é estabelecida pelo homeomorfismo  $h$  e preserva o sentido de direção de crescimento do tempo. A demonstração deste teorema não está no escopo deste texto. Uma versão elegante desta demonstração pode ser encontrada em [33].

O Teorema de Hartman & Grobman portanto nos fornece uma primeira técnica para estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear. Isto é, um ponto de equilíbrio hiperbólico é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real negativa.

A dicotomia do sistema linearizado associado também é herdada pelo sistema não-linear nas vizinhanças de um equilíbrio hiperbólico  $x^*$ . Isto é, existem variedades locais  $W_{loc}^s$  e  $W_{loc}^u$  tal que soluções iniciando em  $W_{loc}^s$  tendem para  $x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$  e soluções iniciando em  $W_{loc}^u$  tendem para  $x^*$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Definição 2.6.3** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $k$  do sistema dinâmico (2.1). A variedade estável do equilíbrio  $x^*$  é o conjunto*

$$W^s(x^*) := \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow x^* \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

*e a variedade instável de  $x^*$  é o conjunto*

$$W^u(x^*) := \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow x^* \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

O Teorema da Variedade Estável [31] garante que  $W^s(x^*)$  é uma variedade suave de dimensão  $n - k$  tangente a  $\mathbb{R}_-^n$  no ponto  $x^*$ .

**Teorema 2.6.4** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema dinâmico (2.1). Os conjuntos  $W^s(x^*)$  e  $W^u(x^*)$  são invariantes com relação a (2.1).*

**Demonstração:** Seja  $x_o \in W^s(x^*)$ , ou seja,  $\varphi(t, x_o) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $p := \varphi(s, x_o)$  para algum  $s \in \mathbb{R}$  arbitrário. Então, das propriedades de fluxo, tem-se que  $\varphi(t, p) = \varphi(t, \varphi(s, x_o)) = \varphi(t + s, x_o)$ . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t + s, x_o) = x^*.$$

e  $p \in W^s(x^*)$ . A arbitrariedade da escolha de  $s$  e  $x_o \in W^s(x^*)$  garante que  $W^s(x^*)$  é invariante com relação ao sistema dinâmico (2.1). Argumentação similar demonstra que  $W^u(x^*)$  também é um conjunto invariante.  $\square$

O conceito de variedades estáveis e instáveis pode ser generalizado para conjuntos fechados e invariantes. No capítulo 3 este conceito será generalizado para órbitas fechadas. A generalização para conjuntos compactos e invariantes gerais pode ser encontrada em [43] e [21].

## 2.7 Resultados de Lyapunov

Na seção anterior, utilizou-se o sistema linearizado associado para estudar-se a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear. Nesta seção, apresenta-se uma abordagem completamente distinta, devido a Lyapunov, para a análise de estabilidade. Lyapunov generalizou o conceito de energia da mecânica apresentando uma maneira de concluir sobre a estabilidade de um certo ponto de equilíbrio via funções escalares auxiliares. O uso de funções escalares auxiliares será amplamente discutido nesta tese. Com os resultados de Lyapunov inicia-se esta discussão.

Os resultados de Lyapunov são métodos diretos de análise de estabilidade, ou seja, não é necessário conhecer as soluções da equação diferencial para concluir sobre a estabilidade.

Antes de apresentar os resultados de Lyapunov, algumas definições são necessárias.

**Definição 2.7.1** Uma função escalar contínua  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(0) = 0$ , é localmente definida positiva (localmente semi-definida positiva) se existir uma constante real  $r > 0$  tal que  $w(x) > 0$  ( $w(x) \geq 0$ ) para qualquer  $x \in B_r - \{0\}$  onde  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$  é uma bola de raio  $r$  centrada na origem.

**Definição 2.7.2** Uma função escalar contínua  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(0) = 0$ , é definida positiva (semi-definida positiva) se  $w(x) > 0$  ( $w(x) \geq 0$ ), para todo  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ;

**Definição 2.7.3** Uma função escalar contínua  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita localmente definida negativa, localmente semi-definida negativa, definida negativa ou semi-definida negativa se  $-w(\cdot)$  é localmente definida positiva, localmente semi-definida positiva, definida positiva ou semi-definida positiva, respectivamente.

**Definição 2.7.4** Uma função escalar contínua  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é radialmente ilimitada se  $w(x) \rightarrow +\infty$  quando  $\|x\| \rightarrow +\infty$ , uniformemente em  $x$ . Ou seja, dado  $R > 0$ , arbitrariamente grande, existe  $r > 0$  tal que  $\|x\| > r$  implica em  $w(x) > R$ .

O próximo teorema, devido a Lyapunov, fornece condições suficientes para garantir a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

**Teorema 2.7.5 (Teorema de Lyapunov)** Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $\mathcal{C}^1$ . Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema autônomo (2.1). Suponha ainda que  $V(\cdot)$  seja localmente definida positiva.

- (i) Se  $\dot{V}(\cdot)$  é localmente semi-definida negativa, então a origem é um ponto de equilíbrio estável;
- (ii) Se  $\dot{V}(\cdot)$  é localmente definida negativa, então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

O Teorema de Lyapunov fornece condições apenas suficientes para garantir a estabilidade da origem. Além de não fornecer nenhuma informação à respeito da área de atração, também não é dado nenhum indicativo de como obter a Função de Lyapunov,  $V(\cdot)$ . Em geral, utiliza-se como uma primeira candidata à Função de Lyapunov formas quadráticas ou, quando disponível, a função energia do sistema.

No teorema 2.7.5,  $\dot{V}(\cdot)$  indica a taxa de variação de  $V(\cdot)$  calculada ao longo das trajetórias do sistema. Porém, essa taxa de variação pode ser obtida pela regra da cadeia, sem o conhecimento explícito das trajetórias, isto é:

$$\dot{V}(x(t)) := \frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = \text{grad}V(x(t)) \cdot f(x(t)) \quad (2.4)$$

Se a Função de Lyapunov é localmente definida positiva, então a origem é um ponto de mínimo local da mesma. Uma vez que  $V(\cdot)$  não pode crescer com o passar

do tempo, pois  $\dot{V}(\cdot) \leq 0$ , então trajetórias iniciando suficientemente próximas da origem não podem se afastar indefinidamente da mesma.

**Demonstração do Teorema 2.7.5:** Para provar o item (i) temos que mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, existe  $\delta > 0$  tal que trajetórias iniciando na bola  $B_\delta$  de raio  $\delta$  centrada na origem não abandonam a bola  $B_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$ . Sabemos que a função  $V$  é localmente definida positiva, logo existe um número  $r > 0$  tal que  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0$  para todo  $x \in B_r - \{0\}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, seja  $\rho = \min\{r, \varepsilon\}$ . Escolha  $L > 0$  tal que  $L < \min_{\|x\|=\rho} V(x)$  e seja  $\Omega_L$  a componente conexa do conjunto de nível  $\{x \in B_r : V(x) < L\}$  contendo a origem. Por construção,  $\Omega_L \subset B_\rho \subset B_\varepsilon$ . Como  $V$  é uma função contínua e  $V(0) = 0$ , pode-se escolher um número  $\delta > 0$  tal que  $l := \max_{\|x\|=\delta} V(x) < L$ . Seja  $\Omega_l$  a componente conexa do conjunto de nível  $\{x \in B_r : V(x) < l\}$  contendo a origem. Por construção,  $B_\delta \subset \Omega_l \subset \Omega_L \subset B_\varepsilon$ . Usando o fato de que  $\dot{V}$  é localmente semi-definida negativa, vamos mostrar que  $B_\varepsilon$  é um conjunto positivamente invariante de  $B_\delta$ , ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio estável. Para isto, tome  $x_o \in B_\delta$ , então  $x_o \in \Omega_l$  e  $V(x_o) \leq l$ . Seja  $\varphi(t, x_o)$  a solução do sistema (2.1) passando por  $x_o$ . Vamos mostrar que esta solução não abandona a bola  $B_\rho$ . Suponha por contradição que para algum tempo  $t^* > 0$  a solução atinja, pela primeira vez, a fronteira da bola de raio  $\rho$ . Logo,  $V(t^*) = V(\varphi(t^*, x_o)) > L > l \geq V(x_o)$ . Então, para algum tempo no intervalo  $(0, t^*)$  a derivada  $\dot{V} > 0$ . Isto nos leva a uma contradição pois  $\dot{V}$  é uma função localmente semi-definida negativa. Portanto, soluções iniciando na bola de raio  $\delta$  não abandonam a bola de raio  $\rho$ . Logo a solução  $\varphi(t, x_o)$  é limitada e está definida para todo  $t \geq 0$ . Além disto,  $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o) \leq l < L$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto,  $\varphi(t, x_o) \in B_\varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Com isto provamos que a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Já provamos no item (i) que a origem é estável. Para provar o item (ii) precisamos mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio atrativo, ou seja, existe constante  $\eta > 0$  tal que soluções iniciando na bola  $B_\eta$  de raio  $\eta$  tendem para a origem quando o tempo tende ao infinito. Seja  $\eta > 0$  um número arbitrariamente pequeno e seja  $x_o \in B_\eta$ . Já mostramos no item (i) que para  $\eta$  suficientemente pequeno, as soluções iniciando em  $B_\eta$  estão bem definidas e são limitadas para  $t \geq 0$ . Logo o conjunto  $\omega(x_o)$  é não vazio. A continuidade da função  $V$  e a limitação da solução garantem que  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitada para  $t \geq 0$ . Como  $\dot{V} \leq 0$ , a função  $V$  é não crescente para todo  $t \geq 0$ . Portanto, existe um número real  $\alpha$  tal que  $V(t) \rightarrow \alpha$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $p \in \omega(x_o)$ , então existe uma seqüência de tempos  $\{t_j\}$  com  $t_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi(t_j, x_o) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Portanto, da continuidade de  $V$  tem-se que  $V(p) = \alpha$  para qualquer ponto  $p \in \omega(x_o)$ . A invariância de  $\omega(x_o)$  garante portanto que  $\dot{V}(p) = 0$  para qualquer  $p \in \omega(x_o)$ . Como  $\dot{V}$  é localmente definida negativa,  $\dot{V}(p) = 0$  se e somente se  $p = 0$ . Logo  $\omega(x_o) = \{0\}$  e do Teorema 2.3.5 tem-se que  $\|\varphi(t, x_o)\| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  provando que a origem é um equilíbrio atrativo.  $\square$

## 2.8 Transversalidade

O conceito de transversalidade será fundamental para as caracterizações da área de atração que serão discutidos nos próximos capítulos.

**Definição 2.8.1** *Duas variedades  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{R}^n$  satisfazem a condição de transversalidade se*

- (i) *a interseção é vazia ou*
- (ii) *em cada ponto de interseção  $x \in A \cap B$ , os espaços tangentes de  $A$  e de  $B$  no ponto  $x$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $T_x(A) + T_x(B) = \mathbb{R}^n$  para todo  $x \in A \cap B$ .*

Interseções transversais são robustas a perturbações do campo vetorial, ou seja, a condição de transversalidade persiste a perturbações do campo. Este conceito é fundamental para o estudo de questões relacionadas a estabilidade estrutural.

O seguinte resultado será útil na caracterização da fronteira da área de atração.

**Lema 2.8.2** *Sejam  $x^*$  e  $\hat{x}$  dois pontos de equilíbrio hiperbólico de (2.1). Suponha que a interseção das variedades estáveis e instáveis de  $x^*$  e  $\hat{x}$  satisfaçam a condição de transversalidade e que  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \{W^s(\hat{x}) - \hat{x}\} \neq \emptyset$ . Então  $\dim W^u(x^*) > \dim W^s(\hat{x})$ .*

## 2.9 O $\lambda$ -Lema

O  $\lambda$ -Lema é um resultado muito útil na teoria de sistemas dinâmicos e será utilizado nesta tese como uma ferramenta auxiliar para demonstrar alguns resultados relacionados a caracterização da área de atração.

Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.1). Seja  $U$  uma vizinhança de  $x^*$  em  $W^s(x^*)$  cuja fronteira é transversal ao campo vetorial  $f$ . A fronteira  $\partial U$  é denominada domínio fundamental de  $W^s(x^*)$  e possui a seguinte propriedade:

$$W^s(x^*) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, \partial U)$$

**Lema 2.9.1** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo  $k$  de (2.1). Seja  $U$  uma vizinhança deste equilíbrio em  $\mathbb{R}^n$  e  $D^u \subset U \cap W^u(x^*)$  um aberto em  $W^u(x^*)$ . Seja  $q$  um ponto arbitrário em  $W^s(x^*)$  e  $S$  uma seção de dimensão  $k$  transversal a  $W^s(x^*)$  em  $q$ . Então  $D^u$  está contido no fecho do conjunto  $\varphi(\mathbb{R}_+, S) \cap U$ .*

# Capítulo 3

## Área de Atração

As ferramentas de análise exploradas nos capítulos anteriores são apenas locais e incapazes de fornecer uma visão completa do comportamento dinâmico de um sistema. Ao contrário dos sistemas dinâmicos lineares, um atrator assintoticamente estável de um sistema não linear raramente é globalmente estável. Ao contrário, existe um subconjunto do espaço de estados, denominado área de atração, cujas trajetórias iniciando dentro deste conjunto tendem para o atrator quando o tempo tende para o infinito. O conhecimento deste conjunto fornece um panorama muito mais completo e global do comportamento dinâmico do sistema em análise. Caracterizar este conjunto será o principal objetivo deste capítulo.

### 3.1 Área de Atração

Considere o sistema dinâmico autônomo e não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e o campo vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Se  $\gamma$  é um conjunto atrativo de (3.1), então existe um subconjunto  $A(\gamma)$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que as trajetórias de (3.1) iniciando neste conjunto tendem para  $\gamma$  quando o tempo tende ao infinito. Este subconjunto é denominado área de atração de  $\gamma$  e é definido por:

$$A(\gamma) = \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow \gamma \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

A área de atração também é conhecida como bacia de atração ou região de estabilidade. Denotaremos a fronteira topológica de  $A$  por  $\partial A$  e o fecho de  $A$  por  $\bar{A}$ . A fronteira topológica de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é definida por

$$\partial A := \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - A)} \tag{3.2}$$

As seguintes proposições são caracterizações gerais da área de atração e de sua fronteira.

**Proposição 3.1.1** [9]  $A(\gamma)$  é um conjunto aberto e invariante.

**Demonstração:** O conjunto  $\gamma$  é atrativo, logo, existe constante  $\eta > 0$  tal que  $d(x_o, \gamma) < \eta$  implica que  $\varphi(t, x_o) \rightarrow \gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $p \in A(\gamma)$ . Então,  $\varphi(t, p) \rightarrow \gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Logo, existe tempo  $T > 0$  tal que  $d(\varphi(T, p), \gamma) < \frac{\eta}{2}$ . Da continuidade das soluções com relação às condições iniciais, dado  $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ , existe constante  $\delta > 0$  tal que  $d(\varphi(T, p), \varphi(T, q)) < \frac{\eta}{2}$  sempre que  $d(p, q) < \delta$ .

Mas  $d(\varphi(T, q), \gamma) \leq d(\varphi(T, q), \varphi(T, p)) + d(\varphi(T, p), \gamma) < \eta$ . Portanto,  $\varphi(s, \varphi(T, q)) \rightarrow \gamma$  quando  $s \rightarrow \infty$ . Utilizando as propriedades de fluxo,  $\varphi(t, q) = \varphi(t - T, \varphi(T, q)) = \varphi(s, \varphi(T, q))$ . Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = \lim_{s \rightarrow \infty} d(\varphi(s, \varphi(T, q))) = 0$$

Consequentemente, existe  $\delta > 0$  tal que todo ponto  $q$  satisfazendo  $d(p, q) < \delta$  pertence a  $A(\gamma)$ . Logo,  $A(\gamma)$  é um conjunto aberto.

A demonstração da invariância segue a mesma linha de raciocínio da demonstração do teorema 2.6.4.  $\square$

**Proposição 3.1.2** [9]  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto fechado e invariante com dimensão menor do que  $n$ . Além disto, se  $A(\gamma)$  não é denso<sup>1</sup> em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\partial A(\gamma)$  tem dimensão  $n - 1$ .

**Demonstração:** Por definição, a fronteira de qualquer conjunto é um conjunto fechado. Logo  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto fechado. Vamos provar que o fecho de qualquer conjunto invariante é invariante. Seja  $A$  um conjunto invariante e  $x_o \in \partial A$ . Queremos provar que  $\varphi(t, x_o) \in \partial A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $x_o \in \partial A$ , então dado  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, existem  $x_1 \in A$  e  $x_2 \in \mathbb{R}^n - A$  tal que  $\|x_o - x_1\| < \delta$  e  $\|x_o - x_2\| < \delta$ . Além disso, a invariância de  $A$  garante que  $\varphi(t, x_1) \in A$  e  $\varphi(t, x_2) \in \mathbb{R}^n - A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Dado  $T \in \mathbb{R}$  arbitrário e  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, tem-se, da continuidade das soluções com relação às condições iniciais, que existe  $\delta > 0$  tal que  $\|x_1 - x_o\| \leq \delta$  e  $\|x_2 - x_o\| \leq \delta$  implica em  $\|\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_o)\| \leq \varepsilon$  e  $\|\varphi(t, x_2) - \varphi(t, x_o)\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [-T, T]$ . Sendo assim, arbitrariamente próximo de  $\varphi(T, x_o)$  existem pontos  $\varphi(T, x_1) \in A$  e  $\varphi(T, x_2) \in \mathbb{R}^n - A$ . Portanto  $\varphi(T, x_o) \in \bar{A}$  e  $\varphi(T, x_o) \in \overline{\mathbb{R}^n - A}$ . Por definição,  $\varphi(T, x_o) \in \partial A$ . Como  $x_o$  e  $T$  foram escolhidos de maneira arbitrária, tem-se, para todo  $x_o \in \partial A$ , que  $\varphi(t, x_o) \in \partial A$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo  $\partial A$  é um conjunto invariante.

Em [23], pag. 44-47, demonstra-se que se  $A$  é um conjunto aberto, então a fronteira  $\partial A$  tem dimensão menor do que  $n$ . Se, além disto,  $A$  é um conjunto não denso em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\dim \partial A = n - 1$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>Um conjunto  $A$  é denso em  $\mathbb{R}^n$  se todo ponto de  $\mathbb{R}^n$  é um ponto de  $A$  ou um ponto de acumulação de  $A$ , ou ambos



## 3.2 Equilíbrios na Fronteira da Área de Atração

A área de atração  $A(\gamma)$  possui uma caracterização bem interessante quando os conjuntos limites na fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$  são restritos a pontos de equilíbrio. Nesta seção, esta condição será imposta como uma hipótese e mais adiante veremos que a existência de uma função energia é uma condição suficiente para que esta condição seja verdadeira.

Um ponto chave para a caracterização da área de atração é a caracterização dos pontos de equilíbrio na fronteira da mesma.

**Teorema 3.2.1** [9] *Seja  $\gamma$  um conjunto atrativo do sistema não-linear (3.1) e seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.1). Então:*

- (i)  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \overline{A(\gamma)} \neq \emptyset$  se e somente se  $x^* \in \partial A$ .
- (ii) se  $x^*$  é um ponto de equilíbrio do tipo  $k$ , com  $k < n$ , então  $x^* \in \partial A$  se e somente se  $\{W^s(x^*) - x^*\} \cap \partial A \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** ((i)  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \overline{A(\gamma)} \neq \emptyset$ . Então existe  $y \in W^u(x^*) \cap \overline{A(\gamma)}$  com  $y \neq x^*$ . Como  $y \in W^u(x^*)$ , então  $\varphi(t, y) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Por outro lado,  $y \in \bar{A}$  e o conjunto  $\bar{A}$  é invariante, logo  $\varphi(t, y) \in \bar{A}$  para todo  $t \leq 0$ . Isto significa que  $x^* \in \bar{A}$ . Obviamente  $x^* \notin A(\gamma)$ , portanto,  $x^* \in \{\mathbb{R}^n - A\}$  implicando que  $x^* \in \partial A$ .

((i)  $\Leftarrow$ ) Suponha que  $x^* \in \partial A$ . Obviamente,  $x^*$  é um ponto de equilíbrio instável, ou seja, é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $k$  com  $k \geq 1$ . Seja  $D$  um domínio fundamental de  $W^u(x^*)$ , isto é,  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, D) = \{W^u(x^*) - x^*\}$ . Seja  $D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, D) < \varepsilon\}$  uma vizinhança de  $D$  em  $\mathbb{R}^n$ . Como consequência do  $\lambda$ -lema (vide corolário 2 de [31], pag. 94),  $\bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, D_\varepsilon)$  contém um conjunto da forma  $\{U - W^s(x^*)\}$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $x^*$ . Como  $x^* \in \partial A$ , então  $U \cap A \neq \emptyset$ . Por outro lado,  $W^s(x^*) \cap A = \emptyset$ . Logo  $\{U - W^s(x^*)\} \cap A \neq \emptyset$ . Isto significa que existe algum ponto  $p \in D_\varepsilon$  e um tempo  $t^*$  tal que  $\varphi(t^*, p) \in A$ . A invariância de  $A$  garante que  $p \in A$ . Como  $\varepsilon$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, podemos encontrar uma seqüência de pontos  $\{p_i\}$  com  $p_i \in A$  para todo  $i = 1, 2, \dots$  e  $d(p_i, D) \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Por construção, esta seqüência é limitada, portanto possui subseqüência convergente, isto é,  $p_{i_j} \rightarrow q$  quando  $i_j \rightarrow \infty$ . Logo  $q \in \{\bar{A} \cap W^u(x^*)\}$  como queríamos demonstrar.

((ii)  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\{W^s(x^*) - x^*\} \cap \partial A \neq \emptyset$ . Então existe um ponto  $p \in \{W^s(x^*) - x^*\}$  tal que  $p \in \partial A$ . Obviamente  $\varphi(t, p) \rightarrow x^*$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado,  $\partial A$  é um conjunto fechado e invariante. Isto implica que  $x^* \in \partial A$ .

(ii)  $\Leftarrow$  A demonstração deste item é muito similar a demonstração do item (i) e será portanto omitida.  $\square$

O resultado anterior pode ser melhorado sob algumas condições. Seja  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$  o conjunto de pontos de equilíbrio de (3.1) e considere as seguintes hipóteses:

- (A1) Todos os pontos de equilíbrio de  $E$  na fronteira da área de atração são hiperbólicos.
- (A2) As variedades estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio de  $E$  na fronteira da área de atração satisfazem a condição de transversalidade.
- (A3) Todas as trajetórias na fronteira da área de atração tendem para um dos pontos de equilíbrio de  $E$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

As condições (A1) e (A2) são propriedades genéricas<sup>2</sup> de sistemas dinâmicos na forma de (3.1), ou seja, elas são verdadeiras para quase todos os sistemas dinâmicos na forma de (3.1). A condição (A3) não é genérica. Uma condição suficiente para garantir a satisfação desta condição será apresentada no capítulo 4.

**Teorema 3.2.2** *Seja  $\gamma$  um conjunto atrativo de (3.1) e  $A(\gamma)$  sua correspondente área de atração. Se as hipóteses (A1)-(A3) estão satisfeitas, então:*

- (i) *o ponto de equilíbrio  $x^* \in \partial A$  se e somente se  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$ .*
- (ii) *o ponto de equilíbrio  $x^* \in \partial A$  se e somente se  $W^s(x^*) \subseteq \partial A$ .*

**Demonstração:** ((i)  $\Leftarrow$ ) Suponha que  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$ . Como  $x^* \notin A$ , então  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap A \neq \emptyset$ . Além disto,  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap A \subset \{W^u(x^*) - x^*\} \cap \bar{A}$ , portanto,  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Finalmente, usando o Teorema 3.2.1 prova-se que  $x^* \in \partial A$ .

((i)  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $x^* \in \partial A$ . Então, do Teorema 3.2.1 prova-se que  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$ . Vamos mostrar, sob as hipóteses (A1)-(A3), que  $\{W^u(x^*) - x^*\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$  implica em  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$ . Seja  $p \in \{W^u(x^*) - x^*\} \cap \bar{A}$ . Se  $p \in A$  então não há nada a ser provado. Suponha portanto que  $p \in \partial A$ . Da hipótese (A3), existe um ponto de equilíbrio  $\hat{x} \in \partial A$  tal que  $\varphi(t, p) \rightarrow \hat{x}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $p \in W^s(\hat{x})$ . Ambos os equilíbrios,  $x^*$  e  $\hat{x}$  são hiperbólicos de acordo com a hipótese (A1). Além disto, são equilíbrios do tipo  $k$  com  $k \geq 1$  já que a fronteira da área de atração não pode conter pontos de equilíbrio estáveis. Por hipótese,  $p \in W^u(x^*)$ , logo  $p$  é um ponto de interseção das variedades  $W^u(x^*)$  e  $W^s(\hat{x})$  que, segundo a hipótese (A2), se interceptam transversalmente.

Suponha que  $x^*$  seja um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo 1. Então, em acordo com o Lema 2.8.2,  $\hat{x}$  tem que ser um ponto de equilíbrio do tipo 0. Isto nos leva a uma contradição pois  $\hat{x}$  tem que ser um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo  $k \geq 1$ . Logo  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$  para todo ponto de equilíbrio  $x^*$  do tipo 1 na fronteira da área de atração.

Completa-se a demonstração por indução. Suponha que  $W^u(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$  para todo ponto de equilíbrio  $\hat{x}$  do tipo  $k$  ou menor do que  $k$  na fronteira da área de

---

<sup>2</sup>Uma propriedade é genérica em  $B$  se o conjunto de elementos de  $B$  que satisfazem esta propriedade contém um subconjunto aberto e denso em  $B$ .

atração. Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $k + 1$  na fronteira da área de atração. Então, em acordo com o Lema 2.8.2,  $\hat{x}$  tem dimensão  $h := \dim\{W^u(\hat{x})\} \leq h$ . Portanto,  $W^u(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$ . Seja  $y \in W^u(\hat{x}) \cap A$  e seja  $B_\varepsilon(y)$  uma bola aberta de raio  $\varepsilon$ , centrada em  $y$ , onde  $\varepsilon$  é um número arbitrariamente pequeno. Como a área de atração é um conjunto aberto,  $B_\varepsilon(y) \subset A$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Seja  $D_\varepsilon$  a vizinhança de  $y$  em  $W^u(\hat{x})$  (um disco de dimensão  $h$ ) induzida por  $B_\varepsilon(y)$ , ou seja,  $D_\varepsilon = B_\varepsilon(y) \cap W^u(\hat{x})$ . Seja  $N$  uma vizinhança de  $p$  em  $W^u(x^*)$ . Esta vizinhança está imersa em uma variedade de dimensão  $k + 1$ . Esta vizinhança contém uma seção de dimensão  $h$  transversal a  $W^s(\hat{x})$  no ponto  $p$ . Uma aplicação direta do  $\lambda$ -lema mostra que existe um ponto  $z$  em  $N$  e um tempo  $t_z > 0$  tal que  $\varphi(t_z, z) \in B_\varepsilon(y)$ . A invariância de  $A$  garante que  $z \in A$ , logo,  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$ .

((ii)  $\Leftarrow$ ) Suponha que  $W^s(x^*) \subset \partial A$ . Como  $x^* \in W^s(x^*)$ , então  $x^* \in \partial A$ .

((ii)  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $x^* \in \partial A$ . Então da demonstração do item (i) tem-se que  $W^u(x^*) \cap A \neq \emptyset$ . Seja  $y \in \{W^u(x^*) - x^*\} \cap A$  e seja  $B_\varepsilon(y)$  uma bola aberta de raio  $\varepsilon$ , centrada em  $y$ , onde  $\varepsilon$  é um número arbitrariamente pequeno. Como a área de atração é um conjunto aberto,  $B_\varepsilon(y) \subset A$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Seja  $D_\varepsilon$  a vizinhança de  $y$  em  $W^u(\hat{x})$  (um disco de dimensão  $h$ ) induzida por  $B_\varepsilon(y)$ , ou seja,  $D_\varepsilon = B_\varepsilon(y) \cap W^u(\hat{x})$ . Seja  $p$  um ponto arbitrário de  $W^s(x^*)$  e seja  $S$  uma seção transversal a  $W^s(x^*)$  no ponto  $p$ . Uma aplicação direta do  $\lambda$ -lema mostra que existe um ponto  $z$  em  $S$  e um tempo  $t_z > 0$  tal que  $\varphi(t_z, z) \in B_\varepsilon(y)$ . A invariância de  $A$  garante que  $z \in A$ . Como  $\varepsilon$  e a seção  $S$  podem ser escolhidas arbitrariamente pequenas, então existem pontos de  $A$  arbitrariamente próximos de  $p$ . Isto significa que  $p \in \bar{A}$ . Como  $W^s(x^*)$  não pode conter pontos em  $A$ ,  $p \in \partial A$ . A arbitrariedade da escolha de  $p$  em  $W^s(x^*)$  garante que  $W^s(x^*) \subset \partial A$ .

□

### 3.3 Caracterização da Fronteira da Área de Atração

Após a caracterização dos pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração estamos prontos para provar o seguinte teorema caracterizando a fronteira da área de atração:

**Teorema 3.3.1** [9] *Considere o sistema dinâmico (3.1) cujo campo vetorial  $f$  satisfaz as hipóteses (A1)-(A3). Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  os pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração  $\partial A$  de um certo conjunto atrator  $\gamma$ . Então*

$$\partial A(\gamma) = \cup_i W^s(x_i)$$

**Demonstração:** Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , os pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração. Do teorema 3.2.2 tem-se que  $\cup_i W^s(x_i) \subset \partial A$ . Por outro lado, a hipótese (A3) garante que  $\partial A \subset \cup_i W^s(x_i)$ . Combinando as duas inclusões chegamos ao resultado desejado, ou seja,  $\partial A(\gamma) = \cup_i W^s(x_i)$ . □

O Teorema 3.3.1 estabelece, sob as hipóteses (A1)-(A3), que a fronteira da área de atração  $\partial A$  de um conjunto atrator  $\gamma$  é composto pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio que pertencem à fronteira da área de atração.

### 3.4 Órbitas Fechadas na Fronteira da Área de Atração

Os resultados apresentados nas seções anteriores podem ser facilmente adaptados para acomodar a presença de órbitas fechadas na fronteira da área de atração. Apresentaremos estes resultados sem demonstração pois estas são muito similares as demonstrações dos resultados anteriores. Além disto as demonstrações podem ser encontradas em [9].

**Definição 3.4.1** *Uma trajetória  $\phi$  do sistema dinâmico (3.1) é uma órbita fechada se  $\phi$  não é um ponto de equilíbrio e para todo  $x \in \phi$  existe tempo  $t$  tal que  $\varphi(t, x) = x$ .*

Seja  $\phi$  uma órbita fechada e seja  $p \in \phi$ . Tome uma seção  $M$  transversal à  $\phi$  no ponto  $p$ . A seção transversal  $M$  deve ser escolhida suficientemente pequena para que intercepte  $\phi$  apenas no ponto  $p$  e para que todas as trajetórias atravessem a seção na mesma direção de  $\phi$ . Induzida pelo fluxo, podemos definir a aplicação de Poincaré  $\Sigma : M \rightarrow M$ . Como  $p \in \phi$ , existe  $T > 0$  tal que  $\varphi(T, p) = p$ . Da continuidade das soluções com relação às condições iniciais, para todo  $x_o \in M$  nas vizinhanças de  $p$  existe um tempo  $T(x_o) > 0$  tal que  $\varphi(T(x_o), x_o) \in M$  pela primeira vez. Sendo assim define-se:

$$\Sigma(x_o) = \varphi(T(x_o), x_o)$$

Claramente  $p$  é um ponto fixo desta aplicação, ou seja,  $\Sigma(p) = p$ .

**Definição 3.4.2** *A órbita fechada  $\phi$  de (3.1) é hiperbólica se para qualquer  $p \in \phi$ , a aplicação de Poincaré associada possui todos os autovalores com norma diferente de 1.*

Órbitas fechadas hiperbólicas assim como os pontos de equilíbrio hiperbólicos possuem variedades estáveis e instáveis invariantes.

**Definição 3.4.3** *Seja  $\phi$  uma órbita fechada hiperbólica do sistema dinâmico (2.1). A variedade estável de  $\phi$  é o conjunto*

$$W^s(\phi) := \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow \phi \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e a variedade instável de  $x^*$  é o conjunto

$$W^u(\phi) := \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow \phi \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

**Definição 3.4.4** *Um elemento crítico do sistema dinâmico (3.1) é um ponto de equilíbrio ou uma órbita fechada.*

Para acomodar a presença de órbitas fechadas na fronteira da área de atração é necessário adaptar as condições (A1)-(A3). Para isto considere as seguintes hipóteses:

- (B1) Todos os elementos críticos de (3.1) na fronteira da área de atração são hiperbólicos.
- (B2) As variedades estáveis e instáveis dos elementos críticos de (3.1) na fronteira da área de atração satisfazem a condição de transversalidade.
- (B3) Todas as trajetórias na fronteira da área de atração tendem para um dos elementos críticos de (3.1) quando  $t \rightarrow \infty$ .

Sob estas hipóteses, pode-se mostrar os seguintes resultados que são uma generalização dos resultados apresentados na seção anterior.

**Teorema 3.4.5** [9] *Seja  $\gamma$  um conjunto atrativo de (3.1) e  $A(\gamma)$  sua correspondente área de atração. Seja  $\phi$  um elemento crítico de (3.1). Se as hipóteses (B1)-(B3) estão satisfeitas, então:*

- (i) *o elemento crítico  $\phi \in \partial A$  se e somente se  $W^u(\phi) \cap A \neq \emptyset$ .*
- (ii) *o elemento crítico  $\phi \in \partial A$  se e somente se  $W^s(\phi) \subseteq \partial A$ .*

**Teorema 3.4.6** [9] *Considere o sistema dinâmico (3.1) cujo campo vetorial  $f$  satisfaz as hipóteses (B1)-(B3). Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  os pontos de equilíbrio e  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  as órbitas fechadas na fronteira da área de atração  $\partial A$  de um certo conjunto atrator  $\gamma$ . Então*

$$\partial A(\gamma) = \bigcup_i W^s(x_i) \bigcup_j W^s(\phi_j)$$

A figura 3.1 ilustra o resultado do Teorema 3.4.6. A fronteira da área de atração é composta pela união das variedades estáveis dos elementos críticos que pertencem à fronteira.

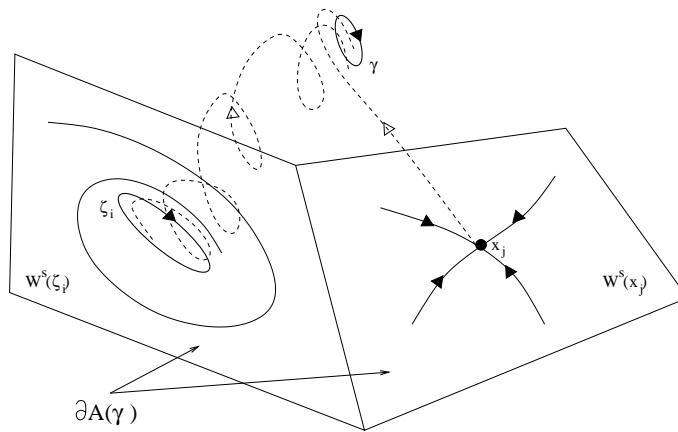


Figura 3.1: Ilustração do Teorema 3.4.6. A fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$  é composta pelas variedades estáveis dos elementos críticos que pertencem à fronteira.

# Capítulo 4

## Função Energia, Conjuntos Limites e Estimativas da Área de Atração

A caracterização da área de atração apresentada na seção anterior torna-se útil quando existe uma função energia associada ao sistema (3.1). Funções energia podem fornecer informações muito importantes a respeito dos conjuntos limites e, além disto, permitem a obtenção de uma estimativa da área de atração de maneira implícita via conjuntos de nível.

### 4.1 Função Energia

Considere novamente o sistema dinâmico não-linear autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e o campo vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ . Seja  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$  o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema (4.1).

**Definição 4.1.1** [9][13] *Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  é uma função energia do sistema (4.1) se*

1.  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\dot{V}(x) = 0$  em todo ponto  $x \in E$ .
2. se  $x_o \notin E$ , então o conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(\varphi(t, x_o)) = 0\}$  tem medida zero em  $\mathbb{R}$ .
3. se  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitado para  $t \geq 0$ , então  $\varphi(\mathbb{R}_+, x_o)$  é um conjunto limitado.

As propriedades 1 e 2 da definição 4.1.1 garantem que a energia é não crescente ao longo das trajetórias do sistema (4.1). Não exige-se que a função energia seja

própria<sup>1</sup>, entretanto, a condição 3 garante a não existência de uma solução ilimitada cuja energia permaneça limitada ao longo da trajetória.

**Observação 4.1.2** *A condição 2 da definição 4.1.1 pode ser substituída pela seguinte condição mais forte*

**2'**. *o campo vetorial  $f$  de (4.1) é transversal ao conjunto  $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$  em todo ponto de  $C \setminus E$ .*

*É fácil ver que a condição 2' implica na condição 2 da definição 4.1.1.*

A função energia assim como a função de Lyapunov são funções escalares auxiliares a partir das quais deseja-se obter informações a respeito da dinâmica do sistema não linear. O objetivo da função de Lyapunov é o estudo de estabilidade (local) de um certo ponto de equilíbrio. Sendo assim a função de Lyapunov precisa estar bem definida e satisfazendo as propriedades do teorema 2.7.5 numa vizinhança do ponto de equilíbrio em estudo. A função energia, por sua vez, tem o objetivo de extrair informações globais a respeito do comportamento dinâmico do sistema (4.1) como, por exemplo, informações a respeito dos conjuntos limites e da área de atração de conjuntos atrativos. Sendo assim a função energia deverá satisfazer as condições da definição 4.1.1 para todo o espaço  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.1.1 Funções Energia e Conjuntos Limites

Nesta seção vamos estudar a implicação da existência de uma função energia em termos de conjuntos limites.

**Proposição 4.1.3** *Suponha a existência de uma função energia  $V$  para o sistema (4.1) e admita que a condição (A1) esteja satisfeita. Então o conjunto  $\omega$ -limite de cada trajetória limitada  $\varphi(t, x_o)$  de (4.1) é composto exclusivamente por um único ponto de equilíbrio.*

**Demonstração:** Seja  $x_o \in \mathbb{R}^n$  uma condição inicial e  $\varphi(t, x_o)$  uma trajetória limitada de (3.1) passando por  $x_o$ , isto é,  $\varphi(0, x_o) = x_o$ . Pela condição 1 da definição 4.1.1, sabemos que  $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(\varphi(0, x_o)) = V(x_o)$  para todo  $t \geq 0$ . Como  $\varphi_t(x_o)$  é limitada para  $t \geq 0$ , então, pela continuidade de  $V$ , tem-se que  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitada inferiormente para  $t \geq 0$ , isto é, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha \leq V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o)$  para todo  $t \geq 0$ . Desde que  $V(\varphi(\cdot, x_o))$  é uma função não crescente e limitada inferiormente, então existe  $p \geq \alpha$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t, x_o)) = p$ . Por outro lado, sabe-se, desde que  $\varphi_t(x_o)$  é limitada para  $t \geq 0$ , que  $\omega(x_o)$  é um conjunto não vazio. Seja  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ , então existe uma seqüência  $\{t_n\} \uparrow \infty$  tal que  $\varphi(t_n, x_o) \rightarrow \hat{x}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Novamente usando a continuidade de  $V$  concluímos que  $V(\hat{x}) = p$  para

---

<sup>1</sup>Uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função própria se  $\|x\| \rightarrow \infty$  então  $|V(x)| \rightarrow \infty$



qualquer  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ . O conjunto  $\omega(x_o)$  é invariante, isto significa, para qualquer  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ , que  $\varphi(t, \hat{x}) \in \omega(x_o)$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto  $V(\varphi(t, \hat{x})) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e então  $\dot{V}(\hat{x}) = 0$  para todo  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ . Como consequência, toda solução limitada tende para o maior conjunto invariante (maior por inclusão) contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ .

Suponha agora a existência de  $\hat{x} \in \omega(x_o)$  tal que  $\hat{x} \notin E$ . Então  $\dot{V}(\varphi(t, \hat{x})) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Mas isto contradiz a condição 2 da definição 4.1.1. Portanto,  $\omega(x_o) \subset E$ , ou seja,  $\omega(x_o)$  é composto por pontos de equilíbrio. A hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio garante que os mesmos são isolados, logo, da conexidade do conjunto  $\omega$ -limite de soluções limitadas conclui-se que o conjunto  $\omega$ -limite é composto por um único ponto de equilíbrio isolado.  $\square$

Vimos no capítulo 3 que a hipótese (A3) não é satisfeita de maneira genérica na classe de sistemas dinâmicos da forma (4.1). O próximo corolário mostra que a existência de uma função energia é uma condição suficiente para garantir a satisfação da hipótese (A3).

**Corolário 4.1.4** *Se o sistema dinâmico não linear (4.1) possui uma função energia, então a condição (A3) que afirma que todas as trajetórias na fronteira da área de atração de um conjunto atrativo compacto tendem para um ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$  está satisfeita.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma$  um conjunto atrativo compacto e  $A(\gamma)$  sua respectiva área de atração. Como o sistema possui uma função energia, o conjunto atrativo  $\gamma$  é necessariamente um ponto de equilíbrio atrativo. Tome  $x_o \in \partial A(\gamma)$  arbitrário. Como  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto invariante, então  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitado inferiormente por  $V(\gamma)$ . Da condição 3 da definição 4.1.1 e continuidade da  $V$  conclui-se que  $\varphi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ . A invariância de  $\partial A$  e a proposição 4.1.3 garantem que  $\varphi(t, x_o) \rightarrow E \cap \partial A$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é, toda trajetória na fronteira da área de atração se aproxima de um ponto de equilíbrio em  $\partial A$  quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 4.1.2 Função Energia e a Caracterização da Fronteira da Área de Atração

Combinando os resultados da seção anterior e o Teorema 3.3.1 ficamos em posição para apresentar o seguinte resultado a respeito da caracterização da fronteira da área de atração.

**Teorema 4.1.5** *Considere o sistema dinâmico (4.1) e seja  $V$  uma função energia associada a este sistema. Suponha que as hipóteses (A1) e (A2) sejam satisfeitas. Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , os pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração  $\partial A$  de um certo ponto de equilíbrio atrativo  $x^s$ . Então*

$$\partial A(\gamma) = \bigcup_i W^s(x_i)$$

**Demonstração:** A existência da função energia garante, segundo o Corolário 4.1.4, que a hipótese (A3) está satisfeita. Portanto, uma aplicação direta do Teorema 3.3.1 mostra que  $\partial A(\gamma) = \bigcup_i W^s(x_i)$ .  $\square$

## 4.2 Função Energia Estendida

Conforme mostrado na proposição 4.1.3, um sistema só possuirá uma função energia se os conjuntos limites forem constituídos apenas por pontos de equilíbrio. Nesta seção o conceito de função energia será estendido para acomodar a existência de órbitas fechadas na fronteira da área de atração. Para isto seja  $E'$  o conjunto de todos os elementos críticos (pontos de equilíbrio e órbitas fechadas) do sistema (4.1).

Próxima definição é uma extensão do conceito de energia apresentado em [9].

**Definição 4.2.1** *Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é uma função energia estendida do sistema (4.1) se*

1.  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\dot{V}(x) = 0$  em todo ponto  $x \in E'$ .
2. se  $x_o \notin E'$ , então o conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{V}(\phi(t, x_o)) = 0\}$  tem medida zero em  $\mathbb{R}$ .
3. se  $V(\phi(t, x_o))$  é limitado para  $t \geq 0$ , então  $\varphi(\mathbb{R}_+, x_o)$  é um conjunto limitado.

### 4.2.1 Função Energia Estendida e Conjuntos Limites

Assim como a função energia, a função energia estendida fornece informações importantes a respeito da composição dos conjuntos limites.

**Proposição 4.2.2** *Suponha a existência de uma função energia estendida  $V$  para o sistema (4.1) e admita que a condição (B1) esteja satisfeita. Então o conjunto  $\omega$ -limite de cada trajetória  $\varphi(t, x_o)$  de (4.1) limitada para  $t \geq 0$  é composto exclusivamente por um único elemento crítico de  $E'$ .*

**Demonstração:** Seja  $x_o \in \mathbb{R}^n$  uma condição inicial e  $\varphi(t, x_o)$  a trajetória de (4.1) passando por  $x_o$ , isto é,  $\varphi(0, x_o) = x_o$ . Suponha que  $\varphi(t, x_o)$  seja limitada para  $t \geq 0$ . Então, pela continuidade de  $V$  tem-se que  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitado inferiormente para  $t \geq 0$ , isto é, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha \leq V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o)$  para todo  $t \geq 0$ . A condição 1 da definição 4.2.1 garante que  $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(\varphi(0, x_o)) = V(x_o)$  para todo  $t \geq 0$ . Logo  $V(\varphi(\cdot, x_o))$  é uma função não crescente e limitada inferiormente e portanto, existe  $p \geq \alpha$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t, x_o)) = p$ . Por outro lado, a limitação de  $\varphi(t, x_o)$  para  $t \geq 0$  garante que  $\omega(x_o)$  é um conjunto não vazio. Seja  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ , então existe uma seqüência  $\{t_n\} \uparrow \infty$  tal que  $\varphi(t_n, x_o) \rightarrow \hat{x}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Novamente usando a continuidade de  $V$ , concluímos que  $V(\hat{x}) = p$  para qualquer  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ .

O conjunto  $\omega(x_o)$  é invariante, isto significa que  $\varphi(t, \hat{x}) \in \omega(x_o)$  para qualquer  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto  $V(\varphi(t, \hat{x})) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e então  $\dot{V}(\hat{x}) = 0$  para todo  $\hat{x} \in \omega(x_o)$ . Como consequência, toda solução limitada tende para o maior conjunto invariante (maior por inclusão) contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ .

Suponha agora a existência de  $\hat{x} \in \omega(x_o)$  tal que  $\hat{x} \notin E$ . Então  $\dot{V}(\varphi(t, \hat{x})) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Mas isto contradiz a condição 2 da definição 4.2.1. Portanto,  $\omega(x_o) \subset E'$ , ou seja, o conjunto  $\omega$ -limite é composto, neste caso, exclusivamente por elementos críticos, ou seja, equilíbrios e ou órbitas fechadas. A hipótese (B1) garante que todos os elementos críticos são hiperbólicos e portanto isolados. A conexidade do conjunto limite garante que  $\omega(x_o)$  é composto por um único elemento crítico.  $\square$

Vimos no capítulo 3 que a hipótese (B3), assim como a (A3), não é satisfeita de maneira genérica na classe de sistemas dinâmicos da forma (4.1). O próximo corolário mostra que a existência de uma função energia estendida é uma condição suficiente para garantir a satisfação da hipótese (B3).

**Corolário 4.2.3** *Se o sistema dinâmico não linear (4.1) possui uma função energia estendida, então a condição (B3) que afirma que todas as trajetórias na fronteira da área de atração de um conjunto atrativo compacto tendem para um elemento crítico de (4.1) quando  $t \rightarrow \infty$  está satisfeita.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma$  um conjunto atrativo compacto e  $A(\gamma)$  sua respectiva área de atração. Como o sistema possui uma função energia estendida, o conjunto atrativo  $\gamma$  é necessariamente um elemento crítico atrativo de (4.1). Além disto, a energia é constante em  $\gamma$ , isto é, existe um número  $\alpha$  tal que  $V(p) = \alpha$  para todo  $p \in \gamma$ . Tome  $x_o \in \partial A(\gamma)$  arbitrário. Como  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto invariante, então  $V(\varphi(t, x_o))$  é limitado inferiormente por  $\alpha$ . Da condição 3 da definição 4.2.1 e continuidade da  $V$  conclui-se que  $\varphi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ . A invariância de  $\partial A$  e a proposição 4.2.2 garantem que  $\varphi(t, x_o) \rightarrow E' \cap \partial A$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é, toda trajetória na fronteira da área de atração se aproxima de um elemento crítico em  $\partial A$  quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 4.2.2 Função Energia Estendida e a Caracterização da Fronteira da Área de Atração

O seguinte teorema é uma consequência direta do Teorema 3.4.6 e Corolário 4.2.3 4.2.3.

**Teorema 4.2.4** *Considere o sistema dinâmico (4.1) e seja  $V$  uma função energia. Suponha que as hipóteses A1 e A2 são satisfeitas. Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , os pontos de equilíbrio e  $\zeta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , órbitas fechadas na fronteira da área de atração  $\partial A$  de um conjunto atrator  $\gamma$ . Então*

$$\partial A(\gamma) = \cup_i W^s(x_i) \cup_j W^s(\zeta_j)$$

Desde que as hipóteses (B1) e (B2) são propriedades genéricas de campos vetoriais, Teorema 4.2.4 garante que, genericamente, a fronteira da área de atração de um conjunto atrativo de um sistema dinâmico com função energia estendida é caracterizado pela união das variedades estáveis dos conjuntos críticos que pertencem a fronteira da área de atração. Figura 3.1 da seção anterior ilustra este resultado.

### 4.3 Estimativas Ótimas da Área de Atração

A caracterização da fronteira da área de atração apresentada nas seções anteriores sugere o seguinte algoritmo conceitual para o cálculo da fronteira da área de atração.

**Algoritmo:**

1. Calcule todos os elementos críticos de (4.1).
2. Dentre os elementos críticos, encontre aqueles cujas variedades instáveis tem interseção não vazia com a área de atração.
3. A fronteira da área de atração é formada pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio selecionados no passo 2.

Do ponto de vista numérico, este algoritmo apresenta diversos problemas. No passo 1, não sabemos de antemão quantos elementos críticos existem e qual seria sua localização aproximada, além disto, sistemas não lineares podem ter infinitos elementos críticos. No caso de pontos de equilíbrio temos que encontrar os zeros da equação  $f(x) = 0$ . Em geral, métodos como o Newton-Raphson são utilizados para resolver esta equação. Estes métodos exigem estimativas iniciais da localização dos zeros. Encontrar órbitas fechadas não é uma tarefa simples. Existem na literatura alguns métodos promissores para encontrar órbitas fechadas em sistemas dinâmicos não-lineares. Ver, por exemplo, o "shooting method" em [32] e [2].

O item 2, embora dispendioso do ponto de vista computacional, pode ser realizado com certa facilidade. Entretanto o item 3 é muito complicado pois envolve o cálculo de variedades de dimensão elevada o que é em geral impraticável do ponto de vista computacional.

Para evitar a realização do passo 3, utilizamos a função energia para estimar a área de atração, ou seja, procura-se por um conjunto de nível da função energia que esteja contido na área de atração. A seguir apresenta-se o embasamento teórico para obter estimativas ótimas da área de atração via funções energia.

Embora já tenhamos explorado este resultado nas seções anteriores, vamos mostrar formalmente que a função energia é limitada inferiormente na fronteira da área de atração.

**Teorema 4.3.1** *Seja  $V$  uma função energia associada ao sistema dinâmico não linear (4.1) e seja  $x^s$  um ponto de equilíbrio atrativo de (4.1). Então  $V$  é uma função limitada inferiormente em  $\partial A(x^s)$*

**Demonstração:** Seja  $p$  um ponto arbitrário em  $\partial A(x^s)$ . Então, existe uma seqüência de pontos  $\{x_i\}$ , com  $x_i \in A(x^s)$  e  $x_i \rightarrow p$  quando  $i \rightarrow \infty$ . A continuidade de  $V$  garante que  $V(x_i) \rightarrow V(p)$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Além disto, a condição 1 da definição 4.1.1 garante que  $V(x_i) \geq V(p)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $V(p) \geq V(x^s)$ , ou seja,  $V(p)$  é limitada inferiormente por  $V(x^s)$ . A arbitrariedade da escolha de  $p$  completa a demonstração deste teorema.  $\square$

**Corolário 4.3.2** *A função energia possui mínimo global na fronteira da área de atração.*

Uma consequência importante do teorema 4.3.1 é que trajetórias na fronteira da área de atração são limitadas para  $t \geq 0$  mesmo que a área de atração seja um conjunto não limitado.

**Teorema 4.3.3** *Seja  $V$  uma função energia associada ao sistema não linear (4.1) e seja  $x^s$  um ponto de equilíbrio atrativo de (2.1). Se  $p \in \partial A(x^s)$ , então  $\varphi(t, p)$  é limitada para  $t \geq 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $p \in \partial A(x^s)$ . A condição 1 da definição 4.1.1 garante que  $V(\varphi(t, p)) \leq V(p)$  para todo  $t \geq 0$ . A invariância de  $\partial A(x^s)$  e o Teorema 4.3.1 garantem que  $V(\varphi(t, p)) \geq V(x^s)$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto,  $V(\varphi(t, p))$  é limitada para  $t \geq 0$  e a condição 3 da definição 4.1.1 garante que  $\varphi(t, p)$  é limitada para  $t \geq 0$ .  $\square$

O seguinte teorema é muito importante para a obtenção de estimativas da área de atração.

**Teorema 4.3.4** *Seja  $V$  uma função energia associada ao sistema (4.1). Mínimos locais de energia na fronteira da área de atração ocorrem em pontos de equilíbrio.*

**Demonstração:** Suponha que  $p$  seja um ponto de mínimo local em  $\partial A(x^s)$  e que  $p \notin E$ . A invariância de  $\partial A$  garante que  $\varphi(t, p) \in \partial A$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $p \notin E$ , então  $\varphi(t, p) \notin E$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disto, as condições 1 e 2 da definição 4.1.1 garantem que dado  $t_\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno existe um tempo  $t^* \in (0, t_\varepsilon)$  tal que  $V(\varphi(t^*, p)) < V(p)$ . Isto significa que arbitrariamente próximo de  $p$  existem pontos em  $\partial A$  com energia  $V$  menor do que  $V(p)$ , logo chegamos a uma contradição provando o resultado.  $\square$

Agora estamos em posição para apresentar o seguinte teorema referente a obtenção de estimativas da área de atração via conjuntos de nível de funções energia.

**Teorema 4.3.5** *Seja  $V$  uma função energia associada ao sistema dinâmico não linear (4.1) e seja  $x^s$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (4.1). Sejam  $x_i, i = 1, 2, \dots$  os pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração de  $x^s$ . Defina  $L := \min_i V(x_i)$  e seja  $S_c(L)$  a componente conexa do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  contendo o equilíbrio  $x^s$ . Então  $S_c(L)$  é uma estimativa da área de atração, isto é,  $S_c(L) \subset A(x^s)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $S_c(L)$  não esteja contido em  $A(x^s)$ . Então existe  $p \in S_c(L)$  tal que  $p \notin A(x^s)$ . Da conexidade de  $S_c(L)$ , existe um caminho  $\gamma$  em  $S_c(L)$  que conecta os pontos  $x^s$  e  $p$ . Como  $x^s \in A$  e  $p \notin A$ , deve existir pelo menos um ponto  $q$  em  $\gamma$  tal que  $q \in \partial A$ . Mas isto implica que  $V(q) \geq L$  o que nos leva a uma contradição. Logo  $S_c(L) \subset A$ .  $\square$

A estimativa  $S_c(L)$  é a melhor estimativa da área de atração que podemos obter via curvas de nível da função energia  $V$ . Este resultado portanto sugere o seguinte algoritmo conceitual para estimar a área de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

**Algoritmo:**

1. Calcule todos os elementos críticos de (4.1).
2. Dentre os elementos críticos, encontre aqueles cujas variedades instáveis tem interseção não vazia com a área de atração. Sejam eles  $x_i, i = 1, 2, \dots$
3. Calcule  $L = \min_i V(x_i)$ .
4. A componente conexa  $S_c(L)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  é uma estimativa da área de atração.

## Capítulo 5

# Função Energia Generalizada, Conjuntos Limites e Estimativas da Área de Atração

Na seção anterior, mostrou-se que a existência de uma função energia garante que o conjunto limite de qualquer solução de 4.1 é composto apenas por pontos de equilíbrio. Do ponto de vista prático, encontram-se as seguintes dificuldades:

- Muitos sistemas físicos não possuem uma função energia; em geral devido a presença de comportamentos mais complexos como ciclos limites e órbitas caóticas;
- Existem sistemas que teoricamente admitem a existência de uma função energia mas não se consegue expressá-la por uma expressão analítica em termos de funções elementares.

A função energia estendida foi definida para acomodar a presença de ciclos limites. Entretanto, do ponto de vista prático o teorema 4.1.5 e a definição 4.2.1 apresentam os seguintes problemas:

1. Dificilmente encontra-se função  $V$  satisfazendo as condições 1)-3) da definição 4.2.1.
2. Não existem métodos eficazes para procurar e calcular ciclos limites principalmente em espaços de dimensão elevada.

Embora a definição de função energia generalizada apresentada no capítulo anterior seja adequada e poderosa para tratar problemas em que possam existir ciclos limites e órbitas periódicas na fronteira da área de atração, ela não é prática na medida em que dificilmente encontram-se funções satisfazendo todas as condições de uma função energia generalizada. Nesta seção, as exigências sobre a função  $V$  são relaxadas. Com isto, ganha-se a possibilidade de tratar problemas que possuam

qualquer tipo de conjunto limite na fronteira da área de atração. Obviamente, o preço a pagar por esta generalização é que as conclusões não são tão fortes e os procedimentos computacionais são mais complexos.

## 5.1 Função Energia Generalizada e Conjuntos Limites

Considere novamente o sistema dinâmico não-linear autônomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e o campo vetorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$ .

Seja  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  e defina os conjuntos  $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}$  e  $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ . Usualmente, o conjunto  $C$  é composto por uma coleção enumerável de componentes conexas. Denotaremos por  $C_i$  a  $i$ -ésima componente conexa de  $C$ . Admitiremos que os conjuntos  $C_{i's}$  são isolados, isto é, existe uma coleção enumerável de conjuntos abertos e disjuntos  $D_{i's}$  satisfazendo  $\bar{C}_i \subset D_i$  para todo  $i$ .

**Observação 5.1.1** *Alternativamente, pode-se supor que  $C$  é um conjunto que contém o conjunto onde a derivada de  $V$  é positiva, isto é,  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\} \subset C$ , e que as componentes conexas  $C_{i's}$  de  $C$  são isoladas no sentido previamente descrito. Todos os resultados apresentados podem ser facilmente demonstrados com esta definição alternativa de  $C$ . Embora as estimativas dos conjuntos atrativos e das respectivas áreas de atração tendam a ser mais conservadoras neste caso, esta definição alternativa abrange uma classe maior de problemas. Além disto, em muitas situações práticas, não se conhece precisamente o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}$ , mas apenas uma estimativa deste, isto é, um conjunto que o contém é conhecido.*

**Definição 5.1.2** *Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é uma função energia generalizada do sistema (5.1) se*

- (C1) *O número de componentes conexas  $C_i$  de  $C$  é finito.*
- (C2) *O conjunto  $C_i$  é limitado para todo  $i$ .*
- (C3)  *$\sup_{t \geq 0} |V(\phi(t, x_o))| < \infty$  implica que  $\phi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ .*

Este novo conceito de energia permite que a derivada da mesma ao longo das trajetórias seja positiva nos conjuntos limitados  $C_{i's}$ . Apesar desta flexibilidade com relação à derivada, o próximo teorema mostra que algumas conclusões a respeito dos conjuntos limites ainda podem ser obtidas.



**Teorema 5.1.3** *Seja  $V$  uma função energia generalizada do sistema (5.1). Suponha que a trajetória  $\varphi(t, x_o)$  do sistema dinâmico (5.1) seja limitada para  $t \geq 0$ , então ou*

(i) *existe um nível  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\omega(x_o) \subset (M \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \in V^{-1}(L)\})$  ou*

(ii) *existe pelo menos uma componente conexa  $C_j$  de  $C$  tal que  $\omega(x_o) \cap \bar{C}_j \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:** Por hipótese, a trajetória  $\varphi(t, x_o)$  é limitada, logo o conjunto omega-limite  $\omega(x_o)$  é não vazio, fechado, invariante e conexo. Suponha que  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para todo  $t \geq 0$ . Então,  $V(t) = V(\varphi(t, x_o))$  é uma função não crescente em  $t$  limitada inferiormente. Portanto, existe um número real  $L$  tal que  $V(t) \rightarrow L$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $p \in \omega(x_o)$ , existe uma seqüência de tempos  $\{t_n\} \uparrow \infty$  tal que  $\varphi(t_n, x_o) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto  $V(\varphi(t_n, x_o)) \rightarrow L$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, devido a continuidade de  $V$ ,  $V(p) = L$ . Como isto é verdade para qualquer ponto em  $\omega(x_o)$ ,  $\omega(x_o) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x \in V^{-1}(L)\}$ . Usando a invariância de  $\omega(x_o)$  conclui-se que  $\dot{V}(p) = 0$  para qualquer  $p \in \omega(x_o)$  e portanto  $\omega(x_o) \subset M$ . Neste caso (i) é verdadeiro.

Suponha agora que a trajetória  $\varphi_t(x_o) := \{\phi(t, x_o) \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$  tenha interseção não vazia com o conjunto  $C$ . Então existe uma componente conexa  $C_{j_1}$  tal que ou  $x_o \in C_{j_1}$  ou existe um par de tempos  $t_1$  e  $t_1^*$  tais que  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para  $0 \leq t \leq t_1$  e  $\varphi(t, x_o) \in C$  para  $t_1 < t < t_1^*$ . Se  $\varphi(t, x_o)$  permanece dentro de  $\bar{C}_{j_1}$  para todo tempo  $t \geq t_1$ , isto é,  $t_1^* = +\infty$ , então  $V(t)$  é uma função não decrescente de  $t$  limitada superiormente para  $t \geq t_1$ . Usando argumentos similares aqueles utilizados na primeira parte da demonstração, concluímos que  $\omega(x_o) \subset (M \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \in V^{-1}(L)\})$  e (i) é verdadeiro.

Se  $t_1^* < \infty$ , então temos novamente duas possibilidades. Ou  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para  $t \geq t_1^*$  ou existe uma componente conexa  $C_{j_2}$  e um par de tempos  $t_2$  e  $t_2^*$  tais que  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para  $t_1^* \leq t \leq t_2$  e  $\varphi(t, x_o) \in C_{j_2}$  para  $t_2 < t < t_2^*$ . A partir deste ponto, a análise é repetida. Se o número de vezes que a análise é repetida for finito, então (i) é verdadeiro. Caso contrário, existe uma seqüência de tempos  $\{t_n\} \uparrow \infty$  e uma seqüência de componentes conexas  $\{C_{j_n}\}$  tais que  $\varphi(t_n, x_o) \in C_{j_n}$ . Como o número de componentes conexas  $C_i$  de  $C$  é finito, existe pelo menos uma componente  $C_{j_k}$  que é visitada pela trajetória infinitas vezes. Em outras palavras, existe uma subseqüência de tempos  $\{t_{n_i}\}$  de  $\{t_n\}$  tal que  $x_i := \varphi(t_{n_i}, x_o) \in C_{j_k}$ . Como  $\bar{C}_{j_k}$  é um conjunto compacto, existe uma subseqüência convergente  $\{x_{i_v}\}$  de  $\{x_i\}$  convergindo para algum ponto  $\tilde{x} \in \bar{C}_{j_k}$ . Por definição,  $\tilde{x}$  é um ponto  $\omega$ -limite de  $x_o$  e portanto  $\omega(x_o) \cap \bar{C}_{j_k} \neq \emptyset$ . Neste caso, (ii) é verdadeiro.  $\square$

O Teorema 5.1.3 estabelece a relação entre os conjuntos limites de trajetórias limitadas do sistema dinâmico não linear (5.1) e as funções energia generalizadas. Ele assegura que se as soluções limitadas não se aproximam do conjunto onde a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias é igual a zero, então o conjunto  $\omega$ -limite necessariamente intercepta pelo menos uma das componentes conexas  $C_i$  de  $C$ . Figura

5.1 ilustra este fato. É importante ressaltar que o conjunto  $\omega$ -limite pode interceptar mais do que uma componente conexa  $C_j$  de  $C$  como mostra a Figura 5.2.

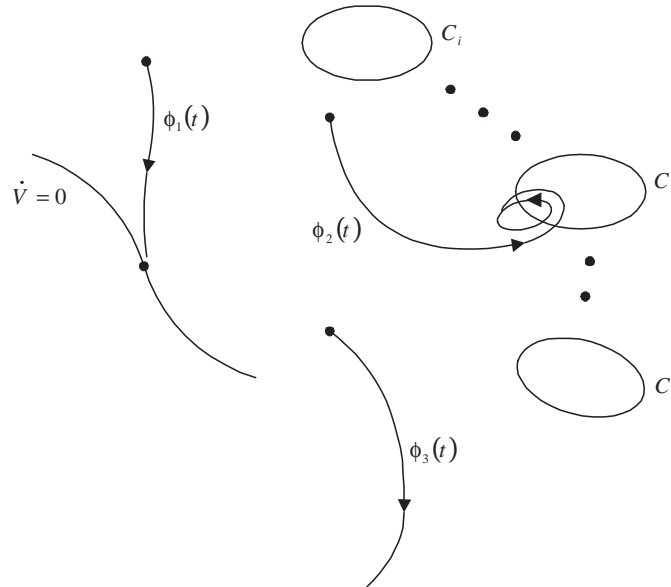


Figura 5.1: Ilustração geométrica do Teorema 5.1.3. Três possibilidades podem ocorrer: (i) a solução limitada  $\phi_1(t)$  converge para o conjunto  $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , (ii) a solução limitada  $\phi_2(t)$  tem intersecção não vazia com  $C_j$ , (iii)  $\phi_3(t)$  é ilimitada.

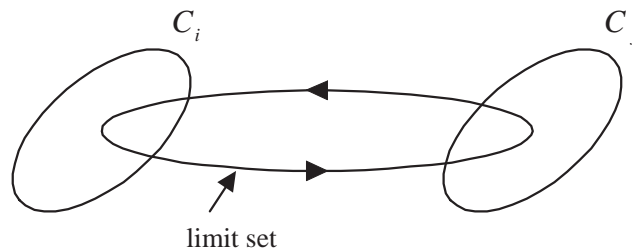


Figura 5.2: Ilustração do Teorema 5.1.3. O conjunto  $\omega$ -limite pode interceptar mais do que uma componente conexa  $C_j$  de  $C$ . Nesta figura um ciclo limite tem intersecção não vazia com duas componentes conexas  $C_i$  e  $C_j$  de  $C$ .

A principal diferença entre a função energia estendida e a generalizada é que a função energia estendida requer que todos os conjuntos limites estejam contidos no conjunto onde a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias é igual a zero enquanto que a função energia generalizada relaxa esta condição. Contudo, a próxima observação mostra que pontos de equilíbrio, em particular, necessariamente pertencem ao conjunto  $M$  onde a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias é igual a zero tanto para a função energia generalizada quanto para a estendida.

**Observação 5.1.4** Como  $\dot{V}(x) = \langle \text{grad}V, f(x) \rangle$ , todos os pontos de equilíbrio pertencem ao conjunto  $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0 \right\}$ .

A energia generalizada não exclui a possibilidade de conjuntos limites gerais pertencerem ao conjunto  $M$ , entretanto, dificilmente encontra-se uma função energia satisfazendo esta condição em problemas práticos.

## 5.2 Função Energia Generalizada e Área de Atração

Para efeito de caracterização da área de atração de um conjunto atrativo, podemos relaxar algumas das condições da função energia generalizada. Mais precisamente, a existência de um número finito de componentes conexas  $C_{i's}$  de  $C$  no espaço inteiro não é necessária, ao invés disto, exige-se que o número de componentes conexas  $C_{i's}$  interceptando a área de atração seja finito. Formalmente tem-se:

**Definição 5.2.1** Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é uma função energia generalizada para o sistema (5.1) se

(C4) O número de componentes conexas  $C_i$  de  $C$  tal que  $A(\gamma) \cap C_i \neq \emptyset$  é finito.

(C5) Se  $A(\gamma) \cap C_i \neq \emptyset$ , então  $C_i$  é limitado.

(C6)  $\sup_{t \geq 0} |V(\phi(t, x_o))| < \infty$  implica que  $\phi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ .

A próxima proposição mostra que uma função energia generalizada é limitada inferiormente na fronteira da área de atração mesmo que a fronteira seja ilimitada.

**Proposição 5.2.2** Seja  $\gamma$  um conjunto compacto e atrativo do sistema (5.1). Se uma certa função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as hipóteses (C4) e (C5), então  $V(x)$  tem um limitante inferior na fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$  de  $\gamma$ .

**Demonstração:** Seja  $D$  a união de todas as componentes conexas  $C_{i's}$  de  $C$  com intersecção não vazia com  $A(\gamma)$ . Seja  $\hat{x} \in \partial A(\gamma)$ . Se  $\hat{x} \in \bar{D}$ , então, usando continuidade de  $V$ , hipótese (C4) e compacidade de cada uma das componentes  $\bar{C}_j$  de  $\bar{C}$ , conclui-se que  $V(\hat{x}) \geq \min_{j, C_j \cap A(\gamma) \neq \emptyset} \left\{ \min_{y \in \bar{C}_j} V(y) \right\}$ .

Se  $\hat{x} \notin \bar{D}$ , então, arbitrariamente próximo de  $\hat{x}$ , existe  $x_o \in A(\gamma)$  e  $x_o \notin \bar{D}$ . Agora analisam-se as seguintes duas possibilidades:

(i) Suponha que  $\varphi(t, x_o) \notin D$  para todo  $t \geq 0$ , então  $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o)$  para  $t \geq 0$ . Usando continuidade de  $V$  e o fato de que  $\varphi(t, x_o)$  converge para  $\gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$  e  $x_o$  está arbitrariamente próximo de  $\hat{x}$ , conclui-se que  $V(\hat{x}) \geq \min_{y \in \gamma} V(y)$ .

(ii) Se (i) não é verdade, então existe uma componente conexa  $C_{j_1}$  e um par de tempos  $t_1$  e  $t_1^*$ , com  $0 \leq t_1 \leq t_1^*$ , tal que  $\varphi(t, x_o) \notin D$  para  $0 < t < t_1$  e  $\varphi(t, x_o) \in C_{j_1}$  para  $t_1 < t < t_1^*$ . Então,  $V(\varphi(t_1, x_o)) \leq V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o)$  para  $0 \leq t \leq t_1$  e

$V(\varphi(t_1, x_o)) \leq V(\varphi(t, x_o))$  para  $t_1 < t < t_1^*$ . Como conseqüência, um mínimo local de  $V$  ao longo da trajetória  $\varphi(t, x_o)$  é atingido no tempo  $t_1$  quando a trajetória toca o conjunto  $\partial C_{j_1}$ . Então, usando a compacidade de  $\bar{C}_{j_1}$  e continuidade de  $V$ , conclui-se que  $\min_{y \in \bar{C}_{j_1}} V(y)$  é um limitante inferior para  $V(\hat{x})$ , isto é,  $V(\hat{x}) \geq \min_{y \in \bar{C}_{j_1}} V(y)$ .

Da hipótese (C4) (existe um número finito de  $C_{i_s}$  interceptando  $A(\gamma)$ ) e continuidade de  $V$ , conclui-se que  $V(x)$  tem um limitante inferior em  $\partial A(\gamma)$  dado por  $\min \{ \min_{y \in \gamma} V(y), \min_{y \in \bar{D}} V(y) \}$ .  $\square$

Mostraremos agora que todas as trajetórias na fronteira da área de atração de  $\gamma$  do sistema (5.1) são limitadas para  $t \geq 0$ . Esta importante propriedade de limitação das trajetórias na fronteira da área de atração será muito útil para extrairmos informações importantes a respeito dos conjuntos limites na fronteira da área de atração.

**Proposição 5.2.3** *Se o sistema (5.1) possui uma função energia generalizada  $V$  satisfazendo as hipóteses (C4)-(C6) e  $\gamma$  é um conjunto compacto e atrativo de (5.1), então toda trajetória em  $\partial A(\gamma)$  é limitada.*

**Demonstração:** Seja  $D$  como na demonstração da proposição 5.2.2. Da Proposição 5.2.2,  $V(x)$  tem um limitante inferior, digamos  $\alpha$ , em  $\partial A(S)$ . Seja  $x_o \in \partial A(\gamma)$  e seja  $\omega_+$  o máximo tempo de existência de  $\varphi(t, x_o)$ . Como  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto invariante,  $\varphi(t, x_o) \in \partial A(\gamma)$  para  $t \in [0, \omega_+)$ . Se  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para todo  $t \in [0, \omega_+)$  então  $V(x_o) \geq V(\varphi(t, x_o)) \geq \alpha$  para todo  $t \in [0, \omega_+)$ . Da hipótese (C6),  $\varphi(t, x_o)$  é limitada e então conclui-se que  $\omega_+ = \infty$ .

Se por outro lado  $\varphi(t, x_o)$  tem intersecção não vazia com  $C$ , então existe uma componente conexa  $C_{j_1}$  de  $C$  e um par de tempos  $t_1$  e  $t_1^*$ , com  $0 \leq t_1 < t_1^*$ , tais que  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para  $0 < t < t_1$  e  $\varphi(t, x_o) \in C_{j_1}$  para  $t_1 < t < t_1^*$ .

Se  $t_1^* = \infty$ , isto é,  $\varphi(t, x_o)$  não abandona  $\bar{C}_{j_1}$  para todo  $t \in [t_1, \omega_+)$  então  $\omega_+ = \infty$  e  $\varphi(t, x_o)$  é limitada para  $t \geq 0$ . Se este não é o caso, isto é,  $t_1^* < \infty$ , então duas situações podem ocorrer: ou (1)  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para todo  $t_1^* < t < \omega_+$  ou (2) existe uma componente conexa  $C_{j_2}$  e um par de tempos  $t_2$  e  $t_2^*$  satisfazendo  $t_1^* < t_2 < t_2^*$  tal que  $\varphi(t, x_o) \notin C$  para  $t_1 < t < t_2$  e  $\varphi(t, x_o) \in C_{j_2}$  para  $t_2 < t < t_2^*$ .

Se (1) ocorrer, tem-se que  $\max\{V(x_o), V(\varphi(t_1^*, x_o))\} \geq V(\varphi(t, x_o)) \geq \alpha$  para todo  $t \in [0, \omega_+)$ . Da hipótese (C6),  $\varphi(t, x_o)$  é limitada para  $t \in [0, \omega_+)$  e então conclui-se que  $\omega_+ = \infty$ .

Se (2) ocorrer, e se  $t_2^* = \infty$ , então  $\varphi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ , caso contrário se  $t_2^* < \infty$ , então a análise prévia é repetida.

Das hipóteses (C4) e (C5), conclui-se que  $\alpha \leq V(\varphi(t, x_o)) \leq \max\{V(x_o), \max_{y \in \bar{D}} V(y)\}$  para qualquer  $x_o \in \partial A(\gamma)$  para  $t \geq 0$  e então, da hipótese (C6), prova-se que toda trajetória na fronteira da área de atração é limitada.  $\square$

O próximo teorema estabelece a relação entre os conjuntos limites na fronteira da área de atração e as funções energia generalizadas. O conhecimento do com-

portamento dos conjuntos limites na fronteira da área de atração pode fornecer informações úteis a respeito da própria fronteira.

**Teorema 5.2.4** *Se  $V$  é uma função energia generalizada do sistema (5.1) satisfazendo as hipóteses (C4)-(C6),  $\gamma$  é um conjunto compacto e atrativo de (5.1) e  $x_o \in \partial A(\gamma)$ , então ou*

- (i)  $\varphi(t, x_o)$  tende para a maior coleção de conjuntos invariantes contida em  $M \cap \partial A(\gamma)$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou
- (ii) existe uma seqüência de tempos  $\{t_n\} \uparrow \infty$  tal que  $\varphi(t_n, x_o) \in C_{j_n} \cap \partial A(\gamma)$ . Neste caso, existe pelo menos uma componente conexa  $C_{j_n}$  tal que  $\omega(x_o) \cap \bar{C}_{j_n} \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** Proposição 5.2.3 garante que as trajetórias na fronteira da área de atração são limitadas para  $t \geq 0$ . Então, as conclusões (i) e (ii) para os conjuntos limites de  $x_o$  seguem imediatamente da aplicação do Teorema 5.1.3 restrito ao conjunto invariante  $\partial A(\gamma)$ .  $\square$

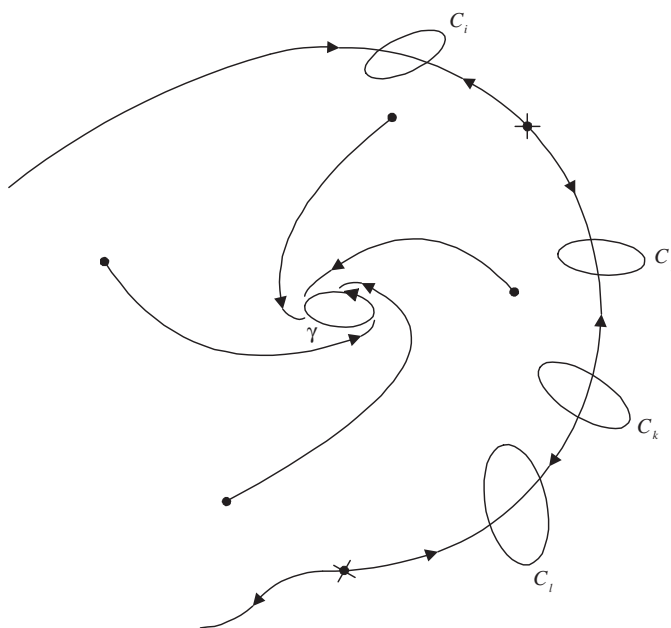


Figura 5.3: A fronteira da área de atração e sua relação com os conjuntos  $C_{i's}$ .

As proposições a seguir serão muito úteis para se obter estimativas locais da área de atração via funções energia generalizadas.

**Proposição 5.2.5** *Mínimos locais da função energia generalizada  $V$  na fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$  são atingidos no conjunto  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V} = 0\} \cap \partial A(\gamma)$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $\hat{x} \in \partial A(\gamma)$  é um mínimo local de  $V$  em  $\partial A(\gamma)$  e suponha, por contradição, que  $\hat{x} \notin M$ . Então  $\dot{V}(\hat{x}) \neq 0$  e, da Observação 5.1.4,

$f(\hat{x}) \neq 0$ . Considere a trajetória  $\varphi(t, \hat{x})$  passando por  $\hat{x}$ . Como  $\partial A(\gamma)$  é um conjunto invariante,  $\varphi(t, \hat{x}) \in \partial A(\gamma)$  para todo  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto contendo a origem. Se  $\dot{V}(\hat{x}) < 0$ , então existe um tempo  $t^* > 0$  em  $I$  tal que  $V(\varphi(t, \hat{x})) < V(\hat{x})$  para todo  $0 < t < t^*$ . Isto implica que arbitrariamente próximo de  $\hat{x}$  existe  $\hat{y} \in \partial A(\gamma)$  tal que  $V(\hat{y}) < V(\hat{x})$ . Mas isto é uma contradição. Argumentação similar aplica-se se  $\dot{V}(x) > 0$  para algum tempo negativo  $t^* < 0$ . Portanto, todo mínimo local de  $V$  pertence a  $M$ .  $\square$

**Proposição 5.2.6** *A função energia generalizada  $V$  tem um mínimo global na fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$ .*

**Demonstração:** Como  $V$  é uma função contínua e limitada inferiormente no conjunto fechado  $\partial A(\gamma)$ , então o mínimo global existe.  $\square$

O mínimo global de  $V$  na fronteira da área de atração possui um papel muito importante para a obtenção de uma estimativa da área de atração. Infelizmente, encontrar o mínimo global em  $M$  não é uma tarefa simples, entretanto, esta tarefa pode se tornar mais simples se a seguinte condição for satisfeita.

$$(C7) \quad M \subset \bigcup_i \bar{C}_i \cup E.$$

**Observação:** Se as hipóteses (C4), (C5) e (C7) são satisfeitas, então  $M$  é composto de um número finito de componentes conexas disjuntas e limitadas. Cada componente conexa ou é formada por um ponto de equilíbrio ou pertence a  $\partial C_i$ .

Como  $\bar{C}_i$  e  $E$  são conjuntos compactos e  $V$  é uma função contínua, então o mínimo  $L_i$  de  $V$  em cada componente conexa de  $M$  existe. Obviamente,  $L_i \leq \min_{x \in \partial C_i \cap \partial A(\gamma)} V(x)$ , isto é, o mínimo de  $V$  em  $\partial C_i$  é um limitante inferior local de  $V$  na fronteira da área de atração.

Como existe um número finito de componentes conexas  $C_{i's}$  e um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração, existe um número  $L$  satisfazendo  $L := \min_i L_i$ . Genericamente, existe uma única componente conexa  $C_k$  (ou um equilíbrio  $x_k$ ) tal que  $L = L_k$ .

O número  $L$  fornece uma estimativa da área de atração via função energia generalizada. O próximo Teorema apresenta condições suficientes para garantir que a componente conexa  $S_c(L)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  contendo  $\gamma$  é uma estimativa da área de atração, isto é,  $S_c(L) \subset A(\gamma)$ .

**Teorema 5.2.7** *Considere o sistema (5.1) com uma função energia generalizada  $V$  satisfazendo as hipóteses (C4)-(C7). Sejam  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  os pontos de equilíbrio do tipo 1 na fronteira da área de atração e  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  as componentes conexas de  $C$  com intersecção não vazia com a fronteira da área de atração  $\partial A(\gamma)$ . Seja  $L \leq \min\{\min_i V(x_i), \min_{x \in \bigcup_i \partial C_i} V(x)\}$  e  $S_c(L)$  a componente conexa do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  contendo  $\gamma$ . Então  $S_c(L)$  é uma estimativa da área de atração, isto é,  $S_c(L) \subset A(\gamma)$*

**Demonstração:** Suponha, por contradição, que  $S_c(L) \not\subset A(\gamma)$ . Como  $S_c(L)$  é um conjunto conexo e  $\gamma$  está contido em  $S_c(L)$ , deve existir pelo menos um ponto  $\hat{y}$  tal que  $\hat{y} \in \partial A(\gamma)$  e  $\hat{y} \in S_c(L)$ . Usando as conclusões das Proposições 5.2.5 e 5.2.6 tem-se que  $V(\hat{y}) \geq L$ . Mas pela definição de  $S_c(L)$ ,  $V(\hat{y}) < L$ , logo, chegamos a uma contradição.  $\square$

Figura 5.4 mostra a relação entre as superfícies de nível e a área de atração.

**Observação 5.2.8** *A estimativa  $S_c(L)$  não é ótima no sentido de que pode existir um nível maior  $L_2 > L$  tal que  $S_c(L) \subset S_c(L_2) \subset A(\gamma)$ . Entretanto, o número  $L$  é a melhor estimativa computacional que pode-se obter uma vez que não se sabe de antemão a localização da fronteira da área de atração para o cálculo do mínimo de  $V$  na fronteira.*

O teorema anterior é muito útil para obterem-se estimativas da área de atração, contudo é importante observar que não existem garantias de que  $S_c(L)$  seja um conjunto positivamente invariante. Figura 5.5 mostra a situação onde o conjunto  $S_c(L)$  não é positivamente invariante. O Teorema a seguir fornece condições para garantir a invariância positiva de  $S_c(L)$ .

**Teorema 5.2.9** *Suponha que todas as condições de Teorema 5.2.7 sejam satisfeitas. Suponha que  $l = \sup_{x \in S_c(L) \cap C} V(x) < L$ , então  $S_c(L)$  é um subconjunto de  $A(\gamma)$  positivamente invariante.*

**Demonstração:** Do Teorema 5.2.7 tem-se que  $S_c(L) \subset A(\gamma)$ . Precisamos somente mostrar que  $S_c(L)$  é positivamente invariante. Suponha, por contradição, que  $x_o \in S_c(L)$  e que exista um tempo  $t^*$  tal que  $\varphi(t^*, x_o) \notin S_c(L)$ . Então,  $V(x_o) < L$ . A continuidade das soluções garante a existência de um tempo  $\hat{t}$ , satisfazendo  $\hat{t} < t^*$  tal que  $V(\varphi(\hat{t}, x_o)) = L$  pela primeira vez. Por outro lado, condição  $l = \sup_{x \in S_c(L) \cap C} V(x) < L$  garante a existência de um tempo  $\tilde{t}$  satisfazendo  $0 \leq \tilde{t} < \hat{t}$  tal que  $V(\varphi(\tilde{t}, x_o)) < L$  e  $\dot{V}(\varphi(t, x_o)) < 0$  para todo  $t \in (\tilde{t}, \hat{t})$ . Isto é um absurdo e consequentemente o teorema é verdadeiro.  $\square$

Figura 5.6 ilustra a relação entre as superfícies de nível  $S_c(L)$  e  $S_c(l)$  do Teorema 5.2.9.

Baseado nos resultados anteriores, o seguinte algoritmo conceitual para estimar a área de atração via função energia generalizada é proposto.

**Algoritmo:**

1. Encontre todos os pontos de equilíbrio e componentes conexas  $C_{i's}$  de  $C$  na área de atração de  $\gamma$ .
2. Calcule o número  $L$  como sendo o mínimo de  $V$  no conjunto formado pela união dos pontos de equilíbrio e componentes  $\overline{C_{i's}}$  na fronteira da área de atração.

3. A componente conexa  $S_c(L)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  contendo  $\gamma$  é uma estimativa da área de atração.

As vantagens de se utilizar a função energia generalizada e o algoritmo conceitual apresentado anteriormente para estimar a região de estabilidade são: (i) No caso de comportamentos dinâmicos complexos existirem na fronteira da área de atração, dificilmente encontra-se uma função energia ou uma função energia estendida. A função energia generalizada proposta nesta tese exige menos sobre a função energia permitindo ou simplificando o tratamento de uma classe maior de sistemas dinâmicos. (ii) O algoritmo não requer o cálculo dos elementos críticos, como ciclos limites, na fronteira da área de atração mas apenas a localização dos conjuntos  $C_i$ .

Embora este algoritmo forneça um caminho para estimar a área de atração nos casos em que comportamentos complexos existem na fronteira da área de atração, ele possui as seguintes dificuldades numéricas: (i) Não existe um procedimento sistemático para verificar se uma componente  $C_i$  tem intersecção não vazia com a fronteira da área de atração, (ii) o cálculo de  $L$  é um problema de minimização com restrições. Entretanto, para algumas classes de problemas, o campo vetorial e a função energia generalizada fornecem pistas a respeito da localização destes conjuntos. Este é o caso da classe de sistemas dinâmicos estudados na próxima seção.

### 5.3 Uma classe de sistemas que satisfazem as hipóteses (C4)-(C7)

Considere a seguinte classe de sistemas dinâmicos não lineares:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ M\dot{y} &= -Dy - \frac{\partial V_p}{\partial x} + \varepsilon g(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $M$  e  $D$  são matrizes diagonais com entradas positivas e  $\varepsilon$  é um número real pequeno. A função  $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$  e  $g$  é uma função uniformemente limitada de classe  $C^1$ . Admitiremos que o sistema (5.2) tem um número finito de pontos de equilíbrios isolados em conjuntos compactos e na fronteira da área de atração de  $\gamma$ . Esta classe de sistemas aparece, por exemplo, na análise de estabilidade transitória de sistemas de potência na presença de condutâncias de transferência [40].

Considere a seguinte função com  $\beta > 0$ .

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^T M y + V_p(x) + \beta \left[ \frac{\partial V_p}{\partial x} - \varepsilon g(x) \right]^T y \quad (5.3)$$

**Proposição 5.3.1** *Considere o sistema dinâmico não linear (5.2) onde  $V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Se  $g$  é uma função uniformemente limitada, então, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a função (5.3) satisfaz as hipóteses (C4), (C5) e (C7) de uma função energia generalizada.*



**Demonstração:** É fácil ver que

$$\dot{V}(x, y) = - \left[ y^T \quad \left[ \frac{\partial V_p}{\partial x} - \varepsilon g(x) \right]^T \right] Q \begin{bmatrix} y^T \\ \frac{\partial V_p}{\partial x} - \varepsilon g(x) \end{bmatrix} + \varepsilon g^T(x) y$$

$$\text{onde } Q = \begin{bmatrix} D - \beta \frac{\partial^2 V_p}{\partial x^2} + \beta \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{1}{2} \beta D M^{-1} \\ \frac{1}{2} \beta D M^{-1} & \beta M^{-1} \end{bmatrix}$$

Em primeiro lugar, provaremos que a matriz  $Q$  é positiva definida para  $\beta > 0$  suficientemente pequeno. Pela continuidade dos determinantes com relação às entradas da matriz, sabe-se, para  $\beta$  suficientemente pequeno, que  $A := D - \beta \frac{\partial^2 V_p}{\partial x^2} + \beta \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x} > 0$ , ou seja, a matriz  $A$  é definida positiva. Denota-se por  $A_{ij}$  o menor de  $A$  obtido removendo-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna. Considere agora o seguinte menor da matriz  $Q$ :

$$B_1 := \left[ \begin{array}{cccc|c} & & & & \frac{1}{2} \beta D_1 M_1^{-1} \\ & & & & 0 \\ & & A & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline \frac{1}{2} \beta D_1 M_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \beta M_1^{-1} \end{array} \right]$$

Usando a expansão de Laplace para determinantes através de menores, tem-se:

$$\det B_1 = \beta M_1^{-1} \left[ \det A - \frac{1}{4} \beta D_1^2 M_1^{-1} \det A_{11} \right]$$

Como  $A > 0$  é simétrica, então  $\det A > 0$  e  $\det A_{11} > 0$ . Consequentemente,  $\det B_1 > 0$  se  $0 < \beta < \frac{4M_1 \det A}{D_1^2 \det A_{11}}$ . A demonstração se completa aplicando-se este procedimento de maneira recursiva, isto é, agora consideramos a matriz:

$$B_2 := \left[ \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} \beta D_2 M_2^{-1} \\ & & & & 0 \\ & & B_1 & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} \beta D_2 M_2^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \beta M_2^{-1} \end{array} \right]$$

para mostrar que:

$$\det B_2 = \beta M_2^{-1} \left[ \det B_1 - \frac{1}{4} \beta D^2 M_2^{-1} \det B_{122} \right]$$

Como  $\det B_1 = \mathcal{O}(\beta) > 0$  e  $\det B_{122} = \mathcal{O}(\beta) > 0$ , então  $\det B_2 > 0$  para  $\beta$  suficientemente pequeno. Repetindo este procedimento  $n$  vezes prova-se que o determinante de todos os menores de  $Q$  são positivos definidos para  $\beta > 0$  suficientemente pequeno e, como consequência do critério de Sylvester,  $Q > 0$ .

O termo quadrático de  $\dot{V}$  é igual a zero apenas no conjunto dos pontos de equilíbrio  $E$ . Como  $g$  é uniformemente limitada, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, as regiões onde a derivada de  $V$  é positiva está contida em pequenos conjuntos conexos e limitados  $C_{i's}$  próximos aos pontos de equilíbrio. Como os pontos de equilíbrio são isolados, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, os conjuntos  $C_{i's}$  são isolados, isto é, cada par de conjuntos  $C_i$  e  $C_j$  possui intersecção vazia e a distância entre eles é maior do que zero. Portanto, as hipóteses (C5) e (C7) são satisfeitas no sentido da definição alternativa de  $C$  dada na observação 5.1.1. Um número finito de pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração prova a hipótese (C4).  $\square$

Para provar a hipótese (C6), o campo vetorial desta classe de sistemas dinâmicos tem que ser explorada em maior profundidade. O próximo teorema apresenta condições suficientes para garantir a veracidade da hipótese (C6).

**Proposição 5.3.2** *Se  $V_p$  é uma função própria, isto é, satisfaz*

$$\|V_p(x)\| \rightarrow \infty \iff \|x\| \rightarrow \infty$$

*e ambas funções  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são limitadas, então a função (5.3) satisfaz a hipótese (C6).*

**Demonstração:** Como ambas as funções  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são limitadas então, como uma aplicação direta da fórmula da variação das constantes, prova-se que  $y(t)$  será sempre limitada. Suponha agora, por contradição, que  $\sup_{t \geq 0} \|V\| < \infty$  e  $\phi(t, x_0) = (x(t), y(t))$  é ilimitada para  $t \geq 0$ . Como  $y(t)$  é limitada, então  $x(t)$  deve ser ilimitada para  $t \geq 0$ . Isto implica que  $\sup_{t \geq 0} \|V_p(x(t))\| = \infty$ . Agora usando os fatos de que (i)  $\|y(t)\|$  é limitada para  $t \geq 0$ , (ii)  $\sup_{t \geq 0} \|V_p(x(t))\| = \infty$  e (iii) ambas funções  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são limitadas, conclui-se que  $\sup_{t \geq 0} \|V\| = \infty$ . Isto é uma contradição e portanto  $\sup_{t \geq 0} \|V\| < \infty$  implica que  $\phi(t, x_0) = (x(t), y(t))$  é limitada para  $t \geq 0$ .  $\square$

Agora estamos em posição para apresentar o seguinte teorema a respeito da caracterização da área de atração para a classe de sistemas na forma (5.2).

**Teorema 5.3.3** *Considere o sistema dinâmico (5.2) e a função (5.3). Se  $V_p$  é uma função própria de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são funções limitadas de classe  $C^1$ , então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, toda trajetória em  $\partial A(\gamma)$  é limitada.*

**Demonstração:** Suponha que  $V_p$  seja uma função própria de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  sejam funções limitadas de classe  $C^1$ , então, de acordo com as proposições 5.3.1 e 5.3.2, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, as hipóteses (C4)-(C7) estão satisfeitas e consequentemente, a função  $V$  é uma função energia generalizada de acordo com a definição 5.2.1. Uma aplicação direta da proposição 5.2.3 garante que toda trajetória de (5.2) em  $\partial A(\gamma)$  é limitada.  $\square$

**Corolário 5.3.4** *Considere o sistema dinâmico (5.2) e a função (5.3). Se  $V_p$  é uma função própria de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são funções limitadas de classe  $C^1$  então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, toda trajetória na fronteira da área de atração de um conjunto atrativo  $\gamma$  ou*

- (i) *converge para o maior conjunto invariante contido em  $\{x \in \partial A(\gamma) : \dot{V}(x) = 0\}$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou*
- (ii) *existe uma sequência  $\{t_n\} \uparrow \infty$  tal que  $\phi(t_n, x_o) \in C_{j_n} \cap \partial A(\gamma)$ . Neste caso, existe ao menos um conjunto  $C_{j_n}$  tal que  $\omega(x_o) \cap \bar{C}_{j_n} \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $V_p$  seja uma função própria de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  sejam funções limitadas de classe  $C^1$  então, de acordo com as proposições 5.3.1 e 5.3.2, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, as hipóteses (C4)-(C7) são satisfeitas e como consequência, a função  $V$  é uma função energia generalizada do sistema (5.2) em acordo com a definição 5.2.1. Portanto, a aplicação direta do Teorema 5.2.4 demonstra o corolário.  $\square$

É importante lembrar que conjuntos limites de trajetórias na fronteira da área de atração podem interceptar mais do que uma componente conexa do conjunto  $C$ . Figura 5.2 ilustra esta situação.

## 5.4 Exemplo

O seguinte sistema de equações foi obtido a partir da literatura de sistemas de potência e modelam o comportamento dinâmico de um sistema com dois geradores contra um barramento infinito [40] considerando as condutâncias de transferência:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ M_1 \dot{y}_1 = P_1 - C_1 \sin x_1 - B_1 \cos x_1 - \\ \quad - C_{12} \sin(x_1 - x_2) - \varepsilon \cos(x_1 - x_2) - D_1 y_1 \\ M_2 \dot{y}_2 = P_2 - C_2 \sin x_2 - B_2 \cos x_2 - \\ \quad - C_{12} \sin(x_2 - x_1) - \varepsilon \cos(x_2 - x_1) - D_2 y_2 \end{array} \right.$$

O parâmetro  $\varepsilon$  representa a condutância de transferência. Provou-se na literatura de sistemas de potência [7] a não existência de uma função energia geral para este sistema quando  $\varepsilon \neq 0$ . Portanto, as ferramentas tradicionais para estimar e caracterizar a área de atração não podem ser aplicadas.

Apesar disto, forneceremos, neste exemplo, uma função energia generalizada que satisfaz as hipóteses (C4)-(C7). Usando esta função, uma estimativa da área de atração é obtida.

O conjunto prévio de equa es diferenciais pode ser facilmente reescrito na forma geral (5.2) escolhendo-se:

$$V_p(x_1, x_2) := -P_1x_1 - C_1 \cos x_1 + B_1 \sin x_1 - P_2x_2 \\ - C_2 \cos x_2 + B_2 \sin x_2 - C_{12} \cos(x_1 - x_2) + \alpha$$

e  $g(x_1, x_2) := \cos(x_1 - x_2)$ , onde  $\alpha$    uma constante real arbitrária.   fácil verificar que ambas fun es  $\frac{\partial V_p}{\partial x}$  e  $g$  são uniformemente limitadas. A fun o  $V_p$  não   própria, entretanto, pode-se mostrar que a hipótese (C6)   genericamente satisfeita. Portanto, a fun o

$$V(x_1, x_2, y_1, y_2) = M_1 \frac{y_1^2}{2} + M_2 \frac{y_2^2}{2} + V_p(x_1, x_2) \\ - \beta y_1 [P_1 - C_1 \sin x_1 - B_1 \cos x_1 - C_{12} \sin(x_1 - x_2) \\ - \varepsilon \cos(x_1 - x_2)] \\ - \beta y_2 [P_2 - C_2 \sin x_2 - B_2 \cos x_2 - C_{12} \sin(x_2 - x_1) \\ - \varepsilon \cos(x_2 - x_1)]$$

  uma fun o generalizada desde que ambos  $\beta > 0$  e  $\varepsilon$  sejam suficientemente pequenos.

Uma estimativa para  $\beta$  pode ser obtida calculando-se a derivada desta fun o ao longo das órbitas do sistema.

$$-\dot{V} = \begin{bmatrix} P_{l1}(x_1, x_2) \\ y_1 \\ P_{l2}(x_1, x_2) \\ y_2 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} P_{l1}(x_1, x_2) \\ y_1 \\ P_{l2}(x_1, x_2) \\ y_2 \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^T B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \varepsilon [\cos(x_1 - x_2) - 1] (y_1 + y_2)$$

onde

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right],$$

$$B = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{D_1}{2} & \beta C_{12} \cos(x_1 - x_2) \\ \hline \beta C_{12} \cos(x_1 - x_2) & \frac{D_2}{2} \end{array} \right],$$

$$A_{11} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\beta}{M_1} & -\frac{\beta D_1}{2M_1} \\ \hline -\frac{\beta D_1}{2M_1} & \frac{D_1}{2} + \beta [-C_1 \cos x_1 + B_1 \sin x_1 \\ -C_{12} \cos(x_1 - x_2) + \varepsilon \sin(x_1 - x_2)] \end{array} \right]$$

e

$$A_{22} = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\beta}{M_2} & -\frac{\beta D_2}{2M_2} \\ \hline -\frac{\beta D_2}{2M_2} & \frac{D_2}{2} + \beta [-C_2 \cos x_2 + B_2 \sin x_2 \\ -C_{12} \cos(x_2 - x_1) + \varepsilon \sin(x_2 - x_1)] \end{array} \right]$$

O parâmetro  $\beta$  pode ser escolhido de tal forma a tornar o termo quadrático positivo definido. Aplicando-se o critério de Silvester, facilmente determina-se que isto é certamente garantido se

$$\beta^2 < \frac{D_1 D_2}{4C_{12}^2},$$

$$0 < \beta < \frac{D_1}{2 \left( \frac{D_1^2}{4M} + C_1 + B_1 + C_{12} + \varepsilon \right)}$$

e

$$0 < \beta < \frac{D_2}{2 \left( \frac{D_2^2}{4M} + C_2 + B_2 + C_{12} + \varepsilon \right)}$$

A Figura 5.7 mostra as curvas de nível de  $V$  para os seguintes parâmetros:  $P_1 = 1,78$ ,  $P_2 = 3,83$ ,  $C_1 = 3,16$ ,  $C_2 = 7,85$ ,  $B_1 = 0,28$ ,  $B_2 = 0,255$ ,  $C_{12} = 0,9$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ,  $D_1 = D_2 = 0,1$ ,  $M_1 = 0,053$ ,  $M_2 = 0,079$ ,  $\alpha = 13,017$  e  $\beta = 0,005$ . Estas curvas foram desenhadas no plano  $y_1 = y_2 = 0,8 \text{ rad/s}$ . A região onde a derivada de  $V$  é positiva é composta por dois conjuntos pequenos  $C_1$  e  $C_2$ . Estes conjuntos estão próximos aos pontos de equilíbrio instáveis e suas intersecções com o subconjunto  $\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : y_1 = y_2 = 0,8\}$  está mostrada na Figura 5.8. O número  $L = 1.7619$  foi calculado como sendo o mínimo de  $V$  na fronteira de  $C_2$ . A intersecção da estimativa da área de atração  $\{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) < L\}$  com o subconjunto  $\{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : y_1 = y_2 = 0,8\}$  está mostrada na Figura 5.9. A Figura 5.10 mostra que a escolha de  $L$  não é ótima ilustrando a observação 5.2.8. Contudo, se os conjuntos  $C_i$ 's, neste caso o conjunto  $C_2$ , são pequenos, então a quantidade de conservadorismo introduzida na estimativa não é significativa. Além disto, a escolha de  $L$  é a melhor que pode ser obtida computacionalmente de maneira sistemática.

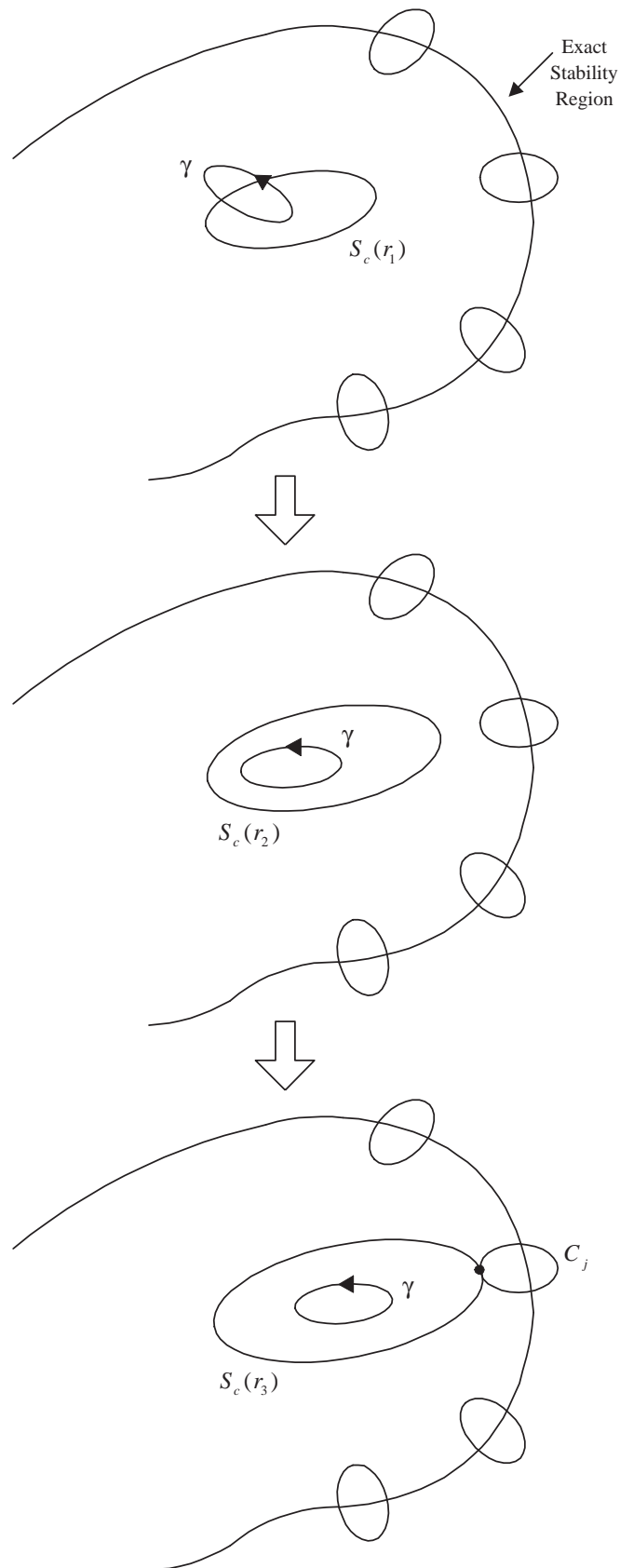


Figura 5.4: Relação entre as superfícies de nível da função energia generalizada  $V$  e a fronteira da área de atração. Os níveis das curvas da figura satisfazem  $r_1 < r_2 = L < r_3$ .)

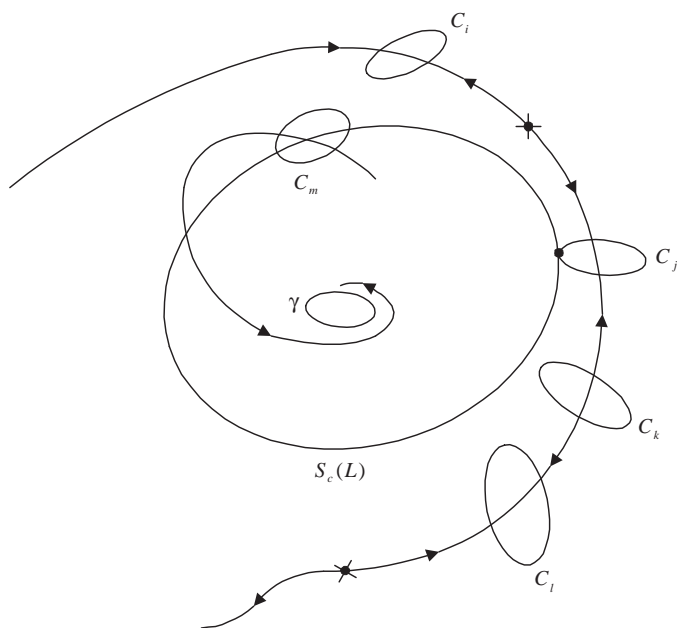


Figura 5.5: O conjunto  $S_c(L)$  é uma estimativa da área de atração de  $\gamma$ , isto é,  $S_c(L) \subset A(\gamma)$ , entretanto, não existe garantia de que este conjunto seja um conjunto positivamente invariante.

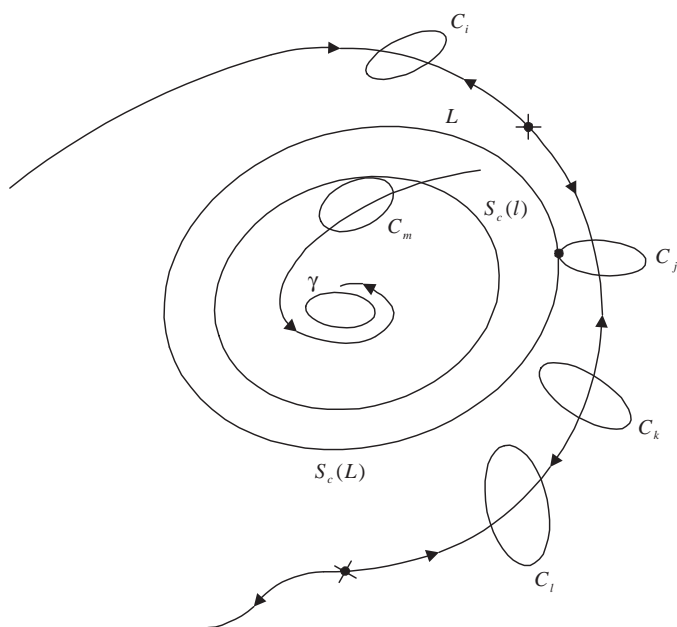


Figura 5.6: No caso  $l < L$ , o conjunto  $S_c(L)$  é um subconjunto de  $A(\gamma)$  positivamente invariante.

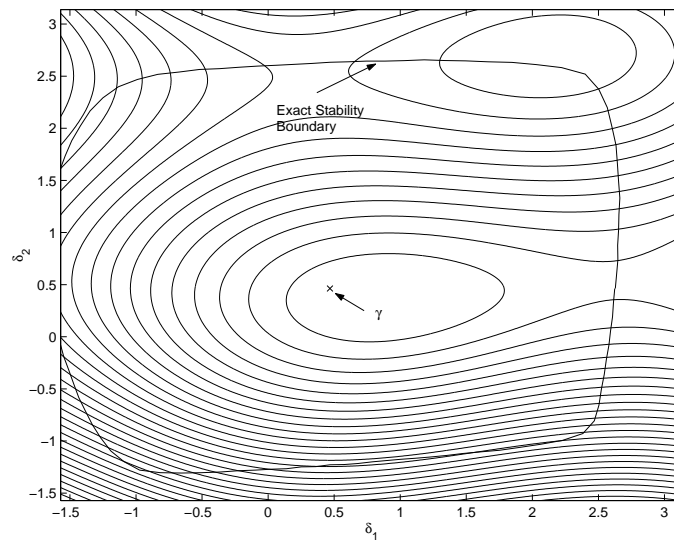


Figura 5.7: Superfícies de nível da função energia generalizada  $V$  e sua relação com a fronteira da área de atração

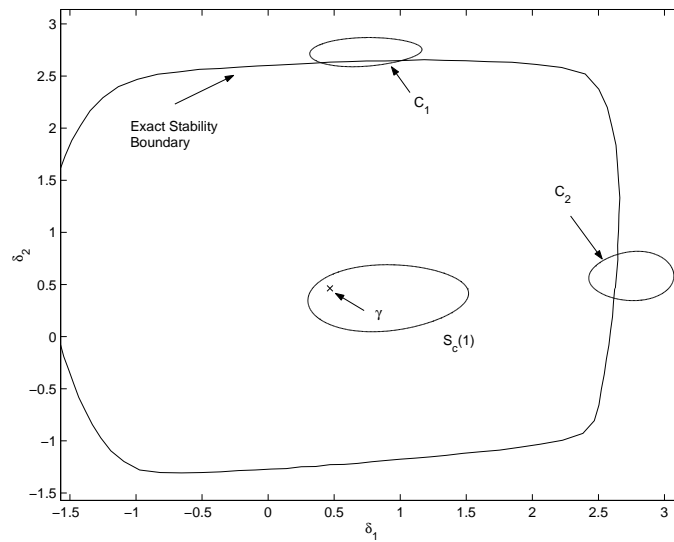


Figura 5.8: A superfície de nível  $S_c(r)$ , para  $r = 1.0 < L = 1.76$ , e sua relação com os conjuntos  $C_{i's}$  e com a área de atração



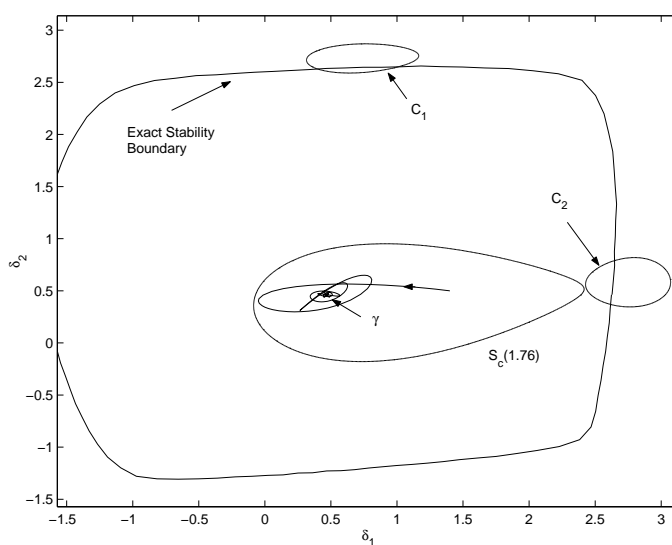


Figura 5.9: Estimativa da área de atração via componente conexa  $S_c(r)$ ,  $r = L = 1.76$ , da superfície de nível e sua relação com os conjuntos  $C_{i's}$  e a fronteira da área de atração

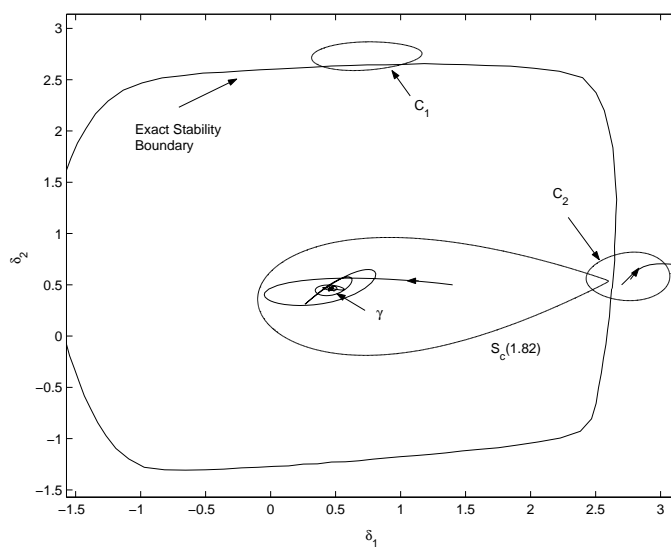


Figura 5.10: A superfície de nível  $S_c(r)$ , para  $r = 1.82 > L = 1.76$ , é a estimativa ótima que pode ser obtida com a função energia generalizada  $V$ .



# Capítulo 6

## Caracterização da Área de Atração em Sistemas com Múltiplas Escalas de Tempo

### 6.1 Introdução

Muitos sistemas físicos, em diversas áreas de aplicação como, por exemplo, sistemas elétricos de potência [37],[14],[25], circuitos eletrônicos [19] e robótica [1], possuem dinâmicas em múltiplas escalas de tempo, isto é, dinâmicas rápidas e lentas coexistem. Embora estes sistemas físicos possuam a mesma estrutura de modelo dos sistemas não lineares regulares, modelados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, a aplicação das técnicas tradicionais usualmente é acompanhada de problemas de natureza numérica e analítica.

Do ponto de vista numérico, o passo de integração utilizado para a resolução numérica de equações diferenciais com múltiplas escalas de tempo tem que ser suficientemente pequeno para simular com precisão as dinâmicas rápidas. Isto pode tornar o processo de integração numérica proibitivo uma vez que um grande esforço computacional seria necessário para simular as dinâmicas lentas. Além disto, algoritmos de integração numérica mais complexos e adequados para sistemas não-lineares do tipo "stiff" podem ser necessários. Tanto do ponto de vista computacional como analítico, as técnicas tradicionais usualmente proporcionam estimativas muito conservadoras da área de atração [16],[22],[38] e caracterizações muito grosseiras dos conjuntos atrativos. Todas estas dificuldades motivam o desenvolvimento de ferramentas de análise de sistemas não lineares que sejam adequadas a sistemas com múltiplas escalas de tempo. Neste capítulo estuda-se o problema de estabilidade e estimativa da área de atração de sistemas com múltiplas escalas de tempo. Em particular, abordam-se os seguintes tópicos:

- Caracterização da área de atração de sistemas singularmente perturbados.
- Análise de estabilidade via funções energia compostas.

- Análise de estabilidade da dinâmica rápida de maneira uniforme (ou robusta) à dinâmica lenta.

As técnicas propostas neste capítulo usualmente fornecem estimativas da área de atração e dos conjuntos atrativos menos conservadoras se comparadas às técnicas tradicionais. Além disto, as estimativas são usualmente obtidas com menos esforço computacional.

No primeiro tópico, alguns resultados parciais relacionados à caracterização da área de atração de sistemas singularmente perturbados são apresentados. O objetivo destes resultados é fundamental, do ponto de vista teórico, a decomposição dos algoritmos de estimativa da parte relevante da fronteira da área de atração, tais como o método PEBS [10] e o BCU [11], em uma etapa de dinâmicas rápidas e outra de dinâmicas lentas.

No segundo tópico, decompõe-se a análise de estabilidade de um sistema singularmente perturbado utilizando-se o conceito de função de Lyapunov composta proposta em [37]. Nesta decomposição, a função de Lyapunov é composta pela soma de uma função de Lyapunov do sistema lento com uma função de Lyapunov do sistema rápido. Nesta tese, generaliza-se este resultado para funções energia compostas.

O terceiro e último tópico a ser discutido neste capítulo trata da análise de estabilidade das variáveis com dinâmica rápida de maneira uniforme com relação às variáveis com dinâmica lenta. Esta técnica fundamenta-se nas idéias de estabilidade uniforme apresentadas nas referências [35] [17]. Ela é muito útil quando a estabilidade das variáveis lentas não é uma preocupação mas sim a estimativa da área de atração. Neste caso, ela usualmente fornece resultados menos conservadores. Nas aplicações práticas, perturbações usualmente excitam mais as variáveis rápidas do que as lentas, logo as variáveis rápidas assumem um papel muito importante na estimativa da parte relevante da área de atração.

## 6.2 Sistemas Singularmente Perturbados

Considere a seguinte classe de sistemas não lineares singularmente perturbados:

$$(\Sigma_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(x, z) & x(t_o) &= x_o \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z) & z(t_o) &= z_o \end{cases} \quad (6.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$ . As funções  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  são de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $\varepsilon$  é um número real não negativo e pequeno. Denotaremos a trajetória de  $(\Sigma_\varepsilon)$  iniciando em  $(x_o, z_o)^T$  por  $\varphi_\varepsilon(t, x_o, z_o) = (x_\varepsilon(t, x_o, z_o), z_\varepsilon(t, x_o, z_o))^T$ . Seja  $E$  o conjunto dos pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$ , isto é,  $E := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : f(x, z) = 0, g(x, z) = 0\}$ .

O sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  é conhecido na literatura como sistema singularmente perturbado e o principal interesse é estudar o seu comportamento quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Suponha

que  $(x^s, z^s)$  seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_\varepsilon)$  e seja  $A_\varepsilon(x^s, z^s) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \varphi_\varepsilon(t, x, z) \rightarrow (x^s, z^s) \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$  a área de atração de  $(x^s, z^s)$ . Estar-se-á particularmente interessado no estudo da área de atração  $A_\varepsilon(x^s, z^s)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Em particular, deseja-se estabelecer a relação entre  $A_\varepsilon(x^s, z^s)$  e as áreas de atração de dois sistemas simplificados associados, são eles o sistema lento e o sistema rápido.

### 6.2.1 O Sistema Lento

Fazendo-se  $\varepsilon = 0$  em  $(\Sigma_\varepsilon)$ , obtém-se o sistema lento o qual é representado pelo seguinte conjunto de equações algébricas-diferenciais (EAD):

$$(\Sigma_o) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ 0 = g(x, z) \end{cases} \quad x(t_o) = x_o$$

A equação algébrica  $0 = g(x, z)$  restringe a dinâmica do sistema lento  $(\Sigma_o)$  a um conjunto  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Mais precisamente,

$$\Gamma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : 0 = g(x, z)\}.$$

O conjunto  $\Gamma$  contém todos os pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$  e é um conjunto invariante com relação a  $(\Sigma_o)$ . Supondo que  $\text{posto}[D_x g \ D_z g] = m$  para todo  $(x, z) \in \Gamma$ , a forma local das submersões [31] garante que  $\Gamma$  é uma variedade suave de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Tipicamente,  $\Gamma$  é uma variedade composta de várias componentes conexas e disjuntas entre si.

Seja

$$S := \{(x, z) \in \Gamma : D_z g(x, z) \text{ é singular}\}$$

o conjunto de pontos singulares em  $\Gamma$  e seja

$$NH := \{(x, z) \in \Gamma : D_z g(x, z) \text{ tem pelo menos um autovalor com parte real igual a zero.}\}$$

o conjunto de pontos não hiperbólicos em  $\Gamma$ . É fácil ver que  $S \subset NH \subset \Gamma$ .

Como mostrado em [42], o conjunto  $NH$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$  que separa cada uma das componentes conexas de  $\Gamma$  em componentes menores  $\Gamma_{i's}$  tal que  $\Gamma \setminus NH = \cup_i \Gamma_i$ .

Denotaremos por  $\varphi_o(t, x_o, z_o) := (x_o(t, x_o, z_o), z_o(t, x_o, z_o))^T$  a trajetória do sistema  $(\Sigma_o)$  iniciando em  $(x_o, z_o)^T \in \Gamma$  e por  $A_o(x^s, z^s) = \{(x, z) \in \Gamma : \varphi_o(t, x, z) \rightarrow (x^s, z^s) \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$  a área de atração do ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $(x^s, z^s)$  com relação ao sistema  $(\Sigma_o)$ .

Nos pontos não singulares de  $\Gamma$ , isto é, pontos de  $\Gamma$  onde  $D_z g$  é não singular, o conjunto de equações algébricas-diferenciais  $(\Sigma_o)$  induz um campo vetorial na variedade  $\Gamma$ . O campo vetorial induzido pode ser facilmente obtido pelo teorema

da função implícita [27]. Mais precisamente, suponha (sem perda de generalidade) que na origem, a matriz Jacobiana  $D_z g$  seja não singular, então, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única solução local para a equação algébrica  $z = h(x)$ , satisfazendo  $0 = g(x, h(x))$  com  $h(0) = 0$ , a qual define uma variedade de dimensão  $n$ ,  $M_o = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : z = h(x), x \in D_1\}$  onde  $D_1 \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto conexo contendo a origem. Sendo assim, a equação  $(\Sigma_o)$ , pelo menos numa vizinhança da origem, pode ser escrita como:

$$(\Sigma_{red}) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, h(x)) \\ z = h(x) \end{cases} \quad x(t_o) = x_o$$

O sistema  $(\Sigma_{red})$  é chamado de modelo reduzido. Denotaremos a trajetória do sistema reduzido iniciando em  $(x_o, h(x_o))$  por  $\bar{\varphi}(t, x_o) := (\bar{x}(t, x_o), \bar{z}(t) = h(\bar{x}(t, x_o)))$  e o conjunto de pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_{red})$  por  $E_{red}$ , isto é,  $E_{red} := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x, h(x)) = 0\}$ .

### 6.2.2 O Sistema Rápido

Para explorar as propriedades de diferentes escalas de tempo de  $(\Sigma_\varepsilon)$ , define-se a escala de tempo rápida  $\tau := \frac{t}{\varepsilon}$ . Nesta nova escala de tempo, o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  assume a forma:

$$(\Pi_\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, z) \\ \frac{dz}{d\tau} = g(x, z) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_o) = x_o \\ z(t_o) = z_o \end{cases} \quad (6.2)$$

Denotaremos por  $\phi_\varepsilon(\tau, x_o, z_o)$  a solução de  $(\Pi_\varepsilon)$  iniciando em  $(x_o, z_o)$ . É evidente que  $\phi_\varepsilon(\tau, x_o, z_o) = \varphi_\varepsilon(\varepsilon\tau, x_o, z_o)$ .

O sistema rápido (também conhecido em inglês por "boundary-layer-system (BLS)") é obtido fazendo-se  $\varepsilon = 0$  na equação anterior, isto é,

$$(\Pi_o) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 0 \\ \frac{dz}{d\tau} = g(x, z) \end{cases}$$

ou simplesmente

$$(\Pi_{BLS}) \quad \frac{dz}{d\tau} = g(x, z)$$

onde  $x$  é "congelado" e tratado como um parâmetro.

Denotaremos por  $\phi_o(\tau, x_o, z_o) := (\tilde{x}(\tau) \equiv x_o, \tilde{z}(\tau, x_o, z_o))^T$  a trajetória de  $(\Pi_o)$  iniciando em  $(x_o, z_o)^T$  (onde  $\tilde{z}(\tau, x_o, z_o)$  é a solução do sistema  $(\Pi_{BLS})$  iniciando em  $z_o$  para  $x = x_o$  fixo) e por  $A_{BLS}(x^*, z^*) = \{z \in \mathbb{R}^m : \phi_o(\tau, x^*, z) \rightarrow (x^*, z^*) \text{ quando } \tau \rightarrow \infty\}$  a área de atração do equilíbrio  $(x^*, z^*)$  com relação ao sistema  $(\Pi_{BLS})$  para  $x = x^*$  fixo. O conjunto de pontos de equilíbrio de  $\Pi_{BLS}$  para o parâmetro fixo  $x_o$  será denotado por  $E_{x_o}$ , isto é,  $E_{x_o} := \{z \in \mathbb{R}^m : g(x_o, z) = 0\}$ .

Sob certas condições de estabilidade, espera-se que a componente de dinâmica rápida  $z_\varepsilon(t, x_o, z_o)$  convirja para a trajetória de regime permanente  $\bar{z}(t)$  quando

$t \rightarrow \infty$ . Para estudar estas condições é conveniente, às vezes, utilizar a seguinte mudança de coordenadas:

$$y := z - h(x)$$

O sistema  $(\Pi_\varepsilon)$ , nestas novas variáveis, é dado por:

$$(\Pi_\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y + h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = g(x, y + h(x)) - \varepsilon \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, y + h(x)) \end{cases}$$

e o sistema rápido, nestas novas variáveis, é obtido fazendo-se  $\varepsilon = 0$  na equação anterior, isto é:

$$(\Pi_{BLS}) \quad \frac{dy}{d\tau} = g(x, y + h(x)) \quad y(\tau = 0) = z_o - h(x_o)$$

onde  $x$  está fixo e é tratado como um parâmetro. A trajetória  $y = 0$  é uma trajetória de equilíbrio de  $(\Pi_{BLS})$  independentemente de  $x$ . Denotaremos por  $\bar{y}_{x_o}(t, y_o)$  a trajetória do sistema rápido iniciando em  $y_o = z_o - h(x_o)$  para o parâmetro  $x_o$  fixo.

A continuidade de  $D_z g(x, z)$  garante que o número de autovalores de  $D_z g(x, z)$  com parte real positiva é constante em cada componente  $\Gamma_i$ . Portanto, faz sentido definir o tipo de estabilidade de cada componente  $\Gamma_i$  com relação ao sistema rápido  $(\Pi_{BLS})$ .

**Definição 6.2.1** *O conjunto  $\Gamma_i$  é uma componente de  $\Gamma$  do tipo  $k$  se a matriz  $D_z g$  calculada em qualquer ponto de  $\Gamma_i$  possui  $k$  autovalores no semi-plano direito do plano complexo.*

Se todos os autovalores de  $D_z g$ , calculados nos pontos de  $\Gamma_i$ , possuem parte real negativa, então chamamos  $\Gamma_i$  de uma componente estável de  $\Gamma$ . Caso contrário, ela é chamada componente instável.

Observe que qualquer ponto  $(x^*, z^*)$  em uma componente  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  do tipo  $k$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $k$  de  $(\Pi_{BLS})$  para um certo valor (parâmetro) fixo  $x = x^*$ .

O principal objetivo deste capítulo é estudar a relação existente entre o sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$  e os subsistemas simplificados  $(\Sigma_o)$  e  $(\Pi_{BLS})$ . Em particular, deseja-se explorar a relação entre  $A_\varepsilon(x^s, z^s)$ ,  $A_o(x^s, z^s)$  e  $A_{BLS}(x^*, z^*)$ . As fronteiras topológicas destes conjuntos serão respectivamente denotadas por  $\partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$ ,  $\partial A_o(x^s, z^s)$  e  $\partial A_{BLS}(x^*, z^*)$ .

### 6.2.3 Decomposição da Dinâmica

Se o sistema  $(\Pi_{BLS})$  é exponencialmente estável, uniformemente com relação a  $t \in [t_o, t_1]$  e  $x \in D_1$ , e se o campo vetorial é suficientemente regular, então o Teorema de Tikhonov (veja [24], page 361) mostra, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, que as trajetórias do sistema singularmente perturbado podem ser aproximadas pela

composição das trajetórias do sistema lento e do sistema rápido, isto é, existem constantes positivas  $\mu$  and  $\varepsilon^*$  tais que para toda condição inicial satisfazendo  $\|z_o - h(x_o)\| \leq \mu$  e  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  tem uma única trajetória  $x_\varepsilon(t, x_o, z_o)$ ,  $z_\varepsilon(t, x_o, z_o)$  definida no intervalo  $[t_o, t_1]$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - \bar{x}(t) &= O(\varepsilon) \\ z_\varepsilon(t) - h(\bar{x}(t)) - \bar{y}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$

uniformemente com relação a  $t \in [t_o, t_1]$ , onde  $(\bar{x}(t), \bar{z}(t) := h(\bar{x}(t)))$  é a trajetória do sistema reduzido  $(\Sigma_{red})$  e  $\bar{y}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  é a trajetória do sistema rápido  $(\Pi_{BLS})$ .

O Teorema de Tikhonov justifica a decomposição da dinâmica em um intervalo de tempo finito. Entretanto, se uma hipótese de estabilidade exponencial do sistema lento é adicionada, então o resultado é verdadeiro para  $t \geq t_o$ .

## 6.3 Caracterização da Fronteira da Área de Atração de Sistemas Singularmente Perturbados

O Teorema de Tikhonov mostra que podemos decompor a dinâmica dos sistemas singularmente perturbados em dinâmicas lentas e dinâmicas rápidas. Seria interessante se pudessemos decompor a caracterização da fronteira da área de atração assim como a análise de estabilidade. Neste capítulo apresentam-se alguns resultados parciais a respeito da decomposição da caracterização da fronteira da área de atração. Como vimos no capítulo 3, os pontos de equilíbrio têm um papel importante na caracterização da fronteira da área de atração. Iniciaremos este capítulo com uma análise dos equilíbrios em sistemas singularmente perturbados.

### 6.3.1 Análise dos Pontos de Equilíbrio

Nesta seção estuda-se a relação existente entre os pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$ , de  $(\Sigma_o)$  e  $(\Pi_{BLS})$ .

O conjunto  $E$  de pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$  é invariante com relação a  $\varepsilon$ . Além disto, o conjunto de equilíbrios de  $(\Sigma_o)$  coincide com o conjunto de equilíbrios  $E$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$ . Também temos que  $E \subset \Gamma$ .

Próximo teorema estabelece a relação entre os pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_o)$  e de  $(\Sigma_\varepsilon)$ . Ele é uma generalização de um teorema apresentado em [45].

**Teorema 6.3.1** *Se um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $j$ , digamos  $(x^*, z^*) \in E$ , de  $(\Sigma_o)$  pertence a uma componente  $\Gamma_i$  do tipo  $k$  de  $\Gamma$ , então existe  $\varepsilon^* > 0$  tal que  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $(j+k)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ .*

**Demonstração:** Como  $(x^*, z^*)$  pertence a uma componente do tipo  $k$  de  $\Gamma$ ,  $D_z g$  possui  $k$  autovalores com parte real maior do que zero e  $m - k$  autovalores com



parte real menor do que zero. Portanto, existe um número real  $\alpha > 0$  tal que todo autovalor  $\lambda$  de  $D_z g$  satisfaz  $|\operatorname{Re}\{\lambda\}| > \alpha > 0$ .

Considere o sistema  $(\Pi_\varepsilon)$  linearizado no ponto de equilíbrio  $(x^*, z^*)$ , isto é,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\Delta x}{d\tau} \\ \frac{d\Delta z}{d\tau} \end{pmatrix} = J_\varepsilon^{fast} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

onde  $J_\varepsilon^{fast} = \begin{bmatrix} \varepsilon D_x f & \varepsilon D_z f \\ D_x g & D_z g \end{bmatrix}$ . O número complexo  $\mu$  é um autovalor de  $J_\varepsilon^{fast}$  se existir um vetor  $(\Delta x, \Delta z) \neq 0$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D_x f - \mu I_n & \varepsilon D_z f \\ D_x g & D_z g - \mu I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} = 0$$

Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e para  $|\operatorname{Re}\{\mu\}| > \alpha > 0$ , a matriz  $(\varepsilon D_x f - \mu I_n)$  é invertível. Então, da primeira equação escreve-se  $\Delta x$  como uma função de  $\Delta z$  e da segunda equação obtém-se:

$$[D_z g - \varepsilon D_x g (\varepsilon D_x f - \mu I_n)^{-1} D_z f - \mu I_m] \Delta z = 0$$

isto é,  $\mu$  é um autovalor de uma matriz que pode ser vista como sendo uma perturbação da matriz  $D_z g$ .

Defina a função  $p_\varepsilon(\mu) := \det [D_z g - \varepsilon C(\varepsilon, \mu) - \mu I_m]$  onde  $C(\varepsilon, \mu) := D_x g (\varepsilon D_x f - \mu I_n)^{-1} D_z f$ . Para  $|\operatorname{Re}\{\mu\}| > \alpha > 0$  e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $C$  é contínua com relação a  $\mu$  e  $\varepsilon$ .

Considere uma curva simples fechada  $\gamma$  no plano complexo tal que todos autovalores de  $D_z g$  com parte real maior do que zero estão contidos na área limitada por esta curva. Pode-se escolher esta curva de tal forma que  $\gamma \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\{\mu\} > \alpha > 0\}$ . Portanto  $p_o(\mu) \neq 0$  para qualquer  $\mu \in \gamma$  e portanto  $\inf_{\mu \in \gamma} |p_o(\mu)| =: m > 0$ . Usando a continuidade de  $p_\varepsilon(\mu)$  com relação a  $\varepsilon$  conclui-se que  $\inf_{\mu \in \gamma} |p_\varepsilon(\mu)| =: m > 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Então  $v(\varepsilon) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{p'_\varepsilon(\mu)}{p_\varepsilon(\mu)}$  está bem definida e representa, de acordo com a teoria de variáveis complexas, o número de zeros de  $p_\varepsilon(\mu)$  dentro de  $\gamma$ . Como  $v(\varepsilon)$  deve ser um inteiro e  $v(\varepsilon)$  é contínuo, conclui-se que  $k = v(0) = v(\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Em outras palavras, a existência de  $k$  autovalores de  $D_z g$  com parte real maior do que zero implica na existência de  $k$  autovalores de  $J_\varepsilon^{fast}$  com parte real maior do que zero para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Argumentos similares podem ser usados para mostrar que a existência de  $m - k$  autovalores de  $D_z g$  com parte real menor do que zero implica na existência de  $m - k$  autovalores de  $J_\varepsilon^{fast}$  com parte real menor do que zero para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Suponha que  $(x^*, z^*)$  seja um ponto de equilíbrio do tipo  $j$  de  $(\Sigma_o)$ . Então, pode-se mostrar que  $J_{red} := D_x f - D_z f D_z g^{-1} D_x g$  tem  $j$  autovalores com parte real maior do que zero e  $n - j$  com parte real menor do que zero. Além disto, existe um número real  $M > 0$  tal que todo autovalor  $\lambda$  de  $J_{red}$  satisfaz  $|\lambda| < M$ .

Considere o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  linearizado no ponto de equilíbrio  $(x^*, z^*)$ , isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta x} \\ \dot{\Delta z} \end{pmatrix} = J_\varepsilon \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

onde  $J_\varepsilon := \begin{bmatrix} D_x f & D_z f \\ D_x g & D_z g \end{bmatrix}$ . O número complexo  $\mu$  é um autovalor de  $J_\varepsilon^{fast}$  se existir um vetor  $(\Delta x, \Delta z) \neq 0$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} D_x f - \mu I_n & D_z f \\ \frac{1}{\varepsilon} D_x g & \frac{1}{\varepsilon} D_z g - \mu I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} = 0$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} D_x f - \mu I_n & D_z f \\ D_x g & D_z g - \varepsilon \mu I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} = 0$$

Se  $\mu$  é limitado e  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, então  $(D_z g - \varepsilon \mu I_m)$  é invertível. Então, da segunda equação, pode-se escrever  $\Delta z$  como uma função de  $\Delta x$  e da primeira equação tem-se:

$$[D_x f - D_z f (D_z g - \varepsilon \mu I_m)^{-1} D_x g - \mu I_n] \Delta x = 0$$

Usando a identidade  $B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B - A)A^{-1}$  com  $B = (D_z g - \varepsilon \mu I_m)$  e  $A = D_z g$  tem-se:

$$[J_{red} - \varepsilon \mu C(\mu, \varepsilon) - \mu I_n] \Delta x = 0$$

onde  $C(\mu, \varepsilon) := D_z f (D_z g - \varepsilon \mu I_m)^{-1} D_x g$ . O autovalor  $\mu$  de  $J_\varepsilon$  pode ser visto como um autovalor de uma matriz que é uma pequena perturbação de  $J_{red}$ . Além disto, pode-se facilmente mostrar que  $\lambda$  é um autovalor do sistema linearizado associado a  $(\Sigma_o)$  se e somente se  $\lambda$  é um autovalor de  $J_{red}$ .

Defina a função  $q_\varepsilon(\mu) := \det [J_{red} - \varepsilon \mu C(\mu, \varepsilon) - \mu I_n]$ . Para  $|\mu| < M$  e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $C$  é contínuo com relação a  $\mu$  e  $\varepsilon$ .

Considere uma curva fechada simples  $\gamma$  no plano complexo tal que todos os autovalores de  $J_{red}$  com parte real maior do que zero estão contidas na área limitada por esta curva. Pode-se escolher esta curva tal que  $\gamma \subset \{\mu \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\{\mu\} > 0 \text{ and } |\mu| < M\}$ . Portanto  $q_o(\mu) \neq 0$  para todo  $\mu \in \gamma$  e logo  $\inf_{\mu \in \gamma} |q_o(\mu)| =: b > 0$ . Usando a continuidade de  $q_\varepsilon(\mu)$  com relação a  $\varepsilon$  conclui-se que  $\inf_{\mu \in \gamma} |q_\varepsilon(\mu)| =: b > 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Então, da teoria de variáveis complexas, tem-se que  $v(\varepsilon) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{q'_\varepsilon(\mu)}{q_\varepsilon(\mu)}$  é o número de zeros de  $q_\varepsilon(\mu)$  dentro de  $\gamma$ . Como  $v(\varepsilon)$  deve ser um inteiro e  $v(\varepsilon)$  é contínuo, conclui-se que  $k = v(0) = v(\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Em outras palavras, a existência de  $j$  autovalores de  $J_{red}$  com parte real maior do que zero implica na existência de  $j$  autovalores de  $J_\varepsilon$  com parte real maior do que zero para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Argumentos similares podem ser utilizados para mostrar que a existência de  $n - j$  autovalores de  $J_{red}$  com parte real

menor do que zero implica na existência de  $n - j$  autovalores de  $J_\varepsilon$  com parte real menor do que zero para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Usando o fato de que  $J_\varepsilon^{fast} = \varepsilon J_\varepsilon$  tem-se que  $\lambda$  é um autovalor de  $J_\varepsilon^{fast}$  se e somente se  $\frac{\lambda}{\varepsilon}$  é um autovalor de  $J_\varepsilon$ . Então, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, os  $m$  autovalores de  $(\Sigma_\varepsilon)$  obtidos na análise na escala de tempo rápida tem módulo suficientemente grande e são certamente distintos dos  $n$  autovalores obtidos na análise na escala de tempo lenta. Consequentemente,  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $j+k$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. □

Se os pontos de equilíbrio do sistema reduzido  $(\Sigma_o)$  são hiperbólicos, então o Teorema 6.3.1 garante, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, que os equilíbrios de  $(\Sigma_\varepsilon)$  são hiperbólicos. Além disto, o Teorema 6.3.1 estabelece a relação entre os tipos destes pontos de equilíbrio.

Considere a seguinte hipótese:

(H1) Todos os pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_o)$  são hiperbólicos.

A hipótese (H1) é genericamente satisfeita, isto é, ela é verdadeira para quase todos os sistemas dinâmicos na forma de  $(\Sigma_o)$ . Esta hipótese e o teorema 6.3.1 garantem que todos os pontos de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$  são hiperbólicos para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Os seguintes resultados para pontos de equilíbrio do tipo zero e tipo 1 são uma consequência direta do teorema 6.3.1 e hipótese (H1). Pontos de equilíbrio do tipo 1 em especial têm uma importância significativa na caracterização e obtenção de estimativas da área de atração [12].

**Teorema 6.3.2** *Se a hipótese (H1) é satisfeita, então um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo zero (ponto de equilíbrio assintoticamente estável) de  $(\Sigma_\varepsilon)$  necessariamente pertence a uma componente estável  $\Gamma^s$  de  $\Gamma$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.*

**Demonstração:** Todo ponto de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertence a  $\Gamma$  por definição. Suponha, por contradição, que o equilíbrio do tipo zero  $(x^*, z^*)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertença a uma componente instável  $\Gamma^u$  do tipo  $k$ , ( $k \geq 1$ ), de  $\Gamma$ . Pela hipótese (H1),  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $(\Sigma_o)$ . Portanto, o Teorema 6.3.1 implica que  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $(j+k)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Como  $j + k > k \geq 1 > 0$ , chega-se a uma contradição provando o resultado. □

**Teorema 6.3.3** *Se a hipótese (H1) é satisfeita, então um ponto de equilíbrio hiperbólico de tipo 1 de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertence ou a uma componente estável ou a uma componente do tipo 1 de  $\Gamma$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.*

**Demonstração:** Todo ponto de equilíbrio de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertence a  $\Gamma$  por definição. Suponha, por contradição, que o ponto de equilíbrio do tipo 1  $(x^*, z^*)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertença a uma componente instável  $\Gamma^u$  de tipo  $k$ , ( $k \geq 2$ ), de  $\Gamma$ . Pela hipótese (H1),  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $(\Sigma_o)$ . Portanto, o Teorema

6.3.1 implica que  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $(j+k)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Como  $j + k > k \geq 2 > 1$ , chega-se a uma contradição provando o resultado.  $\square$

**Teorema 6.3.4** *Se a hipótese (H1) é verdadeira e o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo 1  $(x^*, z^*)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  pertence a uma componente  $\Gamma^u$  de  $\Gamma$  do tipo 1, então, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_o)$ .*

**Demonstração:** Todo ponto de equilíbrio  $(x^*, z^*)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$  é um ponto de equilíbrio de  $(\Sigma_o)$  para qualquer  $\varepsilon$ . Além disto,  $(x^*, z^*)$  pertence a  $\Gamma$ . Suponha que  $(x^*, z^*)$  seja um ponto de equilíbrio do tipo 1 de  $(\Sigma_\varepsilon)$  na componente  $\Gamma^u$  de  $\Gamma$  do tipo 1. Pela hipótese (H1), pode-se supor que  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $j$  de  $(\Sigma_o)$ . Então, do Teorema 6.3.1, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo  $j+1$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$ . Isto implica que  $j = 0$ , isto é,  $(x^*, z^*)$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_o)$ .

### 6.3.2 Equilíbrios na Fronteira da Área de Atração

Nesta seção, estabelece-se a relação existente entre os pontos de equilíbrio na fronteira da área de atração do sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$  com os pontos de equilíbrio nas fronteiras da área de atração dos sistemas lento  $(\Sigma_o)$  e rápido  $(\Pi_{BLS})$ .

Vimos no capítulo 3, para sistemas dinâmicos autônomos, sob condições bem razoáveis, tais como as condições de campos vetoriais de Morse-Smale, que a fronteira da área de atração é caracterizada pela união das variedades estáveis daqueles pontos de equilíbrio que pertencem a fronteira da área de atração. Portanto, é importante estabelecer a relação entre os pontos de equilíbrio que pertencem a fronteira da área de atração de  $(\Sigma_\varepsilon)$  e os pontos de equilíbrio que pertencem a fronteira da área de atração de  $(\Sigma_o)$  e  $(\Pi_{BLS})$ .

Zou et al. [45] estudaram esta relação para pontos de equilíbrio em componentes estáveis de  $\Gamma$  provando o seguinte resultado:

**Teorema 6.3.5** [45] *Suponha que  $(x^s, z^s)$  e  $(x^u, z^u)$  sejam respectivamente pontos de equilíbrio estável e instável de  $(\Sigma_o)$  em uma componente estável  $\Gamma^s$ . Suponha que para cada  $\varepsilon > 0$ , o sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$  possua uma função energia e seus pontos de equilíbrio sejam todos isolados. Então, existe um  $\varepsilon^* > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , o ponto de equilíbrio instável  $(x^u, z^u)$  pertence a fronteira da área de atração  $\partial A_o(x^s, z^s)$  de  $(\Sigma_o)$  se e somente se  $(x^u, z^u)$  pertence a fronteira da área de atração  $\partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$ .*

A Figura 6.1 ilustra o Teorema 6.3.5. Ele estabelece a relação entre os pontos de equilíbrio quando  $(x^u, z^u)$  pertence a uma componente estável  $\Gamma^s$  de  $\Gamma$ . Ele afirma que um ponto de equilíbrio instável pertence a fronteira da área de atração do

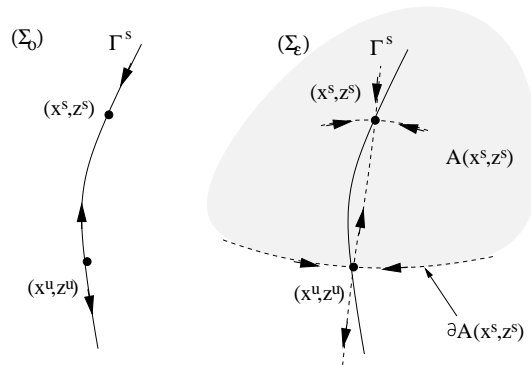


Figura 6.1: Ilustração geométrica do Teorema 6.3.5. O ponto de equilíbrio instável  $(x^u, z^u)$  pertence a fronteira da área de atração de  $(x^s, z^s)$  do sistema  $(\Sigma_0)$  se e somente se  $(x^u, z^u)$  pertence a fronteira da área de atração de  $(x^s, z^s)$  do sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno

sistema reduzido  $(\Sigma_0)$  se e somente se ele pertence a fronteira da área de atração do sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Entretanto, este não é sempre o caso.

Em muitas situações práticas, o ponto de equilíbrio instável pertence a uma componente  $\Gamma^u$  de  $\Gamma$  do tipo 1. O próximo teorema estuda este caso.

**Lema 6.3.6** *Considere o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  e os subsistemas associados  $(\Sigma_0)$  e  $(\Pi_{BLS})$ . Suponha que para todo  $\varepsilon > 0$ , o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  possua uma função energia e seus pontos de equilíbrio sejam isolados. Seja  $(x^s, z^s)$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_0)$  na componente estável  $\Gamma^s$  e  $(x^u, z^u)$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_0)$  na componente  $\Gamma^u$  de  $\Gamma$  do tipo 1. Suponha que  $(x^u, z^*)$  pertença a  $A_0(x^s, z^s) \subset \Gamma^s$  e  $(x^u, z^u)$  pertença a fronteira da área de atração  $\partial A_{BLS}(x^u, z^*)$  do subsistema rápido  $(\Pi_{BLS})$  para  $x = x^u$  fixo. Então existe  $\varepsilon^* > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , o ponto de equilíbrio instável  $(x^u, z^u)$  pertence a fronteira da área de atração  $\partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$  de  $(\Sigma_\varepsilon)$ .*

### Demonstração:

Para provar que  $(x^u, z^u)$  pertence a  $\partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$ , temos que mostrar que existem pontos, arbitrariamente próximos de  $(x^u, z^u)$ , tal que as trajetórias de  $(\Sigma_\varepsilon)$  iniciando nestes pontos tendem para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $(x^s, z^s)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Por hipótese,  $(x^u, z^u) \in \partial A_{BLS}(x^u, z^*)$ . Logo, para qualquer número  $r > 0$ ,  $B_r(x^u, z^u) \cap A_{BLS}(x^u, z^*) \neq \emptyset$ , portanto deve existir um ponto  $(x_1, z_1) \in B_r(x^u, z^u)$  tal que  $\phi(\tau, x_1, z_1) \rightarrow (x^u, z^*)$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

Para qualquer número  $\rho > 0$  arbitrariamente pequeno, existe um tempo  $T_1(\rho) > 0$  tal que  $(\hat{x}, \hat{z}) = \phi(T_1, x_1, z_1) \in B_{\frac{\rho}{2}}(x^u, z^*)$ . Usando a teoria de perturbações regulares no subsistema rápido, pode-se mostrar a existência de  $\varepsilon^{**} > 0$  tal que

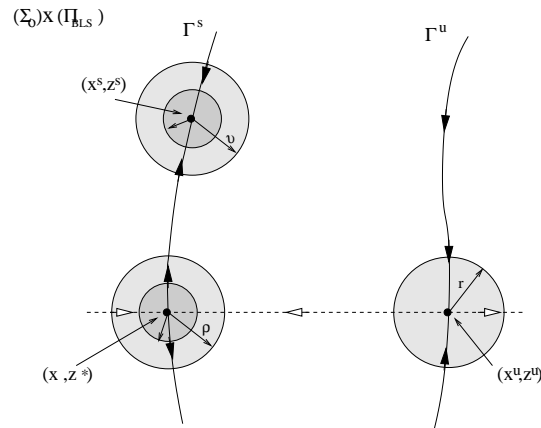


Figura 6.2: Ilustração geométrica do Lema 6.3.6

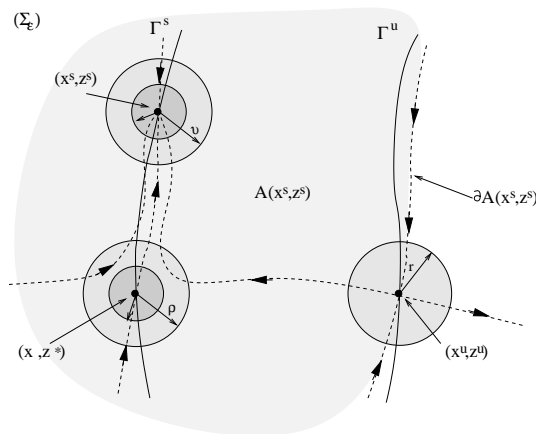


Figura 6.3: Ilustração geométrica do Lema 6.3.6

$\|\phi_\varepsilon(T_1, x_1, z_1) - \phi(T_1, x_1, z_1)\| < \frac{\rho}{2}$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{**})$ . Portanto, da desigualdade triangular,  $\phi_\varepsilon(T_1, x_1, z_1) \in B_\rho(x^u, z^*)$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{**})$ .

Por outro lado, sabe-se que  $(x^u, z^*) \in A_o(x^s, z^s)$ , isto é,  $\varphi_o(t, x^u, z^*) \rightarrow (x^s, z^s)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para um número  $\nu$  arbitrariamente pequeno, existe um tempo  $T_2 > 0$  tal que  $\varphi_o(T_2, x^u, z^*) \in B_{\frac{\nu}{2}}$ . Como  $\rho$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, O teorema de Tikhonov, para intervalos finitos de tempo, garante a existência de  $\hat{\varepsilon} > 0$  tal que  $\varphi_\varepsilon(T_2, \phi_\varepsilon(T_1, x_1, z_1)) \in B_\nu(x^s, z^s)$  para todo  $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ .

Uma escolha de  $\nu$  suficientemente pequena e a estabilidade exponencial de  $(x^s, z^s)$  com relação a  $(\Sigma_o)$  garante, via teorema de Tikhonov para intervalos infinitos de tempos, que  $\varphi_\varepsilon(t, \varphi_\varepsilon(T_2, \phi_\varepsilon(T_1, x_1, z_1)))$  é limitada para  $t \geq 0$  e permanece próxima de  $(x^s, z^s)$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. A existência de uma função energia para  $(\Sigma_\varepsilon)$  implica que  $\varphi_\varepsilon(t, x_1, z_1) \rightarrow (x^s, z^s)$  quando  $t \rightarrow \infty$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.  $\square$

### 6.3.3 Comportamento Limite da Fronteira da Área de Atração

Nesta seção estudaremos o comportamento limite da área de atração  $A_\varepsilon$  do sistema singularmente perturbado quando  $\varepsilon$  tende a zero. Para isto, defina [45]:

$$\tilde{A} := \cup_{0 < \varepsilon^* < 1} \cap_{0 < \varepsilon < \varepsilon^*} A_\varepsilon(x^s, z^s)$$

e

$$D_o = \tilde{A} \setminus \partial\tilde{A}.$$

O conjunto  $\tilde{A}$  pode ser visto como um limite de  $A_\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Em [45], mostrou-se que este conjunto está bem definido.

O próximo teorema mostra a relação entre a variedade estável de um ponto de equilíbrio instável hiperbólico de tipo 1 numa componente  $\Gamma^u$  de tipo 1 de  $\Gamma$  e a variedade estável do mesmo ponto de equilíbrio do subsistema lento associado. Este resultado será fundamental para decompor a fronteira da área de atração, no sentido de limite, em componentes rápidas e lentas.

**Lema 6.3.7** *Considere o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  e o subsistema lento associado  $(\Sigma_o)$ . Suponha que o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  possua uma função energia para cada  $\varepsilon > 0$  e que todos os pontos de equilíbrio sejam isolados. Seja  $(x^u, z^u)$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de  $(\Sigma_o)$  em uma componente  $\Gamma^u$  do tipo 1. Suponha que  $(\hat{x}, \hat{z}) \in A_o(x^u, z^u) \subset \Gamma^u$ . Então  $(\hat{x}, \hat{z})$  está  $\varepsilon$ -próxima de  $W_{\Sigma_\varepsilon}^s(x^u, z^u)$ .*

**Demonstração:** Como  $(\hat{x}, \hat{z}) \in A_o(x^u, z^u)$ ,  $\varphi_o(t, \hat{x}, \hat{z})$  é uma solução limitada de  $(\Sigma_o)$  para  $0 \leq t < \infty$ , o teorema 2 de [6], explorando dicotomias exponenciais, garante que, dado um número real  $\rho > 0$ , existe um número  $\varepsilon^*(\rho) > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  tem uma solução limitada satisfazendo

$$\|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_o(t, \hat{x}, \hat{z})\| \leq \rho \quad \text{para todo } 0 \leq t < \infty$$

Como  $(\Sigma_\varepsilon)$  possui função energia para todo  $\varepsilon > 0$  e todos os pontos de equilíbrio são isolados, então  $\varphi_\varepsilon(t) \rightarrow (x^u, z^u)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $\rho$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, demonstra-se que  $(\hat{x}, \hat{z})$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $(x_o, z_o) := \varphi_\varepsilon(t)$ . Mas  $(x_o, z_o) \in W_{\Sigma_\varepsilon}^s(x^u, z^u)$ . Logo,  $(\hat{x}, \hat{z})$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $W_{(\Sigma_\varepsilon)}^s(x^u, z^u)$ .  $\square$

**Teorema 6.3.8** *Seja  $(x^u, z^u)$  um ponto de equilíbrio do tipo 1 em  $\partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$  para qualquer  $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$  e suponha que  $(x^u, z^u)$  pertença a uma componente  $\Gamma^u$  de  $\Gamma$  do tipo 1. Se  $(\hat{x}, \hat{z}) \in (\Gamma^u \cap W_{\Sigma_o}^s(x^u, z^u))$  então  $(\hat{x}, \hat{z})$  pertence a  $\partial D_o$ .*

**Demonstração:** Em primeiro lugar vamos provar que  $(\hat{x}, \hat{z})$  não pertence ao interior de  $D_o$ . Suponha, por contradição, que  $(\hat{x}, \hat{z})$  pertença ao interior de  $D_o$ . Então, existe uma vizinhança  $U$  de  $(\hat{x}, \hat{z})$  e um número  $\varepsilon^* > 0$  suficientemente pequeno tal que  $U \subset A_\varepsilon(x^s, z^s)$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ . Por outro lado, como  $(\hat{x}, \hat{z}) \in (\Gamma^u \cap W_{\Sigma_o}^s(x^u, z^u))$ , a trajetória  $\varphi_o(t, \hat{x}, \hat{z})$  é limitada para  $0 \leq t \leq \infty$  e converge para  $(x^s, z^s)$  quando

$t \rightarrow \infty$ . Dos resultados de Chang [6], para intervalos finitos de tempo, demonstra-se, seguindo a mesma linha de raciocínio da demonstração anterior que existem, arbitrariamente próximo de  $(\hat{x}, \hat{z})$ , para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, trajetórias limitadas que tendem para  $(x^u, z^u)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Mas isto contradiz o fato de que  $U \subset A_\varepsilon(x^s, z^s)$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Portanto  $(\hat{x}, \hat{z})$  não pertence ao interior de  $D_o$ .

Suponha que  $(\hat{x}, \hat{z}) \notin \partial D_o$ . Então existe vizinhança  $U$  de  $(\hat{x}, \hat{z})$  tal que  $U \subset \{\mathbb{R}^n - \bar{D}_o\}$ . Mas o teorema 6.3.7 mostra que  $(\hat{x}, \hat{z})$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $W_{\Sigma_\varepsilon}^s(x^u, z^u)$ . Como  $W_{\Sigma_\varepsilon}^s(x^u, z^u) \subset \partial A_\varepsilon(x^s, z^s)$ , então arbitrariamente próximo de  $(\hat{x}, \hat{z})$  existem pontos que pertencem a  $A_\varepsilon(x^s, z^s)$ . Isto mostra que  $(\hat{x}, \hat{z}) \in \bar{D}_o$ . Chegamos portanto a uma contradição e necessariamente  $(\hat{x}, \hat{z}) \in \partial D_o$ .  $\square$

Os teoremas anteriores ainda não fornecem uma teoria completa para a decomposição da área de atração de sistemas singularmente perturbados em variedades de dinâmica rápida e variedades de dinâmica lenta. No atual estágio de pesquisa estamos trabalhando para demonstrar a seguinte conjectura:

**Conjectura:** Suponha que  $(x^*, z^*) \in W_{\Pi_{BLS}}^s(x^* = \hat{x}, \hat{z})$ , onde  $(\hat{x}, \hat{z})$  é um ponto de equilíbrio do tipo 1 do subsistema rápido e suponha também que  $(\hat{x}, \hat{z}) \in W_{\Sigma_o}^s(x^u, z^u)$ , então  $(x^*, z^*)$  está  $\varepsilon$ -próximo de  $W_{\Sigma_\varepsilon}^s(x^*)$ .

Este teorema sugere que se o ponto de equilíbrio na fronteira da área de atração do sistema rápido pertence à variedade estável de um ponto de equilíbrio estável  $(x^u, z^u)$  do subsistema lento, então  $(x^u, z^u)$  é um ponto de equilíbrio na fronteira da área de atração do sistema singularmente perturbado.

Isto nos dá a seguinte idéia para calcular o ponto de equilíbrio de controle,  
Algoritmo

1. Encontre o ponto de equilíbrio na fronteira da área de atração do subsistema rápido.
2. Integre o subsistema lento, iniciando neste ponto de equilíbrio.
3. Se esta trajetória se aproxima de um ponto de equilíbrio estável do subsistema lento, então este equilíbrio é um ponto de equilíbrio na fronteira da área de atração do sistema singularmente perturbado para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Se a trajetória não atinge um ponto de equilíbrio estável do subsistema lento, então genericamente a trajetória ou vai para o infinito ou atinge uma singularidade. Em ambos os casos, a fronteira da área de atração nesta região é caracterizada por um ponto de equilíbrio que certamente pertence a outra componente de  $\Gamma$ .

Testar este algoritmo e completar o desenvolvimento desta teoria são os objetivos de trabalhos futuros.



## 6.4 Análise de Estabilidade

O Teorema de Tikhonov garante que as trajetórias do sistema singularmente perturbado podem ser aproximadas, no sentido de escalas de tempo, pelas trajetórias do sistema lento e do sistema rápido. Seria desejável estender esta decomposição para a análise de estabilidade. Alguns autores tais como Grujic [18] e Saberi & Khalil [37] estudaram este tipo de problema usando funções de Lyapunov compostas. A seguir, apresenta-se uma versão um pouco mais geral do resultado de estabilidade proposto por Saberi & Khalil [37].

**Teorema 6.4.1** *Considere o sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$  e suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

**(F1)** *Existe uma função  $V(x)$  de classe  $C^1$  tal que*

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) \leq -\alpha_1 \psi_1^2(x) \quad \forall x \in D_1$$

onde  $\psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $D_1$  um conjunto aberto e conexo.

**(F2)** *Existe função  $W(x, y)$  de classe  $C^1$  e duas funções contínuas  $W_1(x)$  e  $W_2(x)$  tal que*

$$W_1(y) \leq W(x, y) \leq W_2(y) \quad \forall (x, y) \in D_1 \times D_2$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + h(x)) \leq -\alpha_2 \psi_2^2(y) \quad \forall (x, y) \in D_1 \times D_2$$

onde  $D_2$  é um conjunto aberto e conexo e  $\psi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

**(F3)** *Existe constante real positiva  $\beta_1$  tal que:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + h(x)) - f(x, h(x))] \leq \beta_1 \psi_1(x) \psi_2(y) \quad \forall (x, y) \in D_1 \times D_2$$

**(F4)** *Existem constantes reais positivas  $\beta_2$  e  $\gamma$  tais que:*

$$\left[ \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} f(x, y + h(x)) \right] \leq \beta_2 \psi_1(x) \psi_2(y) + \gamma \psi_2^2(y) \quad \forall (x, y) \in D_1 \times D_2$$

Então,

**i)** *Existe um limitante superior  $\varepsilon_d$  tal que, para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_d$ , toda trajetória limitada em  $D_1 \times D_2$  converge para o maior conjunto invariante contido em  $C := \{(x, y) \in D_1 \times D_2 : \psi_1(x) = 0, \psi_2(y) = 0\}$ .*

**ii)**  $\varepsilon_d = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \gamma + \frac{1}{4d(1-d)} [(1-d\beta_1) + d\beta_2]^2}$ , onde  $0 < d < 1$ .

Este teorema fornece condições suficientes para garantir a decomposição da análise de estabilidade de um sistema singularmente perturbado na análise de estabilidade do sistema rápido e do sistema lento. Mais precisamente, se existe uma função  $V$  satisfazendo a condição (F1) e portanto provando estabilidade do sistema lento e outra função  $W$  satisfazendo a condição (F2) e portanto provando estabilidade uniforme do sistema rápido com relação a  $x \in D_1$ , então podemos concluir a respeito da estabilidade do sistema original. Entretanto, a decomposição não é completa. Condições (F3) e (F4) são condições de interconexão que também precisam ser verificadas.

Nas condições (F1) e (F2), estimativas quadráticas são impostas nas derivadas das funções  $V$  e  $W$ . Estas estimativas não são necessárias para provar estabilidade dos sistemas lento e rápido de maneira independente, entretanto elas são cruciais para as condições de interconexão.

A demonstração deste teorema está baseada no fato de que a derivada da função composta  $U(x, y) = (1 - d)V(x) + dW(x, y)$ ,  $0 < d < 1$ , satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\dot{U}(x, y) \leq - [\psi_1(x) \quad \psi_2(y)] \Lambda \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(y) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (1 - d)\alpha_1 & -\frac{1}{2}[(1 - d)\beta_1 + d\beta_2] \\ -\frac{1}{2}[(1 - d)\beta_1 + d\beta_2] & d\left(\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - \gamma\right) \end{bmatrix}$$

e  $\Lambda$  é definida positiva para todo  $0 < \varepsilon < \varepsilon_d$ . O restante da demonstração segue da aplicação do princípio de invariância e da observação que o conjunto onde  $\dot{U} = 0$  está contido no conjunto  $C$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em [37] e [24].

**Observação 6.4.2** *É importante salientar que existe liberdade na escolha de  $d$  no intervalo  $(0, 1)$ . Um compromisso entre maximizar o limitante superior  $\varepsilon_d$  e maximizar a estimativa da área de atração existe. É fácil verificar que o máximo limitante superior  $\varepsilon_d^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \gamma + \beta_1 \beta_2}$  é atingido quando  $d^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$ .*

### 6.4.1 Funções Energia Compostas

A seguir apresenta-se um teorema que decompõe a análise de estabilidade de um sistema singularmente perturbado via funções energia. Este resultado é uma pequena extensão dos resultados apresentados em [37]. Com isto em mente, considere o sistema

$$\dot{y} = G(x, y) \quad (6.4)$$

onde  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função de classe  $C^1$  e  $x$  é um vetor de parâmetros que pertence a algum conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definição 6.4.3 (Função Energia Uniforme:)** Uma função  $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  é uma função energia uniforme para o sistema (6.4) se as seguintes condições são satisfeitas:

(G1) Existem funções contínuas  $W_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $W_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $W_1(y) \leq W(x, y) \leq W_2(y)$  para todo  $(x, y) \in \Gamma \times \mathbb{R}^m$ .

(G2)  $\dot{W}(x, y) \leq 0$  para todo  $(x, y) \in \Gamma \times \mathbb{R}^m$ .

(G3)  $W$  é uma função própria<sup>1</sup>.

Agora estamos em posição para apresentar o seguinte teorema para decomposição da análise de estabilidade de sistemas singularmente perturbados via funções energia.

**Teorema 6.4.4** Considere o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$ . Suponha que  $V$  seja uma função energia para o sistema lento  $(\Sigma_{red})$  e  $W$  uma função energia uniforme para o sistema rápido  $(\Pi_{BLS})$ . Além disso, suponha que estas funções satisfaçam as condições (F1) a (F4) do Teorema 6.4.1, o campo vetorial lento  $f(x, h(x))$  seja transversal a  $C_{slow} = \{x \in D_1 : \psi_1(x) = 0\} \setminus E_{slow}$  e o campo vetorial rápido seja transversal a  $C_x = \{y \in D_2 : \psi_2(y) = 0\} \setminus E_x$  para todo  $x$ . Então, existe  $\varepsilon^*$  tal que, para  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , a função composta  $U_d = (1 - d)V + dW$  é uma função energia para o sistema  $(\Sigma_\varepsilon)$  para todo  $d \in (0, 1)$ .

**Demonstração:** Temos que mostrar que  $U_d$  satisfaz as 3 condições da definição 4.1.1 para todo  $d \in (0, 1)$ . Da demonstração do Teorema 6.4.1 sabe-se que  $\dot{U}_d \leq 0$  para todo  $d \in (0, 1)$  se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. Portanto a condição 1 da definição 4.1.1 está satisfeita para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Seja  $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) = \varphi(t, x_o, y_o)$  a trajetória de  $(\Sigma_\varepsilon)$  passando por  $(x_o, y_o)$  e suponha, para algum  $d^* \in (0, 1)$ , que  $U_{d^*}(\varphi_\varepsilon(t, x_o, y_o))$  seja limitada para  $t \geq 0$ . Uma vez que a função composta  $U_d$  é uma função contínua de  $d$ , então existe um intervalo aberto  $(d_1, d_2)$  contendo  $d^*$  tal que  $U_d(\varphi_\varepsilon(t, x_o, y_o))$  é limitada para  $t \geq 0$ . Suponha agora que  $\varphi_\varepsilon(t, x_o, y_o)$  não seja limitada, então, da condição (G3), ambas funções  $\{V(x_\varepsilon(t))\}$  e  $\{W(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\}$  não são limitadas. Isto significa que existe uma seqüência não decrescente de tempos  $\{t_n\}$  tal que  $\|V(x(t_n))\| \rightarrow \infty$  e  $\|W(x(t_n), y(t_n))\| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Duas situações são possíveis de ocorrer: ou  $t_n \rightarrow \infty$  ou  $t_n \rightarrow \omega < \infty$ . No primeiro caso, como  $\dot{U}_d \leq 0$  e  $U_d$  é limitada, conclui-se que  $U_d$  converge para um número  $\alpha_d$  quando  $n \rightarrow \infty$ . No segundo caso, a continuidade e limitação garante que  $U_d$  converge para um número  $\alpha_d = \lim_{n \rightarrow \infty} U_d(t_n)$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Suponha que  $V(x(t_n)) \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto implica, desde que  $U_d = (1 - d)V + dW$  é limitado, que  $W(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow -\infty$ . Escolha  $d', d'' \in (d_1, d_2)$ . Então,

$$\begin{aligned} U_{d'} &= (1 - d')V + d'W \rightarrow \alpha_{d'} \\ U_{d''} &= (1 - d'')V + d''W \rightarrow \alpha_{d''} \end{aligned} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

<sup>1</sup>A função  $W : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é própria se  $\|x\| \rightarrow \infty$  implicar  $|W| \rightarrow \infty$

Então, subtraindo uma equação da outra conclui-se que  $(d'' - d')(V - W) \rightarrow \alpha_{d'} - \alpha_{d''}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas isto é uma contradição pois  $V - W \rightarrow +\infty$ .

Argumentação similar pode ser empregada para o caso onde  $V \rightarrow -\infty$ . Portanto a condição 3 da definição 4.1.1 é verificada.

Para provar a condição 2 da definição 4.1.1, vamos provar que o campo vetorial satisfaz a condição 2' da observação 4.1.2. De acordo com a equação (6.3),  $\dot{U}_d(x, y) = 0$  se e somente se ambos  $\psi_1 = 0$  e  $\psi_2 = 0$ , onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são funções contínuas definidas respectivamente nas condições (F1) e (F2). Defina  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \psi_1(x) = 0, \psi_2(y) = 0\}$ . Por hipótese, trajetórias do sistema lento interceptam o conjunto  $C_{slow}$  transversalmente. Agora, usando o resultado de Tikhonov sabe-se que as soluções nas vizinhanças da variedade algébrica  $R_o$  satisfazem  $x(t) - \bar{x}(t) = O(\varepsilon)$ . Como a transversalidade persiste a pequenas perturbações, tem-se que  $x(t)$  intercepta o conjunto  $C \setminus E_{red}$  transversalmente para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Sabe-se também que se  $(x_{eq}, y_{eq}) \in E$ , então  $x_{eq} \in E_{red}$ . Consequentemente,  $(x(t), y(t))$  intercepta  $C \setminus E$  transversalmente. Quando a trajetória está distante de  $R_o$ , o resultado segue, com argumentação similar, da aproximação local  $y(\frac{t}{\varepsilon}) - \bar{y}(\frac{t}{\varepsilon}) = O(\varepsilon)$  e da transversalidade de  $\bar{y}$  com  $C_x$ .  $\square$

O Teorema 6.4.4 fornece condições suficientes para a decomposição da análise de estabilidade de um sistema singularmente perturbado com uma função energia na análise de estabilidade do sistema rápido e do sistema lento. Entretanto, Teorema 6.4.4 generaliza o Teorema 6.4.1 para funções energia ao invés de funções de Lyapunov. A importância desta generalização é que toda a teoria de caracterização da área de atração apresentada nas seções anteriores podem ser aplicadas para esta classe de sistemas singularmente perturbados.

## 6.4.2 Exemplos

O objetivo dos próximos exemplos é ilustrar que, sem levar em consideração as propriedades das dinâmicas com diferentes escalas de tempo, estimativas conservadoras da área de atração e dos conjuntos atrativos são obtidas. Por outro lado, considerando estas propriedades, melhores resultados são obtidos.

**Exemplo 6.4.5** *Considere o seguinte sistema singularmente perturbado:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3 + z \\ \varepsilon \dot{z} &= -x - z \end{aligned} \tag{6.5}$$

*A origem é o único ponto de equilíbrio deste sistema. Sem considerar as propriedades de escala de tempo, é natural escolher*

$$V(x, z) = \frac{x^2 + \varepsilon z^2}{2}$$

*como uma candidata a função energia. É fácil ver que a derivada de  $V$  é dada por*

$$\dot{V} = -x^4 + x^2 - z^2.$$

Como  $\dot{V}$  é maior do que zero em pontos nas vizinhanças da origem, a função  $V$  não é uma função energia. Entretanto, o conjunto onde a derivada é positiva é limitado, portanto, a Extensão do Princípio de Invariância [34] pode ser aplicada para a obtenção de uma estimativa do conjunto atrativo. Para  $\varepsilon < 1$ , o conjunto de nível  $\Omega = \{(x, z) : V(x, z) \leq \frac{1}{2}\}$  é o menor conjunto de nível que contém a região onde a derivada de  $V$  é positiva. Como  $V$  é radialmente ilimitada, todas as trajetórias entram em  $\Omega$  em tempo finito. Consequentemente, todos os conjuntos limites estão localizados dentro de  $\Omega$ . O conjunto  $\Omega$  assim como o retrato de fase de (6.5) estão apresentados na Figura 6.4.

Embora a função apresentada garanta a existência de um conjunto limitado  $\Omega$  que contém todos os pontos  $\omega$ -limites de todas trajetórias do sistema, a função  $V$  não pode garantir, conforme o retrato de fase sugere, que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Agora, aplicaremos a idéia da decomposição rápida-lenta para construir uma função energia para o sistema lento e sistema rápido. Neste caso, a variedade algébrica é composta por uma única componente dada por  $M_o = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z = h(x) = -x\}$ . A variedade de restrição algébrica é mostrada na Figura 6.4. O sistema lento é dado por  $\dot{x} = -x^3$ . Definindo a nova variável  $y := z - h(x) = z + x$  e a nova escala de tempo  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ , é fácil ver que o sistema rápido é dado por  $\frac{dy}{d\tau} = -y$ . Agora, é muito natural escolher  $V(x) = \frac{x^4}{4}$  como uma função energia para o sistema lento e  $W(y) = \frac{y^2}{2}$  como função energia para o sistema rápido. As hipóteses (F1)-(F4) do Teorema 6.4.1 são satisfeitas com  $\psi_1(x) = |x|^3$ ,  $\psi_2(y) = |y|$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$  e  $\gamma = 1$  e a condição de transversalidade do Teorema 6.4.4 é trivialmente satisfeita. Portanto todas as condições do Teorema 6.4.4 estão satisfeitas e  $U_d = (1 - d)V + dW$ ,  $0 < d < 1$  é uma família de funções energia para o sistema original se  $\varepsilon < \varepsilon_d^* = \frac{1}{2}$ , onde  $\varepsilon_d^*$  foi definido na Observação 6.4.2. Estas funções energia permitem concluir que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema original se  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ .

O procedimento de decomposição rápida-lenta naturalmente nos conduziu a construção de uma função energia que pode ser utilizada para a análise do sistema dinâmico em um sentido mais amplo. Consequentemente, resultados analíticos melhores são obtidos; por exemplo, obtivemos uma caracterização muito melhor dos conjuntos limites. É importante ressaltar que a decomposição rápida-lenta é válida para  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ . Por outro lado, a função obtida pelas técnicas convencionais forneceu estimativas mais grosseiras do conjunto atrativo mas para todo  $\varepsilon > 0$ .

A seguir estudar-se-á um sistema obtido a partir de uma pequena modificação no exemplo anterior para ilustrar que as hipóteses exigidas em [37] não são satisfeitas neste exemplo. Os resultados do Teorema 6.4.4, proposto nesta tese, oferecem uma família de funções energia para este exemplo levando a estimativas menos conservadoras da área de atração e dos conjuntos atrativos.

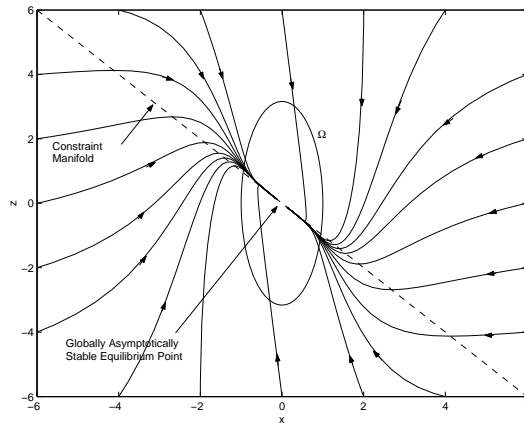


Figura 6.4: Retrato de fase do sistema do exemplo 6.4.5 para  $\varepsilon = 0, 1$ . Toda trajetória entra no conjunto  $\Omega$  em tempo finito. O conjunto  $\Omega$  é uma estimativa do conjunto atrativo obtida via função  $V = \frac{x^2 + \varepsilon z^2}{2}$ .

**Exemplo 6.4.6** Considere o seguinte sistema singularmente perturbado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - x^3 + z \\ \varepsilon \dot{z} &= -x - z \end{aligned} \quad (6.6)$$

Este sistema contém apenas 3 pontos de equilíbrio em  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, -1)$ . A origem é instável enquanto que os outros são estáveis. Novamente, é muito natural escolher

$$V(x, z) = \frac{x^2 + \varepsilon z^2}{2}$$

como uma candidata a função energia para este sistema. A derivada de  $V$  é dada por:

$$\dot{V} = -x^4 + 2x^2 - z^2$$

e portanto  $V$  não é uma função energia para o sistema (6.6). Entretanto, usando argumentos similares aqueles utilizados no último exemplo, conclui-se que  $\Omega = \{(x, z) : V(x, z) \leq 1\}$  é a melhor estimativa do conjunto atrativo via função  $V$ . O conjunto  $\Omega$  assim como o retrato de fase estão mostrados na Figura 6.5. Esta estimativa é uniforme com relação a  $\varepsilon$ .

Vamos aplicar as idéias de decomposição rápida-lenta para construir uma função energia para este sistema. O sistema lento é dado por  $\dot{x} = x - x^3$  e a variedade de restrição algébrica é dada por  $M_o = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z = h(x) = -x\}$ . Definindo a nova variável  $y := z - h(x) = z + x$  e a nova escala de tempo  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ , é fácil ver que o sistema rápido é dado por  $\frac{dy}{d\tau} = -y$ . É natural escolher  $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$  como uma função energia para o sistema lento e  $W(y) = \frac{y^2}{2}$  como uma função energia para o sistema rápido. Com estas funções, as seguintes estimativas são obtidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) &\leq -|x^3 - x|^2 = -\psi_1^2(x) \\ \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y) &\leq -y^2 = -\psi_2^2(y) \end{aligned}$$

É fácil verificar que as condições (F1)-(F4) do Teorema 6.4.1 e as condições do Teorema 6.4.4 são satisfeitas. Portanto,  $U = (1 - d)V + dW$ ,  $0 < d < 1$  é uma família de funções energia para o sistema (6.6). Estas funções energia garantem que todas as trajetórias tendem para o maior conjunto invariante contido no conjunto  $C := \{(x, y) \in D_1 \times D_2 : \psi_1(x) = 0, \psi_2(y) = 0\}$  que, neste caso, é composto por 3 pontos de equilíbrio, i.e.,  $\{(0, 0); (1, -1); (-1, 1)\}$ .

Novamente, a propriedade de decomposição gerou uma função energia que fornece informações muito mais precisas dos conjuntos limites. Mais precisamente, a decomposição permitiu concluir que os conjuntos  $\omega$ -limites são os 3 pontos de equilíbrio enquanto que a abordagem tradicional apenas garantiu que os conjuntos  $\omega$ -limites estavam contidos em um conjunto limitado.

A decomposição da análise de estabilidade também fornece estimativas menos conservadoras da área de atração. Suponha que queiramos estimar a área de atração do ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $(-1, 1)$ . A função tradicional  $V$ , embora forneça uma estimativa do conjunto atrativo, não fornece estimativas da área de atração dos pontos de equilíbrio. Uma alternativa é tentar uma Função de Lyapunov quadrática local obtida a partir do sistema linearizado nas vizinhanças do ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Usualmente a estimativa da área de atração obtida com estas funções são muito conservadoras; se comparadas à área de atração verdadeira [9]. A função energia obtida via decomposição rápida-lenta fornece estimativas muito melhores da área de atração. A Figura 6.6 apresenta uma estimativa para  $\varepsilon = 0.1$  e  $d = 0.02$  assim como a estimativa obtida com a função de Lyapunov quadrática. Observa-se que a estimativa obtida com a função energia composta é muito menos conservadora do que aquela obtida com a função quadrática. Obviamente, a estimativa da área de atração obtida com a função composta depende do parâmetro  $d \in (0, 1)$ . Usualmente, existe um compromisso entre maximizar o limitante superior  $\varepsilon_d$  e maximizar a estimativa da área de atração. Neste exemplo, o parâmetro  $d$  foi determinado por um procedimento de tentativa e erro. Investigações adicionais seriam necessárias para otimizar a estimativa da área de atração com relação ao parâmetro  $d$ .

É importante ressaltar que o resultado original de [37] exige que ambas funções  $\psi_1$  e  $\psi_2$  assumam o valor zero na origem. Esta hipótese não permite que o resultado original de [37] possa ser aplicado neste exemplo.

## 6.5 Estabilidade Uniforme do Sistema Rápido

Nesta seção, as idéias de estabilidade uniforme apresentadas em [35] e [17] são empregadas para a análise de estabilidade das variáveis rápidas de um sistema singularmente perturbado. Em muitas situações práticas, a estabilidade do sistema lento não é uma preocupação. Ao invés disto, deseja-se garantir a estabilidade da dinâmica rápida. Entretanto, como os sistemas rápido e lento não são completa-

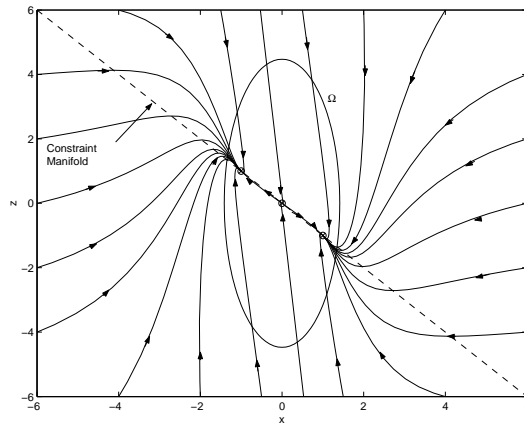


Figura 6.5: Retrato de fase do sistema do exemplo 6.4.6 para  $\varepsilon = 0, 1$ . Todas trajetórias entram no conjunto  $\Omega$  em tempo finito. O conjunto  $\Omega$  é uma estimativa dos conjuntos limites obtida via função  $V = \frac{x^2 + \varepsilon z^2}{2}$ .

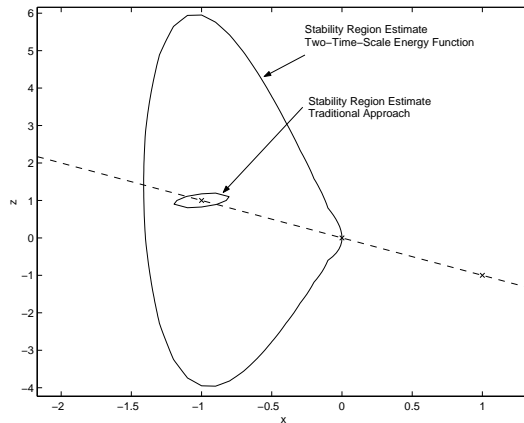


Figura 6.6: Estimativa da área de atração do ponto de equilíbrio estável  $(-1, 1)$  do exemplo 6.4.6 com  $\varepsilon = 0, 1$ . Uma estimativa muito mais precisa é obtida com a função energia composta  $U$  com  $d = 0, 02$  enquanto que resultados muito conservadores são obtidos pela função quadrática  $V = 0.275(x+1)^2 - 0.225(x+1)(z-1) + 0.275(z-1)^2$ .

mente desacoplados, as variáveis lentas afetam a dinâmica das variáveis rápidas. Para tratar este problema, aplica-se uma análise de estabilidade uniforme com relação às variáveis lentas.

Considere o seguinte sistema:

$$\dot{y} = G(y, x) \quad (6.7)$$

onde a variável lenta  $x \in \mathbb{R}^n$  é tratada como uma incerteza, isto é, existe um conjunto  $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $x(t) \in \Gamma_1$  para todo  $t > t_o$ . Além disto, existe um conjunto  $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{x} \in \Gamma_2$  para todo  $t > t_o$ . O estado  $y \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de variáveis rápidas e  $G$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ . Denotaremos por  $\phi_{(t, x(t))}(t_o, y_o)$  a trajetória de (6.7) passando pela condição inicial  $(t_o, y_o)$  sob a incerteza  $x(t)$ .



O próximo teorema fornece condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema rápido. Como a variável lenta pode variar continuamente, o conceito de pontos de equilíbrio ou atratores não se aplica a este sistema; entretanto, pode-se garantir, usando o próximo teorema, que as trajetórias iniciando suficientemente próximas a um certo conjunto permanecem próximas para tempo futuro. Este conjunto faz o papel da estimativa do conjunto atrativo para esta situação. Além disto, o teorema fornece um conjunto de condições iniciais cujas trajetórias atingirão esta estimativa em tempo finito. Este conjunto de condições iniciais faz o papel da estimativa da área de atração para este sistema não autônomo. Ambos conjuntos são estimativas uniformes com relação a variável lenta  $x \in \Gamma_1$ .

**Teorema 6.5.1** *Considere o sistema (6.7). Se as seguintes condições são satisfeitas:*

(S1) *Existem funções contínuas  $a, b, c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  e uma função de classe  $C^1$   $V : \mathbb{R}^m \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que*

$$a(y) \leq V(y, x) \leq b(y) \quad \text{for } x \in \Gamma_1$$

$$e \quad -\frac{dV(y, x)}{d\tau} := -\frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y} G(y, x) \geq c(y) \quad \text{para } x \in \Gamma_1, \dot{x} \in \Gamma_2$$

(S2) *Existe um nível  $L \in \mathbb{R}$  tal que os conjuntos de nível  $B_L := \{y \in \mathbb{R}^m : b(y) < L\} \subset A_L := \{y \in \mathbb{R}^m : a(y) < L\}$  sejam limitados.*

(S3)  *$\sup_{y \in C} b(y) < l < L$ , onde  $C := \{y \in A_L : c(y) \leq 0\}$ .*

Então,

(i)  $\bar{A}_L$  *é um conjunto positivamente invariante de  $B_L$  com relação a (6.7) (i.e., toda trajetória de (6.7) iniciando em  $B_L$  não abandona o conjunto  $\bar{A}_L$  para  $t > 0$ ).*

(ii) *toda trajetória iniciando em  $B_L$  entra no conjunto  $B_l := \{y \in \mathbb{R}^m : b(y) < l\}$ .*

(iii)  $\bar{A}_l$  *é um conjunto positivamente invariante de  $B_l$  com relação a (6.7), onde  $A_l := \{y \in \mathbb{R}^m : a(y) < l\}$  e  $\bar{A}_l$  denota o fecho do conjunto  $A_l$ .*

**Demonstração:** Esta demonstração é uma adaptação de alguns resultados apresentados em [17]. Considere uma condição inicial  $(t_o, y_o) \in B_l$ . Afirmamos que a trajetória  $y(t) := \phi_{(t, x(t))}(t_o, y_o)$  não abandona o conjunto de nível  $\bar{A}_l$  para  $t \geq t_o$  enquanto  $x(t) \in \Gamma_1$  e  $\dot{x}(t) \in \Gamma_2$ . Para provar esta afirmação, suponha por contradição a existência de uma função  $x(t) \in \Gamma_1$  com  $\dot{x}(t) \in \Gamma_2$  para  $t \geq t_o$  e um tempo  $t^* > t_o$  tal que  $y(t^*) = \phi_{(t^*, x(t^*))}(t_o, y_o) \notin A_l$ . Então, pela hipótese (S1),  $V(t^*) \geq a(t^*) > l$ . Seja  $t_1 := \inf\{t_a \in \mathbb{R} : y(t) \notin B_l \text{ para todo } t \in [t_a, t^*]\}$ . A continuidade das trajetórias garante que  $t_1 < t^*$ . Da definição de  $t_1$ , sabe-se que  $y(t) \notin C \subset B_l$  para

todo  $t \in [t_1, t^*]$  e da continuidade de  $b$ , sabe-se que  $V(t_1) \leq b(t_1) = l$ . Portanto, no intervalo  $(t_1, t^*)$  existe um tempo  $t_2$  tal que  $\dot{V} > 0$ . Mas isto é um absurdo uma vez que  $y(t) \notin C$  para  $t \in (t_1, t_1^*)$  e  $C$  é a única região onde necessariamente a função energia é não decrescente. Isto demonstra (iii).

Seguindo argumentação similar e usando o fato de que  $L > l$  prova-se (i). Para provar (ii), considere uma condição inicial  $(t_o, y_o) \in B_L$ . De (i) sabe-se que  $y(t)$  não abandona o conjunto  $A_L$  para  $t \geq t_o$ . Portanto, da hipótese (S2),  $y(t)$  é limitado e conseqüentemente, da hipótese (S1),  $V(t)$  é limitada para  $t > t_o$ . Admita, por contradição, a existência de uma função  $x(t) \in \Gamma_1$  com  $\dot{x}(t) \in \Gamma_2$  para  $t \geq t_o$  tal que  $y(t) = \phi_{(t, x(t))}(t_o, y_o) \notin C \subset B_l$  para todo  $t > t_o$ . Isto implica, da hipótese (S3), a existência de um número real positivo  $\alpha$  tal que  $\dot{V}(t) < -\alpha < 0$  para  $t > t_o$ . Então  $V(t) = \int_{t_o}^t \dot{V}(s) ds \leq V(t_o) - \alpha(t - t_o)$ . Mas isto é um absurdo pois  $V(t)$  se tornará menor do que  $l$  para algum tempo  $t \geq 0$ . Isto demonstra (ii).  $\square$

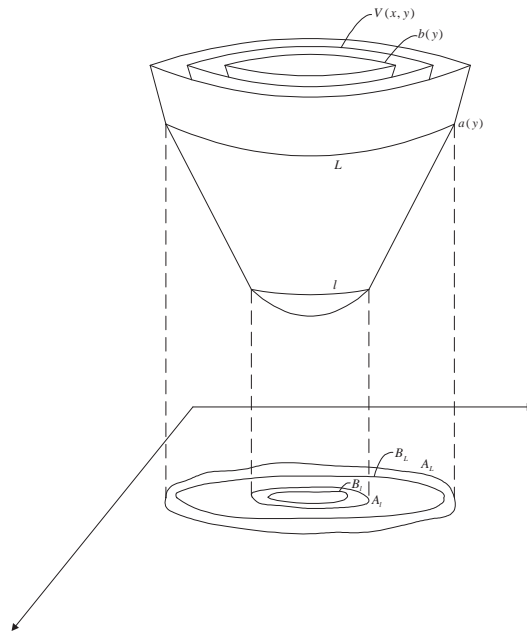


Figura 6.7: Relação entre as funções  $a$ ,  $V$  e  $b$  com os conjuntos de nível  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $A_l$  e  $B_l$  do Teorema 6.5.1

A Figura 6.7 mostra a relação entre as funções  $a$ ,  $V$  e  $b$  e os conjuntos  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $A_l$  e  $B_l$  enquanto que a Figura 6.8 mostra as propriedades de invariância dos conjuntos de nível e sua relação com o conjunto  $C$ . Pode-se verificar que toda trajetória iniciando em  $B_L$ , depois de um certo intervalo de tempo, entra em  $B_l$  e permanece confinada ao conjunto  $A_l$  para todo tempo futuro.

**Observação 6.5.2** *A existência das funções  $a$ ,  $b$  e  $c$  satisfazendo as condições do Teorema 6.5.1 garantem a uniformidade da análise com relação a variável lenta  $x$ .*

**Observação 6.5.3** *O par de conjuntos  $A_l$  e  $B_l$  fazem o papel de um atrator estável no sentido de que todas as trajetórias que atingem  $B_l$  não saem de  $A_l$ . Por outro*

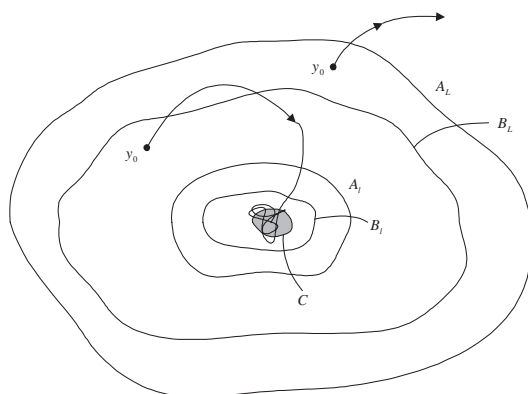


Figura 6.8: Propriedades de invariância dos conjuntos de nível  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $A_l$  e  $B_l$  do Teorema 6.5.1

lado, o conjunto  $B_L$  faz o papel da área de atração no sentido de que toda trajetória iniciando em  $B_L$  atinge  $B_l$ . Do ponto de vista prático, se  $B_l \subset A_l$  são conjuntos suficientemente pequenos, então podemos considerar o sistema estável.

**Observação 6.5.4** O resultado não exige que  $x$  seja uma variável lenta, entretanto, isto é muito desejável para a estimativa de  $\Gamma_2$ . Se  $x$  é lenta, então  $\|\dot{x}\|$  tende a ser pequeno e conseqüentemente  $\Gamma_2$  tende a ser um conjunto pequeno.

**Observação 6.5.5** Em muitas aplicações, o conjunto  $A_L$  não é limitado e nem conexo, entretanto os resultados do Teorema 6.5.1 são válidos para cada componente limitada e conexa do conjunto  $A_L$ .

A seguir aplica-se o Teorema 6.5.1 para a análise de estabilidade das variáveis rápidas do sistema singularmente perturbado  $(\Sigma_\varepsilon)$ . Observe em  $(\Pi_\varepsilon)$  que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= G(y, x) = g(x, y + h(x)) - \varepsilon \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, y + h(x)) \\ &= g(x, y + h(x)) - \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} \end{aligned}$$

Usualmente, da experiência prática, determina-se um conjunto  $\Gamma_1$  tal que  $x(\tau) \in \Gamma_1$  para todo  $\tau \geq 0$ , e da equação

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, y + h(x)),$$

obtém-se uma estimativa para  $\frac{dx}{d\tau}$ .

Uma vantagem oferecida por este resultado é que não é necessário conhecer de maneira precisa a localização da variedade de restrição algébrica  $M_o$  e o sistema lento pode ser inclusive instável. O próximo exemplo ilustra estas vantagens.

**Exemplo 6.5.6** Sincronização é uma propriedade de sistemas não lineares que não requer em princípio a estabilidade do subsistema lento. Em verdade, a sincronização

pode ocorrer mesmo quando o subsistema lento é instável. Considere o seguinte par de sistemas não lineares acoplados [4]:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= P - R \sin \delta_1 - K \sin(\delta_1 - \delta_2) \\ \dot{\delta}_2 &= P - R \sin \delta_2 - K \sin(\delta_2 - \delta_1)\end{aligned}$$

onde  $K$  é um número suficientemente grande. Aparentemente, este sistema não possui dinâmicas em diferentes escalas de tempo, entretanto, definindo as novas variáveis de estado  $z := \delta_1 - \delta_2$  e  $x := \delta_1 + \delta_2$  e fazendo  $\varepsilon = \frac{1}{2K}$  obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2P - 2R \sin \frac{x}{2} \cos \frac{z}{2} \\ \varepsilon \dot{z} &= -\frac{R}{K} \sin \frac{z}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin z\end{aligned}$$

É evidente, nestas novas variáveis, que  $z$  é uma variável rápida enquanto  $x$  é uma variável lenta. Neste caso, não é necessário encontrar o conjunto  $M_o$  ainda que ele possa ser facilmente determinado pelo teorema da função implícita. A estabilidade da variável rápida  $z$  uniforme com relação a  $x$  será estudada. Para este fim, considere o subsistema rápido

$$\varepsilon \dot{z} = G(z, x) = -\frac{R}{K} \sin \frac{z}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin z$$

e suponha que  $x \in \Gamma_1 = \mathbb{R}$ .

Considere  $V(z) = -\cos z + 1$  como uma candidata a função energia. Neste caso, escolhe-se  $a(z) = V(z) = b(z)$ . Também, é fácil obter-se a estimativa  $-\frac{dV}{dt} = K \sin^2 z + 2R \sin^2 \frac{z}{2} (\cos \frac{z}{2} \cos \frac{x}{2}) \geq K \sin^2 z - 2R =: c(z)$ . Portanto, a condição (S1) do Teorema 6.5.1 é atendida. Neste caso, a região onde a derivada de  $V$  é positiva é composta por um número infinito de componentes conexas devido a periodicidade de  $\dot{V}$ , entretanto, estamos apenas interessados na componente conexa nas vizinhanças da origem, isto é,  $C \subset \{z : |z| \leq \alpha\}$ , onde  $\alpha = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{2R}{K}} \right)$ . Escolhendo  $L = 1,4161$ , a componente conexa de  $A_L$  contendo a origem é limitada e não intercepta nenhuma outra região onde a derivada é positiva exceto aquela contida em  $C$ . Consequentemente, as condições (S2) e (S3) são satisfeitas para  $l = \sup_{z \in C} = 0,2254$  para as correspondentes componentes conexas de  $A_L$  e  $A_l$ , veja Observação 6.5.5. A Figura 6.9 mostra uma componente conexa dos conjuntos  $A_l$  e  $B_L$ . Estes conjuntos são independentes de  $x(t) \in \mathbb{R}$ , portanto, toda trajetória iniciando nesta componente conexa de  $B_L$  atingirá a componente conexa associada  $B_l = A_l$  em tempo finito e permanecerá neste conjunto para todo tempo futuro.

Conclui-se que o sistema sincroniza no sentido de que a diferença  $z = \delta_1 - \delta_2$ , após um intervalo de tempo finito, permanece próxima o suficiente da origem. A Figura 6.10 mostra o comportamento rápido da sincronização no domínio do tempo para uma situação instável. Esta situação corresponde a um cenário onde dois geradores de um sistema de potência aceleram e perdem a estabilidade com relação ao resto do sistema. Observe que a técnica de decomposição da análise de estabilidade

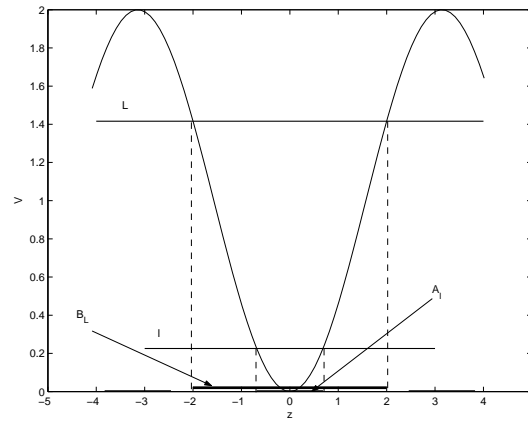


Figura 6.9: Função energia e estimativa uniforme da "área de atração" do sistema rápido do exemplo 6.5.6

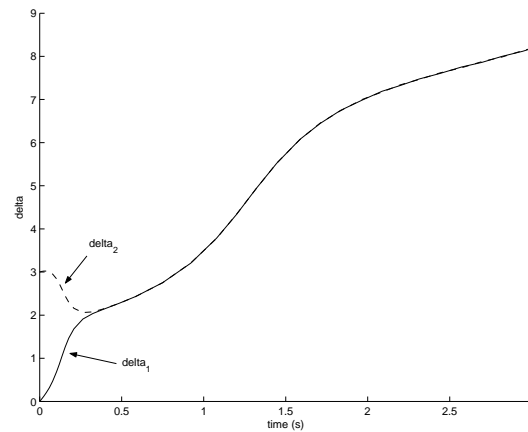


Figura 6.10: Simulação no domínio do tempo do exemplo 6.5.6 mostrando sincronização para uma situação instável. Parâmetros  $P = 3$ ,  $R = 2$ ,  $K = 10$ . Condições iniciais:  $\delta_1(0) = 0$  and  $\delta_2(0) = 3$

*proposta na seção anterior não se aplica a este exemplo na medida que o sistema lento é instável.*

**Exemplo 6.5.7** *O seguinte sistema não linear é considerado em [39] e [37].*

$$\begin{cases} \dot{E} &= -aE + b\cos\delta + E_{fd} \\ \varepsilon\dot{\delta} &= \omega \\ \varepsilon\dot{\omega} &= -\lambda\omega + P - cE\sin\delta \end{cases} \quad (6.8)$$

*Ele modela um sistema de potência composto de um gerador conectado a um barramento infinito através de uma linha de transmissão. O principal objetivo na análise de sistemas de potência é obter uma boa estimativa da área de atração. Neste exemplo, três abordagens baseadas em funções energia serão utilizadas e comparadas para estimar a área de atração do ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $(\beta, \alpha, 0)$ .*

Será mostrado que a análise de estabilidade uniforme oferece a melhor estimativa da área de atração neste caso.

Função Energia Tradicional: Na literatura de sistemas de potência, a seguinte função energia é usualmente empregada para estimar a área de atração:

$$V_{conv} = \varepsilon \frac{\omega^2}{2} - P\delta - cE \cos \delta + \frac{ca}{b} \frac{E^2}{2} - \frac{c}{b} E_{fd} E$$

É fácil verificar que  $\dot{V} = -\lambda\omega^2 - \frac{c}{b}\dot{E}^2 \leq 0$ . A estimativa ótima da área de atração [9] que pode ser obtida com esta função é mostrada na Figura 6.11 para  $\lambda = 4$ ,  $P = 55,4$ ,  $\varepsilon = 0,1515$ ,  $a = 2,214$ ,  $b = 1,214$ ,  $c = 97,181$  e  $E_{fd} = 1,22$ . Para estes parâmetros, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável (SEP) é  $(\beta, \alpha, 0) = (1,031; 0,4067; 0)$ .

Função Energia Composta: Defina as novas variáveis  $x := E - \beta$ ,  $z_1 := \delta - \alpha$  e  $z_2 := \omega$ . Nestas novas variáveis o ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $(\beta, \alpha, 0)$  é trasladado para a origem e o sistema (6.8) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + b[\cos(z_1 + \alpha) - \cos \alpha] \\ \varepsilon \dot{z}_1 &= z_2 \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= -\lambda z_2 - c[(\beta + x) \sin(z_1 + \alpha) - \beta \sin \alpha] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Seguindo as idéias das seções 6.2.1 e 6.2.2, é fácil obter o modelo reduzido

$$\dot{x} = -ax + bN(x), \quad (6.10)$$

onde  $N(x) := \cos(h_1(x) + \alpha) - \cos \alpha$ ,  $h_1(x) = \sin^{-1} \left\{ \frac{\beta \sin \alpha}{\beta + x} \right\} - \alpha$ , e o sistema rápido

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -\lambda y_2 - cM(x, y) \end{cases} \quad (6.11)$$

onde  $y_1 := z_1 - h_1(x)$ ,  $y_2 := z_2$ ,  $M(x, y) = (\beta + x) \sin(y_1 + h_1(x) + \alpha) - \beta \sin \alpha$ , e  $x$  é tratado como um parâmetro.

Usando idéias muito similares aquelas apresentadas em [37], demonstra-se que as seguintes funções:

$$V(x) = - \int_0^x [-a\sigma + bN(\sigma)] d\sigma$$

e

$$W(y_1, y_2, x) = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \gamma c \int_0^{y_1} M(x, \sigma) d\sigma$$

satisfazem as condições (F1)-(F4) do Teorema 6.4.1. A função composta  $U = (1 - d)V + dW$ ,  $0 < d < 1$  é uma função energia para o sistema (6.9) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

A estimativa da área de atração obtida com  $d = 0,01$  e  $\gamma = 0,52$  é mostrada na Figura 6.11. Pode-se ver que a função composta fornece uma estimativa da área de

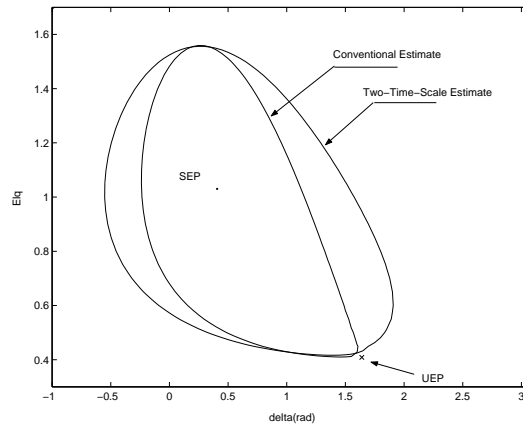


Figura 6.11: Interseção da área de atração com o subespaço  $\{(E, \delta, \omega) \in \mathbb{R}^3 : \omega = 0\}$ . Comparação entre as funções energia convencional e composta.

atração menos conservadora se comparada a estimativa obtida com a função energia convencional. Entretanto, esta estimativa é válida se  $\varepsilon$  é pequeno. Em verdade, para garantir a satisfação das condições (F1)-(F4), um  $\varepsilon$  da ordem de  $10^{-2}$  ou menor é requerido enquanto que usualmente em sistemas de potência  $\varepsilon$  é da ordem de  $10^{-1}$ . *Análise de Estabilidade Uniforme:* Usualmente, as variáveis rápidas possuem um papel muito importante na obtenção de estimativas da parte relevante da área de atração. Para o modelo de sistemas de potência (6.8), o gerador usualmente torna-se instável pela aceleração do rotor enquanto que a tensão  $E$  não apresenta variações significativas. Com isto em mente, considere o seguinte subsistema de (6.8) na escala de tempo rápida:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= \omega \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= -\lambda\omega + P - cE \sin \delta \end{aligned}$$

O Teorema 6.5.1 será utilizado para estimar a parte relevante da área de atração de (6.8). É importante salientar que sistemas elétricos de potência possuem controladores rápidos de tensão que podem fazer com que a tensão  $E$  varie até mesmo mais rápido do que as variáveis mecânicas  $\delta$  e  $\omega$ . Apesar disto, a variável  $E$  será tratada como uma incerteza, isto é,  $\Gamma_1 = \{E \in \mathbb{R} : E_{min} \leq E \leq E_{max}\}$  e o Teorema 6.5.1 não exige que  $E$  seja uma variável lenta, portanto a mesma metodologia poderia ser conceitualmente utilizada para estudar a estabilidade de sistemas com modelos mais detalhados.

Considere a seguinte candidata a função energia:

$$V(\delta, \omega, E) = \frac{\omega^2}{2} - P\delta - cE \cos \delta - \xi\omega[P - cE \sin \delta]$$

Escolhendo  $a(\delta, \omega) := \inf_{E_{min} \leq E \leq E_{max}} V(\delta, \omega, E)$  e  $b(\delta, \omega) := \sup_{E_{min} \leq E \leq E_{max}} V(\delta, \omega, E)$  a primeira parte da condição (S1) do Teorema 6.5.1 é atendida. Além disto, pode-se escolher  $c(\delta, \omega) = -\sup_{E_{min} \leq E \leq E_{max}} \frac{dV}{d\tau}$ . Para  $0 < \xi < \frac{4\lambda}{4cE_{max} + \lambda^2}$ , a condição

(S1) do Teorema 6.5.1 é atendida. A Figura 6.12 mostra o conjunto  $C$  e os conjuntos  $A_l, B_l, A_L$  e  $B_L$  para  $E_{min} = 0,7$ ,  $E_{max} = 1,05$ ,  $\xi = 0,014$ ,  $L = -65,3$  e  $l = -108,8$ . Com estas escolhas de  $\xi$ ,  $L$  e  $l$ , as condições (S1)-(S4) do Teorema 6.5.1 são satisfeitas. A Figura 6.13 mostra a estimativa uniforme da área de atração obtida via Teorema 6.5.1 e a intersecção da estimativa da área de atração obtida com a função energia tradicional com o subconjunto  $\{(E, \delta, \omega) \in \mathbb{R}^3 : E = \beta\}$ . Pode-se ver que a análise de estabilidade uniforme fornece uma estimativa muito menos conservadora da área de atração. Embora a estimativa uniforme seja comparável à estimativa obtida com a função energia composta, a análise uniforme não exige que  $\varepsilon$  seja pequeno e conseqüentemente fornece estimativas menos conservadoras da área de atração. A localização dos pontos de equilíbrio instáveis do sistema rápido para um valor fixo de  $E = 1,031$  assim como a projeção do ponto de equilíbrio instável (UEP) de (6.8) no conjunto  $\{(E, \delta, \omega) \in \mathbb{R}^3 : E = \beta\}$  estão mostradas na mesma figura.

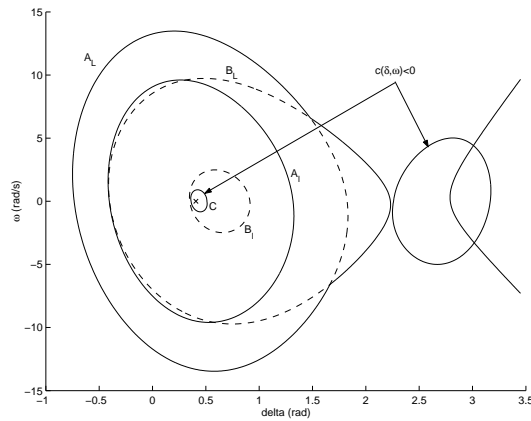


Figura 6.12: Estimativas Uniformes  $A_L, B_L, A_l$  e  $B_l$  obtidas via Teorema 6.5.1 para o exemplo 6.5.7



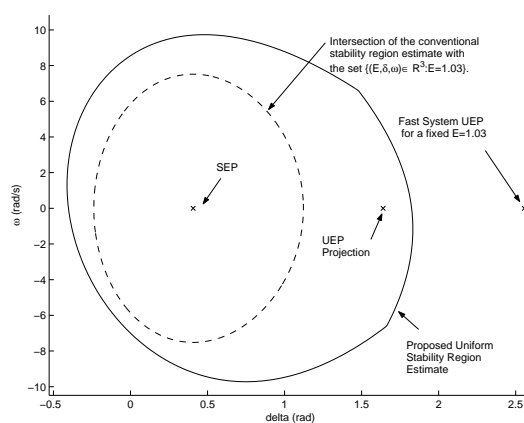


Figura 6.13: Estimativa Uniforme da Área de Atração do sistema (6.8) via Teorema 6.5.1. Comparação entre o procedimento convencional e a estimativa uniforme proposta.



# Capítulo 7

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Funções energia podem fornecer informações muito importantes a respeito dos conjuntos limites e da área de atração. Neste trabalho generalizou-se o conceito de energia para acomodar a presença de conjuntos limites complexos, tais como órbitas fechadas e caóticas, na fronteira da área de atração. Esta nova função escalar auxiliar é denominada função energia generalizada e explora as idéias da extensão do Princípio de Invariância para extrair informações a respeito dos conjuntos limites. A generalização mostrou-se prática do ponto de vista computacional. Ela foi aplicada para a obtenção de estimativas da área de atração de um sistema elétrico de potência considerando as condutâncias de transferência. É importante salientar que funções energia gerais tradicionais não existem quando as condutâncias de transferência são consideradas.

Trabalhos futuros são necessários para caracterizar a fronteira da área de atração na presença de conjuntos limites complexos na fronteira da área de atração. Neste sentido espera-se que a generalização das variedades estáveis e instáveis para conjuntos compactos e invariantes seja a alternativa para esta generalização.

Além da generalização do conceito de energia, estudou-se neste trabalho a caracterização e estimativas da área de atração de sistemas singularmente perturbados. Alguns resultados parciais a respeito da caracterização da área de atração de sistemas singularmente perturbados são apresentados. O objetivo desta caracterização é decompor os algoritmos de estimativa da área de atração em duas etapas: uma de dinâmicas rápidas e outra de lentas. Trabalhos futuros são ainda necessários para completar esta caracterização.

Do ponto de vista de estimativas da área de atração via funções energia, propôs-se neste trabalho o uso de funções energia compostas, ou seja, formadas pela composição de uma energia para o sistema lento e uma para o sistema rápido. Os resultados nesta linha são uma pequena generalização dos resultados a respeito de funções de Lyapunov compostas existentes na literatura.

Propôs-se também a obtenção de estimativas da área de atração do sistema rápido uniformes com relação às variáveis de dinâmica lenta. Em ambas as proposições, estimativas menos conservadoras dos conjuntos atrativos e de suas respectivas áreas

de atração foram obtidas, incluindo estimativas de tempos críticos de abertura em um pequeno sistema elétrico de potência.

Acredito que os estudos referentes a estimativa e caracterização da área de atração de sistemas singularmente perturbados podem fornecer o embasamento teórico e sugerir métodos numéricos que sejam mais rápidos, robustos e menos conservadores para a obtenção de estimativas da área de atração de sistemas elétricos de potência. A decomposição de métodos de análise de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência é uma aplicação promissora desta teoria. A decomposição dos algoritmos PEBS e BCU propostos na literatura de sistemas elétricos de potência é um dos objetivos de pesquisas futuras.

# Bibliografia

- [1] R. A. Al-Ashoor and K. Khorasani. A decentralized indirect adaptive control for a class of two-time-scale nonlinear systems with application to flexible-joint manipulators. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 46(5):1019–1029, October 1999.
- [2] T. J. Aprille and T. N. Trick. A computer algorithm to determine the steady state response of nonlinear oscillators. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-19(4), July 1972.
- [3] F. Brauer and J. A. Nohel. *The qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. W.A.Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1969.
- [4] N. G. Bretas and L. F. C. Alberto. Coherency on electrical power systems. *Proceedings of the International Conference on Power System Technology - POWERCON 2000*, 1:157–162, December 2000.
- [5] Taís Ruoso Calliero. *Um Princípio de Invariância para Sistemas Dinâmicos Discretos*. Dissertação de Mestrado da Escola de Engenharia de São Carlos, 2005.
- [6] K. W. Chang. Two problems in singular perturbations of differential equations. *Journal of Australian Mathematical Society*, pages 33–50, 1969.
- [7] H. D. Chiang. Study of the existence of energy functions for power-systems with losses. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 36(11):1423–1429, November 1989.
- [8] H.-D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability of nonlinear systems described by a second-order vector differential equation. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 35(6):703–711, June 1988.
- [9] H.-D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu. Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 33(1):16–27, January 1988.
- [10] H.-D. Chiang, F. Wu, and P. P. Varaiya. Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient stability analysis. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 35(6):712–728, June 1988.

- [11] H.-D. Chiang, F. F. Wu, and P. P. Varaiya. A bcu method for direct analysis of power systems transient stability. *IEEE Trans. on Power Systems*, 9(3):1194–1208, August 1994.
- [12] H. D. Chiang, F. F. Wu, and P. P. Varaya. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-34(n.2), February 1987.
- [13] H.D. Chiang, C.C. Chu, and G. Cauley. Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications and perspectives. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1497–1529, November 1995.
- [14] J. H. Chow, J. R. Winkelman, M. A. Pai, and P. W. Sawyer. Singular perturbation analysis of large-scale power systems. *Electrical Power & Energy Systems*, 12(2):117–126, April 1990.
- [15] W. A. Coppel. *Dichotomies in Stability Theory*. Lecture Notes in Mathematics - Springer-Verlag, 1970.
- [16] R. J. Davy and I. A. Hiskens. Lyapunov functions for multimachine power systems with dynamic loads. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 44(9):796–812, Sep 1997.
- [17] M. F. Gameiro and H. M. Rodrigues. Applications of robust synchronization to communication systems. *Applicable Analysis*, 79(1-2):21–45, 2001.
- [18] L. T. Grujic. Uniform asymptotic stability of nonlinear singularly perturbed and large scale systems. *International Journal of Control*, 33(3):481–504, 1981.
- [19] S. Gusia, F. Labrique, D. Grenier, and H. Buyse. Two time scale global dynamical modelling of power electronic systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 63(3-5):225–236, November 2003.
- [20] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [21] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub. Invariant manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76(5):1015–1019, 1970.
- [22] I. A. Hiskens and R. J. Davy. Lyapunov function analysis of power systems with dynamic loads. *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996*, 4:3870–3875, Dec 1996.
- [23] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1948.
- [24] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2nd ed., 1996.

- [25] K. Khorasani and M.A. Pai. Two time scale decomposition and stability analysis of power systems. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 135(3):205–212, May 1988.
- [26] J. Lee and H. D. Chiang. Theory of stability regions for a class of nonhyperbolic dynamical systems and its application to constraint satisfaction problem. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2):196–209, February 2002.
- [27] Elon Lages Lima. *Análise no  $\mathbb{R}^n$* . Edgard Blucher, 1970.
- [28] B. E. A. Milani. Contractive polyhedra for discrete time linear systems with saturating controls. *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, pages 2039–2044, December 1999.
- [29] Leopoldo Nachbin. *Introduction to Functional Analysis: Banach Spaces and Differential Calculus*. Marcel Dekker, Inc., 1981.
- [30] Ivo Sechi Nazareno. *Método Dinâmico para Detecção do PEBS e "Shadowing Method" para Cálculo do Ponto de Equilíbrio de Controle em Estudos de Estabilidade Transitória*. Dissertação de Mestrado da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2003.
- [31] Jacob Palis and Welington Melo. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Editora Edgard Blucher, Ltda., 1978.
- [32] J. R. Parkhurst and L. L. Ogborn. Determining the steady-state output of nonlinear oscillatory circuits using multiple shooting. *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 14(7):882–889, July 1995.
- [33] C. C. Pugh. On a theorem of hartman, p. *American Journal of Mathematics*, 91(2):363, 1969.
- [34] H. M. Rodrigues, L. F. C. Alberto, and N. G. Bretas. On the invariance principle. generalizations and applications to synchronization. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(5):730–739, May 2000.
- [35] H. M. Rodrigues, L. F. C. Alberto, and N. G. Bretas. Uniform invariance principle and synchronization. robustness with respect to parameter variation. *Journal of Differential Equations*, 169(1):228–254 Part 3, Jan 2001.
- [36] Hildebrando Munhoz Rodrigues. *Notas de Aula do curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. ICMC - USP, 2004.

- [37] A. Saberi and H. Khalil. Quadratic-type lyapunov functions for singularly perturbed systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-29(6):542–550, June 1984.
- [38] H. Sasaki. An approximate incorporation of field flux decay into transient stability analysis of multimachine power systems by the second method of lyapunov. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, PAS-98(2):473–483, Marc-April 1979.
- [39] M. W. Siddiquee. Transient stability of an a.c. generator by lyapunov’s direct method. *International Journal of Control*, 8(2):131–144, 1968.
- [40] F. H. J. R. Silva, L. F. C. Alberto, J. B. A. London, and N. G. Bretas. Smooth perturbation on a classical energy function for lossy power system stability analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 52(1):222–229, Jan 2005.
- [41] Y. Susuki, T. Hikihara, and H. D. Chiang. Stability boundaries analysis of electric power system with dc transmission based on differential-algebraic equation system. *IEICE Trans. on Fundamentals of Eletronics, Communications and Computer Sciences*, E87-A(9):2339–2346, September 2004.
- [42] V. Venkatasubramanian, H. Schattler, and J. Zaborszky. Dynamics of large constrained nonlinear systems - a taxonomy theory. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1530–1560, November 1995.
- [43] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1990.
- [44] J. Zaborszky, G. Huang, B. Zheng, and T. C. Leung. On the phase portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 33(1):4–15, January 1988.
- [45] Y. Zou, M. H. Yin, and H. D. Chiang. Theoretical foundation of the controlling uep method for direct transient-stability analysis of network-preserving power system models. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 50(10):1324–1336, October 2003.