Uma Contribuição ao Desenvolvimento da
Teoria Peridinâmica
Adair Roberto Aguiar, Ph.D.

Adair Roberto Aguiar, Ph.D.

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO DESENVOLVIMENTO DA
TEORIA PERIDINÂMICA**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, Universidade de São Paulo, para
a obtenção do título de Livre Docente em
Engenharia de Estruturas.

Departamento de Engenharia de Estruturas

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

SÃO CARLOS, SP

Agosto de 2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

A282u Aguiar, Adair Roberto
 Uma Contribuição ao desenvolvimento da teoria
 peridinâmica / Adair Roberto Aguiar; orientador . São
 Carlos, 2014.

 Tese (Livre-Docência) - Programa de Pós-Graduação
 em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
 São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

 1. Teoria peridinâmica. 2. Elasticidade . 3. Modelo
 constitutivo. 4. Simetria material. 5. Função energia
 livre. I. Título.

*À minha esposa, Rogéria, pela compreensão, dedicação e companheirismo,
aos meus filhos, Tiago e Helena, por servirem de inspiração nesta caminhada e
a todos aqueles que buscam a verdade na simplicidade e na humildade.*

Agradecimentos

Dedico os meus sinceros agradecimentos . . .

- ao Professor Roger L. Fosdick da Universidade de Minnesota, Minneapolis, MN, EUA, pelo interesse nesta pesquisa, pelas várias discussões e pela persistência;
- ao Pesquisador Richard Lehoucq do *Sandia National Laboratories*, Albuquerque, NM, EUA, pelo encorajamento e discussões sobre diferentes aspectos deste trabalho;
- ao Departamento de Engenharia de Estruturas por apoiar o meu afastamento para a realização desta pesquisa;
- ao Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica e Instituto de Supercomputação, ambos da Universidade de Minnesota em Minneapolis, MN, EUA, por providenciar a infraestrutura logística e computacional durante o estágio realizado no período de 14 de dezembro de 2010 a 14 de junho de 2011;
- à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão de, respectivamente, Bolsa de Pesquisa no Exterior, Proc. 2010/11969-4, e Bolsa de Produtividade em Pesquisa (PQ), Proc. 314410/2009-0 e Proc. 301806/2013-6;
- a todos os funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos que providenciaram os documentos comprobatórios para o concurso de Livre Docência. Em particular, aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas pelos serviços de secretaria.

Resumo

Modelagem constitutiva no contexto da teoria peridinâmica considera, para cada tempo, a deformação coletiva do material em uma vizinhança δ de qualquer ponto de um corpo peridinâmico. O parâmetro δ , chamado horizonte, é tratado como uma propriedade do material. O campo quociente de deslocamento relativo, ao invés do campo escalar extensão, definido nesta vizinhança é utilizado para gerar uma teoria de estado peridinâmica, linearmente elástica e tridimensional. Isto fornece uma interpretação melhorada da cinemática de ligações entre pontos materiais, que inclui mudanças angulares e de comprimento relativos. Uma função energia livre para um material peridinâmico linearmente elástico, isotrópico e que contém quatro constantes materiais é proposta como modelo, e é usada para obter o estado vetorial de força e o estado tensorial de módulo associado para este material. Estes estados são análogos ao campo de tensão e ao tensor elasticidade de quarta ordem, respectivamente, da teoria linear clássica. No limite de pequeno horizonte, somente três das quatro constantes materiais peridinâmicas estão relacionadas às constantes elásticas de um material elástico e isotrópico da teoria linear clássica, com uma das três constantes sendo arbitrária. A quarta constante material peridinâmica, responsável pelo efeito de acoplamento entre mudanças angulares relativas e de comprimentos das ligações entre partículas, não tem efeito no limite, mas permanece parte integrante do modelo peridinâmico.

Um modelo peridinâmico proposto na literatura depende do estado de deformação por meio de suas partes de dilatação e desviatória e contém somente duas constantes materiais peridinâmicas, em analogia à teoria de elasticidade linear clássica. Observe do exposto acima que o nosso modelo depende de mudanças angulares relativas e de comprimento, tal como na teoria linear clássica, mas, de outro modo, não está limitado a ter somente duas constantes materiais. Além disso, nosso modelo corresponde a um material não ordinário, representando uma ruptura substancial com modelos clássicos. Se duas das quatro constantes materiais peridinâmicas são igualadas a zero e se uma certa função peso admite uma decomposição multiplicativa, então os dois modelos são idênticos na vizinhança de um estado natural do corpo peridinâmico. Portanto, nesta vizinhança, nosso modelo, sem quaisquer suposições, é mais geral do que aquele proposto na literatura.

Na última parte deste trabalho o campo quociente de deslocamento relativo é decomposto em partes esférica e desviatória com o propósito de investigar classes admissíveis de campos quocientes que possam ser utilizadas no cálculo das constantes indeterminadas do nosso modelo. Ao utilizar um argumento de correspondência entre o nosso modelo e o modelo da elasticidade linear clássica, uma expressão é obtida para uma das três constantes peridinâmicas mencionadas acima em termos do módulo de elasticidade ao cisalhamento da teoria clássica. Com esta expressão adicional, todas as três constantes peridinâmicas podem ser determinadas unicamente em termos das constantes de Lamé. A determinação da quarta constante indeterminada será objeto de futuras investigações.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria Peridinâmica; Elasticidade; Modelo Constitutivo; Simetria Material; Função Energia Livre.

Abstract

Constitutive modeling within the peridynamic theory considers the collective deformation at each time of all the material within a δ -neighborhood of any point of a peridynamic body. The assignment of the parameter δ , called the horizon, is treated as a material property. The difference displacement quotient field in this neighborhood, rather than the extension scalar field, is used to generate a three dimensional state-based linearly elastic peridynamic theory. This yields an enhanced interpretation of the kinematics between bonds that includes both length and relative angle changes. A free energy function for an isotropic, linearly elastic peridynamic material which contains four material constants is proposed as a model, and it is used to obtain the force vector state and the associated modulus tensor state for this material. These states are analogous to, respectively, the stress field and the fourth-order elasticity tensor in the classical linear theory. In the limit of small horizon, only three of the four peridynamic material constants are related to the classical elastic coefficients of an isotropic linear elastic material, with one of the three constants being arbitrary. The fourth peridynamic material constant, which accounts for the coupling effect of both bond length and relative angle changes, has no effect in the limit, but remains a part of the peridynamic model.

A peridynamic model proposed elsewhere in the literature depends on the deformation state through its dilatational and deviatoric parts and contains only two peridynamic material constants, in analogy to the classical linear elasticity theory. Observe from above that our model depends on both length and relative angle changes, as in the classical linear theory, but, otherwise, is not limited to having only two material constants. In addition, our model corresponds to a nonordinary material, which represents a substantial break with classical models. If two of the four peridynamic material constants are set equal to zero and if a certain weighting function admits a multiplicative decomposition, then the two models are identical in the vicinity of a natural state of the peridynamic body. Thus, in this vicinity, our model, with no assumptions made, is more general than the one proposed elsewhere in the literature.

In the last part of this work the difference displacement quotient field is decomposed into spherical and deviatoric parts for the purpose of investigating admissible classes of this field that can be used to evaluate the undetermined peridynamic constants of our model. By using a correspondence argument between our model and the classical linear elasticity model, an expression is found for one of the three peridynamic constants stated above in terms of the shear elastic modulus of the classical theory. With this additional expression, all three peridynamic constants can be determined uniquely in terms of the two Lamé constants. The determination of the fourth undetermined constant will be the subject of future investigation.

KEYWORDS: Peridynamic Theory. Elasticity. Constitutive Modeling. Material Symmetry. Free Energy Function.

Sumário

Lista de Figuras.....

Lista de Tabelas

1	Introdução.....	17
1.1	Motivação	17
1.1.1	Problemas Singulares.....	18
1.1.2	Problema do Bloco Colado sob Compressão	21
1.1.3	Problema do Punção Colado a um Semi-Plano	25
1.1.4	Teoria de Minimização com Restrição de Injetividade	32
1.2	Revisão Bibliográfica	43
1.3	Justificativa.....	45
1.4	Objetivos.....	46
1.5	Metodologia	47
1.6	Organização da Tese	48
2	Cinemática de Pequenas Deformações.....	51
3	Teoria Constitutiva	57
3.1	Invariância sob Mudança de Referencial	57
3.2	Invariância sob Simetria Material	58
3.3	Linearização de um Material Simples	61
3.4	Linearização de um Material Simples Elástico	62
3.4.1	Teoria Geral	62

3.4.2	Proposta de Função Energia Livre	66
4	Determinação das Constantes Peridinâmicas.....	71
5	Correspondência com o Sólido Isotrópico Linear de Silling et al. (2007)	79
6	Decomposição do Quociente de Deslocamento Relativo	85
7	Conclusão.....	93
Apêndice A		
	Constantes Peridinâmicas na Teoria Bidimensional	95
	Referências	97

Lista de Figuras

Figura 1	Condições de carregamento e deslocamento homogêneas na vizinhança de cantos.	19
Figura 2	Características geométricas do neoprene fretado, (EL DEBS; TAKEYA, 2010). ..	22
Figura 3	Compressão de bloco com lados colados, (AGUIAR; FOSDICK, 2000). ...	23
Figura 4	Possíveis deformações da superfície livre de tensão na vizinhança do canto superior esquerdo do bloco colado, (AGUIAR; FOSDICK, 2000).	24
Figura 5	Compressão de punção colado a meio elástico, (AGUIAR; FOSDICK, 2001). ..	27
Figura 6	Punção colado a um meio elástico-linear deslocando-se contra este meio. ...	30
Figura 7	Comportamento não monotônico no canto superior do punção, (AGUIAR; FOSDICK, 2001).	31
Figura 8	Deslocamento radial u versus raio ρ para o problema da esfera sólida sob compressão uniforme com a restrição $J \geq \varepsilon = 0.1$	35
Figura 9	Determinante do gradiente de deformação J versus raio ρ para o problema da esfera sólida sob compressão uniforme com a restrição $J \geq \varepsilon = 0.1$	36
Figura 10	Discretização da quarta parte da seção transversal do tubo ortotrópico (lado esquerdo) utilizando ANSYS 10.0, com detalhamento das configurações deformada e não deformada em uma vizinhança da superfície interna (lado direito), (SÁNCHEZ, 2008).	39
Figura 11	Deslocamento radial u versus raio ρ para o problema do tubo com restrição utilizando 7680 elementos finitos: a) Formulação de penalidade interior; b) Formulação de penalidade exterior, (AGUIAR; FOSDICK; SÁNCHEZ, 2008).	41
Figura 12	Determinante do gradiente de deformação J versus raio ρ para o problema do tubo com restrição utilizando 7680 elementos finitos: a) Formulação de Penalidade Interior; b) Formulação de Penalidade Exterior, (AGUIAR; FOSDICK; SÁNCHEZ, 2008).	42
Figura 13	Configurações de referência e deformada de um corpo.	52

Figura 14	Estados vetoriais de deslocamento e deformação relativos.	54
Figura 15	Configurações de referência e deformada das ligações ξ e η	55

Lista de Tabelas

Tabela 1	Constantes peridinâmicas definidas em (4.17) para o caso da teoria 3-D.	76
Tabela 2	Constantes peridinâmicas definidas em (4.17) para o caso da teoria 2-D.	95

1 Introdução

Inicialmente, apresento alguns resultados obtidos de minhas investigações sobre estados singulares na teoria clássica de elasticidade com o objetivo de motivar o estudo da teoria peridinâmica. Realizo uma revisão bibliográfica sobre este tema, destacando os trabalhos que formam o alicerce da teoria e as aplicações da mesma na engenharia. Em seguida, justifico a realização deste trabalho observando que os modelos clássicos utilizados para prever o comportamento de materiais não descrevem adequadamente o que a intuição física sugere baseada em observações elementares e que, portanto, há a necessidade de se propor novos modelos constitutivos que sejam fisicamente realísticos e analiticamente tratáveis. Apresento então objetivos gerais e específicos relacionados à minha contribuição ao desenvolvimento da teoria peridinâmica, bem como uma metodologia para atingir estes objetivos. Por fim, apresento a organização da tese juntamente com os principais resultados obtidos em cada capítulo.

1.1 Motivação

A motivação principal para este trabalho surgiu das minhas investigações sobre estados singulares na teoria clássica de elasticidade. Estas investigações permitem concluir que a teoria linear clássica não é adequada para modelar o comportamento de sólidos elásticos na vizinhança de pontos singulares, tais como cantos de domínios poligonais (Seção 1.1.2), pontos no contorno de um sólido onde ocorrem mudanças abruptas de condições de contorno (Seção 1.1.3) e pontos interiores de sólidos anisotrópicos (Seção 1.1.4). As soluções dos problemas correspondentes formulados no contexto desta teoria linear preveem auto-intersecção da matéria e tensões elevadas, mesmo quando o carregamento no contorno do sólido é de pequena magnitude. A formulação destes mesmos problemas no contexto de teorias não lineares que utilizam modelos constitutivos realísticos permite obter soluções que não preveem a auto-intersecção, apesar de ainda preverem tensões elevadas na vizinhança de pontos singulares. Em ambas as teorias, linear e não li-

near, as tensões elevadas devem-se ao comportamento singular do campo de deslocamento na vizinhança destes pontos, ou seja, o gradiente deste campo tende ao infinito à medida que nos aproximamos de um ponto singular.

A teoria peridinâmica é uma extensão da teoria do contínuo clássica cuja essência é integrar, ao invés de derivar, forças de interação entre partículas próximas entre si. Estas forças dependem somente do deslocamento relativo e das posições relativas destas partículas. Uma vez que derivadas espaciais não são utilizadas, as equações governantes são válidas em todos os pontos do corpo, ou seja, dentro e fora de regiões com singularidades.

1.1.1 Problemas Singulares

Teorias não lineares são mais apropriadas para a investigação de fenômenos novos e importantes na mecânica do comportamento material do que as teorias lineares correspondentes. O estudo da teoria linear revela, entretanto, aspectos interessantes que podem ser utilizados no estudo do comportamento assintótico de soluções de problemas não lineares.

Por exemplo, na ausência de forças inerciais, o campo de deslocamento $\mathbf{u}$ na teoria plana de elasticidade linear tem a expansão assintótica

$$\mathbf{u}(R, \Theta) \approx \sum_{\operatorname{Re} b_j > 0} \sum_{k=0}^{k_j-1} R^{b_j} \log^k R \mathbf{v}_{jk}(\Theta) \quad (1.1)$$

na vizinhança de cantos de domínios poligonais. Na expressão acima, (R, Θ) são coordenadas polares com origem nos cantos, $\mathbf{v}_{jk}$ são funções vetoriais suaves e b_j são raízes complexas com multiplicidade k_j de uma equação transcendental $\Delta(b_j) = 0$. Os trabalhos de Kondrat'ev (1967), Kondrat'ev e Oleinik (1983), Grisvard (1985), Grisvard (1986), Grisvard (1992), Dauge (1988) e Leguillon e Sanchez-Palência (1987) são referências básicas na área de problemas de valor de contorno com soluções singulares. Em particular, se as condições de carregamento, denotado por $\mathbf{S}\mathbf{m}$, e deslocamento forem homogêneas nos lados adjacentes a um canto, conforme ilustrado na Fig. 1, a equação transcendental tem a forma

$$\Delta(b) := \begin{cases} -(1 + \kappa^2) - 2\kappa \cos(2\alpha b) + 2(1 - \cos(2\alpha))b^2 & \text{se } \alpha \neq \pi, \\ \kappa - e^{2i\pi(b-1/2)} & \text{se } \alpha = \pi, \end{cases} \quad (1.2)$$

na qual κ é um parâmetro material, $1 < \kappa < 3$, e α é o ângulo do canto. Esta expressão

é bem conhecida na literatura, tendo sido investigada por Bogy (1971) e Reitich (1991). Está claro de (1.1) e (1.2) que, se $\text{Re } b < 1$, o gradiente do campo de deslocamento tende ao infinito à medida que se aproxima do canto, contradizendo a hipótese aproximativa básica de gradientes de deslocamentos infinitesimais sobre a qual a teoria linear clássica está alicerçada. Além disso, se $\text{Im } b \neq 0$, então oscilações infinitas do tipo $\cos(\text{Im } b \log r)$ e $\sin(\text{Im } b \log r)$ são previstas na vizinhança do canto.

Figura 1: Condições de carregamento e deslocamento homogêneas na vizinhança de cantos.

Comportamentos oscilatórios do tipo mencionado acima estão relatados na literatura. Williams (1959) e Rice e Sih (1965) observam a presença de oscilações no campo de tensão na vizinhança dos vértices de uma trinca situada na interface de dois semi-planos de materiais com propriedades mecânicas diferentes. Knowles e Sternberg (1975), Knowles e Sternberg (1983) e autores por eles citados investigam o comportamento oscilatório em dois problemas clássicos da teoria de elasticidade. A variação do sinal da força de contato observada em um destes problemas e a auto-intersecção da matéria observada no outro problema levam estes autores a concluir que estes problemas não têm soluções no contexto da teoria linear convencional. Eles mostram que os comportamentos oscilatórios anômalos podem ser eliminados utilizando classes particulares de materiais elásticos não lineares. Conforme discussão apresentada na Seção 1.1.3, empregamos esta ideia em nossas investigações.

Para eliminar a sobreposição dos lados deformados de uma trinca ao longo da interface entre dois corpos elástico-lineares, isotrópicos e homogêneos ocupando regiões semi-infinitas em $\mathbb{R}^2$, Comninou (1977), Comninou (1978) e Comninou e Schmueser (1979) impõem condição de contato entre os lados deformados na vizinhança dos vértices da trinca¹. Seus resultados numéricos mostram a existência de duas zonas de contato, uma em cada vértice. O comprimento destas zonas depende muito das condições de carregamento impostas longe dos vértices.

Aravas e Sharma (1991) questionam estes trabalhos e mostram que, quando um dos corpos elásticos é rígido, a solução assintótica baseada na condição de contato ainda prediz a auto-intersecção de material, muito embora esta auto-intersecção seja de natureza diferente da considerada por Comninou e co-autores na análise de problemas de trinca sem a imposição da condição de contato. Eles observam ainda que se o comprimento da zona de contato é pequena quando comparada ao comprimento da trinca, a solução tradicional, baseada na hipótese de faces da trinca livres de tensão sem contato entre as mesmas, continua válida para distâncias maiores do que a zona de contato e ainda pequenas quando comparadas ao comprimento da trinca.

Embora a parte oscilatória da solução de um problema linear ou não linear seja limitada e suave até o contorno, a sua presença pode estar relacionada a um aspecto interessante e inaceitável do comportamento assintótico da solução na vizinhança de um canto, qual seja, a perda de invertibilidade do campo de deformação, a qual implica na auto-intersecção da matéria. Obviamente, soluções singulares fornecendo tensões infinitas para carregamentos moderados no contorno e auto-intersecção da matéria não são fisicamente realísticas e os modelos teóricos que predizem estes comportamentos devem ser revisados. Desejamos descobrir e estudar tal comportamento singular de uma teoria física para desenvolver novos modelos constitutivos e formulações alternativas que predigam comportamentos realísticos nos cantos. Dada a natureza delicada destas investigações, é importante enfatizar que rejeitamos tanto os comportamentos anômalos descritos acima como admissíveis quanto os modelos constitutivos que os predizem como realísticos na vizinhança de um canto.

Aguiar e Fosdick (2000) e Aguiar e Fosdick (2001) utilizam modelos representativos da teoria não linear de elasticidade para ganhar entendimento sobre o comportamento do campo de deformação na vizinhança de pontos sobre o contorno de um corpo elástico em que o contorno, as condições de contorno ou ambos não são suaves. Aguiar e Fos-

¹Esta condição é conhecida na literatura inglesa como *closed crack tip condition*.

dick (2000) introduzem uma base computacional para a investigação do comportamento de soluções de problemas planos em domínios poligonais no contexto da teoria de elasticidade não linear incompressível. Para isto, utilizamos uma família de materiais compressíveis parametrizados por um parâmetro de penalidade que, ao tender a zero, fornece tanto a relação constitutiva de um material incompressível quanto a restrição de incompressibilidade. Empregamos uma formulação clássica de Galerkin para os problemas planos e obtemos o código computacional utilizando o método de elementos finitos juntamente com uma técnica de continuação baseada em um procedimento de Newton-Raphson. Esta técnica emprega a ideia de uma continuação de comprimento de arco para construir um caminho de estados passando pela solução de um problema não linear, o qual começa por uma solução conhecida de um problema elementar. Esta metodologia também é aplicada por Aguiar e Fosdick (2001) na busca de soluções de problemas não lineares.

1.1.2 Problema do Bloco Colado sob Compressão

Aguiar e Fosdick (2000) investigam o *problema do bloco colado sob compressão*, o qual consiste na compressão axial de um cilindro elástico, incompressível, isotrópico e homogêneo sob um estado plano de deformação. O cilindro tem secção transversal quadrada em seu estado natural (sem deformações e sem tensões residuais). Duas faces laterais opostas do cilindro estão livres de tensão e as outras duas faces laterais estão coladas a superfícies rígidas tendo o mesmo tamanho destas faces. O bloco sofre alargamento lateral ou *bojo* simétrico. Em uma vizinhança dos cantos, no entanto, resultados analíticos e numéricos apresentados abaixo permitem argumentar que este alargamento não se verifica e que a superfície livre deformada apresenta um comportamento não monotónico.

O estudo do comportamento de sólidos na vizinhança de pontos singulares é de grande importância na análise da integridade de membros estruturais e na capacidade de aumentar a vida útil destes membros. Entre os desenvolvimentos recentes nas técnicas de proteção e de isolamento de edifícios contra, respectivamente, abalos sísmicos e vibrações destaca-se a utilização de apoios estruturais elastoméricos nas fundações dos edifícios. Tipicamente, um apoio estrutural elastomérico é fabricado de camadas de um material elástico e incompressível alternadas com placas de aço que aderem a estas camadas durante o processo de vulcanização. Os apoios devem sustentar carregamentos estáticos, tais como o peso do edifício e, no regime sísmico, as grandes deformações de cisalhamento, e amortecer carregamentos dinâmicos, tais como vibrações causadas pelas oscilações do

vento e pela passagem de trens e de outros veículos pesados nas imediações dos edifícios. Uma vez que se espera a ocorrência de falha na interface da camada elastomérica com a placa de aço, é crucial ter um bom entendimento do comportamento material na vizinhança desta interface; especialmente, na vizinhança das bordas dos apoios.

No caso específico de pontes, é usual empregar aparelhos de apoio fabricados de placas de neoprene intercaladas com chapas de aço que aderem às camadas elastoméricas durante o processo de vulcanização, formando um bloco único. As chapas de aço exercem um efeito de cintamento sobre as placas de neoprene, reduzindo o seu achatamento excessivo e aumentando as tensões admissíveis no apoio. Os aparelhos assim constituídos são chamados de neoprene cintados ou fretados. Fig. 2 traz uma ilustração de um neoprene fretado com as principais dimensões. Eles aliam rigidez e capacidade de carga vertical elevada a uma grande flexibilidade lateral, permitindo deslocamentos horizontais e rotações relativas dos elementos de estruturas em contato com o aparelho. Além destas características, os aparelhos fabricados de neoprene são duráveis, exigem pouca manutenção e os detalhes de projeto são simples quando comparados a outros tipos de aparelhos de apoio. Neoprene fretados são usualmente colocados entre a infraestrutura e a superestrutura de uma ponte com os objetivos de transmitir as reações da superestrutura para a infraestrutura e permitir alguma movimentação da superestrutura (EL DEBS; TAKEYA, 2010).

Figura 2: Características geométricas do neoprene fretado, (EL DEBS; TAKEYA, 2010).

Apresentamos na Fig. 3 uma ilustração do bloco colado considerado por Aguiar e Fosdick (2000). Observe desta figura que $\mathbf{y}$ é o vetor deformação e Ω e $\mathbf{y}(\Omega)$ são, respectivamente, as configurações não deformada e deformada do sólido. O bloco está em equilíbrio na ausência de força de corpo, $\text{Div } \mathbf{S} = 0$, sendo $\mathbf{S}$ o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff,

Figura 3: Compressão de bloco com lados colados, (AGUIAR; FOSDICK, 2000).

e está submetido a condições de tensão nula, $\mathbf{S} \mathbf{i}_2 = \mathbf{0}$, sobre as bordas horizontais, de deslocamento nulo, $\mathbf{u} = 0$, sobre a borda vertical esquerda e de deslocamento imposto, $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{i}_1$, sobre a borda vertical direita. Além disso, $\mathbf{X} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\Omega)$ e dois segmentos infinitesimais $d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$ perpendiculares na configuração não deformada tornam-se dois segmentos infinitesimais $d\mathbf{x}^{(1)}$ e $d\mathbf{x}^{(2)}$, respectivamente, na configuração deformada fazendo um ângulo β entre si. A solução exata deste problema não é conhecida. Estávamos especialmente interessados no comportamento do sólido na vizinhança de um canto onde uma extremidade colada é adjacente a um lado livre de tensões. Revisão bibliográfica sobre este problema revelou que resultados computacionais eram analisados somente com relação a aspectos globais, tais como as forças resultantes nas extremidades do bloco, os quais, em geral, estão de bom acordo com os dados experimentais correspondentes ou com previsões teóricas aproximadas. Veja, por exemplo, os estudos teóricos, numéricos e experimentais de Boukamel (1988) sobre o comportamento global de um cilindro de secção transversal circular sob compressão axial. Não havia, entretanto, uma análise detalhada do comportamento local do sólido, tal como na vizinhança de um canto do bloco. Neste caso, a literatura disponível era confusa e, até mesmo, contraditória.

O esquema numérico forneceu soluções aproximadas para o problema do bloco colado incompressível que convergem em todos os pontos do bloco com exceção de uma

pequena vizinhança dos cantos do mesmo onde as condições de tensão nula e de deslocamento são impostas. Nesta vizinhança espera-se comportamento singular da solução do problema elastostático. Para compressões moderadamente grandes do bloco, a deformação calculada numericamente é inconsistente com uma condição de compatibilidade cinemática fundamental da Mecânica do Contínuo, segundo a qual segmentos de reta infinitesimais com origem nos cantos do bloco e perpendiculares entre si em seu estado natural não podem deformar em segmentos com ângulos superiores a 180° , ou seja, $\beta < 180^\circ$ na Fig. 3.

Apresentamos na Fig. 4 ilustrações para duas possíveis configurações deformadas da superfície livre de tensões na vizinhança do canto superior do bloco. Em ambas as configurações o ângulo entre dois segmentos de reta infinitesimais originalmente perpendiculares entre si é inferior a 180° , satisfazendo, portanto, a restrição cinemática. Observe da Fig. 4.b que a configuração resultante é inesperada devido à superfície livre de tensão não apresentar um bojamento monotônico na vizinhança do canto, conforme ilustrado na Fig. 4.a. Tal comportamento monotônico é observado longe dos cantos e está relacionado ao alargamento do bloco. Comportamento não monotônico análogo ao sugerido na vizinhança dos cantos do bloco é predito pela solução do problema do punção colado investigado por Aguiar e Fosdick (2001) e descrito na Seção 1.1.3.

Figura 4: Possíveis deformações da superfície livre de tensão na vizinhança do canto superior esquerdo do bloco colado, (AGUIAR; FOSDICK, 2000).

A preservação local de volume juntamente com o comportamento singular do campo de deformação na vizinhança dos cantos do bloco colado gerou erros numéricos

que complicaram a análise do problema do bloco sob compressão. Muito embora as questões numéricas associadas com a restrição de incompressibilidade estejam resolvidas satisfatoriamente no contexto da teoria linear clássica, ainda não é claro como impor de forma precisa esta restrição no contexto da teoria não linear. Em particular, Grisvard (1992) apresenta vários resultados relacionados ao comportamento singular de soluções de problemas elípticos lineares na vizinhança de cantos. Métodos e resultados similares não são conhecidos para a classe mais geral de problemas não lineares. Segundo o autor, “O estudo do comportamento de soluções na vizinhança de cantos em problemas elípticos não lineares em domínios poligonais é, de modo geral, um problema aberto”.

1.1.3 Problema do Punção Colado a um Semi-Plano

Aguiar e Fosdick (2001) relaxam a restrição de incompressibilidade e investigam o comportamento material na proximidade de cantos de domínios poligonais no contexto de uma teoria representativa da *elasticidade não linear compressível*. Embora diferentes relações constitutivas não lineares foram consideradas no curso de nossas investigações, concentramos a atenção na classe dos *materiais harmônicos*. Esta classe foi introduzida por John (1960) e é utilizada por outros autores, tais como Knowles e Sternberg (1975), Knowles e Sternberg (1977), Ogden (1977), Isherwood e Ogden (1977), Carroll (1988), Steigmann e Pipkin (1988) e Ru (2002), para extrair resultados analíticos da teoria não linear. Investigamos o *problema do punção colado a um semi-plano* para uma subclasse de materiais harmônicos e comparamos nossos resultados a resultados obtidos da teoria linear clássica.

O problema consiste em um punção rígido e colado a um meio elástico que se desloca perpendicularmente contra o punção. Na teoria plana, a superfície de contato entre o punção e o meio elástico possui comprimento $2L$, o punção está centrado ao longo do eixo das abscissas Ox_1 e o meio elástico ocupa o lado direito do eixo das ordenadas Ox_2 em sua configuração não deformada, conforme ilustrado na Fig. 5. Deste modo, o intervalo $(-L, L)$ corresponde à superfície de contato entre o punção e o meio elástico e o complemento deste intervalo no eixo das ordenadas corresponde à superfície livre de tensão do meio elástico. Pontos no infinito também estão livres de tensão, de modo que o meio elástico está em equilíbrio. Os pontos $(x_1, x_2) = (0, \pm L)$ são os vértices de setores com ângulos de 180° utilizados em análise assintótica discutida abaixo.

Este problema pertence à classe de problemas de Boussinesq (SNEDDON, 1948) em que se deseja determinar a distribuição de tensões em um sólido semi-infinito quando

a sua fronteira plana é deformada pela pressão de um corpo rígido. Esta classe possui importantes aplicações em várias áreas da Mecânica Aplicada, com destaque especial para a Mecânica dos Solos (KRYNINE, 1947). Neste caso, fundações de edifícios são plataformas rígidas projetadas para transmitir carga vertical sobre um substrato macio, tal como o solo, distribuindo a pressão sobre uma área suficientemente grande para evitar concentrações de tensões excessivas nas interfaces das fundações com o solo (VILLAGGIO, 2009). Considera-se que a fundação é um cilindro de comprimento infinito apoiado sobre um meio elástico. Devido ao comprimento infinito do cilindro, cada secção transversal do sistema é um plano de simetria e o problema correspondente pode ser tratado no contexto da teoria de elasticidade plana.

A subclasse de materiais harmônicos adotada em nossas investigações tem a estrutura assintótica proposta por Knowles e Sternberg (1975) quando a soma dos estiramentos principais, ω_1 , tende ao infinito. Esta estrutura assintótica implica que um sólido prismático feito deste material e sujeito a tração uniaxial homogênea mantém a área da secção transversal não nula para qualquer estiramento uniaxial finito. Para valores moderados de ω_1 , a nossa função resposta segue o comportamento do *material semi-linear* introduzido por John (1960). Referimo-nos, portanto, à nossa função resposta como *modificada semi-linear*. Apesar do material semi-linear de John ter uma estrutura constitutiva muito simples que o torna atrativo para análise teórica e experimentos computacionais, ele fornece campos de deformação com comportamento oscilatório na vizinhança de cantos que predizem auto-intersecção de material. Por esta razão, este material foi utilizado por Aguiar e Fosdick (2001) com o único propósito de comparação com o material semi-linear modificado para valores moderados de ω_1 .

Uma vez que estávamos particularmente interessados no comportamento de soluções na vizinhança dos cantos do punção colado, apresentamos expressões assintóticas utilizando o material semi-linear modificado. Estas expressões não têm oscilações espúrias e excluem a possibilidade de auto-intersecção de material na vizinhança dos cantos do punção. Não obstante, o material semi-linear modificado ainda fornece expressões assintóticas que predizem singularidade do tipo raiz-quadrada. Utilizamos estas expressões para predizer o comportamento da superfície livre e fornecemos resultados numéricos obtidos com o método dos elementos finitos que confirmam estas predições e que predizem o comportamento do meio elástico em seu interior, longe dos cantos. Apresentamos também expressões assintóticas obtidas da investigação do problema do punção colado utilizando os materiais linear clássico e semi-linear. Estas expressões predizem oscilações espúrias para o campo de deformação e são utilizadas somente para ilustrar as limitações destas

Figura 5: Compressão de punção colado a meio elástico, (AGUIAR; FOSDICK, 2001).

teorias. Além disso, uma vez que a forma fechada da solução para o problema linear é bem conhecida e pode ser achada na literatura clássica (e.g., Milne-Thomson (1968) e Muskhelishvili (1963)), utilizamos a solução do problema linear para verificar e autenticar nosso esquema computacional na vizinhança dos cantos do punção.

Uma solução fechada para o problema do punção colado no contexto da teoria não linear não é conhecida. Embora não linear, a estrutura constitutiva da classe de materiais harmônicos permite escrever as equações de equilíbrio e de compatibilidade em uma forma alternativa simples que torna linear parte do problema não linear original. A outra parte do problema é reescrita em termos de uma certa função analítica $\hat{\zeta}$. As não linearidades nas relações constitutiva e cinemática estão incorporadas nesta função. Uma função analítica similar ζ existe na teoria de elasticidade linear clássica. Se escrevermos os problemas linear e não linear em termos de, respectivamente, ζ e $\hat{\zeta}$, estes problemas tornam-se similares. Podemos assim extrair informação da solução de um problema linear, para o qual muito é conhecido, para analisar a solução do problema não linear correspondente.

Neste sentido, propus a forma geral $\zeta(Z) = d Z^{b-1} + \hat{d} \bar{Z}^{\bar{b}-1}$, na qual d , $\hat{d}$ e b são números complexos, $\bar{b}$ é o complexo conjugado de b e Z é uma variável complexa, para

a análise de problemas lineares e utilizei forma similar a esta para $\hat{\zeta}$ na análise dos problemas não lineares correspondentes. Considerei então um setor de raio $\bar{R}$ com condições prescritas de deslocamento e de tensão nula sobre cada lado do setor, respectivamente, e determinei os campos de deformação de equilíbrio no contexto das teorias linear e não linear (material harmônico) que satisfazem estas condições de contorno e a condição de que um campo de deslocamento suave é imposto sobre o arco $R = \bar{R}$. Em ambas as teorias, linear e não linear, utilizo variáveis complexas e as formas especiais de ζ and $\hat{\zeta}$, respectivamente, para obter expressões assintóticas para os campos de deformação correspondentes na vizinhança do canto. Exceto pelas condições impostas sobre $R = \bar{R}$, estas expressões satisfazem todas as outras condições. No caso não linear, supus adicionalmente que $|\hat{\zeta}| \rightarrow \infty$ à medida que nos aproximamos do canto. As expressões assintóticas em ambas as teorias são totalmente determinadas com exceção de certos coeficientes que devem ser calculados das condições sobre $R = \bar{R}$. Apesar de possuírem a mesma forma geral, estas expressões assintóticas dependem da teoria linear ou não linear utilizada.

No caso do problema do punção colado a meio elástico-linear, o expoente b é raiz da equação transcendental (1.2) e sua parte real determina o comportamento singular da solução do problema linear, devendo ser maior do que zero para que a vizinhança do canto tenha energia finita após a deformação. A parte imaginária fornece comportamento oscilatório da solução correspondente, conforme discutido na Seção 1.1.1. Lembre-se desta seção que a expansão assintótica do campo de deslocamento na vizinhança dos cantos do punção tem a forma (1.1).

Ainda no caso linear, calculei os coeficientes da expressão assintótica de uma expansão em série da solução fechada na vizinhança dos cantos do punção. Uma vez que a solução deste problema é única, a expressão assintótica final fornece o comportamento da solução na vizinhança de um canto. Obviamente, para este problema linear poderíamos utilizar a expansão em série diretamente no estudo do comportamento do sólido elástico na vizinhança de um canto. Lembro, entretanto, que o nosso interesse principal em considerar a teoria linear é extrair informação que possa ser usada na análise de problemas da teoria não linear. Para isto, capitalizei sobre a analogia entre estas duas teorias, tal como discutido acima sobre o uso de variáveis complexas e funções analíticas. Outro objetivo é utilizar a solução do problema linear para verificar e autenticar o esquema numérico na vizinhança dos cantos do punção.

De fato, é possível mostrar que a solução do problema do punção colado no contexto da teoria linear clássica prediz que linhas materiais originárias de pontos singulares

interseccionam a si mesmas na vizinhança destes pontos. Mostramos na Fig. 6 linhas materiais deformadas na vizinhança de um canto do punção, a qual corresponde à vizinhança do canto superior do punção na Fig. 5 girada de 90° no sentido horário. Assim, a linha horizontal espessa representa a base do punção colado ao meio elástico-linear, o qual ocupa o lado inferior do eixo horizontal. Lembramos do exposto acima que este meio desloca-se perpendicularmente contra o punção. Na Fig. 6.a vemos linhas materiais não deformadas e, em particular, a linha correspondente à superfície livre do punção e uma linha tracejada próxima a esta superfície livre. Qualquer deslocamento do meio elástico contra o punção faz com que partes destas linhas sejam deformadas para baixo do punção, conforme ilustrado na Fig. 6.b. À medida que o deslocamento do meio elástico aumenta, as configurações deformadas destas linhas sobrepõem-se com as configurações deformadas de outras linhas interiores, evidenciando a auto-intersecção da matéria, conforme ilustrado na Fig. 6.c. Observe da Fig. 6.d que um deslocamento maior do punção ocasiona a formação de um laço na linha correspondente à superfície livre. Obviamente, este comportamento de auto-intersecção não é realístico. Uma discussão detalhada sobre este comportamento anômalo está apresentada na página *The Bonded Punch Problem*².

Resultados assintóticos e computacionais estão de muito bom acordo entre si e indicam que, enquanto no caso linear o termo mais singular da expansão assintótica da solução na vizinhança de um canto do punção é suficiente para descrever o comportamento desta solução além da região onde ocorrem gradientes elevados, no caso não linear precisamos adicionar termos, os quais podem não ser singulares, aos termos mais singulares para atingir o mesmo objetivo. Esta é uma clara indicação de que efeitos de escala são muito importantes na teoria não linear.

Mostramos na Fig. 7 configurações deformadas das superfícies livres de tensão dos sólidos linear (linha fina), semi-linear (linha média) e semi-linear modificado (linha espessa) em três regiões próximas do canto superior do punção da Fig. 5, o qual é representado pela linha reta vertical e espessa. A proximidade ao canto do punção é indicada pela escala de distância (por unidade de comprimento do punção) localizada no lado esquerdo do punção. Da esquerda para a direita vemos escalas de ordem $O(10^{-10})$, $O(10^{-8})$ e $O(10^{-6})$, as quais correspondem a, respectivamente, regiões muito próxima, intermediária e afastada do canto. A tonalidade de cinza das linhas que representam as superfícies livres correspondem a valores do determinante do gradiente de deformação, J , o qual deve ser maior do que zero para que não haja auto-intersecção de material. As partes escuras destas linhas correspondem a $J < 0$ e são, portanto, inadmissíveis. Observe desta figura

²URL: <http://www.msi.umn.edu/aguiarar/>.

Figura 6: Punção colado a um meio elástico-linear deslocando-se contra este meio.

que as superfícies livres deformadas dos três sólidos são muito diferentes a uma distância da ordem $O(10^{-10})$ e que $J < 0$ para os materiais linear e semi-linear. No entanto, à medida que nos afastamos dos cantos, as configurações deformadas dos materiais não lineares tornam-se indistinguíveis, os comportamentos anômalos não são mais observados e as superfícies livres deformadas do meio elástico apresentam comportamentos não monotônicos inesperados que são similares ao comportamento não monotônico da superfície livre deformada do bloco colado ilustrado na Fig. 4.b. Observe também que o material semi-linear modificado satisfaz a condição $J > 0$ para todas as escalas de distância.

Figura 7: Comportamento não monotônico no canto superior do punção, (AGUIAR; FOSDICK, 2001).

Segue do exposto acima que as análises assintótica e computacional revelam a existência de três regiões com diferentes comportamentos característicos em ambas as teorias, linear e não linear (materiais semi-linear e semi-linear modificado). Bem próximo dos cantos, identificamos uma *região singular* onde o campo de tensão possui uma singularidade do tipo raiz quadrada e os materiais linear e semi-linear predizem auto-intersecção e inversão local de material. Tal comportamento anômalo não é predito pelo material semi-linear modificado. Além disso, as configurações deformadas das superfícies livres de tensão são muito diferentes nesta região.

À medida que nos movemos para longe dos cantos, identificamos uma *região intermediária* de pequenos gradientes de deformação para a qual ambas as teorias predizem um comportamento inesperado, mas possível fisicamente, das configurações deformadas das superfícies livres. Longe dos cantos, identificamos uma *região distante* para a qual as configurações deformadas das superfícies livres tornam-se quase paralelas. Em particular, estas superfícies são indistinguíveis para os casos dos materiais semi-linear e semi-linear modificado.

Recentemente, Aguiar e Fosdick (2014b) utilizaram a metodologia de análise descrita acima na investigação assintótica do problema plano de equilíbrio sem força de corpo correspondente à deformação de um setor de raio $\bar{R}$ e ângulo $\alpha \in (0, 2\pi]$ submetido a condições de tensão e deslocamento nulos sobre os lados adjacentes ao seu vértice, conforme ilustrado na Fig. 1.1.1.a. Utilizando o material semi-linear modificado, obtivemos uma expansão assintótica do campo de deformação cujo comportamento singular é determinado pelas raízes de uma equação transcendental que depende do ângulo α . Esta

equação fornece nenhuma ($\alpha < \pi/2$), uma ($\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$), ou, duas ($3\pi/2 < \alpha \leq 2\pi$) raízes reais no intervalo $(0, 1)$. Se $\alpha = \pi/2$, ou, $\alpha = 3\pi/2$, então a expansão assintótica contém termos logarítmicos. Tal como no caso particular $\alpha = \pi$, a expansão assintótica não prediz auto-intersecção da matéria e fornece um comportamento não monotônico da superfície livre de tensão que é fisicamente possível.

Os resultados obtidos da análise de problemas planos de valor de contorno em domínios poligonais utilizando a teoria de elasticidade não linear predizem configurações deformadas realísticas da vizinhança de pontos singulares. Estes pontos podem ser os cantos de um polígono, os vértices de uma trinca ou os pontos de uma reta onde ocorrem mudanças abruptas de condições de contorno. Em todos estes casos, os pontos pertencem ao contorno do corpo. Pontos singulares também podem ocorrer no interior de corpos elástico-lineares, homogêneos e anisotrópicos com fronteiras e carregamentos suaves. As soluções dos problemas singulares correspondentes predizem tensões elevadas e auto-intersecção de material na vizinhança destes pontos. Em alguns casos, os problemas não possuem soluções limitadas. Para tratar estes problemas, apresentamos na próxima seção elementos de uma teoria de minimização de um funcional de energia da teoria de elasticidade linear clássica com a restrição $J > 0$, lembrando da exposição acima que J é o determinante do gradiente de deformação. Entendemos que a teoria linear não deve ser levada a sério na vizinhança de pontos singulares; não obstante, também acreditamos que a teoria pode modelar adequadamente a restrição não linear $J > 0$. A imposição desta restrição gera forças reativas que garantem que regiões materiais não se auto-interseccionam.

1.1.4 Teoria de Minimização com Restrição de Injetividade

Queremos determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u}(\cdot) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) de um corpo $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ de modo que o potencial de energia $E(\mathbf{u})$ seja minimizado sujeito à restrição de que o vetor deformação $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, seja localmente inversível, ou seja, $J := \det(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) > 0$ em $\mathcal{B}$. Na elasticidade linear, a energia de deformação é um funcional quadrático de $\nabla \mathbf{u}$ e, no contexto de problemas planos em que a dimensão $n = 2$, Fosdick e Royer (2001) provam um teorema de existência para tais minimizadores no espaço $W^{1,2}(\mathcal{B})$ de funções integráveis com derivadas também integráveis. Em particular, eles mostram que existe uma solução para o problema clássico do punção rígido colado a um meio elástico-linear que não é a solução clássica discutida na Seção 1.1.3, a qual prediz o fenômeno da auto-intersecção.

Estamos integrando a teoria apresentada por Fosdick e Royer (2001) com um procedimento computacional robusto que trata o problema de minimização de um funcional quadrático com a restrição $J > 0$. Este procedimento tem a vantagem de eliminar a necessidade de monitorar as violações de $J > 0$ no corpo, tal como proposto por Obeidat et al. (2001), e de ser facilmente aplicável na análise de problemas em qualquer dimensão. O procedimento está baseado em uma formulação de penalidade do problema de minimização com restrição. Nesta formulação, adicionamos ao potencial de energia $E(\mathbf{u})$ um funcional de penalidade $P(\mathbf{u})$ dividido por um parâmetro de penalidade $\delta > 0$. Assim, $E_\delta(\mathbf{u}) := E(\mathbf{u}) + (1/\delta) P(\mathbf{u})$, em que consideramos duas escolhas diferentes para o funcional $P(\mathbf{u})$.

Na formulação de penalidade interior, o funcional de penalidade é definido no interior de uma região admissível para a qual $J \geq \varepsilon > 0$, em que ε é suficientemente pequeno, e possui a propriedade de tender ao infinito à medida que $J \rightarrow \varepsilon$. Buscamos por um mínimo $\mathbf{u}_\delta$ no espaço de funções $W^{1,2}(\mathcal{B})$ do potencial de energia aumentado, $E_\delta(\mathbf{u})$, que satisfaça todas as condições de contorno essenciais. Construimos uma sequência de soluções $\mathbf{u}_\delta$, parametrizada por δ , que converge para a solução do problema com restrição (original) à medida que $\delta \rightarrow \infty$. Uma vantagem desta formulação é que o minimizador de $E_\delta(\mathbf{u})$ é procurado em uma região factível do espaço de funções admissíveis, ou seja, o candidato para um mínimo sempre satisfaz $J \geq \varepsilon$ em todos os pontos do corpo. Esta formulação é utilizada com sucesso por Aguiar (2006) na solução do *problema da esfera anisotrópica* com a restrição $J \geq \varepsilon$ descrito acima.

O problema da esfera anisotrópica concerne o equilíbrio de uma esfera sólida de raio ρ_e , homogênea e esfericamente ortotrópica que é comprimida por uma pressão uniformemente distribuída sobre a sua superfície externa. Este problema é investigado por Ting (1999) no contexto da teoria de elasticidade linear clássica, sem a imposição de $J > 0$. Uma vez que o problema linear sem restrição é radialmente simétrico em relação ao centro da esfera, a única componente não nula do campo vetorial de deslocamento é o deslocamento radial $\hat{u} : (0, \rho_e) \rightarrow \mathbb{R}$, o qual tem a forma

$$\hat{u}(\rho) = \alpha^+ \rho^{\lambda^+} + \alpha^- \rho^{\lambda^-}, \quad \rho \in (0, \rho_e), \quad (1.3)$$

sendo $\alpha^\pm \in \mathbb{R}$ constantes determinadas das condições de pressão uniforme na superfície externa e de compatibilidade natural no centro da esfera, $\hat{u}(0) = 0$,

$$\lambda^\pm := \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\gamma} \right), \quad \gamma := \frac{c_{22} + c_{23} - c_{12}}{c_{11}} \quad (1.4)$$

e $c_{11}, c_{22}, c_{23}, c_{12}$ são constantes elásticas que satisfazem as desigualdades

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad -c_{22} < c_{23} < c_{22}, \quad c_{11} > \frac{2c_{12}^2}{(c_{22} + c_{23})}. \quad (1.5)$$

Segue de (1.5) que $-1/8 < \gamma < \infty$. Está claro de ambos, (1.3) e (1.4), que o problema linear não possui solução limitada para $-1/8 < \gamma \leq 0$. Se $0 < \gamma < 1$, Aguiar (2006) mostra que, embora limitada, a solução do problema prediz auto-intersecção em uma vizinhança do centro da esfera.

Impondo a restrição $J \geq \varepsilon$ e supondo que o problema correspondente é radialmente simétrico em relação ao centro da esfera, Aguiar (2006) obtém o deslocamento radial $u : (0, \rho_e) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$u(\rho) = \begin{cases} -(1 - \varepsilon^{1/3}) \rho & \text{para } \rho \in (0, \rho_a), \\ \frac{(1 - \varepsilon^{1/3}) \rho_a}{2\kappa} \left[-(1 + \kappa) \left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^{\lambda^-} + (1 - \kappa) \left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^{\lambda^+} \right] & \text{para } \rho \in (\rho_a, \rho_e), \end{cases} \quad (1.6)$$

em que $\lambda^\pm$ são dados por (1.4.a) e ρ_a é a única solução da equação algébrica

$$0 = (\lambda^+ + 2\eta) \left(\frac{1 + \kappa}{2\kappa} \right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_a} \right)^{3(\kappa-1)/2} - (\lambda^- + 2\eta) \left(\frac{1 - \kappa}{2\kappa} \right) \left(\frac{\rho_e}{\rho_a} \right)^{-3(\kappa+1)/2} - \frac{p}{c_{11}(1 - \varepsilon^{1/3})}, \quad (1.7)$$

com $\eta := c_{12}/c_{11}$, $\kappa := \sqrt{1 + 8\gamma}/3$ e $p \in \mathbb{R}$ sendo a pressão. Observe de (1.6) que a solução do problema com restrição existe para todos os valores finitos de $\gamma > -1/8$ (e não somente para $\gamma > 0$ como no caso linear descrito acima). A constante ρ_a é o raio da interface que separa a parte da esfera onde $J = \varepsilon$ da parte da esfera onde $J > 0$.

Mostramos na Fig. 8 curvas do deslocamento radial u versus raio ρ obtidas da solução analítica exata do problema com restrição, dada por (1.6), e de soluções numéricas da formulação de penalidade utilizando o funcional E_δ para valores crescentes de $\delta \in \{2, 20, \dots, 2 * 10^9\}$. As soluções numéricas foram obtidas via Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico considerando uma malha não uniforme de 480 elementos lineares, de modo análogo ao considerado por Obeidat et al. (2001). Estes autores utilizaram 300 elementos em $(\rho_i, 0.07\rho_e)$, 100 elementos em $(0.07\rho_e, 0.46\rho_e)$ e 80 elementos em $(0.46\rho_e, \rho_e)$, totalizando 480 elementos. Consideramos também as seguintes grandezas adimensionais: $\rho_e = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $p = 5$, $c_{11} = 10000$, $c_{22} = 300$, $c_{12} = 1000$ e $c_{23} = 153.125$. As constantes elásticas satisfazem as desigualdades (1.5) e fornecem

$\gamma = -7/128$ de (1.4.b). Para este valor de γ , segue da exposição acima que o problema linear sem restrição não possui solução limitada. Os valores acima, quando substituídos em (1.7), fornecem $\rho_a \cong 0.0079602$. De volta à Fig. 8, a solução analítica é representada pela linha cheia e as soluções numéricas são representadas pelas linhas traço-ponto. Iniciando de um pequeno valor de δ , vemos desta figura que a solução numérica converge para a solução analítica à medida que δ aumenta. Vemos também que, diferentemente da solução do problema linear, as soluções satisfazem a condição de compatibilidade natural no centro da esfera e têm comportamento não monotônico no intervalo $(0, \rho_e)$.

Figura 8: Deslocamento radial u versus raio ρ para o problema da esfera sólida sob compressão uniforme com a restrição $J \geq \varepsilon = 0.1$.

Utilizando os dados numéricos introduzidos acima, mostramos na Fig. 9 curvas do determinante do gradiente de deformação J versus raio ρ obtidas das soluções analítica, representada pela linha cheia, e numérica, representada pela linha traço-ponto, para $\delta = 2 * 10^9$ e para a malha não uniforme de 480 elementos lineares. Figura 9.a refere-se a todo o intervalo $(0, \rho_e)$ e Fig. 9.b refere-se ao intervalo $(0, 10^{-3})$, o qual contém a parte da esfera onde $J = \varepsilon$. Em ambas as figuras, observe a ótima concordância entre os resultados analíticos e numéricos. Em particular, observe que o esquema numérico captura muito bem a mudança abrupta, mas ainda suave, de J para $\rho = \rho_a$. Verificamos que a pequena diferença observada na figura do lado direito tende a zero à medida que aumentamos o número de elementos na proximidade de $\rho = \rho_a$.

A principal desvantagem da formulação de penalidade interior é que E_δ não é

diferenciável no contorno da região factível. Uma formulação alternativa, utilizada por Aguiar e Fosdick (2000) para impor a restrição de incompressibilidade em materiais tipo borracha, é a formulação de penalidade exterior. Nesta formulação, o funcional de penalidade é zero na região admissível e positivo externamente a esta região. Além disso, a versão discretizada deste funcional é contínua e diferenciável em todos os pontos do corpo. Aqui, buscamos por um mínimo $\mathbf{u}_\delta$ em $W^{1,2}(\mathcal{B})$ do potencial de energia aumentado $E_\delta(\mathbf{u})$ em todo o espaço, e não somente na região factível. A solução do problema original (com restrição) é então obtida como a função limite da sequência $\{\mathbf{u}_\delta\}$ à medida que $\delta \rightarrow 0$. Em geral, as soluções dos problemas discretos associados pertencem ao exterior da região factível.

Figura 9: Determinante do gradiente de deformação J versus raio ρ para o problema da esfera sólida sob compressão uniforme com a restrição $J \geq \varepsilon = 0.1$.

Aguiar, Fosdick e Sánchez (2008) comparam ambas as formulações de penalidade resolvendo, na ausência de força de corpo, o problema de equilíbrio de um tubo circular cilindricamente ortotrópico e homogêneo que está fixado em sua superfície interna de raio ρ_i e é comprimido ao longo da superfície externa de raio ρ_e por um carregamento normal uniformemente distribuído p . O tubo está sob um estado de deformação plana paralelo às extremidades do mesmo. No contexto da teoria de elasticidade linear clássica, a única componente não nula do campo vetorial de deslocamento é o deslocamento radial $\hat{u} : (\rho_i, \rho_e) \rightarrow \mathbb{R}$ em um sistema de coordenadas polares (ρ, θ) . Neste sistema de coordenadas, as tensões radial, σ_ρ , e azimutal, σ_θ , relacionam-se ao deslocamento radial $\hat{u}$ por meio de

$$\sigma_\rho = c_{11} \frac{d\hat{u}(\rho)}{d\rho} + c_{12} \frac{\hat{u}(\rho)}{\rho}, \quad \sigma_\theta = c_{12} \frac{d\hat{u}(\rho)}{d\rho} + c_{22} \frac{\hat{u}(\rho)}{\rho}, \quad (1.8)$$

sendo c_{11}, c_{22}, c_{12} constantes elásticas do tubo cilindricamente ortotrópico. As tensões

cisalhantes são nulas e a tensão axial é obtida das tensões normais σ_ρ e σ_θ . A solução do problema é dada por

$$\hat{u}(\rho) = -\frac{\rho_i}{2\kappa} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^\kappa - \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{-\kappa} \right] \frac{p}{p_1 c_{11}}, \quad \kappa := \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, \quad \rho_i < \rho < \rho_e, \quad (1.9)$$

sendo $0 < \kappa < \infty$ e

$$p_1 := \frac{\rho_i}{2\kappa\rho_e} \left[(\kappa - \mu_\theta) \left(\frac{\rho_i}{\rho_e} \right)^\kappa + (\kappa + \mu_\theta) \left(\frac{\rho_i}{\rho_e} \right)^{-\kappa} \right] > 0, \quad \mu_\theta := \frac{c_{12}}{c_{11}}. \quad (1.10)$$

Está claro de (1.10) que p_1 é pequeno para ρ_i pequeno e $0 < \kappa < 1$. Se $0 < \kappa < 1$ e $p \geq p_1 c_{11}$, Aguiar, Fosdick e Sánchez (2008) mostram que a equação algébrica $1 + \hat{u}'(\rho) = 0$ admite uma única solução ρ_1 , caracterizando a auto-intersecção em uma vizinhança da superfície interna do tubo. Os autores mostram também que, se $p > p_2 c_{11}$ para

$$p_2 := (1 - \kappa) \left(\frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right)^{\left(\frac{1+\kappa}{2\kappa} \right)} p_1, \quad (1.11)$$

a equação algébrica $1 + \hat{u}(\rho)/\rho = 0$ possui duas soluções para ρ , as quais denotamos por ρ_A e ρ_B . Se $p = p_2 c_{11}$, esta equação possui uma única solução de multiplicidade dois. O valor crítico dado por (1.11) satisfaz $p_2 > 2p_1$ para $0 < \kappa < 1$. Uma vez que $J = (1 + \hat{u}'(\rho))(1 + \hat{u}(\rho)/\rho)$ para o *problema do tubo ortotrópico* comprimido por pressão uniforme, segue das observações acima que, se $p > p_2 c_{11}$, J oscila entre valores negativos e positivos em uma vizinhança próxima da superfície interna do tubo.

No limite, quando $\rho_i \rightarrow 0$, obtemos de (1.9) a solução clássica de Lekhnitskii (1968) para o *problema do disco ortotrópico* sob compressão uniforme, dada por

$$\hat{u}_0(\rho) := -\left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^\kappa \rho_e q, \quad q := \frac{p}{\sqrt{c_{11} c_{22}} + c_{12}}, \quad 0 < \rho < \rho_e. \quad (1.12)$$

Observe de ambos, (1.8) e (1.12), que as tensões normais tendem ao infinito à medida que nos aproximamos do centro do disco para $0 < \kappa < 1$. Observe também de (1.12) que $d\hat{u}_0(\rho)/d\rho < -1$ em uma vizinhança do centro do disco, caracterizando a auto-intersecção local da matéria.

O problema do disco ortotrópico também é considerado por Tarn (2002) como um caso especial de uma classe de problemas planos generalizados. O autor está interessado na questão da tensão singular no centro do disco que resulta de ambos, (1.8) e (1.12), quando $0 < \kappa < 1$. Ele atribui o comportamento singular a uma definição conflitante de anisotropia em $\rho = 0$. Para solucionar isto, ele considera problemas planos envolvendo dois

cilindros concêntricos de materiais elástico-lineares diferentes. O cilindro vazado externo é cilíndricamente anisotrópico e o cilindro maciço interno é transversalmente isotrópico. Muito embora os campos de tensão obtidos das soluções destes problemas não sejam singulares no centro do cilindro composto resultante, Fosdick, Freddi e Royer-Carfagni (2008) observam que a auto-intersecção ainda é uma questão em aberto naquele trabalho.

Exceto pelo raio interno, utilizamos as mesmas grandezas adimensionais empregadas por Fosdick e Royer (2001) e Obeidat et al. (2001) em seus estudos do problema do disco ortotrópico sob compressão uniforme. Assim, os raios interno e externo do tubo são $\rho_i = 10^{-3}$ e $\rho_e = 1$, respectivamente, $p = 500$, $c_{11} = 100000$, $c_{22} = 1000$ e $c_{12} = 1000$. Lembramos do enunciado do problema que o deslocamento imposto no raio interno é nulo. Com estes parâmetros geométricos e materiais, obtemos de (1.9.b), (1.10.a, b) e (1.11) que $\kappa = 0.1 < 1$, $p_1 \cong 0.00132$, $\mu_\theta = 0.01$ e $p_2 \cong 0.00359$, respectivamente. Segue do exposto acima que as raízes das equações algébricas $1 + \hat{u}'(\rho) = 0$ e $1 + \hat{u}(\rho)/\rho = 0$, em que $\hat{u}$ é a solução do problema sem restrição dada por (1.9) juntamente com (1.10), são dadas por $\rho_1 \cong 0.00381$, $\rho_A \cong 0.00148$ e $\rho_B \cong 0.00784$. Lembrando que $J = (1 + \hat{u}'(\rho))(1 + \hat{u}(\rho)/\rho)$, temos que J é negativo para $\rho \in (\rho_i, \rho_A)$, positivo para $\rho \in (\rho_A, \rho_1)$, novamente negativo para $\rho \in (\rho_1, \rho_B)$ e finalmente positivo para $\rho \in (\rho_B, \rho_e)$.

Para ilustrar o efeito da violação de $J > 0$ em uma região próxima a ρ_i , mostramos resultados computacionais na Fig. 10 obtidos por Sánchez (2008) da simulação numérica do problema do tubo ortotrópico no contexto da teoria linear sem restrição utilizando o pacote comercial de elementos finitos ANSYS 10.0. Devido à simetria radial, o autor considera somente um quarto da seção transversal do tubo. No lado esquerdo da Fig. 10 apresentamos uma discretização do domínio utilizando elementos bilineares e no lado direito mostramos as configurações deformada, representada pela linha cheia, e não deformada, representada pela linha tracejada, da malha de elementos finitos em uma vizinhança da superfície interna do tubo. Em particular, mostramos no lado direito as configurações não deformadas de alguns elementos e indicamos com setas onde estes elementos são mapeados após a deformação. Observe que o elemento mais próximo da superfície interna é mapeado sobre o cilindro rígido ao qual o tubo está colado, caracterizando o fenômeno espúrio da auto-intersecção da matéria.

Impondo a restrição $J \geq \varepsilon$ e supondo que o problema correspondente é radialmente simétrico em relação ao centro do tubo, Aguiar, Fosdick e Sánchez (2008) obtêm o

Figura 10: Discretização da quarta parte da seção transversal do tubo ortotrópico (lado esquerdo) utilizando ANSYS 10.0, com detalhamento das configurações deformada e não deformada em uma vizinhança da superfície interna (lado direito), (SÁNCHEZ, 2008).

deslocamento radial $u : (\rho_i, \rho_e) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$u(\rho) = \begin{cases} g(\rho) - \rho, & g(\rho) := \sqrt{(\rho^2 - \rho_i^2)\varepsilon + \rho_i^2} & \text{para } \rho \in (\rho_i, \rho_a), \\ \beta^+ \rho^\kappa + \beta^- \rho^{-\kappa} & \text{para } \rho \in (\rho_a, \rho_e), \end{cases} \quad (1.13)$$

em que

$$\begin{aligned} \beta^+ &:= \frac{\rho_a^{-\kappa+1}}{2\kappa} \left[-(1+\kappa) + \kappa \frac{g(\rho_a)}{\rho_a} + \frac{\varepsilon \rho_a}{g(\rho_a)} \right], \\ \beta^- &:= \frac{\rho_a^{\kappa+1}}{2\kappa} \left[1 - \kappa + \kappa \frac{g(\rho_a)}{\rho_a} - \frac{\varepsilon \rho_a}{g(\rho_a)} \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Similarmente ao descrito no caso da esfera sob compressão uniforme, a constante ρ_a é o raio da interface entre a parte do tubo onde a condição de injetividade está ativa, $J = \varepsilon$ em (ρ_i, ρ_a) , e a parte do tubo onde a condição está inativa, $J > \varepsilon$ em (ρ_a, ρ_e) . Este raio é a única solução da equação algébrica

$$0 = s(\varsigma; \kappa) + s(\varsigma; -\kappa) + \frac{p}{c_{11}}, \quad \varsigma := \frac{\rho_a}{\rho_e}, \quad (1.15)$$

na qual

$$s(\varsigma; \kappa) := \left(\frac{\kappa + \mu_\theta}{2\kappa} \right) \varsigma^{1-\kappa} \left[-(1+\kappa) + \frac{\kappa \hat{g}(\varsigma)}{\varsigma} + \frac{\varepsilon \varsigma}{\hat{g}(\varsigma)} \right] \quad (1.16)$$

é uma função de ς parametrizada por κ e

$$\hat{g}(\varsigma) := \sqrt{\varepsilon \varsigma^2 + (1 - \varepsilon) \varsigma_i^2}, \quad \varsigma_i := \frac{\rho_i}{\rho_e}. \quad (1.17)$$

Soluções numéricas foram obtidas via MEF clássico considerando partições não uniformes do intervalo (ρ_i, ρ_e) de modo análogo ao realizado por Obeidat et al. (2001) no estudo computacional do disco ortotrópico sob compressão uniforme. A malha menos refinada tem 300 elementos em $(\rho_i, 0.07 \rho_e)$, 100 elementos em $(0.07 \rho_e, 0.46 \rho_e)$ e 80 elementos em $(0.46 \rho_e, \rho_e)$, totalizando 480 elementos. As outras partições foram obtidas desta partição menos refinada multiplicando o número de elementos por potências inteiras de 2. Assim, a malha mais refinada tem 2^4 vezes 480 elementos, totalizando 7680 elementos. Consideramos também as grandezas elásticas e geométricas adimensionais introduzidas acima juntamente com $\varepsilon = 0.1$. O raio da interface entre as partes do tubo onde $J = \varepsilon$ e $J > \varepsilon$ é calculado de (1.15) juntamente com (1.16) e (1.17), sendo dado por $\rho_a \cong 0.00554$.

Mostramos na Fig. 11 dois gráficos contendo curvas do deslocamento radial u versus raio ρ obtidas da solução analítica exata do problema com restrição, dada por (1.13) e representada pela linha cheia, e de soluções numéricas obtidas com a malha não uniforme de 7680 elementos e representada pelas linhas traço-ponto. Aqui, o parâmetro de penalidade interior é denotado por γ e o parâmetro de penalidade exterior é ainda denotado por δ . Lembramos do exposto acima que os funcionais de penalidade interior e exterior são divididos por estes parâmetros. O gráfico da esquerda foi obtido da formulação de penalidade interior utilizando valores crescentes de $\gamma \in \{10, 100, \dots, 10^{10}\}$ e o gráfico da direita foi obtido da formulação de penalidade exterior utilizando valores decrescentes de $\delta \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-13}\}$. Vemos de ambos os gráficos que as sequências de soluções numéricas convergem para funções limites que são indistinguíveis da solução exata.

Atribuindo um valor alto para γ na formulação de penalidade interior, construímos uma sequência de funções limites u_h , parametrizada pelo comprimento característico h da malha de elementos finitos, e mostramos numericamente em Aguiar, Fosdick e Sánchez (2008) que a sequência converge para a solução u do problema com restrição à medida que $h \rightarrow 0$. Resultado idêntico é obtido ao se utilizar δ fixo e pequeno na formulação de penalidade exterior. Em ambas as formulações, mostramos numericamente que o logaritmo na base dois do erro entre a solução exata, dada por (1.13) e (1.14), e uma solução numérica u_h varia linearmente com o logaritmo na base dois do número de elementos finitos e que os coeficientes angulares correspondentes estão próximos de

-0.49316 , os quais correspondem a uma razão de convergência próxima de 0.7105 .

Figura 11: Deslocamento radial u versus raio ρ para o problema do tubo com restrição utilizando 7680 elementos finitos: a) Formulação de penalidade interior; b) Formulação de penalidade exterior, (AGUIAR; FOSDICK; SÁNCHEZ, 2008).

Mostramos na Fig. 12 dois gráficos contendo curvas do determinante do gradiente de deformação $J := \det(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u})$ versus raio ρ . A linha cheia representa J calculado da solução exata u do problema do tubo com restrição e as linhas traço-ponto representam J_h calculado das aproximações numéricas de u , as quais foram obtidas com a malha mais refinada de 7680 elementos e com as formulações de penalidade interior, correspondendo ao gráfico da esquerda, e exterior, correspondendo ao gráfico da direita. Observe de ambos os gráficos que J_h converge para a mesma função limite à medida que tanto o parâmetro de penalidade interior γ aumenta quanto o parâmetro de penalidade exterior δ diminui. Observe do gráfico da direita que, no intervalo (ρ_i, ρ_a) e para δ grande, as aproximações u_h do minimizador u pertencem ao exterior do conjunto de deformações cinematicamente admissíveis que satisfazem $J > \varepsilon$, pois, nestes casos, $J_h < \varepsilon$. À medida que δ diminui, obtemos uma sequência de aproximações $\{u_h\}$ que pertence ao conjunto admissível, contrariando o que se espera (na prática) de soluções obtidas de formulações de penalidade exterior.

Em suma, ao empregar a teoria de minimização com a restrição $J > 0$ na busca de soluções para os problemas da esfera e do tubo circular ortotrópicos descritos acima, obtemos soluções radialmente simétricas que não predizem o comportamento anômalo da auto-intersecção. Vemos a seguir, no entanto, que estas soluções podem não ser únicas.

Fosdick, Freddi e Royer-Carfagni (2008) utilizam malhas de elementos finitos bi-dimensionais juntamente com a formulação de penalidade interior de Aguiar (2006) para

mostrar que, no contexto da teoria com restrição de Fosdick e Royer (2001), o problema do disco ortotrópico sob compressão uniforme tem uma solução que não é radialmente simétrica, contrariando a intuição e sendo diferente da solução apresentada por estes últimos autores. Para isto, Fosdick, Freddi e Royer-Carfagni (2008) consideram diferentes valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento do material na direção azimutal nos experimentos numéricos. Quando o módulo de elasticidade ao cisalhamento é tomado suficientemente pequeno em relação a um módulo de Young característico, um fenômeno de bifurcação da solução radialmente simétrica apresentada por Fosdick e Royer (2001) é observado para o qual a região central do sólido, embora comprimida, sofre uma rotação de 180° e linhas radiais originais deformam-se em linhas com a forma de espiral. Estamos realizando investigação analítica do problema do disco ortotrópico para verificar os resultados computacionais obtidos por Fosdick, Freddi e Royer-Carfagni (2008). Devido à imposição da restrição $J \geq \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, as equações governantes são não lineares e soluções fechadas não são conhecidas. Estamos empregando métodos assintóticos para obter soluções aproximadas do problema parametrizadas por ε .

Figura 12: Determinante do gradiente deformação J versus raio ρ para o problema do tubo com restrição utilizando 7680 elementos finitos: a) Formulação de Penalidade Interior; b) Formulação de Penalidade Exterior, (AGUIAR; FOSDICK; SÁNCHEZ, 2008).

Observe do exposto acima que teorias clássicas da mecânica do contínuo apresentam deficiências no modelamento de problemas singulares. A razão principal é que derivadas parciais em relação a coordenadas espaciais são utilizadas para representar o deslocamento relativo e a força entre dois pontos materiais próximos entre si. Por definição, estas derivadas não são definidas em pontos singulares. A situação é ainda pior quando tratamos da nucleação e propagação de trincas. Neste caso, o próprio campo de

deslocamento é descontínuo e o único recurso para tratar estes problemas no contexto de uma teoria do contínuo é definir o corpo de maneira que as faces de uma trinca pertençam ao contorno do corpo. Estas observações serviram de motivação para estudar teorias constitutivas apropriadas para tratar problemas singulares. Em particular, a teoria peridinâmica não apresenta as deficiências mencionadas acima, permitindo que as suas equações básicas sejam aplicadas diretamente sobre pontos singulares, tal como o centro da esfera ortotrópica descrita acima, uma superfície de descontinuidade, tal como uma trinca, ou, partes contínuas de um corpo nas quais descontinuidades podem aparecer como resultado de deformação não suave. Longe destes lugares, a deformação é suave, fazendo com que a teoria peridinâmica forneça as mesmas equações governantes da teoria clássica.

1.2 Revisão Bibliográfica

A exposição acima tem motivado a reformulação das equações da mecânica do contínuo para que o comportamento de um sólido em regiões contendo singularidades e em regiões onde o campo de deslocamento é regular possa ser modelado pelas mesmas equações governantes. Silling (2000), Silling, Zimmermann e Abeyaratne (2003) e Silling e Lehoucq (2008) propõem um modelo contínuo que não distingue os pontos de um corpo onde uma descontinuidade em deslocamento (ou, em qualquer de suas derivadas) possa ocorrer. A essência da teoria, chamada peridinâmica por Silling (2000), é integrar (ao invés de derivar) forças de interação entre partículas próximas entre si. Estas forças dependem somente do deslocamento relativo e das posições relativas entre os pontos materiais de um corpo. Uma vez que derivadas espaciais não são utilizadas, as equações governantes são válidas em todos os pontos do corpo, ou seja, dentro e fora de regiões com singularidades.

Aplicações da teoria peridinâmica na engenharia incluem a análise de dano e falha em concreto armado sob carregamento quase estático por Gerstle, Sau e Silling (2007) e em compósitos por Xu et al. (2008), a proposição de condição de estabilidade material para a nucleação de trincas por Silling et al. (2010), a propagação dinâmica de trinca por Ha e Bobaru (2010), Ha e Bobaru (2011) e Hu, Ha e Bobaru (2012), a análise de dano em laminados de estruturas aeroespaciais sob carregamento de impacto por Askari, Xu e Silling (2006) e a análise de membranas e fibras por Silling e Bobaru (2005). Referências adicionais sobre aspectos teóricos e aplicações da teoria peridinâmica encontram-se em Silling et al. (2007).

Tadmor, Ortiz e Phillips (1996) e Tadmor, Phillips e Ortiz (1996) apresentam um método de elementos finitos para analisar problemas que requerem resolução em múltiplas escalas, do atômico ao contínuo, de uma maneira unificada. O método fornece a capacidade de refinar a malha de forma adaptativa na vizinhança de defeitos e em outras regiões de alta energia. Interações interatômicas são incorporadas no modelo por meio de um cálculo cristalográfico baseado no estado local de deformação, e isto é apontado pelos autores como a principal diferença entre o método proposto e metodologias convencionais de elementos finitos. O método é utilizado com sucesso no estudo de deformação plástica causada por nano-indentação (TADMOR et al., 1999) e de deslocamento na vizinhança dos vértices de trincas (MILLER et al., 1998).

Em suma, estas teorias não clássicas combinam a precisão de modelos atômicos na vizinhança de um efeito localizado, tal como o comportamento material na vizinhança do vértice de uma trinca, e modelos da mecânica do contínuo em regiões onde as deformações são moderadas e suaves. Optei pelo estudo da teoria peridinâmica, a qual passo a descrever com detalhes a seguir.

A teoria peridinâmica é uma extensão da teoria do contínuo clássica na qual um ponto material interage diretamente com outros pontos materiais separados dele por uma distância finita. O conceito de interação entre partículas a distâncias finitas é uma diferença fundamental entre a teoria peridinâmica e a teoria clássica, em que esta última está baseada na ideia de forças de contato atuando sobre superfícies que separam partes adjacentes de um corpo – um conceito do contínuo. A principal vantagem da teoria peridinâmica está em aplicar as suas equações básicas diretamente sobre uma superfície de descontinuidade, tal como uma trinca, ou, um contínuo no qual descontinuidades podem aparecer como resultado de deformação. Longe destes lugares, a deformação é suave e a teoria peridinâmica fornece as mesmas equações governantes da teoria do contínuo clássica quando as distâncias entre os pontos materiais tendem a zero.

Silling (2000) apresenta os elementos da teoria peridinâmica ao introduzir um *modelo de ligação* que utiliza uma função força entre duas partículas para descrever a interação entre pontos materiais. Ele ressalta que este modelo é similar a modelos anteriores propostos por Kunin (1982) e Rogula (1982) na investigação de propriedades de cristais baseada em interações interatômicas. Posteriormente, Silling et al. (2007) introduzem uma generalização do modelo de ligação, chamado *modelo de estado*, o qual permite que a resposta de um material em um ponto dependa coletivamente da deformação de todas as ligações conectadas ao ponto, e não somente da interação aos pares com partículas

vizinhas do modelo de ligação. Recentemente, Silling (2010) investigou a resposta de um material peridinâmico utilizando o modelo de estado para uma pequena deformação sobreposta a uma grande deformação e introduziu o conceito de *estado tensorial de módulo*, o qual expressa as propriedades materiais da resposta material linearizada. Se o material é elástico, o estado tensorial de módulo é obtido da segunda derivada de Fréchet da função energia livre. Este estado tensorial de segunda ordem é análogo ao tensor de elasticidade de quarta ordem na teoria do contínuo clássica. No caso em que a deformação de um corpo é suave e considerando que o comportamento mecânico de uma sequência de materiais peridinâmicos elásticos não se altera no limite de distâncias cada vez menores entre pontos materiais, Silling (2010) apresenta expressões que relacionam o estado tensorial de módulo ao tensor de elasticidade da teoria clássica.

Utilizando o modelo de estado, Silling et al. (2007) e Silling (2010) propõem funções densidade de energia de deformação para materiais isotrópicos que dependem do estado de deformação por meio de suas partes de dilatação e desviatória. Ambas as partes estão definidas em termos do *estado escalar extensional*, que é a mudança de comprimento entre duas partículas devido à deformação. Analogamente à teoria de elasticidade linear clássica, suas funções energia de deformação contêm somente duas constantes materiais peridinâmicas. Um outro aspecto de seus modelos é que o estado vetorial de força correspondente agindo sobre uma ligação é paralelo à imagem deformada da ligação, o que significa que o material peridinâmico linear é *ordinário* no sentido de Silling et al. (2007).

Aguiar e Fosdick (2014a) propõem uma função energia livre para um material peridinâmico elástico, linear e isotrópico que depende do campo de deslocamento relativo entre partículas (ao invés do estado escalar extensional) por meio de medidas de deformação que são análogas às medidas de deformação da teoria linear clássica. Detalhes sobre a função energia livre proposta e as implicações desta proposição são discutidos neste trabalho.

1.3 Justificativa

A utilização de modelos clássicos da elasticidade não-linear permite resolver satisfatoriamente o comportamento anômalo da auto-intersecção. Estes modelos clássicos, entretanto, não descrevem adequadamente o que a intuição física sugere baseada em observações elementares, isto é, que tensões e gradientes de deslocamentos tenham valores finitos na vizinhança de pontos singulares para qualquer carregamento finito aplicado

no contorno; se estes campos assumirem valores elevados, então novos fenômenos devem ocorrer precedendo a ruptura ou a falha súbita do material, tais como a localização do gradiente de deslocamento e o endurecimento ou o amolecimento do material.

Para descrever de forma precisa o comportamento material na vizinhança de pontos singulares, novos modelos constitutivos que sejam fisicamente realísticos e analiticamente tratáveis são necessários. Novos modelos, entretanto, tipicamente levam a equações não lineares cujas soluções podem ser altamente irregulares, admitir bifurcações, e frequentemente são interpretadas em um sentido generalizado em termos de sequências minimizadoras. O entendimento dos modelos e das soluções correspondentes apresenta, portanto, desafios analíticos e numéricos que requerem a extensão de modelos existentes, o desenvolvimento de novas técnicas computacionais e a incorporação de métodos de análise de outros campos do conhecimento.

Neste sentido, proponho modelos constitutivos alternativos que forneçam um retrato mais claro dos mecanismos de falha na vizinhança de pontos singulares do que os modelos convencionais têm proporcionado. Pretendo aplicar os novos modelos na investigação das propriedades de soluções de problemas fundamentais, tais como o problema do punção colado a um semi-plano (Seção 1.1.3) e o problema do disco ortotrópico sob compressão uniforme (Seção 1.1.4), utilizando ferramentas analíticas modernas comumente empregadas em teoria de minimização e métodos computacionais avançados.

1.4 Objetivos

- Geral: Propor modelo peridinâmico que seja fisicamente realístico e analiticamente tratável para investigar o comportamento mecânico de sólidos elásticos submetidos a carregamentos estáticos, ou, dinâmicos. Futuramente, este modelo será empregado na investigação do comportamento de sólidos na vizinhança de pontos onde a teoria clássica prediz singularidades nos campos de tensão e deformação.
- Específicos:
 1. Propor uma função energia livre para um material peridinâmico linearmente elástico que dependa de medidas de deformação definidas em termos de deslocamentos relativos infinitesimais entre pontos materiais de um sólido elástico.
 2. Estudar propriedades de simetria material do modelo proposto.
 3. Obter expressões que relacionem os coeficientes peridinâmicos que aparecem

na definição da função energia livre proposta no Item 1 com as constantes de um material elástico-linear e isotrópico da teoria clássica.

4. Mostrar correspondência entre uma versão simplificada do modelo peridinâmico proposto no Item 1 e o modelo de Silling et al. (2007) na vizinhança do estado natural de um corpo peridinâmico.
5. Realizar decomposição aditiva de deslocamento relativo infinitesimal e investigar as implicações desta decomposição sobre o modelo proposto.

1.5 Metodologia

A metodologia consiste na introdução sistemática de conceitos e princípios fundamentais da mecânica para i) construir uma teoria peridinâmica elástico-linear fisicamente plausível, ii) relacioná-la com a teoria clássica, iii) obter correspondência com teoria peridinâmica linearizada encontrada na literatura e, por fim, iv) investigar as implicações decorrentes da consideração de classes especiais de deslocamentos relativos entre pontos materiais de um sólido peridinâmico elástico-linear. Os passos deste estudo sistemático encontram-se detalhados a seguir.

1. Proposição de medidas de deformação infinitesimais análogas às medidas de deformação infinitesimais da teoria linear clássica.
2. Definição de material simples elástico e imposição das condições de invariância sob mudança de referencial e de simetria material. Linearização de um material simples.
3. Proposição de uma função energia livre para um material simples elástico linearizado que dependa quadraticamente das medidas de deformação infinitesimais propostas no Item 1. Mostrar que o material linearizado obtido é isotrópico.
4. Obtenção de duas expressões que relacionam três constantes materiais peridinâmicas que aparecem na função energia livre proposta no Item 3 com as duas constantes elásticas da teoria linear clássica. Uma quarta constante desta função não aparece nestas relações, mas permanece parte do modelo peridinâmico linear. Portanto, duas constantes peridinâmicas ficam indeterminadas desta análise.
5. Obtenção de correspondência entre uma versão simplificada do modelo peridinâmico proposto no Item 3 e o modelo de Silling et al. (2007) na vizinhança do estado natural de um corpo peridinâmico.

6. Decomposição do deslocamento relativo entre duas partículas do corpo peridinâmico em partes esférica e desviatória e estudo das implicações desta decomposição na forma da função energia livre proposta no Item 3.
7. Utilização de argumento de correspondência entre a função energia livre proposta no Item 3 e a função densidade de energia de deformação da teoria de elasticidade linear clássica com o propósito de calcular uma das três constantes peridinâmicas mencionadas no Item 4.

1.6 Organização da Tese

No Capítulo 2 introduzo medidas infinitesimais de distorção angular em (2.14) juntamente com (2.15) e de mudança de comprimento em (2.17) na teoria peridinâmica que são análogas às medidas correspondentes na teoria linear clássica. No Capítulo 3 apresento o estado função resposta de força de um material simples em (3.2) e utilizo tanto a condição de invariância sob mudança de referencial em (3.7) quanto a condição de simetria material em (3.17) para restringir a forma geral que esta função pode ter. Em particular, apresento a expressão geral da função resposta de um material simples isotrópico em (3.18). Considero então pequenos estados de deslocamento sobrepostos a estados de deformação e apresento a expressão geral (3.39) que a função resposta de força de um material simples isotrópico deve ter na proximidade do estado natural de um corpo peridinâmico (ou seja, na proximidade da configuração de referência de um corpo peridinâmico sem força residual). Em seguida, proponho a forma quadrática (3.40), que se reduz a (3.41), nas medidas propostas de deformação para a função energia livre do material simples em uma vizinhança do estado natural do corpo peridinâmico. Esta forma quadrática, que pode ser reescrita na forma alternativa (3.45), depende de quatro constantes peridinâmicas elásticas e produz uma relação linear entre estados vetoriais de força e deslocamento na proximidade do estado natural do corpo peridinâmico, a qual é dada por (3.38) e (3.47). De passagem, é possível reescrever (3.47) na forma (3.48) juntamente com (3.49). Esta última expressão fornece o estado tensorial de módulo, o qual é análogo ao tensor de elasticidade da teoria linear clássica. Fechando o Capítulo 3, mostro que o material elástico linearizado satisfaz o balanço de momento angular identicamente e é *não ordinário* no sentido de Silling et al. (2007). Este resultado representa uma ruptura substancial com a teoria clássica da mecânica do contínuo.

No Capítulo 4 apresento as relações (4.21) e (4.22) entre as constantes peri-

dinâmicas $\hat{\alpha}_{11}$, α_{12} e α_{33} e as constantes elásticas de um material elástico-linear clássico da teoria tridimensional. Relações análogas são conseguidas no contexto da teoria bidimensional e são apresentadas no Apêndice A. Em ambas as teorias, bi e tridimensional, considero que, sob campos de deformação suaves, a teoria peridinâmica converge para a teoria clássica à medida que as distâncias entre pontos materiais tendem a zero. A quarta constante peridinâmica, $\hat{\alpha}_{13}$, responsável pelo efeito de acoplamento entre variação de comprimento e variação angular relativa, não é determinada deste processo de limite, mas permanece parte integrante do modelo peridinâmico linear. De todo modo, duas constantes peridinâmicas ficam indeterminadas desta análise.

No Capítulo 5 estabeleço uma correspondência entre a forma quadrática proposta, dada por (3.41) ou (3.45), e a função densidade de energia de deformação proposta por Silling et al. (2007) para um material simples, elástico e isotrópico submetido a deformações infinitesimais. Para isto, considero que $\alpha_{33} = \hat{\alpha}_{13} = 0$ e que a função peso $\omega(\cdot, \cdot)$ tem uma forma particular.

No Capítulo 6 decomponto o estado quociente de deslocamento relativo em termos de suas partes esférica e desviatória e investigo as implicações desta decomposição sobre a função energia livre, a qual toma a forma (6.2) juntamente com (6.3) e (6.4). Em particular, investigo possíveis classes de funções que podem ser utilizadas na determinação do coeficiente peridinâmico α_{33} . No Capítulo 7 apresento conclusões e algumas considerações finais sobre a tese.

2 Cinemática de Pequenas Deformações

Seja $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}^3$ a configuração de referência não deformada de um corpo elástico no tempo $t = 0$ relativo a um referencial fixo F em $\mathbb{E}^3$ e seja $\mathbf{y} := \chi(\mathbf{x}, t)$ a posição da partícula $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ no tempo $t \geq 0$ relativo ao referencial F . Modelagem constitutiva na teoria peridinâmica considera a deformação coletiva em cada tempo t de todo material em uma vizinhança de qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$. Aqui, esta vizinhança é uma esfera centrada em $\mathbf{x}_0$ de raio δ , chamado *horizonte*, a qual denotamos por $\mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \mathcal{B}$. O horizonte é tratado como uma propriedade material, escolhida para refletir a escala de comprimento relevante, tal como o espaço entre agregados no concreto (GERSTLE; SAU; SILLING, 2007). Conforme ilustrado na Fig. 13, para $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, o vetor $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ é chamado *ligação* de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_0$, e a coleção de todas as ligações a $\mathbf{x}_0$ define o conjunto $\mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$ em $\mathbb{E}^3$ de comprimento máximo δ . O horizonte δ pode depender de $\mathbf{x}_0$ e fornece a máxima distância de interação entre pontos materiais de um corpo peridinâmico.

Na teoria de estado introduzida por Silling et al. (2007), um *estado peridinâmico* em $(\mathbf{x}_0, t)$ de ordem $m, m = 0, 1, \dots$, é uma função $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \cdot \rangle : \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{L}_m$, em que $\mathcal{L}_m$ é o conjunto de todos os tensores de ordem m . Assim, a imagem de uma ligação $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$ para o estado $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \cdot \rangle$ é o tensor de ordem m , $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$. Denotamos por $\mathcal{A}_m$ o conjunto de todos os estados em $(\mathbf{x}_0, t)$ de ordem m . Estados de ordem 0 e 1 são chamados estados escalares e vetoriais, respectivamente.

Neste trabalho, estados representam quantidades físicas tais como força, deformação e deslocamento, os quais podem depender uns dos outros. Dados dois estados $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \cdot \rangle : \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{L}_m, m = 0, 1, \dots$, e $\underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \cdot \rangle : \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{L}_p, p = 0, 1, \dots$, para denotar tal dependência, introduzimos a função $\hat{\underline{\mathbf{A}}}(\mathbf{x}_0, t)[\cdot] : \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{A}_m$, tal que $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \hat{\underline{\mathbf{A}}}(\mathbf{x}_0, t)[\underline{\mathbf{u}}]\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$. Quando o significado for claro, por conveniência de notação, não exibiremos a dependência em $(\mathbf{x}_0, t)$ e escreveremos $\underline{\mathbf{A}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \hat{\underline{\mathbf{A}}}[\underline{\mathbf{u}}]\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$.

De maneira similar, introduzimos a definição de um *estado duplo* em $(\mathbf{x}_0, t)$ de ordem $p, p = 0, 1, \dots$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}(\mathbf{x}_0, t)\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \times \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathcal{L}_p$. Por exemplo, para quaisquer

Figura 13: Configurações de referência e deformada de um corpo.

duas ligações, $\xi \in \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$ e $\eta \in \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$, escreveremos $\underline{\mathbf{D}}\langle \xi, \eta \rangle$ sempre que a dependência em $(\mathbf{x}_0, t)$ é clara. O conjunto de todos os estados duplos em $(\mathbf{x}_0, t)$ de ordem p é denotado por $\mathcal{D}_p$.

Neste trabalho, por conveniência de notação, omitimos escrever a variável temporal t no movimento e em todos os campos cinemáticos que são derivados do movimento. Além disso, considerando que $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ é um ponto arbitrário fixo, escrevemos $\mathcal{N}_\delta$ e $\mathcal{H}_\delta$ ao invés de, respectivamente, $\mathcal{N}_\delta(\mathbf{x}_0)$ e $\mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Definimos agora o *estado vetorial deformação relativa* $\underline{\chi} \in \mathcal{A}_1$ em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ por meio de

$$\underline{\chi}\langle \xi \rangle := (\chi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x}_0)) \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\xi} \quad (2.1)$$

para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$.

O campo de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ associado ao movimento $\chi(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ é definido por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad (2.2)$$

e o *estado vetorial deslocamento relativo* correspondente, $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_1$ em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, por

$$\underline{\mathbf{u}}\langle \xi \rangle := (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0)) \big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\xi} \quad (2.3)$$

para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$, como ilustrado na Fig. 14. Assim, definindo o *estado vetorial posição relativa* $\underline{x} \in \mathcal{A}_1$ em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ por meio de

$$\underline{x}\langle\xi\rangle := (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\xi} \quad (2.4)$$

para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$, podemos escrever

$$\underline{\chi} = \underline{u} + \underline{x}. \quad (2.5)$$

Em vista do exposto acima, introduzimos o *estado vetorial quociente de deformação relativa* em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ por meio de

$$\underline{f} := \frac{\underline{\chi}}{|\underline{x}|} = \underline{h} + \underline{e}, \quad \underline{h} := \frac{\underline{u}}{|\underline{x}|}, \quad (2.6)$$

em que $\underline{h}$ é o *estado vetorial quociente de deslocamento relativo* em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$,

$$\underline{e} := \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, \quad (2.7)$$

e se $\underline{A} \in \mathcal{A}_1$, então $|\underline{A}|$ é o *estado escalar magnitude* de $\underline{A}$, o qual é definido por meio de

$$|\underline{A}|\langle\xi\rangle := \sqrt{\underline{A}\langle\xi\rangle \cdot \underline{A}\langle\xi\rangle}, \quad (2.8)$$

com “ $\cdot$ ” sendo o produto escalar em $\mathbb{E}^3$. Além disso, $\underline{e}\langle\xi\rangle$ é um vetor unitário na direção da ligação ξ em $\mathbf{x}_0$ para $|\xi| > 0$, definido como $\mathbf{0}$ para $\xi = \mathbf{0}$. A magnitude do lado esquerdo de (2.6.a) calculado para ξ , ou seja, $|\underline{f}\langle\xi\rangle| = |\underline{\chi}\langle\xi\rangle|/|\underline{x}\langle\xi\rangle|$, representa o estiramento da ligação ξ em $\mathbf{x}_0$. O estado vetorial quociente de deformação relativa (2.6.a) contém informação sobre a orientação da ligação deformada e, portanto, o estado vetorial definido em (2.6.a) é a contrapartida na teoria peridinâmica do gradiente de deformação em $\mathbf{x}_0$ na mecânica do contínuo. De maneira similar, o estado vetorial quociente de deslocamento relativo $\underline{h}$ definido em (2.6.b) é a contrapartida ao gradiente (material) de deslocamento em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ na mecânica do contínuo.

Selecionamos agora duas ligações $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ e $\eta = \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ em $\mathcal{H}_\delta$, orientados de modo que $\alpha := \underline{\alpha}\langle\xi, \eta\rangle = \underline{\alpha}\langle\eta, \xi\rangle$ seja o menor ângulo entre eles, conforme ilustrado na Fig. 15.a. Temos então que $\cos \alpha = \underline{e}\langle\xi\rangle \cdot \underline{e}\langle\eta\rangle$. Após a deformação, o ângulo mudará para $\beta := \underline{\beta}\langle\xi, \eta\rangle = \underline{\beta}\langle\eta, \xi\rangle$, o qual é determinado por

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\underline{\chi}\langle\xi\rangle}{|\underline{\chi}\langle\xi\rangle|} \cdot \frac{\underline{\chi}\langle\eta\rangle}{|\underline{\chi}\langle\eta\rangle|} \\ &= (\underline{h}\langle\xi\rangle + \underline{e}\langle\xi\rangle) \cdot (\underline{h}\langle\eta\rangle + \underline{e}\langle\eta\rangle) \left(\frac{1}{|\underline{f}\langle\xi\rangle|} \frac{1}{|\underline{f}\langle\eta\rangle|} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Figura 14: Estados vetoriais de deslocamento e deformação relativos.

A diferença entre os ângulos, $\Gamma := \alpha - \beta$, é uma medida do cisalhamento que ocorre entre as duas ligações ξ e η em $\mathbf{x}_0$.

Quando a deformação do corpo é considerada pequena, supomos que existe um ϵ , $|\epsilon| < 1$, tal que, em todo ponto arbitrário $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$,

$$\underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \equiv \frac{\underline{\mathbf{u}}\langle \xi \rangle}{|\xi|} = O(\epsilon), \quad |\xi| < \delta. \quad (2.10)$$

Segue então de (2.6) que

$$|\underline{\mathbf{f}}\langle \xi \rangle| \equiv \frac{|\chi\langle \xi \rangle|}{|\xi|} = 1 + \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle + O(\epsilon^2). \quad (2.11)$$

Neste caso, não é difícil mostrar, utilizando (2.9) e (2.11), que

$$\cos \beta = \cos \alpha + (\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle + O(\epsilon^2), \quad (2.12)$$

o qual, para $|\epsilon|$ pequeno, significa que o valor de β está próximo do valor de α . Portanto, utilizando a identidade trigonométrica $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ e $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$, achamos prontamente que

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sin \alpha} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle] + O(\epsilon^2),$$

o qual fornece

$$\alpha - \beta = \frac{1}{\sin \alpha} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cos \alpha) \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle] + O(\epsilon^2). \quad (2.13)$$

Note que o cisalhamento, $\Gamma = \alpha - \beta$, que ocorre entre as ligações ξ e η em $\mathbf{x}_0$ é aproximado pelo primeiro termo do lado direito de (2.13) para $|\epsilon|$ pequeno. Para ser consistente com a definição de deformação cisalhante da teoria linear clássica, introduzimos o fator 1/2 e definimos o *estado duplo deformação cisalhante infinitesimal* $\underline{\underline{\gamma}}\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H}_\delta \times \mathcal{H}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ em $\mathbf{x}_0$

por meio da expressão

$$\underline{\underline{\gamma}}\langle \xi, \eta \rangle := \underline{\underline{\hat{\gamma}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi, \eta \rangle \equiv \frac{1}{2} \left(\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right), \quad |\xi| < \delta, |\eta| < \delta, \quad (2.14)$$

em que, por conveniência, introduzimos a notação

$$\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle := \frac{(1 - \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle) \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle}{\text{sen} \alpha} = \frac{\underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cos \alpha}{\text{sen} \alpha}, \quad (2.15)$$

com $\underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle$ calculado por meio de uma permutação de variáveis $\xi \leftrightarrow \eta$. Claramente, $\underline{\underline{\hat{\gamma}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi, \eta \rangle = \underline{\underline{\hat{\gamma}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \eta, \xi \rangle$ e $\underline{\underline{\hat{\gamma}}}[\cdot]\langle \xi, \eta \rangle : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear.

Figura 15: Configurações de referência e deformada das ligações ξ e η .

Na teoria peridinâmica, a deformação normal (também chamada de alongamento) de uma ligação ξ em $\mathbf{x}_0$ é definida como a mudança de comprimento da ligação ξ por unidade de comprimento de ξ devido à deformação da ligação, i.e.,

$$\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle := \frac{|\underline{\mathbf{x}}\langle \xi \rangle| - |\xi|}{|\xi|} \quad (2.16)$$

para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$. Portanto, de acordo com (2.11), o *estado escalar de deformação normal infinitesimal* $\underline{\mathbf{e}}\langle \cdot \rangle : \mathcal{H}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ em $\mathbf{x}_0$ é dado pelo segundo termo no lado direito de (2.11), o qual definimos como

$$\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle := \underline{\hat{\mathbf{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle \equiv \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \quad (2.17)$$

para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$. Claramente, $\underline{\hat{\mathbf{e}}}[\cdot]\langle \xi \rangle : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear.

3 Teoria Constitutiva

Na teoria de estado introduzida por Silling et al. (2007), a equação de movimento é dada por

$$\rho(\mathbf{x}_0) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{N}_\delta} \{ \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_0) \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle - \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \rangle \} dv_{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}, \quad (3.1)$$

em que ρ é a densidade de massa na configuração de referência, $\mathbf{u}$ é o campo de deslocamento dado por (2.2), $\dot{\Phi} := \partial \Phi / \partial t$ é a derivada de um campo vetorial, ou, escalar Φ com relação ao tempo mantendo o ponto $\mathbf{x}_0$ fixo, $\dot{\mathbf{u}}$ é a velocidade, $\ddot{\mathbf{u}} := \partial \dot{\mathbf{u}} / \partial t$ é a aceleração, $\mathbf{b}$ é uma densidade de força de corpo prescrita, todos calculados em $\mathbf{x}_0$, e ambos $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_0) \langle \cdot \rangle$ e $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \langle \cdot \rangle$ são estados vetoriais de força calculados sobre ligações, respectivamente, em $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$. Observe de (3.1) que $\underline{\mathbf{T}}$ tem a dimensão de força pelo quadrado da unidade de volume. Aqui, estamos interessados em uma relação constitutiva para $\underline{\mathbf{T}}$ em termos de $\underline{\mathbf{f}}$.

De acordo com Silling et al. (2007), dizemos que o material peridinâmico é *simples* se, para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, há um *estado função resposta de força* $\hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\cdot] \langle \underline{\mathbf{f}} \rangle : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$, que pode depender de $\mathbf{x}_0$ se $\mathcal{B}$ é heterogêneo, tal que

$$\underline{\mathbf{T}} = \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]. \quad (3.2)$$

Se o corpo peridinâmico é homogêneo, então podemos omitir o subscrito $\mathbf{x}_0$ em (3.2).

3.1 Invariância sob Mudança de Referencial

Sob uma mudança de referencial $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^*$ em $\mathbb{E}^3$, os pontos $\mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ são substituídos por

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \mathbf{o}), \quad (3.3)$$

em que $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t) \in \mathbb{E}^3$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t) \in \text{Orth}^+ := \{\mathbf{M} \in \text{Lin} \mid \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T, \det \mathbf{M} = 1\}$ e $\mathbf{o}$ é um ponto fixo em $\mathbb{E}^3$. Portanto, a deformação $\chi(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ é mapeada para

$$\chi^*(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{Q}(\chi(\mathbf{x}) - \mathbf{o}) \quad (3.4)$$

para todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, e, utilizando (2.1) e (2.6), obtemos

$$\underline{\mathbf{f}}^*\langle \xi \rangle = \mathbf{Q} \underline{\mathbf{f}}\langle \xi \rangle. \quad (3.5)$$

Supondo que $\underline{\mathbf{T}}$ é objetivo, sabemos que

$$\underline{\mathbf{T}}^*(\mathbf{x}_0)\langle \xi \rangle = \mathbf{Q} \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_0)\langle \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.6)$$

Portanto, segue de (3.5) e (3.6) que, para um material simples dado por (3.2), a condição de invariância sob mudança de referencial é dada por

$$\hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{Q} \underline{\mathbf{f}}]\langle \xi \rangle = \mathbf{Q} \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle \xi \rangle, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.7)$$

Exceto pela notação, a condição de invariância (3.7) coincide com a expressão na definição de um material simples objetivo introduzida por Silling et al. (2007).

3.2 Invariância sob Simetria Material

Para discutir simetria material em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, introduzimos uma segunda configuração de referência $\mathcal{B}' \subset \mathbb{E}^3$ para o corpo, relacionada a $\mathcal{B}$ por meio do mapeamento $\kappa(\cdot) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}^3$ definido por

$$\mathbf{x}' = \kappa(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{K} \in \text{Orth}^+, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \quad (3.8)$$

Isto corresponde a uma rotação de $\mathcal{B}$ em torno de $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ e ao mapeamento de $\mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$ sobre si mesmo, $\mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0) \mapsto \mathcal{H}_\delta(\mathbf{x}_0)$. Os pontos de $\mathcal{B}'$ são denotados por $\mathbf{x}'$ e uma deformação relativa a $\mathcal{B}'$ é dada por $\chi'(\mathbf{x}')$, de modo que o estado de deformação relativa em $\mathbf{x}_0$ é denotado por $\underline{\chi}'\langle \xi \rangle = \chi'(\mathbf{x}') - \chi'(\mathbf{x}_0)|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_0+\xi}$ para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$. Tal como em (3.2), podemos escrever

$$\underline{\mathbf{T}}' = \hat{\underline{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}'], \quad (3.9)$$

em que $\hat{\underline{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\cdot] : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$ é o estado função resposta de força relativo à configuração de referência $\mathcal{B}'$. Obviamente, as funções respostas $\hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\cdot]$ e $\hat{\underline{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\cdot]$ não são independentes,

porque quando

$$\chi(\mathbf{x}) = \chi'(\mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}' = \kappa(\mathbf{x})}, \quad (3.10)$$

de modo que a configuração deformada do corpo é a mesma, independente de $\mathcal{B}$, ou, $\mathcal{B}'$, o estado vetor força em $\mathbf{x}_0$ sobre uma ligação $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, é fixo. Portanto, segue de (3.10) e (2.1) que

$$\underline{\chi}(\xi) = \underline{\chi}'(\mathbf{K}\xi) \equiv (\underline{\chi}' \circ \underline{\kappa})(\xi), \quad \underline{\kappa} := \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}}, \quad (3.11)$$

e segue de $\underline{\mathbf{T}}(\xi) = \underline{\mathbf{T}}'(\mathbf{K}\xi)$, (3.2) e (3.9) que

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}](\xi) = \underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}'](\mathbf{K}\xi), \quad \xi \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.12)$$

Utilizando (3.11) e a definição (2.6), obtemos a composição $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}}' \circ \underline{\kappa}$, a qual pode ser invertida para obter $\underline{\mathbf{f}}' = \underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^{-1}$. Substituindo esta composição em (3.12), obtemos

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}](\xi) = \underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^{-1}](\mathbf{K}\xi), \quad \xi \in \mathcal{H}_\delta, \quad (3.13)$$

a qual expressa uma relação de compatibilidade entre os estados $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\cdot]$ e $\underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\cdot]$.

Para entender o conceito de *simetria material* em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, apresentamos a seguir uma ideia heurística sobre a mesma. Seleccionamos duas ligações ξ e $\mathbf{K}^T\xi$ que estão relacionadas pela rotação $\mathbf{K}^T$ em $\mathcal{B}$. Isto não é para ser interpretado como uma rotação da configuração de referência $\mathcal{B}$. Deformamos $\mathcal{B}$ e registramos o estado de deformação relativa $\underline{\chi}(\mathbf{K}^T\xi)$ para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$. Em seguida, giramos a configuração de referência $\mathcal{B}$ na configuração de referência $\mathcal{B}'$ com a rotação $\mathbf{K}$. A ligação denotada por ξ em $\mathcal{B}$ é agora a ligação $\mathbf{K}\xi$ em $\mathcal{B}'$. Deformamos então $\mathcal{B}'$ de modo que o estado de deformação relativa $\underline{\chi}'(\mathbf{K}\xi)$ para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$ é o *mesmo* estado de deformação relativa $\underline{\chi}(\mathbf{K}^T\xi)$ para todas as ligações $\xi \in \mathcal{H}_\delta$. Essencialmente, ao introduzir uma segunda configuração de referência, fizemos com que as ligações denotadas por ξ e $\mathbf{K}^T\xi$ em $\mathcal{B}$ sejam submetidas a estados de deformações relativas *equivalentes*, embora relacionadas a diferentes configurações de referência. Se os estados vetoriais de força em $\mathbf{x}_0$ calculados por meio dos estados funções respostas constitutivas relativos a duas configurações de referência $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ forem iguais, então existe uma simetria material em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ com respeito à rotação $\mathbf{K} \in \text{Orth}^+$.

Para expressar este conceito de *simetria material* em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ de maneira precisa e sucinta, suponha que o estado quociente de deformação relativa de cada ligação $\mathbf{K}^T\xi$ em $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \xi \in \mathcal{B}$, $\xi \in \mathcal{H}_\delta$, seja igual ao estado quociente de deformação relativa de

cada ligação relacionado $\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}$ em $\mathbf{x}_0$ pertencente a $\mathcal{B}'$, i.e.,

$$\underline{\chi}\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle \equiv (\underline{\chi} \circ \underline{\kappa}^T)\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\chi}'\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle \equiv (\underline{\chi}' \circ \underline{\kappa})\langle\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \underline{\kappa}^T := \mathbf{K}^T \underline{\mathbf{x}} \Rightarrow \underline{\kappa}^T = \underline{\kappa}^{-1}. \quad (3.14)$$

Dizemos então que o corpo $\mathcal{B}$ tem uma simetria material em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ com respeito a $\mathbf{K} \in \text{Orth}^+$ se os estados vetoriais de força em $\mathbf{x}_0$, calculados por meio dos estados funções respostas constitutivas relativos às duas configurações de referência $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, forem iguais, i.e.,

$$\underline{\mathbf{T}}\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\mathbf{T}}'\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}']\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.15)$$

Utilizando (3.14) e a definição (2.6), escrevemos $\underline{\mathbf{f}}' = (\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^T) \circ \underline{\kappa}^T$, a qual é substituída no lado direito de (3.15), fornecendo

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[(\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^T) \circ \underline{\kappa}^T]\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta.$$

Trocando $\underline{\mathbf{f}}$ por $\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}$ na expressão anterior, obtemos

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}]\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^T]\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.16)$$

Eliminando $\underline{\hat{\mathbf{T}}}'_{\mathbf{x}_0}[\cdot]$ entre (3.13) e (3.16), chegamos a

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}]\langle\mathbf{K}^T\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta.$$

Trocando $\boldsymbol{\xi}$ por $\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}$, reescrevemos a expressão anterior como

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.17)$$

O corpo é *isotrópico* em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ se (3.17) é válido para todas as rotações $\mathbf{K} \in \text{Orth}^+$. Exceto pela notação, esta condição de isotropia concorda com o que Silling et al. (2007) denominam isotropia. Neste caso, podemos combinar (3.7) e (3.17), substituindo $\mathbf{K}$ e $\underline{\kappa}$ em (3.17) por $\mathbf{Q}$ e $\underline{\mathbf{q}} := \mathbf{Q}\underline{\mathbf{x}}$, respectivamente, e escrevendo (3.7) como

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}\rangle = \mathbf{Q}\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}\rangle.$$

Assim, obtemos

$$\mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}]\langle\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\mathbf{q}}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle.$$

Substituindo $\underline{\mathbf{f}}$ por $\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\mathbf{q}}^T$, $\underline{\mathbf{q}}^T := \mathbf{Q}^T \underline{\mathbf{x}}$, chegamos finalmente a

$$\mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T]\langle\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}\rangle = \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+. \quad (3.18)$$

3.3 Linearização de um Material Simples

Nesta seção superpomos um quociente de deslocamento relativo $\underline{\mathbf{h}}$ pequeno, dado por (2.10), sobre um quociente de deformação relativa $\underline{\check{\mathbf{f}}}$ e consideramos a expansão em série de Taylor da função resposta $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\check{\mathbf{f}}} + \underline{\mathbf{h}}]$. Para isto, introduzimos abaixo o conceito de derivada de um estado vetorial.

Definimos o *produto interno* entre dois estados vetoriais $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_1$ e $\underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}_1$ como

$$\underline{\mathbf{a}} \bullet \underline{\mathbf{b}} := \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{a}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{b}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (3.19)$$

em que “ $\cdot$ ” é o produto escalar em $\mathbb{E}^3$. Utilizando (3.19), definimos também a norma de um estado vetorial $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_1$ como

$$\|\underline{\mathbf{a}}\| := \sqrt{\underline{\mathbf{a}} \bullet \underline{\mathbf{a}}}. \quad (3.20)$$

O produto interno entre um estado tensorial duplo $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \in \mathcal{D}_2$, para o qual $\underline{\underline{\mathbf{D}}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \in \mathcal{L}_2$, $\underline{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{H}_\delta$ e $\underline{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{H}_\delta$, e um estado vetorial $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_1$ é definido por meio de

$$(\underline{\underline{\mathbf{D}}} \bullet \underline{\mathbf{a}}) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle := \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\underline{\mathbf{D}}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \underline{\mathbf{a}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} \quad (3.21)$$

para todas as ligações $\underline{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{H}_\delta$.

Utilizando as definições (3.19) – (3.21) e introduzindo $\hat{\underline{\mathbf{S}}}[\cdot] : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$, suponha que existe um estado duplo $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}] \in \mathcal{D}_2$, tal que

$$\hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}] = \hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}] + \delta_{\underline{\mathbf{u}}} \hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}] \bullet \underline{\mathbf{v}} + o(\|\underline{\mathbf{v}}\|), \quad \forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_1, \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}_1. \quad (3.22)$$

Dizemos então que $\hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}]$ é diferenciável e que $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}]$ é a derivada de Fréchet de $\hat{\underline{\mathbf{S}}}[\underline{\mathbf{u}}]$.

Considere agora uma deformação equilibrada $\check{\boldsymbol{\chi}}$ associada a uma densidade de força de corpo externa $\underline{\mathbf{b}}$ que independe do tempo e seja $\underline{\mathbf{u}}$ um campo de deslocamento superposto a $\check{\boldsymbol{\chi}}$. Os quocientes de deformação e deslocamento relativos correspondentes são $\underline{\check{\mathbf{f}}}$ e $\underline{\mathbf{h}}$, respectivamente, os quais são dados por (2.6). Então,

$$\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\check{\mathbf{f}}} + \underline{\mathbf{h}}] = \hat{\underline{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] + o(\|\underline{\mathbf{h}}\|), \quad (3.23)$$

em que $\|\cdot\| : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é definido em (3.20) e

$$\hat{\underline{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] := \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\check{\mathbf{f}}}] + \delta_{\underline{\check{\mathbf{f}}}} \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\check{\mathbf{f}}}] \bullet \underline{\mathbf{h}} \quad (3.24)$$

é um *estado função resposta de força linearizada* do material simples no estado quociente de deformação relativa $\check{\underline{\mathbf{f}}}$. Neste sentido, $\hat{\underline{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]$ representa fisicamente uma aproximação do estado vetorial de força em $\mathbf{x}_0$ para estados de deslocamento relativos pequenos sobrepostos a $\check{\underline{\mathbf{f}}}$.

Suponha agora que o corpo é isotrópico em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ e seja $\underline{\mathbf{x}} = \check{\underline{\mathbf{x}}} + \underline{\mathbf{u}}$ um estado deformação relativa continuamente diferenciável, em que $\check{\underline{\mathbf{x}}}$ é também continuamente diferenciável. Substituindo o estado quociente correspondente, $\underline{\mathbf{f}} = \check{\underline{\mathbf{f}}} + \underline{\mathbf{h}}$ em (3.18), utilizando (3.23) e (3.24) em ambos os lados da expressão resultante e utilizando novamente (3.18) para ver que $\hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\check{\underline{\mathbf{f}}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \mathbf{Q}^T \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\check{\underline{\mathbf{f}}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T] \langle \mathbf{Q}\underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle$ para $\forall \underline{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{H}_\delta$, chegamos finalmente a

$$\left(\delta_{\check{\underline{\mathbf{f}}}} \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\check{\underline{\mathbf{f}}}] \bullet \underline{\mathbf{h}} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \left(\mathbf{Q}^T \delta_{\check{\underline{\mathbf{f}}}} \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\check{\underline{\mathbf{f}}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T] \bullet ((\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T) \right) \langle \mathbf{Q}\underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle. \quad (3.25)$$

No caso particular do estado identidade $\check{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{x}}$, em que $\underline{\mathbf{x}}$ é dado por (2.4), a expressão (3.25) torna-se

$$\left(\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \left(\mathbf{Q}^T \delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet ((\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T) \right) \langle \mathbf{Q}\underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle. \quad (3.26)$$

Na próxima seção propomos uma função energia livre para um material simples na vizinhança de $\check{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{x}}$ que satisfaz a condição de invariância dada pela expressão (3.26).

3.4 Linearização de um Material Simples Elástico

3.4.1 Teoria Geral

Desejamos agora introduzir o conceito de material peridinâmico elástico. Para isto, necessitamos definir a derivada de Fréchet de uma função escalar definida sobre o conjunto $\mathcal{A}_1$ de estados vetoriais.

Seja $\Psi[\cdot] : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que existe $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}] \in \mathcal{A}_1$, tal que

$$\Psi[\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}] = \Psi[\underline{\mathbf{u}}] + \delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}] \bullet \underline{\mathbf{v}} + o(\|\underline{\mathbf{v}}\|), \quad \forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_1, \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}_1, \quad (3.27)$$

em que $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}] \bullet \underline{\mathbf{v}}$ é dado por (3.19) e $\|\underline{\mathbf{v}}\|$ por (3.20). Dizemos então que Ψ é diferenciável e que $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}]$ é a derivada de Fréchet de $\Psi[\underline{\mathbf{u}}]$. De acordo com Silling (2010), se $\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}]$ é Fréchet diferenciável, a segunda derivada de Fréchet de $\Psi[\underline{\mathbf{u}}]$ é um estado duplo definido por $\delta_{\underline{\mathbf{u}}}^2 \Psi[\underline{\mathbf{u}}] := \delta_{\underline{\mathbf{u}}}(\delta_{\underline{\mathbf{u}}} \Psi[\underline{\mathbf{u}}])$ e pertencente a $\mathcal{D}_2$.

Definimos agora a adjunta de um estado duplo $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \in \mathcal{D}_2$ como o estado duplo

$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger \in \mathcal{D}_2$ dado por

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle = (\underline{\underline{\mathbf{D}}} \langle \underline{\eta}, \underline{\xi} \rangle)^\top, \quad \forall \underline{\xi} \in \mathcal{H}_\delta, \forall \underline{\eta} \in \mathcal{H}_\delta, \quad (3.28)$$

ou, em componentes, por

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger_{ij} \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger_{ji} \langle \underline{\eta}, \underline{\xi} \rangle, \quad \forall \underline{\xi} \in \mathcal{H}_\delta, \forall \underline{\eta} \in \mathcal{H}_\delta. \quad (3.29)$$

Note que a ordem de ambos, ligações e índices, são permutados ao se tomar a adjunta.

Dizemos que $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ é auto-adjunta se

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{D}}}. \quad (3.30)$$

Neste caso, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}^\dagger \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle, \forall \underline{\xi} \in \mathcal{H}_\delta, \forall \underline{\eta} \in \mathcal{H}_\delta$. Segue da exposição acima que $\delta_{\underline{\mathbf{u}}}^2 \Psi[\underline{\mathbf{u}}]$ é auto-adjunta.

Para um material simples elástico, supomos que a potência em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ é dada pela derivada material da energia livre com relação ao tempo em $\mathbf{x}_0$. Sendo mais específico, suponhamos que $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ denota a energia livre em $\mathbf{x}_0$ devido ao estado quociente de deformação relativa $\underline{\mathbf{f}}$ em $\mathbf{x}_0$. Segue pela regra da cadeia que

$$\dot{\hat{\Psi}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] \bullet \dot{\underline{\mathbf{f}}},$$

em que $(\dot{\cdot}) := \partial(\cdot)/\partial t$ está definido no início deste capítulo e $\dot{\underline{\mathbf{f}}}$ é, portanto, dado por

$$\dot{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{\underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{x}}|},$$

em que $\underline{\mathbf{v}}$ é o estado velocidade relativa em $\mathbf{x}_0$. Temos então que

$$\dot{\hat{\Psi}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]}{|\underline{\mathbf{x}}|} \bullet \underline{\mathbf{v}}. \quad (3.31)$$

Agora, uma vez que a *potência* em $\mathbf{x}_0$ é dada por $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] \bullet \underline{\mathbf{v}}$, vemos que, para um material simples elástico,

$$\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]}{|\underline{\mathbf{x}}|}, \quad (3.32)$$

de modo que a energia livre serve como um potencial para calcular o estado função resposta de força.

Observação 1: Note que $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ satisfaz a condição de invariância sob mudança de referencial se

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}], \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+.$$

Agora, utilizando (3.32) e calculando $\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$, é fácil mostrar que

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}].$$

Portanto, de acordo com (3.7), $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ é indiferente sob mudança de referencial, e dizemos que a indiferença sob mudança de referencial de $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ implica na indiferença sob mudança de referencial de $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$.

Observação 2: Note de um argumento similar àquele utilizado para simetria material na Seção 3.2 que $\mathcal{B}$ tem uma *simetria material em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ com respeito a $\mathbf{K} \in \text{Orth}^+$* se

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}} \circ \underline{\kappa}^T], \quad \underline{\kappa}^T := \mathbf{K}^T \underline{\mathbf{x}}.$$

Para isotropia, isto é verdade para todo $\mathbf{K} \in \text{Orth}^+$. Quando combinamos isto com indiferença por mudança de referencial, obtemos para isotropia,

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T], \quad \underline{\mathbf{q}}^T := \mathbf{Q}^T \underline{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+.$$

Calculando $\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$, obtemos facilmente

$$\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle \underline{\xi} \rangle = \mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{f}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T]\langle \mathbf{Q}\underline{\xi} \rangle,$$

que é a mesma expressão dada por (3.18). Vemos que assim que isotropia de $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ implica em isotropia de $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$.

Supondo que $\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ é um estado vetorial diferenciável no sentido de (3.27), vemos de (3.32) que $\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle = \left(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle \right) / |\underline{\xi}|$ e de (3.24) que o estado função resposta linear correspondente pode ser reescrito como

$$\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = \frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]}{|\underline{\mathbf{x}}|} + \frac{(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]) \bullet \underline{\mathbf{h}}}{|\underline{\mathbf{x}}|}. \quad (3.33)$$

Em (3.33), lembramos do exposto acima que $\underline{\mathbf{h}}$ é um estado quociente de deslocamento relativo pequeno superposto a $\underline{\mathbf{f}}$ e que $\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]$ é um estado duplo definido por $\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \delta_{\underline{\mathbf{f}}}(\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}])$.

Neste trabalho, consideramos o estado identidade $\underline{\check{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{x}}$, de modo que $\underline{\check{\mathbf{f}}} = \underline{\mathbf{x}}/|\underline{\mathbf{x}}| = \underline{\mathbf{e}}$, com $\underline{\mathbf{x}}$ dado por (2.4) e $\underline{\mathbf{e}}$ por (2.7). Além disso, consideramos $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] = 0$ e supomos que o sólido peridinâmico não está sujeito a um estado força residual, ou seja, de acordo com (3.32), $\delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] = \underline{\mathbf{0}}$, em que $\underline{\mathbf{0}}$ é o estado vetorial nulo. Neste caso, vemos

de (3.32) e (3.33) que

$$\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = \frac{(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]) \bullet \underline{\mathbf{h}}}{|\underline{\mathbf{x}}|} = \delta_{\underline{\mathbf{f}}} \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}}. \quad (3.34)$$

Note ainda que podemos escrever

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\check{\underline{\mathbf{f}}}]|_{\underline{\mathbf{f}}=\underline{\mathbf{e}}+\underline{\mathbf{h}}} := \frac{1}{2} (\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}}) \bullet \underline{\mathbf{h}} + o(\|\underline{\mathbf{h}}\|^2). \quad (3.35)$$

Definimos agora

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] := \frac{1}{2} (\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}}) \bullet \underline{\mathbf{h}}, \quad (3.36)$$

de modo que

$$\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] := \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}}. \quad (3.37)$$

Portanto, no caso de estado força residual nula, o estado função resposta de força linearizada é dado por

$$\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = \frac{\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]}{|\underline{\mathbf{x}}|}. \quad (3.38)$$

Se o corpo é isotrópico em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, segue de (3.26) e (3.34) que

$$\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle = \mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T]\langle \mathbf{Q}\xi \rangle, \quad \underline{\mathbf{q}}^T := \mathbf{Q}^T \underline{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+. \quad (3.39)$$

Esta expressão é utilizada abaixo para mostrar que

$$\mathbf{Q} \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]\langle \xi, \eta \rangle \mathbf{Q}^T = \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]\langle \mathbf{Q}\xi, \mathbf{Q}\eta \rangle, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+.$$

Para ver isto, observe que

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle &= \left(\frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}}}{|\underline{\mathbf{x}}|} \right) \langle \xi \rangle \quad \text{por (3.34)}, \\ &= \mathbf{Q}^T \underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[(\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T]\langle \mathbf{Q}\xi \rangle \quad \text{por (3.39)}, \\ &= \mathbf{Q}^T \left(\frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet ((\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T)}{|\underline{\mathbf{x}}|} \right) \langle \mathbf{Q}\xi \rangle \quad \text{por (3.34)}, \\ &= \mathbf{Q}^T \int_{\mathcal{N}_{\delta}} \frac{\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]\langle \mathbf{Q}\xi, \eta \rangle ((\mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}) \circ \underline{\mathbf{q}}^T) \langle \eta \rangle}{|\underline{\mathbf{x}}\langle \mathbf{Q}\xi \rangle|} dv_{\eta} \quad \text{por (3.21)}, \\ &= \int_{\mathcal{N}_{\delta}} \frac{\mathbf{Q}^T \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]\langle \mathbf{Q}\xi, \mathbf{Q}\eta \rangle \mathbf{Q}\underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle}{|\underline{\mathbf{x}}\langle \mathbf{Q}\xi \rangle|} dv_{\eta}. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\int_{\mathcal{N}_\delta} \left[\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle - \mathbf{Q}^T \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \langle \mathbf{Q} \underline{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{Q} \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \mathbf{Q} \right] \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} = 0.$$

Uma vez que a região $\mathcal{N}_\delta$ está fixada e a função $\underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle$ pode ser escolhida arbitrariamente, o lema fundamental do cálculo das variações mostra que o termo entre colchetes deve ser nulo.

3.4.2 Proposta de Função Energia Livre

Compatível com o exposto na Seção 3.4.2 e também com o nosso interesse em desenvolver uma teoria peridinâmica elástica-linear, utilizamos as medidas de deformação infinitesimais $\underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}]$ e $\underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}]$ definidas por, respectivamente, (2.14) e (2.17) para propor a seguinte forma quadrática para a função energia livre do material simples,

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = & \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left(\frac{\alpha_{11}}{2} (\underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle)^2 + \frac{\alpha_{22}}{2} (\underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle)^2 \right. \\ & + \alpha_{12} \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + \frac{\alpha_{33}}{2} (\underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle)^2 + \alpha_{13} \underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \\ & \left. + \alpha_{23} \underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right) dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

em que $\omega(\cdot, \cdot)$ é uma função peso conhecida e α_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, $i \leq j$, são constantes peridinâmicas elásticas, as quais antecipamos determinar relacionando a teoria peridinâmica com a teoria de elasticidade linear clássica no limite de uma sequência de horizontes que tendem a zero. Claramente, $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{0}}] = 0$.

Para prosseguir com o desenvolvimento da teoria linearizada, supomos que a função peso é simétrica, i.e., $\omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) = \omega(|\underline{\boldsymbol{\eta}}|, |\underline{\boldsymbol{\xi}}|)$, trocamos as variáveis de integração $\underline{\boldsymbol{\xi}} \leftrightarrow \underline{\boldsymbol{\eta}}$ e utilizamos a propriedade de simetria $\underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{u}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle = \underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{u}}] \langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle$. Vemos então que (3.40) reduz-se a

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = & \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left[\frac{\hat{\alpha}_{11}}{2} (\underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle)^2 + \alpha_{12} \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{33}}{2} (\underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle)^2 + \hat{\alpha}_{13} \underline{\hat{\gamma}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \underline{\hat{\varepsilon}}[\underline{\mathbf{h}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \right] dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

em que $\hat{\alpha}_{11} := \alpha_{11} + \alpha_{22}$ e $\hat{\alpha}_{13} := \alpha_{13} + \alpha_{23}$.

Para calcular o estado função resposta de força linearizada $\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]$ de (3.38), escrevemos a expressão (3.41) em uma forma alternativa utilizando a simetria da função peso $\omega(\cdot, \cdot)$ e as definições de $\underline{\hat{\gamma}}[\cdot] \langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\underline{\hat{\varepsilon}}[\cdot] \langle \cdot \rangle$ em (2.14) e (2.17), respectivamente. Pri-

meiramente, escrevemos as primeiras duas integrais do lado direito de (3.41) na forma

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \left[\frac{\hat{\alpha}_{11}}{2} (\hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle)^2 + \alpha_{12} \hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle \hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \eta \rangle \right] dv_\eta dv_\xi \\
&= \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \left[\frac{\hat{\alpha}_{11}}{2} (\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{12} (\underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right] dv_\eta dv_\xi.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Considere agora o integrando da terceira integral do lado direito de (3.41). De acordo com (2.14), podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi, \eta \rangle)^2 &= \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right) \underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right) \underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Ao inserir esta expressão como o integrando da terceira integral e ao trocar as variáveis de integração $\xi \leftrightarrow \eta$, o segundo termo no lado direito da expressão acima pode ser substituído por

$$\frac{1}{4} \left(\underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \right) \underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle$$

sem alterar o valor da integração dupla. Com esta substituição, os dois termos podem ser combinados entre si, fornecendo

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \left(\frac{\alpha_{33}}{2} (\hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi, \eta \rangle)^2 \right) dv_\eta dv_\xi \\
&= \frac{\alpha_{33}}{4} \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \left((\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \right. \\
&\quad \left. + (\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \eta, \xi \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right) dv_\eta dv_\xi.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalmente, aplicando a mesma estratégia acima para a quarta integral no lado direito de (3.41), achamos, após simplificação, que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \hat{\alpha}_{13} \hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi, \eta \rangle \hat{\underline{\underline{e}}}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \xi \rangle dv_\eta dv_\xi \\
&= \frac{\hat{\alpha}_{13}}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\xi|, |\eta|) \left((\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \xi \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \xi \rangle \right. \\
&\quad \left. + (\underline{\mathbf{e}}\langle \xi, \eta \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \eta \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \eta \rangle \right) dv_\eta dv_\xi.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Substituindo (3.42), (3.43) e (3.44) em (3.41), obtemos a forma alternativa

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] &= \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left\{ \frac{\hat{\alpha}_{11}}{2} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \alpha_{12} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right. \\ &\quad + \frac{\alpha_{33}}{4} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle] + \\ &\quad \left. + \frac{\hat{\alpha}_{13}}{2} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle] \right\} dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Em seguida, usamos a identidade

$$\frac{d}{d\lambda} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}} + \lambda \underline{\mathbf{v}}] \Big|_{\lambda=0} = \delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] \bullet \underline{\mathbf{v}}, \quad (3.46)$$

em que $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}$ é dado por (3.45), juntamente com a simetria da função peso $\omega(\cdot, \cdot)$ para obter

$$\begin{aligned} \delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle &= \left(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left[\hat{\alpha}_{11} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \right. \\ &\quad + 2 \alpha_{12} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{33} \left((\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{13} \left((\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \right. \\ &\quad \left. \left. + (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right) \right] dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

De passagem, note que é possível reescrever (3.47) na forma

$$\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \left(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \bullet \underline{\mathbf{h}} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}}, \quad (3.48)$$

em que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle &:= \delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle = \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left(2 \alpha_{12} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_{33} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{13} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \Big) \\ &\quad + \Delta(\underline{\boldsymbol{\eta}} - \underline{\boldsymbol{\xi}}) \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\zeta}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left(\hat{\alpha}_{11} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + \frac{1}{2} \alpha_{33} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\zeta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\zeta}} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{13} (\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\zeta}} \rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\zeta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \right) dv_{\underline{\boldsymbol{\zeta}}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

com $\Delta(\cdot)$ sendo a função delta de Dirac, é chamado *estado tensorial de módulo*. Note da discussão envolvendo as expressões (3.28) – (3.30) que o estado $\underline{\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}}$ é auto-adjunto. Além disso, se o horizonte δ é independente de $\mathbf{x}_0$, então $\underline{\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0}}$ é independente de $\mathbf{x}_0$.

Observe de (3.38), (3.37) e (3.21) que o estado função resposta de força linearizada pode ser representado por

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle &= \left(\frac{\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]}{|\underline{\mathbf{x}}|} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \left(\frac{(\delta_{\underline{\mathbf{f}}}^2 \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}}]) \bullet \underline{\mathbf{h}}}{|\underline{\mathbf{x}}|} \right) \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \\ &= \int_{\mathcal{N}_\delta} \left(\frac{\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}_0} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle}{|\underline{\boldsymbol{\xi}}| |\underline{\boldsymbol{\eta}}|} \right) \underline{\mathbf{u}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}}.\end{aligned}$$

Além disso, a condição de isotropia para um corpo peridinâmico elástico-linear, estabelecida em (3.39), é satisfeita seja na forma do módulo em (3.49), seja na forma da função resposta de força linearizada em (3.38) juntamente com (3.47).

Diferentemente da tensão de Cauchy na teoria clássica, para a qual a simetria do tensor é equivalente ao balanço de momento angular, o estado vetorial de força $\underline{\mathbf{T}}$ não satisfaz esta condição automaticamente. Utilizando (3.1), o balanço de momento angular em um corpo peridinâmico limitado $\mathcal{B}$ requer

$$\int_{\mathcal{B}} \underline{\boldsymbol{\chi}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \times (\rho(\underline{\mathbf{x}}) \ddot{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) - \underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{x}}, t)) dv_{\underline{\mathbf{x}}} = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.50)$$

No caso de um material simples, dado por (3.2), a condição (3.50) é verificada para qualquer deformação de um corpo $\mathcal{B}$ se¹

$$\int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\boldsymbol{\chi}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \times \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\boldsymbol{\chi}}/|\underline{\mathbf{x}}|] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\chi}} \in \mathcal{A}_1. \quad (3.51)$$

Neste trabalho, $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}$ é dado por (3.23), em que o estado função resposta de força linearizada $\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}$ é dado por (3.38) e (3.47) em uma vizinhança do estado natural do corpo, ou seja, para o estado quociente de deformação relativa $\underline{\mathbf{e}}$ e sem forças residuais. Substituindo estas expressões em (3.51) e utilizando $\underline{\boldsymbol{\chi}} = \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{h}}$ para $\underline{\mathbf{h}}$ pequeno, mas de outro modo arbitrário, concluímos que o balanço de momento angular de um corpo peridinâmico linearmente elástico é satisfeito se

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \times \Big[\hat{\alpha}_{11}(\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + 2 \alpha_{12}(\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \\ + \frac{1}{2} \alpha_{33} \Big((\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + (\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \Big) \\ + \frac{1}{2} \hat{\alpha}_{13} \Big((\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \\ + (\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \Big) \Big] dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}\end{aligned}$$

for zero.

¹Ver Proposição 8.1 de Silling et al. (2007)

Utilizando as definições de produtos tensoriais e vetoriais na expressão acima, trocando as variáveis de integração $\boldsymbol{\xi} \leftrightarrow \boldsymbol{\eta}$ e utilizando $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle \times \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = -\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \times \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|) (\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \times \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}\rangle \times \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle) \\ \left(\alpha_{33} \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle + \hat{\alpha}_{13} \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \right) dv_\eta dv_\xi.$$

Utilizando (2.15), verificamos que a expressão acima anula-se identicamente. Assim, o material elástico linearizado dado por (3.41) ou (3.45) satisfaz o balanço de momento angular.

Não obstante, o material elástico linearizado é *não ordinário* no estado quociente de deformação relativa $\underline{\mathbf{e}}$ no sentido de Silling et al. (2007). Segundo estes autores, materiais não ordinários tem, para algum $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta$, um vetor força $\underline{\mathbf{T}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle$ que não é paralelo à configuração deformada de $\boldsymbol{\xi}$, ou seja, $\underline{\mathbf{f}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \times \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \neq 0$, e, em geral, não satisfazem o balanço de momento angular identicamente. Aqui, $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \times \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \neq 0$ e lembramos do exposto acima que o material elástico linearizado satisfaz o balanço de momento angular. Silling e co-autores observam que “materiais não ordinários são interessantes por representar uma ruptura substancial com a teoria clássica da mecânica do contínuo.”

As expresões apresentadas acima podem ser aplicadas diretamente sobre uma superfície de descontinuidade, tal como uma trinca, ou, sobre um contínuo em que descontinuidades podem aparecer como resultado da deformação. Longe destes lugares, a deformação é suave, fazendo com que a teoria peridinâmica convirja para a teoria clássica do contínuo à medida que as distâncias entre pontos materiais tendem a zero. Devido a esta convergência, Silling e Lehoucq (2008) mostram que existe uma relação entre o tensor tensão de Piola-Kirchhoff da teoria clássica e a função resposta vetorial de força $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}$ da teoria peridinâmica. Na próxima sessão utilizamos esta relação na vizinhança do estado natural do corpo para mostrar que, para uma deformação suave, a função energia livre $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}$ do material simples linearizado é igual à função densidade de energia de deformação do material elástico-linear da teoria clássica. Este resultado juntamente com a forma quadrática proposta, dada por (3.41) ou (3.45), são então usadas para relacionar as constantes que aparecem nestas expressões às constantes de elasticidade da teoria linear clássica.

4 Determinação das Constantes Peridinâmicas

Supomos que a deformação é suave e utilizamos resultados de convergência obtidos por Silling e Lehoucq (2008) para mostrar que a função energia livre de um material peridinâmico linearmente elástico, dado por (3.36), é igual à função densidade de energia de deformação de um material elástico-linear clássico. Quando a função energia livre tem a forma quadrática dada por (3.41) ou (3.45), nós também mostramos que, primeiro, o termo que multiplica $\hat{\alpha}_{13}$ na expressão resultante anula-se e, segundo, a igualdade fornece um sistema de equações lineares para a determinação das constantes peridinâmicas remanescentes $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} e α_{12} .

Para formular o principal resultado de convergência obtido por Silling e Lehoucq (2008) e utilizado neste capítulo, necessitamos primeiramente reformular alguns resultados obtidos por estes autores. Lehoucq e Silling (2008) mostram que a equação de movimento peridinâmica (3.1) é equivalente à equação diferencial parcial

$$\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}, \quad (4.1)$$

em que div é o operador divergente e $\mathbf{S}$ é o *tensor tensão peridinâmico* dado por Silling e Lehoucq (2008) na forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{N}_1} \int_0^\delta \int_0^\delta (y+z)^2 \underline{\mathbf{T}}[\mathbf{x} - z \mathbf{m}] \langle (y+z) \mathbf{m} \rangle \otimes \mathbf{m} \, dz \, dy \, d\Omega_{\mathbf{m}}, \quad (4.2)$$

em que $\mathcal{N}_1$ é a esfera unitária, $\Omega_{\mathbf{m}}$ é um ângulo sólido diferencial sobre $\mathcal{N}_1$ na direção de qualquer vetor unitário $\mathbf{m}$, $\otimes$ denota o produto diádico de dois vetores e $\underline{\mathbf{T}}$ é o estado vetorial de força, o qual é dado por (3.2) para um material simples.

Considere agora que $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}$ é a função energia livre em um ponto arbitrário $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$ com o estado função resposta de força correspondente $\hat{\underline{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}$ dado por (3.32). Considere também uma família de materiais peridinâmicos simples e elásticos parametrizados por um horizonte variável $\delta^s = s \delta$, com δ mantido fixo, e dada por

$$\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}^s[\underline{\mathbf{f}}] := \hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{E}}^s[\underline{\mathbf{f}}]], \quad \forall \underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{A}_1, \quad (4.3)$$

em que $\underline{\mathbf{E}}^s$ é um *estado quociente de deformação relativa aumentado* e definido por

$$\underline{\mathbf{E}}^s[\underline{\mathbf{f}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \underline{\mathbf{f}}\langle {}^s \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{H}_\delta, \quad \forall \underline{\mathbf{f}} \in \mathcal{A}_1. \quad (4.4)$$

Se a deformação é homogênea, segue de (2.6.a) juntamente com (2.1) e (2.4) que (4.4) torna-se $\underline{\mathbf{E}}^s[\underline{\mathbf{f}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \underline{\mathbf{f}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle$. Deste modo, todo material peridinâmico elástico com função energia livre definida por (4.3) tem a mesma resposta sob deformação homogênea. No caso de uma deformação $\boldsymbol{\chi}$ suave e arbitrária, o seu comportamento em uma vizinhança δ^s de $\mathbf{x}_0$ para s suficientemente pequeno é ditado pela deformação homogênea $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ ($\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$) para $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\delta^s}$, sendo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1} + \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.5)$$

sendo $\mathbf{1}$ o tensor identidade. Combinamos estes fatos para argumentar que a sequência de materiais peridinâmicos elásticos definidos por (4.3) tem o mesmo comportamento mecânico em uma vizinhança δ^s de $\mathbf{x}_0$ à medida que $s \rightarrow 0$. Portanto, as propriedades de um material nesta sequência não deveriam mudar no processo de limite.

Utilizando (4.2), (4.3) e (4.4), Silling e Lehoucq (2008) mostram que o tensor tensão peridinâmico associado com $\hat{\Psi}_{\mathbf{x}_0}^s$ é dado por

$$\mathbf{S}^s(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{N}_1} \int_0^\delta \int_0^\delta (y+z)^2 \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0-sz\mathbf{m}}[\underline{\mathbf{E}}^s[\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0-sz\mathbf{m})]] \langle (y+z)\mathbf{m} \rangle \otimes \mathbf{m} \, dz \, dy \, d\Omega_{\mathbf{m}}. \quad (4.6)$$

Considerando que $\mathcal{B}$ é uma região aberta e supondo que o movimento $\boldsymbol{\chi}$ é duas vezes continuamente diferenciável com respeito a $\mathbf{x}$ e t e que o estado função resposta de força $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}$, introduzido em (3.2) para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, é continuamente diferenciável com respeito ao estado deformação relativa $\underline{\boldsymbol{\chi}}$ e à posição $\mathbf{x}$, então¹

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{S}^s = \mathbf{P} \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad (4.7)$$

em que $\mathbf{P}$ é o tensor tensão de Piola-Kirchhoff da teoria clássica, o qual está relacionado à função resposta $\underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}$ de um material peridinâmico por meio de

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\hat{\mathbf{T}}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\underline{\mathbf{e}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\boldsymbol{\xi}} \, dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (4.8)$$

com $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ sendo o tensor gradiente de deformação em $\mathbf{x}_0$, o qual é dado por (4.5.a). Em (4.8), δ é mantido fixo, embora seja arbitrário e finito. Lembramos do Capítulo 2 que δ é um parâmetro físico escolhido para refletir a escala de comprimento relevante.

¹Ver (50) em Silling e Lehoucq (2008). Ver também (38) em Silling (2010).

Supondo que o gradiente de deslocamento $\mathbf{H}_0 := \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$, definido por (4.5.b), é pequeno, substituindo (4.5) em $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \underline{\mathbf{e}}]$, o qual foi introduzido em (3.2) para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, e utilizando (3.23) e (3.38), aproximamos a integral no lado direito da expressão (4.8) por

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{N}_\delta} \delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} . \quad (4.9)$$

Observe de (4.9) que

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{P}_L(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{N}_\delta} \text{tr} \left[\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes (\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \right] dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = (\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}) \bullet \delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}] .$$

Utilizando (3.37) para $\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}]$ na última expressão acima e (3.36) para $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}]$ na expressão resultante, obtemos

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{P}_L(\mathbf{x}_0) = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}] , \quad (4.10)$$

o que significa, no limite de pequeno horizonte, que ambas as teorias, do contínuo clássico e peridinâmica, fornecem a mesma energia em um ponto $\mathbf{x}_0$ na vizinhança da configuração de referência.

O tensor tensão $\mathbf{P}_L(\mathbf{x}_0)$ em (4.10) está relacionado ao tensor gradiente de deslocamento infinitesimal $\mathbf{H}_0$ por meio da Lei de Hooke Generalizada da elasticidade linear clássica, a qual é dada por $\mathbf{P}_L(\mathbf{x}_0) = \mathbb{C}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{H}_0$, em que $\mathbb{C}_{\mathbf{x}_0}$ é o tensor de elasticidade em $\mathbf{x}_0$. Substituindo esta expressão em (4.10), obtemos

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot (\mathbb{C}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{H}_0) = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}] . \quad (4.11)$$

De passagem, utilizando (3.36) e (3.48), a expressão (4.11) fornece uma relação entre o tensor de elasticidade $\mathbb{C}_{\mathbf{x}_0}$ e o estado tensorial de módulo $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{x}_0}$ na vizinhança do estado natural do corpo. Neste trabalho, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathbf{x}_0}$ é dado por (3.49).

No caso do material elástico linearizado proposto neste trabalho, utilizamos (3.45) para reescrever (4.11) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot (\mathbb{C}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{H}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot \left\{ \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) \left[\hat{\alpha}_{11} \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \right. \right. \\ + 2 \alpha_{12} \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \\ + \frac{\alpha_{33}}{2} \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes (\underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \\ \left. \left. + \hat{\alpha}_{13} (\underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}}, \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}}, \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle) \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \right] dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \mathbf{H}_0 \right\} , \quad (4.12) \end{aligned}$$

em que $\underline{\mathbf{e}}$ e $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ são dados por (2.7) e (2.15), respectivamente. A expressão (4.12) fornece uma relação entre as constantes peridinâmicas e o tensor de elasticidade da teoria linear clássica. Mostramos a seguir que os termos multiplicando $\hat{\alpha}_{13}$ no lado direito de (4.12) anulam-se. Deste modo, no limite de pequenos horizontes e considerando uma deformação suave, $\hat{\alpha}_{13}$ não contribui para a energia livre do material peridinâmico linearizado.

Para calcular os termos multiplicando $\hat{\alpha}_{13}$ do lado direito de (4.12), consideramos um sistema de coordenadas esféricas (ϱ, θ, ϕ) baseado no eixo polar $\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$ para um dado $\boldsymbol{\xi}$ fixo. Em seguida, tomamos $\varrho := |\boldsymbol{\eta}|$, $\phi := \alpha$ e $dv_{\boldsymbol{\eta}} := \varrho^2 \sin \alpha d\varrho d\theta d\alpha$. Os limites para integração sobre $\mathcal{N}_\delta$ são $\varrho \in (0, \delta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\alpha \in (0, \pi)$. Com o auxílio de (2.15), vemos então que um termo qualquer no integrando de

$$\int_0^\delta \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|) \varrho^2 d\varrho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \cos \alpha) \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle + (\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle - \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle \cos \alpha) \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle] d\theta d\alpha \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle$$

é multiplicado por uma das seguintes funções trigonométricas: $\cos \theta \sin \alpha$, $\sin \theta \sin \alpha$, $\cos \alpha$, $(\cos \theta \sin \alpha)^2 \cos \alpha$, $(\sin \theta \sin \alpha)^2 \cos \alpha$, ou, $\cos^3 \alpha$. Integrais destas funções sobre os limites correspondentes de integração, i.e., $(0, 2\pi)$ no caso de θ e $(0, \pi)$ no caso de α , anulam-se. Concluimos então que os termos multiplicando $\hat{\alpha}_{13}$ em (4.12) não contribuem para a energia livre $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \underline{\mathbf{e}}]$ de um corpo peridinâmico em $\mathbf{x}_0$. É possível que a contribuição desta constante seja um efeito não local, que não esteja sendo considerada no processo de limite que leva à expressão (4.7), a qual está relacionada somente à elasticidade linear clássica. Esta possibilidade será explorada em futuras investigações.

A expressão (4.12) é utilizada abaixo para obter um sistema de equações lineares para a determinação das constantes peridinâmicas remanescentes $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} e α_{12} . Para isto, utilizamos uma base ortonormal fixa, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e escrevemos

$$\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} \mathbf{e}_i, \quad \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle = \frac{\eta_i}{|\boldsymbol{\eta}|} \mathbf{e}_i, \quad (4.13)$$

em que fazemos uso da soma implícita e ξ_i , η_i são as componentes de $\mathbf{x}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \equiv \boldsymbol{\xi}$ e $\mathbf{x}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle \equiv \boldsymbol{\eta}$, respectivamente, na base fixa. Escrevemos então (2.15) na forma

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}}\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\eta_i}{|\boldsymbol{\eta}|} - \cos \alpha \frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \mathbf{e}_i, \quad \underline{\underline{\mathbf{e}}}\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} - \cos \alpha \frac{\eta_i}{|\boldsymbol{\eta}|} \right) \mathbf{e}_i. \quad (4.14)$$

Além disso, a expressão no lado esquerdo de (4.12) torna-se

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \cdot (\mathbf{C}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{H}_0) = \frac{1}{2} H_{ij} C_{ijkl} H_{kl}, \quad (4.15)$$

em que C_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$, são as constantes elásticas e H_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, são as componentes de $\mathbf{H}_0$. Deste modo, substituindo (4.13), (4.14) e (4.15) em (4.12), encontramos

$$C_{ijkl} = \hat{\alpha}_{11} C_{ijkl}^{11} + \frac{\alpha_{33}}{2} C_{ijkl}^{33} + 2\alpha_{12} C_{ijkl}^{12}, \quad (4.16)$$

em que

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{11} &\equiv \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|) dv_{\boldsymbol{\eta}} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}{|\boldsymbol{\xi}|^4} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \\ C_{ijkl}^{33} &\equiv \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \frac{\omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|)}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\eta_i}{|\boldsymbol{\eta}|} - \cos \alpha \frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|} \left[\left(\frac{\eta_k}{|\boldsymbol{\eta}|} - \cos \alpha \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|} \right) \frac{\xi_l}{|\boldsymbol{\xi}|} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|} - \cos \alpha \frac{\eta_k}{|\boldsymbol{\eta}|} \right) \frac{\eta_l}{|\boldsymbol{\eta}|} \right] dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \\ C_{ijkl}^{12} &\equiv \int_{\mathcal{N}_\delta} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|) \frac{\xi_i \xi_j \eta_k \eta_l}{(|\boldsymbol{\xi}| |\boldsymbol{\eta}|)^2} dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para obter (4.17), utilizamos $\omega(|\boldsymbol{\eta}|, |\boldsymbol{\xi}|) = \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|)$. Claramente, as matrizes com componentes C_{ijkl}^{11} e C_{ijkl}^{12} dadas por, respectivamente, (4.17.a) e (4.17.c) têm simetrias menores e maiores. Abaixo, encontramos relações entre as constantes elásticas C_{ijkl} e as constantes peridinâmicas elásticas $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} e α_{12} . Uma vez que sabemos do exposto acima que $\hat{\alpha}_{13}$ não contribui para a energia livre $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{H}_0 \mathbf{e}]$, esta constante peridinâmica não está relacionada às constantes elásticas C_{ijkl} .

Na teoria tridimensional, $\mathcal{N}_\delta$ está contido em uma esfera de raio δ e as coordenadas cartesianas $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, 3$, são dadas em termos das coordenadas esféricas $(\check{\varrho}, \check{\theta}, \check{\phi})$, $(\hat{\varrho}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \check{\varrho} (\cos \check{\theta} \cos \check{\phi}, \sin \check{\theta} \cos \check{\phi}, \sin \check{\phi}), \\ (\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \hat{\varrho} (\cos \hat{\theta} \cos \hat{\phi}, \sin \hat{\theta} \cos \hat{\phi}, \sin \hat{\phi}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.17), obtemos as constantes peridinâmicas mostradas na Tabela 1, em que ω_δ é dado por

$$\omega_\delta \equiv \pi^2 \int_0^\delta \int_0^\delta \omega(\check{\varrho}, \hat{\varrho}) \check{\varrho}^2 \hat{\varrho}^2 d\hat{\varrho} d\check{\varrho}. \quad (4.19)$$

Valores de C_{ijkl}^{11} , C_{ijkl}^{33} e C_{ijkl}^{12} não mostrados na Tabela 1 são zero, ou, satisfazem as simetrias menores e maiores das matrizes correspondentes. Em particular, $C_{ijkl}^{33} = C_{jikl}^{33} = C_{ijlk}^{33} = C_{klij}^{33}$. Além disso, valores de C_{ijkl}^{11} e C_{ijkl}^{12} são exatos e valores de C_{ijkl}^{33} foram calculados numericamente utilizando MATHEMATICA 6 ©. Estes valores numéricos

estão mostrados no lado esquerdo da coluna correspondente a $C_{ijkl}^{33}/\omega_\delta$ e são aproximações de números racionais mostrados no lado direito desta coluna. Os números racionais são utilizados abaixo como valores de $C_{ijkl}^{33}/\omega_\delta$.

Tabela 1: Constantes peridinâmicas definidas em (4.17) para o caso da teoria 3-D.

(i, j, k, l)	$C_{ijkl}^{11}/\omega_\delta$	$C_{ijkl}^{33}/\omega_\delta$	$C_{ijkl}^{12}/\omega_\delta$
(1,1,1,1)	16/5	$1.4221 \approx 64/45$	16/9
(2,2,2,2)	16/5	$1.4222 \approx 64/45$	16/9
(3,3,3,3)	16/5	$1.4222 \approx 64/45$	16/9
(1,1,2,2)	16/15	$-0.7111 \approx -32/45$	16/9
(1,1,3,3)	16/15	$-0.7111 \approx -32/45$	16/9
(2,2,3,3)	16/15	$-0.7111 \approx -32/45$	16/9
(2,3,2,3)	16/15	$1.0667 \approx 16/15$	0
(1,3,1,3)	16/15	$1.0667 \approx 16/15$	0
(1,2,1,2)	16/15	$1.0667 \approx 16/15$	0

Substituindo os valores mostrados na Tabela 1 em (4.16), obtemos um sistema de equações lineares para o cálculo dos parâmetros $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} e α_{12} em termos das constantes elásticas C_{ijkl} . Para se ter uma solução deste sistema, as constantes elásticas devem satisfazer as relações

$$\begin{aligned}
C_{ii23} &= C_{ii13} = C_{ii12} = 0, & i = 1, 2, 3, \text{ sem soma em } i, \\
C_{2313} &= C_{1312} = C_{2312} = 0, \\
C_{2222} &= C_{3333} = C_{1111}, \\
C_{1133} &= C_{2233} = C_{1122}, \\
C_{2323} &= C_{1313} = C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

as quais são verdadeiras da Tabela 1, significando que o material elástico clássico é, de fato, isotrópico. Este resultado é esperado da isotropia do material peridinâmico linearizado, obtida na Seção 3.4, juntamente com o trabalho de Silling e Lehoucq (2008), de acordo com o qual o modelo peridinâmico reproduz o modelo de elasticidade clássica à medida que as distâncias entre pontos materiais tendem a zero.

Substituindo as relações (4.20) no sistema de equações lineares (4.16) e utilizando

a Tabela 1, este sistema reduz-se às relações não triviais

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{15(C_{1111} - C_{1122})}{16\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \frac{3(C_{1111} + 2C_{1122})}{16\omega_\delta}, \quad (4.21)$$

em que ω_δ é dado por (4.19).

Utilizando as relações

$$C_{1111} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{1122} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

em que E e ν são, respectivamente, o módulo de Young e a razão de Poisson de um material isotrópico, reescrevemos (4.21) na forma alternativa

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{15E}{16(1+\nu)\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \frac{3E}{16(1-2\nu)\omega_\delta}, \quad (4.22)$$

em que lembramos da elasticidade linear clássica que $E > 0$ e $-1 < \nu < 1/2$.

Dado um dos três coeficientes peridinâmicos $\hat{\alpha}_{11}$, α_{12} , ou, α_{33} , os dois coeficientes remanescentes são determinados em termos de E e ν . Nem todos os três coeficientes são determinados por esta conexão à teoria de elasticidade linear clássica no limite de pequenos horizontes. Além disso, lembramos do exposto após a expressão (4.12) que o coeficiente peridinâmico $\hat{\alpha}_{13}$ também não é determinado por esta conexão. Os dois coeficientes peridinâmicos indeterminados continuam a fazer parte da teoria linear proposta aqui, em que extensões e distorções das ligações são consideradas.

Na teoria bidimensional, $\mathcal{N}_\delta$ está contido em um disco de raio δ e os cálculos que levam à determinação das constantes peridinâmicas encontram-se no Apêndice A. Similarmente ao caso tridimensional, a determinação destas constantes requer isotropia do material linear clássico. Aqui também, somente duas relações para as três constantes peridinâmicas $\hat{\alpha}_{11}$, α_{12} e α_{33} são possíveis. No caso 2-D, todos os cálculos são exatos e, devido à simplicidade de dedução, não requereram a utilização de MATHEMATICA 6 ©.

Assim, apesar do nosso modelo peridinâmico elástico-linear ser isotrópico e reproduzir o modelo de elasticidade clássica no limite de pequenos horizontes, duas constantes peridinâmicas continuam indeterminadas da análise realizada neste capítulo. No Capítulo 6 investigamos uma classe de quocientes de deslocamentos relativos que pode fornecer α_{33} . A determinação de $\hat{\alpha}_{13}$ requer melhor entendimento sobre as relações fundamentais entre deformação e o estado resposta de força e será objeto de futuras investigações.

5 Correspondência com o Sólido Isotrópico Linear de Silling et al. (2007)

Nesta seção estabelecemos uma correspondência entre a forma quadrática proposta, dada por (3.41) ou (3.45), e a função densidade de energia de deformação proposta por Silling et al. (2007) e Silling (2010) para um material simples, elástico e isotrópico submetido a deformações infinitesimais. Esta função depende quadraticamente do estado de deformação por meio de suas partes de dilatação e desviatória. Apesar da dependência quadrática, ambas as partes estão definidas em termos do *estado escalar extensional*, que é a mudança de comprimento entre duas partículas devido à deformação. Este estado é a deformação normal (2.16) multiplicada pelo comprimento da ligação, $|\boldsymbol{\xi}|$, e é, portanto, não linear com relação à deformação relativa entre duas partículas, definida em (2.1). Mostramos a seguir que as respostas de força linearizadas obtidas da forma quadrática (3.45) e desta função não linear são equivalentes entre si no caso de $\alpha_{33} = \hat{\alpha}_{13} = 0$ e para uma escolha particular da função peso $\omega(\cdot, \cdot)$. O modelo proposto neste trabalho é, portanto, mais geral do que o modelo dos autores citados acima na vizinhança do estado natural de um sólido isotrópico linear.

De maneira análoga à teoria de elasticidade linear clássica, Silling et al. (2007) propõem uma função densidade de energia de deformação que contém somente duas constantes materiais peridinâmicas, a qual é dada por

$$\hat{W}(\underline{\mathbf{Y}}) = \frac{k \vartheta^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\boldsymbol{\xi}|) \left(\underline{e} \langle \boldsymbol{\xi} \rangle - \frac{\vartheta |\boldsymbol{\xi}|}{3} \right)^2 dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (5.1)$$

na notação de Silling (2010), Seção 5.3. Em (5.1), $\underline{\mathbf{Y}}$ é o estado deformação relativa, k e α são coeficientes peridinâmicos dados abaixo, $\omega(\cdot)$ é uma função peso conhecida, $\underline{e}$ é o estado escalar extensional e ϑ é uma *dilatação não local*. Em nossa notação, a expressão (5.1) é reescrita na forma

$$\check{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{f}}] = \frac{\tilde{k} \hat{\vartheta}[\underline{\mathbf{f}}]^2}{2} + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 \left(\hat{\underline{e}}[\underline{\mathbf{f}}] \langle \boldsymbol{\xi} \rangle - \frac{\hat{\vartheta}[\underline{\mathbf{f}}]}{3} \right)^2 dv_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (5.2)$$

em que $\tilde{\omega} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função peso conhecida,

$$\hat{\underline{e}}[\underline{\mathbf{f}}] := |\underline{\mathbf{f}}| - 1, \quad (5.3)$$

com $\underline{\mathbf{f}}$ dado por (2.6.a), e

$$\hat{\vartheta}[\underline{\mathbf{f}}] = \frac{3}{m} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 \hat{\underline{e}}[\underline{\mathbf{f}}] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \quad m := \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}. \quad (5.4)$$

Uma vez que $\mathcal{N}_\delta$ está contido em uma esfera de raio δ e que as coordenadas cartesianas $\xi_i, i = 1, 2, 3$, são dadas em termos das coordenadas esféricas $(\check{\varrho}, \check{\theta}, \check{\phi})$ por intermédio de (4.18.a), segue de (5.4.b) que

$$m = 4\pi \int_0^\delta \tilde{\omega}(\check{\varrho}) \check{\varrho}^4 d\check{\varrho}. \quad (5.5)$$

Desejamos agora obter a função resposta de força linearizada a partir da função densidade dada por (5.2). Para isto, utilizamos a hipótese de quociente de deslocamento relativo infinitesimal, dada por (2.10), e sobrepomos este estado ao estado identidade $\underline{\mathbf{x}}$, dado por (2.4), de modo que $\underline{\mathbf{f}}$ em (5.4.a) seja substituído por $\underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{h}}$, com $\underline{\mathbf{e}}$ dado por (2.7). Assim,

$$\hat{\vartheta}[\underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{h}}] = \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] + O(\epsilon^2), \quad \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] := \frac{3}{m} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}. \quad (5.6)$$

Substituindo a expressão acima juntamente com (5.3) e (2.11) em (5.2), obtemos

$$\check{\Psi}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{h}}] = \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] + O(\epsilon^3),$$

$$\check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] := \frac{\tilde{k} \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}]^2}{2} + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 \left(\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle - \frac{\check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}]}{3} \right)^2 dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}}. \quad (5.7)$$

Em seguida, consideramos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{\mathbf{v}}[\cdot] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$ para escrever

$$\begin{aligned} \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}} + \lambda \underline{\mathbf{v}}] &= \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] + \lambda \left[\tilde{k} \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{v}}] \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 \left(\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle - \frac{\check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}]}{3} \right) \left(\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{v}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle - \frac{\check{\vartheta}[\underline{\mathbf{v}}]}{3} \right) dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \right] + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Podemos então escrever o termo entre colchetes no lado direito da expressão acima como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}} + \lambda \underline{\mathbf{v}}]_{\lambda=0} &= \left(\tilde{k} - \frac{\tilde{\alpha} m}{3^2} \right) \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{v}}] \\ &+ \tilde{\alpha} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle] \cdot \underline{\mathbf{v}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} . \end{aligned}$$

Com o auxílio de (5.6.b), a expressão anterior pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}} + \lambda \underline{\mathbf{v}}]_{\lambda=0} &= \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 \left\{ \left(\tilde{k} - \frac{\tilde{\alpha} m}{3^2} \right) \frac{3}{m} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\alpha} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle] \right\} \cdot \underline{\mathbf{v}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Em vista da identidade (3.46) e da expressão (3.38), obtemos de (5.8) que o estado função resposta de força linearizada do material peridinâmico proposto por Silling e co-autores é dado por

$$\begin{aligned} \underline{\check{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle &= \frac{\delta_{\underline{\mathbf{h}}} \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle}{|\underline{\boldsymbol{\xi}}|} \\ &= \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}| \left\{ \left(\tilde{k} - \frac{\tilde{\alpha} m}{3^2} \right) \frac{3}{m} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] + \tilde{\alpha} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle] \right\} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por outro lado, se escolhermos

$$\omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|) = \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\eta}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}|^2 |\underline{\boldsymbol{\eta}}|^2 \quad (5.10)$$

e se considerarmos que $\alpha_{33} = \hat{\alpha}_{13} = 0$ em (3.47), obtemos de (3.38) que

$$\underline{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle = \tilde{\omega}(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|) |\underline{\boldsymbol{\xi}}| \left\{ 2\alpha_{12} \frac{m}{3} \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \check{\vartheta}[\underline{\mathbf{h}}] + m \hat{\alpha}_{11} [(\underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle) \underline{\mathbf{h}}\langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle] \right\} . \quad (5.11)$$

Comparando (5.9) com (5.11), vemos que estas expressões têm a mesma forma e fornecem a resposta constitutiva de um material elástico linearizado. Por comparação direta de (5.9) e (5.11), obtemos

$$m \hat{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha} , \quad 2\alpha_{12} \left(\frac{m}{3} \right)^2 = \tilde{k} - \frac{\tilde{\alpha} m}{3^2} , \quad (5.12)$$

de onde tiramos que

$$\hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \left(\frac{3}{m} \right)^2 \tilde{k} . \quad (5.13)$$

Para relacionar os coeficientes $\tilde{k}$ e $\tilde{\alpha}$ às constantes elásticas da teoria linear clássica, Silling et al. (2007) consideram uma deformação homogênea pequena e argumen-

tam que se o material peridinâmico corresponde a um material elástico-linear clássico, então a função densidade de energia dada por (5.2) deve ser igual à função densidade de energia de deformação de um material elástico-linear isotrópico clássico. Em particular, eles utilizam uma pequena expansão isotrópica para mostrar que $\tilde{k}$ é o módulo de expansão volumétrica clássico k . No caso oposto, em que a dilatação infinitesimal é nula, eles obtêm a expressão

$$\tilde{\alpha} = \frac{15\mu}{m}, \quad (5.14)$$

em que μ é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. Portanto, Silling e co-autores determinam os dois coeficientes $\tilde{k}$ e $\tilde{\alpha}$ sem utilizar a expressão geral (4.11), a qual é válida para qualquer deformação suave e pequena.

Neste trabalho utilizamos a relação (4.11) para chegar às expressões (4.22), as quais podem ser reescritas na forma

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{15\mu}{8\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{k}{\omega_\delta}, \quad (5.15)$$

em que ω_δ é dado por (4.19) e μ e k estão relacionados ao módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν por meio de

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (5.16)$$

Em particular, se introduzirmos (5.10) na expressão (4.19) e utilizarmos (5.5), obtemos

$$\omega_\delta = \left(\frac{m}{4}\right)^2. \quad (5.17)$$

Substituindo (5.17) nas expressões em (5.15) e considerando que $\alpha_{33} = 0$, obtemos

$$\hat{\alpha}_{11} = \frac{15\mu}{m^2}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \left(\frac{3}{m}\right)^2 k, \quad (5.18)$$

que são as mesmas expressões mostradas em (5.12) e (5.13) juntamente com (5.14).

Concluimos este capítulo observando que, no regime de pequenos quocientes de deslocamentos relativos sobrepostos ao estado identidade, o modelo elástico-linear (3.45) é mais geral do que o modelo constitutivo linearizado (5.7.b) obtido da função densidade de energia (5.2) proposta por Silling e co-autores. Ao escolher (5.10) e ao supor que $\alpha_{33} = \hat{\alpha}_{13} = 0$, as funções respostas de força linearizadas dadas por (5.9) e (5.11) possuem a mesma forma, possibilitando, por comparação direta entre estas funções, encontrar as relações (5.12) entre os coeficientes $\hat{\alpha}_{11}$ e α_{12} e os coeficientes $\tilde{k}$ e $\tilde{\alpha}$ de Silling e co-autores. Alternativamente, estas mesmas relações são obtidas a partir das expressões

(5.15) juntamente com (5.14) e (5.17).

6 Decomposição do Quociente de Deslocamento Relativo

Vimos no Capítulo 5 que a função densidade de energia de deformação proposta por Silling et al. (2007) para um material simples, elástico e isotrópico depende do estado de deformação por meio de suas partes de dilatação e desviatória. Neste capítulo decomponemos o estado quociente de deslocamento relativo em termos de suas partes esférica e desviatória e investigamos as implicações desta decomposição sobre a função energia livre dada por (3.45). Em particular, investigamos possíveis classes de funções que podem ser utilizadas na determinação do coeficiente peridinâmico α_{33} . Lembre-se do Capítulo 4 que, dado α_{33} , os coeficientes peridinâmicos $\hat{\alpha}_{11}$ e α_{12} são determinados em termos de E e ν a partir de (4.22).

Decompomos o estado vetorial quociente de deslocamento relativo em $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}$, dado por (2.6), na forma

$$\underline{\mathbf{h}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \underline{\phi}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle + \underline{\mathbf{h}}_d\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \quad (6.1)$$

para todas as ligações $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_\delta$, em que $\underline{\phi}$ é um estado escalar e $\underline{\mathbf{h}}_d$ é um estado vetorial que satisfaz $\underline{\mathbf{h}}_d \cdot \underline{\mathbf{e}} = 0$. Observe de ambos (2.14) e (2.15) que $\hat{\gamma}[\underline{\phi}\underline{\mathbf{e}}]\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle \equiv 0$ e de (2.17) que $\hat{\varepsilon}[\underline{\mathbf{h}}_d]\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \equiv 0$. Em vista destas identidades, dizemos que $\underline{\phi}\underline{\mathbf{e}}$ é a *parte esférica* de $\underline{\mathbf{h}}$ e que $\underline{\mathbf{h}}_d$ é a *parte desviatória* de $\underline{\mathbf{h}}$.

Substituindo (6.1) em (3.45) e utilizando as igualdades $\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = 0$, $\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle \cdot \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = 0$ e $\underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle \boldsymbol{\xi} \rangle = \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle \boldsymbol{\xi} \rangle / \sin \alpha$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] &= \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\phi}\underline{\mathbf{e}}] + \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] \\ &+ \frac{\hat{\alpha}_{13}}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}_d\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \frac{\omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|)}{\sin \alpha} (\underline{\phi}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle + \underline{\phi}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle) \underline{\mathbf{e}}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

em que

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\phi}\underline{\mathbf{e}}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\phi}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle \int_{\mathcal{N}_\delta} \omega(|\boldsymbol{\xi}|, |\boldsymbol{\eta}|) [\hat{\alpha}_{11} \underline{\phi}\langle \boldsymbol{\xi} \rangle + 2 \alpha_{12} \underline{\phi}\langle \boldsymbol{\eta} \rangle] dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (6.3)$$

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] = \frac{\alpha_{33}}{4} \int_{\mathcal{N}_\delta} \underline{\mathbf{h}}_d \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \int_{\mathcal{N}_\delta} \frac{\omega(|\underline{\boldsymbol{\xi}}|, |\underline{\boldsymbol{\eta}}|)}{(\sin \alpha)^2} \\ [\underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle + \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle] \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\eta}} \rangle dv_{\underline{\boldsymbol{\eta}}} dv_{\underline{\boldsymbol{\xi}}} . \quad (6.4)$$

Observação 1: É interessante notar das expressões acima que termos não nulos multiplicando $\hat{\alpha}_{13}$ só aparecem na expressão (6.2), e isto é devido à multiplicação de termos cruzados contendo $\underline{\phi} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \underline{\mathbf{e}} \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle$ e $\underline{\mathbf{h}}_d \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle$. Termo análogo não aparece na teoria de elasticidade linear clássica. Nesta teoria, a função densidade de energia de deformação para um material isotrópico é dada por

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr } \mathbf{E})^2 + 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] , \quad (6.5)$$

em que $\mathbf{E}$ é o tensor deformação infinitesimal, μ é dado por (5.16.a) e $\lambda = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$. Para comparar com (6.2), escrevemos $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_d$, em que $\mathbf{E}_s = (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{1}/3$ é a parte esférica de $\mathbf{E}$ na teoria tridimensional e $\mathbf{E}_d$ é a parte desviatória de $\mathbf{E}$. Em seguida, substituímos $\mathbf{E}$ na expressão (6.5) e obtemos $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}) = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}_s) + \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}_d)$, com $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}_s) = (k/2) (\text{tr } \mathbf{E})^2$, em que k é dado por $\lambda + 2\mu/3$ ou (5.16.b). Não há, portanto, contribuição de termos cruzados contendo $\mathbf{E}_s$ e $\mathbf{E}_d$ na expressão de $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E})$.

Observação 2: Observe das expressões (5.6.b), (5.7.b) e (5.9.b) que as versões linearizadas da função densidade de energia de deformação e da função resposta de força linearizada do modelo de Silling et al. (2007) anulam-se identicamente para $\underline{\mathbf{h}} = \underline{\mathbf{h}}_d$, ou seja, $\check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] \equiv 0$ e $\check{\mathbf{L}}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] \langle \underline{\boldsymbol{\xi}} \rangle \equiv \mathbf{0}$. De fato, no caso geral dado por (6.1), $\check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = \check{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\phi} \underline{\mathbf{e}}]$, que é igual a $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\phi} \underline{\mathbf{e}}]$ em (6.3) se escolhermos a expressão (5.10). Concluimos, portanto, que o modelo de Silling e co-autores não é adequado para descrever o comportamento de um material peridinâmico simples, elástico e isotrópico sob todas as possíveis classes de deformações.

Desejamos agora utilizar as expressões (6.2) – (6.5) para relacionar os coeficientes peridinâmicos às constantes elásticas da teoria linear clássica. A ideia básica consiste em considerar uma deformação homogênea pequena e utilizar argumento de correspondência similar ao de Silling et al. (2007) e mencionado no Capítulo 5 para calcular as constantes $\tilde{k}$ e $\tilde{\alpha}$ na expressão (5.2) ou (5.9). Assim, se o material peridinâmico corresponde a um material elástico-linear clássico, então a função densidade de energia livre dada por (6.2) – (6.4) deve ser igual à função densidade de energia de deformação (6.5) de um material elástico-linear isotrópico clássico. Para isto, consideramos abaixo duas classes de deformações homogêneas obtidas das partes esférica e desviatória de (6.1).

A primeira classe de deformações homogêneas permite obter, de maneira independente, a relação (4.22.b) ou (5.15.b). Lembre-se do Capítulo 4 que a relação (4.22.b) foi obtida por meio da expressão geral (4.11), a qual é válida para qualquer deformação suave e pequena (e não somente homogênea). O procedimento utilizado é empregado posteriormente na obtenção do coeficiente α_{33} , o qual não pode ser determinado a partir da expressão (4.11).

De maneira geral, o experimento associado à primeira classe de deformações consiste na expansão isotrópica $\underline{\phi}(\underline{\xi}) = \tilde{\phi}(|\underline{\xi}|)$, com $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conhecido e de pequena magnitude, juntamente com $\underline{h}_d(\underline{\xi}) = \mathbf{0}$ em (6.1). Segue de (6.2) – (6.4) que $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{h}] = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\phi} \underline{e}]$. Para calcular a integral interna no lado direito de (6.3), utilizamos, por conveniência, um sistema de coordenadas esféricas $(\hat{\varrho}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ baseado no eixo polar $\underline{e}(\underline{\xi})$ para todo $\underline{\xi}$ fixo. Temos então que $\hat{\varrho} := |\underline{\eta}|$, $\hat{\phi} := \alpha$ e $dv_{\underline{\eta}} := \hat{\varrho}^2 \sin \alpha d\hat{\varrho} d\hat{\theta} d\alpha$. Os limites de integração sobre $\mathcal{N}_\delta$ são $\hat{\varrho} \in (0, \delta)$, $\hat{\theta} \in (0, 2\pi)$ e $\alpha \in (0, \pi)$. A integral externa no lado direito de (6.3) é calculada utilizando o sistema de coordenadas esféricas $(\check{\varrho}, \check{\theta}, \check{\phi})$ dadas por (4.18.a). Obtemos então que

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{h}] = \frac{(4\pi)^2}{2} \int_0^\delta \tilde{\phi}(\check{\varrho}) \int_0^\delta \omega(\check{\varrho}, \hat{\varrho}) \left[\hat{\alpha}_{11} \tilde{\phi}(\check{\varrho}) + 2\alpha_{12} \tilde{\phi}(\hat{\varrho}) \right] \hat{\varrho}^2 \check{\varrho}^2 d\hat{\varrho} d\check{\varrho}. \quad (6.6)$$

No caso de uma dilatação volumétrica uniforme, $\tilde{\phi}(|\underline{\xi}|) = \tilde{\phi} \in \mathbb{R}$ e (6.6) toma a forma

$$\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{h}] = 8\omega_\delta (\hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12}) \tilde{\phi}^2, \quad (6.7)$$

em que ω_δ é dado por (4.19).

Em seguida, utilizando (2.6), obtemos o deslocamento relativo $\underline{u}(\underline{\xi}) = |\underline{\xi}| \tilde{\phi}(|\underline{\xi}|) \underline{e}(\underline{\xi})$ correspondente ao quociente de deslocamento relativo da expansão isotrópica. Aplicamos agora a definição (2.3) e calculamos as componentes do gradiente de deslocamento em $\mathbf{x}_0$ utilizando o sistema de coordenadas esféricas $(\check{\varrho}, \check{\theta}, \check{\phi})$ dadas por (4.18.a). Obtemos então que $\text{tr } \mathbf{E} = d(\check{\varrho} \tilde{\phi}(\check{\varrho})) / d\check{\varrho} + 2\tilde{\phi}(\check{\varrho})$. Segue, portanto, de (6.5) que $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}) = (k/2) \left(d(\check{\varrho} \tilde{\phi}(\check{\varrho})) / d\check{\varrho} + 2\tilde{\phi}(\check{\varrho}) \right)^2$. No caso de deformação homogênea, $\tilde{\phi}(|\underline{\xi}|) = \tilde{\phi} \in \mathbb{R}$, fornecendo $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E}) = (k/2) (3\tilde{\phi})^2$.

Utilizamos agora o argumento de correspondência, segundo o qual $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{h}] = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E})$ para uma dilatação volumétrica uniforme e pequena. Desta igualdade resulta a expressão (5.15.b), conforme antecipado acima.

Para obter a segunda classe de deformações homogêneas, consideramos a distorção pura causada por $\underline{h}_d(\underline{\xi})$ juntamente com $\underline{\phi}(\underline{\xi}) = 0$ em (6.1). Obtemos então que $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{h}]$ é

dado por (6.4). Seguindo o procedimento de análise descrito acima para o experimento de expansão isotrópica, propomos uma deformação homogênea associada a $\underline{\mathbf{h}}_d$. Antes, porém, desejamos ganhar entendimento sobre a estrutura de $\underline{\mathbf{h}}_d$ analisando o caso bidimensional, em que $\mathcal{N}_\delta$ está contido em um disco de raio δ e as coordenadas de $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ são dadas em termos das coordenadas polares (ϱ, θ) por expressões similares a (7.1). Assim, temos que $\underline{\mathbf{e}}(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{e}_\varrho \equiv \underline{\boldsymbol{\xi}}/|\underline{\boldsymbol{\xi}}|$, sendo $\{\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\theta\}$, com $\mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ e $|\mathbf{e}_\theta| = 1$, uma base ortonormal associada ao sistema de coordenadas polares (ϱ, θ) . Portanto, $\underline{\mathbf{h}}_d(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \nu_d(\varrho, \theta) \mathbf{e}_\theta$, em que supomos $\nu_d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ conhecido, suave e de pequena magnitude. Obviamente, $|\nu_d(\varrho, \theta)| = |\underline{\mathbf{h}}_d(\underline{\boldsymbol{\xi}})|$. Segue de (2.6.b) que o deslocamento relativo associado a $\underline{\mathbf{h}}_d$ é dado por $\underline{\mathbf{u}}_d(\underline{\boldsymbol{\xi}}) = \nu_d(\varrho, \theta) \varrho \mathbf{e}_\theta$, fornecendo as componentes $u_\varrho := \underline{\mathbf{u}}_d(\underline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{e}_\varrho = 0$ e $u_\theta := \underline{\mathbf{u}}_d(\underline{\boldsymbol{\xi}}) \cdot \mathbf{e}_\theta = \nu_d(\varrho, \theta) \varrho$. Inserindo estas componentes na expressão do gradiente de deformação correspondente, dada por

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{1} + u_{\varrho, \varrho} \mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\varrho + \frac{(u_{\varrho, \theta} - u_\theta)}{\varrho} \mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\theta + u_{\theta, \varrho} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varrho + \frac{(u_{\theta, \theta} + u_\varrho)}{\varrho} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta,$$

em que $\mathbf{1} = \mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\varrho + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$ na teoria bidimensional, “ $\otimes$ ” é o produto tensorial em $\mathbb{E}^2$ e uma coordenada polar precedida por uma vírgula no subscrito de uma variável indica derivada parcial com respeito àquela coordenada (e.g., $u_{\varrho, \varrho} := \partial u_\varrho / \partial \varrho$), obtemos

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{1} - \nu_d \mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\theta + (\varrho \nu_d)_{, \varrho} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varrho + \nu_{d, \theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta. \quad (6.8)$$

Segue de (6.8) que o tensor deformação infinitesimal correspondente é dado por

$$\mathbf{E}_d = \frac{\varrho \nu_{d, \varrho}}{2} (\mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varrho) + \nu_{d, \theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta. \quad (6.9)$$

É interessante notar da expressão (6.8) que uma deformação homogênea requer $\nu_d(\varrho, \theta)$ constante para todo $\varrho \in (0, \delta)$ e todo $\theta \in (0, 2\pi)$. Temos então de (6.9) que $\mathbf{E}_d$ anula-se e que a deformação resultante é uma rotação infinitesimal de corpo rígido associada ao tensor anti-simétrico $(\nu_d/2)(-\mathbf{e}_\varrho \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varrho)$. Portanto, $\underline{\mathbf{h}}_d$ não pode estar associado diretamente a uma deformação homogênea na teoria bidimensional. Se, no entanto, partirmos de $\mathbf{E}_d$ constante (ao invés de $\mathbf{F}_d$ constante), obtemos $\nu_d(\varrho, \theta) = \tilde{\nu}_d \log \varrho$, em que $\tilde{\nu}_d \in \mathbb{R}$. Este caso corresponde a um cisalhamento puro. Veremos adiante, entretanto, que uma força de corpo com componente azimutal infinita em $\mathbf{x}_0$ é necessária para que esta deformação ocorra, não sendo, portanto, fisicamente possível.

Introduzindo $\mathbf{E}_d$, dado por (6.9), na lei de Hooke para um material elástico-linear e isotrópico e utilizando as componentes de tensão resultantes nas equações de equilíbrio,

obtemos o sistema de equações diferenciais parciais

$$\mu \varrho^2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\nu_{d,\theta}}{\varrho^2} \right) + \varphi_\varrho = 0, \quad \frac{\mu}{2 \varrho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^3 \nu_{d,\varrho}) + 2 \varrho \nu_{d,\theta\theta} \right] + \varphi_\theta = 0, \quad (6.10)$$

em que φ_ϱ e φ_θ são as componentes da força de corpo no sistema de coordenadas polares (ϱ, θ) . Na ausência desta força, a solução de (6.10) é dada por

$$\nu_d(\varrho, \theta) = \varrho^2 (\beta_1 \cos 2\theta + \beta_2 \sin 2\theta), \quad (6.11)$$

em que $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Para obter (6.11), eliminamos rotação de corpo rígido em torno de $\mathbf{x}_0$ e consideramos que $\mathbf{x}_0$ está fixo. Uma vez que $\nu_d(\varrho, \theta) = \nu_d(\varrho, \theta + \pi)$ para $\theta \in (0, \pi)$, a deformação associada não é injetora e, portanto, a solução dada por (6.11) não é fisicamente plausível.

Uma solução plausível pode ser obtida da solução geral de (6.10). Por exemplo, se $\varphi_\varrho = 0$ e se φ_θ depender somente de ϱ , então

$$\nu_d(\varrho, \theta) = -\frac{1}{\mu} \int^\varrho \frac{1}{\hat{\varrho}^3} \int^{\hat{\varrho}} \varphi_\theta(\check{\varrho}) \check{\varrho}^2 d\check{\varrho} d\hat{\varrho}. \quad (6.12)$$

Neste caso, o deslocamento azimutal na borda do disco $\mathcal{N}_\delta$ deve ser dado por $u_\theta(\delta, \theta) = \nu_d(\delta, \theta) \delta$, $\forall \theta \in (0, 2\pi)$. Em vista dos comentários realizados após a expressão (6.9), tomamos $\varphi_\theta(\varrho) = \tilde{\varphi}_\theta / \varrho$, com $\tilde{\varphi}_\theta \in \mathbb{R}$, para verificar que $\nu_d(\varrho, \theta) = \tilde{\nu}_d \log \varrho$, com $\tilde{\nu}_d := -\tilde{\varphi}_\theta / (2\mu)$.

Na teoria tridimensional, em que $\mathcal{N}_\delta$ está contido em uma esfera de raio δ e as coordenadas de $\boldsymbol{\xi}$ são dadas em termos das coordenadas esféricas (ϱ, θ, ϕ) por meio de expressões similares a (4.18.a), não é difícil mostrar, seguindo o procedimento utilizado acima na teoria bidimensional e partindo de $\mathbf{h}_d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle = (u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\phi \mathbf{e}_\phi) / \varrho$, em que $\{\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ é uma base ortonormal associada ao sistema de coordenadas esféricas (ϱ, θ, ϕ) , que $\mathbf{E}_d$ constante implica em $\mathbf{E}_d$ nulo. Lembre-se dos comentários realizados após a expressão (6.9) que, no caso bidimensional, $\mathbf{E}_d$ constante implica em cisalhamento puro associado a uma força de corpo azimutal que é infinita em $\mathbf{x}_0$, não sendo fisicamente possível.

Concluimos do estudo realizado acima que não é possível propor uma deformação homogênea associada a $\mathbf{h}_d$ que forneça $\mathbf{E}_d$ constante, não nulo e fisicamente plausível de maneira direta. Para que possamos utilizar o argumento de correspondência introduzido acima, empregamos o conceito de *redução de um estado a um tensor* apresentado por Silling et al. (2007) para obter uma deformação homogênea aproximada a partir de $\mathbf{h}_d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle$. Para isto, supomos que a função peso $\omega(\cdot, \cdot)$ admite a decomposição (5.10) e definimos o

produto tensorial entre dois estados vetoriais $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_1$ e $\underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}_1$ como

$$\underline{\mathbf{a}} * \underline{\mathbf{b}} := \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 (\underline{\mathbf{a}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \otimes \underline{\mathbf{b}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle) dv_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (6.13)$$

Assim, dada uma função peso $\tilde{\omega}(\cdot)$, a redução do estado vetorial $\underline{\mathbf{h}}_d$ a um tensor em $\mathcal{L}_2$ é obtida por meio de

$$\bar{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{h}}_d) = (\underline{\mathbf{h}}_d * \underline{\mathbf{e}}) \mathbf{K}^{-1}, \quad (6.14)$$

em que $\mathbf{K} = \underline{\mathbf{e}} * \underline{\mathbf{e}} \in \mathcal{L}_2$. Utilizando coordenadas esféricas, é possível mostrar que $\mathbf{K} = (m/3) \mathbf{1}$, em que m é dado por (5.5). Considerando $|\underline{\mathbf{h}}_d|$ pequeno e tomando a parte simétrica de $\bar{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{h}}_d)$, definida por $\bar{\mathbf{E}}_d := [\bar{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{h}}_d) + (\bar{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{h}}_d))^T]/2$, segue de (6.14) que $\text{tr } \bar{\mathbf{E}}_d = (3/m) \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 (\underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle) dv_{\boldsymbol{\xi}} = 0$, conforme esperado da parte desviatória de um tensor deformação infinitesimal¹. Além disso, utilizamos $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle = \cos \alpha$ para obter

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_d \cdot \bar{\mathbf{E}}_d &= \left(\frac{3}{m}\right)^2 \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \\ &\quad \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\eta}|) |\boldsymbol{\eta}|^2 (\cos \alpha \mathbf{1} + \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle \otimes \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle) \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Empregamos agora o argumento de correspondência $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}] = \widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\bar{\mathbf{E}}_d)$, em que $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}]$ e $\widehat{W}_{\mathbf{x}_0}^L(\mathbf{E})$ são dados por (6.4) e (6.5), respectivamente. Obtemos então que

$$\begin{aligned} \alpha_{33} &= \frac{4\mu \bar{\mathbf{E}}_d \cdot \bar{\mathbf{E}}_d}{\widetilde{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d]}, \\ \widetilde{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] &:= \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \\ &\quad \int_{\mathcal{N}_\delta} \frac{\tilde{\omega}(|\boldsymbol{\eta}|) |\boldsymbol{\eta}|^2}{(\sin \alpha)^2} [\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle + \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle] \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

em que $\bar{\mathbf{E}}_d \cdot \bar{\mathbf{E}}_d$ é dado por (6.15). Uma vez determinado α_{33} de (6.16.a) juntamente com (6.15) e (6.16.b), podemos substituí-lo em (4.21), (4.22) ou (5.15) para determinar as constantes peridinâmicas $\hat{\alpha}_{11}$ e α_{12} .

Na teoria bidimensional, não é difícil mostrar que $\mathbf{K} = \tilde{m} \mathbf{1}$, $\tilde{m} := \pi \int_0^\delta \tilde{\omega}(\rho) \rho^3 d\rho$. Uma vez que $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = 0$ e $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle = \cos \alpha$, então $\underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle = \cos \alpha$ e $\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\xi}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle = -\underline{\mathbf{e}}\langle\boldsymbol{\eta}\rangle \cdot \underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = \pm |\underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle| \sin \alpha$, em que o sinal “+”, ou, “-” depende do sentido de $\underline{\mathbf{h}}_d\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$. Substituindo $m/4$ por $\tilde{m}$ e introduzindo as expressões acima em (6.15)

¹Ver comentários após a expressão (6.5).

e (6.16.b), obtemos

$$\bar{\mathbf{E}}_d \cdot \bar{\mathbf{E}}_d = \frac{1}{\widetilde{m}^2} \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 |\underline{\mathbf{h}}_d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle| \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\eta}|) |\boldsymbol{\eta}|^2 (\cos 2\alpha) |\underline{\mathbf{h}}_d \langle \boldsymbol{\eta} \rangle| dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (6.17)$$

$$\widetilde{W}_{\mathbf{x}_0}[\underline{\mathbf{h}}_d] = \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\xi}|) |\boldsymbol{\xi}|^2 |\underline{\mathbf{h}}_d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle| \int_{\mathcal{N}_\delta} \tilde{\omega}(|\boldsymbol{\eta}|) |\boldsymbol{\eta}|^2 [|\underline{\mathbf{h}}_d \langle \boldsymbol{\xi} \rangle| - |\underline{\mathbf{h}}_d \langle \boldsymbol{\eta} \rangle|] dv_{\boldsymbol{\eta}} dv_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (6.18)$$

7 Conclusão

Apresentamos uma contribuição ao desenvolvimento da teoria peridinâmica ao introduzir estados de deformação peridinâmicos infinitesimais que são análogos às deformações infinitesimais da teoria linear clássica e ao utilizar estes estados na proposição de uma função energia livre quadrática para um material peridinâmico elástico e isotrópico na vizinhança do estado natural. Os estados de deformação peridinâmicos infinitesimais são lineares com respeito ao estado quociente de deslocamento relativo e são medidas de pequenas mudanças angulares e de comprimento.

A função energia livre quadrática depende de quatro constantes peridinâmicas. Para determinar estas constantes, supomos que a deformação do corpo é suave e utilizamos a convergência da teoria peridinâmica para a teoria de elasticidade linear clássica no sentido de um processo de limite descrito no início do Capítulo 4 para obter relações lineares entre as constantes peridinâmicas e as constantes elásticas clássicas de um material elástico-linear e isotrópico.

Duas constantes peridinâmicas não podem ser determinadas deste processo de limite. Uma destas constantes não contribui para a energia livre no limite, e acreditamos que ela representa uma contribuição não local para o comportamento do material peridinâmico linear. É interessante notar que as duas constantes peridinâmicas indeterminadas permanecem parte integrante da teoria melhorada proposta aqui, na qual extensões e distorções das ligações são consideradas. As relações fundamentais entre deformação e o estado resposta de força necessitam melhor entendimento e serão objeto de futuras investigações. É interessante notar também que o material elástico linearizado satisfaz o balanço de momento angular e é um material não ordinário, precisamente porque os termos multiplicando as duas constantes peridinâmicas indeterminadas na expressão do estado função resposta de força linearizada atuando sobre uma ligação não são paralelos à direção desta ligação. Materiais não ordinários representam uma ruptura substancial com a teoria clássica. Neste sentido, o material elástico linearizado proposto tem uma estrutura simples que pode ser usada para entender as implicações desta classe de mate-

riais não ordinários. Resultados desta investigação estão publicados em Aguiar e Fosdick (2014a).

Introduzimos ainda a decomposição do estado quociente de deslocamento relativo em partes esférica e desviatória. Esta decomposição permite escrever a função energia livre proposta como a soma de três termos, sendo que o primeiro termo depende da parte esférica somente e contém as constantes $\hat{\alpha}_{11}$ e α_{12} , o segundo termo depende da parte desviatória somente e contém a constante α_{33} e o terceiro termo depende de ambas as partes e contém a constante $\hat{\alpha}_{13}$. Soma análoga não se verifica no caso da função densidade de energia de deformação proposta por Silling et al. (2007) quando linearizada na vizinhança do estado natural de um corpo peridinâmico. Neste caso, a função densidade linearizada depende somente da parte esférica.

Considerando nula a parte desviatória e utilizando um argumento de correspondência entre as funções energia livre proposta e densidade de energia de deformação da teoria linear clássica, apresentamos uma expressão para α_{33} que depende do conhecimento da parte desviatória. Com a determinação de α_{33} , podemos determinar também as constantes $\hat{\alpha}_{11}$ e α_{12} . A determinação de $\hat{\alpha}_{13}$ será objeto de futuras investigações.

Apêndice A

Constantes Peridinâmicas na Teoria Bidimensional

Aqui, $\mathcal{N}_\delta$ está contido em um disco de raio δ e as coordenadas $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2$, são dadas em termos das coordenadas polares $(\check{\varrho}, \check{\theta}), (\hat{\varrho}, \hat{\theta})$ por meio de

$$(\xi_1, \xi_2) = \check{\varrho} (\cos \check{\theta}, \sin \check{\theta}), \quad (\eta_1, \eta_2) = \hat{\varrho} (\cos \hat{\theta}, \sin \hat{\theta}), \quad (7.1)$$

respectivamente. Substituímos (7.1) em (4.17) e lembramos da Seção 2 que α é o menor ângulo entre as ligações $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$, fornecendo

$$\alpha = \begin{cases} |\check{\theta} - \hat{\theta}|, & |\check{\theta} - \hat{\theta}| \leq \pi, \\ 2\pi - |\check{\theta} - \hat{\theta}|, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

Obtemos então a Tabela 2 em que

$$\omega_\delta \equiv \pi^2 \int_0^\delta \int_0^\delta \omega(\check{\varrho}, \hat{\varrho}) \check{\varrho} \hat{\varrho} d\hat{\varrho} d\check{\varrho} \quad (7.2)$$

no caso bi-dimensional. Valores de C_{ijkl}^{11} , C_{ijkl}^{33} e C_{ijkl}^{12} não apresentados na Tabela 2 são zero, ou, satisfazem as simetrias menores e maiores das matrizes correspondentes. Observe de (4.16) juntamente com a Tabela 2 que o material peridinâmico linear corresponde a um material linear clássico com constantes $C_{1111} = C_{2222}$ e $C_{1211} = C_{1222} = 0$.

Tabela 2: Constantes peridinâmicas definidas em (4.17) para o caso da teoria 2-D.

(i, j, k, l)	$C_{ijkl}^{11}/\omega_\delta$	$C_{ijkl}^{33}/\omega_\delta$	$C_{ijkl}^{12}/\omega_\delta$
(1,1,1,1)	3/2	1/2	1
(2,2,2,2)	3/2	1/2	1
(1,1,2,2)	1/2	-1/2	1
(1,2,1,2)	1/2	1/2	0
(1,2,1,1)	0	0	0
(1,2,2,2)	0	0	0

A versão bi-dimensional de (4.16) fornece um sistema linear de equações para a

determinação de $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} e α_{12} , o qual pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\frac{2C_{1111}}{\omega_\delta} &= 3\hat{\alpha}_{11} + \frac{\alpha_{33}}{2} + 4\alpha_{12}, \\ \frac{2C_{1212}}{\omega_\delta} &= \hat{\alpha}_{11} - \frac{\alpha_{33}}{2} + 4\alpha_{12}, \\ \frac{2C_{1122}}{\omega_\delta} &= \hat{\alpha}_{11} + \frac{\alpha_{33}}{2}.\end{aligned}\tag{7.3}$$

A matriz 3×3 associada com o sistema (7.3) é singular e o sistema (7.3) não tem solução, a não ser que $C_{1212} = (C_{2222} - C_{1122})/2$, o que, em vista do exposto acima, requer isotropia do material linear clássico. Note que os resultados mostrados na Tabela 2 confirmam esta relação entre os módulos materiais. Temos, portanto, que um dos três coeficientes materiais peridinâmicos $\hat{\alpha}_{11}$, α_{33} , ou, α_{12} é arbitrário e os outros dois são dados por

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{2(C_{1111} - C_{1122})}{\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \frac{C_{1111} + C_{1122}}{2\omega_\delta}.\tag{7.4}$$

Se considerarmos um estado de tensão plana em elasticidade linear clássica, as constantes elásticas são dadas por

$$C_{1111} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad C_{1122} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad C_{1212} = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

em que lembramos da Seção 4 que $E > 0$ e $\nu \in (-1, 1/2)$ são, respectivamente, o módulo de Young e a razão de Poisson de um material isotrópico. Segue então de (7.4) que

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{2E}{(1 + \nu)\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \frac{E}{2(1 - \nu)\omega_\delta}.\tag{7.5}$$

Se, no entanto, considerarmos um estado de deformação plana, as constantes elásticas são dadas por

$$C_{1111} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad C_{1122} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad C_{1212} = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

que juntamente com (7.4) fornecem

$$2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33} = \frac{2E}{(1 + \nu)\omega_\delta}, \quad \hat{\alpha}_{11} + 2\alpha_{12} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)\omega_\delta}.\tag{7.6}$$

Observe de (7.5) e (7.6) que as expressões correspondentes de $2\hat{\alpha}_{11} + \alpha_{33}$ são idênticas entre si.

Referências

- AGUIAR, A. R. Local and global injective solution of the rotationally symmetric sphere problem. **J. Elasticity**, v. 84, p. 99–129, 2006.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. A singular problem in incompressible nonlinear elastostatics. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 10, p. 1181–1207, 2000.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. Self-intersection in elasticity. **Int. J. Solids Structures**, v. 38, p. 4797–4823, 2001.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. A constitutive model for a linearly elastic peridynamic body. **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 19, n. 5, p. 502–523, 2014.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. On the corner behavior of a non-linear elastic wedge under mixed boundary conditions. **Int. J. Non-Linear Mechanics**, 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002074621400119X>>.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L.; SÁNCHEZ, J. A. G. A study of penalty formulations used in the numerical approximation of a radially symmetric elasticity problem. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 3, p. 1403–1427, 2008.
- ARAVAS, N.; SHARMA, S. M. An elastoplastic analysis of the interface crack with contact zones. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 39, n. 3, p. 311–344, 1991.
- ASKARI, E.; XU, J.; SILLING, S. Peridynamic analysis of damage and failure in composites. In: **44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**. [S.l.: s.n.], 2006.
- BOGY, D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. **J. Appl. Mech.**, v. 38, n. 2, p. 377–386, 1971.
- BOUKAMEL, A. **Étude Théorique et Experimentale d'un Stratifié Caoutchouc-acier en Grandes Déformations**. Tese (Thèse (doctorat nouveau régime)) — L'Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- CARROLL, M. M. Finite strain solutions in compressible isotropic elasticity. **J. Elasticity**, v. 20, p. 65–92, 1988.
- COMNINOU, M. The interface crack. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 44, p. 631–636, 1977.
- COMNINOU, M. The interface crack in a shear field. **J. Appl. Mech.**, v. 45, n. 2, p. 287–290, 1978.

COMNINOU, M.; SCHMUESER, D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field. **J. Appl. Mech.**, v. 46, p. 345–358, 1979.

DAUGE, M. **Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains — Smoothness and Asymptotics of Solutions, Lecture Notes in Mathematics 1341**. [S.l.]: Berlin: Springer-Verlag, 1988.

EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T. **Introdução às Pontes de Concreto**. [S.l.]: São Carlos: Universidade de São Paulo, 2010.

FOSDICK, R. L.; FREDDI, F.; ROYER-CARFAGNI, G. Bifurcation instability in linear elasticity with the constraint of local injectivity. **J. Elasticity**, v. 90, p. 99–126, 2008.

FOSDICK, R. L.; ROYER, G. The constraint of local injectivity in linear elasticity theory. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 457, p. 2167–2187, 2001.

GERSTLE, W.; SAU, N.; SILLING, S. Peridynamic modeling of concrete structures. **Nuclear Engineering and Design**, v. 237, p. 1250–1258, 2007.

GRISVARD, P. **Elliptic Problems in Non-Smooth Domains - Monographs and Studies in Mathematics 24**. 3. ed. [S.l.]: London: Pitman, 1985.

GRISVARD, P. Elliptic problems in non-smooth domains - monographs and studies in mathematics 24. In: **E. D. F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C. Mathématiques, Informatiques 1**. [S.l.: s.n.], 1986. p. 21–59.

GRISVARD, P. **Singularities in Boundary Value Problems, RMA 22, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées**. [S.l.]: Paris: Masson, 1992.

HA, Y. D.; BOBARU, F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. **Int. J. Fract.**, v. 162, p. 229–244, 2010.

HA, Y. D.; BOBARU, F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 78, p. 1156–1168, 2011.

HU, W.; HA, Y. D.; BOBARU, F. Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 217–220, p. 247–261, 2012.

ISHERWOOD, D. A.; OGDEN, R. W. Towards the solution of finite plane-strain problems for compressible elastic solids. **Int. J. Solids Structures**, v. 13, p. 105–123, 1977.

JOHN, F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, XIII, n. 2, p. 239–296, 1960.

KNOWLES, J. K.; STERNBERG, E. On the singularity induced by certain mixed boundary conditions in linearized and nonlinear elastostatics. **Int. J. Solids Structures**, v. 11, p. 1173–1201, 1975.

KNOWLES, J. K.; STERNBERG, E. On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strains. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 63, p. 321–336, 1977.

KNOWLES, J. K.; STERNBERG, E. Large deformations near a tip of an interface-crack between two neo-hookean sheets. **J. Elasticity**, v. 13, p. 257–293, 1983.

KONDRAT'EV, V. A. Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. **Transactions of the Moscow Mathematical Societys**, v. 16, p. 226–313, 1967.

KONDRAT'EV, V. A.; OLEINIK, O. A. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains. **Russian Mathematical Surveys**, v. 38, n. 2, p. 1–86, 1983.

KRYNINE, D. F. Soil mechanics. New York: Mcgraw-Hill, 1947.

KUNIN, I. A. **Elastic Media with Microstructure I: One-dimensional Models**. [S.l.]: Berlin: Springer, 1982.

LEGUILLON, D.; SANCHEZ-PALENCIA, E. **Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity - RMA 5 - Collection Recherches en Mathématiques Appliquées**. [S.l.]: Paris: Masson, 1987.

LEHOUCQ, R. B.; SILLING, S. A. Force flux and the peridynamic stress tensor. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 56, p. 1566–1577, 2008.

LEKHNITSKII, S. G. **Anisotropic Plates**. [S.l.]: New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

MILLER, R. et al. Quasicontinuum models of fracture and plasticity. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 61, p. 427–444, 1998.

MILNE-THOMSON, L. M. **Plane Elastic Systems**. [S.l.]: Berlin: Springer-Verlag, 1968.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. [S.l.]: Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1963.

OBEIDAT, K. et al. Numerical analysis of elastic problems with injectivity constraints. In: **European Conference on Computational Mechanics (ECCM-2001)**. [S.l.: s.n.], 2001.

OGDEN, R. W. Inequalities associated with the inversion of elastic stress-deformation relations and their implications. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 81, p. 313–324, 1977.

REITICH, F. Singular solutions of a transmission problem in plane linear elasticity for wedge-shaped regions. **Numerische Mathematik**, v. 59, p. 179–216, 1991.

RICE, J. R.; SIH, G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media. **J. Appl. Mech.**, v. 32, n. 2, p. 418–423, 1965.

ROGULA, D. **Nonlocal Theory of Material Media**. [S.l.]: Berlin: Springer, 1982.

RU, C. Q. On complex-variable formulation for finite plane elastostatics of harmonic materials. **Acta Mechanica**, v. 156, p. 219–234, 2002.

SÁNCHEZ, J. A. **O Estudo do Fenômeno da Auto-intersecção em um Anel Anisotrópico**. Tese (Master's Dissertation) — Universidade de São Paulo, 2008.

SILLING, S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 48, p. 175–209, 2000.

SILLING, S. A. Linearized theory of peridynamic states. **J. Elasticity**, v. 99, p. 85–111, 2010.

SILLING, S. A.; BOBARU, F. Peridynamic modeling of membranes and fibers. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 40, p. 395–409, 2005.

SILLING, S. A. et al. Peridynamic states and constitutive modeling. **J. Elasticity**, v. 88, p. 151–184, 2007.

SILLING, S. A.; LEHOUCQ, R. B. Convergence of peridynamics to classical elasticity theory. **J. Elasticity**, v. 93, p. 13–137, 2008.

SILLING, S. A. et al. Crack nucleation in a peridynamic solid. **Int. J. Fract.**, v. 162, p. 219–227, 2010.

SILLING, S. A.; ZIMMERMANN, M.; ABEYARATNE, R. Deformation of a peridynamic bar. **J. Elasticity**, v. 73, p. 173–190, 2003.

SNEDDON, I. N. Boussinesq's problem for a rigid cone. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 44, p. 492–507, 1948.

STEIGMANN, D. J.; PIPKIN, A. C. Stability of harmonic materials in plane strain. **Quarterly of Applied Mathematics**, XLVI, p. 559–568, 1988.

TADMOR, E. B. et al. Nanoindentation and incipient plasticity. **Journal of Materials Research**, v. 14, p. 2233–2250, 1999.

TADMOR, E. B.; ORTIZ, M.; PHILLIPS, R. Quasicontinuum analysis of defects in solids. **Philosophical Magazine A**, v. 73, p. 1529–1563, 1996.

TADMOR, E. B.; PHILLIPS, R.; ORTIZ, M. Mixed atomistic and continuum models of deformation in solids. **Langmuir**, v. 12, p. 4529–4534, 1996.

TARN, J. Q. Stress singularity in an elastic cylinder of cylindrically anisotropic material. **J. Elasticity**, v. 69, p. 1–13, 2002.

TING, T. C. T. The remarkable nature of radially symmetric deformation of spherically uniform linear anisotropic elastic solids. **J. Elasticity**, v. 53, p. 47–64, 1999.

VILLAGGIO, P. Deep foundations. **Rend. Lincei Mat. Appl.**, v. 20, p. 413–420, 2009.

WILLIAMS, M. L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. **Bulletin of the Seismological Society of America**, v. 49, p. 199–204, 1959.

XU, J. et al. Peridynamic analysis of impact damage in composite laminates. **Journal of Aerospace Engineering - ASCE**, v. 21, n. 3, p. 187–194, 2008.