**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA**

JULIANA APARECIDA DE FREITAS

**Aprendizagem de Matemática por meio da aplicação da perspectiva metodológica
da resolução de problemas a alunos do ensino médio**

Lorena
2018

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

JULIANA APARECIDA DE FREITAS

**Aprendizagem de Matemática por meio da aplicação da perspectiva metodológica
da resolução de problemas a alunos do ensino médio**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências do Programa de Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de Ciências.

Orientadora: Profa. Dra. Graziela Zamponi

Versão Corrigida

Lorena

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado
da Escola de Engenharia de Lorena,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Freitas, Juliana Aparecida de
Aprendizagem de Matemática por meio da aplicação
da perspectiva metodológica da resolução de problemas
a alunos do ensino médio. / Juliana Aparecida de
Freitas; orientadora Graziela Zamponi - Versão
Corrigida. - Lorena, 2018.
104 p.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Programa de
Mestrado Profissional em Projetos Educacionais de
Ciências) - Escola de Engenharia de Lorena da
Universidade de São Paulo. 2018

1. Aprendizagem de matemática. 2. Metodologia. 3.
Resolução de problemas. I. Título. II. Zamponi,
Graziela , orient.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar a vida e me guiar na busca de meus objetivos.

Aos familiares e amigos, pelo incentivo e motivação. Em especial ao Lincoln e a Natália por todo apoio.

Ao Rafael, pessoa especial em minha vida, pelo incentivo e carinho, que me fortaleceram.

A Professora Doutora Graziela Zamponi, minha orientadora, pela paciência, por todos os seus ensinamentos ao longo da desse projeto, por acreditar e não desistir.

Ao corpo docente do programa de Pós Graduação em “Projetos Educacionais de ciências”, pelos valiosos ensinamentos. Em especial ao professor Doutor Sergio Cobianchi por suas contribuições e solicitude.

Aos colegas de curso, pela convivência e colaboração, em especial a Wanessa por todo apoio, parceria e motivação nos momentos difíceis.

Aos secretários do programa de Pós Graduação em “Projetos Educacionais de ciências”, Júlio, Rita e Tavânia, pela disponibilidade e dedicação.

Aos alunos da EE Manuel Cabral, envolvidos nessa pesquisa, pelo empenho e colaboração.

A toda equipe da EE Manuel Cabral, em especial a professora Adriana Candido, por realizar a parceria nas atividades e na produção dos problemas-conto.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente estiveram ao meu lado nessa caminhada e contribuíram para essa minha conquista.

Gratidão.

RESUMO

FREITAS, J.A. Aprendizagem de Matemática por meio da aplicação da perspectiva metodológica da resolução de problemas a alunos do ensino médio. 104 p. Dissertação (Mestrado em ciências) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2018.

Nesta pesquisa, de abordagem qualitativa, discutimos o uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino em Matemática numa Perspectiva Metodológica a alunos do Ensino Médio. Tendo por objetivo geral contribuir para a melhoria do ensino-aprendizagem em Matemática. Durante três bimestres foram desenvolvidas atividades em três turmas da 2º série de uma escola publica da Rede Estadual de Ensino no município de Tremembé-SP. Essas atividades focalizavam os seguintes tópicos: as habilidades em que os alunos apresentavam defasagem, os diferentes tipos de problemas matemáticos sugeridos por Smole e Diniz (2001), a relação entre a Matemática e a Língua Materna e os processos cognitivos e metacognitivos. A coleta de dados deu-se por meio do diário de campo da professora-pesquisadora e dos registros produzidos pelos alunos ao longo das aulas. A análise dos dados aponta que na prática pedagógica, trabalhar com diferentes tipos de problemas aproxima a Matemática e a Língua Materna, ampliando a compreensão dos alunos, como também formular problemas ou parte dele embora se constitua uma tarefa desafiadora, contribui positivamente com o processo de resolução além de propiciar o início de reflexões de ordem metacognitiva.

Palavras-chave: Aprendizagem de Matemática. Metodologia. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

FREITAS, J.A. Learning of Mathematics through the application of the methodological perspective of Problem Solving to high school students. 104 p. Dissertation (Master of Science) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2018.

In this qualitative research, we discuss the use of problems solving as a methodology of mathematics teaching in a methodologic perspective to high school students. With the general goal of contributing to the improvement of teaching-learning in mathematics, were developed activities in three classes of the second grade of a Public School of the State Teaching Network in the municipality of Tremembé-SP during three bimester. These activities focused on the following topics: the abilities in which the students presented lags, the different types of mathematical problems suggested by Smole and Diniz (2001), the relation between Mathematics and the Mother Language and the cognitive and metacognitive processes. The data collection was done through the teacher-researcher's field diary and the records produced by the students throughout the classes. The analysis of the data points out that in pedagogical practice, working with different types of problems brings the Mathematics and Mother Language closer, broadening the students comprehension, and formulating problems or part of it, although it is a challenging task, positively contributes to the resolution process beyond of propitiating the beginning of reflections of metacognitive order.

Keywords: Mathematics Learning. Methodology. Problem Solving.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Categorias das habilidades que desenvolvem a transferência	38
Quadro 2 – Atividades planejadas para resolução e elaboração de problemas	47
Quadro 3 – Conteúdo e habilidades focalizadas na avaliação diagnóstica	49
Quadro 4 – Habilidades relativas a trigonometria desenvolvidas nas atividades de nívelamento 1, 2, 3 e 4 durante o 2º bimestre.....	49
Quadro 5 – Habilidades relativas a matrizes desenvolvidas nas atividades de nívelamento durante o 3º Bimestre	51
Quadro 6 – Habilidades relativas à probabilidade e análise combinatória desenvolvidas nas atividades de nívelamento durante o 4ºbimestre	53
Quadro 7 – Habilidades relativas a gêneros discursivos desenvolvidas nas atividades de nívelamento durante o 4ºbimestre	53
Quadro 8 – Títulos dos problemas-conto produzidos por série.....	70
Quadro 9 – Síntese da análise dos Problemas-conto	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número dos sujeitos da pesquisa.	46
Tabela 2 – Desempenho dos alunos das três turmas no teste diagnóstico em porcentual de acerto.....	57
Tabela 3 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas convencionais (Atividade de Nivelamento 1).	60
Tabela 4 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas não convencionais (Atividades de Nivelamento 2).....	61
Tabela 5 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas não convencionais	62
Tabela 6 – Desempenho dos grupos de alunos das três turmas na resolução do problema-conto	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição por níveis de desempenho em porcentagem.....	14
Figura 2 – Grau de domínio por habilidade.....	16
Figura 3 – Categoria do processo cognitivo retenção.....	37
Figura 4 – Categorias do conhecimento metacognitivo.	40
Figura 5 – Subcategorias do conhecimento metacognitivo.	41
Figura 6 – Modelo hierárquico metacognitivo.	42
Figura 7 – Imagem usada na formulação de um exemplo de problema	52
Figura 8 – Questão 1: Registro da aluna D26.....	58
Figura 9 – Questão 1: registro da aluna D 04.	58
Figura 10 – Questão 1: Registro da aluna C24.	59
Figura 11 – Questão 5 resolução da aluna D 26.	59
Figura 12 – Questão 5 resolução da aluna B02.	60
Figura 13 – Registro da atividade de nivelamento do grupo 2D4.	63
Figura 14 – Criando problema a partir de uma imagem registro do grupo 2C3.....	64
Figura 15 – Criando problema a partir de uma imagem registro do grupo 2B4.....	65
Figura 16 – Questão 3 da Situação de Aprendizagem 5 Caderno do aluno vol. 1.	66
Figura 17 – Criando problema a partir de uma pergunta registro do grupo 2D5.	66
Figura 18 – Registro da resolução do problema conto adaptado do grupo 2C3.....	68

LISTA DE SIGLAS

AAP	Avaliação da Aprendizagem em Processo
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
IDESP	Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo
SARESP	Sistema de Avaliação Rendimento do Estado de São Paulo
PISA	Programme for International Student Assessment
NTCN	National Council of teacher of mathematics
SEED	Secretaria escolar digital
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
NTCN	National Council of Teachers of Mathematics
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.
OE	Orientação de Estudo
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	20
2.1 Resolução de Problemas: origem e estado da arte	20
2.2 A perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas.....	25
2.2.1 A resolução e a formulação de problemas	30
2.3 Resolução de Problemas, Matemática e Língua Materna	32
3 ASPECTOS COGNITIVOS NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	36
3.1 Processos Cognitivos e metacognição	36
3.2 Metacognição e aprendizagem de Matemática	43
4 A PESQUISA.....	45
4.1 Caracterização da escola.....	45
4.2 Sujeitos da Pesquisa	45
4.3 Metodologia.....	46
4.3.1 Descrição Geral	47
4.3.2 Descrição detalhada	48
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	57
5.1 Análise da primeira fase	57
5.2 Análise da segunda fase.....	60
5.2.1 Primeira etapa: Resolução de problemas convencionais e não convencionais..	60

5.2.2 Segunda etapa: Formulação de problemas e partes de problemas	63
5.3 Análise da terceira fase	67
5.3.1 Análise dos Problemas-conto produzidos.....	70
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
REFERÊNCIAS	76
APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica (Teste).	82
APÊNDICE B – Atividades de Nivelamento	85
APÊNDICE C – Formulação de problemas e de partes dele.....	90
APÊNDICE D – Conto de Malba Tahan (adaptado) para a atividade de elaboração do problema-conto.....	93
APÊNDICE E– Problema-conto formulado pela professora-pesquisadora.....	95
APÊNDICE F – Conto de Ian Stewart (adaptado) para atividade de elaboração do problema-conto.....	96
O roubo incidente das meias verdes	96
APÊNDICE G – Termo de consentimento de participação do aluno	99
APÊNDICE H – Quadro de avaliação do problema-conto	100
ANEXO A – Termo de consentimento da escola.....	102
ANEXO B - Atividade para aula de Língua Portuguesa Conto Bruxas não existem.....	103

1 INTRODUÇÃO

A matemática geralmente é vista como vilã pelos alunos e muitas vezes pela própria sociedade. A origem dessa concepção pode ser encontrada, principalmente, mas não exclusivamente, numa prática escolar calcada em explicações de conceitos e algoritmos de resolução pelo professor, seguidas de extensas listas de exercícios selecionados, que devem ser retidos por memorização. Dando suporte a essa metodologia, muitos livros didáticos também se organizam de acordo com essas práticas tradicionais de sala de aula: após a explanação de um tópico, seguem-se os exercícios. Destaca-se aqui que normalmente se trata de exercícios descontextualizados, formulados por uma autoridade externa à sala de aula, o que significa que a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula em si mesma, como aponta Skovsmose (2000). O autor ainda destaca que esse paradigma do exercício se assenta na premissa de que existe apenas uma resposta certa.

Esse modelo operatório repetitivo e sem significado com base em processos de memorização foi-se estruturando e tornando-se uma característica no ensino de matemática desde o início do século XX. Sua manutenção ao longo dos anos gerou uma grande desmotivação para a aprendizagem dessa disciplina. O forte enraizamento dessa concepção e prática de ensino criou um quadro difícil de ser modificado. Esse quadro justifica, em certa medida, o baixo desempenho na disciplina em avaliações externas, internacionais e nacionais.

Um desses exames é o PISA¹. Realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o PISA é realizado a cada três anos, envolvendo três áreas: letramento em leitura, letramento em matemática e letramento em ciências. Em cada edição do exame, é dada ênfase a uma delas. O *letramento em matemática* implica a habilidade de elaborar, formular, resolver e interpretar problemas usando a matemática numa variedade de situações ou contextos. Toma-se como pressuposto que os alunos precisam entender conceitos matemáticos, pensar quantitativa e analiticamente e comunicar-se através da matemática, habilidades centrais e necessárias à preparação do indivíduo para o enfrentamento dos problemas que surgem além dos muros escolares no trabalho e na vida (OCDE, 2006). Nas edições de 2003 e 2012, quando o letramento em matemática foi o foco, o Brasil ficou em 40º e 58º lugar, entre 41 e 65 países, respectivamente.

As avaliações externas nacionais não mostram um quadro diferente. Especificamente, no caso da escola em que esta pesquisa é desenvolvida, o Sistema de Avaliação de

¹ Sigla em inglês para *Program for International Student Assessment*.

Rendimento do Estado de São Paulo (SARESP) é um bom exemplo do desempenho insatisfatório dos alunos.

Criado em 1996 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, o SARESP tem por objetivo gerar um diagnóstico da situação da escolaridade básica paulista, visando à melhoria da qualidade educacional. Além disso, essa avaliação também é responsável por fornecer dados ao Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (IDESP), que considera o indicador do desempenho no SARESP associado ao indicador de fluxo.

A análise dos dados dos últimos cinco anos do SARESP (2011 a 2015) da escola envolvida na pesquisa, especificamente na disciplina Matemática, mostra uma oscilação na evolução conforme a Figura 1.

Figura 1– Distribuição por níveis de desempenho em porcentagem

Fonte: Boletim IDESP (2016)

Apesar da evolução apresentada, o gráfico referente à distribuição por nível de desempenho mostra que o número de alunos em porcentagem no nível abaixo do básico é de 39,7% e básico 53,1% totalizando 92,8% de alunos que não estão em um nível adequado à série que cursam.

Portanto, se, por um lado, a escola melhorou no IDESP, o que indica diminuição da repetência e evasão, por outro lado, os resultados da escola quanto ao nível de desempenho

em Matemática não atingiram o adequado, o que é um quadro preocupante visto que a escola funciona em período integral.

Outro ponto de análise são as habilidades em defasagem. A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo disponibilizou neste ano de 2016 uma plataforma on-line intitulada **Foco Aprendizagem**, desenvolvida para apoiar o planejamento escolar e por meio da qual os professores e equipe gestora têm acesso aos dados da última edição tanto do sistema de avaliação da Educação básica SAEB quanto do SARESP. Através dessa plataforma, as escolas da rede conseguem realizar uma análise mais detalhada dos boletins do IDESP dos últimos cinco anos. Também é disponibilizado o mapa de habilidades das turmas.

Nessa plataforma, o mapa indica quais habilidades estão em maior defasagem tanto das turmas ingressantes no Ensino Médio, quanto das turmas que finalizaram esse ciclo. Apesar de as habilidades serem abordadas nas respectivas séries, muitas vezes, constata-se que elas não foram desenvolvidas efetivamente, quando o aluno é exposto a uma nova situação em que essas habilidades são exigidas, como mostra a Figura 2, relativa ao desempenho no SARESP, em 2015. Essa figura apresenta o resultado do desempenho dos alunos do 9º ano que ingressaram no 1º ano do Ensino Médio da escola participante desta pesquisa.

Todas as habilidades constantes da Figura 2 correspondem às exigidas para um aluno do 1º ano do Ensino Médio. Elas são distribuídas em três etapas, de acordo com um critério em ordem crescente de pré-requisito, e três graus de domínio; os quadros formados na relação das linhas horizontais e verticais apresentam quatro diferentes cores indicando as ações necessárias que o professor deve realizar para superar as defasagens: **priorizar** (vermelho), **retomar** (laranja), **complementar** (amarelo), **aprofundar** (verde).

Figura 2 – Grau de domínio por habilidade

Fonte: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SEE), 2016

As formas geométricas em que se inserem as habilidades, identificadas pela letra H seguida de um número identificador de uma habilidade específica, indicam os quatro temas principais do currículo de Matemática:

Tema 1 – Números, operações e funções;

Tema 2 – Espaço e forma;

Tema 3 – Grandezas e medidas;

Tema 4 – Tratamento da informação;

Constata-se que, no grau de domínio baixo e médio, encontra-se o maior número de habilidades a serem desenvolvidas, devendo o professor priorizar e/ou retomá-las, já que, concentrando-se nas etapas 1 e 2, elas impedem o desenvolvimento de habilidades da última etapa. Isso significa que a ação pedagógica do professor de Matemática basicamente deve ser uma resposta ao desenvolvimento de habilidades que não foram desenvolvidas no 9º ano do Ensino Fundamental. A imagem fala por si: trata-se de um quadro preocupante.

Frente a esse cenário atual de ensino de Matemática, e mais especificamente da escola onde se realiza a pesquisa, faz-se necessário pensar em estratégias para superar essas defasagens. Uma dessas estratégias encontra-se na adoção de uma metodologia que favoreça a aprendizagem da disciplina, como a Resolução de Problemas².

Há algumas décadas, pesquisadores, educadores e elaboradores de currículos vêm discutindo sobre a resolução de problemas e seu importante papel para o ensino de matemática. O resultado disso são diversos estudos com diferentes abordagens desenvolvidos ao longo dos anos no âmbito educacional.

Onuchic e Allevatto (2011) apontam que a adoção da resolução de problemas, cujas bases se encontram no construtivismo e na teoria sociointeracionista de Vygotsky, como metodologia central do trabalho pedagógico para o ensino de Matemática não ocorreu sem desacordos por conta, possivelmente, das diferentes concepções que se tinha sobre a questão. As autoras apresentam três modos de considerar a Resolução de Problemas no contexto do ensino: (1) ensinar *sobre* resolução de problemas; (2) ensinar matemática *para* resolver problemas; e (3) ensinar matemática *através da* resolução de problemas. (ONUCHIC; ALLEVATTO, 2011, p. 79)

Onuchic (1999) apresenta uma síntese dessas três maneiras de considerar a Resolução de Problemas. No primeiro caso, o professor oferece ao aluno um modelo de resolução de problemas matemáticos, como o faz Polya (1995). Esse modelo é constituído de quatro fases interdependentes: compreender o problema, criar um plano, executar esse plano e retornar ao problema original. No segundo caso, o professor se volta principalmente para a aplicação da matemática na solução de problemas rotineiros e não rotineiros; portanto, o foco se volta para o *uso* da matemática. No terceiro caso, a Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. O problema é considerado um “gatilho” para disparar o processo de construção do conhecimento.

Assim, de algoritmo de procedimentos para a resolução de problema, como propõe Polya (1995), a competência básica a ser desenvolvida, como entende Dante (1991), a resolução de problemas atualmente tende a ser vista como metodologia de ensino.

A resolução de problemas também é prevista nos PCN para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), sendo considerada uma habilidade a ser desenvolvida no âmbito das Ciências

² Inspirada em Onuchic e Allevatto (2011), adoto a grafia *Resolução de Problemas* quando se trata da metodologia, e *resolução de problemas* quando se trata do ato de resolver problemas.

da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Essas diretrizes indicam que a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se aprendem conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. No entanto, Onuchic (1999) aponta que, embora os PCN tenham uma proposta atual e inovadora em Educação Matemática, há pouca discussão quanto à sua operacionalização em sala de aula. Segundo a autora, as pesquisas em Resolução de Problemas no Brasil foram desenvolvidas em ambientes laboratoriais, sendo muito pouco desenvolvidas em sala de aula.

Entre os estudos voltados para a Resolução de Problemas, destacam-se os realizados na Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. O Grupo é responsável pelo desenvolvimento de atividades de aperfeiçoamento de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas. (ONUCHIC; ALLEVATTO, 2011).

Outra proposta interessante voltada para o ensino de Matemática adotando a Resolução de Problemas é encontrada em *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática*, livro organizado por Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz (2001). Entendendo a Resolução de Problemas como “um modo de organizar o ensino o qual envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura ao que é ensinar e, conseqüentemente, do que significa aprender” (DINIZ, 2001). As autoras, ampliando a conceituação de Resolução de Problemas como metodologia ou conjunto de orientações didáticas, a nomeiam de *Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas*.

Um viés dessa proposta é a articulação da linguagem matemática com a língua materna, marcada, portanto, pela interdisciplinaridade. Explorar a linguagem verbal para a comunicação matemática favorece não só a apreensão das ideias matemáticas como também a competência leitora e escritora. Essa articulação entre Matemática e Língua Materna já é proposta por Machado (2011), que reconhece a essencialidade do que ele chama *impregnação* entre uma e outra, tomando-a como fundamento para a proposição de ações que busquem superar as dificuldades do ensino da Matemática.

Cabe ressaltar, que o trabalho com a Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas apresenta alguns facilitadores:

- ✓ atende aos PCN;
- ✓ constitui instrumento motivador e desafiador para a aprendizagem;

- ✓ permite que o aluno desenvolva competências para trabalhar em grupo, favorecendo o processo sócio-interativo;
- ✓ possibilita o desenvolvimento dos processos cognitivos e metacognitivos;
- ✓ desenvolve a competência leitora e escritora;
- ✓ alia o uso dos recursos tecnológicos a resolução de problemas.

Por esses facilitadores apresentados, acreditamos que o uso da Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas pode contribuir para a melhoria do ensino-aprendizagem de Matemática, constituindo esse o nosso objetivo geral. Mais especificamente, temos como objetivos desenvolver:

- as competências básicas para a aprendizagem da matemática: expressão, compreensão e argumentação;
- a aprendizagem de tópicos de matemática por meio de Resolução de Problemas;
- processos cognitivos e metacognitivos;
- competência leitora e escritora, com a criação de uma problemateca.

Esta dissertação é organizada em quatro capítulos, além da Introdução e Considerações Finais. Resolução de Problemas

O primeiro capítulo aborda a Resolução de Problemas, focalizando desde as primeiras concepções a respeito dessa metodologia até as concepções atuais. Apresentamos a Resolução de Problemas numa perspectiva metodológica e a comunicação na aprendizagem de Matemática.

O segundo capítulo abordará os processos cognitivos e metacognitivos e suas implicações quanto à aprendizagem em Matemática.

No terceiro capítulo apresentamos o processo metodológico utilizado na pesquisa. Caracterizamos os sujeitos e a escola envolvida nesta pesquisa. Além disso, apresentamos as atividades propostas detalhando sua estrutura, sua organização e seus objetivos.

O quarto capítulo apresenta os dados coletados, sua análise e interpretação do produto gerado na pesquisa.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, tratamos da Resolução de Problemas como metodologia, buscando analisar como ela se desenvolveu ao longo dos anos no âmbito escolar e como é considerada por pesquisadores atuais. Por fim, apresentamos um viés dessa metodologia, denominado Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas, adotada nesta pesquisa.

2.1 Resolução de Problemas: origem e estado da arte

Alguns estudos mostram que desde a antiguidade o homem resolve problemas de ordem prática como, por exemplo, dividir terras, contar o número de animais do seu rebanho ou partilhar os alimentos com os membros de sua tribo (ROMERO, 2007).

No entanto, resolver problemas ultrapassa essa função meramente pragmática e assume uma função primordial na educação formal. Desafio contínuo para alunos e professores, a resolução de problemas é um método para aprendizagem, notadamente para a aprendizagem de matemática. O papel da resolução de problemas no currículo escolar tem assumido diferentes objetivos ao longo do tempo, surgindo diversas visões sobre o tema, as quais têm gerado diferentes orientações tanto para o ensino quanto para a elaboração de orientações didáticas.

Stanic e Kilpatrick³ (1989, apud ONUCHIC, 1999) apontam que a resolução de problemas já se fazia presente no currículo de Matemática desde a antiguidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados em registros egípcios, chineses e gregos. Os séculos se passaram e problemas com tratamento semelhante aos da antiguidade estão presentes em livros de ensino da Matemática do século XIX e XX.

Antes de discorrer sobre a Resolução de Problemas, esclarecemos o que entendemos por *problema* nesta pesquisa, adotando o conceito de Onuchic: problema é [...] “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” (ONUCHIC, 1999, p. 215)⁴

Apesar da resolução de problemas estar presente nos currículos desde a antiguidade, somente na década de 40 ganha maior ênfase, com as contribuições de Polya. Ele define a resolução de problemas como “a realização específica da inteligência, e se a educação

³STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. t. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston: NCTM, 1989.

⁴ Remetemos o leitor à nota 2 da Introdução desta dissertação, que justifica a diferença de grafia.

não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta”. (POLYA, 1995, p. 2).

Polya (1995) propõe quatro fases para se resolver um problema: 1. compreensão do problema; 2. estabelecimento de um plano para execução; 3. execução do plano; e 4. retrospecto. A **compreensão** envolve análise, isolando as partes principais do problema: *incógnita*, *dados* e *condicionante*, no caso do problema de determinação, cujo objetivo é encontrar a incógnita, e *hipótese* e *conclusão*, no caso do problema de demonstração, cujo objetivo é mostrar que certa afirmativa é verdadeira ou falsa (caso dos teoremas). O **planejamento** envolve a retomada de conhecimentos prévios e reanálise das partes do problema à luz desses conhecimentos, procedimento que poderá levar a alguma ideia de resolução. A **execução** envolve a realização de operações matemáticas necessárias para a resolução do problema, levando em conta a ideia formulada no planejamento. O **retrospecto** envolve a retomada e avaliação das etapas anteriores.

Após o trabalho de Polya, surgiu o movimento consolidado pelos norte-americanos intitulado Matemática Moderna, vigente nos anos sessenta e setenta, que pretendia que o ensino de matemática fosse apoiado em estrutura lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos (ONUChIC; ALEVATO, 2011). Esse movimento não apresentou sucesso, devido ao seu foco excessivo na abstração de conteúdos. Desse modo, educadores matemáticos voltaram a enfatizar o potencial da Resolução de Problemas preconizado por Polya, objetivando um ensino que oportunizasse a aprendizagem significativa e compreensão.

Iniciou-se, então, nos Estados Unidos, uma retomada dessa metodologia, quando o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) propôs, em uma de suas publicações, que a Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar (ONUChIC, 1999). Onuchic e Allevato (2011) destacam o trabalho realizado por esse Conselho, ao fim dos anos 80 e durante a década de 90, em que se abordavam aspectos essenciais para o ensino da Matemática com o objetivo de auxiliar os professores.

Fruto desse posicionamento, foi publicada uma sequência de trabalhos pelo NCTM como, por exemplo, *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics* em 1989, *Professional Standards for School 23 Mathematics*, em 1991, e *Assessment Standards for School Mathematics* em 1995, conforme cita Onuchic (1999).

Esses trabalhos resultaram na publicação do *Principles and Standards for School Mathematics* do NCTM, que indicava seis princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia), cinco Padrões de Conteúdos (Números e Operações,

Álgebra e Geometria, Medida, Análise de dados e probabilidade) como cinco procedimentos (Resolução de Problemas, Raciocínio de Prova, Comunicação, Conexão e Representação) (ONUChic, 1999).

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p. 79-80), os *Standards* (como o documento ficou conhecido) constituíram um ponto de partida em que “os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”. Nesse momento, o ensino da Matemática se volta para habilidades a serem desenvolvidas por todos os alunos.

No Brasil, na mesma linha dos *Standards*, surgem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o 1º e 2º ciclo em 1997, 3º e 4º ciclo em 1998 e Ensino Médio em 1999.

Essas diretrizes apresentavam, assim como os *Standards*, padrões de conteúdos e de procedimentos, estabeleciam objetivos para o ensino de matemática como levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, falar e escrever sobre as ideias, potencializar o raciocínio, contextualizar os temas matemáticos, desenvolver a capacidade de resolver problemas e criar problemas novos a partir deles. Os PCN (BRASIL, 1998) enfatizam a Resolução de Problemas como eixo organizador do processo do ensino e aprendizagem de matemática, um ponto de partida para novas propostas de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula, fundamentando-se em alguns princípios, que, de maneira geral, apresentam a situação-problema como ponto de partida da atividade matemática, evidenciando que, em um problema, o intuito não é a aplicação mecânica de fórmulas ou de um processo operatório.

Os PCN destacam que a construção de um conceito é feita de forma sucessiva para que o aluno resolva um determinado tipo de problema e, em outro momento, possa utilizar o que aprendeu em uma nova situação. Afirmam ainda que um conceito matemático quando articulado com outros conceitos favorece a construção de um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas. E, por fim, indicam que a Resolução de Problemas deve ser desenvolvida como uma orientação para aprendizagem.

Em 2002, o Ministério da Educação publicou um novo documento intitulado Ensino Médio Orientações Curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza matemática e suas tecnologias (PCN+), diretrizes que acentuam a importância do desenvolvimento da Resolução de Problemas em sala de aula. Posteriormente, no ano de 2006, foram publicadas as *Orientações Curriculares para o Ensino Mé-*

dio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias e, nesse mesmo documento, enfatiza-se a Resolução de Problemas.

Cabe ressaltar que, no Brasil, alguns estudos sobre a Resolução de Problemas que precedem os PCN já evidenciavam sua importância, segundo Azevedo (2014, p. 71). Em 1964, Luiz Alberto de Souza Brasil, em sua obra *Estudo dirigido de matemática no ginásio*, salientava que o Ensino da matemática poderia abandonar os métodos tradicionais em que, segundo o autor, grande parte dos professores empregava o problema objetivando verificar a fixação da aprendizagem, invertendo uma ordem que seria natural. O autor apresenta cinco tópicos para discussão em didática da matemática, destacando, entre eles, a Resolução de Problemas (AZEVEDO, 2014).

Outro ponto de destaque foi o trabalho do Professor Luiz Roberto Dante. Em seus estudos, destaca-se sua tese *Criatividade e Resolução de Problemas na Prática Educativa Matemática* e seu livro *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*, publicado em 1989. Nessas obras, em linhas gerais, o autor apresenta alguns objetivos da Resolução de Problemas como, por exemplo, levar o aluno a pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio, enfrentar situações novas, envolver-se com as aplicações da Matemática. Apresenta sugestões aos professores como, por exemplo, trabalhar diferentes tipos de problemas, como se resolver um problema, como encaminhar a solução de um problema em classe, como propor problemas adequadamente. Além disso, o autor faz sugestões de problemas, comentários, oferecendo soluções e respostas aos problemas propostos. Por fim, propõe estratégias para resolução de problemas a fim de tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras.

Em 1992, inicia-se na UNESP campos Rio Claro - SP o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, tendo por finalidade desenvolver estudos voltados ao ensino-aprendizagem focalizando a sala de aula em todos os níveis de ensino. Segundo Azevedo (2014), o Grupo GTERP produziu diversas teses de mestrado e doutorado gerando atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas.

Em 2001, inicia-se em São Paulo o grupo Mathema cujo objetivo é desenvolver métodos pedagógicos inovadores para melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem em matemática. Sob a direção das professoras Maria Ignez Diniz e Katia Stocco Smole, professores e pesquisadores desse grupo buscam criar atividades que desenvolvam competências básicas como: ler, escrever, resolver problemas e pensar criticamente.

O grupo trabalha métodos pedagógicos diferenciados que favorecem a participação dos alunos e promovem a aprendizagem significativa, oferece formação continuada e projetos especiais. O trabalho realizado pelo grupo é feito em constante diálogo com professores, órgãos públicos, escolas e organizações não governamentais.

A partir das orientações dos PCN e dos estudos realizados sobre Resolução de problemas algumas redes de ensino destacaram sua importância no currículo. A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo adotou no ano de 2010 um Currículo oficial para implantação em toda a rede, o documento Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias apresenta a resolução de problemas em aspecto muito geral, como certo meio de despertar o interesse do aluno, os elaboradores do currículo evidenciam a importância de propiciar a formulação de questões focalizando a exploração de conceitos matemáticos, as habilidades e competências a serem desenvolvidas no ensino da Matemática. (SÃO PAULO, 2010).

Um estudo recente que oferece um panorama das pesquisas voltadas para a Resolução de Problemas no Brasil foi feito por Justulin (2016), que realizou um mapeamento dos artigos sobre essa metodologia, examinando estudos publicados em cinco periódicos: Boletim GEPEM, BOLEMA, Educação Matemática em Revista, Educação Matemática em Pesquisa e ZÉTETIKÉ. O período de análise abrangeu desde o ano de criação dessas revistas até o ano de 2010.

Com base nos artigos pesquisados, a autora aponta sete focos de interesse nos estudos dessa metodologia:

1. o aluno (ou o solucionador de problemas);
2. o problema e suas características;
3. a história da matemática e a Resolução de Problemas;
4. teorias sobre Resolução de Problemas;
5. a Resolução de problemas e o processo ensino-aprendizagem: orientações didáticas;
6. o professor e a Resolução de Problemas;
7. a Resolução de Problemas e o uso de tecnologias ou equipamentos eletrônicos.

O primeiro foco apresenta o aluno como solucionador de problemas, voltando-se, para as estratégias utilizadas na resolução do problema, a análise do desempenho dos alunos nesse processo, os recursos metacognitivos envolvidos na solução de um problema, o processo de produção escrita pelos alunos, como eles interpretam o enunciado e como selecionam os dados para a solução do problema.

O segundo foco, voltado para o problema e suas características, destaca as pesquisas relacionadas à classificação dos diferentes tipos de problemas, ao processo de formulação de problemas e à interpretação dos enunciados.

O terceiro foco, correspondente à história da Matemática e a resolução de problemas, enfatizada a Matemática como construção humana e a Resolução de Problemas como necessidade do homem.

O quarto foco, teorias sobre resolução de problemas, aborda questões relativas a heurística, a metacognição, as ideias de Polya e a resolução de problemas entendida como atividade intelectualmente exigente.

O quinto foco descreve o processo de ensino-aprendizagem e as orientações didáticas e destaca a resolução de problemas como metodologia, o contrato didático, a modelagem matemática, além de orientações para o trabalho com Resolução de Problemas em sala.

O sexto foco contempla, de modo geral, a formação e as atividades dos professores relacionadas à Resolução de Problemas.

O sétimo foco temático trata do uso de tecnologias ou equipamentos eletrônicos como auxílio no processo de Resolução de Problemas.

Ao analisarmos os focos temáticos sobre Resolução de problemas, percebemos que o presente trabalho não contempla um dos focos específicos; ele perpassa por três deles, porém, tem maior ênfase no primeiro e no segundo foco.

Analisando o mapeamento realizado por Justulin (2016) verificamos que a resolução de problemas provenientes de diferentes contextos tem contribuído para o desenvolvimento da Matemática, evoluiu e continua a ser estudada por professores e pesquisadores.

2.2 A perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas

Partindo das diversas influências e concepções de Resolução de Problemas apontadas por alguns pesquisadores, no fim da década de 90 após uma pesquisa em ação realizada na rede municipal de ensino de São Paulo e em parceria com um grupo de professores e pesquisadores as autoras Smole e Diniz (2001) definem uma concepção de Resolução de Problemas como “todo ato de ensino e aprendizagem que vai além dos aspectos metodológicos, propiciando a aprendizagem significativa”. Essa concepção é intitulada por elas como perspectiva metodológica.

A escolha do termo “perspectiva” cuja uma das definições é “uma certa forma de ver”, corresponde a ampliar a visão de Resolução de Problemas conceituada como simples metodologia o conjunto de orientações didáticas (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 89).

Assim, para as autoras, na perspectiva metodológica, a Resolução de Problemas consiste na proposição e enfrentamento do que chamamos de situação-problema, que, sem solução imediata, exige que o aluno combine os conhecimentos adquiridos decidindo, assim, pela forma de usá-los em busca da resolução.

Essa ampliação apresenta três importantes características inovando o conceito de Resolução de Problemas porém, não descartando concepções anteriores.

A primeira característica é considerar como *problema* toda situação que permita alguma problematização envolvendo atividades que proporcionem o aspecto investigativo como, jogos, problemas de lógica e até mesmo os problemas tradicionais.

A segunda característica consiste em tomar como ponto de partida as duas ações previstas na resolução de problemas tradicionais: propor situações-problema e resolver as situações propostas. A essas, as autoras acrescentam mais duas: questionar as respostas obtidas e a própria situação inicial. Esse acréscimo ultrapassa a resolução de uma situação-problema restrita à compreensão do que é exigido, à aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e à obtenção da resposta correta, porque se propõe uma atitude de “investigação científica” com relação ao que está pronto (SMOLE; DINIZ, 2001).

Questionar as resoluções e a situação - problema em si exige um retorno à atividade realizada, analisando toda a situação e até mesmo o que o próprio aluno fez, incluindo-se aí processos metacognitivos, ou seja, pensar sobre o que pensou ou fez. Este pensar exige uma forma mais elaborada de raciocínio e está ligado à ideia de que aprender depende da possibilidade de se estabelecer o maior número possível de relações entre o que se sabe e o que se está aprendendo (SCHASTAI; PEDROSO, 2010).

A terceira característica é marcada pela não separação entre conteúdo e metodologia. As autoras afirmam que não há método de ensino em que não seja trabalhado um conteúdo e todo conteúdo está intimamente ligado a mais de um processo ou forma de abordagem.

Essa postura rompe a visão limitada de problemas tradicionais que as autoras intitulam como *problemas convencionais* e descrevem suas características (SMOLE; DINIZ, 2001):

- a) são apresentados por meio de frases, diagramas ou parágrafos curtos;
- b) vem sempre após a apresentação de determinado conteúdo;

- c) todos os dados de que o resolvidor precisa aparecem explicitamente no texto;
- d) podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos;
- e) têm como tarefa básica em sua resolução a identificação de que operações apropriadas para mostrar a solução e a transformação das informações do problema em linguagem matemática;
- f) é ponto fundamental a solução numericamente correta, a qual sempre existe e é única.

Cabe ressaltar que esses problemas convencionais podem ser explorados de modo que o aluno, para resolvê-los, utilize o processo de investigação.

Isso nos remete ao outro tipo de problema adequado à Perspectiva Metodológica: os *problemas não convencionais*. Segundo Stancanelli (2001), os problemas não convencionais são aqueles que:

- a) põem o aluno em contato com diferentes tipos de textos;
- b) não se ligam a um conteúdo específico;
- c) apresentam diferentes formas de resolução;
- d) são motivadores;
- e) possibilitam o uso de diferentes recursos de comunicação;
- f) favorecem o desenvolvimento de diferentes formas de pensar que vão além da aritmética;
- g) estimulam o raciocínio divergente, lógico e dedutivo;
- h) desenvolvem o protagonismo do aluno;
- i) desenvolvem o pensamento crítico.

A autora apresenta diferentes tipos de problemas não convencionais que rompem com a rigidez dos problemas convencionais e desenvolvem no aluno a atitude investigativa.

O primeiro deles é o problema sem solução, que rompe com a concepção de que todos os dados devem ser usados na resolução do problema e que ele tem necessariamente solução. Ele desenvolve a habilidade de aprender a duvidar (traço do pensamento crítico) e analisar os dados, o que envolve a interpretação.

O segundo é o problema com mais de uma solução, que rompe com três características constitutivas do problema convencional: todo problema tem uma única resposta, há sempre uma maneira certa de resolvê-lo e, quando há mais de uma solução, uma delas é a correta. Esse tipo de problema favorece o protagonismo, ou seja, para sua resolução, o aluno participa como ser pensante e produz seu próprio conhecimento.

O terceiro é o problema com excesso de dados, que rompe com a concepção de que todos os dados do texto são necessários para a solução. O interessante desse tipo de problema é que ele se aproxima de situações reais, já que os que se enfrentam no cotidiano trazem uma realidade complexa, difusa, com vários elementos. O aluno deve levantar, analisar e selecionar os dados pertinentes para a resolução do problemas, descartando os elementos supérfluos.

O quarto é o problema de lógica, que rompe com a aplicação de algoritmos e o modelo de resolução sempre de base numérica. Esse tipo de problema envolve o raciocínio dedutivo, além da leitura e interpretação do texto e desenvolve operações do pensamento como previsão e checagem, levantamento de hipóteses, análise e classificação.

A tipologia apresentada por Stancanelli (2001) não é exaustiva. O denominador comum desses tipos de problemas não convencionais é o rompimento com o estereótipo de problema matemático, cujas características são as apontadas para o problema aqui denominado de convencional. Além disso, esses tipos de problemas envolvem habilidades específicas que devem ser desenvolvidas para a aprendizagem pela Resolução de Problemas, entre elas a atitude investigativa, que englobam observação, análise, enfrentamento de desafios e busca de possíveis soluções.

Com esses estudos, percebemos que existem diversos tipos de problemas, sendo que uns são mais favoráveis à problematização do que outros, dependendo do foco. Assim, conhecendo-se o potencial de cada atividade ou de cada problema proposto, é possível encaminhar diferentes questionamentos em conformidade com os objetivos estabelecidos para a aula, transformando-se até mesmo os problemas convencionais em situações problematizadoras.

Diniz (2001, p. 100) exemplifica como propor um processo de investigação a partir de um problema convencional. Como proposta, a autora sugere estratégias como: alterar o problema, fazer perguntas a partir dele, propor outra forma de resolução.

O processo de formulação de problemas exige do aluno um retorno ao problema resolvido observando novamente os dados, a história e as relações envolvidas, a pergunta e sua relação com a resposta e as operações feitas. No processo de formular problemas, o aluno participa ativamente de um fazer em matemática que desenvolve sua linguagem, garante interesse e confiança em seu próprio modo de pensar, assim aproximando-se a língua materna e a matemática, permitem o desenvolvimento da linguagem específica (CHICA, 2001, p. 151).

As propostas de formulação de problemas devem ser muito bem planejadas, em decorrência de os alunos não estarem acostumados a criar, mas somente resolver problemas.

A fim de favorecer o desenvolvimento do processo de criação aos alunos, devem ser apresentados diferentes tipos de problemas para resolução antes de propor que eles criem seus próprios problemas. Uma possível proposta para criação é solicitar aos alunos que a partir de um início de problema, de uma tabela ou de uma figura, possam criar uma pergunta para ser respondida através da situação inicial.

A pergunta que evidencia a existência de um problema, direciona o raciocínio a ser realizado e a operação necessária, buscando uma estratégia a ser elaborada e a tomada de decisão.

Partindo da formulação da pergunta, Smole e Diniz (2001) propõem outras estratégias para criação do problema como, por exemplo, a formulação de problemas a partir de uma operação, a formular problemas a partir de um tema e a formular problemas com determinado tipo de texto. Em todas essas situações cabe ao professor, juntamente com seus alunos, verificar se os problemas estão adequados e realizar, se preciso, a reestruturação da escrita, porém, valorizando os problemas elaborados pelos alunos .

As autoras sugerem algumas formas para valorização dos problemas criados como:

- ✓ trocar problemas entre os alunos para que um resolva o do outro;
- ✓ montar uma folha com problemas formulados para resolver durante a semana ou mês;
- ✓ selecionar alguns problemas formulados e fazer correio entre classes da mesma série;
- ✓ fazer um livro de problemas da classe para ser impresso para todos;
- ✓ fazer um mural com os problemas mais interessantes escolhidos pela classe;
- ✓ organizar de uma problemateca.

Dentre as possibilidades apresentadas para valorização dos problemas criados, nessa pesquisa se desenvolve a criação de uma problemateca digital contendo a resposta em diferente arquivo, possibilitando autocorreção.

A proposta de Smole e Diniz, focalizada neste tópico remete a um campo de estudos que vem sendo explorado recentemente na educação matemática: resolução de problemas, formulação de problemas e criatividade em matemática.

2.2.1 A resolução e a formulação de problemas⁵

A atividade de resolver problemas está presente nos currículos de Matemática mundialmente desde a década de 80 e, no Brasil, a partir dos anos 90.

Nos estudos voltados ao tema, de maneira geral, a formulação de problemas é uma atividade que envolve a produção e reformulação de novos problemas além da elaboração de questões para explorar novas situações (SILVER, 1997; GONTIJO, 2006; SOUZA, 2016). O processo de formulação está intimamente associado à resolução de problemas podendo ocorrer antes, durante ou após este processo. Por exemplo, pode-se criar um problema espontaneamente para posteriormente pensar em sua solução ou pode-se reformular um problema a fim de tornar sua solução mais acessível. Assim, percebe-se que a formulação ou reformulação de problemas caminham juntas e estão interligadas e contribuem para a resolução (SILVER, 1997). A atividade de formulação de problema é proposta por diferentes pesquisadores como Silver (1997), Pinheiro (2013), Diniz (2001) sugerem atividades que envolvem a produção de um problema ou parte dele a partir do que denominam por *problema rotineiro* ou *problema convencional*, como, por exemplo, pedir que o aluno formule a questão a ser resolvida a partir de dados apresentados ou, a partir de uma questão dada, o aluno formula o contexto dos dados, ou a partir da exibição de uma imagem, construa um contexto dos dados.

Os processos de formulação e resolução de problemas contribuem para ampliação e desenvolvimento da criatividade em matemática, visto que eles favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico, da organização, da escrita e da leitura (MEDEIROS; SANTIAGO, 2013; GONTIJO, 2006).

Quando se fala em criatividade, é comum pensarmos nos grandes artistas ou naquelas pessoas com talentos excepcionais; no entanto, Silver (1994) e Pehkonen (1997) afirmam que a criatividade não é uma característica encontrada apenas em artistas, cientistas, pessoas talentosas ou superdotadas; ela pode ser desenvolvida em todas as pessoas através das mais variadas situações, notadamente, mas não exclusivamente, no ambiente escolar.

A criatividade pode ser considerada como a capacidade que uma pessoa apresenta na produção de algo novo, como, por exemplo, um problema matemático, em que estão em jogo a capacidade de comunicação e aplicação de novas ideias nas mais diversas situações (PEHKONEN, 1997; GONTIJO, 2007).

⁵ Neste tópico, a resolução de problemas é tomada como atividade de resolver problemas e não metodologia.

De acordo com Gontijo (2006) no Brasil encontramos poucos trabalhos que buscam investigar a criatividade matemática. O autor ressalta que, os Parâmetros Curriculares Nacionais, apesar de considerarem o desenvolvimento da criatividade como um dos objetivos do ensino de Matemática na educação básica não apresentam uma definição do que seja potencial criativo ou criatividade.

Especificamente quanto à matemática, o autor considera a criatividade como a capacidade ou habilidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma determinada situação problema, de modo que estas focalizem diferentes aspectos do problema e as diferentes formas de resolução.

A criatividade matemática é um tipo específico de criatividade, é essencial no desenvolvimento dos conceitos matemáticos e, por ser de grande importância precisa ser desenvolvida; mais do que isso deve ser um objetivo da educação matemática, uma vez que esta pode ser promovida a todos os alunos (LEIKIN, 2013; VALE, 2012; RIBEIRO, 2013).

Destacamos o processo de resolução e formulação de problemas como importantes estratégias a serem desenvolvidas nas aulas de matemática, a fim de promover a criatividade. Apresentamos alguns estudos que focalizam essa premissa.

Pinheiro (2013) enfatiza que a criatividade pode ser promovida por meio da utilização de problemas não rotineiros, ou seja, quando é oferecido ao aluno um vasto repertório de situações problemas que possibilitam a ampliação da sua capacidade de resolução. Essa estratégia se assemelha ao trabalho com problemas não convencionais proposta por Smole e Diniz (2001) no tópico anterior.

Silva (2013) destaca que, ao resolver e formular problemas, o aluno tem prioridades a serem desenvolvidas: uma delas é o raciocínio lógico partindo de caminhos construídos por eles; a outra é a criatividade. Para desenvolver essa estratégia em sala de aula, a autora sugere quatro etapas importantes: a primeira conta do planejamento inicial sobre o que se pretende realizar, a segunda é escrever da forma mais adequada revendo o que foi produzido, a terceira é a socialização do texto a um leitor e, por fim, a quarta etapa é revisar a escrita final.

Medeiros (2001) propõe outras possibilidades de trabalho com a formulação como, por exemplo, formular problemas a partir de um tema que envolva todos os alunos e que eles possam utilizar todos os conhecimentos em sua produção; formular problemas a partir de uma operação, números estabelecidos ou expressões; formular problemas com diferentes tipos de texto, aproximando a produção de problemas da língua materna, através da

criação de problemas que tenham certa estrutura textual, como um poema, ou problema com rima, uma charada ou um conto.

Este último estudo é particularmente interessante para nossa pesquisa, cujo foco é a resolução de problemas na inter-relação entre matemática e língua materna, próximo tópico deste capítulo.

2.3 Resolução de Problemas, Matemática e Língua Materna

Ao longo de toda a formação básica escolar, a Matemática e a Língua Materna na condição de disciplinas acadêmicas ocupam lugar de destaque tanto nos currículos quanto nas avaliações nacionais e internacionais. Apesar dessa longa convivência, essas disciplinas tradicionalmente não dialogam. Lorensatti (2009) aponta que, é comum separarmos as áreas do conhecimento, classificadas em “exatas” e “humanas” e, não raro, generalizarmos uma falácia: um aluno que é bom em matemática não é bom em língua portuguesa.

A autora afirma ser corrente ouvir alguns professores da disciplina de matemática atribuindo as dificuldades em resolver problemas matemáticos à falta de interpretação na língua portuguesa. Do mesmo modo, Oliveira (2007) aponta que geralmente se atribui grande parte da culpa do fracasso na realização das atividades matemáticas às limitações dos alunos quanto à leitura e interpretação. Essa perspectiva de análise do problema, comum entre educadores, prejudica a interação entre as disciplinas.

Nessa visão, Lorensatti (2009) destaca dois pontos que possivelmente atravancam esse diálogo. O primeiro, as práticas de sala de aula, apesar de solicitado aos professores o desenvolvimento da interdisciplinaridade, na maioria dos casos isso não ocorre, pois às práticas pedagógicas são individualizadas prejudicando interações e contextualizações, que favoreceriam ambas as disciplinas. O segundo ponto, o planejamento pedagógico, tem implicação sobre o primeiro: não é comum durante o planejamento pedagógico anual ou re-planejamento das escolas que se disponibilize um tempo para que os professores estabeleçam parcerias, pesquisem e planejem estratégias que oportunizem a aproximação dessas disciplinas.

Mediante o exposto, percebemos a necessidade de ampliarmos os estudos e adotarmos práticas de sala de aula que propiciem esse diálogo.

Oliveira (2007) afirma que, nos últimos tempos, diferentes pesquisadores que se dedicam a discutir e estudar o ensino e aprendizagem de Matemática buscam viabilizar esse diálogo.

Estudos como os de Machado (2011), Menezes (1999), Smole e Diniz (2001), Lorensatti (2009) entre outros, evidenciam possibilidades de diálogo entre as disciplinas.

Machado (2011) investiga a possibilidade de se ensinar Matemática, desde as séries iniciais, a partir de uma mediação intrínseca da língua materna, partindo do pressuposto de que há uma impregnação mútua entre ambas. Desse modo, postula uma participação efetiva da língua materna no ensino da Matemática. Ele ressalta que essa participação vai para além da leitura dos enunciados; ela contribui para a construção de conceitos, a formação das estruturas lógicas de argumentação e a construção da linguagem matemática. As duas disciplinas constituem elementos fundamentais e complementares que possibilitam condição do conhecimento em qualquer setor, mas que não são plenamente compreendidas quando considerados isoladamente (MACHADO, 2011, p. 83).

Machado (2011) relaciona essa integração entre as disciplinas, com o fato de que a linguagem matemática, como linguagem científica, não possui oralidade própria estando voltada a língua materna.

Portanto, para a construção e o desenvolvimento da linguagem matemática, é essencial que o diálogo efetivo com a língua materna ocorra.

Nesse sentido, Menezes (2000) aponta que é por meio da língua materna e de forma natural que a criança aprende a falar e se comunicar desde tenra idade, já a linguagem matemática é híbrida, pois resulta do cruzamento da linguagem matemática com uma linguagem natural; é construída e necessita da língua materna nesse processo de construção e desenvolvimento. O autor acrescenta ainda, que é especificamente na escola que se aprende a usar linguagem matemática.

Smole e Diniz (2001) propõem uma integração entre a matemática e a língua materna, sugerem diversas atividades que propiciam essa interação e favorecem o desenvolvimento da linguagem matemática na prática pedagógica, afirmam que, organizar o trabalho de modo a garantir essa aproximação, além de ser uma proposta interdisciplinar favorece a valorização de diferentes habilidades.

Lorensatti (2009) define a linguagem matemática como um sistema simbólico, com símbolos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. Para a autora, a compreensão e apropriação desse conhecimento são essenciais para o processo de construção do conhecimento matemático. Granell⁶ (2003 apud LORENSATTI, 2009) destaca que está

⁶ GRANELL, C. G. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana (Org.). Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 2003.

compreendido na linguagem matemática um processo de “tradução” da língua natural para termos específicos dessa disciplina, ou seja, sugere uma transposição didática dos enunciados dos problemas matemáticos apresentados na língua materna para a linguagem matemática.

Nessa perspectiva, Pozo (1998) afirma que para resolver um problema matemático é necessário compreender o texto do enunciado; essa tarefa requer antecipadamente uma compreensão dos elementos presentes na linguagem envolvida, ou seja, requer uma convergência entre as linguagens.

Os autores citados até o momento apontam que, a intersecção nas linguagens propicia o desenvolvimento da linguagem matemática, propõem que a aproximação entre as disciplinas ocorram sempre que possível.

Para Lorensatti (2009), essa intersecção não é uma tarefa tão simples, pois, na língua materna, o sentido atribuído às palavras é muito amplo, podendo muitas vezes tomar significados distintos.

Nesse sentido, Fonseca e Cardoso (2005) complementam afirmando que na interação dos alunos com textos matemáticos alguns obstáculos podem surgir devido ao vocabulário diferenciado e a ambiguidade dos significados, como, por exemplo: *total*, *diferença*, *volume*, entre outros, termos que, na matemática, possuem um sentido e no cotidiano, outro.

Do mesmo modo, Moreira (2001) relata não ser raro que crianças ao ouvirem a palavra *produto* relacionem a produtos de lojas ou supermercados e, diante da palavra *operação*, pensem em hospitais e operação cirúrgica.

Diante do exposto, constatamos que, para compreendermos a linguagem matemática, é necessário conhecer seus símbolos, suas palavras e a maneira como eles se combinam para expressarem significados, ou seja, conhecer suas características próprias, uma vez que a compreensão dessas contribui para o ensino e aprendizagem de matemática.

A fim de contribuir com a construção e ampliação da linguagem matemática, ampliar o diálogo entre as disciplinas e favorecer o processo de resolução de problemas, alguns autores propõem estratégias que propiciam essa construção. Desses, destacamos os estudos de Moreira (2001), Carrasco (2001), Smole e Diniz (2001), Fonseca e Cardoso (2005), Oliveira (2007).

Carrasco (2001) propõe duas soluções para desenvolver a leitura e a escrita nas aulas de matemática: escrever em língua natural os resultados matemáticos e auxiliar os alunos na utilização das ferramentas de leitura para que elas compreendam os significados dos

símbolos. O autor acrescenta ainda que é necessário o desenvolvimento de estratégias de leitura específicas da atividade matemática escolar.

Moreira (2001) realça a importância de utilizarmos diferentes tipos de textos matemáticos pelo fato de apresentarem diferentes linguagens; destaca também a importância de variarmos os materiais didáticos, as técnicas e as formas de comunicação nas aulas como, por exemplo, discussões coletivas e argumentação, ou seja, diversificarmos os recursos e as práticas didáticas.

Da mesma forma, Smole e Diniz (2001) sugerem o uso de diferentes tipos de problemas, denominados problemas convencionais e não convencionais, como vimos no tópico anterior. Esses tipos de problemas, principalmente os não convencionais, envolvem diversos tipos de textos, como, por exemplo, poemas, cartas, receitas, notícia de jornal; estes possibilitam o desenvolvimento das diferentes formas de comunicação, do raciocínio lógico, do protagonismo e do pensamento crítico, além de favorecerem o uso das estratégias de leitura.

Fonseca e Cardoso (2005) apontam que, a leitura nas aulas de matemática pode ser considerada como uma prática de ensino eficaz, pois, a leitura de diferentes tipos de textos, além de favorecer a constituição de significados dos conteúdos matemáticos, colaboram não somente para a construção de sentido na própria Matemática como desenvolvem a habilidade leitora.

Oliveira (2007) salienta ainda, que não somente a leitura, mas a produção de problemas, as definições, a descrição de procedimentos, entre outros, merecem investigações e ações pedagógicas específicas.

Da mesma forma, Medeiros (2010) aponta que a formulação de problemas a partir de diferentes tipos de textos, pode proporcionar ações de reflexões que contribuem para o desenvolvimento da criatividade.

Além do trabalho com problemas convencionais e não convencionais propostos aos alunos pelo professor, Smole e Diniz (2001) destacam o processo de formulação de problemas ou de partes de problemas, afirmando que essa atividade propicia aos alunos o desenvolvimento de vários processos cognitivos e metacognitivos, que serão discutidos no próximo capítulo.

Assim, finalizamos destacando que é de extrema importância a ampliação e divulgação de estudos nessa área por parte dos pesquisadores e professores, a fim de contribuir para a melhoria do ensino de matemática.

3 ASPECTOS COGNITIVOS NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, trataremos dos processos cognitivos e metacognitivos, procurando apresentar os diversos estudos existentes, sua aplicação na escola e mais especificamente na aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas.

3.1 Processos Cognitivos e metacognição

Ferraz e Belhot (2010) definem os processos cognitivos como o meio pelo qual o conhecimento é adquirido ou construído e usado para resolver tanto problemas diários quanto eventuais.

As autoras apontam que o estudo dos processos cognitivos no âmbito educacional iniciou-se sob a liderança de Benjamin S. Bloom, que, com a colaboração de outros educadores, buscou classificar as metas e os objetivos educacionais a fim de desenvolver um sistema de classificação para os três domínios: o cognitivo, o afetivo e o psicomotor. Dessa classificação, originou-se, em relação ao domínio cognitivo, a taxonomia de Bloom.

A ideia principal da taxonomia é organizar os objetivos educacionais numa hierarquia do mais simples ao mais complexo, ou seja, estruturar em níveis de complexidade crescente. Assim, para atingir uma habilidade pertencente ao próximo nível é necessário ter o domínio da habilidade do nível anterior.

São descritos cuidadosamente pela taxonomia dos objetivos educacionais de Bloom seis níveis do domínio cognitivo que são:

- ✓ Conhecimento
- ✓ Compreensão
- ✓ Aplicação
- ✓ Análise
- ✓ Síntese
- ✓ Avaliação

As autoras afirmam que muitos trabalhos originaram-se a partir da primeira divulgação da taxonomia dos objetivos educacionais de Bloom, porém com as novas tecnologias incorporadas ao âmbito educacional, observou-se a necessidade de uma reavaliação. Então, no ano de 2001, a convite da Associação de Psicologia Americana, um grupo de especialistas supervisionados por David Krathwoh elaboraram um relatório de revisão da taxonomia de Bloom, que foi publicado no ano de 2001 em um livro intitulado “A *taxono-*

my for learning, teaching and assessing: a revision of bloom's taxonomia for educational objectives".

Desta revisão, algumas alterações foram destacadas, Gualhardi e Azevedo (2013) apontam em seus estudos as principais mudanças nas dimensões do conhecimento e do processo cognitivo. Na dimensão do conhecimento foram incorporadas as subcategorias da categoria da taxonomia original. Já na dimensão dos processos cognitivos foram contempladas as cinco categorias da taxonomia original, entretanto foram renomeadas.

A categoria Conhecimento tornou-se Lembrar; Compreensão passou a ser Entender; Aplicação, Análise e Avaliação tornaram-se respectivamente Aplicar, Analisar e Avaliar; Síntese tornou-se Criar passando a ser a categoria mais alta da hierarquia.

Percebemos, que a taxonomia dos objetivos educacionais de Bloom, tanto em sua versão original quanto revisada, muito contribuiu com a educação de modo geral e, mas especificamente com os professores e pesquisadores que buscam diferentes meios para incentivar seus alunos. Dentre os diversos estudos que apresentam uma revisão da taxonomia dos objetivos educacionais de Bloom, destacamos o trabalho de Mayer (2002).

O autor apresenta uma revisão da taxonomia de Bloom, detalhando os processos cognitivos e a importância destes no âmbito educacional. Sua revisão matem os seis níveis do domínio cognitivo da taxonomia original, porém, são apresentadas duas categorias para classificação dos níveis: a retenção e a transferência.

Segundo o autor, a retenção tem foco no passado, isto é, nas lembranças; a transferência tem ênfase no futuro, ou seja, quando nos deparamos com uma nova situação e colocamos o conteúdo apreendido em prática.

São apresentados os dezenove processos cognitivos divididos em seis níveis, dos quais, duas pertencem à retenção e dezessete à transferência; o autor descreve esses processos cognitivos exemplificando-os por meio de diferentes situações.

A categoria retenção é definida como o que recordamos, ou seja, o que lembramos sobre um determinado assunto, fatos, datas, teorias, métodos, classificações, regras, critérios e procedimentos em geral, é composta pelo processo cognitivo lembrar que por sua vez, se compõe dos processos reconhecer e recuperar, conforme Figura 3.

Figura 3 – Categoria do processo cognitivo retenção

Fonte: Autora

O reconhecer é definido como busca ou localização de informações e situações na memória, o autor exemplifica que esse processo ocorre quando uma pessoa é capaz, por exemplo, de localizar um determinado país no mapa. Já o recuperar é buscar informação em contextos já vivenciados, por exemplo, através do título de um poema conhecido pelo aluno ele pode recuperar o assunto e até mesmo o autor.

A transferência é a habilidade de usar o que foi apreendido para resolver novos problemas ou situações, Mayer (2002), evidencia que o processo de transferência só ocorre quando este é antecedido pela retenção. Nela estão contidos os dezessete processos cognitivos divididos em cinco categorias que são: entender, aplicar, analisar, avaliar e criar. Para o desenvolvimento dessas categorias são utilizadas as habilidades adquiridas em cada processo imediatamente anterior. O Quadro 1 apresenta os cinco processos cognitivos e suas respectivas habilidades.

Quadro 1 – Categorias das habilidades que desenvolvem a transferência

Categorias	Entender	Aplicar	Analisar	Avaliar	Criar
Habilidades	Interpretar	Executar	Diferenciar	Checar	Gerar
	Exemplificar	Implementar	Organizar		Planejar
	Classificar		Atribuir		Construir
	Resumir				
	Inferir				
	Comparar				
	Explicar				

Fonte: Mayer, 2002 (Adaptado).

O primeiro nível da categoria transferência é o entender, que corresponde a compreensão de informações para utilizá-las em outro contexto, ou seja, quando conseguimos realizar novamente um comando ou atividade proposta. A realização deste processo desen-

volve as seguintes habilidades: interpretar, exemplificar, classificar, resumir, inferir, comparar e explicar.

Aplicar, o segundo nível, é a prática de alguns procedimentos conhecidos. Nesta categoria estão descritos o executar, que é realizar uma atividade já conhecida, e implementá-la, inclui o uso do conhecimento prévio para realizar uma tarefa desconhecida.

O terceiro nível, analisar, envolve o entendimento por partes, para saber como essas partes chegam ao todo. Quando realizamos este processo também conseguimos diferenciar, organizar e atribuir.

O quarto nível, avaliar, é definido como tomar um julgamento de acordo com algum critério ou padrão, julgar o valor do conhecimento. Compõe este processo, o checar, que é definido por habilidade de verificar possíveis inconsistências.

Por fim, o quinto nível, criar, definido por formar um novo elemento partindo de diferentes elementos e agrupamentos, envolve gerar, planejar e produzir. Quando criamos, dispomos de vários elementos para formar um novo elemento, inventar alternativas, planejar para construir. Para atingir o nível criar é necessário que os níveis anteriores sejam desenvolvidos.

O desenvolvimento e ampliação dos processos cognitivos tanto os da categoria retenção quanto os da transferência, têm um importante papel na aprendizagem, pois, para desenvolver esses processos cognitivos se faz necessário o uso de estratégias de aprendizagem desde as mais simples até as mais específicas.

O uso das estratégias de aprendizagem é fundamental, pois, exige do indivíduo a capacidade de reflexão sobre seus próprios processos mentais. Por esse motivo, o interesse pelo estudo das estratégias na aprendizagem intensificou-se com a apresentação de uma nova área de investigação na psicologia denominada metacognição.

Nos diversos estudos existentes sobre metacognição, diferentes autores apontam o psicólogo americano John Hurley Flavell como primeiro a referenciar o termo, no artigo *“First discussant’s comments: what is memory development the development of?”* publicado em 1971. Fundamentando-se nos estudos sobre memória, Flavell, evidenciou a relação até aquele momento não explorada, entre o funcionamento da memória e o conhecimento que se tem sobre os processos de memorização (RIBEIRO, 2003; ROSA, 2011, LOCATELLI, 2014).

Partindo dos estudos de Flavell, diversos teóricos elaboraram diferentes conceitos sobre o que é metacognição. Em relação a isso, parece ainda não haver consenso, de acordo com Ribeiro (2003), uma das causas dessa discussão sobre a conceituação deve-se ao fato da

utilização de diferentes termos para descrever o mesmo fenômeno (auto-regulação, controle executivo e metamemória). Embora esses estudos apresentem diferenças com relação à definição, existe um ponto de convergência: ambos relacionam o papel dos processos executivos na supervisão ou regulação dos processos cognitivos.

Nos estudos voltados ao domínio educacional são apresentadas duas formas principais de entendimento da metacognição: o conhecimento sobre o conhecimento e o controle ou auto-regulação (RIBEIRO, 2003). A primeira forma envolve a consciência dos processos necessários ao se realizar uma tarefa; a segunda compreende a avaliação da execução de uma tarefa e suas correções quando necessárias e envolve o controle da atividade cognitiva.

A metacognição possui dois componentes principais: o primeiro denomina-se conhecimento metacognitivo, e o segundo, monitoramento e autorregulação cognitiva (RIBEIRO, 2003; PUPIN, 2009; LOCATELLI, 2014). O primeiro domínio refere-se ao conhecimento que um indivíduo tem de si, de outras pessoas e do resultado de suas ações. Esse conhecimento divide-se em três categorias: o conhecimento sobre pessoas, tarefas e estratégias, conforme Figura 4.

Figura 4 – Categorias do conhecimento metacognitivo

Fonte: Locatelli (2014) Adaptado

Na categoria conhecimento metacognitivo sobre pessoas, Locatelli (2014) apresenta três subcategorias: conhecimento universal, interindividual e intraindividual. O conhecimento universal diz respeito aos conhecimentos mais gerais sobre o que é comum a todas as pessoas. O conhecimento interindividual envolve outras pessoas num processo comparativo, como, por exemplo, numa situação em que alguém sabe que um colega tem desempe-

nho melhor numa avaliação. O conhecimento intraindividual consiste no conhecimento que uma pessoa tem de si mesma, como, por exemplo, numa situação em que ela estima seu desempenho em diferentes atividades, como numa prova.

Na segunda categoria, que se refere aos conhecimentos sobre tarefas, Locatelli (2014) evidencia que esses conhecimentos dizem respeito à consciência que temos de que uma tarefa é mais difícil do que a outra como, por exemplo, ter a consciência de que ler um texto em inglês consumirá tempo maior do que ler um em português.

E por fim, a terceira categoria das estratégias, Locatelli (2014) de conformidade com Pupin (2009) afirma que esta se refere aos meios e estratégias que uma pessoa encontra para realizar uma determinada tarefa, decidir *como* e *por que* utilizar uma estratégia e não outra. As autoras apontam que o conhecimento cognitivo é composto pela interação entre duas ou três dessas categorias e que o processo de aquisição do conhecimento cognitivo é gradativo e lento.

Ainda sobre o conhecimento metacognitivo, Ribeiro (2003) apresenta três subcategorias: o declarativo, o procedimental e condicional, conforme Figura 5

Figura 5 – Subcategorias do conhecimento metacognitivo

Fonte: Ribeiro (2003) Adaptado

Para a autora, o conhecimento declarativo é a consciência que uma pessoa tem sobre o que ela sabe; o executivo é o conhecimento de como realizar uma determinada tarefa; e o condicional é o conhecimento de quando utilizar uma estratégia específica, ou seja, saber selecionar a melhor estratégia de acordo com a condição em que a tarefa é realizada. A autora afirma ainda que o desenvolvimento desses conhecimentos acontece de forma gradual: num primeiro nível somente o conhecimento declarativo e, posteriormente, o executivo e condicional.

O segundo domínio metacognitivo corresponde ao monitoramento e autorregulação, que se referem às ações conscientes que ocorrem antes, durante e depois da realização de uma tarefa, como por exemplo, reler o texto para melhorar a compreensão (RIBEIRO, 2003; PUPIN, 2013; LOCATELLI, 2014).

Sobre o monitoramento e a autorregulação, Locatelli (2014) afirma que essas atividades se desenvolvem simultaneamente ao conhecimento metacognitivo. Para a autora, é importante distinguir o que se sabe do que não se sabe, pois quando essa distinção é realizada torna-se possível avançar nos estudos, tomar decisões necessárias para avançar, avaliar o que se aprendeu, selecionar as estratégias mais eficientes e, por fim, ser capaz de planejar. Desta forma, esse monitoramento básico é a base da pirâmide hierárquica da metacognição sugerida por Tobias e Everson (2002,) conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Modelo hierárquico metacognitivo

Fonte: Tobias e Everson (2002)

Com relação ao desenvolvimento do monitoramento dos processos cognitivos Locatelli (2014) e Ribeiro (2003) apontam que este ocorre com a ação e interação de pelo menos quatro classes de fenômenos: o conhecimento metacognitivo, as experiências metacognitivas, os objetivos ou tarefas e as ações ou estratégias. Essas classes estão inter-relacionadas e são referentes à cognição ou outros comportamentos para alcançar o monitoramento.

O conhecimento metacognitivo como já apresentado define-se como conhecimento que uma pessoa possui sobre si mesma e sobre as variáveis da pessoa, da tarefa e da estratégia, e como essas influenciam seus processos cognitivos.

As experiências metacognitivas, consistem em percepções conscientes que podem ocorrer antes, durante e depois da tarefa realizada e pode ser experienciada em situações em que ocorre uma dificuldade ou falta de compreensão.

Os objetivos ou tarefas referem-se ao processo cognitivo, e as ações ou estratégias referem-se às estratégias utilizadas para potencializar e avaliar o processo cognitivo. As estratégias podem ser cognitivas ou metacognitivas elas se diferenciam do seguinte modo: enquanto as estratégias cognitivas fazem com que os processos cognitivos ocorram, as estratégias metacognitivas são para avaliá-los.

Com tudo isso, percebemos que a metacognição pode oportunizar uma alternativa aos estudantes na busca pela autonomia e ampliação do conhecimento. Sendo assim, investir em estratégias de ensino que considerem o desenvolvimento da metacognição torna-se muito importante no processo de aprendizagem .

3.2 Metacognição e aprendizagem de Matemática

Os estudos realizados sobre metacognição voltados à educação indicam que o desenvolvimento e a aprendizagem da metacognição não ocorrem de modo natural. Por isso, se faz necessária uma intervenção pedagógica; além de explicitar o pensamento metacognitivo, deve-se viabilizá-lo através de estratégias de ensino-aprendizagem que conduzam o aluno a esse desenvolvimento (LEITE; DARSIE, 2011).

No ambiente escolar, as atividades metacognitivas podem tanto promover o desenvolvimento da própria cognição do estudante, quanto levá-lo a refletir sobre o conhecimento de seus próprios processos cognitivos a fim de que ele desenvolva sua autonomia intelectual e monitore as suas atividades cognitivas (LEITE; DARSIE, 2011).

Em sala de aula, atividades de ensino que se utilizam da metacognição são aquelas em que os estudantes são estimulados a refletir sobre os modos pelos quais executam uma determinada tarefa ou resolvem uma dada situação-problema, de forma que durante a atividade aconteça uma constante interação entre o aluno e a situação, e entre o aluno e seus próprios processos cognitivos. Nesse caso, a tomada de consciência de “como pensei para realizar a atividade” é algo intrínseco ao processo de aprendizagem.

Nesse cenário, a aprendizagem mecânica não tem espaço ou a aprendizagem é consciente ou não há aprendizagem significativa, ou seja, quando utilizamos a metacognição na aprendizagem, envolvemos o uso de estratégias que favorecem a transposição de conhecimento a novas situações.

Estudos como os de Chahon (2006), Pupin (2009), Leite e Darsie (2011), Locatelli (2014) apontam que há uma relação entre a aplicação de atividades metacognitivas e a melhora do desempenho dos alunos.

A metacognição pode ser utilizada nas diversas áreas da aprendizagem, em especial, na disciplina de matemática e em seus conteúdos, como resolução de problemas, nos cálculos mentais e nas operações aritméticas, pois, as estratégias metacognitivas levam o aluno a refletir sobre a forma como resolve uma dada situação problema, estimulando o aprender a aprender (CHAHON, 2006; PUPIN, 2009; LEITE; DARSIE, 2011).

Em resolução de problemas, alguns estudos apresentam quatro processos metacognitivos fundamentais para resolução: identificar o problema; representar mentalmente o problema; planejar como proceder e avaliar o próprio desempenho. Esses processos em alguns aspectos se aproximam das etapas para resolução de problemas proposto por Polya (1995) apresentadas no capítulo anterior.

Assim, com base nos estudos de Davis, Nunes e Nunes (2005), Ribeiro (2003), Locatelli (2014), adotamos o conceito de que a metacognição é o conhecimento que cada um tem de seus próprios processos e produtos cognitivos e envolve monitoramento ativo e consequente regulação e reflexão desses processos em relação à cognição.

4 A PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a metodologia da pesquisa, conduzida da perspectiva da abordagem qualitativa. Para isso, apresentamos uma caracterização da escola, os sujeitos envolvidos e as atividades desenvolvidas.

4.1 Caracterização da escola

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública estadual no município de Tremembé, no interior de São Paulo.

No período de realização da pesquisa, a escola possuía 477 alunos, sendo 315 no período integral e 162 no período noturno.

A escola está localizada no centro da cidade e recebe alunos da rede municipal e estadual de ensino de Tremembé e de localidades pertencentes ao município de Taubaté e Pindamonhangaba, situadas nos limites da cidade.

Segundo o Plano de Ação⁷ da escola, os alunos do 1º série do Ensino Médio chegam com defasagem na aprendizagem em Língua Portuguesa e Matemática. A maior defasagem se encontra, respectivamente, na leitura e interpretação de texto e no conhecimento de operações básicas. Esse quadro mostra a necessidade de nivelamento nas habilidades não adquiridas nos anos anteriores do Ensino Fundamental II. Esse nivelamento se estende por todos os bimestres dos três anos do Ensino Médio, incidindo sempre sobre as habilidades não desenvolvidas no bimestre anterior. As informações sobre defasagem em uma ou outra habilidade são retiradas da Plataforma Foco Aprendizagem (cf. Figura 2, p.16), que apresenta o desempenho dos alunos na Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP).

4.2 Sujeitos da Pesquisa

Participam da pesquisa três turmas da 2ª série do Ensino Médio, cujos alunos se encontram na faixa etária entre 15 (quinze) e 18 (dezoito) anos. A Tabela 1 apresenta o número e alunos envolvidos.

⁷ O Plano de Ação, instrumento tradicionalmente utilizado pelas unidades escolares, estabelece as prioridades, metas, indicadores de aferição de resultados, responsáveis, prazos e as estratégias para que as escolas alcancem o ensino de qualidade. (SÃO PAULO, s.d.) Entre outras informações, o documento apresenta descrição e diagnóstico da unidade escolar.

Tabela 1 – Número dos sujeitos da pesquisa

TURMA	NÚMERO DE ALUNOS
2º B	26
2º C	29
2º D	28

Fonte: Autora

Como forma de identificação dos sujeitos da pesquisa, utilizamos uma letra referente a cada turma e acrescentamos a ela o número de chamada do aluno.

4.3 Metodologia

Como a metodologia foi aplicada semanalmente nas aulas de nivelamento, as atividades voltaram-se para as habilidades trabalhadas no bimestre anterior durante as aulas regulares, já que o nivelamento é um recurso para recuperar as habilidades em que os alunos apresentaram defasagens, identificadas a partir da Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP) aplicada no final de cada bimestre.

Os resultados da AAP, registrados na Secretaria Escolar Digital (SED), são migrados para a **Plataforma Foco Aprendizagem**, que apresenta o desempenho individual e as habilidades em que os alunos apresentaram dificuldades de aprendizagem.

Partindo desse diagnóstico, durante seis meses, foram definidas atividades utilizando-se a Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas. As atividades foram planejadas de acordo com as diferentes possibilidades de resolver e elaborar problemas, sem perder de vista o desenvolvimento de processos cognitivos e metacognitivos.

Com exceção da primeira fase, em que os alunos foram submetidos a um teste diagnóstico individualmente, nas outras atividades, eles foram divididos em grupos de cinco ou seis componentes, de acordo com um critério de heterogeneidade a fim de favorecer a aprendizagem por meio da mediação e interação. Assim, a seleção dos membros dos grupos foi feita de acordo com o desempenho na Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP) de modo a formar grupos de alunos que alcançaram os melhores e os piores resultados. No entanto, no 2º B e 2º D, para superar diferenças individuais de convivência, um aluno foi remanejado de um grupo para outro, o que, no entanto, não comprometeu significativamente o critério adotado.

As turmas foram organizadas como segue:

- a) 2º B: 5 grupos;
- b) 2º C: 6 grupo;
- c) 2º D: 6 grupos;

A referência aos grupos neste trabalho é feita pela identificação da turma seguida de números de 1 a 6 (2B1, 2C1, 2D1...).

Para a coleta dos dados, utilizaram-se os seguintes instrumentos:

- ✓ Diário de campo da professora-pesquisadora, em que foram registradas as observações realizadas durante as atividades;
- ✓ Produções escritas dos alunos geradas nas atividades desenvolvidas.

4.3.1 Descrição Geral

As atividades foram organizadas em três fases, em que as habilidades envolvidas nos problemas consistiam naquelas em que os alunos apresentaram defasagem no bimestre anterior, na disciplina Matemática, segundo a AAP, como apontado anteriormente. (Quadro 2). O processo foi desenvolvido de maio a dezembro de 2016.

Quadro 2 – Atividades planejadas para resolução e elaboração de problemas

	ATIVIDADES		CONTEÚDO
1ª Fase	Aplicação de teste diagnóstico para identificação da familiaridade do aluno com a resolução de problemas de diversos tipos (Apêndice A) e verificação do processo de raciocínio na resolução dos problemas e sua verbalização		Área de figuras planas
2ª Fase	Aplicação de atividades de resolução de problemas com uso da Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas	Resolução de Problemas convencionais e não convencionais (Apêndice B)	Trigonometria
		Formulação de problemas e partes de problemas (Apêndice C)	Matrizes

continua

			conclusão
	ATIVIDADES		CONTEÚDO
3ª Fase	Criação de problemas matemáticos	Elaboração de um problema-conto	Gênero discursivo
		<ul style="list-style-type: none"> • Estudo do conto “<i>Bruxas não existem</i>” (ANEXO B) • Retomada dos conteúdos de análise combinatória e probabilidade. • Apresentação do conto “<i>os 35 Camelos</i>” de Malba Tahan: análise linguística e matemática (Apêndice D) • Apresentação de um problema-conto para resolução (Apêndice E) • Resolução do problema-conto (adaptado) “<i>O roubo incidentes das meias verdes</i>” de Ian Stewart (Apêndice F) • Redação de um problema-conto • Avaliação do problema-conto pelos alunos e professoras. (Apêndice H) 	Probabilidade e análise combinatória Gênero discursivo e Divisão Análise combinatória Análise combinatória Probabilidade e Análise combinatória Gênero discursivo conto
4ª Fase	Edição de uma problemateca digital		

Fonte: Autora

4.3.2 Descrição detalhada

1ª Fase (2 aulas)

Antes da aplicação do teste, foi realizada uma conversa com os alunos das três séries envolvidas na pesquisa, para esclarecer como se desenvolveriam as atividades e sua importância para o processo de aprendizagem.

A avaliação diagnóstica, realizada individualmente sem qualquer auxílio da professora-pesquisadora, foi composta por cinco questões, elaboradas de acordo com diferentes tipos de problemas matemáticos, conforme apontam Smole e Diniz (2001): problemas convencionais (questões 1 e 2), problemas não convencionais – sem solução, com mais de

uma solução e de lógica (questões 3, 4 e 5, respectivamente). As questões 1 e 5 solicitavam que o aluno registrasse o processo cognitivo utilizado para a resolução do problema, com o objetivo de iniciá-lo em reflexões de ordem metacognitiva (Apêndice A).

Os problemas envolveram as seguintes habilidades (Quadro 3).

Quadro 3 – Conteúdo e habilidades focalizadas na avaliação diagnóstica

CONTEÚDO	HABILIDADES
ÁREA DE FIGURAS PLANAS	Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.
	Resolver problemas que envolvam o cálculo de área de figuras planas.
	Aplicar as propriedades fundamentais dos polígonos regulares em problemas de pavimentação de superfícies.
	Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares.

Fonte: SÃO PAULO (2010)

Após correção, a professora-pesquisadora devolveu as avaliações aos alunos, explicando e discutindo coletivamente cada questão.

2ª Fase (8 aulas)

A segunda fase focalizou as habilidades relativas à Trigonometria (Quadro 4).

Quadro 4 – Habilidades relativas a trigonometria desenvolvidas nas atividades de nivelamento 1, 2, 3 e 4 durante o 2º bimestre

CONTEÚDO	HABILIDADES
TRIGONOMETRIA	Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas.
	Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos, e aplicá-las em diversos contextos.
	Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a \sin(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = \sin x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.
	Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos.
	Resolver operações com arcos envolvendo adição e subtração em situações-problema.

Fonte: SÃO PAULO (2010)

Essa fase foi desenvolvida em duas etapas: 1. resolução de problemas convencionais e não convencionais e 2. elaboração de problemas e parte de problemas.

Primeira etapa: Resolução de problemas convencionais e não convencionais

Nessa etapa, composta por cinco atividades intituladas **ATIVIDADES DE NIVELAMENTO** trabalhou-se com a resolução de problemas convencionais e não convencionais. O objetivo foi familiarizar os alunos com esses dois tipos de problemas.

Os problemas convencionais (Apêndice B – Atividades de Nivelamento 1) foram formulados com frases curtas e dados explícitos e sua resolução exigia a aplicação de um único algoritmo (substituição do valor do radiano por graus); além disso, pressupunham uma única resposta numérica.

Os problemas não convencionais (Apêndice B – Atividades de Nivelamento 2, 3 e 4) envolveram problemas com excesso de dados, com mais de uma solução, sem solução e com diferentes formas de resolução.

A passagem da resolução de um tipo de problema para outro foi feita com a proposta de diferentes redações para um mesmo problema, levando o aluno a perceber que uma mesma habilidade pode ser exigida para a resolução de problemas estruturados de maneiras variadas. Um exemplo foi dado com a habilidade “*identificar a relação entre uma medida angular em graus e em radiano*” exigida para uma questão de múltipla escolha e uma discursiva.

A quinta atividade de nivelamento consistiu na retomada da atividade envolvendo problemas com excesso de dados com objetivo explorar estratégias leitoras: levantamento de vocabulário, grifo nas principais informações e compartilhamento de leitura. Para isso, os alunos destacaram as informações que eram irrelevantes para a resolução do problema, circularam as palavras desconhecidas e identificaram a pergunta do problema, elaborada de forma direta ou indireta.

Para elaboração dessa atividade, foi utilizado o conjunto de sugestões feitas por Smole e Diniz (2001), que tem por objetivo aprimorar a aprendizagem a partir da leitura em matemática e as quatro modalidades básicas da leitura compartilhada (SOLÉ, 1998).

Projetando o primeiro problema no quadro, a professora realizou os seguintes questionamentos:

Do que trata o problema?

Há alguma palavra desconhecida?

Qual a pergunta?

Esse problema poderia ser reescrito?

Em seguida solicitou que os alunos seguissem o mesmo procedimento para os demais problemas.

Ao final de cada uma das cinco atividades de nivelamento, a professora-pesquisadora recolheu as folhas com os registros e realizou a correção coletiva oralmente, registrando no quadro a resposta de cada grupo; a seguir, solicitou que um aluno de cada grupo explicasse como a questão foi resolvida.

Segunda etapa: Elaboração de problemas e partes de problemas

A segunda etapa foi composta de três atividades (Apêndice C), que envolveram a elaboração de problemas e de partes dele de acordo com a Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas, base teórica desta pesquisa. As atividades voltaram-se para as habilidades referentes ao conteúdo de Matrizes (Quadro 5). O objetivo da atividade foi introduzir o aluno no processo de formulação do problema, que alia matemática e língua materna e envolve, sobretudo, o processo cognitivo de criar. Nesse processo, o aluno desenvolve simultaneamente à habilidade de formular problemas e a de resolver problemas.

Quadro 5– Habilidades relativas a matrizes desenvolvidas nas atividades de nivelamento durante o 3º Bimestre

CONTEÚDO	HABILIDADES
MATRIZES	Expressar algebricamente uma matriz
	Identificar a matriz que representa uma situação-problema
	Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares
	Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente

Fonte: SÃO PAULO (2010)

Na primeira atividade, os alunos criaram uma pergunta a partir de uma questão da AAP, da qual a pergunta original foi omitida. A professora-pesquisadora projetou no quadro o problema solicitando que cada grupo modificasse alterando a estrutura da pergunta

ou criasse uma nova questão. Essa atividade teve por objetivo iniciar os alunos no processo de criação de problemas, visto que na primeira atividade eles não conseguiram alterar o problema proposto.

Na segunda atividade, os alunos criaram um problema a partir de uma imagem. Para tanto, a professora-pesquisadora, primeiramente projetou a imagem da Figura 7 e exemplificou oralmente, registrando no quadro, o seguinte problema possível:

Um grupo de cientistas descobriu uma nova constelação e gostaria de representá-la na forma de uma matriz. Na imagem, o desenho representa a constelação. Usando os retângulos, represente a matriz de decodificação.

Então, solicitou que os alunos realizassem a atividade partindo daquela imagem ou de outra imagem escolhida por eles. Essa atividade teve por finalidade proporcionar a elaboração e discussão de diversas ideias relativas à formulação e resolução de problemas.

Figura 7 – Imagem usada na formulação de um exemplo de problema

Fonte: Autora

Na terceira atividade, os alunos criaram um problema a partir de uma pergunta. Utilizando do conceito de Matrizes, a professora-pesquisadora apresentou uma pergunta solicitou os alunos que elaborassem os problemas. Objetivou-se com essa atividade evidenciar a importância da pergunta em um problema, uma vez que ela direciona o raciocínio, a operação conveniente, a tomada de decisão e a busca por uma estratégia a ser elaborada (CHICA, 2001).

Ressalta-se que os alunos poderiam consultar tanto o livro didático quanto o *caderno do aluno*.

3ª Fase (15 aulas)

A terceira fase foi composta por sete atividades realizadas semanalmente nas aulas de Matemática e Língua Portuguesa, objetivando a criação de problemas matemáticos na forma de conto, gênero discursivo estudado durante o 4º bimestre, visto que formular problemas com determinado tipo de texto é uma forma de aproximar a criação de problemas com a língua materna. As habilidades envolvidas em conteúdos de Matemática e Língua Portuguesa encontram-se nos Quadros 6 e 7, respectivamente.

Quadro 6 – Habilidades relativas à probabilidade e análise combinatória desenvolvidas nas atividades de nivelamento durante o 4º bimestre

Conteúdo	Habilidades em Matemática
Probabilidade Análise combinatória	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e /ou combinações.
	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.

Fonte: SÃO PAULO (2010)

Quadro 7 – Habilidades relativas a gêneros discursivos desenvolvidas nas atividades de nivelamento durante o 4º bimestre

Conteúdo	Habilidades em Língua Portuguesa
Gênero discursivo conto	Demonstrar domínio da norma padrão
	Identificar a finalidade do gênero
	Identificar os elementos organizacionais e estruturais do conto.

Fonte: SÃO PAULO (2010)

A primeira atividade foi desenvolvida durante as aulas de Língua Portuguesa com a apresentação de um conto curto de Moacyr Scliar intitulado *Bruxas não existem* (Anexo B). A professora de língua materna entregou uma cópia do conto para cada grupo, realizou a leitura coletiva com o objetivo de explorar os elementos que compõe o gênero discursivo conto.

A segunda atividade realizou-se na aula de Matemática, tendo por objetivo retomar com os alunos os conteúdos de Probabilidade e Análise combinatória. Para tanto, a professora utilizou o material enviado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo constante do *Caderno do Aluno*, que focalizava os seguintes tópicos:

- a. Probabilidade: eventos – Levantamento de possíveis eventos que envolvem o cálculo da probabilidade (espaço amostral, eventos, porcentagem, proporcionalidade).
- b. Análise combinatória: eventos – Levantamento de possíveis eventos que envolvem análise combinatória (combinação, permutação, fatorial).

A terceira atividade constou da apresentação do conto *Onde é narrada a singular aventura dos 35 camelos que deveriam ser repartidos por três árabes. Beremiz Samir efetua uma divisão que parecia impossível, contentando plenamente os três querelantes. O lucro inesperado que obtivemos com a transação*, de Malba Tahan. (Apêndice D) A professora-pesquisadora e a professora de língua materna realizaram a leitura, a identificação dos elementos do conto, e análise do problema matemático seguido de sua resolução. A atividade transcorreu simultaneamente com apenas uma turma; para as demais, elas foram realizadas em aulas distintas.

A quarta atividade contemplou a apresentação e resolução de um problema-conto criado pela professora-pesquisadora que explorava o conceito de probabilidade. (Apêndice E). Cada grupo recebeu uma folha contendo o problema e um espaço para resolução, em que registrou todas as operações utilizadas para a resolução do problema. A professora realizou a leitura coletiva e solicitou que os alunos resolvessem a situação proposta, estabelecendo um período de 15 minutos para essa tarefa. Para finalizar essa atividade, a professora-pesquisadora projetou no quadro o encerramento do conto com a solução do problema.

Na quinta atividade, foi apresentado um problema-conto (adaptado) intitulado *O roubo incidente das meias verdes*, de Ian Stewart (Apêndice F) Cada grupo recebeu o conto impresso e realizou a leitura. Os alunos foram orientados a grifar os dados mais importantes do problema e a resolvê-lo. Além disso, eles registraram a forma como pensaram para realizar a tarefa. Como fechamento da atividade, a professora-pesquisadora realizou a correção coletivamente.

Na sexta atividade, a proposta aos alunos foi a elaboração de um problema-conto em grupo. Essa atividade se desenvolveu em três etapas, durante as aulas de Língua Portuguesa e Matemática.

Na primeira etapa, solicitou-se que os alunos pesquisassem e selecionassem um problema convencional relacionado ao conteúdo de probabilidade e análise combinatória. Para a realização dessa atividade, foram utilizados um *net book* e o livro didático *Matemática e suas aplicações*, de Luiz Roberto Dante. Os alunos realizaram a digitação do problema selecionado em documento do Word.

Percebendo-se a necessidade do uso de uma ferramenta de compartilhamento a fim de facilitar o acesso às produções dos alunos tanto pela professora-pesquisadora quanto pela professora de língua materna, optou-se pelo uso aplicativo de armazenamento do *Google*, intitulado *Google Drive*. Assim, os documentos criados pelos alunos foram compartilhados com ambas as professoras.

Na segunda etapa, realizou-se o planejamento para elaboração de um conto, integrando o problema matemático selecionado. No entanto, esse problema pôde ser alterado para adaptar-se à criação da história. Nessa atividade em grupos, os alunos delinearam as coordenadas do conto respondendo aos seguintes questionamentos:

- a) Personagens: Quantas? Quais? Caracterização?
- b) Onde?
- c) Quando?
- d) Qual é o conflito?
- e) Como o problema matemático resolve o conflito?

Após realizarem o delineamento do conto, os arquivos eram compartilhados com as professoras, utilizando-se o *Documento* do *Google Drive*.

Foram disponibilizadas duas aulas de Língua Portuguesa e de Matemática para redação e edição do conto. Durante o processo, as professoras realizaram intervenções online e nos grupos. Essas intervenções consistiram em sugestões de adequação da linguagem e da superestrutura do conto.

A sétima atividade proposta foi a análise do problema-conto conforme quadro avaliativo (Apêndice H). Para isso, foi compartilhado com os alunos um quadro avaliativo contendo um campo para análise do grupo e análise do professor. Depois de preenchidos, os quadros foram compartilhados novamente com as professoras, que analisaram o material.

Os contos foram analisados de acordo com os seguintes critérios:

1. O conto mostra entendimento da proposta: integração entre matemática e a língua materna.
2. O problema matemático está integrado ao enredo de forma objetiva e clara.
3. São apresentadas as características do conto.
4. A resolução do problema matemático é necessária para resolução do conflito.

Após análise, os problemas-conto foram organizados em três grupos: os que atendem os critérios, os que atendem parcialmente e os que não atendem.

Os que se adequaram aos critérios, foram editados e organizados em uma problemateca.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesse capítulo, apresentam-se os resultados e a discussão elaborados a partir da análise de cada atividade desenvolvida.

5.1 Análise da primeira fase

Durante a aplicação observou-se que a maioria dos alunos realizou uma única leitura do teste; porém, alguns não conseguiram responder a contento, escolhendo aleatoriamente uma resposta sem mesmo realizar uma nova leitura. Esse procedimento comprometeu os registros das questões 1 e 5, nas quais os alunos deveriam expressar, em língua materna, como pensaram para resolver aquele problema.

A tabulação dos dados relativa à porcentagem de acertos encontra-se na Tabela 2.

Tabela 2 – Desempenho dos alunos das três turmas no teste diagnóstico em percentual de acerto

TIPOS DE PROBLEMAS	% de acertos		
	2º B	2º C	2º D
Problema convencional	26,9	0	21,4
Problema com excesso de dados	30,7	0	39,6
Problemas sem solução	23,8	10,4	3,6
Problema com mais de uma solução	15,4	5,2	7,14
Problemas de lógica	7,7	4,2	3,6

Fonte: Autora

Os resultados e os registros do diário de campo da professora-pesquisadora mostram que houve falta de empenho na realização da tarefa, já que muitos responderam aleatoriamente sem se atentar aos dados principais, o que evidência a falta de estratégia de leitura especificamente para ler problemas matemáticos. Os dados sugerem que o tipo de problema não altera substancialmente o resultado.

Quanto ao registro da forma como os problemas foram resolvidos, apenas 46,6% responderam à questão 1. No entanto, analisando-se os registros, observa-se que apenas 11,8% alcançaram uma explicação que permite identificar alguns passos para a resolução do problema. As Figuras 7, 8 e 9 mostram, respectivamente, uma explicação que revela certa compreensão do tópico, a compreensão parcial e outra não.

Figura 8 – Questão 1: Registro da aluna D26

Para esta transformação podemos afirmar que:

- a) O perímetro de B se manteve o mesmo de A e os ângulos internos correspondentes dobraram de valor.
- b) O perímetro de B passou a ser o triplo do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- ☒ c) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- d) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes também dobraram de valor.

Descreva abaixo como você pensou para apontar uma das alternativas.

O perímetro é o mesmo e todo lado da figura A é de 4 quadrados e da B é de 8 quadrados, consequentemente o perímetro dobra e o formato não muda, assim os ângulos também não.

Fonte: Autora

Para descrever a forma como pensou para escolher a alternativa (c), a aluna D 26 considera as informações mais relevantes do problema, conta os quadrículos e percebe que a medida do lado da figura A foi dobrado na figura B, ela observou que os ângulos internos não se alteram.

Figura 9 – Questão 1: registro da aluna D 04

Para esta transformação podemos afirmar que:

- a) O perímetro de B se manteve o mesmo de A e os ângulos internos correspondentes dobraram de valor.
- b) O perímetro de B passou a ser o triplo do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- c) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- ☒ d) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes também dobraram de valor.

Descreva abaixo como você pensou para apontar uma das alternativas.

observando a figura, até mesmo contando os quadrados dentro

Fonte: Autora

Neste exemplo, a aluna D04 registra que para resolução do problema ela somou os quadrículos usando a malha como balizador e escolheu a alternativa (d); no entanto, apesar de realizar esse processo, a aluna não se atentou a um dado importante do problema, que é a medida dos ângulos, provavelmente aplicando o mesmo raciocínio relativo ao cálculo do perímetro das figuras.

Figura 10 – Questão 1: Registro da aluna C24

Para esta transformação podemos afirmar que:

- ☒ a) O perímetro de B se manteve o mesmo de A e os ângulos internos correspondentes dobraram de valor.
- b) O perímetro de B passou a ser o triplo do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- c) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- d) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes também dobraram de valor.

Descreva abaixo como você pensou para apontar uma das alternativas.

As figuras A e B são iguais a diferença entre as duas é que os ângulos internos dobraram de valor e aumentou o tamanho.

Fonte: Autora

A aluna C24 da 2ªC, descrevendo a forma como pensou para escolher a alternativa (a), utiliza uma paráfrase, não explicitando o raciocínio que a levou à resposta e, sobretudo, demonstrando desconhecer os conceitos rudimentares da geometria.

De modo geral, a maioria dos alunos não consideraram os dados mais relevantes do problema para auxiliar na resolução.

Quanto ao registro da forma como os problemas foram resolvidos, com relação à questão 5 apenas 5% responderam registrando os passos ou procedimentos utilizados na resolução.

As Figuras 11 e 12 apresentam, respectivamente, uma explicação que mostra certa compreensão da questão e outra não.

Figura 11– Questão 5 resolução da aluna D 26

As hipotenusas de quatro triângulos retângulos isósceles coincidem com os lados de um quadrado, de cor branca, como indica a figura a seguir.

$$4 \times 2 = \frac{8}{4}$$

$$a = 4$$

$$\begin{array}{r} \times 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

Se os lados desse quadrado medem 4 cm, a soma das áreas dos triângulos coloridos é igual a:

Descreva como você pensou para realizar a atividade.

*A soma das áreas dos triângulos são de 16 cm
de ou altura (h) corresponde a metade da base do triângulo
h = 2 então a área é de 4 vezes os 4 triângulos 16.*

Fonte: Autora

Figura 12 – Questão 5 resolução da aluna B02

- 5) As hipotenusas de quatro triângulos retângulos isósceles coincidem com os lados de um quadrado, de cor branca, como indica a figura a seguir.

Se os lados desse quadrado medem 4 cm, a soma das áreas dos triângulos coloridos é igual a:

Descreva como você pensou para realizar a atividade.

R: 48

Eu tomei os lados do quadrado e multipliquei por 4 para achar a área dos triângulos.

Fonte: Autora

Analisando os registros, verifica-se que a aluna D26 descreve como realizou a atividade, primeiro determinou a altura do triângulo em seguida calculou a área de um triângulo e ao final multiplicou o valor obtido por quatro, pois esta é quantidade de triângulos da figura. Na Figura 11, observa-se que a aluna consegue descrever a sequência das operações realizadas, no entanto, a solução encontrada não está correta.

Cabe ressaltar que nenhum dos alunos das três turmas observou que esta questão pode ser resolvida utilizando inicialmente o raciocínio lógico, como por exemplo, fechar os triângulos para formar um quadrado e, em seguida, calculando a área do quadrado que resume-se na multiplicação da medida do lado por ele mesmo.

5.2 Análise da segunda fase

5.2.1 Primeira etapa: Resolução de problemas convencionais e não convencionais

Os resultados das Atividades de Nivelamento 1, envolvendo problemas convencionais encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas convencionais (Atividade de Nivelamento 1)

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
2º B	60%	60%	40%	10%
2º C	66,6%	66,6%	50%	33,3%
2º D	50%	66,6%	50%	33,3%

Fonte: Autora

Os resultados dessa primeira atividade mostram que, embora individualmente tenham apresentado um desempenho abaixo da média na AAP quanto às habilidades 1. *identificar a relação entre uma medida angular em graus e em radiano* e 2. *resolver operações com arcos envolvendo adição e subtração em situações-problemas*, os alunos apresentaram melhor desempenho quando a atividade foi realizada em grupo. Analisando as porcentagem de acerto das questões 1, 2 e 3 verificou-se que, em todas as turmas, mais da metade dos alunos conseguiu realizar a atividade da maneira correta. Um dos possíveis fatores constitui o fato de que os alunos estão mais acostumados com os problemas convencionais em que os principais dados para resolução estão explícitos. Já na questão 4 verificou-se que os alunos ainda não dominam a habilidade 2.

Observou-se nessa atividade que o trabalho em grupo favoreceu o processo de resolução de problemas, pois, os alunos que não realizavam a leitura e nem o registro individualmente, quando dispostos em grupo, interagiam resolvendo a atividade.

Na passagem para as atividades de nivelamento envolvendo problemas não convencionais, realizada pela variação na formulação de um mesmo problema, verificou-se que os grupos não conseguiram realizar a tarefa. Esse resultado aponta para a falta de atividades em sala de aula que favoreçam o processo criação e resolução de problemas.

Os resultados das Atividades de Nivelamento 2, envolvendo problemas não convencionais encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas não convencionais (Atividades de Nivelamento 2)

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
2º B	100%	100%	20%	100%
2º C	66,6%	66,6%	50%	33,3%
2º D	50%	66,6%	50%	33,3%

Fonte: Autora

Os resultados mostram que, nas três turmas, os alunos apresentaram desempenho satisfatório na habilidade *de identificar o arco correspondente a um radiano*. No entanto, no momento de correção coletiva da primeira questão, observou-se que com exceção de dois grupos, todos indicavam a medida de um radiano no início do ciclo trigonométrico, não explorando as demais possibilidades.

Na segunda questão, 12 grupos indicaram a resposta correta como sendo o ângulo de 30 graus; os demais apontaram que esse problema poderia ter mais de uma solução, por exemplo: o aluno B21 integrante do grupo 2B3 durante a correção coletiva apresentou a

resposta sendo o ângulo de 30 graus e imediatamente a aluna B26 relatou que seu grupo, ao realizar a atividade, observou que havia mais de uma resposta possível e indicou também o ângulo de 150 graus como solução.

Em relação à questão três, dois grupos da 2ªB, dois do 2ªC e um do 2D apresentaram mais de uma resposta; os demais indicaram apenas o ângulo de 45° como solução.

Na questão quatro, observou-se que apenas um grupo das três turmas coloriu todas as figuras respondendo acertadamente; porém, no momento de correção coletiva a aluna B10 do grupo 2B4, ao demonstrar a solução, disse: *São todos iguais só estão mudando de lado*, mas no registro coloriu somente a quarta figura da questão. Os demais grupos igualmente indicaram a quarta figura como solução. Um possível motivo para a escolha deve-se ao fato de que esta figura indica a medida de um radiano iniciando do ângulo zero quando relacionada ao ciclo trigonométrico.

Da análise dessa atividade, ressalta-se que os alunos não estão acostumados a trabalhar com problemas que apresentam mais do que uma solução, buscando sempre encontrar uma única resposta.

Os resultados das Atividades de Nivelamento 3, envolvendo problemas não convencionais, encontram-se na Tabela 5.

Tabela 5 – Porcentagem de acerto na resolução de problemas não convencionais (Atividade de Nivelamento 3)

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
2º B	100%	60%	60%	60%
2º C	50,0%	66,6%	33,3%	50,0%
2º D	33,3%	66,6%	50%	50%

Fonte: Autora

Nessas atividades, que apresentavam problemas com excesso de dados, objetivou-se evidenciar a importância da seleção dos dados para a resolução do problema.

Os registros do diário de campo mostram que alguns alunos apresentavam dificuldade em localizar, no enunciado do problema, o que estava sendo solicitado, ou seja, a pergunta do problema, o que pode ser verificado na fala de alguns alunos: “não entendi nada o que é para fazer” ou “professora, o que tem que fazer na questão 3?” Ante o questionamento, a professora-pesquisadora projetou o círculo trigonométrico no quadro e propôs que os alunos o relacionassem à questão, criando o contexto para norteá-los no processo de solução. Quanto aos resultados das Atividades de Nivelamento 4, envolvendo problemas sem solução, constatou-se que apenas um grupo de cada classe conseguiu interpretar

os enunciados e apontar a impossibilidade de solucioná-los. Os outros grupos insistiram em encontrar estratégias para solucionar o problema, partindo do pressuposto de que todo problema tem solução e deve apresentar uma única resposta. A adoção desse pressuposto como ponto de partida inquestionável para a realização da tarefa pode impedir que o aluno desenvolva o pensamento crítico, bloqueando uma atitude inquiridora e questionadora.

Para finalizar a atividade, a professora-pesquisadora perguntou aos alunos se seria possível alterar os problemas para que houvesse uma solução. Alguns deles responderam que sim e que, para isso, poderiam ser alteradas as perguntas, os dados numéricos ou até mesmo as alternativas.

Na Atividade de Nivelamento 5, como os problemas já eram conhecidos, os resultados mostraram que os alunos conseguiram realizar todas as tarefas. Alguns comentaram que o procedimento de grifo já era utilizado durante as aulas de Orientação de estudo e Pesquisa, mas que eles ainda não haviam utilizado nas aulas de Matemática. Isso aponta a necessidade de exploração, com mais frequência, das estratégias de leitura durante o processo de resolução de problemas.

5.2.2 Segunda etapa: Formulação de problemas e partes de problemas

Na atividade de criar uma pergunta a partir de um problema (Apêndice C), os alunos fizeram a leitura da questão utilizando as estratégias estudadas na primeira fase e realizavam a tarefa proposta com mais empenho.

Todos os grupos das três séries concluíram a atividade de formulação de problemas. Contudo, analisando-se os registros, percebe-se poucas variações de perguntas em relação ao problema apresentado. A Figura 13 apresenta o registro do grupo 2B4.

Figura 13– Registro da atividade de nivelamento do grupo 2D4

HAB: Expressar algebricamente uma matriz

① A representação de uma matriz E é dada pela expressão $E = (e_{ij})_{2 \times 2}$. Os elementos e_{ij} de E são expressos algebricamente por $e_{ij} = i^2 - 2j$. Qual das alternativas corresponde a matriz?

(A) $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (D) $E = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Fonte: Registro do grupo 2B4

Analisando o registro desse grupo, observou-se que os alunos formularam uma pergunta diferente direcionando para a resposta. Nos demais grupos ocorreram algumas reformulações. Diversos fatores podem ter contribuído para esse resultado. O primeiro deles é o fato de delimitarmos a habilidade a ser desenvolvida, se o problema apresentado não se voltasse apenas a uma habilidade específica ele ampliaria a possibilidade de variedades de perguntas. Assim, avaliando-se que a atividade proposta não apresentava grandes contribuições principalmente no momento de correção coletiva, foi alterada a estratégia para a próxima atividade.

Na segunda atividade, *criando um problema a partir de uma imagem* considerando os registros colhidos e o diário de campo, verificou-se que de todas as turmas, todos os grupos conseguiram realizar a atividade criando um problema referente ao conteúdo de matrizes exceto dois grupos que apresentaram um conteúdo aleatório.

As Figuras 14 e 15 apresentam respectivamente, exemplos de problemas formulados com o conteúdo de matrizes e com outro conteúdo.

Figura 14 – Criando problema a partir de uma imagem registro do grupo 2C3

Fonte: Registro do grupo 2C3

Figura 15 – Criando problema a partir de uma imagem registro do grupo 2B4

Fonte: Registro do grupo 2B4

Analisando a Figura 14 observou-se que os alunos criam o problema utilizando a imagem de uma estrela e para resolvê-lo é necessário aplicar a matriz de decodificação.

Observando a Figura 15 averiguou-se que o grupo não utilizou o conteúdo matrizes conforme solicitado, eles utilizaram o cálculo da soma de um determinado percurso para calcular distância total a ser percorrida, no entanto, no momento de correção coletiva, assim que perceberam o equívoco tentaram reformular o problema acrescentando uma matriz de decodificação da imagem que já possuíam, destaca-se que a decodificação está incompleta.

De modo geral, nessa segunda atividade, os alunos apresentaram um avanço em relação à primeira, já que aproximadamente 88% realizaram a proposta corretamente.

Na atividade de criar um problema a partir de uma pergunta, verificou-se que, em todas as turmas, a maioria dos grupos partiu de problemas já conhecidos alterando apenas algumas palavras ou dados. Nas Figuras 16 e 17 são apresentados respectivamente, um problema que consta no material fornecido pela SEE intitulado *caderno do aluno* e a formulação do problema do grupo 2D5.

Figura 16 – Questão 3 da Situação de Aprendizagem 5 Caderno do aluno vol. 1

3. No Campeonato baiano da terceira divisão, após cinco rodadas, foram obtidos os seguintes resultados pelas cinco equipes participantes:

Equipe	Vitória	Empate	Derrota
Barro Vermelho	3	2	0
Carranca	2	1	2
Veneza	2	0	3
Colonial	1	1	3
Olaria	1	0	4

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Calcule quantos pontos cada time conquistou até agora e represente os resultados em uma matriz de ordem 5×1 .

Fonte: SÃO PAULO-SEE, 2014.

Figura 17– Criando problema a partir de uma pergunta registro do grupo 2D5

represente a matriz em relação as tabelas abaixo indicando os pontos de cada time, levando em conta as vitórias, empates e derrotas.

Empate	10
Vitória	50
Derrota	5

	V	D	
São Paulo	1	10	2
Santos	2	12	5
Botafogo	4	5	3

$$\begin{pmatrix} 10 + 500 + 10 \\ 20 + 600 + 25 \\ 40 + 250 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 645 \\ 305 \end{pmatrix} //$$

Fonte: Registro do grupo 2D5

Considerando as Figuras 16 e 17 observa-se que o grupo 2D5 utilizou a questão 3 do *caderno do aluno* como referência para elaboração do problema, comparando as figuras percebe-se que ambas as questões apresentam em sua estrutura semelhante, assunto relacionado ao esporte, tabelas contendo o nome dos times e valores distintos para cada um dos seguintes eventos: empate, vitória ou derrota.

Analisando a produção dos demais grupos, observa-se de modo geral que a estrutura similar ao problema apresentado na Figura 16 foi mantida, alterando-se apenas algumas informações do texto e das tabelas, como por exemplo, a modalidade do esporte e os valores. Um dos possíveis fatores pode ter contribuído para essa ação deve-se a própria pergunta do problema (Figura 16) que direciona para a formação de uma matriz, considerando que os alunos não haviam vivenciado até o momento práticas pedagógicas que favorecessem o processo de criação, eles partiram de um problema conhecido que apresentava essa estrutura. Ressalta-se que dois dos grupos não realizaram a atividade

Em suma, a prática dessas atividades que possibilitavam a construção de problemas ou de parte dele favoreceu o desenvolvimento do processo de criação contribuindo significativamente com a formulação do problema-conto, foco da terceira fase dessa pesquisa.

5.3 Análise da terceira fase

A professora de língua materna relatou que durante a primeira atividade (Anexo D) nas três turmas os alunos realizaram a tarefa proposta e a maioria respondeu corretamente, identificando os principais elementos organizacionais do conto.

A segunda atividade foi realizada na aula de Matemática, em que a professora-pesquisadora retomou os conceitos de probabilidade e análise combinatória, utilizando atividades do material *Caderno do aluno 2º série do Ensino médio volume 2*, fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Durante essa atividade, verificou-se que, tanto no momento de explicação dos tópicos quanto na correção coletiva dos exercícios, os alunos demonstraram um nível maior de retenção em relação à fórmula da probabilidade, definição de evento e de espaço amostral. Observou-se também que eles utilizaram estratégias propostas em outras atividades desta sequência didática, como por exemplo, selecionar utilizando o grifo os elementos mais importantes.

Quanto à terceira atividade, os registros mostraram que, na turma em que a atividade foi realizada em parceria, os alunos identificaram com maior facilidade tanto o problema matemático, quanto os elementos do conto. Além disso, na turma do 2ºC eles relataram que o conto era interessante e curioso, porém, não conheciam algumas palavras nele apresentado, nessa situação, a professora de língua materna propôs uma pesquisa, a fim de ampliar o vocabulário.

Os resultados da quarta atividade, relativa à resolução do problema-conto criado pela professora-pesquisadora (Apêndice F) são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Desempenho dos grupos de alunos das três turmas na resolução do problema-conto criado pela professora-pesquisadora em percentual de acerto

Turmas	% de acerto
2º B	75%
2º C	80%
2º D	80%

Fonte: Autora

Analisando os dados apresentados na tabela percebe-se que grande parte dos alunos atingiu os objetivos propostos: reconheceram o problema matemático integrado ao conto, lembraram o conceito matemático e transferiram esse conhecimento para a nova situação, solucionando corretamente o problema. No momento de correção coletiva, os alunos discutiam e compararam tanto o resultado, quanto o processo utilizado para solução. Em uma das turmas, os alunos apresentaram sugestões para o desfecho.

Na quinta atividade, em que os alunos leram e resolveram o problema matemático do conto *O roubo incidente das meias verdes*, houve 80% de acerto, média das três turmas. Além disso, o registro dos procedimentos utilizados para a resolução do problema apontou um avanço no automonitoramento do conhecimento. A Figura 18 apresenta o registro do grupo 2C3.

Figura 18 – Registro da resolução do problema conto adaptado do grupo 2C3

Pensamos em distribuir as cores e peças de roupas para cada suspeito

	Calça	Palito	meias
Rictor	V	B/m	B/m
Blanc	B	V/m	V/m
Marcos	m	V/B	V/B

Percebemos que Rictor já tem calças ^{verdes} ~~verdes~~, com isso, não pode usar meias verdes

Rictor usa ~~palito~~ branco, e não usa meias verdes, então

Rictor usa: Palito: branco
meias: marrom
calça: verde

Descobrimos ~~que~~ que Blanc é o ladrão, pois é o único dos suspeitos que usa meia ~~verde~~

Fonte: Registro do grupo 2C3

Considerando os registros apresentados, verifica-se que os alunos integrantes do grupo 2C3 conseguem descrever as etapas utilizadas para solução do problema e a estratégia utilizada durante a resolução. Ressalta-se que esses mesmos alunos na realização do teste inicial escolhiam aleatoriamente uma resposta, agora apresentam registros, assim também os que já registravam aprimoraram a prática.

Considerando os registros do diário de campo da professora-pesquisadora destaca-se a afirmação dos alunos quanto ao problema-conto adaptado, eles disseram ser interessante e curioso, fator que pode ter contribuído com para motivação e empenho no processo de resolução.

Na sexta atividade, quanto à seleção do problema sobre probabilidade ou análise combinatória, os alunos não apresentaram dificuldades, demonstrando, inclusive, autonomia e iniciativa para selecionar contextos que se relacionassem com outras disciplinas. Exemplo disso, foi a seleção de problemas que tratavam de genética, tópico que estava sendo estudado na disciplina de Biologia.

Quanto à criação do conto e a inserção do problema selecionado, os alunos mostraram certa dificuldade. Em alguns casos, não conseguiram uma articulação coerente e substituíram o problema por outro.

Alguns alunos relataram que não estavam conseguindo realizar a atividade proposta, pois, essa prática era muito diferente das vivenciadas por eles durante as aulas de matemática. Apesar disso, todos os grupos criaram um problema-conto, porém, alguns não correspondem aos critérios estabelecidos.

Cabe ressaltar que, as orientações realizadas tanto pela professora-pesquisadora quanto pela professora de língua materna, não foram aplicadas em alguns grupos.

O Quadro 8 apresenta o título e dos problemas-conto criado em cada série.

Quadro 8 – Títulos dos problemas-conto produzidos por série

TURMAS		TÍTULO
2º B	1	O tão esperado dia
	2	A Herança
	3	Quem é ele?
	4	Os filhos
	5	Quem é o pai?
2º C	1	O cientista
	2	Mudança de endereço
	3	O mago e o dragão
	4	Improbabilidade póstuma
	5	A crise do ano e os ovos de páscoa
	6	O celular perdido em uma tempestade
2º D	1	Caso 205
	2	O sorteio da caminhonete
	3	O grande desafio
	4	Vitória mais que provável
	5	Resultado surpreendente
	6	O sequestro de Sebastian

Fonte: Autora

Quanto ao compartilhamento das atividades, observa-se que o Google Drive foi um facilitador, ambas as professoras tinham acesso às produções e conseguiam fazer intervenções tanto nos grupos, quanto on-line digitando as sugestões para correções.

5.3.1 Análise dos Problemas-conto produzidos

Os problemas-conto criados pelos grupos das três turmas foram classificados em três categorias: os que atendem aos critérios estabelecidos, os que atendem parcialmente e os que não atendem. O Quadro 9 apresenta uma síntese da análise realizada.

Quadro 9 – Síntese da análise dos Problemas-conto

TURMAS	TÍTULO	CRITÉRIOS			
		Integração entre matemática e língua materna	Integração do problema ao enredo de forma objetiva e clara	Presença das características do conto	Integração entre o problema matemático e a resolução do conflito
2B	O tão esperado dia	parcialmente	parcialmente	parcialmente	sim
	A Herança	parcialmente	parcialmente	parcialmente	não
	Quem é ele?	não	não	parcialmente	não
	Os filhos	não	não	não	não
	Quem é o pai?	parcialmente	parcialmente	parcialmente	parcialmente
2C	O cientista	parcialmente	não	parcialmente	parcialmente
	Mudança de endereço	parcialmente	não	parcialmente	parcialmente
	O mago e o dragão	sim	parcialmente	sim	sim
	Improbabilidade póstuma	sim	sim	sim	Sim
	A crise do ano e os ovos de páscoa	sim	parcialmente	parcialmente	parcialmente
	O celular perdido em uma tempestade	parcialmente	parcialmente	parcialmente	parcialmente
2D	Caso 205	sim	sim	sim	sim
	O sorteio da caminhonete	parcialmente	parcialmente	sim	parcialmente
	O grande desafio	sim	sim	sim	sim
	Vitória mais que provável	sim	sim	sim	sim
	Resultado surpreendente	sim	sim	sim	sim
	O sequestro de Sebastian	parcialmente	parcialmente	parcialmente	parcialmente

Fonte: Autora

Analisando os problemas-conto, verificou-se que todos os grupos apresentaram um problema matemático em sua estrutura, porém, dois deles não contemplaram o conteúdo proposto para a atividade: análise combinatória e probabilidade.

De modo geral, os problemas-conto apresentam inicialmente o problema matemático e ao final sua resolução solucionando o conflito. No entanto, o problema matemático apresentado em alguns dos problemas-conto não se constitui a intriga do conto, então o desfecho não depende necessariamente da solução do problema, nesse caso considerou-se

que a integração entre o problema matemático e a língua materna foi contemplada parcialmente. Em dois dos problemas-conto além de o problema matemático não contemplar o conteúdo proposto na comanda da atividade, a integração do problema matemático ao enredo precisa ser aperfeiçoada.

Destaca-se que, sete dos problemas-conto produzidos atingiram o objetivo proposto analisando as produções verificou-se que eles apresentam a integração tanto entre o problema matemático e a língua materna quanto ao enredo de forma clara, são apresentadas as características do conto e o problema matemático resolve o conflito do conto. Um dos fatores que pode ter contribuído para o bom desempenho foi a auto avaliação realizada pelos integrantes do grupo com o auxílio do quadro avaliativo, quando eles respondiam as questões, voltavam ao texto realizando as alterações necessárias.

Os demais grupos quando realizavam a auto avaliação respondiam as questões propostas e mesmo considerando que algum item precisaria ser melhorado, eles não retomavam o problema-conto realizando as alterações.

Investigando os fatores que conduziram para que alguns grupos não obtivessem desempenho satisfatório nessa terceira fase, destaca-se a falta de atividades que desenvolvessem a formulação ou a reformulação de problemas nas aulas de matemática. A integração entre o problema matemático e a história mostrou-se uma atividade desafiadora e complexa.

De modo geral, observou-se que grande parte dos alunos, ao realizar as atividades, inicialmente, efetuavam apenas uma única leitura do problema e não utilizavam estratégias, mesmo conhecendo algumas técnicas, como por exemplo, a técnica do grifo aplicada durante as aulas de OE e não faziam uso durante as aulas de matemática. Uma das possíveis causas que contribui para tal quadro é a falta de atividades que propiciem a aproximação das diferentes disciplinas.

As atividades que versavam sobre problemas considerados convencionais obtiveram melhores resultados, exceto na primeira fase e, um dos possíveis fatores deve-se ao fato das práticas pedagógicas estarem voltadas, na maioria das vezes, para esse tipo de problema.

Os registros analisados apontam que, grande parte dos alunos não estão habituados a trabalhar com diferentes tipos de problemas (problemas não convencionais), do mesmo modo, não se constitui uma prática comum em sala de aula o processo de reformulação, de criação do problema ou de parte dele, para alguns, essa prática nunca foi vivenciada ao

longo de sua trajetória acadêmica. Esse quadro possivelmente contribuiu para que eles apresentassem dificuldade nas atividades que abordavam o processo de criação.

As atividades desenvolvidas possibilitaram o contato com diferentes tipos de problema ampliando o raciocínio lógico e o processo de resolução. Observou-se que o registro utilizado no processo de planejamento da solução apresentou um aumento significativo durante o desenvolvimento das atividades.

Realizando a análise, tanto dos registros dos alunos quanto do diário de campo, verificou-se que eles descrevem sucintamente a forma como pensaram para resolver o problema proposto, utilizam o grifo das informações mais relevantes e anotam os principais dados numéricos apresentados, constituindo indícios de reflexões de ordem metacognitiva.

Em suma, todas as atividades realizadas durante as três fases de aplicação da pesquisa certamente contribuíram tanto para a construção de uma relação mais proximal entre a matemática e a língua materna, quanto para a evolução no processo de Resolução de Problemas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aprendizagem de Matemática deve ir além das tarefas rotineiras calcadas em práticas tradicionais em sala de aula devem-se explorar tanto os diversos tipos de problemas quanto as diferentes metodologias que possibilitem o desenvolvimento dos processos cognitivos e metacognitivos objetivando a construção da autonomia do aluno.

Para essa tarefa, optamos por adotar o uso da Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas como metodologia que propicia uma integração entre a Matemática e a Língua Materna, explora os diferentes tipos de problemas, incentiva a formulação de problemas ou de parte dele, além de favorecer o progresso dos processos cognitivos e metacognitivos.

Essa pesquisa possibilitou a reflexão sobre a prática educativa, mas especificamente sobre resolução de problemas nas aulas de matemática. Essa observação nos permitiu visualizar algumas mudanças, como por exemplo, o papel de mediador que o professor precisa assumir, agindo junto aos alunos, valorizando o avanço de cada um, favorecendo todas as possíveis interações em sala de aula e refletindo sobre o fazer pedagógico no contexto de professor-pesquisador de sua prática.

Nesse processo, o uso da Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas a alunos do Ensino Médio se mostrou eficaz, pois ampliou o contato com diferentes tipos de problemas, promoveu uma aproximação entre a Matemática e a Língua Materna e possibilitou a inicialização de reflexões de ordem metacognitiva.

Certamente, trabalhar com diferentes tipos de problemas matemáticos consiste em uma prática que favorece a aprendizagem, no entanto, quando limitamos os conteúdos e as habilidades a serem desenvolvidas, como foi o caso dessa pesquisa, em que a coordenação estipulou os conteúdos de acordo com as defasagens apresentadas pelos alunos nos bimestres anteriores, essa condição exigiu que fossem realizadas algumas adaptações, portanto em alguns tópicos não foi possível ampliar ou variar os tipos de problemas.

A criação de problemas possibilitou que os alunos explorassem a criatividade e ampliassem o conhecimento no processo de resolução de problemas, uma vez que formular um problema ou parte dele contribui para o processo de resolução.

Ressalta-se que o processo de criação de problemas constitui um grande desafio para os professores e alunos, visto que essa não é uma prática recorrente no ensino de matemática.

É importante destacar que, em algumas das atividades da fase de aplicação, observamos que poderíamos ter disponibilizado uma comanda mais clara, como também poderíamos ter disponibilizado mais atividades que favorecessem a criação de problemas.

Ao longo do processo de formulação dos problemas-conto, destacamos a grande importância da interdisciplinaridade ponte entre as duas disciplinas, ampliando para o aluno a capacidade de compreensão para ambas as linguagens.

Embora não seja foco desta pesquisa, ressalta-se a importância da exploração do problema no momento de correção coletiva, visto que, esta atividade além de favorecer o diálogo durante as aulas de matemática, amplia a compreensão dos termos tanto da Linguagem Matemática, quanto da Língua Materna, aprimorando assim a habilidade de argumentação do aluno.

Outro ponto que também não foi focalizado neste trabalho, mas tornou-se de grande relevância foi o uso da ferramenta de compartilhamento *Google Drive* que se mostrou eficaz como suporte na criação e edição do problema-conto.

Com o propósito de contribuir com o ensino e a aprendizagem em Matemática e propiciar futuras reflexões e discussões, esta pesquisa disponibiliza a sequência didática e os problemas-conto formulados que atenderam aos critérios estabelecidos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. O processo de ensino - aprendizado - avaliação de matemática através da resolução de problemas no contexto da formação inicial do professor de matemática. 2014. Tese - (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 1999.

CARRASCO, Lucia Helena Marques. Leitura e escrita na matemática. IN: Iara C.B et al.(orgs). **Ler e escrever: um compromisso de todas as áreas**, 4 ed. Porto Alegre: editora da Universidade /UFRGS, 2001 p.175-189.

CHAHON, Marcelo. Metacognição e resolução de problemas aritméticos verbais: teoria e implicações pedagógicas. **Revista do Departamento de Psicologia da UFF** V.18, n. 2, p. 163-176. Jul/Dez. 2006. Aplicação de prática metacognitiva no ensino de matemática. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rdpsi/v18n2/v18n2a12.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2016.

CHICA, Cristiane H. Por que formular problemas? In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. – Porto Alegre: Artmed Editora, 2001,. Cap. 8. p. 151-173.

DANTE, Luiz. Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

_____. **Matemática: contexto & aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. V. 2.

DAVIS, Cláudia; NUNES, Marina Muniz Rosa; NUNES, Cesar Augusto Amaral. Metacognição e sucesso escolar: articulando teoria e prática. **Caderno de Pesquisa** [online]. 2005, V. 35, n.125, p. 205-230.

DINIZ, Maria Ignez. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 4. p. 88-98.

FERRAZ, Ana Paula do Carmo Marcheti; BELHOT, Renato Vairo. Taxonomia de Bloom: Revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição dos objetivos instrucionais. **Gestão & Produção**, São Carlos, V. 17, n. 2, p. 421-

431, 2010. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2010000200015> >. Acesso em: 24 set. 2016.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis; CARDOSO, Cleusa de Abreu. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática e Matemática para ler o texto. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandim (org). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GALHARDI, Antonio César; AZEVEDO, Marília Macorin de. Avaliações de aprendizagem: o uso da taxonomia de Bloom. Anais do VII Workshop Pós-graduação e Pesquisa do Centro Paula Souza, São Paulo, V. 1, n. 1, p.237-247, 2013.

GONTIJO, Cleyton Hercules. Resolução e formulação de problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em matemática. In: SIPEMAT, 2006, Recife. Anais Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006.

_____. Criatividade em Matemática: identificação e promoção de talentos criativos. In: **Educação. Revista do Centro de Educação**, V. 32, n. 2, p. 481-494, 2007.

JUSTULIN, Andressa Maria. Um delineamento dos artigos em resolução de problemas no Brasil a partir de periódicos. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**. [S.l.], V. 18, n. 2, set. 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view>. Acesso em: 25 ago. 2017.

LEIKIN, Roza. Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. **Psychological Test and Assessment Modeling**, Lengerich, Germany, V. 55, n. 4, p. 385 - 400, 2013.

LEITE, Eliana Alves Pereira; DARSIE, Marta Maria Pontin. Implicações da metacognição no processo de aprendizagem da matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, V. 5, n. 2, p. 179-191, nov. 2011. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em: 21 jul. 2016.

LOCATELLI, Solange Wagner. **Tópicos de Metacognição: para aprender e ensinar melhor**. 1. ed. Curitiba, Appris, 2014.

LORENSATTI, Edi Jussara Candido. Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Conjectura**, Caxias do Sul, V.14, n. 2, p. 89-99 maio/ago. 2009.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MAYER, Richard E. Rote Versus Meaningful Learning. **Theory Into Practice**, [s.l.], V. 41, n. 4, p.226-232, nov. 2002. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1207/s15430421tip4104_4. Acesso em 12 jan. 2016.

MEDEIROS, Katia Maria. O contrato didactico e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, V. n. 9, p. 32-39, 2001.

MEDEIROS, Katia Maria. A comunicação na formação inicial de professores de Matemática: concepções e práticas de explicação na sala de aula (Tese de doutoramento, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa), Lisboa, 2010.

MEDEIROS, Katia Maria; SANTIAGO, Misleide Silva. **Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: explicitando o intertexto**. Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática (XXIV SIEM). Braga: APM & CIED da Universidade de Minho, 2013.

MENEZES, Luís. Matemática, linguagem e comunicação. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1999, Portimão. Atas do encontro, Portimão, 1999. Disponível em: < http://www.ipv.pt/millennium/20_etc3.htm>. Acesso em 03 jan. 2016.

_____. Matemática, linguagem e comunicação. **Revista Millennium**, Instituto Politécnico de Viseu, n. 20, out. de 2000. Disponível em: http://www.ipv.pt/millennium/20_ect3.htm. Acesso em: 9 abr. 2016.

MOREIRA, Darlinda. Educação matemática e comunicação: uma abordagem no 1º ciclo. **Educação e Matemática**, n. 65, p. 27-32, 2001.

OCDE, Assessing Scientific Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA, 2006. Disponível em <<http://www.oecd.org/edu/school/assessingscientificreadingand-mathematicalliteracyaframeworkforpisa2006.htm>>. Acesso em 30 ago. 2016.

OLIVEIRA, Nanci. Linguagem, comunicação e matemática. **Revista de Educação**. V. 10, n. 10, 2007. Disponível em: <http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/educ/article/view/2146/2043>>. Acesso em: 24 nov. 2016.

ONUICHIC, Lourdes De La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP p. 199-218, 1999.

ONUICHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**. V. 55, p. 1-19, 2009.

ONUICHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema - Mathematics**

Education Bulletin, V. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/72994>>. Acesso em 20 jul. 2016.

PINHEIRO, Sandra. *A Criatividade na Resolução e Formulação de Problemas: Uma experiência didática numa turma do 5º ano de escolaridade*. (Dissertação de Mestrado). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2013.

PEHKONEN, Erkki. The state-of-art in mathematical creativity. **International Reviews on Mathematical Education**. Disponível em: <http://www.fiz-karlsruhe.de/fix/publications/zdm/adm97>. Acesso em: 15 jul. 2017.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, Juan Ignacio. **A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

PUPIN, Roselaine Cristina. **Habilidades metacognitivas em Matemática: Desenvolvimento por meio de problemas aritméticos verbais com história no ambiente lúdico de aprendizagem de Realidade Suplementar**. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

RIBEIRO, Sandra Catarina da Costa. **A Criatividade na Resolução e formação de problemas: Uma Experiência didática numa turma do 5º**. 2013. 217 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Especialidade em Matemática e das Ciências, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, 2013.

RIBEIRO, Célia. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, [s.l.], V. 16, n. 1, p.109-116, 2003.UNIFE SP (SciELO). Disponível em: <[doi:10.1590/s0102-7972200300010001](https://doi.org/10.1590/s0102-7972200300010001)>. Acesso em: 20 dez. 2017.

ROMERO, Danielle D'Avila. **O ensino da Matemática através da resolução de problemas**. Programa de Pós-graduação Lato Sensu em Psicopedagogia Clínica e Institucional da Universidade Gama Filho, 2007. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2007/anaisEvento/arquivos/CI-238-14.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2016.

ROSA, Cleci Teresinha Werner da. *A metacognição e as atividades experimentais no ensino de Física* Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, 2011.

SAVIANI, Dermeval. **História das idéias pedagógicas no Brasil** Campinas: Autores Associados, 2007.

SÃO PAULO (Estado) Caderno do aluno, (Matemática). São Paulo: IMESP, 2014.

_____. Diretrizes do Programa Ensino Integral. São Paulo: SEE, s.d. Disponível em <<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/342.pdf>> Acesso em: 22 ago. 2016.

_____. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SEE, 2010.

_____. Secretaria de Estado da Educação. **Boletim da escola IDESP**, 2016. Disponível em: <<http://idesp.edunet.sp.gov.br/Arquivos2016/014230.pdf>> Acesso em: 10 fev. 2016

SCHASTAI, Marta Burda; PEDROSO, Sandra Mara Dias. A resolução de problemas numa perspectiva metodológica. **Dia a dia Educação PDE**, 2010. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1573-8.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2016.

SILVA, Mirian Raquel Alves. A Formulação e Resolução de Problemas no Estágio Supervisionado: Reflexões a partir da Prática e da Formação Inicial. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2013.

SILVER, Edward A. On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, V. 14, n. 1, p. 19 - 28, fev. 1994. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40248099>. Acesso em: 15 fev. 2017.

SILVER, Edward A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. **Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik**, [s.l.], V. 29, n. 3, p.75-80, 1997. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-997-0003-x>. Acesso em: 04 jul. 2016.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, V. 13, n. 14, p. 66-91, 2000. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>. Acesso em: 25 ago. 2016.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOLÉ, Isabel. **Estratégias de leitura**. Porto alegre: Artmed, 1998.

SOUZA, Samile Alexandre. **A Formulação e Resolução de Problemas Geométricos com base em sólidos geométricos**. 2016. Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campina Grande, 2016.

STANCANELLI, Renata. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler, escrever e resolver proble-**

mas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 6. p.103-120.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 79. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

THE ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT. *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. Disponível em <http://www.oecd.org/edu/school/assessingscientificreadingandmathematicalliteracya-frameworkforpisa2006.htm>>. Acesso em: 30 ago.2016.

TOBIAS, Sigmund; EVERSON, Howard. Knowing what you know and what you don't: further research on metacognitive knowledge monitoring. College Board **Research Report, 3**, College Entrance Examination Board: New York-USA, 2002.

VALE, Isabel. As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. **Interações** V.20 p. 181- 207, 2012. Acesso em: 15 dez. 2016.

APÊNDICE A – Avaliação Diagnóstica (Teste).

Nome: _____ n° _____ 2º Ano _____

Esse teste trata das habilidades desenvolvidas durante as aulas de nivelamento da disciplina de Matemática realizadas no 1º Bimestre. Leia-o com atenção e resolva as questões.

- 1) Na figura abaixo, a figura B é uma ampliação da figura A.

Para esta transformação podemos afirmar que:

- a) O perímetro de B se manteve o mesmo de A e os ângulos internos correspondentes dobraram de valor.
- b) O perímetro de B passou a ser o triplo do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- c) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteraram.
- d) O perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes também dobraram de valor.

Descreva abaixo como você pensou para apontar uma das alternativas.

- 2) A parede de uma escola da cidade de São Paulo, com formato retangular, tem 4 m de comprimento e 3 m de altura. A diretora faz a manutenção uma vez ao ano. Neste ano, ela quer pintá-la utilizando duas cores de tinta acrílica: cinza e branca. A cinza será utilizada ao longo de todo seu comprimento, mas até a altura de 2 m; a branca cobrirá o restante da parede. A medida da área, em m^2 , a ser pintada de branco é:

- a) 3 b) 4 c) 6 d) 8

3) Monte uma pirâmide de base quadrada usando os 5 triângulos abaixo.

Registre como você desenvolveu:

4) Observe as figuras abaixo.

Essa figura apresenta um cubo (sólido) e sua planificação. Perceba que a planificação compõe-se de 6 quadrados iguais. Considere agora as 4 figuras abaixo também compostas de 6 quadrados iguais.

Aponte a alternativa que completa corretamente a seguinte frase:

É possível construir um cubo com a planificação

- a) figuras 1 e 2, apenas. b) das figuras 3 e 4, apenas.
c) da figura 1, apenas. d) de todas as figuras.

- 5) As hipotenusas de quatro triângulos retângulos isósceles coincidem com os lados de um quadrado, de cor branca, como indica a figura a seguir.

Se os lados desse quadrado medem 4 cm, a soma das áreas dos triângulos coloridos é igual a:

Descreva como você pensou para realizar a atividade.

APÊNCIDE B – Atividades de Nivelamento

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO 1

- 1) A figura a seguir ilustra um arco AB de comprimento $\frac{4\pi}{9}$ radianos. Qual seria sua medida em graus?

- 2) A figura a seguir ilustra um arco AB de comprimento $\frac{3\pi}{9}$ radianos, então a medida em graus do ângulo central AOB, é de:

- a) 18,75
b) 37,50
c) 75,00
d) 60,00
- 3) Determine o ângulo, em radianos, em cada item.

- 4) Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de 45 graus contido em uma circunferência de 2 cm de raio?

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO 2

- 1) Dado o ciclo trigonométrico represente o arco correspondente a um radiano.

- 2) Represente no ciclo trigonométrico abaixo um ângulo que possui o valor do seno igual a $\frac{1}{2}$.

- 3) Qual ângulo possui o valor do cosseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- 4) Dentre as figuras apresentadas abaixo colorir apenas a que corresponda a um radiano.

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO 3

1) Dado o gráfico a seguir.

A função trigonométrica que representa este gráfico será:

- a) $y = \cos x$ b) $y = 2\sin x$ c) $y = \cos 2x$ d) $y = \sin 2x$

2) Dentre as figuras a seguir, aquela que representa o arco de um radiano é:

3) Qual das representações abaixo tem Período = 2π , Amplitude = 3 e a curva é uma função cosseno?

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO 4

- 1) O mapa-mundi, também conhecido como planisfério, é um mapa que representa o globo terrestre planificado. A linha equatorial divide o mapa-múndi em dois hemisférios (norte e sul), e o meridiano de Greenwich divide o mapa-múndi em outros dois hemisférios (oriental e ocidental). Juntos, a linha equatorial e o meridiano de Greenwich dividem o mapa-múndi em 4 quadrantes, como mostra a figura abaixo. Se fizermos uma analogia entre o mapa-múndi e a circunferência trigonométrica, poderemos dizer que a Ásia situa-se no 1º quadrante e a cidade de Moscou é um ponto do 1º quadrante, de modo que o “seno de Moscou” é um número positivo. (DANTE, 2014, p. 67)⁸

As cidades de Brasília, Nova York, Sydney e Tóquio estão respectivamente nos:

- a) 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.
 - b) 2º, 1º, 4º e 3º quadrantes.
 - c) 3º, 2º, 1º e 4º quadrantes.
 - d) 3º, 2º, 4º e 1º quadrantes.
 - e) 3º, 4º, 1º e 2º quadrantes.
- 2) De acordo com a analogia proposta no texto, seria correto dizer que:
- a) “seno de Brasília” é um número positivo.
 - b) “cosseno de Brasília” é um número positivo.
 - c) “tangente de Brasília” é um número positivo.
 - d) “cosseno de Nova York” é um número positivo.
 - e) “tangente de Nova York” é um número positivo.

⁸ DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

3) Observe na fotografia como as formas dos prédios são variadas. O prédio pintado em vermelho é monumento aos direitos humanos e tem a forma de uma pirâmide de 75m de altura, oca por dentro. A fachada é formada por um triângulo, em que dois dos lados desse triângulo medem 50m e 100m, e o ângulo entre eles é de 60° . O perímetro do triângulo, em metros, um numero compreendido entre:

- a) 200 e 220
- b) 220 e 240
- c) 240 e 260
- d) 260 e 280
- e) 280 e 300

4) (UNIFEI-MG) Um dos problemas mais antigos de que se tem registro na história da Matemática é o da divisão da circunferência em arcos de mesma medida. O grau teve sua origem por volta de 5.000 a.C. Acredita-se que seu surgimento se deu pela necessidade da contagem de tempo. Analisando os números do mostrador de um relógio, colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, percebe-se que cada uma das partes mede 30° . Dessa forma, calcule o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando 1h40min.

- a) 120°
- b) 90°
- c) 150°
- d) 135°
- e) 180°

APÊNDICE C – Formulação de problemas e de partes dele

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO

Criando uma pergunta a partir de um problema

Utilize as questões 1 e 2 da AAP para reformular ou criar uma pergunta.

Questão 1

A representação de uma matriz E é dada pela expressão $E = (e_{ij})_{2 \times 2}$. Os elementos e_{ij} de E são expressos algebricamente por $e_{ij} = i^2 - 2j$.

A matriz que corresponde a esta lei de formação é

$$(A) \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B) \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(C) \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(D) \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Fonte: AAP, (2016)

Questão 2

Uma matriz A pode ser representada algebricamente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e seus elementos a_{ij} podem ser representados por expressões algébricas quando

$$\begin{cases} i = j \\ i \neq j \end{cases}$$

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

A representação algébrica dos elementos da matriz A é

$$(A) \quad a_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{se } i = j \\ 2i + j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(B) \quad a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i = j \\ 3i + j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(C) \quad a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i = j \\ 3i - j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$(D) \quad a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i = j \\ 2i - j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Fonte: AAP, (2016)

ATIVIDADE DE NIVELAMENTO

Criando um problema a partir de uma pergunta

Elabore um problema a partir da pergunta apresentada.

- ✓ Qual matriz representa a situação?

APÊNDICE D – Conto de Malba Tahan (adaptado) para a atividade de elaboração do problema-conto

Onde é narrada e singular aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos por três árabes.

Malba Tahan

Nesta passagem, Beremiz – o homem que calculava – e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam furiosos:

- Não pode ser!
- Isto é um roubo!
- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmão – esclareceu o mais velho – e recebemos como heranças esses 35 camelos. Segundo vontade de nosso pai devo receber a metade, o meu irmão Hamed uma terça parte e o mais moço, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos. Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que a mesma não é exata.

- É muito simples – falou o Homem que Calculava. Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que junte aos 35 camelos da herança este belo animal, pertencente a meu amigo de jornada, que nos trouxe até aqui.

E, assim foi feito.

- Agora – disse Beremiz – de posse dos 36 camelos, farei a divisão justa e exata.

Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber a metade de 35, ou seja, 17, 5. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

Por fim, disse ao mais novo:

- Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4. Teu lucro foi igualmente notável.

E, concluiu com segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo, e 4 ao terceiro, o que dá um resultado $(18+12+4)$ de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro, cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

(Disponível em <<https://www.em.com.br>> Acesso em: 25 ago. 2016)

APÊNDICE E– Problema-conto formulado pela professora-pesquisadora

Doze alunos de dois times de vôlei da 2ª série do Ensino Médio concorrem ao sorteio de 3 celulares. Todos receberam um número para participar do sorteio. Sabendo que desses 12 alunos, 4 já possuem celular, qual a probabilidade ser sorteado um aluno que ainda não tenha celular?

Problema-Conto

Tales, um rapaz de 16 anos, aluno da 2ª série do Ensino Médio acabara de perder o celular. Metade de sua vida foi junto com o aparelho. Nunca seu pai lhe daria outro. Afinal, quando ganhou o celular, o aviso foi claro:

- Tenha cuidado. Se perder, não ganha outro.

O que fazer? Trabalhar para comprar outro? Impossível! Não sabia fazer nada e passava o dia todo na escola. Encontrar o celular perdido? Não, probabilidade muito pequena. Usar o celular do irmão mais velho em parceria? Não, probabilidade nula. Fazer uma vaquinha online para comprar outro? Ridículo! Nunca lhe dariam dinheiro.

Desanimado, já ia se conformando com a situação, quando ficou sabendo que, no final dos Jogos da Primavera, iriam ser sorteados 3 celulares para o primeiro e segundo lugar do torneio de vôlei. Sorte sua! Os dois times eram da 2ª série e ele estava no time vencedor! À noite, teve sono agitado. Quando acordou, lembrou que poderia calcular sua chance de ganhar o celular.

Tales pensou: Se os participantes são 12 e 4 deles que já têm celular não podem concorrer, qual será a probabilidade de eu ser sorteado no terceiro sorteio?

Resposta

Após os cálculos, ficou muito animado pois suas chances eram de _____%.

APÊNDICE F – Conto de Ian Stewart (adaptado) para atividade de elaboração do problema-conto

PREÂMBULO

Ian Stewart, autor do livro “**Os mistérios matemáticos do Professor Stewart**”, criou dois personagens, Hemlock Soames e Dr. John Watsup, calcados no famoso detetive Sherlock Holmes e seu assistente, o Dr. John H. Watson, criados por Sir Arthur Conan Doyle.

Soames e Watsup moram em frente à casa de Holmes e Watson e resolvem os casos que a famosa dupla de Conan Doyle rejeita ou não consegue resolver. Os casos sempre envolvem mistérios matemáticos.

No segundo encontro dos dois personagens, eles se deparam com o caso de um roubo da coleção de adagas cerimoniais al-gebrãs, pertencentes a Watsup. O texto que segue foi adaptado do conto **O roubo incidente das meias verdes**, que envolve um problema de combinação, cuja resolução leva à identificação do ladrão das adagas.

O ~~roubo~~ incidente das meias verdes

Ian Stewart

Baker Street era uma rua de Londres sossegada e elegante. No número 221B, morava o famoso detetive Sherlock Holmes. Do outro lado, no número 222B, morava outro detetive, Hemlock Soames, que, naquela agradável tarde de primavera, conversava com Watsup.

Perspicaz, Soames percebeu que Watsup tinha um problema que procurava esconder:

- Assim que você entrou na sala, eu instintivamente já estava ciente de que procurava a minha ajuda. Você tentou ocultar, mas ~~que~~ o vi na sua expressão e na sua postura, disse Soames.

- Você tem razão. Trata-se de um assalto. O caso aconteceu no início do ano e logo busquei assistência profissional do seu vizinho do outro lado da rua. Depois de um mês sem fazer absolutamente nenhum progresso, ele declarou que o assunto era simples demais para despertar seus poderosos talentos e me apontou a porta de saída. Assim, pensei que você poderia resolver o caso.

- Conte-me tudo, disse Soames.

- Minha casa foi arrombada e assaltada e a minha inestimável coleção de adagas cerimoniais al-gebrãs, a maior parte do meu patrimônio, foi roubada.

- Havia alguma pista?

- Só uma. Uma meia verde deixada na cena do crime.

- Que tom de verde? Que material? Algodão? Lã?

continua

continua

- Eu não sei, Soames.

- Essas coisas importam, Watsup. Mais de um homem já foi enforcado por causa da cor precisa da tintura numa única fibra de lã cerzida. Ou escapou do laço por falta de tal evidência.

Concordando e absorvendo a lição, Watsup disse:

- Toda a informação que tenho foi fornecida pela polícia. Ela restringiu a responsabilidade pelo crime a três homens: Victor Verd, Markus Maroon e Benard Blanc.

- Os suspeitos habituais, disse Soames. Eles agem na área de Boswell Street.

Watsup continuou:

- Um desses três decididamente era o criminoso. A polícia fez averiguações e descobriu que cada um deles veste habitualmente paletó e calças, como a maioria dos homens, e também meias. Aparentemente era hábito de cada um deles vestir-se exatamente com roupas cujas cores eram exatamente as mesmas em todas as ocasiões. Na cena do crime, foram encontrados fios, que indicavam que o ladrão usara uma das meias para abafar o som do vidro da janela que ele quebrou para entrar. A meia era verde.

- Mais alguma informação? indagou Soames.

- Testemunhas confirmaram que cada um dos três homens usava um paletó de cada cor, um par de calças de cada cor e um par de meias combinando de cada cor. Nenhum deles usava duas ou mais peças de roupa da mesma cor.

- E você deduziu alguma coisa como consequência dessa informação?

- Cada um dos suspeitos deve ter vestido exatamente uma peça da mesma cor que seu nome, respondeu Watsup imediatamente. Se deduzirmos a cor, acharemos o criminoso.

Watsup continuou:

- Cheguei à conclusão de que a informação disponível era insuficiente para determinar o criminoso. A polícia acabou admitindo isso, então sugeri que eles deviam procurar evidência adicional.

- E eles acharam alguma?

- Depois que forneci alguns detalhes mais específicos, acharam.

Então, Watsup entregou a Soames uma folha de papel com as seguintes anotações:

1. Nenhum homem usa duas ou mais peças de roupas da mesma cor.
2. Nenhum homem usa paletó com a cor do próprio nome.
3. A cor da calça dos homens corresponde ao nome
4. Quem usa paletó branco não usa meias verdes.

Continua

conclusão

- Se conseguirmos determinar o ladrão, então a polícia poderá conseguir um mandado de busca. Com sorte, encontrarão minhas adagas roubadas, o que representaria uma incontestável prova de culpa.

Após realizar os cálculos, considerando as pistas que foram entregues por Watsup, eles desvendaram o mistério e apresentaram o nome do ladrão à polícia. Com o mandado de busca em mãos os policiais foram à casa de _____ e lá encontraram as adagas. Então, imediatamente realizaram a prisão.

APÊNDICE G – Termo de consentimento de participação do aluno

Você está sendo convidado (a) para participar, como voluntário, em uma pesquisa. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa, você não será penalizado (a) de forma alguma.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Título do Projeto: UMA ABORDAGEM SOBRE PERSPECTIVA METODOLÓGICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

Pesquisador Responsável: Juliana Aparecida de Freitas

- ♦ A presente pesquisa destina-se a investigar o uso da Perspectiva Metodologia da Resolução de Problemas a alunos do Ensino Médio.
- ♦ Essa pesquisa não apresenta riscos nem prejuízos à saúde ao aluno. Propicia que ele amplie seus conhecimentos em resolução de problemas, desenvolva seus processos cognitivos e metacognitivos.
- ♦ Serão realizadas diversas atividades, durante as aulas de Matemática e Língua portuguesa no período de Maio a Dezembro de 2016.

Nome e Assinatura do pesquisador _____

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu, _____, RG _____, abaixo assinado, concordo em participar do estudo como sujeito. Fui devidamente informado e esclarecido pela pesquisadora Juliana Aparecida de Freitas sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação.

Tremembé _____ / _____ / 2016

Nome do Participante: _____

Assinatura do sujeito ou responsável: _____

APÊNDICE H – Quadro de avaliação do problema-conto

ITENS / DESCRITORES	ANÁLISE DO GRUPO		ANÁLISE DO PROFESSOR	
	OK	PODE MELHORAR. COMO?	S/N/P	JUSTIFICATIVA
O conto está adequado à proposta: criar um conto inserindo um problema matemático convencional sobre probabilidade e/ou análise combinatória				
O problema matemático está integrado ao enredo de forma clara e objetiva				
A resolução do problema matemático é necessária para a resolução do conflito				
O texto apresenta as características do conto: a) Narrador em 1ª pessoa ou 3ª pessoa. b) Situação inicial c) Conflito (desenvolvimento) d) Clímax e) Desfecho				
O conto desperta o interesse do leitor				
O final do conto é surpreendente				

continua

conclusão

ITENS / DESCRITORES	ANÁLISE DO GRUPO		ANÁLISE DO PROFESSOR	
O título está adequado ao texto?				
Aspectos Gramaticais a) Pontuação b) Ortografia c) Acentuação Gráfica d) Concordância verbal/nominal				
Coesão textual (uso de conectivos). Os recursos coesivos são funcionais, articulando bem o texto?				
Coerência				

ANEXO A – Termo de consentimento da escola

 GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
 SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
 DIRETORIA DE ENSINO – REGIÃO PINDAMONHANGABA
 EE Manuel Cabral
 Praça da República, s/nº - Centro – Tremembé – SP – Tel. (12) 3672-5075.

Termo de Consentimento

Eu, Fatima Maria Moreira Fraga, abaixo assinado, responsável pela EE Manuel Cabral, autorizo a realização do estudo, a ser conduzido pela pesquisadora Juliana Aparecida de Freitas.

Fui informada pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como as atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas co-responsabilidades como instituição co-participante do presente projeto de pesquisa e do seu compromisso no resguardo da segurança e bem estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem estar.

Tremembé, 24 de Maio de 2016.

Fátima Maria Moreira Fraga-
 RG 16.950 479-7
 Direto de Escola

ANEXO B - Atividade para aula de Língua Portuguesa

Conto Bruxas não existem

Moacyr Scliar

Quando eu era garoto, acreditava em bruxas, mulheres malvadas que passavam o tempo todo maquinando coisas perversas. Os meus amigos também acreditavam nisso. A prova para nós era uma mulher muito velha, uma solteirona que morava numa casinha caindo aos pedaços no fim de nossa rua. Seu nome era Ana Custódio, mas nós só a chamávamos de "bruxa".

Era muito feia, ela; gorda, enorme, os cabelos pareciam palha, o nariz era comprido, ela tinha uma enorme verruga no queixo. E estava sempre falando sozinha. Nunca tínhamos entrado na casa, mas tínhamos a certeza de que, se fizessemos isso, nós a encontraríamos preparando venenos num grande caldeirão.

Nossa diversão predileta era incomodá-la. Volta e meia invadíamos o pequeno pátio para dali roubar frutas e quando, por acaso, a velha saía à rua para fazer compras no pequeno armazém ali perto, corríamos atrás dela gritando "bruxa, bruxa!".

Um dia encontramos, no meio da rua, um bode morto. A quem pertencera esse animal nós não sabíamos, mas logo descobrimos o que fazer com ele: jogá-lo na casa da bruxa. O que seria fácil. Ao contrário do que sempre acontecia, naquela manhã, e talvez por esquecimento, ela deixara aberta a janela da frente. Sob comando do João Pedro, que era o nosso líder, levantamos o bicho, que era grande e pesava bastante, e com muito esforço nós o levamos até a janela. Tentamos empurrá-lo para dentro, mas aí os chifres ficaram presos na cortina.

- Vamos logo - gritava o João Pedro -, antes que a bruxa apareça. E ela apareceu. No momento exato em que, finalmente, conseguíamos introduzir o bode pela janela, a porta se abriu e ali estava ela, a bruxa, empunhando um cabo de vassoura. Rindo, saímos correndo. Eu, gordinho, era o último.

E então aconteceu. De repente, enfiei o pé num buraco e caí. De imediato senti uma dor terrível na perna e não tive dúvida: estava quebrada. Gemendo, tentei me levantar, mas não consegui. E a bruxa, caminhando com dificuldade, mas com o cabo de vassoura na mão, aproximava-se. Àquela altura a turma estava longe, ninguém poderia me ajudar. E a mulher sem dúvida descarregaria em mim sua fúria.

Em um momento, ela estava junto a mim, transtornada de raiva. Mas aí viu a minha perna, e instantaneamente mudou. Agachou-se junto a mim e começou a examiná-la com uma habilidade surpreendente. - Está quebrada - disse por fim. - Mas podemos dar um jeito. Não se preocupe, sei fazer isso. Fui enfermeira muitos anos, trabalhei em hospital. Confie em mim.

Dividiu o cabo de vassoura em três pedaços e com eles, e com seu cinto de pano, improvisou uma tala, imobilizando-me a perna. A dor diminuiu muito e, amparado nela, fui até minha casa. "Chame uma ambulância", disse a mulher à minha mãe. Sorri.

Tudo ficou bem. Levaram-me para o hospital, o médico engessou minha perna e em poucas semanas eu estava recuperado. Desde então, deixei de acreditar em bruxas. E tornei-me grande amigo de uma senhora que morava em minha rua, uma senhora muito boa que se chamava Ana Custódio.

(Disponível em <novaescola@novaescola.org.br> Acesso: 18 out. 2016)